ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΑΙ

ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΑΙ ΑΙ ΑΡΧΟΕΙΔΕΣΤΑΤΑΙ

Ἐκ τῶν τȢ̃ Μαθηματικωτάτȣ

ΙΩΑΝ. ΑΝΔΡ. ΣΕΓΝΕΡΟΥ

ΚΑΙ

ΣΥΓΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΟΥΣΙΩΝ

Φιλοπόνῳ μὲν Σπȣδῇ

ΕΥΓΕΝ. ΔΙΑΚ. ΤΟΥ ΒΟΥΛΓΑΡΕΩΣ

Φιλοτίμῳ δὲ δαπάνῃ

ΤΟΥ ΕΞΟΧΩΤΑΤΟΥ ΕΝ ΙΑΤΡΟΦΙΛΟΣΟΦΟΙΣ

ΚΥΡΙΟΥ

ΘΩΜΑ ΤΟΥ ΜΑΝΔΑΚΑΣΟΥ.

Γεωμετρίαν καὶ Ἀριθμητικὴν ἀστραβῆ τῆς ἀληθείας κανόνατις εἰπὼν, ȣ̓κ ἂν ἁμάρτοι τȢ̃ πρέποντος.

Συνέσ. πρὸς Παιόνιον.

Ἐν Λειψίᾳ τῆς Σαξονίας

ἐν τῇ Τυπογραφίᾳ τȢ̃ Βρειτκόπφ.

Ἔτει αψξζ.

~~[illegible]~~

- [illegible]

ΤΩ

ΥΨΗΛΟΤΑΤΩ ΚΑΙ ΕΥΣΕΒΕΣΤΑΤΩ

ΑΥΘΕΝΤΗ ΚΥΡΙΩ ΜΟΙ

ΚΥΡΙΩ

ΑΛΕΞΑΝΔΡΩ ΣΚΑΡΛΑΤΟΥ ΓΚΙΚΑ ΒΟΕΒΟΔΑ

ΤΩ ΜΕΓΑΛΟΠΡΕΠΕΣΤΑΤΩ ΗΓΕΜΟΝΙ ΠΑΣΗΣ ΟΥΓΚΡΟΒΛΑΧΙΑΣ.

Φορτικῶς μᾶλλον ἤπερ μοι δοκεῖ καὶ πικρῶς, ἢ ὀρθῶς ἐπεσκῶφθαι καὶ δικαίως, τὸ, πρὸς τοὺς ἐν ὑποσχέσει Φιλοσοφίας ἐπὶ θύρας τὰς τῶν ἐν ὑπεροχῇ καὶ δυνάμει προσιόντας, πάλαι ἐπιτοξευθέν. Καὶ οὐδὲ Ἀρίστιππος καλῶς, εἰμὴ ἄλλως ἐπὶ τῷ σκώμματι ἐνασεϊσάμενος· ὃς, τὸ εἰδέναι δῆθεν ὧν ἐπιδεεῖς εἰσὶν, ἐκείνοις ἐπητιάσατο. Φιλοσοφεῖν μὲν γὰρ ἐπαγγελλομένῳ, ἔπειτα πρὸς ἡδονὴν καὶ τὴν ἄλλην ῥαστώνην τοῦ βίου τὴν τοιαύτην ἀγαπήσαντι διατριβήν τε καὶ προσεδρείαν, κατ' αὐτὸ δὴ τοῦτο τὰ τῆς ὑποσχέσεως ἔρρειτε καὶ ὑπεξέστη, καὶ τὸ σχῆμα διέψευσται. Καὶ μάτην ἄρα, ἔνθα μηδὲ τὴν ἀρχὴν παριέναι φύσιν ἐστὶν ἔχον, τὸ θεσπέσιον χρῆμα, ὡς ἄρα καὶ παρὸν, διαβέβληται. Προαιρουμένης δὲ τὰ βέλτιστα καὶ λυσιτελέστατα, αὐτοῖς τ' ἐκείνοις τῶν δυναστευόντων οἷς ἂν συγγένοιτο, καὶ δι' αὐτῶν τοῖς ἄλλοις, οὐδεὶς εὐλόγως φιλοσοφίας καταιτιάσεται. Οὐ γὰρ οὖν, εἰμὴ καὶ ἐν γωνίᾳ που καθεῖρχθαι δεῖν αὐτὴν οἰήσεται ὁ τοιοῦτος, ἢ ἐν μυχοῖς ζῶσαν κατο-

ρωρύχ-

ϱωϱύχθαι. Καὶ τῇ μὲν ἀπαιδευσίᾳ καὶ ἀγϱοικίᾳ, ὁποίποτ' ἂν ἐθέλοι πόδας ἕρπειν, ἐπ' ἀδείας ἐξεῖναι· μηδὲν αὐτῷ διαφέρον, εἰ καθάπεϱ τῦ παρὰ τῷ Ἀϱάτῳ Διὸς,

. . . . . μεσαὶ καὶ ταύτης πᾶσαι μὲν ἀγυιαὶ,

Πᾶσαι δ' ἀνθϱώπων ἀγοϱαὶ, κτ. . . . .

τῇ δὲ, ὖτε εὐρεῖαν τινὰ, ὖτε λεπτὴν ἄλλην πάϱοδον εἰς τὸν βίον ἀπολελεῖφθαι· μονήϱη δ' οἵαν αὐτὴν καὶ μονότϱοπον, ἀφανῆτε καὶ ἄϊσον καὶ ἄπυστον λανθάνειν· καὶ τὶ ἄλλ' ἢ ἐξ ἀνθϱώπων γενέσθαι; τὴν ἄλλως ἐν ἐξόδοις ὑμνεῖσθαι ἀξιόχϱεων ὖσαν, καὶ ἐν πλατείαις παῤῥησίαν ἄγειν, καὶ ἐν πύλαις Δυναστῶν παρεδρεύειν, ὥσπεϱ ἀκύομεν. Εἴτι φασὶν ἐν ἐκείνοις τὰ Λόγια. Ἀλλ' ὅτι μὲν ὖτω περὶ τῆς Φιλοσοφίας καὶ τῶν ταύτης τϱοφίμων τινὲς ὑπειλήφασιν, οἷς ὐδὲ μετὸν αὐτῆς ὐδόλως, ὐδὲ μετεῖναι ὡς ἔοικεν ἄξιον, θαυμάζειν ὐ χϱή. Οὐδὲ γὰϱ, εἰ καὶ ὄμ-

 μα

μα Φαεινὸν ἡλίου, ὑπὸ γῆν εἰς τὸ διηνεκὲς καταδεδύσθαι, μηδὲν ἐδόκει διαφέρειν οἷς ὄμματ' οὐκ ἔνεστιν οὐδὲ νοῦς, θαυμάσαι τις ἄν. Ἡ δὲ Φιλοσοφία τῶν οὕτω γνώμης πέρι αὐτὴν ἐχόντων οὐδὲν προτιμῶσα, μᾶλλον δὲ καὶ τῆς ἀνοίας αὐτοὺς οἰκτείρουσα, καὶ Βασιλεῦσι πρόσεισι θαῤῥοῦντως, καὶ Δυνάσταις, καὶ Ἄρχουσι· τοῖς μὲν εὐπαῤῥησιάστως εἰ τύχοι προσομιλοῦσα, τοῖς δὲ εἰς δέον τὰ καθήκοντα ὑποβάλλουσα, τοῖς δὲ, καὶ εἴτι τῶν παρ' αὐτῇ χρησίμων τε καὶ καλῶν Φιλοπονηθείη, ἀνατιθεῖσα τοῦτο αὐτοῖς καὶ καθοσιοῦσα, ὡς ἱερὸν εἶναι σφίσι τὸν πάντα χρόνον διαμένον Ἀνάθημα. Καὶ πρὸς ποσὶν ὁ δῖος Ὄρνις ἀείποτε τοῖς τοῦ Ζηνός·

Μήτι ἐφεζομένη κράζῃ λακέρυζα κορώνη

μηδὲν ὅλως ἐπιστρεφόμενος. Ἡ μὲν οὖν οὕτω. ΣΥ δὲ ΗΓΕΜΟΝΩΝ ΚΡΑΤΙΣΤΕ

καὶ

καὶ ΜΕΓΑΛΟΠΡΕΠΕΣΤΑΤΕ ἀποδέξῃ δήπε καὶ τὸν ἄνδρα καὶ τὸν Ὄρνιν τε Θεε, τὸν αἴσιόνγε τὸ πτερὸν παρὰ ΣΕ ἰθύνοντα. Καὶ Φιλοσοφίαν εὖ οἶδ' ὅτι διασμενιῆ, τὴν εὐθύμως μὲν πρὸς τῷ ΣΩ Θρόνῳ πελάζεσαν, τῶν δὲ γνησιωτάτων αὐτῆς γεννημάτων, ἕντι τόδε τὸ χαριέστατόν ΣΟΙ προσάγεσαν, καὶ τῷ ΣΩ ΠΑΝΕΚΛΑΜΠΡΩ ΟΝΟΜΑΤΙ καταγλαΐσαι τετο καὶ καλλῦναι, καὶ σεμνότερόντε καὶ εὐπρεπέστερον ἀποφῆναι σπεδάζεσαν. Σπεδάζει γὰρ ἐχ ἑαυτῆς ἕνεκα μόνον· ἐδὲ γὰρ πάνυτι αὐτὴν τῆς παρ' ἀνθρώπων χρεὼ τιμῆς·

. . . . . Φρονέει δὲ τετιμῆσθαι Διὸς αἴσῃ.

μάλιστα δὲ τῶν ἐντευξομένων τῷδε τῷ παρ' αὐτῆς ΣΟΙ προσαγομένῳ Συγγράμματι. Οὕσπερ ἡλίκε δὴ τε ΠΡΟΣΤΑΤΟΥ τυχεῖν αὐτὸ κατηξίωται ἐννοήσαντας, καὶ ὀυδὲν ὅ,τι μὴ σεμνὸν, καὶ διαφερόντως τίμιον, καὶ καλὸν, καὶ συμφέρον τοῖς τηλικούτοις θέμις εἶναι δωροφορεῖσθαι καὶ ἀνατίθεσθαι ἢ δέον νομίσαντας καὶ πεπεισμένους, πλείονα μὲν εἰκὸς περὶ αὐτὸ ἐνδείξεσθαι τὴν σπουδήν τε καὶ προθυμίαν, ἀντιστάσιον δὲ τῇ προθυμίᾳ καὶ τῇ σπουδῇ καρπώσεσθαι τὴν ὠφέλειαν· τὰ γάρτοι καλὰ, ἀεὶ μὲν καθ᾽ ἑαυτὰ καλὰ, μηδαμῇ τῆς φύσεως ἐξιστάμενα· ἐπειδὰν δὲ καὶ τῆς παρὰ τῶν ἐν δόξῃ καὶ δυνάμει καθεστώτων ἀποδοχῆς ἀξιωθῇ καὶ ἐπισυστάσεως, καλλιόνάπως κρίνεσθαι φιλεῖ· καὶ τὸ περισπούδαστον προσκτησάμενα, εἰς χρῆσιν ἕλκει τοὺς πλείονας· τῇ δὲ χρήσει ἡ ὄνησις ἐθέλει συμπαρακολουθεῖν· ὃ τὸ μάλιστα ἐστὶν, ὑπὸ Φιλοσοφίας παρ᾽ ἀνθρώποις ἐπιδημούσης, σκοπούμενον. Τοῦτο μὲν οὖν ὧδε πρὸς τὸ παρὸν ὄναιτό ΣΟΥ

ἡ βελἡ βελτίςη Φιλοσοφία ΥΨΗΛΟΤΑΤΕ καὶ ΓΑΛΗΝΟΤΑΤΕ ΑΥΘΕΝΤΑ. Εὐπραγοῦσα δηλονότι παρὰ ΣΟΙ, καὶ ὑπὸ τῇ ΣΗ Προςασίᾳ σεμνυνομένη τε καὶ κυδαινομένη ἐν εὐδοκιμωτέρῳ τῷ χήματι. Καὶ μὲν δὴ, καὶ τοὺς ἰδίους ἑαυτῆς καρποὺς διὰ ΣΟΥ πολλοῖς ἐπισυνιςῶσα τε καὶ ἐπικοινουμένη, ὡς ἂν ᾖ τοῖς ἐξ αὐτῆς ὠφελεῖσθαι βουλομένοις μᾶλλον ὀνήσιμος. Ἡ δὲ παρὰ ταῦτα, καὶ ἐσμὸν προσέτι μυρίων ἀγαθῶν ἄλλων, ἀμφοῖν τοῖς Ἔθνεσιν, ἐξ ὧντε ἔφυς, τῶγε Ἡμετέρῳ φημὶ, ὧντε ἄρχειν ἔλαχες, τῷ τῶν γενναίων Οὐγκροβλάχων, παρὰ τῆς ΣΗΣ ΜΕΓΑΛΕΙΟΤΗΤΟΣ ἥκοντα, τὸν μὲν καθορῶσα γέγηθε καὶ φαιδρύνεται, τὸν δὲ καὶ προσημαίνει καὶ ἀπομαντεύεται. ΣΟΙ γὰρ ἀπὸ τοῦ πανευκλεεςάτου καθ' ἡμᾶς καὶ περιβοήτου τῶν ΓΚΙΚΑΔΩΝ ΓΕ-

 ΝΟΥΣ,

ΝΟΥΣ, διὰ τῆς χρυσῆς ἐκείνης τῷ ὄντι καὶ θεοπλέκτȣ σειρᾶς τῆς ἐκ τοσȣ́τωντε καὶ τηλικȣ́των ΗΓΕΜΟΝΩΝ ὁρμωμένῳ, ȣ̓χ ὅπως δι' ἀρετὴν Πατρῴαν ἤδη, καὶ Παππῴαν, καὶ Προπαππῴαν δὴ, καὶ ἔτι πρὸς, ὠφλισκάνετο τὰ τῆς παρελθȣ́σης ἐπὶ ΣΕ Δυναςείας, ἀλλὰ καὶ διὰ τὸ περιὸν τῶν ἐν ΣΟΙ πλεονεκτημάτων πλῆθος καὶ μέγεθος, καὶ ἀρετῆς ȣ̓χ ἧττον ἰδίας, ἢ προγονικῆς, γέρας ἔοικεν ἐπιβραβευθῆναι τὸ δικαιότατον. Τεκμήριον δὲ, ὅτι τȣ̃ πανευκλεῶς τε καὶ ἀξιαγάςως τήνδε τὴν Ἡγεμονίαν τὸ δεύτερον ἤδη ἰθύνοντος Ἀοιδίμȣ ΣΚΑΡΛΑΤΟΥ ΒΟΕΒΟΔΑ τȣ̃ ΣΟΥ ΠΑΤΡΟΣ, ἀπὸ τῆς ἐπικήρȣ ταύτης Ἀρχῆς, ἐπὶ Βασιλείαν ἄλλην μετακληθέντος ἀκήρατον καὶ αἰώνιον, πρὸς ΣΕ καίτοι πόῤῥω τῶν Βασιλείων ἀφεςῶτα, ὅθεν

ὡς

ὡς ἀπὸ πηγῶν αἱ Ἡγεμονίαι νάειν πεφύκασιν, ἀπὸ τῆς πρώτης αἱ δεύτεραι, πρὸς ΣΕ φημὶ τὸ σκῆπτρον τῆς διαδοχῆς περιῆλθε, τοῦ Βασιλέως ΣΕ καὶ κατὰ χώραν μένοντα προσησαμένου, ὡς τὰ μέγιστα οὕτω χαριεῖσθαι τῷ ὑπηκόῳ δεηθέντι νομίσαντος. Αὐτὸς γὰρ τῶν ἐκ τοῦ πρὶν ΗΓΕΜΟΝΕΥΣΑΝΤΟΣ φύντων οὐ μόνον γενέσει, ἀλλὰ καὶ ἀρετῇ ὁ πρῶτος καὶ ἄριστος γεγονὼς, ἐπὶ τὴν Ἀρχὴν προήχθης δημαίτητος, πρὶν ἢ σωμάτων δηλαδὴ, ψυχῶν τε καὶ καρδιῶν ἄρξας πρότερον. Καὶ τὸ μὲν ὑπήκοον ἅπαν ἐπὶ ΣΕ οὕτως αὐτίκα ἐπέβλεψεν·

ΣΟΥ γὰρ ἐπὶ γλώσσης γλυκερὴν χεύουσιν ἐέρσην·
αἱ Χάριτες·
ΣΟΥ δ' ἔπε' ἐκ στόματος ῥεῖ μείλιχα. Οἱ δέ τε λαοὶ
Πάντες ἐπὶ ΣΕ ἑώρων διακρίνοντα θέμιστας.

Βασι-

Βασιλεὺς δέ τοῖς συμφώνῳ καὶ ψυχῇ καὶ γνώμῃ, τὸν ὑφ' οὗ ἀρχθεῖεν αἰτησαμένοις, καὶ μάλα ἡδέως ἐπένευσε. Πρὸ δὲ τούτων Θεὸς δήπου τὰς μὲν τοῦ λαοῦ ψυχὰς εἰς συμφωνίαν συνῆγε, τὴν δὲ καρδίαν τοῦ Βασιλέως εἰς συγκατάθεσιν ἔκλινεν, εἰ τοῦ μὲν τὴν φωνὴν, φωνὴν εἶναι Κυρίου, τοῦ δὲ τὴν καρδίαν ἐν χειρὶ κεῖσθαι τοῦ Θεοῦ ὡμολόγηται. Καὶ ταύτῃ οὖν κατὰ θείαν μοῖραν προδήλως ἄνωθεν τοῦ κράτους εἰς ΣΕ περιήκοντος, ἀπὸ τῶν ἐπὶ τῷ ΠΑΤΡΙ δακρύων, ἐπὶ τὴν περὶ τὸν ΥΙΟΝ χαρμονὴν, ἐκ θείας μηχανῆς ἀτεχνῶς εἰπεῖν τὸ δρᾶμα μεθίστατο. Καὶ ὁ μὲν ἐπὶ τῆς Ἀρχῆς κατέλυε τὸν βίον ἐσθλῶς, ὁ δ' ἀντεισήγου, ὡς τοῖς ἴχνεσι τοῖς ἐκείνου ἐκ τοῦ προσεχοῦς παρακολουθήσων, καὶ τὸ λοιπὸν ἐκείνῳ ἐπικατορθώ-

σων,

σων, καὶ τὴν εὐδαιμονίαν τοῖς ἀρχομένοις ἐπισφραγιζόμενος. Ἅμα τε τῷ μὲν ἆθλον ἀρετῆς ἐντάφιον ὁ Θρόνος κατέστη, ΣΟΙ δὲ ἀρετῆς καὶ δόξης προοίμιον· ἧς ἐπὶ τὸ πέρας καὶ τὴν ἀκρότητα τίς ȣ̓ συνορᾷ ἐκθύμως ἐλαύνοντα, τὸν ἐκ πρώτης ἀφετηρίας ȣ̈τως εὐτυχȣ̃ς ὁρμησάμενον; Ἀλλὰ χωροίη σύμφωνον τοῖς προοιμίοις τὸ τέλος ΥΨΗΛΟΤΑΤΕ καὶ ΘΕΟΦΡΟΥΡΗΤΕ ΗΓΕΜΩΝ, καὶ κατευθύνοιτο διὰ πάσης ἀγαθῆς καὶ βȣλῆς καὶ πράξεως προβαῖνον ΣΟΥ τὸ ἀγώνισμα. Καὶ εἴης ἄχρι γήρως ἐπὶ τȣ̃ Ὑψηλȣ̃ Θρόνȣ ὑφ' ἧς τέταξαι προνοίας, ἐπ' εὐκληρίᾳ τῶν ὑπὸ ΣΟΥ ἀρχομένων στηριζόμενος, παρεδρευȣ́σης μὲν ΣΟΙ τῆς Θέμιδος, συνθακȣ́σης δὲ τῆς Δίκης, τȣ̃ δὲ Νόμȣ ἀεὶ συνόντος, καὶ τῆς ἐπὶ τȣ́-

των

ΠΡΟΣΦΩΝΗΣΙΣ.

των ἁπάντων ἐφόρϐ δίκην ἐπικαθημένης Φιλοσοφίας, παῤῥησίας παρὰ ΣΟΙ ἀπολαυϐσης, καὶ ϐδέντι μᾶλλον σεμνοτέρας ὑπὸ ΣΟΥ καθισαμένης, ἢ συντελϐσης ΣΟΙ εἰς σεμνότητα.

ΤΗΣ

ΥΜΕΤΕΡΑΣ ΘΕΟΣΕΒΕΣΤΑΤΗΣ ΥΨΗΛΟΤΗΤΟΣ

Ἐν Λειψίᾳ αψξζ.
Σεπτεμβρίϐ β.

ὑποκλινέστατος ἐλάχιστος δϐλος
ΕΥΓΕΝΙΟΣ Ὁ ΔΙΑΚΟΝΟΣ
Ὁ ΒΟΥΛΓΑΡΙΣ.

ΠΑΙΣΙΝ

ΠΑΙΣΙΝ ΕΛΛΗΝΩΝ
ΤΟΙΣ ΦΙΛΕΠΙΣΤΗΜΟΣΙΝ.

Τὴν ἐπὶ τὰ καθ' ἡμᾶς Φιλοσοφούμενα τοῖς ὁμογενέσι τῶν σπουδαστῶν ὁδοποιῆσαι ἅπαξ προελομένους, εἰκὸς ἦν εὐθὺς μετὰ τὰ Διαλεκτικὰ, καὶ τῶν Μαθηματικῶν καταβαλεῖν ἐπιχειρῆσαι Στοιχείων τὰ βασιμώτατα· τούτων γὰρ ἄνευ οὐδὲ πάλαι μὲν Φιλοσοφίας, οὐδὲ πρώτων αὐτῶν βατήρων θέμις ἦν ἐπιβαίνειν. Καὶ μαρτυρεῖ τῷ λεγομένῳ Ξενοκράτης μὲν, τὸν ὦσιν ἀγεωμετρήτοις παρ' αὐτὸν ἐπ' ἀκροάσει ἥκοντα μὴ προσιέμενος, καὶ Πλάτων ὁ ἐκείνου καθηγητὴς, τὰς Θύρας τῆς Ἀκαδημίας κατὰ τῶν τοιούτων ἐπιζυγώσας· τὰ νῦν δὲ, ὅτε οὐδὲ τὸ βραχύτατον, ὡς ἔπος εἰπεῖν, τῶν

ἐκ

ἐκ τῆς περὶ τὴν Φύσιν μάλιστα πραγματείας, ἐπιστημόνως οἷόντε καρποῦσθαι μελέτημα, ὃ μὴ πρὸς τὴν Μαθηματικὴν ἀκριβολογίαν ἀναφέρον εἴη τὰ ἄμματα, καὶ κομιδῇ τοῖς πᾶσιν ὁμολογεῖται ἀμήχανον.

Ἀλλ' ἐκθησομένῳ τοῖς Φιλοσοφίας θιασώταις τὴν οὕτως ἀναγκαίαν οὖσαν Στοιχείωσιν, ἐκεῖνο δὴ προσήκειν ἔδοξε πρὸ πάντων σκοπεῖν, ὅπως μοι κατὰ σκοπὸν προβήσεται τὸ ἐγχείρημα· οἷον δηλονότι τῶν Νεανίσκων τοῖς Φιλεπιστήμοσιν αὐταρκές τε ἔσεσθαι, καὶ πρὸς τὸ ποθούμενον συντελέσειν, ἐν ἐπιτομῇ τινι, ἀπερίττῳ ἅμα τῇ αὐτῇ καὶ μηδὲν ἐνδεούσῃ, τὸ ἀποχρῶν αὐτοῖς παρεξόμενον· ὡς μήτε τῷ πλατεῖ τῆς διεξόδου ἀποκναίσειν αὐτοὺς ἐντυγχανομένους, καὶ διὰ πάντων ἄξειν, ὅσα ἢ δέον ἐκπαιδευθέντας, εἰκὸς ἔπειτα καὶ παρ' ἑαυτῶν οἵους τ' ἂν ἔσεσθαι παρατολμᾶν, καὶ εἴτι ἄλλο τούτων περιττότερον ὅ πάλαιτε καὶ ὁ καθ' ἡμᾶς ἐν τοῖς Μαθήμασι προυνέγκε χρόνος. Δεῖ γὰρ ἀτεχνῶς οὐ πάντα οἶμαι παρὰ τῶν ἡμᾶς ἐκδέχεσθαι διδασκόντων, μηδ' ἐν ἀκροατῶν τάξει καταγηράσκειν παρ' ὅλον αἱρεῖσθαι τὸν βίον ἀεὶ παιδοτριβουμένους· ἀλλ' ἐκεῖθεν που τὸ εἰς κίνησιν ἐνδόσιμον αὐτάρκως λαβόντας, καὶ καθάπερ

Ἀετι-

'Αετιδεῖς ὑφ' ἡγήτορι τῷ τεκόντι ὅσον ἅλις πῖερυγίσαντας, καὶ αὐτὲς ἐν δέοντι τῷ πῖερῷ χρῆσθαι θαῤῥεῖν, προσωτέρωτε κατὰ βραχὺ τῆς νεοττιᾶς ἀναΐσσειν ἐπιχειρῦντας, καὶ μετεωρότερα πέτεσθαι· Τῦτο δὲ ἄρα βέλεσθαί μοι δοκεῖ καὶ ἡ καλεμένη Στοιχείωσις· ἐδὲν ἀλλ' ἡ τῶν ἀρχικωτέρων ἐφ' ἑκάςε γνώσεων μάθησις ἔσα, ἐξ ὧν ἔπειτα τοῖς περιθάλπειν τε αὐτὰς καὶ μετιέναι κατὰ τὸ προσῆκον ἐπιςαμένοις καὶ προαιρεμένοις, ὡς ἐκ σπερμάτων πέφυκεν ἀποβλαςάνειν ἡ τῶν τελεωτέρωντε καὶ ἁδροτέραν κατάληψις, ἅτῖα ἐν ἐκείνοις δυνάμειπως ὑπελάνθανε καὶ συνείληπῖο.

Ταῦτ' ἒν σκοπῦσιν ἐκ τῦ ἐφεξῆς αὐτίκα τὸν νῦν ἐκεῖνο εἰσῄει περὶ τῆς συγγραφῆς. Πότερόν ποτε ἄμεινον εἴη καὶ πρὸς τὸν σκοπὸν συντελέςερον αὐτὲς ἐξ ἑαυτῶν ἀναβαλέσθαι τὴν προκειμένην συναρτύσαι Στοιχείωσιν, ἀλλα παρ' ἄλλων συνερανισαμένες, ἢ σύνηθες, καὶ εἰς ἓν ὁπωςποτ' ἒν ταῦτα συμφύραντας· ἐξ ἀλλοτρίων ἀλφίτων ἐν ἰδίαις μάκτραις ἀρτοκοπῦντας, καὶ μηδ' ἐξ ἧς, εἰ τύχοι, ἐλήφθη πήρας τὰ ἄλφιτα εἰλικρινῶς μνημονεύοντας· ἢ τινάποθεν τῶν ἀρίςων, καὶ, ὡς ἄντις εἴποι, τῶν ἐν ταύτῃ τῇ παλαίςρᾳ τῶν Μαθημάτων μετὰ κλέυς πρωταγωνιςεῖν εἰληχότων ἀνθελέσθαι μᾶλλον, τὸν ἡμῖν τῦ ἐγχειρήματος προςάτlω ἅμα καὶ ἡγεμόνα ἐσόμενον; Ἐπὶ πολὺ γῦν τlὼ γνώμlω ταλαντδομένοις τετὶ ἐνίκα τὸ δεύτερον, νεανικώτερον δήπυ δόξαν τὸ πρῶτον ἢ ἀσφαλέςερον· καὶ πρὸς δόξαν μᾶλλον τlὼ παρὰ τοῖς πολλοῖς (ὐ γὰρ μὴ Φαίlω τοῖς ὀλίγοις.) ἢ πρὸς τὸ συνοῖσον τοῖς ἐντευξομένοις τὸ πλέον βλέποντος. Εἰ γὰρ ἢ τὸ αὐτυργεῖν ποτὲ μικρῷ πρόσθεν ἡμῖν παρήνηται, καὶ καθ' ἑαυτὺς πειρᾶσθαι τῦ πρόσω γίνεσθαι, ἀλλ' ἐκεῖνο οἶμαι μανθάνοντας δεῖν, ἢ τὸν ἐπιόντα νῦν ἰδίαις μελέταις καταρτίζοντας καὶ προάγοντας· ὡς εἴτις ἐκ γειτόνων λαβὼν ἐμπύρευμα, ὕλlω τε τlὼ προσφυῶς ἔχυσαν περὶ αὐτὸ ἀθροίσειεν ἐπινήσας, εἶτα πνοαῖς διαῤῥιπίζων ἠπιωτέραις μὲν τlὼ ἀρχlὼ, κατὰ βραχὺ δ' ἐπὶ τὸ ἀκμαιότερον προϊύσαις, εἰς φλόγα ἆραι ταῖς κατὰ μικρὸν τέως προσθήκαις ἐπιχειροίη τlὼ αὐτῷ πρὸς τὰς χρείας ὑπηρετήσυσαν. Διδάσκοντας δὲ, καὶ τοῖς ἄλλοις τῦ φωτὸς ὐχ ὅπως, ἀλλὰ καὶ τῦ εἰς φαῦσιν ἐναπαιτυμένυ ἐλαίυ μεταδιδόναι φιλοτιμυμένυς, ἐπάναγκες πρὸς τὺς, ὥςε καὶ πιπράσκειν ἀφθόνως ἔχοντας, ἀνατρέχειν· ἢ κίνδυνος ἑκατέρυς ἐν τῷ σκότει ἀπολειφθῆναι·

μή-

μήποτε γὰρ οὐχ ἅλις εἴη, ὡς ἀρκέσειν καὶ ἡμῖν (φησὶ) καὶ ὑμῖν τοῦ ἐναύσματος;

Ἄλλως τε οὐδ' ἡ Φύσις τῶν τοιῶνδε Μαθημάτων τοιάδε, ὡς παντὶ τῷ βουλομένῳ ἐκ τοῦ ῥᾴστου ἐν αὐτοῖς ἐπαυθεντεῖν ἐξεῖναι, καὶ ἤτοι τοῖς κειμένοις ἕτερά τινα προσεπιφορεῖν, ἢ γοῦν μεθαρμόζειν τε, καὶ πρὸς τὸ δοκοῦν μετατιθέναι ὁπωσοῦν ἑτέρως τὰ κείμενα. Τὰ μὲν γὰρ ἄλλα τῆς Φιλοσοφίας εἴδη ἐξ ἀδηλίας τὰ πολλὰ τῆς ἐπιπολαζούσης αὐτοῖς ἀστατοῦντα καὶ σαλευόμενα, ἐνδοίεν ἂν τῷ μετιόντι, καὶ πληρῶσαί που τὸ ἐνδέον, καὶ τὸ περιττὸν ἀποξέσασθαι· καὶ τὸν μὲν εἱρμὸν τοῦ λόγου ἄλλῃ πῃ ἐπισυνεῖραι, τὴν δὲ μέθοδον πρὸς τὸ ἄμεινον καὶ λυσιτελέστερον μεταδιαιτήσασθαι. Ἐφ' οἷς καὶ τὰ μὲν σαφέστερον τυχὸν ἐκφράσαι τε καὶ διαλευκᾶναι, τὰ δὲ ἐπεξεργάσασθαι λεπτότερον· καὶ πίστιν ἑτέραν οὖν προσθεῖναι, καὶ δόξαν ἄλλην ἀντεισαγαγεῖν, καὶ πρὸ ἄλλης ἀσπάσασθαι, καὶ τὴν μὴ δοκοῦσαν ἀθετῆσαι, καὶ τὸ ἀντιπῖπτον ὧδε ἢ ὧδε ἀπελέγξαι καὶ ἀποκρούσασθαι ἰδίαις ἐπινοίαις χρησάμενον. Γεωμετρία δὲ καὶ Ἀριθμητικὴ καὶ ταῖς ταύταις ὁμογνίοις τε καὶ συννάοις, πάντα στάθμην ἔχει καὶ μέτρον καὶ ὅρον, ἐφ' οἷς καὶ πέπηγε· καὶ τὸ μὲν μεταρρυθμίσαι, χωρὶς τοῦ παραλυμήνασθαί πῃ

 τῶν

τῶν ἐν αὐταῖς διδασκομένων τὸ ἐμμελές τε καὶ
ἐναρμόνιον, ἀνδρὸς ἂν εἴη τοῦ ἐν ταύταις καὶ μό-
ναις ἅπαν τὸ ζῆν κατατετριφότος ταῖς ἕξεσι·
τὸ δὲ ἐπὶ τῷ δόξαι ἄρτι καὶ αὐτὸν συντελέσαι,
τῶν οὔτε καὶ καλῶς ἡρμόσθαι δοκούντων κατεπι-
χειρεῖν, κἂν ἐπὶ τὸ ἀκοσμότερον μεταπέσοι παρ'
οὐδὲν τιθέναι, οὐκ ἀγαθοῦ δήπουθεν, οὐδὲ σώφρονος.
„Τὸ γὰρ καλῶς ἁρμοσθὲν, καὶ ἔχον εὖ, λύειν ἐθέ-
„λειν κακοῦ, ὡς τῷ δαιμονίῳ εἴρηται Πλάτωνι.
ὡς εἴγε καὶ μεθαρμοσθὲν ἔτι μηδὲν ἀπηχὲς οὐδ'
ἄμουσον φθέγγοιτο, ἀλλ' εἰ μὴ καὶ εἰς τὸ ἐμμελέ-
στερον ἢ πρὶν, καὶ μουσικώτερον μεταβιβασθείη, οὐδ'
οὕτως ἄξιον πολλοῦ τιμᾶσθαι τὸ ἔργον· ὅ,τε περὶ
αὐτὸ σπουδάσας οὐκ οἶδ' εἰ κενοσπουδίας τὴν δίκην
ῥᾳδίως ἀποφεύξεται· „τί γὰρ δεῖ τίκτειν δὶς (τὸ
„τοῦ Συνεσίου φάναι); μᾶλλον δὲ τί παρατίκτειν
„δεῖ καὶ δεύτερον, ἐξὸν ἔχειν τὸ τετεγμένον;

Αὕτη δὴ πρόφασις δικαία καὶ εὔλογος, καὶ
κατὰ πᾶσαν μὲν οὖν, ἣν ἄντις εἴποι πραγματείαν
ἄλλην φιλόσοφον, διαφερόντως δὲ ἐπὶ τῶν Μα-
θημάτων γένοιτο τῆς ἐπὶ τὸ γράφειν ὁρμῆς, εἴ-
τις παρὰ τὰ ἔς γε τὸ παρὸν πεφασμένα καὶ γινω-
σκόμενα, καὶ παρ' ἑαυτοῦ τῶν εἰς αὔξησίν τε καὶ
τὴν ἐπὶ τὸ κρεῖττον βελτίωσιν φερόντων τῆς ἕξεως
ἠυπόρησέ τινα εἰσενεγκεῖν καὶ δημοσιεῦσαι, ἃ τοὺς

ἄλλους

ἄλλες ἀγνοέμενα τέως ἐλάνθανεν. Ἀλλ᾽ ὡς μὲν χαλεπὸν τὸ τῆς ὑρέσεως τἔτο, ὅσῳ δὲ σπάνιον, ἢ αὐτοὶ δηλἔσιν οἱ διὰ χρόνε, ἢ μόλις, ἢ ἐπὶ ὀλιγαρίθμων ὑρεταί τινων ἡμῖν ἀναπεφηνότες· ἐς ἀζόμεθά τε παρὰ τἔτο καλῶς ποιἔντες, καὶ ὡς κρείττονας ἢ κατὰ ἀνθρωπίνην γενομένες μοῖραν εικότως γεραίρομεν. Ἐμοὶ γἒν ἐντεῦθεν καὶ τὸ περὶ τῆς Πυθαγόρε ἱςορηθὲν ἑκατόμβης λογιζομένῳ, ἐ πάνυ πόῤῥω τἒ πιθανἒ πίπτειν ἔοικεν. Εἰ γὰρ ὑπετὲς ἡγεῖτο ἢ εὔπορον τὸ προσϋρέσθαι καὶ ἄλλα, οἷον τὸ γράμμα,

„Κεῖν᾽ ἐφ᾽ ὅτῳ κλεινὴν ἤγαγε βεθυσίην,

ἐκ ἂν εἰς τοσἒτον οἶμαι ἐπεδαψιλεύσατο ἐπὶ τῇ ὑρέσει· ἐδ᾽ ἂν εἴτις τὴν πολύαρνις κατὰ Θυέςην ἐκεῖνον,

„Ἢ Ἰφίκλε υἱὸς πολυμήλε Φυλακίδαο·

ἐδ᾽ εἴτις ἄλλος, τῶν τὸν ἐν βοσκήμασι πλἒτον σφόδρα πλετέντων, ὁ Σάμιος. Νῦν δὲ τὸ ἅπαξ, καὶ μηδ᾽ ἐν ἐλπίσι παρεῖναι τὸ ἢ εἰσαῦθις ἔτι ἢ δεύτερον, τὴν ὑπερβολὴν ἐδικαίωσε. Γνοίη δ᾽ ἄντις κἂν ἐξ αὐτῆς τῶν Μαθημάτων τῆς προαγωγῆς καὶ προόδε, ὅση τἒ ἐν τἔτοις καινοτομεῖν ἡ δυσχέρεια. Κατ᾽ ἀρχὰς γὰρ ἄλλε ἄλλοτι περινοἒντος, ἥπερ εἶχον Φύσεώς τε δαιμονίως οἱ Ἄνδρες ἐκεῖνοι, καὶ δυνάμεως θαυμαςῶς, ἢ ὥσπερ ἐξ ἐράνου τὸ καθ' ἑαυτὸν ἑκάστου ἐν τῷ μέρει συγκαταβαλόντος, ἐμὴν ϗ ὁλοσχερῆ ἀποδοῦναι τὴν περὶ αὐτῶν τις ἐπεβάλετο πραγματείαν, ὃν ἂν εἰδείημεν. Ἀλλ' ἐπὶ πολὺ τῆς Ἀριθμητικῆς τε ϗ Γεωμετρίας οὕτω τιθηνουμένων, πρῶτος ἐπιχειρῆσαι φαίνεται Εὐκλείδης τῇ συγγραφῇ, οὐ μὰ δί' ἐκ τῶν ἰδίων εὖ οὕτως τὰ πάντα προσενεγκάμενος, ἀλλὰ τὰ παρὰ τῶν ἄλλων ὡς πλεῖστα παραλαβών, ϗ εἰς ἓν συλλέξας, καὶ τὰ Στοιχεῖα οὕτως ἡμῖν ἄχρι τῶν κρασπέδων ἐξυφάνας, τὸ πάγκαλον ἐκεῖνο ϗ παναρμόνιον ὕφασμα, ἐξ ὧν ϗ τὸ Στοιχειωτὴς ἀκούειν ἀξίως ἀπείληφε. Καὶ ἐγένοντο δὴ ϗ μετ' Εὐκλείδην ϗ ἄλλοι, φύσεις δαιμόνιοι, οἷς ὁ Θεὸς ἔδωκε τῶν μήπω πρότερον μηδέσιν ἐπὶ νοῦν ἐλθόντων ἐπινοῆσαι τινά, ϗ παλαιοὶ ϗ νεώτεροι· εἴτε τοῦ χρόνου, ὡς ἔφησέ τις οὐκ ἀμέσως, ἀλλὰ ἐπ' ἄλλοις ἀεὶ ἐπιφέρειν καινότερα φύσιν ἔχοντος, εἴτε ϗ τῆς τῶν ἀνθρώπων φύσεως (ὃ ϗ μᾶλλον ἀληθὲς) ἀμηχανούσης εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς ἐπὶ τὸ ἐντελές· ἀλλ' ὀλίγοι οἶμαι σφόδρα οἷς τοῦτο κεκλήρωται, καὶ μάλα τοι σπάνιοι. Κἂν εἴ τις ϗ καθ' ἡμᾶς γένοιτο, ἢ μεθ' ἡμᾶς (οὐδὲ γὰρ ἂν ἀπείποι ποτὲ γενναίας οὕτω ψυχὰς ἡ φύσις, τὰ σαρκία κατὰ καιρὸν περιβάλλουσα.) μακαριστὸς μὲν οὗτος ἔμοιγε τῆς εὐ-

κληρίας,

κληρίας, ἀγαϛὸς δὲ τῆς δυνάμεως· καὶ χρήσθω δὲ τῇ Φύσει ὁ τοιοῦτος ἐπὶ τῷ κοινῇ τοῖς ἄλλοις συνοίσοντι, ἧςπερ ἔλαχεν, ἢ τεύξεται· ὄναιτό τε ἐξ αὐτοῦ τὸ ἀνθρώπειον, τὸ ἀνακεχωσμένον ὄμμα λαμπρῶς ἀνορύττοντος, καὶ τοῖς θιασώταις τῶν Μαθημάτων ὅλοις πήχεσι τὴν ἐπιϛήμην ἐκτείνοντος καὶ προάγοντος. Ἡμῖν δὲ οἷς τηλικούτοις εἶναι οὐ δέδοται, ἀγαπητέον εἰ τοῖς ἐξ ἀλλοτρίων ὠδίνων γόνοις ἐνασμενίζοντες, ἕνα τῶν πολλῶν εἰσποιησάμενοι δόξαιμεν καὶ υἱοθετήσαντες, ὅς τις γενναιότατος· ὃν δὴ καὶ πρὸς ἤθη μεταμφιέσαντες τὰ ἡμέτερα, εὐχρηϛόντι καταθεῖμεν καὶ λυσιτελὲς τοῖς Φιλεπιϛήμοσι τῶν Ἑλλήνων τὸ σπέδασμα.

Ἀλλ' ὅτι γὰρ δὴ τοιοῦτόν σοι, ὅς τίς ποτ' ἔσῃ ὁ ἐντευξόμενος, τὸ ἐν χερσὶ τεῦχος ἔϛαι, θαῤῥούντως ἐπεγγυώμεθα. Σεγνερείους γάρ σοι γονὰς προβαλλόμεθα· ΣΕΓΝΕΡΟΝ δὲ ἀκούων, ἐν τοῖς καθ' ἡμᾶς ἀπὸ τῶν Μαθημάτων κλειζομένοις, πολλῶν μὲν ἡγοῦ τὰ πρῶτα Φέροντα ἀκούειν, μηδενὸς δὲ τὰ δεύτερα. Τούτου αὐτοὶ καὶ τοῖς συγγράμμασιν ἐνετύχομεν, καὶ τῆς συνουσίας οὐ μικρὸν ἀπωνάμεθα· ἢ τὴν διὰ πάσης δὲ ἰδέας λόγων Φιλοσόφων ἐπιβολὴν ἐν πολλοῖς τεθαυμακότες, τὴν περὶ τὰ Μαθηματικὰ διαφερόντως

 τελειό-

τελειότητα ἠγασάμεθα. Οὐχ ὅπως δὲ αὐτοὶ, ἀλλὰ συμψήφες οἴδαμεν ᾗ πάντας, οἷς ὑπεροχὴν ᾗ κράτος ἐπιςήμης διαγιγνώσκειν περίεςιν. Αἵτε γὰρ Γερμανίδες αἵδε Ἀκαδημίαι (οἶμαι δὲ ὅτι παρὰ ταύτας καὶ τῶν ἀνὰ πᾶσαν τὴν Εὐρώπην αἱ εὐκλεέςαται.) ὡς τῆς ἀκριβε̃ς ὄντα ἐργασίας τὰ τε̃ Ἀνδρὸς ἐνέκριναν φιλοπονήματα. Καὶ οἷς δὲ τὸ Μαθηματικὸν εἶδος ἀσκεῖται ἐξ ἐπαγγέλματος ἅπαντες αὐτὰ ἐπισωωιςω̃σιν· οἱ μὲν ὡς ἔχουσι προχρώμενοι τοῖς Βιβλίοις, ἐν ταῖς καθ' ἑαυτὲς πρὸς τὲς ἀκροατὰς εἰσηγήσεσιν, οἱ δὲ ᾗ ἐξ αὐτῶν πολλὰ ἐν συγγραφαῖς ἰδίαις ἐξοχετεύοντες. Ἑνὸς ἐξέσω μοι πρὸ τῶν ἄλλων μνησθῆναι, ὡς ἀρτίως περὶ τὰ Μαθηματικὰ τὴν συγγραφὴν ἀναβαλομένε, ᾗ ἔτι συγγράφοντος. Ἐννέρτος ε̃τος, ὁ ἐν μιᾷ τῶν παρὰ Βέλγαις ἐπισήμων Ἀκαδημιῶν εὐδοκιμῶν, ἥπερ ἐκ τῆς πέραν τε̃ Ῥήνε πόλεως (Ultraiecti) τὸ ἐπώνυμον. Οὗτος μὲν ε̃ν, καὶ πρὶν ἢ συγγράφειν ἐπιβαλέσθαι, ἐν αἷς ἦν ε̃χων κατὰ τὴν Ἀκαδημίαν διατριβαῖς, τὸν ἡμέτερον ΣΕΓΝΕΡΟΝ ἡγεμόνα ἑαυτῷ προςησάμενος (1), τέως δὴ ᾗ ἣν προέθετο τοῖς αὐτε̃ ἀκροωμένοις φιλοπονῆσαι τῶν Μαθηματικῶν

(1) Celeberrimi Segneri in Academia ductum ſum ſecutus. Io. Freder. Hennert. Curſ. Math. Pars I. In Praef. Ed. 1765. Decem. 16.

κῶν ἁπάντων Ἐπιτομιῶν, πρὸς παράδειγμα βλέπων τὸ τοῦ ΣΕΓΝΕΡΟΥ συντεταχέναι ὁμολογεῖ. (1). Μᾶλλον δὲ καὶ Ἐπιτομέα, ἢ Συγγραφέα ἐν ἐκείνοις ἑαυτὸν ἄξιοι ὀνομάζειν· (2)· Προσθείη δ᾽ ἂν ὅτι καὶ Ἀντιγραφέα μηδὲν αἰδόμενος, ὅς γε καὶ τῶν ἄλλων τὰ πλεῖστα αὐταῖς λέξεσιν ἐκ τῶν ἐκείνου παραθέσθαι οὐκ ἀπαξιώσας, τὰ περὶ τῆς Σφαιρικῆς μάλιστα Τριγωνομετρίας ὅλως ἀντιγεγραφέναι, καὶ μηδὲ συλλαβὴν ἀμεῖψαι μίαν, εἰλικρινῶς ὡμολόγησε. (3). Καὶ ταῦτα μὲν ἐν Τόμῳ Πρώτῳ τῶν αὐτοῦ Μαθηματικῶν· ἐν δὲ τῷ Δευτέρῳ, ὃν πέρυσι τύποις ἐξέδοτο, τὰ περὶ τῶν κατὰ τὰς ἐξισώσεις ῥιζῶν, ἐλλιπῶς ἅπαντας καὶ φαύλως (παρ᾽ ἕνα δὴ τὸν ΣΕΓΝΕΡΟΝ) ἕς γε καὶ νῦν πεπραγματευμένους κατειληφέναι λέγων, ἐξ αὐτοῦ ΣΕΓΝΕΡΟΥ καὶ ταῦτα ἀναγράψασθαι ἐπαγγέλλεται, ἧττονα ἑαυτὸν συναισθανόμενος καὶ ὁμολογῶν, ἢ ὥστε τι κομψότερον ἐκπονῆσαι δύνασθαι περὶ τούτων, καὶ ἀκριβέστερον. (4).

 Ἔνθα

(1) Debeo Lectorem monere me hocce compendium ad Illustris Segneri exemplum composuisse. Id. ibid.

(2) Cuius Epitomatorem potius quam Autorem me profiteor. Id. ibid.

(3) Elegantissimam de Trigonometria Sphaerica Sectionem, nec uno mutato quidem verbo, descripsi. Id. ibid.

(4) Sectionem VIII. de Aequationum Radicibus, quam omnia fere compendia, praeter Segnerianum, perperam interpretantur . . . . pro maxima parte ex Ill. Segneri cursu descripsi;

Ἔνθα καὶ θαυμάσαι τις ἂν τοῖν Ἀνδροῖν εἰκότως, οὐδὲν ἧττον τοῦτον τῆς τε ἤθους εἰλικρινείας καὶ καθαρότητος, ἢ ἐκεῖνον τῆς ἐπὶ ταῖς ἕξεσι ταύταις δεινότητος καὶ δυνάμεως, ὅτι καὶ τῶν καθ' ἡμᾶς τοῖς ἀρίστοις Μαθηματικῆς προβάλλεται ἐπιστήμης τε καὶ ἀκριβείας Ἀρχέτυπον. Ἀλλὰ γὰρ ΣΕΓΝΕΡΩι τῶν ἡμετέρων ἐπαίνων οὐ δεῖ· τῶτοι καὶ βραχέα τινὰ περὶ τῆς καθ' ἡμᾶς τῆς δὲ ἐκδόσεως τοὺς ἐντευξομένους προδιαμνήσας, αὐτίκα πεπαύσομαι.

Οἷς παρὰ τὸν Ἑλλήνων λόγον, καὶ τῆς Λατίνων Φωνῆς περίεστιν ἐπαΐειν, τὰ ἐκδιδόμενα ταῦτα πρὸς τὰ ἐξ ὧν ἐλήφθη παρεξετάσασιν, ἀπαντήσει καί τινα μεταξύ, ἅπερ ἐν τῷ ΣΕΓΝΕΡΟΥ Συγγράμματι, κἂν τῷ τῆτες (1) ἐκδοθέντι, καὶ διὰ πολλῶν ὑπ' αὐτοῦ προσαυξηθέντι, σχολῇ γ' ἂν εὑρέσθαι ἐλπίσειεν. Ἀξιοῦμεν οὖν μηδένα τούτου γε ἕνεκα προσοχθίσαι ἡμῶν τῇ σπουδῇ, μηδὲ διαμέμψασθαι, ὡς ἄρα τῇ τούτων παραθήκῃ τὸ ἔργον παραποιησαμένους, καὶ τὴν συγγραφὴν διακιβδηλευσάντας. Ἴστω γὰρ μηδὲν ἡμᾶς τοιοῦτον ἐν αὐτοῖς κεκαινοτομηκότας, οἷον μὴ ἂν

καὶ

descripsi; quoniam ad elegantiorem et accuratiorem elaborandum me non idoneum sensi. Idem in Praefat. Tom. II. Edit. 1766. Nov. 24.

(2) Ἔτει 1767. Ἐν Χάλῃ τῇ Μαγδεβουργικῇ Ὀκτωβρ. 1.

καὶ τῷ Ἀνδρὶ ἀποδεκτὸν ὀφθῆναι, ὃν Ἡγεμόνατε καὶ προστάτιω ᾑρήμεθα.

Τοίνυν ἐν τοῖς Ἀριθμητικοῖς, μηδένα λόγον ἐκείνε περὶ τῆς κατὰ τὸν Κύβον ῥίζης ποιήσασθαι ἀξιώσαντος (§. 131.), αὐτοὶ καὶ τὰ περὶ τῆς τε Ἀριθμητικε Κύβε συστάσεως, καὶ ὅπως ἂν ἡ ἀπὸ τεδε ῥίζα ἡ ὁμώνυμος ὑπεξάγοιτο ἐν ἰδίῳ Παραρτήματι ὑποθέσθαι δεῖν ἔγνωμεν. Ἵν' εἴτις καὶ τῶν Ἀριθμητικῶν μόνων ἁψάμενος, ἢ καὶ τῶν Γεωμετρικῶν ἐπὶ τέτοις, ἔπειτα (ὃ συμβαίνειν εἴωθε· πολλοὶ δὲ τῶν ἔτως ἀψικόρων εἰσί.) τε πρόσω γενέσθαι ὀκνήσειε, μηδ' ἔτος τῆς μεθόδε ἀδαὴς ἀπαλλαχθείη, ἧς ἐδεὶς ὅστις τῶν Ἀριθμητικῶν Στοιχεῖα καθ' ἡμᾶς συγγράψας ἑκὼν παρέδραμεν.

Ἐν δὲ τοῖς Γεωμετρικοῖς Προβλήματα δύο παρεισήχθη τάδε τὰ κομψότατα· τὸ μὲν (§. 446.), ὃ τῆς εὐθείας ἐκδιδάσκει τιὼ κατ' ἄκρον τε καὶ μέσον λόγον κατατομιὼ (ἥτις παρ' Εὐκλείδῃ ἡ Ιϛ. Πρότασις τε Δευτέρε τῶν Στοιχείων ἐςὶ, καὶ ἡ Λ'. τε Ἕκτε.) τὸ δὲ (§. 496.), ὃ τιὼ παραβολιὼ εἴδες εἴδεσι δυσὶν, ὧν τῷ μὲν ἂν εἴη ἴσον, τῷ δὲ ὅμοιον, ὑποτίθησιν· ὅπερ ἐν τῷ Ἕκτῳ, ΚΕ'. ὑπὸ τε Στοιχειωτε ἀριθμεμενον, μεσικώτατόν τε Πρόβλημα καὶ γλαφυρώ-

τατον

τατου ἁπάντων προβλημάτων Πλουτάρχῳ προσείρηται τῷ Χαιρωνεῖ (Συμποσ. Βιβλ. Η΄. Προβλ. β΄.) καὶ ὅλως θεῖον, ὡς καὶ ὑπ᾽ αὐτοῦ τοῦ Θεοῦ τῆς ἐπιλύσεως τετυχὸς, τοῦ ἐν τῇ παραγωγῇ τῶν ὅλων γεωμετροῦντος ἀεὶ κατὰ Πλάτωνα.

Κἀν τούτοις μὲν ταῦτα· ἐν δὲ τοῖς περὶ τῆς Καθόλου Λογιστικῆς, οὐκ ἐπ᾽ ὀλίγων ἄν τις εὕροι τῶν πρωτοτύπων τὰ ἔκτυπα παραλλάσσοντα, ἀλλ᾽ ἐκείνων ταῦτα καὶ ὑπὲρ τὸ πενταπλάσιον ἴσως ἐναβρυνόμενα. ΣΕΓΝΕΡΩι μὲν γὰρ, ἐδόκει πλέον ἢ τύπον τινὰ τῶν ἁπλουστέρων τε καὶ κοινοτέρων πράξεων τοῦ κατὰ Γένος Ὑπολογισμοῦ παρασχεῖν ἐνταῦθα ἡ πρόθεσις ἦν· καὶ παρέχειν ἄρα τοῖς μετιοῦσιν, ὅσον τούτων καὶ πρὸς τὸ παρὸν ἀπογεύσασθαι, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς ἀποταμιεύσας τὰ τελεώτερα· ἡμῖν δὲ δι᾽ ἐφέσεως ἦλθε, καὶ τὰ εἰς τοῦτο τείνοντα, ὅσα τῶν Ἀλγεβραϊκῶν ἐστὶ τὰ Στοιχειωδέστατα, εἰς ἓν συνειληφόσι, λιπαρωτέραν ἐνστήσασθαι, καὶ ἀκριβεστέραν ἀποδοῦναι κἀν τούτῳ τῷ μέρει, τῶν καθόλου Λογιστικῶν Μεθόδων τὴν διατύπωσιν. Ταύτῃ τοι καὶ τὰ μὲν ἐκ τοῦ Α΄. Τμήματος τοῦ Δευτέρου Τεύχους τῶν ἐκείνου Συγγραμμάτων ἀναλεξάμενοι· τὰ δ᾽ ἐκ τοῦ Τμήματος τοῦ Β΄, τὰ δ᾽ ἐκ τοῦ Ε΄, τὰ δ᾽ ἐκ τοῦ ϛ΄.: καί τινα δὲ καὶ μικρὸν ἀλλοίως, ἢ ὡς ἐν ἐκείνοις ἔχει, τὰ μὲν ἐκ

τῶν

τῶν ἐκείνου συνουσιῶν, τὰ δὲ καὶ δι' ἐπιστολῶν ὑπ' αὐτοῦ πρὸς ἡμᾶς ἀνακοινωθέντα παρειληφότες, καὶ ἐν οἰκείοις τόποις, καὶ τάξει τῇ προσηκούσῃ, καὶ εἱρμῷ τῷ ἐμμελεστάτῳ προσεναρμόσαντες, ὡς οἷόν τε ἦν, τὴν περὶ τούτων Πραγματείαν κατεπιάναμεν. Ὡς εἶναι τοῦ λοιποῦ ἐκ τούτων καλῶς προκατειλημμένων ὁρμηθέντας τοὺς ἐρωτικῶς περὶ τὴν Μάθησιν ἔχοντας, τάχα καὶ ἀφ' ἑαυτῶν ἐπὶ τὰ ἄλλως ἄδυτα καὶ ἀνεπίβατα τῆς Ἀναλύσεως χωρῆσαι, μηδὲν, ἢ μικρόν τι πάνυ προσδεησομένους τοῦ ποδηγήσοντος.

Τελευταῖον μετὰ τὰ τῶν Λογαρίθμων ἐπιτετμημένα Κανόνια, οἷόν τι ἐπισφράγισμα οὐ κομιδῇ ἀσυντελὲς τῆς Βίβλου ἔδοξεν ἐπιθέσθαι, καὶ τὰς ἐπὶ τὰ κατ' Εὐκλείδην Στοιχεῖα Παραπομπάς. Τῶν δὲ Παραπομπῶν ἡ χρῆσις εἰς τόδε ἥκει, ἵν' ἐπειδὴ τὰ πλεῖστα κατὰ τὴν ἐν ἐκείνοις τάξιν, τὰ ἐπιβάλλοντα σφίσι τῶν Θεωρημάτων ἢ Προβλημάτων οἱ Συγγράφοντες εἰώθασιν ἀριθμεῖν, μηδέν τι δυσχερὲς ἐκ τούτου συμβαίνοι τοῖς μετιοῦσι, παρὸν ἐντεῦθεν ἀπὸ τῶν παρ' ἡμῖν ἐπὶ τῆσδε τῆς Πραγματείας, τὰς ὑπὸ τῶν ἄλλων κατὰ τὴν ἀρχαίαν μέθοδον προβαλλομένας Προτάσεις εὐπετῶς ἀνευρίσκειν, καὶ οὐδενὶ σὺν ἔργῳ ἐπιγιγνώσκειν, αἵτινες, καὶ περὶ ὧν ὁ λόγος ἐστὶν, εὐθὺς ἐπὶ τὸν Πίνακα ἀνατρέχοντας.

Ἐγὼ

ΤΟΙΣ ΕΝΤΕΥΞΟΜΕΝΟΙΣ.

Ἐγὼ μὲν οὖν ὦ Παῖδες Ἑλλήνων Φιλεπιστήμονες, τοῦ θαυμασίου Ἀνδρὸς ἀφθόνως μοι ἐνδεδωκότος, καθάπερ ὁ Λυδὸς τῷ Ἀθηναίῳ Ἀλκμαίωνι, ὁπόσον ἂν βουλοίμην τε καὶ δυναίμην τοῦ θησαυροῦ ἀποφέρεσθαι, τάχα ἂν καὶ τοὺς κοτόρνους Ὑμῖν ὡς ἐκεῖνος ὑπ' ἀπληστίας, καὶ τὸν κόλπον πάντα ἐνέπλησα· καὶ μὲν δὴ καὶ ἐς τὰς τρίχας ἂν διεπασάμην τοῦ ψήγματος· καὶ οὐδ' ἂν τὸ στόμα εἴασα, τοῦ μὴ ἐμπαραβύσαι δὴ τοῦ πλούτου καὶ τοῦτο, ὅσον χωρήσειεν· ἀλλὰ στῆναι τέως εἰς τοσοῦτον ἔδει, καὶ τὴν πληθώραν φυλάξασθαι. Οὐδὲ γὰρ πλειόνων οἶμαι ἐπιδεκτικὸν ἐτύγχανε τόδε τὸ σπούδασμα. Ὑμεῖς δὲ ἐν αἰ τῷδε τῷ βραχεῖ Τεύχει, συμπεπυκασμένα φέροντες, ὅσα τυχὸν οὐδ' ἐν πολλῷ τούτου διαφέρουσι τῷ μεγέθει ῥᾳδίως εὕροιτε τοῖς Συγγράμμασιν, ἔρρωσθε ἀναγινώσκοντες αὐτὰ ἐπιμελῶς· καὶ τῶν μὲν ἐν αὐτοῖς καρπῶν δαψιλῶς ἀπολαύοιτε, ἐμοῦ δὲ, ὡς καὶ περὶ τὰ Μαθήματα ταῦτα Ὑμῖν τι συντελέσαι τὸν ἐνόντα τρόπον προτεθυμημένου, μὴ ἐπιλάθοισθε.

Ἐν Λειψίᾳ Ἔτει τῷ Σωτηρίῳ αψξζʹ. Σεπτ. βʹ.

ΕΛΕΓ-

ΕΛΕΓΧΟΣ
Τῶν ἐν τῇ Βίβλῳ ταύτῃ περιεχομένων.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.

ΤΜΗΜΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ.

ΣΤΟΙ-

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ Α.

ΠΕΡΙ ΑΡΙΘΜΩΝ ΙΔΙΑ ΤΩΝ ΟΛΟΣΧΕΡΩΝ.

ΠΡΟΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἡ μὲν Ἀριθμητικὴ περὶ τὸ ποσόν· τὸ δὲ ποσὸν ἐκ μερῶν· τὰ δὲ μέρη πρὸς ἄλληλα ἤτοι ἴσα· ἤ, τῆς διαφορᾶς ἀλογουμένης, ὡς ἴσα· ἢ πάντως εἰς ἄλλα ἴσα ἐπανάγεσθαι ἔχοντα. Ὥσπερ δέ, ἐὰν μέρος τὸ πρῶτον ληφθὲν ἐπαναληφθῇ ἀεί τι ποσὸν ἀναφύεται, τῇ πληθύϊ τῶν ἐπαναλήψεων συνολούμενον· οὕτω καὶ ποσὸν ἅπαν εἰς μέρη διαιρεῖσθαι δύναται ἀλλήλοις ἴσα πολυτρόπως, ὧν τῷ πλήθει αὐτὸ συστήσεται. Τῶν δὲ μερῶν τούτων ἀεί τι μέγεθος ἔσται. Ἔχει δὲ καὶ αὐτὰ εἰς μέρη ὑποδιαιρεῖσθαι, ἤτοι ἴσα ἀλλήλοις, ἢ ὁπωσοῦν ἄνισα. Τοῦ δέ τοι πλήθους τῶν μερῶν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ αὔξοντος, εἴτε κατ' ἐπανειλημμένην διχοτομίαν, εἴτε καὶ ἄλλως, τό γε μέγεθος αὐτῶν ἐξ ἐναντίου ἀπομειοῦται, οὕτω τέως ἀποβραχυνομένων, ὡς ἕν τι τούτων, ἢ θάτερον, μηδὲ λόγου τὸ παράπαν ἀξιοῦσθαι πρὸς τὸ ὅλον παραβαλλόμενον. Καθάπερ εἴ τις καὶ ὄρος μέγα εἰς κόνιν ἐννοήσειε διαλεπτυνθέν, οὗ μόριον ἓν οὐδ' ἂν ἐπαυξήσειε τῇ προσθήκῃ τὸν ὄγκον, οὐδ' ἂν τῇ ἀφαιρέσει ἀπομειώσεις. Καί ἐςιν ἄρα τὸ τηλικοῦτον μόριον, τῇ πρὸς τὸ ὅλον παραθέσει, ἴσα καὶ μηδὲν ἐκλογίζεσθαι, τοσῷ δὲ ἔλατῖον ἀπὸ τοῦ ἀκριβοῦς γινομένοις, ἐπόσῳ μᾶλλον ἐκεῖνο ἀπομεμείωται.

Μεγεθῶν τοίνυν ὑποκειμένων τοῦ μὲν Λ, τοῦ δὲ Β, ἐκείνου ἐλάσσονος, εἰ καὶ τῇ τοῦ Β ἐπαναλήψει οὐκ ἀεὶ προκύπῖει τὸ Λ, ἀεὶ μέντοι τὸ ἀπὸ τοῦ Λ ἐλλεῖπον, ἢ ὑπὲρ τὸ Λ ὑπερέχον ἐπὶ τοῦ προκύπῖοντος, ἔλατῖον ἔςαι, ἢ αὐτὸ τὸ Β τὸ ἐπαναληφθέν. Ταύτῃ τοι καὶ κατὰ τὸ διηνεκὲς τοῦ Β ἀπομειουμένου, καὶ ἡ κατ᾽ ἔλλειψιν, ἡ ὑπεροχὴν ῥηθεῖσα διαφορὰ, ὅσον ἂν ἐθέλοιτις ἀποβραχυνθήσεται, ὡς μηδὲ λόγου τέως ἀξία κρίνεσθαι. Τηνικαῦτα δὲ τὸ Λ μέγεθος τῇ τοῦ Β ἐπαναλήψει, ὡς ἐπ᾽ ἀκριβὲς γινόμενον λογισθήσεται. Ἀμέλειτοι ἐὰν τὸ τῶν μερῶν μέγεθος, ἐπὶ τὸ ἔλατῖον ἀεὶ προβαίνῃ ταῖς εἰς ἴσα κατὰ τὸ διηνεκὲς διαιρέσεσιν, ὥςε ἕκαςον αὖ τῶν μερῶν τῶν ἀνακυπῖόντων, εἰς ἄλλα ὁσαδήποτε τὸν ἀριθμὸν ὑποδιαιρεῖσθαι, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, τελευταῖον δὴ τὰ μέρη, μεγέθους παντὸς ὡρισμένου, ὅπερ ἂν δοθείη, ἢ νοηθείη, ἐλάσσονα καταςήσεται. Καὶ κατὰ μέρους δὲ ἀφαίρεσιν τῆς ποσότητος ἀπομειουμένης, ἐπείτι καὶ περιλειφθείη ὡσαύτως ἡλίκησοῦν τυγχάνον βραχύτητος, εἰς τοσοῦτον ἂν τὸ μέρος τὸ ἀφαιρετέον ἐπαύξοιτο, ὡς τὸ μηδὲν ὅλως καθυπολείπεσθαι.

Περιεργοτάτη ἡ διάσκεψις τῆς τῶν μερῶν, ἐφ᾽ ὅσον ἄν τις καὶ βούλοιτο, ἄχρι τοῦ καὶ πρὸς τὸ μηδὲν ἀπολήγειν, ἀπομειώσεως. λέγεται δὲ τὰ τηλικαῦτα μέρη ἀπειροςὰ, παρὰ τὸ μηδὲν ὑποτίθεσθαι πέρας τῇ τούτων σμικρότητι. Δεῖ μέν τοι καλῶς τὰ ἀπειροςὰ ταῦτα διακρίνειν, τῶν ὅσον ἂν ἐθέλοι τις ἐλαχίςων, μεγέθει δὲ ὅμως ὡρισμένων, καὶ ὧν οὐ θέμις νοεῖν ἐλάσσονα.

ΟΡΙΣΜΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 1.

Μέγεθος Β, ἐξ οὗπερ ἐπαναληφθέντος, μέγεθος ἕτερον τὸ Α ἀπογεννᾶται, ἢ τὸ τούτῳ ἴσον, Μέρος Πηλίκον τοῦ Α καλεῖται· καὶ Μόριον.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 2. Ἀριθμὸς δὲ ἐστὶν ἡ κατ' ἀφαίρεσιν ἔννοια τοῦ τρόπου, καθ' ὅν τι μέγεθος τὸ Α, ἐκ μεγέθους ἑτέρου γίνεται τοῦ Β, ἢ τῶν τοῦδε πηλίκων μερῶν. Τὸ δὲ Β ταύτῃ γε καλεῖται Ἓν, ἢ Ἕνας, ἢ Μονάς.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 3. Μέγεθος γὰρ ὁποσονοῦν τὸ ΑΒ δι' ἀριθμοῦ Σχ. 1.
ἐκδηλώσοντες, τὴν πρὸς τὸ δοκοῦν ληφθεῖσαν μονάδα ΓΔ, εἴμηπου γε δοθεῖσα ᾖ, ἐπαναλαμβάνομεν, ἄχρις οὗ μέγεθος προκύψῃ, ἤτοι τῷ δοθέντι ΑΒ ἴσον, ἢ αὐτοῦ ἔλαττον, ἡλίκον δὴ τὸ ΑΕ· οὕτω γεμὴν ὡς εἰ μονὰς ἔτι ἐπιπροστεθείη, μεῖζόν τι γίνεσθαι τοῦ ΑΒ. Ἐὰν οὖν τὸ δεύτερον ἕψηται (ἢ καὶ τῆς ΓΔ μονάδος ὑπὲρ τὸ ΑΒ μέγεθος τυχούσης.) τὴν μονάδα εἰς μέρη διαιροῦντες ἀλλήλοις μὲν ἴσα, τῆς δὲ κατὰ τὴν ΕΒ ὑπεροχὴν ἐλάσσονα, ἐπιχειροῦμεν αὖθις δι' ἐπαναλήψεως ἑνὸς τῶν μερῶν τουτωνὶ ΓΖ, τὴν ὑπεροχὴν ΕΒ ἀκριβῶς ἀποδοῦναι· οὗ δὴ συμβαίνοντος, καὶ ἡ ΑΒ ποσότης, τῇ τοῦ αὐτοῦ μέρους ΓΖ ἐπαναλήψει διεκπερανθήσεται. Ἐὰν δὲ ἡ ΕΒ ὑπεροχή, τῇ ἐπαναλήψει τοῦ ΓΖ μέρους, κατὰ τὸ ἀκριβὲς ἀποδοθῆναι μὴ οἷατε ᾖ, ἀλλ' ἡ ὑπεροχὴ ΗΒ τοῦ ΑΒ ὑπὲρ τὸ ΑΗ μεγέθους, ἡ δι' ἐπαναλήψεως τοῦ ΓΖ προκύψασα, αὐτοῦ δὴ τούτου τοῦ ΓΖ ἐλάσσων ἔσται. Ὥστε καὶ τοῦδε δὴ τοῦ ΓΖ εἰς μέρη ἴσα αὖθις διαιρεθέντος, καὶ τούτων ἑκάστου ἔτι εἰς ἄλλα ἴσα, τό γε ἔσχατον ὑπερέχον, (εἰ μὴ τέλεον

ἐκ μέσε ἀρθείη) εἰς γεν ἐλάχισόν τι ἀποβραχυωθήσεται, ἐ μηδεὶς περαιτέρω λόγος γένοιτο ἄν. Οὕτω ποιεσι, καὶ ὅπως τῇ διαιρέσει τῆς ΓΔ, οἷα μονάδος, καὶ τῶν αὐτῆς πηλίκων μερῶν, ἡ ΑΒ παρήχθη τὸν νεν προσέχεσιν, ἡ τε ἀριθμε ἔννοια ἡμῖν ἐγγενήσεται, καθ᾽ ὃν τὸ ΑΒ μέγεθος πρὸς μονάδα ἀναφέρεται τὴν ΓΔ, καὶ διὰ ταυτης καὶ δηλεται.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 4. Ἐὰν ἡ ΓΔ μονὰς, τὸ δι᾽ ἀριθμε δηλεσθαι μέλλον μέγεθος ΑΒ διεκμετρῇ. τετέσιν, ἐὰν ἐκείνε μέρος πηλίκον ᾖ, ὁ ἀριθμὸς εἰρήσεται **Ὁλοχερής**.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 5. Ἐὰν δέ τι τῶν ἐπὶ τῆς μονάδος πηλίκων μερῶν ΓΖ τὸ τεθὲν μέγεθος ΑΒ διεκμετρῇ, ὁ ἀριθμὸς ῥηθήσεται **Κλασματικὸς**, ἢ **Κλάσμα**.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 6. Ἐὰν ἡ μονὰς αὐτὴ ἐπαναληφθεῖσα τὸ μέγεθος ΑΒ διεκμετρῇ, διεκμετρήσει δὴ τετο, καὶ πᾶν τῆς μονάδος μέρος πηλίκον. Διὸ καὶ μέγεθος τὸ δι᾽ ὁλοχερες ἀριθμε ἐκδηλέμενον, αὐτὸ τετο καὶ διὰ κλασματικε δηλωθήσεται τρόποις μυρίοις. Τὸ δὲ διὰ κλασματος ἐκδηλεμενον, ἤτοι ἔλαττον τῆς μονάδος ἐσὶν, ἢ εχί· Καὶ εἰ μὲν ἐκεῖνο, τὸ κλάσμα καλεῖται **Γνήσιον**, εἰ δὲ τετο, **Νόθον**.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 7. Τε δὲ κλάσματος ἀριθμοῖς συγκροτεμένε δυσὶ, τῷ μὲν, εἰς ὅσα ποτὲ ἡ μονὰς διῄρηται μέρη ἴσα ἐκφέροντι, τῷ δὲ, ὅσα τῶν ἐκ τῆς διαιρεσέως ἀνακυψάντων ἐπὶ τῇ τε κλάσματος συςάσει παρείληπται, διασημαίνοντι, ὁ μὲν πρῶτος **Παρονομαςὴς** καλεῖται, ὁ δὲ δεύτερος **Ἀριθμητής**.

ΣΧΟ-

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 8. Οἱ δ' ὅροι ἔτοι τῦ κλάσματος, ὅ,τε ἀριθμητὴς αὐτῦ δηλονότι, καὶ ὁ παρονομαςὴς, Κανονικῶς τῶν ὁλοχερῶν εἰσὶ, καίτοι καὶ κλασματίαι εἶναι δυνάμενοι. Καὶ ἐπὶ μὲν τῷ γνησίῳ κλάσματι ὁ ἀριθμητὴς τῦ παρονομαςῦ ἐλάσσων ἐςὶν, ἐν δὲ τῷ νόθῳ ἔχ ἔτως, ἀλλ' ἤτοι ἴσος αὐτῷ, ἢ αὐτῦ μείζων.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 9. Ἐὰν τὸ μέγεθος ΑΒ, ἐκ τῶν τῆς μονάδος ΓΔ πηλίκων μερῶν, μεγέθει ὡρισμένων, συντελεῖσθαι μὴ ἔχῃ, ὁποσονῦν ἐλάχιςα ταῦτα ληφθείη, τὸ ΑΒ τῇ μονάδι ΓΔ ἀσύμμετρον εἶναι λέγεται. Καὶ εἴτις ἀριθμὸς πλάττοιτο, ὁ τὸ ῥηθὲν μέγεθος ΑΒ πρὸς μονάδα ἀναφέρων τὴν ΓΔ, Ἄλογος ἐκεῖνος κληθήσεται, καὶ Ἄῤῥητος· οἱ δὲ λοιποὶ πάντες Λογικοὶ, καὶ Ῥητοί.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 10. Ὅτι δὲ μεγέθη ἐςὶ, μεγέθει ὁτωδήποτε προσληφθέντι, οἷον τῷ ΓΔ, ἀσυμμέτρως ἔχοντα, ῥᾴδιον κατιδεῖν. Ἐὰν γὰρ τὸ ΑΗ, ἐκ μερῶν συγκέηται τῶν ἐπὶ τῆς τεθείσης μονάδος πηλίκων, οἷον ἐκ τῦ ΓΖ· προςεθέντος ἐκείνῳ τῦ ΗΒ, ὅπερ ἂν τῦ ΓΖ ἔλαττον ᾖ, εὔδηλον ὅτι τὸ ΑΒ ἐκ τῦ ΓΖ ὀ συντελεσθήσεται. Ληφθήτω τοίνυν μέρος πηλίκον ἕτερον ἐπὶ τῆς μονάδος ΓΔ· κἂν ἐκ τέτε συγκέοιτο τὸ ΑΗ, προσαυξηθήτω τῇ ΗΒ προσθήκῃ, ἐλάσσονι μὲν ἔσῃ τῦ δεύτερον ληφθέντος μέρες, ἔλαττον δὲ καὶ τὸ ΗΒ τῦ προτέρε μέρες ΓΖ παρεχομένῃ. Ὅ δήπε ἐκ ἀδυνάτως ἔχει γενέσθαι· τὴν γὰρ αὔξησιν, ὅσον ἂν δόξειεν, ἔπεσιν ἐλαττονῦν. Ἀναφυήσεται τοίνυν τὸ ΑΒ, τὸ μήτε ὑπὸ τῦ ΓΖ, μήθ' ὑπὸ θατέρε μέρες τῶν ἐπὶ τῆς μονάδος ΓΔ, ὀ Σχ. 1.

 συντε-

συντελεσθῆναι δυνάμενον. Καὶ τοῦ αὐτοῦ ἄρα ὡσαύτως καὶ ἐφεξῆς γινομένου, προκύψει τέως τὸ ΑΒ, ὃ μηδὲν ὅλως τῶν ἐν τῇ μονάδι ΓΔ πηλίκων μερῶν συντελέσει, εἰ μόνον ὁ τῶνδε τῶν μορίων ἀριθμὸς ὡρισμένος εἴη, ὁσονοῦν ἂν καὶ μέγας ληφθῇ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 11. Ἐκ δὴ τούτων τῶν περὶ τοὺς ἀριθμοὺς ἐννοιῶν, σαφὲς ὅτι τὸ τοῦ ἀριθμοῦ μέγεθος, ἐκ τοῦ κατὰ τὴν μονάδα μεγέθους οὐδαμῶς ἐξῆπται. Τοῦ γὰρ τρόπου τῆς συνθέσεως σωζομένου, ὁ ἀριθμὸς κατὰ ταυτὰ μένει, καὶ εἰ παντοίως ἡ μονὰς τρέποιτο.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 12. Τὸ δέ τοι μέγεθος, ὃ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ δηλοῦται, καὶ τοῦ ἀριθμοῦ ἐξήρτηται, καὶ τοῦ τῆς μονάδος μεγέθους πρὸς τὴν ἐκείνου ἀνάγεται, καὶ δι᾽ ἀμφοῖν δὲ καὶ νοεῖται. Ἐπαύξει γὰρ τὸ μέγεθος, οὐχ ὅπως ἐπὶ μονάδι τῇ αὐτῇ τοῦ ἀριθμοῦ πληθυνομένου, ἀλλὰ καὶ ἐπ᾽ ἐκείνῃ μεγεθυνομένῃ τούτου μένοντος. Καὶ ἑκατέρου δὲ ἀπομειουμένου, ἢ θατέρου, ἀπομειοῦται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 13. Εἰς ἀριθμὸν ὁλοσχερῆ τὸ κλάσμα μεταποιεῖται, ἐπειδὰν τὸ τῆς μονάδος μόριον, ὃ τῇ ἐπαναλήψει τὸ κλάσμα συνίσταται, ἀντὶ μονάδος λαμβάνηται. Καὶ αὔξει μὲν ἄρα τὸ κλάσμα, ἤτοι ἐπὶ τῷ αὐτῷ τοῦ μορίου μεγέθει τοῦ ἀριθμητοῦ αὔξοντος, ἢ γοῦν ἐπὶ τῷ αὐτῷ ἀριθμητῇ τοῦ μορίου μεγεθυνομένου· τοὐναντίον δὲ, ἤτοι τοῦ ἀριθμητοῦ, ἢ τοῦ κατὰ τὸ μόριον μεγέθους, ἢ καὶ ἑκατέρου ἀπομειουμένου, ἀπομειοῦται.

ΠΟΡΙ-

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 14. Ἐν εἴδει δὲ, ἐὰν τῦ ἀριθμῦ σωζομένυ, αἱ μονάδες, ἢ τὰ τῆς μονάδος ἀριθμέμενα μέρη, εἰς τὸ δὶς τοσῦτον ἐπαύξῃ, καὶ τὸ διὰ τῦ ἀριθμῦ δηλέμενον μέγεθος διπλασιαθήσεται· ἐὰν δὲ εἰς τὸ δεκάκις, δεκαπλασιαθήσεται· Καὶ ὕτως ἐφεξῆς. Τὐναντίον δὲ τῦ ἀριθμῦ ὡσαύτως ἔχοντος, ἐὰν αἱ μονάδες, ἢ τὰ τῆς μονάδος μέρη, τῶν πρότερον ἡμισεύωνται, καὶ τὸ μέγεθος, πρός γε τὸ πρὶν, ἡμισευθήσεται. Καὶ ἐὰν ἐκείνων ληφθῇ τὸ δέκατον, καὶ τῦτο τὸ δέκατον παρέξαι. Καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 15. Ἀριθμεῖν ἄχρι τῶν δέκα καλῶς εἰδότες, ὡς ἂν ἀριθμὲς μείζονας, καὶ καθ᾽ ἑαυτὲς ἀνατυπῦσθαι, καὶ τοῖς ἄλλοις νοεῖν παρέχειν ῥαδίως δυναίμεθα, ἐκ τῶν ἁπλῶν δέκα μονάδων, μονάδα ἄλλην συγκροτῦμεν, ἧς ὄνομα Δεκάς. Ἑξῆς δὲ καὶ τὰς ἐν πλήθει ἀριθμῦντες δεκάδας, ὡς καὶ ἐξ αὐτῶν δέκα γενέσθαι, δεκάδα ἄλλην συμπληρῦμεν, ᾗ ὄνομα Ἑκατοντὰς, ἢ Ἑκατοςύς. Ὡσαύτως δὲ καὶ τῶν ἑκατοςύων ἀριθμυμένων, δέκα ἐξ αὐτῶν καινὴν μονάδα συναποτελῦσιν, ἣ λέγεται Χιλιάς. Κἀνταύταις δὴ ταῖς φωναῖς τῆς τῶν χιλιάδων, ἑκατοντάδων, δεκάδων πληθύος ἐκφερομένης, ὁ ἐν αὐτῇ περιεχόμενος ἀριθμὸς, ῥᾷςα τῇ διανοίᾳ παρίςαται.

§. 16. Καὶ τὴν χιλιάδα δὲ κατὰ τὰς μονάδας ἀριθμῦμεν, Δεκάδας, καὶ Ἑκατοντάδας Χιλιάδων λέγοντες, ἕς γ᾽ ἐπὶ τὰς δέκα ἑκατοςύας, τυτέςιν ἐπὶ τὴν χιλιάδα τῶν χιλιάδων.

§. 17. Τὴν δὲ χιλιάδα τῶν χιλιάδων Μιλλιόνιον καλῦμεν· Καὶ εἰ τὸ πλῆθος ἐς τοσῦτον ἥκοι, καὶ Μιλλιόνια ἐν αὐτῷ παραπλησίως ταῖς μονάσιν ἐξαριθμήσομεν· Συμπληρεμένων δηλονότι τῇ προόδῳ, δεκάδων τε, καὶ ἑκατοντάδων, καὶ χιλιάδων Μιλλιονίων. Καὶ δεκακισχιλίων δὲ, καὶ ἑκατοντακισχιλίων, εἰς ὃ προέλθοι καὶ τὸ ἐκ Μιλλιονίων Μιλλιόνιον.

§. 18. Τὸ δὲ ἐκ τῶν Μιλλιονίων Μιλλιόνιον, Διλλιόνιον ὀνομάζομεν· Καὶ τὸ ἐκ Διλλιονίων Μιλλιόνιον, Τριλλιόνιον· Καὶ τὸ ἐκ τῶν Τριλλιονίων Τετραλλιόνιον, καὶ ἕτως ἐφεξῆς, τῷ αὐτῷ τῷ ἀριθμεῖν τρόπῳ, ὡς ἐπὶ τῶν Μιλλιονίων προχωρῶμενοι. Οὕτω διὰ τῶν ὀλιγαρίθμων τῶν δε ὀνομάτων (ἃ βαρβαρικὰ μὲν ἐςὶ, καὶ τῆς καθ᾽ ἕλληνας συνηθείας πόῤῥω πίπτοντα, διὰ δὲ τὸ ἐν ἁπλότητι εὔχρηςον ἐν τοῖς Ἀριθμητικοῖς ἥκιςα παραιτητέα.) ἀριθμὲς ψαμμακοσίες ἡλίκες ἐκφέρειν δυνάμεθα.

§. 19. Τῆς δὲ μονάδος εἰς μὲν ἴσα δύο διαιρεθείσης, τῶν μερῶν ἑκάτερον ἥμισυ προσαγορεύομεν, καὶ ἡμίσειαν. Εἰς δὲ τρία, ἕκαςον Τριτημόριον, ἢ Τρίτον. Καὶ Τεταρτημόριον δὲ λέγομεν, ἢ Τέταρτον· Καὶ Πεμπτημόριον, ἢ Πέμπτον· καὶ ἑξῆς ὁμοίως, τῷ τῶν μερῶν ἀριθμῷ φερωνύμως, εἰς ἃ ἡ μονὰς ἰσάκις διήρηται. Τῷ δ᾽ αὐτῷ λόγῳ, καὶ Δεκατημόριόν τι μονάδος, ἢ Δέκατον, ἐνέςαι λαβεῖν· καὶ Ἑκατοςημόριον, ἢ Ἑκατοςόν· καὶ Χιλιοςημόριον, ἢ Χιλιοςόν. Ἔςι δὲ τὸ μὲν ἑκατοςὸν, δεκατημορίε δεκατημόριον· τὸ δὲ χιλιοςὸν, ἑκατοςημορίε δεκατημόριον. κτλ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 20. Οὕτως ἀριθμὸν ἅπαντα, ἐν ᾧ παρὰ τὰς ὁλοχερεῖς μονάδας, ἐδέν τι ἕτερον τῶν ἐν αὐταῖς ἐννοῦμεν μορίων, πλὴν ἢ τὰ δεκατημόρια, ἑκατοςημόρια, χιλιοςημόρια κξ., ἐκ μονάδων συντίθεμεν, μεγέθει ἑτεροταγῶν· ὧν δὴ τάξεων, αἱ μὲν ἀνώτεραι τῶν ἁπλῶν μονάδων εἰσὶν, οἷον δέκα, ἑκατὸν, χίλια·

αἱ

αἱ δὲ κατώτεραι, οἷον δέκατον, ἑκατοστὸν, χιλιοστόν. Καὶ κοινὸς δὲ ἐν πάσαις ταῖς τοιαῖσδε τάξεσιν ὁ νόμος κρατεῖ, τὸ ἑκάστω ἐπὶ ἑκάστης τάξεως μονάδα, δέκα μὲν μονάσι, τῶν ἐν τῇ ἀμέσως κατωτέρα τάξει, ἰσοδυναμεῖν, δεκατημόριον δὲ τῆς ἐν τῇ προσεχῶς ἀνωτέρα μονάδος ὑπάρχειν.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 21. Οἱ, καθ' ὃν εἴρηται τρόπον, ἐκφερόμενοι ἀριθμοὶ δι' ἐννέα τῶνδε γράφονται χαρακτήρων, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. οἱ καθ' ἡμᾶς ἅπασι γνωριμώτατοι εἰσίν. Ὁ δὲ τῆς τούτων καταγραφῆς στίχος, διῃρημένος νοεῖται κατὰ τόπους, ὧν ἕνα ἕκαστος καταλήψεται χαρακτήρ. Καταλέγονται δὲ οἱ τόποι, ἧπερ ἔθος τοῖς Ἀνατολικωτέροις τῶν Ἐθνῶν τὰ παρ' αὐτοῖς γραφόμενα ἀναγινώσκειν, ἀρχῆς δηλονότι δεξιόθεν πρὸς τὰ λαιὰ γινομένης. Τῶν δὲ τόπων ὁ μέν τις ταῖς ἁπλαῖς ἀφώρισται μονάσιν, ὁ δ' ἐγγὺς πρὸς ἀριστερὰν μετὰ τοῦτον ταῖς δεκάσιν, ὁ δ' ἐχόμενος ταῖς ἑκατοντάσι· καὶ οὕτως ἐφεξῆς· Ἐν δὲ τῷ τῶν ἁπλῶν μονάδων προσεχῶς ἡγουμένῳ τόπῳ, τὸν χαρακτῆρα τιθέαμεν, ὑφ' οὗ ὁ τῶν τῆς μονάδος δεκατημορίων δηλοῦται ἀριθμός· κἀν τῷ πρὸ τούτου, τὸν ὑφ' οὗ ὁ τῶν ἑκατοστημορίων· καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

§. 22. Ἔνθα δὲ, παρ' ἔλλειψιν τῶν τινος τάξεως μονάδων, ὁ τόπος ἄμοιρος χαρακτῆρος διαμένει καὶ κενὸς, τῷ σημείῳ τῷδε (0), ὃ μηδενικὸν ὀνομάσομεν, τὸν τόπον πληροῦμεν, ὡς ἂν μὴ τῆς τάξεως περιτραπείσης ἐπιγένοιτο σύγχυσις. Τὸν δὲ δὴ τόπον τῶν ἁπλῶν μονάδων, τῷ κόμματι (,) διασημαινόμεθα, πρὸς δεξιὰν τοῦ κατ' ἐκείνας χαρακτῆρος ὑποδιαστέλλοντες· εἴμπερ πρώτιστος ἁπάντων ἐκεῖνος· Τηλικαῦτα γὰρ τὸ τῆς ὑποδιαστολῆς (,) περιττόν.

§. 23. Τοιγαροῦν ἐκ τῶν εἰρημένων, ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ 306, 27 νοητέον ἓξ μὲν μονάδας ἁπλᾶς· δεκάδα δὲ οὐδεμίαν· ἑκατοντάδας δὲ τρεῖς. Καὶ προσέτι δὲ καὶ μονάδος δεκατημόρια μὲν δύο, ἑκατοστημόρια δὲ ἑπτά. Παραπλησίως δὲ νοεῖν χρὴ, καὶ τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς οὕτω γεγραμμένους· 327, 95476. Καὶ 4708, 3700. Καὶ 27, 05. Καὶ 18, 0004. Καὶ 0, 451. Καὶ 0, 8005. Καὶ 0, 0009. Πανταχοῦ γὰρ ἡ μονὰς ἡ δι' ἑκάστου μὲν τῶν χαρακτήρων παρισταμένη, διὰ δὲ τοῦ (0) ἐπὶ χώρας τινὸς κατατασσομένη, μονάσι δέκα τᾶν ἐπὶ τοῦ προσεχῶς ἡγουμένου τόπου ἰσοδυναμεῖ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 24. Τοῦ τῶν ἁπλῶν μονάδων τόπου κατὰ χώραν μένοντος, ὁ κατὰ τὰ ὁροθετηθέντα καταγεγραμμένος ἀριθμὸς, ὅσους ἂν ἑκατέρωθεν προσκειμένους χοίη μηδενικὲς χαρακτῆρας, οὐδεμίαν τὸ παράπαν τροπὴν ὑποστήσεται. Οὐκοῦν ὁ ἀριθμὸς 23, 47· κἂν οὕτω γραφείη 0023, 47. κἂν οὕτω 23, 47000, κἂν οὕτω, 0023, 470, κἂν ποικιλαχῶς ἄλλως, ἀεὶ ἔσται ὁ αὐτός.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 25. Ἐὰν δὲ ἐπὶ ἀριθμοῦ τοῦ οὕτω καταγεγραμμένου 0023, 470 ἡ τῶν ἁπλῶν ὑποδιαστολὴ (,) μονάδων, ἐπὶ τοῦ ἐφεξῆς ἡγουμένου μεταπέσῃ τόπου, οἷον 00234, 70 ὁ μὲν τὰ δεκατημόρια τὸ πρὶν ἐξαριθμῶν χαρακτὴρ, μονάδας τηνικαῦτα ἀριθμήσει ἁπλᾶς· ὁ δὲ τὰ ἑκατοστημόρια, ἀριθμήσει δεκατημόρια· ὁ δὲ τὰς μονάδας, ἤδη δεκάδας. Καὶ ἐν γένει, ἕκαστος τῶν ἐκκειμένων χαρακτήρων μονάδας σημανεῖ, κατὰ τὸ δεκαπλάσιον τῶν προτέρων μείζονας. Καὶ τῇ τοιᾷδε ἄρα τοῦ σημείου μεταθέσει, τὸ ἀριθμητὸν δεκαπλασιασθήσεται. (§. 14.)

ΠΟΡΙ-

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ·

§. 26. Ἔνθεντοι ἐὰν ἐπὶ τȣ̃ αὐτȣ̃ ἀριθμȣ̃ 0023, 470 τὸ τῆς ὑποδιαστολῆς σημεῖον (,) ἐπὶ τόπον μετατεθῇ τὸν ἐγγὺς ἑπόμενον, ὡς εἶναι 002, 3470, ὁ ἀριθμὸς κατὰ τὸ δεκαπλάσιον τὴν δύναμιν ἀπομειωθήσεται, τῶν μονάδων ἁπασῶν ἀντὶ τῆς προτέρας αὐξήσεως, ὄντως ἐλαττȣμένων. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ὁ ἀριθμὸς ἑκατοντάκις μείζων μὲν ἀποβήσεται τῇ δυνάμει τῆς ὑποδιαστολῆς διστῷ τόπῳ κατὰ τὰ προηγȣ́μενα μεταχωρȣ́σης, ἐλάσσων δὲ, κατὰ τὰ ἑπόμενα. Ὅθεν καὶ ὅπως ἂν χιλιάκις ὁ αὐτὸς, ἢ μυριάκις μᾶλλον ἢ ἔλαττον εἰκάσειε, ῥᾴδιον συνιδεῖν. κτξ. Τȣ̃ γȣ̃ν ἀριθμȣ̃ 0023, 470 ἑκατονταπλάσια δύναται ὁ 002347, 0, ἤτοι ὁ 2347· χιλιοπλάσια δὲ ὁ 23470. Καὶ ἑκατοντάκις δὲ χιλιοπλάσια ὁ 2347000. Τȣ̓ναντίον δὲ τȣ̃ ἀριθμȣ̃ 0023, 470 ἑκατοστημόριον ἐστὶ 0, 2347, χιλιοστημόριον δὲ ὁ 0, 02347. δεκαχιλιοστημόριον δὲ 0, 002347. καὶ ἐφεξῆς ὡσαύτως.

ΣΧΟΛΙΟΝ·

§. 27. Τȣ́των κατανοȣμένων, ῥᾴδιον ὁντιναȣ̃ν χαρακτήρων στίχον, ὃς ἂν κατὰ τὸν ὀροθετηθέντα γεγραμμένος τρόπον, ὑποδιαστέραν τῶν ἁπλῶν μονάδων τάξιν μὴ ἔχοι, διὰ τῶν ἀνωτέρω ἑρμηνευθέντων ὀνομάτων δεξιῶς ὑπαναγινώσκειν. Καὶ μάλιστα εἴ τις τρεῖς ἐφεξῆς ἐκκειμένȣς χαρακτῆρας ἐπίσταιτο ἀναλέγεσθαι. οἷον 005. 060. 900. 053. 620. 503. 794. Οὐδεμία γὰρ ἐν τȣ́τῳ δυσχέρεια. Διῃρήσθω μὲν γὰρ ὁ προτεθεὶς στίχος κατὰ κλάσεις, ἀνὰ χαρακτῆρας ἓξ περιεχȣ́σας. ὁ δὲ πρῶτος ἀεὶ τῶν ἐν ταῖς κλάσεσι χαρακτήρων ἐπισημανθήτω τοῖς ἑξῆς °, ʹ, ʺ, ‴, κτξ. Εἶτα τῶν κλάσεων ἑκάστη, εἰς κόμματα δύο, ἀνὰ χαρακτῆρας τρεῖς, ὑποδιεστάλθω ὧδε.

5 | 339″ | 870 | 325′ | 743 | 270°, 274.

Τȣτȣ γενομένȣ ἀπὸ τȣ̃ χαρακτῆρος ȣ̃ αἱ μονάδες τῆς ἀνωτάτω τάξεως εἰσὶ, διὰ τῶν ἀεὶ καταδεεςέρων ἡ πρόοδος χωρείτω, καθ᾽ ἑκάςȣ κόμματος τȣ̃ ἐκ τριῶν, ἢ ἐλαττόνων χαρακτήρων, οἷα δὴ ἔτυχε, συγκειμένȣ. τῆς ἀναγνώσεως προϊȣ́σης. Νοείσθωσαν δὲ οἱ χαρακτῆρες μονάδας μὲν ἀριθμεῖν ἁπλᾶς τῷ° τȣ̃ κόμματος ἐπισημαινομένȣ· Μιλλιόνια δὲ τῷ′, Διλλιόνια δὲ τῷ″, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· Τὸ δὲ καθ᾽ ἑκάςην τῶν κλάσεων κόμμα, καθ᾽ ὃ ἄσημος ἐςὶν ὁ τῶν τριῶν ἔσχατος χαρακτὴρ, διασημαινέτω τὰς χιλιάδας τῶν αὐτῶν μονάδων, ὧν αἱ τάξεις διὰ τῶν ἐπισήμων °, ′, ″, ἐκτίθενται ἐπὶ τῶν κομμάτων ἃ προσεχῶς κεῖται. Κατὰ ταῦτα ȣ̃ν τὸν προτεθέντα ἀριθμὸν ἀπαγγέλλειν ἐςὶν ὧδέ πως. 5 χιλιάδες, καὶ 329 διλλιόνια. 870 χιλιάδες, καὶ 325 μιλλιόνια. 743 χιλιάδες, καὶ 297 μονάδες.

§. 28. Οἱ χαρακτῆρες οἱ τῶν ὑπὸ τὰς ἁπλᾶς μονάδας τάξεων σημαντικοὶ σπανίως ἀναγινώσκονται, κἂν δεήσειε καὶ τȣ́τȣς ἀποδȣ̃ναι, ἐκ τῶν εἰρημένων εὐμαρὴς ὁ τρόπος τῆς ἀναγνώσεως.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 29. Ὁ δὲ κλασματικὸς καταγράφεται ἀριθμὸς, γραμμῆς πλαγίως διαχθείσης, καὶ τὸν ἐπιγραφόμενον ἀριθμητὴν τȣ̃ ὑπογραφομένȣ παρονομαςȣ̃ διαςειλάσης, οἷον $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{18}{37}$· ἢ, ὅπερ ἥκιςα κανονικὸν, (§. 8.) τῶν ὅρων τȣ̃ κλάσματος καὶ αὐτῶν κλασματικῶν τυχόντων, οἷον, $\frac{3\frac{1}{2}}{7}$, $\frac{5\frac{2}{3}}{13}$, $\frac{3}{7\frac{4}{5}}$, $\frac{5\frac{2}{3}}{7\frac{4}{5}}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 30. Ἔςι καὶ ἄλλ᾽ ἄττα σημεῖα, δι᾽ ὧν αἱ τῶν ἀριθμῶν, ἢ τῶν ἄλλων ποσοτήτων διασημαίνονται

σχέσεις.

χέσεις. Ἐν οἷς τὸ μὲν = ἰσότητα μηνύει τῶν οἷς ἂν ἐγγράφοιτο· Τὸ δὲ >, ἢ τὸ <, μεῖζον μὲν εἶναι κατηγορεῖ τὸ πρὸς ὃ διαχαίνει, ἔλαττον δὲ τὸ πρὸς ὃ διοξύνεται. οὕτως $0,3 = \frac{3}{10}$. δηλοῦται γὰρ δι' ἀμφοτέρων τὸ αὐτὸ κλάσμα, ὥπερ δῆλον ἐκ τῶν μικρῷ πρόσθεν εἰρημένων. Παραπλησίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν $0,47 = \frac{47}{100}$· $0,094 = \frac{94}{1000}$, καὶ ὅσα τοιουτότροπα. Ἀλλὰ γὰρ $0,3 > \frac{3}{11}$, ἢ $\frac{3}{11} < 0,3$, μεῖζον εἶναι βούλεται τὸ κλάσμα $0,3$ ἢ τὸ $\frac{3}{10}$, τὸ δὲ $\frac{3}{11}$ ἔλαττον. Τὰ λοιπὰ τῶν σημείων τοῦ τοιοῦδε γένους ἐν οἰκείοις τόποις σαφηνισθήσεται.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 31. Ἐὰν ἀριθμὸς Κ, δυσὶν, ἢ πλείοσιν ἄλλοις Α, Β, Γ ἅμα ληφθεῖσιν, ἴσος ᾖ, τούτων εἶναι τὸ **Κεφάλαιον** ἐκεῖνος εἰρήσεται. Τὸ δὲ ἀριθμὸν Α, ἀριθμῷ Β **προσιθέναι**, τὸ τούτων ἐστὶν εὑρίσκειν κεφάλαιον· ᾧ δὴ αὖθις καὶ τοῦ Γ προστιθεμένου, τὸ κεφάλαιον προκύπτει τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

§. 32. **Διαφορὰ** δυοῖν ἀριθμῶν ἀνίσων Α καὶ Β ἐστὶν ἀριθμὸς, ᾧ τῶν δοθέντων ὁ μείζων Α, τὸν ἐλάσσονα Β ὑπερέχει. Τὸν δὲ δὴ ἐλάσσονα ἀπὸ τοῦ μείζονος **ἀφαιρεῖν**, τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν εὑρίσκειν ἐστί.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 33. Εἴτε προστιθέναι δέοι ἀριθμὸν ἀριθμῷ, οἷον τὸν Β τῷ Α, εἴτε καὶ ἀφαιρεῖν ἀπὸ τούτου ἐκεῖνον, ἀνάγκη πᾶσα τῶν ἀριθμῶν τὰς μονάδας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι. Εἰ δ' οὖν τοῦτο, καὶ αἱ κατὰ τὸ κεφάλαιον, ἢ τὴν διαφορὰν μονάδες, ταῖς αὐταῖς μονάσιν ἴσαι ἔσονται καὶ αὐταί.

§. 34. Ἐὰν ᾖ Κ κεφάλαιον τῶν Α καὶ Β ἀριθμῶν, θατέρου τούτων ἀπὸ τοῦ Κ ἀφαιρουμένου, οἷον

τοῦ

τοῦ B, ὑπολειφθήσεται ἅτερος, ὁ A. Καίγε τῆς τῶν ἀριθμῶν A καὶ B διαφορᾶς, τῷ ἐλάσσονι B προστεθείσης, προκύψει ὁ μείζων A.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 35. Ἀριθμοὺς ὁστινασοῦν, κατὰ τὰ ἐν §. 20. ὁροθετούμενα ἐκδηλουμένους, ὧν αἱ ἁπλαῖ μονάδες ἴσαι, προσθεῖναι.

ΛΥΣΙΣ.

357	3, 52	0, 3724
8429	14, 7	0, 042
25	0, 83	0, 73
790	34,	0, 004
9601	53, 05	1, 1484

Ἐκκείσθωσαν οὕτω καταγραφόμενοι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ, ὥστε τὰς ἰσοδυνάμους μονάδας κατὰ στήλην ὑπ' ἀλλήλους τετάχθαι. Οὕτω γὰρ ἀπὸ τῶν δυνάμει ἐλαχίστων ἀρχῆς γινομένης, ἐν κεφαλαίῳ αἱ μονάδες ἐπαθροισθήσονται αἱ ὁμόστιχοι· ὅσαι δ' ἐξ αὐτῶν δεκάδες συναποτελοῦνται, ἐπὶ τοῦ ἐχομένου ἀμέσως προσβιβάζονται στίχου τοῖς ἐκεῖσε μονάσι προσαθροισθεῖσαι, τῶν παρὰ τὰς εἰρημένας δεκάδας λοιπῶν μονάδων, ὑπὸ τῷ στίχῳ καταγραφομένων. Καὶ ἔσονται τοίνυν, αἱ τοῦ χαρακτῆρος μονάδες, ταῖς κατὰ τὴν στήλην ἥπερ ὑπογράφεται ἰσοδυναμοῦσαι. Ἅπαντες δὲ οἱ χαρακτῆρες, οἱ ἐκ πάντων οὕτω προσαθροιζόμενοι τῶν στίχων, παρέξουσι τὸ κεφάλαιον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Εὔδηλον γὰρ ὅτι ἐν τῷ ἀριθμῷ, ὃν οἱ ὑπὸ τὰς στήλας ἐκφέρουσι χαρακτῆρες, πᾶσαι πάντων τῶν κατὰ πάσας τὰς τάξεις δοθέντων ἀριθμῶν αἱ μονάδες, ἐμπεριλαμβάνονται.

ΠΟΡΙ-

ΠΟΡΙΣΜΑ·

§. 36. Τὰ πρὸς τὴν αὐτὴν ἀναφερόμενα μονάδα κλάσματα, ὧν παρονομασαὶ οἱ αὐτοὶ, προστίθενται ἀλλήλοις, τῶν μὲν ἀριθμητῶν ἐν κεφαλαίῳ ἐπαθροιζομένων, τοῦ δὲ παρονομαστοῦ τηρουμένου. Εἰσὶ γὰρ τούτων τεθέντων, αἱ ὑπὸ τῶν ἀριθμητῶν σημαινόμεναι μονάδες, ἀλλήλαις ἴσαι.

Οὕτω τῶν κλασμάτων $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$ κεφάλαιον ἐστὶ τὸ $\frac{3}{4}$· τῶν δὲ $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{7}$, τὸ $\frac{10}{7}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ·

§. 37. Ἀριθμῶν δυοῖν, ἐν οἷς μονάδες δεκαδικαὶ οἱωνδήποτε τάξεων (§. 20.) περιέχονται, τοῦ μείζονος τὸν ἐλάσσονα ἀφελεῖν.

ΛΥΣΙΣ·

5672	3'45'8	3'0'0'0
4261	1539	985
1411	1919	2015
5,3'21	0,57'0'0	6,0'0'0
3,251	0,0327	0,213
2,070	0,5373	5,787

Οὕτως οἱ ἀριθμοὶ γραφέσθωσαν, ὡς τῶν μονάδων τὰς ἰσοδυνάμους ὁμοστιχεῖν. Εἶτα ἀπὸ τῶν δυνάμει ἐλαχίστων ἀρχομένοις κἀπὶ τὰς μειζοδυνάμους χωροῦσιν ἀφαιρείσθω ὁ τῶν μονάδων ἑκάστης τοῦ τάξεως ἀριθμὸς, ὁ ἐπὶ τοῦ ἥττονος, ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ μείζονι, καὶ τὸ λοιπὸν σημειούσθω ὑπὸ στίχον τὸν αὐτόν· ὁπηνίκα δηλαδὴ πλείους αἱ ἰσοδύναμοι μονάδες εἰσὶ τῷ ἐπὶ τοῦ μείζονος ἀριθμοῦ χαρακτῆρι, ἢ τῷ ἐπὶ τοῦ ἥσσονος. Ἐὰν δὲ ὦσιν ἐλάσσονες, μονὰς μία ἀπὸ τοῦ χαρακτῆρος τοῦ ἐγγὺς ἑπομένου, εἰς

δέκα

δέκα ἀναλυέσθω, ταῖς ἔνθα ἡ ἀφαίρεσις γίνεται ἰσοδυναμούσαις, καὶ ταύταις προστιθεμέναις· ἔστω δὲ τῆς ἀφαιρέσεως ἀπὸ ἀριθμοῦ ἤδη μείζονος γινομένης, ἡ διαφορὰ ὡς πρότερον σημειούσθω. Ὁ δὲ τοῦ μείζονος τῶν ἀριθμῶν χαρακτὴρ, ἀφ᾽ οὗ ἡ ληφθεῖσα εἰς δέκα ἀναλέλυται μονάδας τῆς ἐγγὺς καταδεεστέρας τάξεως, νοείσθω ἤδη μονάδι ἀπομειωθεὶς, ἐς τ᾽ ἂν δέοι τὴν ἀφαίρεσιν προαγαγεῖν. Τούτων οὕτως ἄχρι τελευτῆς γενομένων, ἔσονται αἱ τοῦ ὑφ᾽ ἑκάστῃ στήλῃ γεγραμμένου χαρακτῆρος μονάδες, ὁμοταγεῖς ταῖς ὁμοστίχοις καὶ ἰσοδύναμοι. Συναχθέντες δὲ οἱ χαρακτῆρες οὗτοι δώσουσι τὴν διαφοράν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὁ γὰρ διὰ τῶνδε τῶν χαρακτήρων δηλούμενος ἀριθμὸς, τὰς ὑπεροχὰς περιενήνοχε τῶν κατὰ πᾶσαν τάξιν μονάδων τοῦ μείζονος τῶν ἀριθμῶν, ὑπὲρ τὰς ἐν τῷ ἥττονι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 38. Τῶν κλασμάτων τῶν ἐπὶ τὴν αὐτὴν μονάδα ἀναφερομένων, παρονομαστὰς δ᾽ ἐχόντων τοὺς αὐτοὺς, ἡ διαφορὰ λαμβάνεται, ἀφαιρουμένου μὲν τοῦ ἥττονος ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀριθμητοῦ, τοῦ δὲ παρονομαστοῦ τηρουμένου.

Οὕτως ἡ διαφορὰ τῶν κλασμάτων $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$ ἐστὶ $\frac{2}{4}$. Ἡ δὲ τῶν $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{7}$ ἐστὶ $\frac{3}{7}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 39. Τὰ δι᾽ ἀριθμῶν ἐκδηλούμενα πράγματα πρὸς ἄλληλα παρατιθεμένοις, ἐξ αὐτῆς δῆλον τῆς φύσεως, κἂν μηδεὶς ἐκδιδάξειε, πότε δὴ τῇ προσθέσει προσχρηστέον ἡμῖν ἐστὶ, πότε δὲ τῇ ἀφαιρέσει. Οὕτως ὑπολογίζοντες πάντες τά τε λήμματα, καὶ τὰς δαπάνας, ἐν μέρει καταγράφειν εἰώθασιν,

εἰς

εἰς κεφάλαι᾽ ἄττα ἰδίᾳ ἑκάτερα ἐπαθροίζοντες· εἶτα τῶν κεφαλαίων τὸ ἧττον ἀφαιρῶσιν ἀπὸ τοῦ μείζονος· καὶ τοῦ μὲν τῶν λημμάτων ὑπερβάλλοντος, τῇ ὑπεροχῇ τὴν αὔξησιν τῆς περιουσίας ἑαυτῶν προσλογίζονται· ἣν δ᾽ ὑπερβάλλοι τὸ τῆς δαπάνης, πλεονεκτεῖν μὲν τῇ διαφορᾷ τὴν ἔνδειαν, μειονεκτεῖν δὲ τὴν περιουσίαν σφίσιν ἐπιγιγνώσκουσιν.

§. 40. Ἐκπερανθείη δ᾽ ἂν τὰ τοῦ λογισμοῦ πολλάκις ἐν ἐπιτομῇ οὕτω. Διακρινέσθωσαν τῶν ἀριθμῶν οἷς τὰ λήμματα δηλοῦται, τῶν οἷς αἱ δαπάναι, ὅτῳ δήποτε σημείῳ· οἷον τὰ μὲν τῷ +, αἱ δὲ τῷ − ἐπισημειούσθωσαν. Εἶτ᾽ ἐκκείσθωσαν ὁποιαδήποτε τάξει, οἷον + 17 − 13 − 5 + 8 − 2 + 7 − 5. Συναχθήσεται γὰρ τῶν ζητουμένων τὸ ἔσχατον, ὅσον δηλαδὴ τὸ τῆς περιουσίας τοῖς διαλλήλοις λήμμασί τε καὶ δαπανήμασι πλεονεκτοῦν, ἢ μειονεκτοῦν εἴη, τρόπῳ τοιῷδε, ἢ παραπλησίῳ. + 17 − 13, ταυτὸ δύναται τῷ + 4. τούτῳ γοῦν εἰ προσγένοιτο − 5, προκύψει − 1. Ἀλλὰ γὰρ − 1 + 8 ἐστὶν + 7. τὸ δὲ, μετὰ τοῦ − 2 ἐστὶ + 5. Προσπαραληφθέντος δὲ καὶ τοῦ + 7, γίνεται + 12· τό, τε + 12 σὺν τῷ − 5 καθίσταται + 7· τοιγαροῦν ἡ τῶν λημμάτων ὑπὲρ τὰ δαπανηθέντα διαφορὰ ἔσται 7, καὶ τοσούτῳ καὶ προσλογισθήσεται τῆς περιουσίας τὸ πλεονέκτημα. Ἀλλ᾽ ἐπὶ τοῦ ἑφεξῆς παραδείγματος + 12 − 15 − 2 + 4 − 5, τῶν αὐτῶν γενομένων, τὸ προκύπτον − 6, τὴν τῶν δαπανηθέντων ὑπεροχὴν ὑπὲρ τὰ λήμματα, τῷ ἀριθμῷ 6 ὑπερπίπτουσαν συνιδεῖν παρέξεται, καὶ τοσούτῳ ἄρα καὶ τὴν μὲν περιουσίαν ἀπομειωθεῖσαν ἐλέγχει, τὴν δὲ ἔνδειαν προσαυξήσασαν.

§. 41. Ὁ οὕτω τοὺς ἀριθμοὺς μετιὼν, τὰς μὲν τῶν ἀριθμουμένων ποσότητας ὡς θετικὰς ἐκδέχεται, ἃς ἐπισημειοῖ τῷ +, τὰς δὲ ἀποφατικὰς, ἃς τῷ −· τοῦ μὲν δηλαδὴ τὸ πλέον, τοῦ δὲ τὸ μεῖον αὐτῷ προσσημαίνοντος. Τῶν δὲ ποσοτήτων τίνας μὲν ἀντὶ θετικῶν, τίνας δὲ ἀντὶ ἀποφατικῶν τιθέναι δέον, ἐξ αὐτȣ̃ τȣ́τȣ, ὃ τέως ἐςὶ τὸ σκοπȣ́μενον, καταφαίνεται. Τῷ μὲν γὰρ, φέρε, τὰ προσκτηθέντα οἱ συνιδεῖν ὅσα, σκοποῦντι, τὰ μὲν τȣ̃ λήμματος θετικὰ ἔςαι, τὰ δὲ τῆς δαπάνης ἀποφατικά. Τȣ̉ναντίον δὲ τὰ τῆς ἐνδείας ὑπολογιζομένῳ, καὶ ὅσον αὐτῷ τὰ περιόντα τῶν χρημάτων μεμείωται, ἢ ὅσα τῶν ἀλλοτρίων δεδαπάνηται· τὰ μὲν τῆς δαπάνης θετικὰ ἔςαι, τὰ δὲ τȣ̃ λήμματος ἀποφατικά. Ὁπότερον δ' ἄντις τȣ́των ἕλοιτο, τὰ τȣ̃ ὑπολογισμȣ̃ ὡσαύτως προβήσεται· ὁ δὲ ἔχατον προκύπλων ἀριθμὸς δοκιμάσει. Ἐὰν γὰρ τῷ + ἐπισημαίνηται, τὸ θετικὸν δείξει, ἐὰν δὲ τῷ —, τὸ ἀποφατικόν.

§. 42. Μυρία ποσοτήτων φέρεται γένη, τὰ κατὰ τὴν γενομένην λημμάτων μεταξὺ καὶ δαπανημάτων παράθεσιν, πρὸς ἄλληλα ἔχοντα, ὧν ἐὰν τάδε φέρε, ἢ τάδε ὡς θετικὰ ληφθῇ, τἀναντία ἀποφατικὰ ἔςαι. Οὕτω τῆς ἀνόδȣ κατὰ θέσιν ληφθείσης, ἀποφατικὴ ἔςαι ἡ κάθοδος· καὶ ἀνάπαλιν. Καὶ ἐὰν ἡ ἀπὸ τῆς ἕωας πρὸς δυσμὰς φέρȣσα πορεία θετικὴ λέγηται, ἡ δυσμόθεν πρὸς ἕω ἀποφατικὴ ἔςαι· καὶ ἀνάπαλιν. Καὶ εἰ τὸ ἐν τῇ ὑδρίᾳ ἐγχεόμενον ὕδωρ, καταφατικῶς νοοῖτο, τὸ ἐκχεόμενον τῆς ὑδρίας ἀποφατικῶς δεήσει ἐκδέξασθαι· καὶ ἀνάπαλιν. Καὶ τῆς ἄνω ἑλκȣ́σης δυνάμεως θετικῆς ȣ̉́σης, ἡ καθελκȣ́σα τε καὶ κατασπῶσα, ἀποφατικὴ ἔςαι· καὶ τȣ̉ναντίον· καὶ τὰ παραπλήσια.

§. 43. Οὗ δ' ἂν ȣ̉δέτερον παρῇ τῶν σημείων, θετικῶς ἀεὶ ἐκλαμβάνεται τὸ κείμενον. Τὰ δὲ τοῖς σημείοις ὁμοιότροπα τῶν ποσῶν, τὰ ἐπίσης δηλαδὴ διὰ τῶν +, ἢ τῶν —, θετικῶς, ἢ ἀποφατικῶς ἔχειν νοȣ́μενα, ὑπ' ἀλλήλων αὔξεται, ὡς ὑφ' ἑκάςȣ τȣ́των προσαφθέντος, οἷον τȣ̃ Α, κατὰ μέτρον τῆς

προσόπροσεδϑ, τὴν τῶν λοιπῶν ἅμα συλλογὴν ἐπὶ τὸ πλέον προάγεσθαι. Δυεῖν δὲ ποσοτήτων τοῖς +, καὶ −, διαφερϐσῶν, ὧν ἡ μὲν θετικὴ δηλονότι, ἡ δὲ ἀποφατικὴ, ἀείποτε ἡ ἐλάσσων μέρος τῆς μείζονος περιτρέπει ἑαυτῇ ἴσον, τὴν ὑπεροχὴν καταλείπϐσα τῆς μείζονος ὑπὲρ τὴν ἐλάσσονα. Ἡ δὲ ὑπεροχὴ θετικὴ μὲν ἐσαι, θετικῆς τῶν ποσοτήτων ϐσης τῆς μείζονος· ἀποφατικὴ δὲ, ἀποφατικῆς. Ἐξ ϐ ἕπεται καὶ τὰς + Α − Α μηδὲν παρέχειν, ὅ,τι ποτ᾽ ἂν εἴη τὸ ὑπὸ τϐ Α δηλϐμενον.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 44. **Πολλαπλασιάζειν** ἀριθμὸν δοθέντα τὸν Α, δι᾽ ἄλλϐ κ̕ τϐτϐ δοθέντος τϐ Ε, ϐδὲν ἀλλ᾽ ἢ ἐκ τϐ Α καινὸν ἐςὶν ἀπογεννᾷν ἀριθμὸν τὸν Γ, λόγῳ τοιῷδε, ᾧ καὶ ὁ Ε ἐκ τῆς μονάδος ἐπαναληφθείσης γεγένηται. Καὶ καλεῖται μὲν ὁ Α, **Πολλαπλασιαςέος**· ὁ δὲ Ε, **Πολλαπλασιαςὴς**· ὁ δὲ Γ τὸ **Παραγόμενον**, ἢ τὸ **Γινόμενον**.

§. 45. **Διαιρεῖν** δὲ ἀριθμὸν δοθέντα τὸν Α, δι᾽ ἀριθμϐ δοθέντος ἄλλϐ τϐ Δ, ϐδὲν ἐςὶν, ἀλλ᾽ ἢ ἀπὸ τϐ Α, καινὸν ἀριθμὸν ἀπογεννᾷν τὸν Π, ὃν δήπϐ τρόπον καὶ ἀπὸ τϐ Δ ἡ μονὰς γίνεται. Καὶ ὁ μὲν ἀριθμὸς Α, ἐςὶν ὁ **Διαιρετέος**· ὁ δὲ Δ, **Διαιρέτης** καλεῖται· ὁ δὲ Π, τὸ **Πηλίκον**.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 46. Ὅστις ποτ᾽ ϐν ᾖ ὁ ἀριθμὸς Α, ὁ πολλαπλασιαςὴς Ε, ἢ ὁ διαιρέτης Δ, ἤτοι ὁλοσχερής ἐςὶν, ἢ κλασματίας. Εἰ μὲν ϐν ὁλοσχερὴς ὁ πολλαπλασιαςὴς, ἐκ τῆς μονάδος γίνεται ἐπαναλημμένης· τϐτέςι μονάδων ὁποσωνϐν τινῶν ἰσομεγεθῶν ἀλλήλαις ἐπαθροιζομένων. Τοιγαρϐν καὶ ἡ τϐ παραγομένϐ εὕρεσις, δι᾽ ἐπαναλήψεως τϐ πολλαπλασιαςέϐ ἤτοι διὰ προσθέσεως ἀριθμῶν τινῶν ἐκείνῳ ἴσων συν-

Σχ. 2. τελεσθήσεται. Καὶ ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ΑΒ, ὁ ἐκ μονάδων τε, καὶ μερῶν μονάδος ὁπωσῦν συγκείμενος, πολλαπλασιασθῇ δι᾽ ὁλοσχερῦς ἀριθμῦ τῦ ΓΔ, παραχθήσεται ἀριθμὸς, ὁ ἐν εἴδει τετραπλεύρου ΑΒΕΖ ἐκκείμενος· Καὶ τῦδε δὴ τῦ παραγομένου αἱ μονάδες ταῖς τῦ πολλαπλασιαςέου ΑΒ μονάσιν, ἴσαι εἰσὶν, ὁποῖαι δήποτ᾽ ἂν ὦσιν αἱ μονάδες τῦ πολλαπλασιαςῦ ΓΔ.

§. 47. Ἐὰν δὲ ὁ Διαιρέτης ὁλοσχερὴς ᾖ, γίνεται ἐξ αὐτῦ μονὰς, εἰς ἴσα μέρη διαιρεθέντος, ταῖς ἐνέσαις αὐτῷ μονάσιν ἰσάριθμα. Ἄρα καὶ τὸ πηλίκον προκύψει, ἐπειδὰν καὶ ὁ Διαιρετέος εἰς τοσαῦτα ἴσα ἀλλήλοις μέρη διαιρεθῇ. Καὶ εἰ διὰ ΓΔ διελεῖν δέοι ἀριθμόν τινα, τῦ ἀριθμῦ τῦδε, κατὰ τὸ ΑΒΕΖ, τετραπλεύρου δίκην ἐκκειμένου, ὡς ἐν ἑκάςῳ τῶν ςίχων τῶν κατὰ τὴν ΓΔ πρόοδον χωρῦντων, τοσαύτας ἐνεῖναι μονάδας, ἢ μονάδος μέρη ἀλλήλοις ἴσα, ὅσας ὁ Διαιρέτης ΓΔ περιενήνοχε, πηλίκον ἔςαι τὸ ΑΒ. Αἵτε ἐν αὐτῷ μονάδες, ἴσαι ἔσονται ταῖς μονάσι τῦ Διαιρετέου ΑΒΕΖ, ὁποῖαι δ᾽ ἂν ὦσιν αἱ μονάδες αἱ τῦ Διαιρέτου.

§. 48. Τοιγαρῦν ἡ τῦ αὐτῦ ἀριθμῦ Α διαίρεσις διὰ τῦ δοθέντος Δ, ποικιλαχῶς ἂν ἐκτελεσθείη· ῥᾴςα δὲ πάντων, ἐὰν αἱ ἐν τῷ Διαιρετέῳ Α μονάδες πᾶσαι, εἰς τοσάδε ἴσα μέρη διαιρεθῶσιν, ὅσαι αἱ μονάδες ἔνεισι τῷ Δ· τὰ δὲ δὴ μέρη ταῦτα ἐν εἴδει τετραπλεύρου, ὡς εἴρηται, διαταχθῇ. Οὕτω γὰρ ἕκαςος τῶν μορίων ςίχος, κατὰ ΓΔ χωρῶν τὴν μονάδα δώσει, ἧς τῇ διαιρέσει ἀνέφυ τὰ μόρια. Τῦτο ῦν γινομένου τὸ πηλίκον κλάσμα οἷον καθίςαται, ῦ ἀριθμητὴς μὲν ὁ Διαιρετέος, παρονομαςὴς δὲ ὁ Διαιρέτης· ὥςε ἐν γένει, εἰ διελεῖν δέοι Α διὰ Δ, τὸ πηλίκον εἶναι $\frac{A}{\Delta}$.

§. 49. Πρόχειρος μὲν ἡ τοῦ οὕτω διαιρεῖν μέθοδος, τῶν ἀριθμῶν Α, Δ βραχυτέρων ὄντων. Εἰ δὲ καὶ ὁ Διαιρετέος Α, τοῦ Διαιρέτου ἐλάσσων τύχοι, οὐδ' ἂν ἔχοι χώραν μέθοδος ἑτέρα. Μειζόνων δὲ τῶν ἀριθμῶν ὄντων, δυσχερέστερον τὸ $\frac{A}{\Delta}$ εἰς νόησιν παρὰ τὴν πολυμέρειαν. Διὸ δὴ τότε περαίνεσθαι φιλεῖ ἡ διαίρεσις, ὡς οἷόν τε πλειόνων μονάδων ὁλοσχερῶν τηρουμένων. Γίνεται δὲ τοῦτο, ἐὰν ὡς ἔνι πλεῖστοι τῶν στίχων ὡς ὁ ΑΕ. ἐκ τῶν τοῦ διαιρετέου μονάδων ὦσι συγκείμενοι, ἐκ δὲ τῶν λοιπῶν, αἵτινες εἶεν, κλάσμα γένηται, καθ' ὃν τρόπον εἴρηται. Καὶ τὸ δὴ πρῶτον μέρος τοῦ τοιοῦδε πηλίκου, ἀριθμὸς ἔσται διασημαίνων, ποσάκις τοσαίδε μονάδες, ὅσαι ἔνεισι τῷ διαιρέτῃ, ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀφαιρεῖσθαι δύνανται· τοῦ δὲ κλάσματος, ὃ τὰ πολλὰ δέον προσεπιγράφειν, τῷ μὲν ἀριθμητῇ, αἱ λοιπαὶ ἔνεισι τοῦ διαιρετέου μονάδες, ἀντὶ δὲ παρονομαστοῦ αὐτὸς κεῖται ὁ διαιρέτης.

§. 50. Ἐπειδὴ δὲ ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς, οἷος ὁ $\frac{5}{7}$, ἐκ μονάδος γίνεται εἰς μέρη ἴσα διῃρημένης τοσάδε, ὁπόσαι αἱ μονάδες ἐν τῷ παρονομαστῇ, τῷ ἐξ αὐτῶν τῶν μορίων, ἡλίκον τὸ $\frac{1}{7}$, ταῖς ἐν τῷ ἀριθμητῇ μονάσιν ἰσάριθμα προσλαμβάνεσθαι (§. 7.), ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς κλασματίας ᾖ, εὑρεθήσεται δὴ τὸ παραγόμενον, τοῦ πολλαπλασιαστέου ἀριθμοῦ Α, τῷ τοῦ κλάσματος παρονομαστῇ διαιρουμένου, καὶ τοῦ ἐντεῦθεν ἀνακύπτοντος πηλίκου, διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ πολλαπλασιαζομένου.

§. 51. Τοὐναντίον δὲ ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{5}{7}$ μονὰς τελεῖται, ἐὰν εἰς τοσάδε ἴσα μέρη διαιρεθῇ, ὁπόσαι ἐν τῷ ἀριθμητῇ αἱ μονάδες· Τό, τε οὕτως ἀνακύψαν μόριον $\frac{1}{7}$, τοσάκις ληφθῇ, ὅσαι αἱ μονάδες ἐν τῷ παρονομαστῇ. Τοιγαροῦν καὶ ἡ διαίρεσις

 παντὸς

παντὸς ἀριθμοῦ Α, διὰ κλάσματος $\frac{B}{\Gamma}$ ἐκτελεσθήσεται, διαιρουμένου τοῦ ἀριθμοῦ Α, διὰ τοῦ ἐν τῷ κλάσματι ἀριθμητοῦ Β, καὶ τοῦ ἐντεῦθεν προκύπτοντος πολλαπλασιαζομένου διὰ τοῦ παρονομαστοῦ Γ.

§. 52. Πολλαπλασιασμοῦ σημεῖον ἐτέθη ×, τὸ μεταξὺ τῶν ἀριθμητικῶν χαρακτήρων ἐγγραφόμενον οὕτω 3 × 4. Ἐνίοτε δὲ καὶ τὸ (·) ὁμοίως παρενσιζόμενον. Καὶ δῆλον ἄρα τίποτε νοητέον ἐν τούτοις 3 × 4 = 3 · 4 = 12. Εἰ δὲ διὰ γραμμάτων ἐπισημαίνοιντο οἱ ἀριθμοί, ὧν ἕτερος δι' ἑτέρου πολλαπλασιαστέος, ἐκεῖνα καὶ διὰ τῶν αὐτῶν συζεύγνυσθαι σημείων δυνάμενα, ὡς τὰ πολλὰ μέντοι ἀμέσως, δίχα παρεμπτώσεως δηλαδὴ σημείου τινὲς, προσγράφεται. Τὸ δὲ πηλίκον, τὸ ἐκ διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ Α διὰ τοῦ Β προκύπτον, οὐδὲν δέον ἄλλως πως σημειοῦσθαι, ἢ κατὰ τὸν τύπον τοῦ κλάσματος $\frac{A}{B}$ (§. 48.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 53. Ἐὰν διὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ὁλοσχεροῦς ὄντος, τὸ γενόμενον διαιρεθῇ, ὁ πολλαπλασιαστέος ἀνακύψει· Καὶ ἐὰν διὰ τοῦ διαιρέτου, ὁλοσχεροῦς ὄντος, τὸ πηλίκον πολλαπλασιασθῇ, ὁ διαιρετέος ἀνακύψει. Ὃ κἂν ἐκ τοῦ 2 Σχήμ. εὔδηλον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 54. Ἐκ τῶν ἐν τῷ Σχολίῳ (§. 50. 51.) παρατετηρημένων, ἐπειδὴ τοῦτο ἀληθὲς ὂν ἕπεται, καὶ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἢ διαιρέτου κλασματικῶν ὄντων· Ἐν γένει ἄρα ἀριθμοῦ Α, δι' ἀριθμοῦ οὑτινοσοῦν Π πολλαπλασιασθέντος, ἐὰν τὸ παραγόμενον, διὰ τοῦ ῥηθέντος πολλαπλασιαστοῦ Π διαιρεθῇ, ὁ ἀριθμὸς Α πάλιν ἀνακύψει. Καὶ ἀριθμοῦ Α, δι' ἀριθμοῦ Δ

διαιρε-

διαιρεθέντος, ἐὰν τὸ πηλίκον διὰ τοῦ αὐτοῦ Δ πολλαπλασιασθῇ, ὁ ἀριθμὸς Α πάλιν ἀνακύψει. Εἴτε ὁλοσχερὴς εἴη ὁ Δ, εἴτε καὶ κλασματίας.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 55. Ἄρα καὶ ἀριθμοῦ τοῦ Α εἰς μέρη δύο Ρ καὶ Σ κατατμηθέντος, ὥστε εἶναι $Α = Ρ + Σ$, ἐὰν θάτερον τῶν μερῶν Ρ διαιρεθὲν διὰ τοῦ Δ, πηλίκον δῷ τὸ Π, ἔσται τὸ $Ρ = Π \times Δ$. Ἔνθεν τοι καὶ $Α = Π \times Δ + Σ$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 56. Ἐκ δὲ τοῦ αὐτοῦ 2 Σχήμ. Φανερὸν, ὡς ἐὰν ὁ δι᾽ ἀριθμοῦ ὁλοσχεροῦς τοῦ Π, πολλαπλασιαστέος Α, ἐξ ἀριθμῶν δυοῖν Β καὶ Γ σύνθετος ᾖ, ὡς εἶναι $Α = Β + Γ$, ἔσται δὴ τὸ παραγόμενον, $Π \times Α = Π \times Β + Π \times Γ$. Ἐξ οὗ ἕπεται, ὡς ἐὰν ᾖ $Α = Β - Γ$, ἔσται τὸ γινόμενον $Π \times Α = Π \times Β - Π \times Γ$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 57. Οὕτω καὶ ἐὰν ὁ διὰ τοῦ Δ διαιρετέος ἀριθμὸς Α, ἐκ μερῶν δυοῖν Β καὶ Γ σύνθετος ᾖ, ὥστε εἶναι $Α = Β + Γ$, ἔσται δὴ τὸ πηλίκον $\frac{Α}{Δ} = \frac{Β}{Δ} + \frac{Γ}{Δ}$.

Καὶ ἐὰν ᾖ $Α = Β - Γ$, ἔσται τὸ πηλίκον $\frac{Α}{Δ} = \frac{Β}{Δ} - \frac{Γ}{Δ}$.

Ἐὰν γὰρ ᾖ $Α = Β + Γ$, ἔσται $\frac{Β}{Δ} + \frac{Γ}{Δ} = \frac{Β + Γ}{Δ}$ (§. 36.) $= \frac{Α}{Δ}$. Ἐὰν δὲ ᾖ $Α = Β - Γ$, ἔσται $\frac{Β}{Δ} - \frac{Γ}{Δ} = \frac{Β - Γ}{Δ}$ (§. 38.) $= \frac{Α}{Δ}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ ς.

§. 58. Διπλασιασθέντος τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, διπλασιάζεται καὶ τὸ παραγόμενον. Γίνεται γὰρ

 ἤδη

ἤδη δὶς τοσοῦτον, ὃ διὰ τοῦ ἁπλοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἅπαξ ἐγίνετο. Καὶ ἐν γένει τοίνυν ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστής, δι' ἀριθμοῦ τινος πολλαπλασιασθῇ, διὰ τοῦ αὐτοῦ πολλαπλασιασθὲν ἔσται καὶ τὸ παραγόμενον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ.

§. 59. Ὅτι δ' αὐτὸ τοῦτο καὶ περὶ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ῥητέον, φανερόν. Διὸ καὶ ἀνάπαλιν θατέρου τῶν εἰρημένων ἀριθμῶν, δι' ἀριθμοῦ τινος ὁλοσχεροῦς διαιρεθέντος, δι' αὐτοῦ τούτου διαιρεθήσεται καὶ τὸ παραγόμενον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Η.

§. 60. Ἀριθμοῦ παντὸς A, δι' ἄλλου τοῦ Δ διαιρεθέντος, τὸ πηλίκον $\frac{A}{\Delta}$ παρίστησιν ὁσάκις ὁ Δ περιεχόμενος ἐστὶν ἐν τῷ A. ἐπειδὰν ἐφ' ἑκατέρου τῶν ἀριθμῶν A καὶ Δ, μονάδες ὦσιν αἱ αὐταί. Τουτέστι τὸ πολλαπλοῦν τοῦ διαιρέτου Δ, καὶ τὰ τοῦδε τοῦ Δ πηλίκα μέρη, ἅμα ληφθέντα, συναποτελεῖ τὸν διαιρετέον A. Τοῦτο δὲ αὐτόθεν ἐκ τοῦ τῆς διαιρέσεως νόμου (§. 48.) καταφανές, τοῦ Δ ὁλοσχεροῦς τυγχάνοντος. Ἐὰν δὲ τῷ Δ ὑποτεθῇ παρονομαστὴς ὁστισοῦν, οἷον 3, ὥστε κλάσμα συστῆναι· τοῦ αὐτοῦ A διὰ $\frac{\Delta}{3}$ διαιρεθέντος, πηλίκον ἔσται $\frac{3A.}{\Delta}$ (§. 51.), τὸ προκύπτον καὶ τοῦ 3 A, διαιρεθέντος διὰ τοῦ Δ. Καὶ δείξει τοίνυν ἐνταῦθα τὸ $\frac{3A,}{\Delta}$ ὁσάκις τὸ Δ ἐν τῷ 3 A ἐμπεριέχεται· καὶ γὰρ ὁ διαιρέτης καὶ ἤδη ὁλοσχερής. Ἐπεὶ δὲ δῆλον ὅτι Δ ἐν τῷ 3 A τοσάκις, ὁσάκις $\frac{\Delta}{3}$ ἐν τῷ A. Ἄρα τὸ αὐτὸ πηλίκον $\frac{3A}{\Delta}$ δείξει, ὁσάκις καὶ ὁ κλασματικὸς διαιρέτης $\frac{\Delta}{3}$ ἐμπεριεχόμενος ἔνεστιν ἐν τῷ διαιρετέῳ A.

ΠΟΡΙ-

ΠΟΡΙΣΜΑ Θ.

§. 61. Ἐπειδὴ ἂν ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς Δ, ἐν τῷ 2 Α δὶς τοσάκις ἐμπεριείληπται, ὁσάκις ἐν τῷ Α· καὶ ἐν τῷ 3 Α τρὶς, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως· τοῦ διαιρετέου Α δι᾽ ὁτινοσοῦν ἀριθμοῦ ὁλοχεροῦς πολλαπλασιασθέντος, ἐὰν ὁ διαιρέτης Δ μένῃ, τὸ πηλίκον ἐπιπολλαπλασιασθήσεται ἰσαρίθμως. Διαιρεθέντος δὲ τοῦ Α διά τινος ὁλοχεροῦς, ἐὰν καὶ οὕτω τὸ Δ μένῃ, τὸ πηλίκον $\frac{A}{\Delta}$ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ ἐκείνου διαιρεθήσεται. Κἀντεῦθεν ἐπειδὰν Π, Α, Δ ὁλοχερεῖς ὦσι, ταυτὸ προκύπτει, εἴτε τοῦ Α διὰ τοῦ Π πρῶτον πολλαπλασιασθέντος, τὸ παραγόμενον ἔπειτα διὰ τοῦ Δ διαιρεθείη, εἴτε καὶ διὰ τοῦ Δ πρῶτον διαιρεθέντος τοῦ Α, ἔπειτα τὸ πηλίκον $\frac{A}{\Delta}$ διὰ τοῦ Π τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐπιδέξοιτο.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι.

§. 62. Τοὐναντίον δὲ ὁ ἀριθμὸς Δ δὶς τοσάκις ἐμπεριείληπται τῷ δοθέντι Ν, ὁσάκις ὁ διπλοῦς 2 Δ. Καὶ τρὶς δὲ τοσοῦτον, ἢ ὅσον ὁ 3 Δ· καὶ οὕτως ἐν γένει. Οὐκοῦν τοῦ διαιρέτου Δ, δι᾽ ὁτινοσοῦν ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθέντος ὁλοχεροῦς, τὸ πηλίκον $\frac{A}{\Delta}$ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διαιρεθήσεται. Καὶ τοῦ διαιρέτου Δ, δι᾽ ἀριθμοῦ τινος ὁλοχεροῦς διαιρεθέντος, διὰ τοῦ αὐτοῦ ἐκείνου τὸ πηλίκον πολλαπλασιασθήσεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 63. **Ἀριθμὸν ἐκ μονάδων δεκαδικῶν τάξεως οἱασδηποτοῦν συγκείμενον, δι᾽ ἀριθμοῦ παραπλησίου πολλαπλασιάσαι.**

ΛΥΣΙΣ.

§. 64. Α΄. Ἔϛω ἀριθμὸς ἔτως ἔχων 35, 724, ὃν χρὴ πολλαπλασιάσαι δι' ὁλοχερῦς, ἐν μοναδικῷ χαρακτῆρι δηλυμένυ, ἢ αἱ μονάδες ἁπλαῖ, οἷον διὰ 3, ἢ 5. Ἐὰν ἐν τοσάκις ὁ πολλαπλασιαςέος γραφῇ, ὁσάκις ἔνεϛιν ἡ μονὰς τῶ πολλαπλασιαςῆ, διὰ πρoσθέσεως εὑρεθείη ἂν τὸ γιγνόμενον, (§. 46.) ὧδε.

35, 724	35, 724
35, 724	35, 724
35, 724	35, 724
	35, 724
107, 172	35, 724
	178, 620

§. 65. Ἐὰν αἱ τῦ πολλαπλασιαςῦ μονάδες μὴ ὦσιν ἁπλαῖ, τῆς δὲ κατὰ τὰς ἁπλᾶς τάξεως, ἤτοι ἀνώτεραι, ἢ κατώτεραι, τῶν αὐτῶν γινομένων, εἶτα τῦ σημείυ τῆς τῶν ἁπλῶν μονάδων χώρας πρόσω ἢ ὀπίσω προαχθέντος, ἢ ἀπὸ τῆς τελευτῆς σημείων μηδενικῶν τινων προσεθέντων, τὸ παραγόμενον ἀποδοθήσεται· (§. 26.) ἔτως ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς 35, 724, ὃς διὰ 3 πολλαπλασιαθεὶς προῆκται εἰς τὸν 107, 172, ἐὰν πολλαπλασιαθῇ διὰ 30, γίνεται 1071, 72. Ἐὰν δὲ διὰ 300, γίνεται 10717, 2. Ἐὰν δὲ διὰ 3000 γίνεται 107172. Καὶ ἐὰν διὰ 30000, γίνεται 1071720. Τὐναντίον δὲ, ἐὰν ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιαθῇ διὰ 0, 3 γίνεται 10, 7172. Ἐὰν δὲ διὰ 0, 03 γίνεται 1, 07172. Ἐὰν δὲ διὰ 0, 003 γίνεται 0, 107172. Καὶ ἔτως ἐφεξῆς.

§. 66. Ἔνθεντοι ῥᾶϛα ἂν ὁ Πίναξ καταγραφείη, ὁ τὰ γινόμενα περιέχων, τὰ ὁτινοσῦν τῶν μοναδικῶν ἀριθμητικῶν χαρακτήρων, δι' ὁτινοσῦν

τῶν

τῶν μοναδικῶν πολλαπλασιαθέντος προκύπτοντα. Ἔστι δὲ οὗτος·

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Τοῦτον, ὃς ἂν διὰ μνήμης, ἢ πρὸ ὀφθαλμῶν ἔχοι, εὐπετέστερον τὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐκπεραίνει κατὰ τάδε τὰ σχήματα.

35, 724	35, 724
3	5
107, 172	178, 620
35, 724	35, 724
30	0, 3
1071, 72	10, 7172
35, 724	35, 724
300	0, 03
10717, 2	1, 07172

§. 67. Β'. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς 35, 724 πολλαπλασιαστέος ᾖ δι' ἀριθμοῦ ἐκ χαρακτήρων πλειόνων συγκεκροτημένου, οἷον διὰ 2753, πολλαπλασιαθέντος ἐκείνου πρῶτον, κατὰ τὰ εἰρημένα, διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ τῶν ἁπλῶν μονάδων σημαντικοῦ, ἤτοι διὰ τοῦ 3· δεύτερον δὲ διὰ τοῦ δηλωτικοῦ τῶν δεκάδων, 5, καὶ

οὕτως

ὕτως ἐφεξῆς, τέως προσθέσει συρεθήσεται τὸ παραχθὲν, κατὰ τὸ ἑπόμενον Σχῆμα.

35, 724	α
2753	
107, 172	
1786, 20	
25006, 8	
71448,	
98348, 172	

§. 68. Ἐὰν δὲ αἱ τῷ ἐχάτῳ τῦ πολλαπλασιαςῦ χαρακτῆρι δηλέμεναι μονάδες, μὴ τῶν ἁπλῶν ὖσαι τύχωσι, τῦ γινομένυ κατὰ τὰ εἰρημένα συρεθέντος, ὡς εἴγε καὶ ἁπλαῖ εἶεν ἐκεῖναι, ἡ τῶν ἁπλῶν ἔπειτα μονάδων ὑποδιαςολὴ, πρόσω, ἢ ὀπίσω μετενεχθήσεται, ἧπερ ἂν ἀπαιτοῖεν αἱ τάξεις αἱ τῶν μονάδων τῦ πολλαπλασιάζοντος. Οὕτως ἐὰν ἐπὶ τῦ πρὸ μικρῦ πολλαπλασιασθέντος, πολλαπλασιαςὴς ᾖ ὐχ᾽ ὁ 2753, ἀλλ᾽ ὁ 27530, παραγόμενον ἔςαι ὐχὶ τὸ 98348, 172· ἀλλὰ τὸ 983481, 72. Ἐὰν δὲ ὁ πολλαπλασιαςὴς ᾖ 275300, τὸ γινόμενον ἔςαι 9834817, 2. τὐναντίον δὲ τῦ πολλαπλασιαςῦ ὄντος 275, 3 παραγόμενον προκύψει τὸ 9834, 8172. Ἐὰν δὲ 27, 53 ἔςαι 983, 48172. Καὶ ὕτως ἐφεξῆς.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐξ αὐτῆς δῆλον τῆς πράξεως, τὸν ἀπὸ τῦ πολλαπλασιαςῦ καινὸν ἀριθμὸν ὕτως ἀπογεννᾶσθαι, ὡς ἀπὸ τῆς μονάδος γίνεται ὁ πολλαπλασιαςής· ὅθεν καὶ αὐτὸν ἐκεῖνον τυγχάνειν τὸν ζητύμενον. (§. 44.)

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 69. Ἕπεται ὖν ἐκ τῶν ἀνωτέρω (§. 68.), ὡς ἐὰν τῷ ἑτέρῳ τῶν παραγόντων, ἢ ἑκατέρῳ μηδενι-

καὶ

κὰ σημεῖα πρόσῃ, ἀεὶ τοσαῦτα τῷ παραγομένῳ προσαπλέον, ὅσα ἐκείνοις ἀμφοῖν ἅμα προσαριθμεῖται. Καὶ ἐὰν ἐφ᾽ ἑτέρῳ ἐκείνων, ἢ ἑκατέρῳ δεκαδικὰ κλάσματα πρόσῃ, τοσοῦτοι χαρακτῆρες ἐπὶ τοῦ παραγομένου ἔσονται τῶν τοιῶνδε κλασμάτων δηλωτικοί, ὁπόσοι ἐπ᾽ ἀμφοῖν ἅμα ἐκείνοις εἰσίν. Τούτου δὲ παρατηρουμένου, οὐδὲν ἄρα δεήσει ἐν τῷ πολλαπλασιάζειν τῇ τῶν μονάδων τάξει τὸν νοῦν προσέχειν, τῶν ἐν τῷ πολλαπλασιαζομένῳ καὶ τῷ πολλαπλασιάζοντι, ἐνὸν οὕτω τὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐκπερᾶναι, ὡς εἰ καὶ ἐν ἁπλαῖς μονάσι τῶν ἀριθμῶν οἱ ἐλάχιστοι τερματίζοιντο. Τῶν γὰρ τοῦ παραγομένου χαρακτήρων εὑρεθέντων, αἱ τῶν ἁπλῶν μονάδων ὑποδεέστεραι τάξεις, ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μηδενικῶν σημείων, ἢ τῶν ὑπὸ τὰς μονάδας διαστελλομένων κλασμάτων, τῶν ἐπ᾽ ἀμφοῖν τοῖς παράγουσι, ῥᾷστα διακριθήσονται· ὡς ἐπὶ τῶν ἑξῆς.

571000	5, 71
2300	2, 3
1713	1713
1142	1142
1313300000	13, 133

2, 475	0, 0457
9, 64	2, 31
9900	00457
14850	01371
22275	00914
23,85900	0,105567

3, 244	0, 00792
6400	0, 043
12976	002376
19464	003168
20761,600	0,00034056

Τοῦ δὲ τῶν ἁπλῶν μονάδων τόπου διορισθέντος, τὰ περιττὰ τῶν μηδενικῶν σημείων ἐξαλειφθήσεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 70. Ἐὰν ὁ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πίναξ (§. 66.) κατὰ τοὺς ἐν αὐτῷ πρὸς κάθετον χωροῦντας στίχους διατμηθῇ εἰς ῥαβδία, τούτων ἕκαστον, ἅπαντα τοῦ ἀνωτάτω ἀποκειμένου ἀριθμοῦ τὰ πολλαπλᾶ περιέξει ἄχρι τοῦ ἐννεαπλοῦ. Οὐκοῦν τῶν ῥαβδίων συναπτομένων, ῥᾷστα δὴ πίναξ διαγραφήσεται τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δι' ὁποσωνοῦν χαρακτήρων ἐκκειμένου, τῶν πολλαπλῶν ἁπάντων περιεκτικός, τῶν μὴ τοῦ ἐννεαπλοῦ δηλονότι γινομένων ἐπέκεινα. Ὥστε τὸ παραγόμενον ἀριθμοῦ παντὸς ὁποσουοῦν μεγέθει, δι' ὁτινοσοῦν ἀριθμοῦ μοναδικῷ χαρακτῆρι ἐκδηλουμένου, ἐκ τοῦ ὧδε συγκροτουμένου πινακίσκου προϊέναι ἔχειν μηδενὶ σὺν ἔργῳ. Δεῖ μέντοι τῶν τοιούτων ῥαβδίων ἐξ ἑκάστου πλείονα φέρειν ἐν χερσὶ παραπλήσια.

§. 71. Προκείσθω τοίνυν πολλαπλασιαστέος ἀριθμὸς ὁ 47624, καὶ τῶν ῥαβδίων κατὰ τὸ δέον συγκαταταχθέντων, ὁ πινακίσκος προκύψει τοιόσδε.

Ἐκ

0 4	0 7	0 6	0 2	0 4
0 8	1 4	1 2	0 4	0 8
1 2	2 1	1 8	0 6	1 2
1 6	2 8	2 4	0 8	1 6
2 0	3 5	3 0	1 0	2 0
2 4	4 2	3 6	1 2	2 4
2 8	4 9	4 2	1 4	2 8
3 2	5 6	4 8	1 6	3 2
3 6	6 3	5 4	1 8	3 6

Ἐκ τούτου ἂν ληφθήσεται, τοῦ προτεθέντος ἀριθμοῦ διπλάσιος μὲν, 95248. Τριπλάσιος δὲ 142872. Τετραπλάσιος δὲ 190496· καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως, εἰς ἓν ἀεὶ προσαθροιζομένων τῶν χαρακτήρων τῶν τῆς αὐτῆς τάξεως δηλωτικῶν· ὃ ἵν᾽ ἔχοι ῥαδίως γίγνεσθαι, οἱ ἀριθμοὶ, ὡς ἐπὶ τοῦ διαγράμματος κατετάχθησαν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 72. Ἀριθμοῦ δεκαδικὰς μονάδας ὁποιωνδήποτε τάξεων περιέχοντος, δι᾽ ἄλλου ὁμοιογε-

νοῦς

νοῦς ἀριθμοῦ διαιρουμένου, τὸ πηλίκον ὡς οἷόντε· διὰ τοῦ ὁμοιογενοῦς ἀριθμοῦ ἀποδοῦναι.

ΛΥΣΙΣ.

§. 73. Α΄. Ἔστω πρῶτον ἐλαχερὴς διαιρετέος δι' ἐλαχεροῦς. Καὶ τοίνυν ἀφαιρείσθω ὁ διαιρέτης ἀπὸ τοῦ διαιρετέου, ὁσάκις ἂν ἐξῇ, καὶ σημειούσθω ὁσάκις ἂν ἀφαιρεθῇ. Καὶ ἔσται δὴ ὁ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀφαιρέσεων δηλωτικὸς τοῦ πηλίκου μέρος, ὃ διὰ τοῦ ἐλαχεροῦς ἀριθμοῦ ἐνθέσιμόν ἐστι, τὸ μέγιστον. (§. 49.) Τούτῳ οὖν τοῦ κλάσματος προστεθέντος, οὗ ἀριθμητὴς μὲν τὸ μετὰ τὴν ἐσχάτην τῶν ἀφαιρέσεων ὑπολειφθέν, παρονομαστὴς δὲ ὁ διαιρέτης, παρέσται τὸ πηλίκον, ὃ ἦν ζητούμενον.

Οἷον ἔστω ἀριθμὸς 1162, ὃν διελεῖν δέοι διὰ 382. Ἐπαναληφθείσης δὲ τῆς ἀφαιρέσεως κατὰ τὸ σχῆμα τόδε,

$$\begin{array}{c} 1162 \\ 382 \\ \hline 780 \\ 382 \\ \hline 398 \\ 382 \\ \hline 16 \end{array}$$

Ἐπειδὴ τρὶς ἀφαιρεθῆναι ἔσχεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ὁ διαιρέτης, ὑπελείφθη δὲ 16, τὸ πηλίκον ἔσται· $3\frac{16}{382}$.

§. 74. Ἀλλ' ἐπεὶ γὰρ ἡ τοιάδε ἐπανάληψις ἐργώδης ἂν εἴη ἐν μακρῷ μείζονι τῷ πηλίκῳ, τούτου δὴ χάριν οὐκ αὐτὸν εἰώθαμεν τὸν διαιρέτην ἀφαιρεῖν, ἀλλ' ἐκ τῶν αὐτοῦ πολλαπλασίων τὰ προσήκοντα. Αἱ γὰρ τούτων ἀφαιρέσεις ἐξ ἀνάγκης ὀλιγαριθμότεραι. Τῶν πολλαπλασίων δ' ἐνταῦθα παραλαμβάνομεν, ἃ γίνεται τοῦ διαιρέτου μονοχαράκτῳ τινὶ ἀριθμῷ

ἐπι-

ἐπιπολλαπλασιαζομένε, οἷον 6000, 300, 70, 4. τὰ γὰρ ἐκ τέτων πολλαπλᾶ ῥᾶϛα συντελέμενα, τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀφαιρέσεων ἅλις ἀπομειοῖ· λαμβάνοντες δὲ τῶν ἔτω παραγομένων ἀεὶ τὰ μέγιϛα, ἀπότε τῶν μεγίϛων ἀφαιρᾶντες, κατὰ μικρὸν χωρᾶμεν ἐπὶ τὰ ἐλάσσονα, ἥπερ ἕκαϛοι τῶν ἐν τῷ διαιρέτῃ χαρακλήρων ὡς ἔχεσι τάξεως παράγονται· οἷον ἐπὶ τᾶ ἐφεξῆς παραδείγματος δεῆσαν διὰ 1827 διελεῖν τὸν Ἀριθ. - - - 3898437

Ἔϛαι 1827 × 2000 =	- -	3654000
Ἄφελε καὶ ὑπολειφθήσεται	-	244437
Ἑξῆς 1827 × 100 =	- -	182700
Ἄφελε καὶ ὑπολειφθήσεται	-	61737
Αὖθις 1827 × 30 =	- - -	54810
Ἄφελε καὶ ὑπολειφθήσεται	-	6927
Τέως 1827 × 3 =	- - -	5481
Ἄφελε καὶ ὑπολειφθήσεται.	-	1446

Ἔϛαι τὸ τᾶ πηλίκε μέρος τὸ τὰς ὁλοσχερεῖς περιέχον μονάδας 2133, ὃ τὸν μὲν πρῶτον τῶν χαρακλήρων 2, ἡ πρώτη τῶν γενομένων παρέχει ἀφαιρέσεων· αἱ δὲ λοιπαὶ ἑξῆς τὰς λοιπές.

§ 75. Τῶν δὲ τοιέτων πολλαπλῶν, ἅτινα ἀφαιρεθῆναι μέγιϛα ἔχει, προχειρότατα ἀνευρίσκεται τᾶ πίνακος τῶν ἄχρι δεκάδος τᾶ διαιρέτε πολλαπλῶν προκαταγραφέντος. Ἐκείνῳ δὲ χρησομένοις, διαιρετέε μὲν ὑποκειμένε τᾶ 3528950032, διαιρέτε δὲ τᾶ 8543, δεξιῶς ἅπαντα διατηθήσεται τόνδε τὸν τρόπον.

Πίναξ	Διαιρετέος	Πηλίκον.
1) 8543	3528950032	413080
2) 17086	34172	
3) 25629	11175	
4) 34172	8543	
5) 42715	26320	
6) 51258	25629	
7) 59801	69103	
8) 68344	68344	
9) 76887	7592	

§. 76. Τὰ μέγιστα τὸ προεκτεθὲν Ἀβάκιον συντελεῖ, ἐπειδὰν πλείονες τῶν ἐν τῷ πηλίκῳ χαρακτήρων διαφέρωσιν ἀπ' ἀλλήλων, καὶ ὅτε ἀριθμοὶ πλείονες διὰ τοῦ αὐτοῦ πρόκεινται διαιρεθῆναι. Ἀλλ' ἐν οἷς τὸ πηλίκον ὀλιγαρίθμους προορῶμεν περιέξον τοὺς χαρακτῆρας, μάλιστα δὲ ὅτε καὶ ὁ διαιρέτης οὐ πάνυ μέγας ἐστὶ, τὴν τοῦ ὅλου τοιαύτην πινακίου καταγραφὴν ὑπερβαίνοντες, ὧν μόνων αὐτοῦ μερῶν χρεία ἔσται ἐπὶ τῆς πράξεως ἐκεῖνα παράγομεν, ὧδέ πως.

Διαιρέτης	Διαιρετέος	Πηλίκον.
532	145987	$274\frac{219}{532}$
	1064	
	3958	
	3724	
	2347	
	2128	
	219	

§. 77. Μᾶλλον δὲ καὶ τῦ διαιρέτυ ἐν μοναδικῷ χαρακτῆρι κειμένυ, τὰ παραγόμενα, ἃ δέον ἀφαιρεῖν, ὐδὲ γράφομεν τὴν ἀρχὴν, ἀλλ᾽ ἀπὸ μνήμης ποιύμενοι τὴν ἀφαίρεσιν ἐπισημειῦμεν τὴν διαφορὰν, ὕτως.

Διαιρέτης	Διαιρετέος	Πηλίκον
5	357948 02443	71589 $\frac{3}{5}$

§. 78. Β΄. Ἐὰν τῷ διαιρετέῳ καὶ δεκαδικὰ κλάσματα προσῇ, ὁλοχερὴς δὲ τύχῃ ὁ διαιρέτης, πρῶτον παραπλησίᾳ τῇ μεθόδῳ τὺς τῦ πηλίκυ χαρακτῆρας μαστεύομεν· εἰς δὲ πέρας γενόμενοι, τὰς ἐν τῷ πηλίκῳ τάξεις τῶν μονάδων διοριζόμεθα, ἰσαρίθμυς ἐν αὐτῷ ὑποδιαστέλλοντες δεξιόθεν πρὸς τὰ λοιπὰ χαρακτῆρας, τοῖς ἐν τῷ διαιρετέῳ ὑποδιεσταλμένοις. Οὕτω τῦ 145987, τῇ διὰ 532 διαιρέσει, πηλίκον ἀποδιδόντος τὸ 274, ἐὰν ὁ 1459, 87 διαιρεθῇ διὰ τῦ αὐτῦ 532, τὸ πηλίκον ἔσαι 2, 74. Ἐὰν δὲ ὁ 145, 987, πηλίκον προκύψει 0, 274. Ἐὰν δὲ ὁ 14, 5987, πηλίκον προελεύσεται 0,0274. Κἀν τοῖς λοιποῖς ὡσαύτως. (§. 61.)

§. 79. Τὰ δὲ τῶν κλασμάτων δεκαδικὰ ἐμπαρεισάγοντες τῷ πηλίκῳ, τὸ δι᾽ ἐπανειλημμένης ἀφαιρέσεως ὑπόλοιπον, οἷον ἐπὶ τῦ ἀνωτ. Παραδ. τὸ 219. παραβλέπειν εἰώθαμεν· τὸ γὰρ κλάσμα $\frac{2}{532}$, ὖ τὸ λοιπὸν ἐκεῖνο ἀριθμητὴς, ὡς μὴ ἐπὶ μονάδα ὁλοχερῆ. ἀλλ᾽ ἐπὶ ὁλοχερῦς ἧττονα ἐπαναγόμενον, ὐκ ἀξιόλογον. Ὡς ἂν δὲ τῦτο δίχα γίγνοιτο ἀξιολόγυ παρατροπῆς, προάγομεν τὴν διαίρεσιν, μηδενικὰ σημεῖα πρὸς τῷ τέλει τῷ διαιρετέῳ προσάπτοντες, ὧν ὅσῳπερ τὸ πλῆθος μεῖζον, τοσῦτον ἐπὶ τῦ πηλίκυ ἧττον ἔσαι τὸ ἔλλειμμα· ὡς ἐπὶ τῦ σχήματος.

C 2 Διαιρέ-

Διαιρέτης	Διαιρετέος	Πηλίκον
532	1459, 870000	2, 744116
	1064	
	3958	
	3724	
	2347	
	2128	
	2190	
	2128	
	620	
	532	
	880	
	532	
	3480	
	3192	
	288	

Ἐλλείπει τοίνυν τοῦ ἀκριβοῦς τὸ πηλίκον, μιλλιοστημορίου μονάδος ἔλαττον.

§. 80. Τῇ δ' αὐτῇ χρώμεθα μεθόδῳ, καὶ ὅτε ὁλοχερῆ δι' ὁλοχεροῦς διαιροῦντες τὸ πηλίκον ἀκριβοῦν αἱρούμεθα, τοῦ ἀληθοῦς ἐγγυτέρω κατὰ τὸ παρῆκον γινόμενοι, εἴτε τοῦ διαιρέτου μείζων εἴη ὁ διαιρετέος, εἴτε δὴ καὶ ἐλάσσων· οὕτως ἐὰν 8, ἢ 8, 000 κτλ. διαιρεθῇ διὰ 11, πηλίκον προελεύσεται 0, 727272 κτλ.

§. 81. Γ'. Ἐὰν αἱ τοῦ διαιρέτου ἐλάχισται μονάδες μὴ ἁπλαῖ τύχωσι, τῶν ἁπλῶν δὲ ἤτοι μείζονες, ἢ ἐλάσσονες· τουτέστιν ἐὰν ὁ διαιρέτης, ἤτοι σημεῖα μηδενικὰ προσκείμενα ἔχῃ, ἢ κλάσματα δεκαδικά· τῶν λοιπῶν κατὰ τὰ ἐκτεθέντα τελουμένων, τὴν

τῶν

τῶν ἁπλῶν μονάδων ὑποδιαςολὼ, ἀφ᾽ ἧ ἂν κατέχοι τόπε, εἰ μονάσιν ὁ διαιρέτης ἁπλαῖς ἀποτερματίζοιτο, διὰ τοσέτων μὲν προάγομεν πρὸς λαιὰν χαρακτήρων, ὅσα ἂν τῷ διαιρέτῃ μηδενικὰ σημεῖα προσκέοιτο· διὰ τοσέτων δὲ πρὸς δεξιὰν, ὅσαι τῷ διαιρέτῃ αὐτῷ, τῶν δεκαδικῶν εἰσὶ κλασμάτων αἱ τάξεις· ἕτως ὁ ἀριθμὸς 1459, 87, ὃς ἂν διὰ τῦ 532 διαιρεθεὶς πηλίκον παράχοι τὸ 2, 744116, ἐὰν διὰ τῦ 5320 διαιρεθῇ, πηλίκον δώσει 0, 2744116. Ἐὰν δὲ διὰ τῦ 53200, τὸ 0, 02744116. Τὐναντίον δὲ διαιρέτε ὄντος τῦ 53, 2, πηλίκον προκύψει τὸ 27, 44116. Καὶ Διαιρέτε 5, 32, πηλίκον 274, 4116. Κἀν τοῖς λοιποῖς παραπλησίως. (§. 62.)

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸν πάσαις προσέχοντα ταῖς περανθείσαις πράξεσι συνιδεῖν εἰκὸς, τοιῷδε λόγῳ τὸ πηλίκον ἀπὸ τῦ διαιρετέε προκύπτειν, οἵῳ δήπε καὶ ἡ μονὰς ἀπὸ τῦ διαιρέτε γίγνεται. Τῦτο δὲ ἦν τὸ διαιρεῖν. (§. 45.)

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 82. Ἡ τῦ πινακίε (§. 75.) διὰ τῶν καταγραφέντων ῥαβδίων (§. 70.) κατασκευὴ ὡς λίαν ἐξευμαρίζεται. Μᾶλλον δὲ καὶ αὐτὰ δὴ τὰ ῥαβδία κατὰ τὸ δέον διαταχθέντα, ὅσα ἂν καὶ τὸ πινάκιον ὑπεργήσειεν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 83. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς, οἷον 14, ὁ δι᾽ ἄλλε 3 διαιρεθεὶς πηλίκον δίδωσι τὸ $4\frac{2}{3}$, ὃ καὶ ἕτως ἂν γραφείη $\frac{14}{3}$ (§. 48. 49.), σαφὴς ὁ τρόπος τῆς τῦ νόθε κλάσματος εὑρέσεως, τῦ τῷ ἐξ ὁλοχερῦς τε καὶ κλασματικῦ ἀριθμῷ $4\frac{2}{3}$, συνεξισεμένε. Ἐὰν γὰρ τῷ γινομένῳ ὑπό τε τῦ ὁλοχερῦς μέρες 4, καὶ τῦ ἐν τῷ κλάσματι παρονομαςῦ 3, ὅπερ ἐςὶ 12, προσαθροισθῇ καὶ ὁ τῦ κλάσματος ἀριθμητὴς 2, προκύψει ὁ ἀριθμητὴς 14 τοῦ ζητουμένου κλάσματος, οὗ παρονομαστὴς ἔσται αὐτὸς ὁ τοῦ κλάσματος τοῦ δοθέντος $\frac{2}{3}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 84. Ὁ δὲ ὁλοχερὴς ἀριθμὸς 5, εἰς κλάσμα, κατ' ὄνομα τὸ δοθὲν 3, μεταποιηθήσεται, ὑπ' αὐτοῦ τούτου τοῦ παρονομαστοῦ εἰς ἀριθμητὴν γενόμενος διὰ πολλαπλασιασμοῦ· οὕτως $5 = \frac{15}{3}$. Καὶ πᾶς δὲ ἀριθμὸς 5, ἀντὶ κλάσματος ληφθῆναι δυνήσεται, οὗ μονὰς ὁ παρονομαστής· οἷον $5 = \frac{5}{1}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 85. Δυοῖν ἀριθμῶν, ὧν οὐχ ἑκάτερος ὁλοχερὴς, οὐδὲ κατὰ τοὺς τῶν ὁλοχερῶν κανόνας, διὰ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων προκείμενος, τὸν ἕτερον διὰ τοῦ ἑτέρου πολλαπλασιάζειν, καὶ διαιρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

§. 86. Α'. Τὸν κλασματίαν $\frac{A}{B}$ διὰ τοῦ ὁλοχεροῦς Γ πολλαπλασιάσαι δεῆσαν, ἐπαγέσθω διὰ τοῦ Γ ὁ ἀριθμητὴς, τηρείσθω δ' ὁ παρονομαστὴς ὡς εἶναι $\frac{\Gamma\times A}{B}$ τὸ γινόμενον ὃ ἐζητεῖτο.

§. 87. Ἢ ἐὰν ὁ παρονομαστὴς διὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ Γ διαιρεθεὶς, πηλίκον παριστᾷ ὁλοχερὲς, ἢ, μὴ δυσχεραίνῃς τὸ τοῦ κλάσματος ἀνώμαλον, δίελε δὴ τὸν παρονομαστὴν διὰ τοῦ Γ, τηρήσας τὸν ἀριθμητήν· οὕτως ὁ κλασματικὸς $\frac{7}{12}$ πολλαπλασιασθεὶς διὰ 3, δώσει ἤτοι $\frac{21}{12}$, ἢ $\frac{7}{4}$. Καὶ ὁ $\frac{7}{8}$ πολλαπλασιασθεὶς διὰ 3, δώσει τὸ παραγόμενον, ἤτοι $\frac{21}{8}$, ἢ $\frac{7}{2\frac{2}{3}}$.

§. 88.

§. 88. Δεῆσαν δὲ τὸν κλασματίαν $\frac{A}{B}$ διελεῖν διὰ τοῦ ὁλοσχεροῦς Γ, πολλαπλασιαζέσθω ὁ παρονομαστὴς, τοῦ ἀριθμητοῦ κατὰ χώραν μένοντος. Πηλίκον οὖν ἔσται τὸ προβαῖνον $\frac{A}{\Gamma \times B}$.

§. 89. Ἢ, ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ Γ διαιρεθεὶς πηλίκον διδῷ ὁλοσχερὲς, ἤ, σύγε πρὸς τὸ τοῦ κλάσματος ἀνώμαλον μηδαμῶς δυσχεραίνῃς, δίελε τὸν ἀριθμητὴν διὰ Γ, τοῦ παρονομαστοῦ μένοντος. Οὕτως ὁ $\frac{3}{4}$ διαιρεθεὶς διὰ 3, δώσει [illegible], ἤτοι $\frac{3}{12}$, ἢ $\frac{1}{4}$· ὁ δὲ $\frac{5}{7}$ διὰ τοῦ αὐτοῦ 3, ἤτοι $\frac{5}{21}$, ἢ $\frac{1\frac{2}{3}}{7}$.

§. 90. Β΄. Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς κλασματικὸς ᾖ $\frac{N}{M}$, εἴτε τοῦ πολλαπλασιαστέου ὁλοσχερῶς ἔχοντος, εἴτε δὴ καὶ κεκλασμένου, πολλαπλασιαζέσθω οὗτος διὰ τοῦ ἐν ἐκείνῳ ἀριθμητοῦ N (§. 86. 87.) τὸ δ᾽ ἐντεῦθεν γινόμενον, διὰ τοῦ παρονομαστοῦ (§. 88. 89.) διαιρείσθω· οὕτως εἰ δέοι διὰ $\frac{2}{3}$ πολλαπλασιάσαι τὸν 5, ἔσται δὴ τὸ παραγόμενον $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$. Δεῆσαν δὲ διὰ τοῦ αὐτοῦ $\frac{2}{3}$ πολλαπλασιάσαι τὸν $\frac{6}{8}$, ἔσται παραγόμενον $\frac{12}{24}$, ἢ $\frac{4}{8}$, ἢ $\frac{6}{12}$, ἢ $\frac{2}{4}$· ἧπερ ὅδε, ἢ ὅδε ὁ τοῦ πολλαπλασιάζειν, ἢ διαιρεῖν τρόπος ἐν χρήσει παραλαμβάνεται.

§. 91. Ἀριθμὸν εἴτε ὁλοσχερῆ, εἴτε κεκλασμένον, διὰ κλασματικοῦ δεῆσαν τοῦ $\frac{N}{M}$ διελέσθαι, δίελε αὐτὸν διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ N (§. 88. 89.), τὸ δ᾽ ἐντεῦθεν πηλίκον πολλαπλασίασον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ M. (§. 86. 87.). Οὕτω τοῦ ἀριθμοῦ 5 διαιρουμένου διὰ τοῦ $\frac{2}{3}$, πηλίκον ἔσται $\frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$. Ἐὰν δὲ διὰ τοῦ αὐτοῦ $\frac{2}{3}$ διαιρεθῇ ὁ $\frac{4}{15}$, πηλίκον προκύψει $\frac{12}{30}$, ἢ $\frac{2}{5}$, ἢ $\frac{6}{15}$,

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 92. Ἀριθμὸς ἐξ ὁλοχερῶν καὶ κεκλασμένων συγκείμενος, δι᾽ ἀριθμοῦ οὑτινοσοῦν πολλαπλασιασθήσεται, ἑκάστου τῶν τοῦ πολλαπλασιάζοντος μερῶν, ἐπὶ ἑκάστου τῶν κατὰ τὸν πολλαπλασιαζόμενον ἀγομένων (§. 57.) οὐδέπως.

$$\begin{array}{l} 3 + \frac{2}{3} \\ 4 + \frac{7}{9} \\ \hline 12 + \frac{8}{3} \\ \quad + \frac{21}{9} + \frac{14}{27} \end{array}$$

§. 93. Πρόχειρον δὲ τὰ πολλὰ τοὺς τοιούσδε εἰς κλάσματα νόθα τρέποντας (§. 83.) εἶτα τὸν πολλαπλασιασμὸν περαίνειν. Οὕτως ἐπὶ τοῦ τεθέντος παραἢ $\overset{6}{\tau\varsigma}$, ἢ $\overset{\Lambda}{\tau\sigma}$, ἥπερ ἂν τῷδε, ἢ τῷδε ἐν τῷ τοῦ πολλαπλασιάζειν τρόπῳ προχρήσαιο.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{A}{B}$ πηλίκον τι ἐςὶ, τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαςοῦ προκύπτον (§. 48.), πάντως δὴ διὰ τοῦ δοθέντος ὁλοκερεῦς Γ πολλαπλασιασθήσεται, εἴτε τοῦ ἀριθμητοῦ Α πολλαπλασιασθέντος, εἴτε τοῦ παρονομαςοῦ Β διαιρεθέντος δι' αὐτοῦ ἐκείνου. (§. 61. 62.). Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον $\frac{A}{B}$ διὰ τοῦ ὁλοκερεῦς Γ διαιρεθήσεται, εἴτε τοῦ Ἀριθμητοῦ Α διαιρουμένου, εἴτε τοῦ παρονομαςοῦ Β, πολλαπλασιαζομένου δι' ἐκείνου αὐτοῦ. Καὶ ταῦτα μὲν κατὰ τὸ πρώτως συμβαῖνον. Τὰ δὲ κατὰ τὸ δεύτερως ἐντεῦθεν αὐτόματα ἕπεται. Τίθεται γὰρ τὰ κλάσματα τῶν κανονικῶν εἶναι, ἐν οἷς οἱ ὅροι ὁλοκερεῖς. (§. 8.)

παραδείγματος $3\frac{2}{3} = \frac{11}{3}$, καὶ $4\frac{7}{9} = \frac{43}{9}$. Πολλαπλασιαθέντος γὰρ τοῦ $\frac{11}{3}$ διὰ $\frac{43}{9}$, κλάσμα παραχθήσεται $\frac{473}{27}$. Ὁ τῇ διαιρέσει τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ μεθίσαται εἰς τὸ $17\frac{14}{27}$.

§. 94. Ἦν δὲ καὶ ἀριθμὸν τὸν δι᾽ ὁλοχεροῦς καὶ κεκλασμένου συγκείμενον, διελεῖν δέησῃ, καὶ μάλιστα δι᾽ ἀριθμοῦ ἐξ ὁλοχεροῦς ὁμοίως καὶ κλάσματος συγκειμένου, ἡ τούτων τηνικαῦτα εἰς νόθα κλάσματα μεταποίησις, πολὺ τῆς ἄλλως ἐργωδεστέρας πράξεως ἀφαιρήσεται τὴν δυσχέρειαν. Οὕτω δεήσαν $3\frac{2}{5}$ διελεῖν διὰ $2\frac{3}{8}$, ἀντὶ μὲν διαιρετέου τοῦ $\frac{17}{5}$ ληφθέντος, ἀντὶ δὲ διαιρέτου τοῦ $\frac{19}{8}$. πηλίκον προκύψει $\frac{136}{95}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ· Α·

§. 95. Ἀμφοῖν τῶν τοῦ κλάσματος ὅρων διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιαζομένων, ἢ διαιρουμένων, ἡ τοῦ κλάσματος δύναμις ἀμεταποίητος σώζεται. Ἔστι δὲ ἐν γένει $\frac{A}{B} = \frac{N.A,}{N.B}$ (§. 54.).

ΠΟΡΙΣΜΑ· Β·

§. 96. Ἔνθεντοι καὶ κλάσμα τὸ ἐξ ἀμφοῖν, ἢ τοῦ ἑτέρου τῶν ὅρων ἐπικλασματικὸν, ἢ ὁλοχερεῖ ἅμα καὶ κλάσματι συγκροτουμένων, εἰς κλάσμα νόμιμον ἀναχθήσεται, ἑκατέρου τῶν τοῦ ἀτακτοῦντος κλάσματος ὅρων, διὰ τῶν παρονομαστῶν τῶν ἐν αὐτοῖς κλασμάτων πολλαπλασιαθέντος. Οὕτως ἐπὶ τοῦ ἀτακτοῦντος κλάσματος $\frac{3\frac{2}{5}}{2\frac{3}{8}}$ Ἐὰν οἱ ὅροι πρῶτον, διὰ 5 (ὅς ἐστιν ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἐν τῷ ἀριθμητῇ κλασματικοῦ) πολλαπλασιαθῶσι, γίνεται $\frac{17.}{10\frac{15}{8}}$ Ἐὰν δὲ καὶ τούτου δεύτερον οἱ ὅροι πολλαπλασιαθῶσι διὰ 8, τοῦ παρονομαστοῦ, τοῦ ἐν τῷ ἐπικλασματικῷ παρονομαστῇ τοῦ ἀτακτοῦντος, παραχθήσεται κανονικὸν κλάσμα τὸ $\frac{136}{95}$· ὅπερ ἴσον τῷ ἀτακτοῦντι $\frac{3\frac{2}{5}}{2\frac{3}{8}}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ· Γ·

§. 97. Ἐν γένει δὲ ἀριθμὸν ὁποιονοῦν Γ, διὰ κλάσματος $\frac{A}{B}$ διελεῖν, ἴσον ἐστὶ, καὶ πολλαπλασιάσαι τὸν ἀριθμὸν δι' ἀντιστρόφου τοῦ κλάσματος $\frac{B.}{A}$

ΤΜΗΜΑ Β.

ΠΕΡΙ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΙΔΙΑ

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 98.

Ἐὰν ἀριθμοὺς ἐστινασοῦν ὁλοχερεῖς, ἢ κεκλασμένους Α, Β, Γ, Δ ἐπ᾽ ἀλλήλους δέῃ πολλαπλασιάσαι, οἷον τὸν μὲν πρῶτον διὰ τοῦ δευτέρου, τὸ δ᾽ ἐντεῦθεν γεγονὸς διὰ τοῦ τρίτου, καὶ τὸ ἐντεῦθεν αὖθις διὰ τοῦ τετάρτου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς εἰ πλείους τύχοιεν· Τῆς τῶν ἀριθμῶν τάξεως ὁπωσοῦν τεταραγμένης, τὸ παραγόμενον $Α \times Β \times Γ \times Δ$, ἥκιστα μεταποιηθήσεται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τούτων γὰρ ἀνθ᾽ ἑνός τινος πρὸς βραχὺ ὑποχωρήσαντος, οἷον τοῦ Α, ἀντεισενεχθείσης μονάδος, ὥστε εἶναι $1 \times Β \times Γ \times Δ$, εἴη ἂν $1 \times Β \times Γ \times Δ = Β \times 1 \times Γ \times Δ = Β \times Γ \times 1 \times Δ = Β \times Γ \times Δ \times 1$. Ἀλλὰ γὰρ ἐπανίτω αὖθις ὁ ὑποχωρήσας $Α = 3$ φέρε, ἔνθα ἡ μονὰς ὑπετίθετο, ἀντεισενεχθεὶς, καὶ δῆλον ὡς ἐφ᾽ οἱασδήποτε θέσεως τὸ παραγόμενον τριπλασιασθήσεται· καὶ ἐν γένει ἔσται $Α \times Β \times Γ \times Δ = Β \times Α \times Γ \times Δ = Β \times Γ \times Α \times Δ = Β \times Γ \times Δ \times Α$, τοῦ Α ὁλοχεροῦς τυγχάνοντος. Ἐὰν δὲ ὁ Α κεκλασμένος ᾖ, οἷον $\frac{2}{3}$, εὔδηλον πάλιν ὡς ἀποκαθισαμένου τοῦ Α, ἀντὶ μιᾶς τινος τῶν τεθεισῶν μονάδων, παραγόμενον προελδύσεται, δύο τριτημόρια περιέχον τῦ παραχθέντος ἔνθα ἡ μονὰς ἰῶ. Καθόλυ ἄρα ἡ αὐτὴ ἀριθμῷ παντὶ ἐπὶ τῦ πολλαπλασιασμῦ δύναμις πρόσεσιν, εἴτε πολλαπλασιαζόμενος αὐτὸς εἴη, εἴτ' ὖν καὶ πολλαπλασιάζων, ὅπως ἂν ὖν τῆς κατὰ τὸ πρότερον καὶ ὕϛερον μετειλήχοι τάξεως.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 99. Οὗτος ὁ λόγος δι' ὧν ἕκαϛος τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ, παράγων καλεῖται τῦ γινομένυ $Α \times Β \times Γ \times Δ$, εἴτε πολλαπλασιαζόμενος αὐτὸς, εἴτε καὶ πολλαπλασιάζων, καὶ ὅπως ἂν ἐπὶ τῦ πολλαπλασιασμῦ ἔχοι τάξεως.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 100. Κλασμάτων $\frac{Α}{Π}, \frac{Β}{Ρ}, \frac{Γ}{Σ},$ ὁποιωνῦντε καὶ ὁποσωνῦν τὸν ἀριθμὸν ἀλλήλοις ἐπαγομένων, γίνεται τὸ αὐτὸ, ὅπως ἂν καὶ μεταληφθῶσιν οἱ τύτων ἀριθμηταὶ, τῶν παρονομαϛῶν ἤτοι μενόντων, ἢ καὶ αὐτῶν μεταμειβομένων. Ἐὰν γὰρ ἀντὶ τῶν τεθέντων γραφῇ, $\frac{Β}{Π}, \frac{Α}{Σ}, \frac{Γ}{Ρ},$ γενήσεται $\frac{Β \times Α \times Γ,}{Π \times Σ \times Ρ}$ ἶσον τῷ προκύπλοντι ὑπὸ τῶν $\frac{Α}{Π}, \frac{Β}{Ρ}, \frac{Γ}{Σ}$ δι' ἀλλήλων πολλαπλασιαθέντων.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 101. Διαιρεθέντος τινὸς τῶν τὸν ἀριθμὸν παραγόντων, καὶ ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς διαιρεθήσεται. Ἔϛωσαν ἀριθμοὶ παράγοντες Α, Β, Γ, ὧν εἷς τις ὁ Α διαιρείσθω διὰ τῦ Π, καὶ ἔϛαι $\frac{Α \times Β \times Γ.}{Π}$

Τὸ γὰρ παραγόμενον ἔκ τε τῦ πηλίκυ $\frac{Α}{Π}$ καὶ τῶν

λοιπῶν

λοιπῶν παραγόντων, τὸ αὐτὸ πηλίκον ἔςαι τȣ̃ ἀριθμȣ̃ $A \times B \times \Gamma$ διαιρȣμενȣ διὰ τȣ̃ Π.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ·

§. 102. Δύο, ἢ πλείω κλάσματα, ὧν οἱ παρονομαςαὶ διαφέροντες εἰσὶν, ἐπὶ τὸ αὐτὸ ὄνομα ἀναγαγεῖν σωζομένης τῆς δυνάμεως.

ΛΥΣΙΣ·

Α΄. Δυοῖν ὄντων, οἷον τῶν $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{4}{5}$, ἑκάτερον τῶν ἐν τῷ πρώτῳ ὅρων, πολλαπλασίασον διὰ τȣ̃ παρονομαςȣ̃ τȣ̃ δευτέρȣ, ὥςε γενέσθαι $\frac{2 \times 5.}{3 \times 5}$ Εἶθ᾽ ἑκάτερον τῶν τȣ̃ δευτέρȣ διὰ τȣ̃ παρονομαςȣ̃ τȣ̃ πρώτȣ ἀνάπαλιν, ὥςε προελθεῖν $\frac{4 \times 3,}{5 \times 3}$ καὶ ἔςαι τὰ ȣ̓́τω προϊόντα κλάσματα $\frac{10}{15}$, καὶ $\frac{12}{15}$, τὰ ζητȣ́μενα.

Β΄. Ἐὰν δὲ τὰ κλάσματα τρία ᾖ, οἷον τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, ἑκάτερον τῶν ὅρων τȣ̃ πρώτȣ πολλαπλασίασον διὰ τȣ̃ ἐν τῷ δευτέρῳ παρονομαςȣ̃ 5, καὶ διὰ τȣ̃ ἐν τῷ τρίτῳ 7, ἢ διὰ τȣ̃ ἐκ τȣ́των πολλαπλασιασμȣ̃ γινομένȣ, ὥςε προελθεῖν $\frac{2 \times 5 \times 7.}{3 \times 5 \times 7}$ ὡσαύτως δὲ καὶ τȣ̀ς ὅρȣς τȣ̃ δευτέρȣ, διὰ τῶν παρονομαςῶν τȣ̃ πρώτȣ, καὶ τȣ̃ τρίτȣ· καὶ τȣ̀ς τȣ̃ τρίτȣ, διὰ τῶν τȣ̃ πρώτȣ, καὶ τȣ̃ δευτέρȣ· ὥςε γενέσθαι ἐκ μὲν τȣ̃ δευτέρȣ $\frac{4 \times 3 \times 7.}{5 \times 3 \times 7}$ Ἐκ δὲ τȣ̃ τρίτȣ $\frac{6 \times 3 \times 5.}{7 \times 3 \times 5}$ Καὶ κλάσματα ἔςαι, $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$, $\frac{90}{105}$, τὰ ζητȣ́μενα.

Γ΄. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον προβήσῃ, καὶ τῶν δοθέντων κλασμάτων πλειόνων ὄντων, ἢ τριῶν· ἀμ-

Φο

φω δηλονότι τοὺς ἐφ᾽ ἑκάστῳ ὅρους διὰ τῶν παρονομαστῶν τῶν λοιπῶν ἄγων ἁπαξαπάντων· ἢ γοῦν, ὃ ταυτόν ἐστι, διὰ τοῦ πολλαπλασιασμῷ ὑπ᾽ ἐκείνων προκύπτοντος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Οὐ γὰρ ἀμέλειται διὰ τῶν τοιῶνδε πολλαπλασιασμῶν ἡ τῶν κλασμάτων δύναμις μεταποιεῖται. Διὰ τοῦ αὐτοῦ γὰρ ὅ,τε ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς πολλαπλασιάζονται (§. 95.). Οἱ δὲ τῶν καινῶν κλασμάτων παρονομασταὶ οἱ αὐτοὶ γίνονται, ὡς ὑπὸ πάντων τῶν κατὰ τὰ δοθέντα κλάσματα παρονομαστῶν παραγόμενοι. (§. 98.).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 103. Τοὺς ἐκ διαφόρων παρονομαστῶν κλασματίας, ἐπὶ τὴν αὐτὴν ἀναγομένους μονάδα, ὅσοι ποτ᾽ ἂν ὦσι, προσθέσει, ἢ ἀφαιρέσει συνάπτειν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω κλάσματα δεδομένα $\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{7}{9}$, ἃ συνάψαι δέον καθὰ τὰ σημεῖα κελεύει. Ἀναχθέντα τοιγαροῦν ἅπαντα ἐπὶ ὄνομα τὸ αὐτὸ, συναπτέσθω τὰ οὕτω προκύπτοντα, $\frac{90}{135} - \frac{108}{135} + \frac{105}{135}$, συμπροσαθροιζομένων τῶν ἀριθμητῶν ὡδέπως· $\frac{90 - 108 + 105}{135}$, ὅθεν γίνεται $\frac{87}{135}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ γὰρ κατὰ τὰ ἐπιταχθέντα συνημμένα κλάσματα, τοῖς συναπτέοις ἴσα. (§. 102.).

ΣΧΟΛΙΟΝ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 104. Οὕτως αἱ ἁπλαῖ ἅπασαι ἀριθμητικαὶ πράξεις περὶ τὰ κλάσματα οὐ πάνυ πολλῷ ἐργωδέστερον τελοῦνται, τῶν περὶ τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς ὁλοχερεῖς. Τ᾽ἄλλα δὲ πᾶν κλάσμα, τρόποις ἀπείροις δηλοῦσθαι πέφυκεν. (§. 95.) Εἰσὶ δὲ τῶν κανονικῶν κλασμάτων, τῶν οὕτως ἀλλήλοις ὁμοδυναμούντων, οἱ ὅροι ἄλλων ἄλλοι ἐλάσσονες, ἐν αὐτοῖς δέτινες, καὶ ἐλάχιστοι.

§. 105. Ἐν γένει δὲ, εἴτε τῶν κανονικῶν τύχοι τὰ κλάσματα $\frac{\nu}{\delta}$ καὶ $\frac{N}{\Delta}$ ἀλλήλοις ἰσούμενα, εἴτε δὴ καὶ τῶν ἀτακτέντων, ἐὰν N διαιρεθὲν διὰ ν, πηλίκοντι τὸ Π δῷ, τὸ αὐτὸ προκύψει πηλίκον καὶ τοῦ Δ διὰ τοῦ δ διαιρεθέντος. Ἐὰν γὰρ Δ διὰ δ διαιρεθὲν πηλίκον ᾖ τὸ P, ἐπειδὴ $N = \nu . \Pi$, καὶ $\Delta = \delta . P$ (§. 54.) τὸ κλάσμα $\frac{N}{\Delta}$ τὸ αὐτὸ ἔσται τῷ $\frac{\nu \times \Pi,}{\delta \times P}$ ὃ τῷ κλάσματι $\frac{\nu}{\delta}$ ἐξισοῦσθαι οὐ δύναται, εἰμήπου τὸ Π ταὐτὸν ᾖ τῷ P. Καὶ γὰρ $\frac{\nu \times \Pi}{\delta \times \Pi} = \frac{\nu}{\delta}$ (§. 95.). Ἀλλαμὴν $\frac{\nu \times \Pi,}{\delta \times P}$ ἤτοι μεῖζον, ἢ ἔλαττον τοῦ $\frac{\nu \times \Pi,}{\delta \times \Pi}$ ὅπερ ἂν τὸ P ἔλαττον τύχοι ἢ μεῖζον τοῦ Π.

§. 106. Ἐντεῦθεν ἕπεται καὶ κατὰ γένος, ὅτι ἅπαν κλάσμα ἐκ κλάσματος αὐτῷ συνεξισουμένου γίνεται, τῶν ἐκείνου ὅρων διὰ τοῦ αὐτοῦ, ἤτοι ὁλοχεροῦς ὄντος, ἢ κλασματικοῦ, ἢ ἑκάτερον, ὡς ἐξ ἀμφοῖν συνθέτου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθέντων. Τουτέστιν ἐὰν ᾖ $\frac{\nu}{\delta} = \frac{N,}{\Delta}$ ἔσται $N = \nu \times \Pi$, καὶ $\Delta = \delta \times \Pi$, ἑκατέρωσε τοῦ Π τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν δηλοῦντος ἤτοι ὁλο-

ὁλοχερῆ, ἢ κεκλασμένον· καὶ τοῦτον ποτὲ μὲν γνήσιον, ἄλλοτε δὲ νόθον.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 107. Ἐὰν οἱ ἐν τῷ κανονικῷ κλάσματι $\frac{\nu}{\delta}$ ὅροι, ἁπάντων τῶν ἐν τοῖς αὐτῷ ἐξισεμένοις κλάσμασιν ὦσιν ἐλάχιστοι· κἀντεῦθεν καὶ τῶν ἐν τῷ $\frac{\nu \times \Pi}{\delta \times \Pi}$, ὅπερ ἴσον τε αὐτῷ ἐκείνῳ, καὶ ἅμα κανονικῶς τίθεται ἔχον, ὁ ἀριθμὸς Π ὁλοχερὴς ἔσται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν γὰρ ὁ Π ὁλοχερὴς μὴ ᾖ, ἔστω δὴ πρῶτον κλασματικὸς τῶν γνησίων· ἔσται δὲ $\nu \times \Pi$ ἔλαττον τοῦ ν. Καὶ $\delta \times \Pi$ ἔλαττον τοῦ δ. Καὶ ἔσονται ἄρα οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος $\frac{\nu \times \Pi}{\delta \times \Pi}$, ἐλάσσονες τῶν ὅρων τῶν ἐν τῷ $\frac{\nu}{\delta}$ κατὰ τῆς ὑποθέσεως.

Ἀλλ᾽ ἔστω δεύτερον ὁ Π, ἐξ ὁλοχεροῦς τοῦ Ι, καὶ γνησίου κλάσματος τοῦ Ζ συγκείμενος· καὶ ἔσται $\nu \times \Pi = \nu \cdot I + \nu \cdot Z$. Καὶ $\delta \times \Pi = \delta \cdot I + \delta \cdot Z$· οἱ δ᾽ ἀριθμοὶ οὗτοι ὁλοχερεῖς ἔσονται, ὅτι καὶ $\nu \times \Pi$, καὶ $\delta \times \Pi$ ὁλοχερεῖς εἰσίν. Ἀλλὰ μὴν $\nu \cdot I$, καὶ $\delta \cdot I$, ὁλοχερεῖς εἰσιν, ὡς ἐξ ὁλοχερῶν. Ἄρα καὶ $\nu \cdot Z$, $\delta \cdot Z$, ὁλοχερεῖς καὶ οὗτοι· οἱ δ᾽ αὐτοὶ (ὅτι κέκλασται ὁ Ζ) τῶν ν καὶ δ, ἕτερος ἑτέρου ἐλάσσονες. Τοῦ ἄρα κανονικοῦ κλάσματος $\frac{\nu \cdot Z}{\delta \cdot Z}$ οἱ ὅροι, τῶν τοῦ $\frac{\nu}{\delta}$, κανονικοῦ καὶ τούτου, καὶ πάντων ἐλαχίστους ἔχειν τοὺς ὅρους ὑποτεθέντος, ἔσονται καὶ ἤδη ἐλάσσονες· ὅπερ οὐ δυνατόν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 108. Ὁ ἄρα κεκλασμένος, εἰ πρὸς ὅρους ἔχει ἐλάσσονας μετακληθῆναι, τοῦτ' ἀεὶ περανθήσεται, τοῦ ἀριθμητοῦ διά τινος ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ διαιρεθέντος, ὃς ἂν καὶ τὸν παρονομαστὴν διαιροίη. Καὶ ὡς ἂν μείζων ὁ ἀριθμὸς οὗτος λαμβάνοιτο, τοσούτῳ δὴ ἐλάσσονες οἱ ὅροι, οἳ τοῦ καινοῦ προκύψουσι κλάσματος. Καὶ εἰ διαιρέτης ληφθείη ὁ πάντων μέγιστος, τῶν τοὺς ῥηθέντας καταμετρεῖν δυναμένων, ἐπὶ τοὺς ἁπάντων ἐλαχίστους ὅρους ἀναχθήσεται καὶ τὸ κλάσμα, δι' ὧν ἂν παρίστασθαι δύναιτο.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 109. Οὕτως οὖν τὸ κλάσμα $\frac{8}{12}$ εἰς ἐλάσσονας ἀνάγεται ὅρους τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ διὰ 2 διαιρεθέντων $\frac{4}{6}$. Εἰς ἐλαχίστους δὲ $\frac{2}{3}$ τῶν αὐτῶν ὅρων διὰ 4 διαιρεθέντων, ὃς ὁ μέγιστος τῶν ἀριθμῶν ἐστὶ τῶν καταμετρούντων ἑκάτερον. Ἐξευρίσκεται δὲ ὁ τηλικοῦτος διαιρέτης τὰ πολλὰ εὐπετῶς. Ἐνίοτε δὲ καὶ τοῦ κοινοῦ μὲν, μὴ μεγίστου δὲ παρόντος διαιρέτου, τὸ δι' αὐτοῦ ἤδη ἀναχθὲν, εἰς ἁπλούστερον ἔτι ἀναχθήσεται κλάσμα, ἄλλου προσληφθέντος διαιρέτου, τόνδε τὸν τρόπον· ἐκ τοῦ $\frac{24}{36}$, ἀμφοῖν τῶν ὅρων διὰ 4 διαιρεθέντων, γίνεται $\frac{6}{9}$, οὗ φανερὸν ἑκάτερον αὖθις ὅρον εἶναι διὰ 3 διαιρέσιμον, δι' οὗ ἐπὶ τοὺς ἁπάντων ἐλαχίστους ὅρους, οἷς ἂν τὸ κλάσμα τόδε παραστάιη, ἀνάγεται $\frac{2}{3}$. Ἀλλ' ἔστι γὰρ ὅτε οἱ τηλικοῦτοι διαιρέται οὕτω λανθάνουσιν, ὡς τέχνης δεῖν καὶ ἐπινοίας πρὸς τὴν ἐκείνων ἀνεύρεσιν.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 110. Τῶν ἐνταῦθα γραμμάτων ἀριθμοὺς ὁλοσχερεῖς ὑποσημαινόντων, ἐὰν ἢ $A = \Gamma + \Pi \times B$, ἢ $A = \Gamma - \Pi \times B$, ὁ ἑκάτερον Γ καὶ Β καταμετρῶν ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς, καὶ τὸν Α καταμετρήσει.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔσω α ὁ ἀριθμὸς ὁ ἑκάτερον, τὸν Γ καὶ Β, καταμετρῶν. Καὶ δὴ τοῦ μὲν Γ δι' αὐτοῦ διαιρεθέντος, πηλίκον ἀνακυπτέτω τὸ π ὁλοσχερὲς, τοῦ δὲ Β, τὸ φ ὁμοίως. Καὶ ἔσω τοίνυν $\Gamma = \pi \cdot \alpha$, καὶ $B = \phi \cdot \alpha$. Ἔνθεντοι $A = \pi \cdot \alpha + \Pi \phi \cdot \alpha$. Ἢ $A = \pi \cdot \alpha - \Pi \phi \cdot \alpha$. Δῆλον δὲ ὅτι τό,τε κεφάλαιον, καὶ ἡ διαφορὰ διὰ τοῦ α διαιρεῖσθαι δυύαται, πηλίκων ἀνακυπτόντων ὁλοσχερῶν, ἔνθεν μὲν $\pi + \Pi \phi$, ἔνθεν δὲ $\pi - \Pi \phi$ (§. 57.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 111. Ἔσω Α διαιρετέος, Β διαιρέτης, Π τοῦ πηλίκου μέρος τὸ ὁλοσχερὲς· Γ τὸ λοιπόν. Ἔσαι $A = \Gamma + \Pi \times B$. (§. 55.). Ἔνθεντοι ὁ ἀριθμὸς ὁ καὶ τὸν διαιρέτην Β, καὶ τὸ ὑπόλοιπον Γ καταμετρῶν, καταμετρήσει καὶ τὸν διαιρετέον Α. Ἀνάπαλιν δὲ, ἐὰν Γ μὲν ᾖ ὁ διαιρετέος, Α δὲ τὸ λείψανον, τῶν ἄλλων ὡς πρὶν μενόντων, ἐπεὶ ἤδη $\Gamma = A + \Pi \times B$· ἔσαι $A = \Gamma - \Pi \times B$· κἀντεῦθεν ὁ ἀριθμὸς, ὃς ἂν ἐπ' ἀκριβὲς διαιροίη καὶ τὸν διαιρέτην καὶ τὸν διαιρετέον, αὐτὸς καὶ τὸ λοιπὸν ἐπ' ἀκριβὲς διαιρήσει.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 112. Οἱοσδηποτοῦν ἄρα ἀριθμὸς τῶν διαιρούντων τὸν διαιρέτην ληφθεὶς, ἐὰν μὴ ὁ αὐτὸς καὶ τὸ λοιπὸν ᾖ διαιρῶν, οὐδὲ τὸν διαιρετέον διαιρήσει. Καὶ ἀνάπαλιν, εἰ μήγε τοῦτον, οὐδὲ τὸ λείψανον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 113. Ὁ ἄρα μέγισος τῶν ἀριθμῶν, τῶν καὶ τὸν διαιρέτην διαιρούντων, καὶ τὸ λοιπὸν, ὁ αὐτὸς μέγιςος ἔςαι καὶ τῶν τὸν διαιρέτlw ὡσαύτως, καὶ τὸν διαιρετέον. Εἰ γὰρ τῦ προσληφθέντος ἕτερός τις μείζων αὐτὺς διῄρει, ὐκ ἂν ὗτος εἴασεν, ὐδὲ τὸ λοιπὸν ἀδιαίρετον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 114. Δυοῖν ἀριθμῶν δοθέντων, οἷον 2145, καὶ 182, τὸν μέγιςον κοινὸν ἀμφοῖν διαιρέτlw προσανευρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Δίελε δὴ τὸν μείζονα διὰ τῦ ἐλάσσονος, τὸ λοιπὸν ἐν μέρει σημειώσας. Εἶτα διὰ τῦδε τῦ λοιπῦ δίελε τὸν πρὸ τῦ διαιρέτlw, ὁμοίως καὶ ἤδη, ὃ λοιπὸν ἐςὶ, παρασημειωσας. Οὕτω δὲ χώρει, ἀεὶ τὸν ἔχατον διαιρέτlw διὰ τῦ λοιπῦ διαιρῶν, εἰς ὃ μηδὲν τέως ᾖ τὸ ὑπολειπόμενον· ὡδέπως.

Διαιρετέος	Διαιρέτης	Λεῖψανον.
2145	182	143
182	143	39
143	39	26
39	26	13
26	13	0.

Ὁ τῶν διαιρετῶν ἔχατος 13, ὃς τὸ λειπόμενον ἰῶ ἐπὶ τῆς ἀμέσως προτέρας διαιρέσεως, ὁ μέγιςος ἐςὶ κοινὸς διαιρέτης τῶν προτεθέντων ἀριθμῶν 2145, καὶ 182.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔςι γὰρ ὁ ἀριθμὸς ὗτος κοινός τε καὶ μέγιςος διαιρέτης, τῶν ἐπὶ τῆς ἐχάτης τάξεως ἀριθμῶν 26 καὶ 13. Ἄρα καὶ τῶν ἐπὶ τῆς ἐγγὺς ἀνωτέρας τῦ μέσυ καὶ τῦ ἄκρυ, τῶν αὐτῶν ὄντων. Τοιγαρῦν καὶ τῦ πρώτυ καὶ μέσυ τῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς ταύτης γραμμῆς. (§. 113.). Ὡς δ' αὔτως τῦ λόγυ προσω χωρȣ̃ντος, τέως καὶ ἐπὶ τὸν πρῶτον καὶ μέσον τῆς πρωτίςης γραμμῆς ἀφιξόμεθα. Οἱ δὲ ὑπῆρχον οἱ προτεθέντες 2145, καὶ 182.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 115. Τῇ γȣ̃ν τοιᾶδε μεθόδῳ ἀείποτε ὁ μέγιςος κοινὸς διαιρέτης ἐπὶ παντὸς κλάσματος ἐξευρίσκεται. Ἀλλ᾽ ἐςι δὴ ὁ διαιρέτης ἐκεῖνος τὰ πολλὰ μονάς. Καὶ τȣ̃το τεκμήριον, τȣ̃ μηδὲν ἔχειν τὸ κλάσμα ἐπ᾽ ἔλαττον ἀνάγεσθαι ὄνομα· ὅτι ἡ μονὰς ἥκιςα διαιρεῖ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 116. Ἀριθμοὶ δύο, ἢ πλείονες, ὧν κοινὸς διαιρέτης μέγιςος ἡ μονάς· τȣτέςιν ὧν ȣ̓δεὶς κυρίως ἐςὶ κοινὸς διαιρέτης, καλȣ̃νται **πρῶτοι πρὸς ἀλλήλȣς**. Τοιοίδε 5 καὶ 9, 10 καὶ 21, 8 καὶ 15 καὶ 19.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 117. Οἱ ἐλάχιςοι ἀριθμοὶ τῶν οἷς τὸ δοθὲν κλάσμα ἐκφέρεται, εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλȣς. Καὶ ἐὰν οἱ ἐν τῷ κλάσματι ὅροι πρῶτοι τύχωσι πρὸς ἀλλήλȣς, οἱ αὐτοὶ ἔσονται καὶ οἱ ἐλάχιςοι, τῶν οἷς ἐκδηλȣ̃σθαι τὸ κλάσμα δύναται.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 118. Ἀριθμὸς ὁ πρὸς ὀντιναȣ̃ν ἕτερον, ὑφ᾽ ȣ̃ ἥκιςα διαιρεῖται πρῶτος, ἀπολύτως **πρῶτος**, ἢ **ἁπλȣ̃ς** καλεῖται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 119. Οὐδεὶς ἐςὶ τȣ̃ πρώτȣ διαιρέτης διαφέρων αὐτȣ̃· ὡς ἐὰν ἦτις διαιρέτης τȣ̃ πρώτȣ Π, φέρε ὁ δ, ἐπειδὴ ὁ αὐτὸς δ καὶ ἑαυτὸν διαιρεῖ, εἴη ἂν ὁ δ, τῶν ἀριθμῶν δ καὶ Π διαιρέτης κοινός· ὅ,τε Π πρῶτος ȣ̓κ ἂν εἴη πρός γε τὸν δ· ȣ̓δ᾽ ἄρα ἁπλῶς πρῶτος.

πρῶτος. Ὁ δὲ ἀριθμὸς ὃν οὐδεὶς ἄλλος διαιρεῖ, ἀπολύτως πρῶτος, ἢ ἁπλοῦς ἐστίν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 120. Ἀριθμὸς ὁ μὴ πρῶτος, ἢ ἁπλοῦς τυγχάνων, οὗπερ ἐστὶ δηλονότι παρ᾽ ἑαυτόν τις ἕτερος διαιρέτης, καλεῖται Σύνθετος.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 121. Ἀναφύονται τοίνυν οἱ σύνθετοι ὑπὸ ἄλλων διὰ πολλαπλασιασμοῦ. Εἰσὶ δὲ (ἐπεὶ περὶ ὁλοχερῶν ἐνταῦθα ὁ λόγος.) οἱ παράγοντες τοῦ συνθέτου ἐλάσσονες· τὰ δ᾽ ἄλλα καὶ αὐτοὶ ἤτοι πρῶτοι, ἢ σύνθετοι. Καὶ εἰ τοῦτο, καὶ αὐτοὶ ἄρα εἰς ἑτέρους ἀναλυόμενοι, περὶ ὧν οἷόν τε εἰπεῖν τὸ αὐτό. Ἔνθεν τοι ἐπεὶ τοὺς ὁλοχερεῖς παράγοντας, οὐκ ἔστιν εἰς ἄπειρον ἀπομειοῦν, ἐπὶ τοὺς ἁπλοῦς τέως ἐπάναγκες αὐτοὺς ἀπολήγειν. Κἀντεῦθεν δῆλον, ὅτι πᾶς ἀριθμὸς σύνθετος, ἐκ πολλαπλασιασμοῦ τῶν πρώτων δυοῖν, ἢ πλειόνων παράγεσθαι πέφυκεν· ὅπερ ἐνταῦθα συντίθεσθαι λέγεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 122. Ἅπας ἀριθμὸς σύνθετος ἐξ ὡρισμένων τινῶν συντίθεται πρώτων, οὐκ ἐξ ἄλλων, καὶ ἄλλων.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἀριθμὸς ἅπας σύνθετος Α, διαιρεθεὶς διὰ πρώτου τοῦ π, διδότω πηλίκον ὁλοχερὲς τὸ Π· διαιρεθεὶς δὲ διὰ πρώτου ἑτέρου τοῦ φ, πηλίκον παρεχέτω ὁλοχερὲς ὁμοίως τὸ Φ. Ἔσται δὲ $A = \pi . \Pi = \varphi . \Phi$. Καὶ ἐὰν ἄρα ἑκατέρῳ τῶνδε τῶν ἴσων παραγομένων, ὁ αὐτὸς παρονομαστὴς $\varphi . \Pi$ ὑπογραφῇ, προκύψει $\frac{\pi . \Pi}{\varphi . \Pi} = \frac{\varphi . \Phi}{\varphi . \Pi}$ Καὶ τῶν κλασμάτων ἀναχθέντων $\frac{\pi}{\varphi} = \frac{\Phi}{\Pi}$ Εἰσὶ δὲ π, φ, πρῶτοι· τοιγαροῦν καὶ ἐλάχιστοι χιςοι τῶν ἐκφερόντων τὸ κλάσμα (§. 117.). Ἔνθεντοι Φ ἐκ τȣ̃ π γίνεται, καὶ ἑτέρȣ τινὲς ὁλοχερȣ̃ς τȣ̃ Ι. Καὶ Π ὁμοίως ἐκ τȣ̃ φ, καὶ τȣ̃ αὐτȣ̃ ὁλοχερȣ̃ς Ι. (§. 107.). Τȣτέςι $\Phi = \pi \cdot I$, καὶ $\Pi = \varphi \cdot I$. Διὸ καὶ ἀντικαθιςαμένων γίνεται $\pi \cdot \Pi = \pi \cdot \varphi \cdot I$, καὶ $\varphi \cdot \Phi = \varphi \cdot \pi \cdot I$. Ἐπειδὴ δὲ $A = \pi \cdot \Pi$, καὶ τὸ αὐτὸ $A = \varphi \cdot \Phi$, ὁ ἀριθμὸς Α ἐκ τῶν δύο πρώτων π, φ, καὶ ἐξ ἄλλȣ τȣ̃ Ι συντίθεται. Ὁ δὲ ἀριθμὸς ȣ̃τος ὁ Ι, ἐὰν καὶ αὐτὸς πρῶτος ᾖ, εὔδηλον τὸ προτεθέν· ἐὰν δὲ σύνθετος, ταυτὰ καὶ περὶ τȣ́τȣ ἂν ἔχοι δειχθῆναι, ἅτια καὶ περὶ τȣ̃ Α δέδεικται. Καὶ τάγε τȣ̃ Συλλογισμȣ̃ οἷόντε προαγαγεῖν, εἰς ὃ τέως ὁ Ι πρῶτος προκύψειε.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 123. Τȣ̃ συνθέτȣ ἀριθμȣ̃, ȣ̓δεὶς ἄλλος διαιρέτης ἐςὶ παρὰ τȣ̀ς ἁπλȣ̃ς ἐξ ὧν σύγκειται, καὶ παράτινας ἐκ τȣ́των συνθέτȣς· ȣ̃τως ὁ 30, ὁ ἐκ τῶν ἁπλῶν 2, 3, 5 παρὰ τȣ́σδε διαιρέτας ἔχει καὶ τȣ̀ς ἐξ αὐτῶν συνθέτȣς· $6 = 2 \times 3$, $10 = 2 \times 5$, $15 = 3 \times 5$. $30 = 2 \times 3 \times 5$, μόνȣς.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 124. Ἐὰν οἱ σύνθετοι ὅροι τȣ̃ δοθέντος κλάσματος $\frac{15}{12}$ ἀναλυθῶσιν εἰς τȣ̀ς ἐν αὐτοῖς ἁπλȣςέρȣς, ὡδέπως· $\frac{3 \times 5}{2 \times 2 \times 3}$, ἐπὶ τȣ̀ς ἐλάσσονας τὸ κλάσμα ἀναχθήσεται ὅρȣς τῶν ἐφ᾽ ἑκατέρω ἁπλῶν παραγόντων ἐξαλειφθέντων, ὅσοι κοινοί. Ὅθεν ἐκ τȣ̃ προτεθέντος κλάσματος γίνεται $\frac{5}{2 \times 2} = \frac{5}{4}$. Διὸ δὴ ἐὰν ἅπαντες οἱ ἐν τῷ παρονομαςῇ ἁπλοῖ παράγοντες, κἀν τῷ ἀριθμητῇ ἐνῶσι, τὸ κλάσμα ἀριθμῷ ὁλοχερεῖ ἴσον ἔςαι. Εἰ δὲ μηδένες ἔνεισι τῷ ἀριθμητῇ ἁπλοῖ, οἱ κἀν τῷ παρονομαςῇ ἐγχωρȣ̃ντες, τὸ κλάσμα ἐπὶ ὅρȣς ἀναχθῆναι ἐλάσσονας ȣ̓ δυνήσεται· πολλȣ̃ γὰρ καὶ δεῖ τȣ̃ καὶ δι᾽ ὁλοχερȣ̃ς ἔχειν παρίςασθαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 125. Προτεθέντων ἀριθμῶν δυοῖν ὁλοσχερῶν ὡντινωνοῦν, οἷον τῶνδε τῶν συνθέτων 2. 3. 3. 5, καὶ 3. 5. 7, ὧν διαιρέται κοινοὶ 3 καὶ 5, ἐὰν ὁ ἕτερος πολλαπλασιασθῇ διά τινος ὁποιουδήποτε ἁπλοῦ, τοῦ ἐν τῇ θατέρου συνθέσει χώραν μὴ ἔχοντος, ἢ δι' αὐτοῦ ἐκείνου διαιρεθῇ, ὁ κοινὸς διαιρέτης τροπὴν οὐχ ὑποστήσεται. Οὕτω τῶν ἀριθμῶν 2. 3. 3. 5. 11, καὶ 3. 5. 7, ἢ 2. 3. 3. 5, καὶ 3. 5. 7. 7, ὁ αὐτὸς ἐστὶ κοινὸς διαιρέτης μέγιστος 3. 5, ἢ 15, ὃς ἦν καὶ τῶν ἀριθμῶν τῶν ἐν ἀρχῇ προτεθέντων.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 126. Ἐνθένδε ἡ τοῦ κλάσματος ἐπ' ἔλαττον ὄνομα ἀναγωγὴ εὐπετεστέρα γενήσεται, ἑκατέρου τῶν ἐπ' αὐτῷ ὅρων, δι' ἁπλοῦ τινος ἀριθμοῦ διαιρεθέντος, ὃς τὸν ἕτερον οὐκ ἂν διαιρεῖν δύναιτο. Ἐστὶ γὰρ τῶν ὅρων τοῦ οὕτως ἀνακύπτοντος κλάσματος, ὁ αὐτὸς κοινὸς μέγιστος διαιρέτης, ὃς ἦν καὶ τὸ κατ' ἀρχὰς ἐπὶ τοῦ προκειμένου· οἷον εἰ ἀναγαγεῖν δέοι τὸ κλάσμα $\frac{30}{147}$, διαιρεθέντος τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ 2, ὃς τὸν παρονομαστὴν ἥκιστα διαιρεῖ· καὶ τοῦ παρονομαστοῦ διὰ 7, ὃς τὸν ἀριθμητὴν ἥκιστα διαιρεῖ, γεννᾶται κλάσμα $\frac{15}{21}$, οὗ ἑκάτερος τῶν ὅρων διαιρέσιμος ἐστὶ διὰ 3· ὃς αὐτὸς ἐστὶν ὁ κοινὸς μέγιστος διαιρέτης τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος τοῦ ἐν ἀρχῇ προτεθέντος, $\frac{30}{147}$, δι' οὗ ἐπὶ τὸ $\frac{10}{49}$ ἀνάγεται.

§. 127. Ὃς δ' ἂν ταύτηγε διαπονῆσαι ἕλοιτο, ἀεὶ ἑκάτερον τῶν τοῦ κλάσματος ὅρων, δι' ἁπλοῦ τινος ἀριθμοῦ διαιρῶν, τοῦ μὴ διαιροῦντος τὸν ἕτερον, πρὸς αὐτὸν ἀπαντήσει τέως, τὸν κοινὸν διαιρέτην τὸν μέγιστον. Οὕτως ἐὰν τοῦ πρὸ μικροῦ ἀνακύψαντος $\frac{15}{21}$ διαιρεθῇ ὁ μὲν ἀριθμητὴς διὰ 5, ὁ δὲ παρονομαστὴς διὰ 7, προελεύσεται $\frac{3}{3}$. Ἐστὶ δὲ ὁ 3, ὁ κοινὸς ἐνταῦθα διαιρέτης ὁ μέγιστος, ὡς κατείδομεν.

ΤΜΗΜΑ ΤΡΙΤΟΝ
ΠΕΡΙ
ΑΡΙΘΜΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 128.

Αριθμȣ δι' ἑαυτȣ πολλαπλασιασθέντος, ὁ γινόμενος ἐκείνȣ καλεῖται **Τετράγωνος**, ὁ δὲ δι' ȣ̔, **Ῥίζα** τȣ̃ τετραγώνȣ ἀκȣ́ει τετραγωνική· οἷον τȣ̃ 25 τετράγωνος ὁ 625, ὡς ἐκ τȣ̃ 25 πολλαπλασιαζομένȣ τὴν γένεσιν ἔχων· τȣ̃ δὲ 625 ῥίζα τετραγωνικὴ ὁ 25.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 129. Τȣ̃ τετραγώνȣ διὰ τῆς ἰδίας αὐτȣ̃ ῥίζης πολλαπλασιαζομένȣ, ὁ προκύπτων ἀριθμὸς **Κύβος** ἐςὶ τȣ̃ ἐξ ἀρχῆς ληφθέντος, ὃς δὴ πρῶτον ληφθεὶς χέσει τῇ πρὸς τὸν κύβον, **Ῥίζα κυβικὴ** ὀνομάζεται· οἷον τȣ̃ 25 ὁ κύβος 15625, ὃς ἀναφύεται τȣ̃ τετραγώνȣ 625 διὰ τῆς ῥίζης 25 πολλαπλασιαζομένȣ. Τȣ̃ δὲ δὴ κύβȣ 15625 ῥίζα ἡ κυβικὴ ἐςὶν 25.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 130. Ἐν γένει δὲ τὰ ἐκ παραγόντων γινόμενα ἀλλήλοις ἴσων, ὁποσονȣ̃ν τὸν ἀριθμὸν, **Δυνάμεις** λέγονται τȣ̃ παράγοντος· **Δευτέρα** μὲν δύναμις, εἰ δὶς ὁ παράγων προσληφθεὶς εἴη. **Τρίτη** δὲ, εἰ τρίς. **Τετάρτη** δὲ, εἰ τετράκις· καὶ ἐφεξῆς ὡσαύτως. Οὕτω τȣ̃ ἀριθμȣ̃ 3, δευτέρα μὲν δύναμις ἐςὶ 3×3, ἤτοι 9· τρίτη δὲ $3 \times 3 \times 3$, ἤτοι 27· τετάρτη δὲ $3 \times 3 \times 3 \times 3$, ἤτοι 81· καὶ ȣ̔́τως ἐφεξῆς. Αὐτὸς δὲ ȣ̔̃τος ὁ ἀριθμὸς 3, χέσει μὲν τῇ πρὸς τὴν δευτέραν τῶν δυνάμεων **Ῥίζα** καλεῖται

λεῖται δευτέρα. Τῇ δὲ πρὸς τὴν τρίτην, Ῥίζα τρίτη, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 131. Δοθείσης τῆς ῥίζης, ῥᾷστα ἀπ' αὐτῆς τελεῖται ὁ τετράγωνος, ὁ κύβος, ἤτοι ἡ δευτέρα δύναμις, ἡ τρίτη, ἡ τετάρτη, καὶ ὁποία δήποτε τούτων ἄλλη ἀνωτέρα. Ἡ γε μὴν ἀπὸ τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὴν ῥίζαν ἐπάνοδος, πολλῷ δυσχερεστέρα ἐστί. Δειχθήσεται μέντοι τῆς τοιᾶσδε ἐπανόδου ὁδός τις καθολικωτέρα. Ἤδη δὲ καθ' ὃν λόγον ἐξ ἀριθμοῦ παντὸς τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, ὡς οἷον ἐπ' ἀκριβὲς ἀνευρίσκειν ἐστί, μόνην ὑποθησόμεθα, ὅτι τε τὸ πρόβλημα τόδε συχνάκις ἀπαντᾷ, καὶ οὐδὲ πάνυ δυσχερὴς ἡ τούτου ἐπίλυσις. (*)

§. 132. Δῆλον δὲ, ἐξ ὧν περὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἴσμεν, ὡς ἐὰν τοῦ ἀριθμοῦ 5, τετράγωνος ᾖ 25, τοῦ αὐτοῦ τῷ μηδενικῷ σημείῳ οὕτω προσηυξημένου 50, τοὺς αὐτοὺς ἕξει ὁ τετράγωνος χαρακτῆρας, δυσὶ μηδενικοῖς σημείοις προσεπηυξημένους, ὡς εἶναι 2500. Καὶ ἐν γένει ἐπὶ τοῦ τετραγώνου, δὶς ἀεὶ τοσαῦτα ἔσται τὰ μηδενικὰ τῶν σημείων, ὅσα ἐπὶ τῆς ῥίζης ἐστί.

§. 133. Τοὐναντίον δὲ, ἐὰν ἡ ῥίζα ᾖ 0, 5, ὁ τετράγωνος ἔσται 0, 25. Τῆς δὲ ῥίζης οὔσης 0, 05, ὁ τετράγωνος, 0, 0025· καὶ οὕτως ἐφεξῆς· δὶς τοσούτων, μετὰ τὴν τῶν ἁπλῶν ὑποδιαστολὴν μονάδων ὄντων ἐπὶ τοῦ τετραγώνου τῶν χαρακτήρων, ὁπόσοι τοῦ τοιοῦδε γένους ἐπὶ τῆς ῥίζης εἰσί.

§. 134. Καὶ ἐν γένει τῷ τοῦ κλασματικοῦ τετραγώνῳ, ἀντὶ μὲν ἀριθμητοῦ ὁ τετράγωνος ἐστὶ τοῦ ἀριθμητοῦ·

(*) Ἀλλ' ἡμῖν ἔδοξε τοῖς περὶ τῆς τετραγωνικῆς, καὶ τὰ περὶ τῆς κυβικῆς ἀμέσως κατωτέρω ὑποσυνάψαι, ὡς εἶναι βουλομένοις κἀκεῖνα διελθεῖν, μηδέν τι τούτων μᾶλλον ἐσόμενα δυσπαρακολούθητα.

μητοῦ· ἀντὶ δὲ παρονομαστοῦ, ὁ τετράγωνος τοῦ παρονομαστοῦ· οἷον τοῦ $\frac{2}{3}$ τετράγωνος ἐστὶ $\frac{4}{9}$· τοῦ δὲ $\frac{5}{2}$ ὁ $\frac{25}{4}$.

§. 135. Παραπλήσια δ' ἂν καὶ περὶ τῶν κύβων, καὶ ὁποιωνοῦν ἄλλων ὑπερτέρων δυνάμεων ὑποστηνάψειέ τις ῥᾳδίως, τὴν αὐτὴν στείβειν ἑλόμενος.

ΘΕΩΡΗΜΑ·

§. 136. Ἀριθμοῦ τοῦ ἐκ δυοῖν μερῶν συγκειμένου, ὁ τετράγωνος περιέξει, ἑκατέρων μὲν τοὺς τετραγώνους τῶν μερῶν, καὶ προσέτι δὶς τὸ ὑπὸ τῶν αὐτῶν μερῶν παραγόμενον.

ΔΕΙΞΙΣ·

Σχ. 3. Ἀριθμὸς ὁ ΑΒ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας ἐκκείμενος, ἐὰν εἰς μέρη δύο ΑΓ, ΓΒ ὁπωσοῦν διαιρεθῇ, ληφθῇ δ' ἀπ' αὐτοῦ ὁ τετράγωνος ΑΔ, εὔδηλον ὡς οὗτος συγκείσεται ἔκ τε τοῦ ΓΕ, ὅς ἐστιν ὁ τετράγωνος τοῦ μέρους ΑΓ, καὶ ἐκ τοῦ ΗΖ, ὅς ἐστιν ὁ τετράγωνος τοῦ μέρους ΓΒ, καὶ ἐκ τοῦ ΕΖ, καὶ ΓΗ, ἃ τὸ ὑπὸ τῶν μερῶν ἐστὶ παραγόμενον δὶς ληφθέν.

Ταυτὸ δὲ καταφανὲς ἐὰν τεθῇ $N = A + B$. Ἵνα γὰρ γένηται NN, πολλαπλασιαστέον ἑκάτερον τῶν μερῶν Α καὶ Β δι' ἑκατέρου (§ 56.). Ὅθεν γίνεται $AA + AB + BA + BB$. Τουτέστιν, ἐπειδὴ $AB = BA$ (§. 98.), $NN = AA + 2AB + BB$. Σύγκειται τοίνυν ὁ τετράγωνος NN ἐκ τῶν τετραγώνων τῶν μερῶν AA καὶ BB, καὶ ἐκ τοῦ ὑπ' αὐτῶν γινομένου AA δὶς ληφθέντος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α·

§. 137. Ἐὰν ἀριθμὸς ληφθῇ, οἷον ὁ 34, ὁ δυσὶ χαρακτῆρσιν ἐκκείμενος, ὧν ὁ ἕτερος τὰς δεκάδας σημαίνει τῶν διὰ θατέρου δηλουμένων μονάδων, ὁποίας

δ' ἂν

δ᾽ ἂν αὗται τάξεως τύχοιεν· ὁ ἀπ᾽ ἐκείνου τετράγωνος συντεθείσεται τρόπῳ τοιῷδε.

30 × 30 =	.	.	.	9
60 × 4 =	.	.	.	24
4 × 4 =	.	.	.	16
Ἐξ ὧν ὁ τετράγωνος	.	.	.	1156

Ἐν ᾧ ὁ ἔσχατος χαρακτὴρ 6 μονάδας σημαίνει, ταῖς ὑπὸ τοῦ ἐσχάτου τῆς ῥίζης χαρακτῆρος 4 δηλουμέναις ὁμοταγεῖς. Ἐνθέντοι τῶν ἐν ἐκείνῳ 4 μονάδων ἁπλῶν οὐσῶν, οὐδὲν λοιπὸν προσπεριεργάσασθαι. Ἀλλ᾽ ἐὰν ὁ 4 δεκάδας σημαίνῃ, τῷ τετραγώνῳ προστιθέναι δεήσει τῶν μηδενικῶν σημείων δύο, ὥστε εἶναι 115600. Κἀν τοῖς λοιποῖς δὲ ὡσαύτως, κατὰ τὰ εἰρημένα. (§. 132.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 138. Τὸν αὐτὸν συγκείσεται τρόπον ὁ τοῦ ἀριθμοῦ τετράγωνος, τοῦ ἐκ μονάδων, καὶ δεκάδων τῶν τοιούτων μονάδων συνθέτου, καὶ ἐὰν ὁ τῶν δεκάδων ἀριθμὸς μείζων ᾖ, ἢ ὥστε δι᾽ ἑνὸς ἔχειν χαρακτῆρος δηλοῦσθαι, (οἷον τοῦδε 364, οὕτω διαιρεθέντος 360 + 4) ὁπόσοι δ᾽ ἂν ὦσι τῆς τῶν δεκάδων πλήθους οἱ χαρακτῆρες. Ἀμέλειτοι πρῶτον ὁ τετράγωνος ληφθήσεται τοῦ πρώτου μέρους, οἷον ἐνταῦθα τοῦ 360· εἶτα τὸ παραγόμενον ὑπὸ τῶν μερῶν 360, καὶ 4 δὶς· τελευταῖον δὲ καὶ ὁ τετράγωνος προστεθείσεται ὁ ἀπὸ τοῦ δευτέρου μέρους, ἤτοι τοῦ 4. Τούτου δὲ παρατηρηθέντος, ὁ τοῦ ἀριθμοῦ τετράγωνος, τοῦ ἐν ὁποιῳδήποτε στίχῳ χαρακτήρων ἐκκειμένου, κατὰ νόμον τὸν αὐτὸν συγκείσεται οὕτως. Ἔστω δοθεὶς ἀριθμὸς 75342· ἀρχῆς οὖν ἀπὸ τῶν κατὰ τὰς ἀνωτέρας τάξεις μονάδων γινομένης, καὶ ἐπὶ τὰς κατωτέρας τῆς προόδου χωρούσης, πρῶτον δὴ ὁ ἀπὸ τοῦ 75 τετράγωνος συντιθέσθω, καθάπερ εἴρηται,

ἐκτοῦ

ἔκ τε τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀριθμοῦ 70, καὶ ἐκ τοῦ παραγομένου 70 × 5 δὶς ληφθέντος, καὶ ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀριθμοῦ 5. Τῷδε δὲ τῷ τετραγώνῳ, ὅς ἐστι 5625, ἐὰν δύο τῶν μηδενικῶν προστεθῇ σημεῖα, ἀριθμὸς γενήσεται τετράγωνος ὁ τοῦ 750. Διὸ δὴ τοῦ προτεθέντος ἀριθμοῦ χαρακτήρων προσληφθέντων τριῶν 753, καὶ τοῦ ἀριθμοῦ ὧδε διαμερισθέντος 750 + 3, ὁ τετράγωνος κατὰ τὸν αὐτὸν συντεθήσεται κανόνα, ἐὰν τῷ τετραγώνῳ τοῦ ἀριθμοῦ 750, ὃν πρὸ μικροῦ συντεθείκαμεν, προστεθῇ δὶς τὸ παραγόμενον ὑπὸ τῶν μερῶν 750 × 3, ἐπιπροστεθῇ δ᾽ ἔτι καὶ ὁ τοῦδε τοῦ μέρους 3 τετράγωνος· οὕτω δέτοι τοῦ ἀπὸ 753 τετραγώνου παραχθέντος, γενήσεται τετράγωνος καὶ ἀπὸ τοῦ 7530, τῷ πρὸ τοῦ παραχθέντι δυοῖν μηδενικῶν σημείων ἐπιτεθέντων· κἀντεῦθεν καὶ ἀπὸ τοῦ 7534, ἤτοι τοῦ 7530 + 4, τοῦ ὑπὸ τῶν μερῶν γινομένου δὶς προσληφθέντος, καὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ χαρακτῆρος τῶν μονάδων τετραγώνου προστεθέντος. Ἀλλὰ καὶ μετὰ τὸν οὕτω προελθόντα τετράγωνον ἀπὸ τοῦ 7534, τετράγωνος προσωτέρω συστήσεται καὶ ἀπὸ τοῦ 75340· κἀντεῦθεν καὶ ὁ ἀπὸ τοῦδε 75342, ἢ 75340 + 2, τὸν αὐτὸν τρόπον. Τὸ δὲ τοῦ ὑπολογισμοῦ σχῆμα, ἐὰν αἱ προσθέσεις ἅπασαι εἰς τέλος ὑπερτεθῶσι, τοιόνδε ἐστί—

75342)	49				
	7	0			
		25			
		45	0		
			9		
		6	02	4	
				16	
			30	13	6
					4
	56	76	41	69	64

ΠΟΡΙΣΜΑ

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 139. Ἐν γένει ἐν ἐντεῦθεν φανερὸν, ὁπόσοι ἂν οἱ κατὰ τὴν ῥίζαν τύχωσι χαρακτῆρες, τὸν ὁλικὸν τετράγωνον, ἀεὶ τοὺς τετραγώνους πάντας τοὺς ἀπὸ χαρακτῆρος ἐν μέρει ἑκάστου περιειληφέναι, καὶ πρὸς δὴ τούτοις τὰ ὑφ᾽ ἑκάστου χαρακτῆρος, ἐπὶ πάντων τῶν πρὸς τὰ λοιπὰ αὐτοῦ ἡγουμένων πολλαπλασιασμῷ γινόμενα, δὶς ληφθέντα· τῆς τῶν ἐν ἑκάστῳ χαρακτῆρι μονάδων καταλλήλου τάξεως ἀεὶ σωζομένης. Οἱ δὲ δὴ εἰρημένοι τετράγωνοι κατὰ τόπους ἀποτερματίζονται δεξιόθεν πρὸς ἀριστερὰ ἴσοι περιτταρίθμους· οἷον κατὰ τὸν πρῶτον, τρίτον, πέμπτον, κξ. τὰ δὲ γινόμενα κατὰ τοὺς λοιποὺς, τουτέστι τοὺς ἀρτιαρίθμους ἐκτάσσεται, καθ᾽ ὃν δὴ νόμον, καὶ εἰς αὐτὸ εἰσίασι τὸ κεφάλαιον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 140. Ἀριθμοῦ δοθέντος τετραγώνου, τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Προκειμένου τοῦ πρὸ μικροῦ συγκροτηθέντος τετραγώνου 5676416964, τὴν ῥίζαν εὑρήσων, δίελε δὴ τοῦτον εἰς κόμματα, ἀνὰ δύο χαρακτῆρας ἕκαστον περιέχοντα, δεξιόθεν ἐπ᾽ ἀριστερὰ προϊὼν, ὥστε περισσαρίθμων τῶν χαρακτήρων τυχόντων, ἐν μοναδικῷ πληροῦσθαι χαρακτῆρι τὸ κόμμα τὸ ἀριστερώτατον. Εἶτα κατὰ τὸ ἐφεξῆς σχῆμα, ἀριστερόθεν εἰς δεξιὰ ἀνάπαλιν χωρῶν.

```
          56|76|41|69|64|          (75342 . . Ρ
          49| –| –| –| –|  . . Α
 14)       7|76|  |  |  |
           7|0–| –| –| –|  . . Β
            |25| –| –| –|  . . Γ
150)        51|41|  |  |
            45|0–| –| –|   . . Δ
              | 9| –| –|   . . Ε
1506)        632|69|  |
             602|4–| –|    . . Ζ
                |16| –|    . . Η
15068)          3013|64|
                3013|6–|   . . Θ
                    | 4|   . . Ι
            000000
```

Α΄. Λάβε δὴ τὸν 49 τετράγωνον, τὸν ἐγγὺς ἐλάσσονα τοῦ πρώτου κόμματος· τοῦ δὲ τὴν ῥίζαν 7, ὡς πρῶτον τῆς ζητουμένης χαρακτῆρα ῥίζης, γράφε ἀντίστιχον τῷ Ρ. τὸν δ᾽ ἀπ᾽ ἐναντίον τοῦ Α τετράγωνον ἄφελε ἀπὸ τῶν τοῦ πρώτου τοῦδε κόμματος χαρακτήρων, τὸ λοιπὸν ὑπογράψας 7.

Β΄. Τῷδε τῷ λοιπῷ τὸν τοῦ ἐχομένου κόμματος πρῶτον προσθεὶς χαρακτῆρα, τὸν συμπληρούμενον 77 ἀριθμὸν διὰ τοῦ διπλοῦ τοῦ τῆς ῥίζης εὑρεθέντος πρώτου δίελε χαρακτῆρος, ἤτοι τοῦ 14· τὸ δὲ πηλίκον 5 δώσει σοι τὸν χαρακτῆρα τῆς ῥίζης τὸν δεύτερον.

Γ΄. Τὸ γινόμενον ὑπὸ τοῦδε τοῦ πηλίκου 5 καὶ τοῦ διαιρέτου, καὶ προσέτι δὲ, καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ εἰρημένου πηλίκου τετράγωνον, οὕτως, ὡς ἄντικρυ τοῦ Β καὶ Γ κεῖται γεγραμμένα, εἰς κεφάλαιον συνάψας ἄφελε, τὴν ὑπεροχὴν ἐπισημειώσας.

Δ΄. Τῇ δ᾽ ὑπεροχῇ τῇδε 51, τὸν προσεχῆ αὖθις τοῦ τετραγώνου χαρακτῆρα καταγαγὼν 4, καὶ προσθέ-

προσθέμενος, ὥστε εἶναι 514, δίελε τὸν ἀριθμὸν τόνδε διὰ 150, ὃς τῆς ἄχρι τοῦδε εὑρεθείσης ῥίζης 75 ἐστὶ τὸ διπλάσιον· τὸ δὲ πηλίκον 3, ὁ χαρακτὴρ ἔσται τῆς ῥίζης ὁ τρίτος.

Εʹ. Ἔνθεντοι τοῦτε γινομένου ᾧ τὸ Δ ἀντιστοιχεῖ, καὶ τοῦ τετραγώνου ᾧ τὸ Ε, συνάμα ἀφαιρεθέντων, ἀριθμὸς καταλείπεται ὁ 632 ὃς κατὰ τὸν αὐτὸν μεταχειρισθεὶς τρόπον, τὸν ἑπόμενον τῆς ῥίζης ἀποδώσει χαρακτῆρα, ὅπερ εὑρεθέντος προσευρεθήσονται καὶ οἱ λοιποὶ, κατὰ τοὺς αὐτοὺς νόμους προϊούσης τῆς ἐργασίας, καὶ ἀείποτε διὰ τοῦ διπλοῦ τῆς εὑρεθείσης ῥίζης τῶν διαιρέσεων τελουμένων, διὰ διαιρέτου δηλονότι ἐς ἀεὶ προσαύξοντος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Φημὶ δὴ τὸν οὕτως εὑρεθέντα ἀριθμὸν 75342, τοῦ προτεθέντος τὴν ῥίζαν εἶναι τὴν τετραγωνικήν. Ὁ γὰρ τοῦδε τοῦ ἀριθμοῦ τετράγωνος, ἐκ μερῶν σύγκειται τῶν ἐπὶ τοῦ Σχήματος γεγραμμένων ἁπάντων τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι (§. 138.) ὅτι δὲ τάδε τὰ μέρη ἅμα ληφθέντα τὸν προτεθέντα ἀριθμὸν συμπληροῖ, δῆλον ἐντεῦθεν, ὅτι ἀφαιρεθέντων ἐξ αὐτοῦ, οὐδὲν ὑπολείπεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 141. Ἡ τοῦ ὁλοσχεροῦς τετραγωνικὴ ῥίζα, ἡ ἐν ἀριθμοῖς ὁλοσχερέσιν ἐπ᾿ ἀκριβὲς μὴ ἀποδιδομένη, οὐδ᾿ ἐν τοῖς κλασματικοῖς ἀποδοθήσεται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν ὁ κλασματίας οὕτως $\frac{\alpha.\,\beta.\,\gamma}{a.\ b.}$ (ἐν ᾧ α, β, γ ἀριθμοὺς δηλοῦσι πρώτους, ἐξ ὧν σύγκειται ὁ ἀριθμητής, καὶ a, b πρώτους ὁμοίως, ἐξ ὧν ὁ παρονομαστής) ὑποτεθῇ ῥίζα εἶναι τετραγωνικὴ ἀριθμοῦ ὁλο-

ὁλοχερὲς, ἔσαι δὴ ὁ ἀπὸ ταύτης τετράγωνος $\frac{\alpha.\ \beta.\ \gamma.\ \alpha.\ \beta.\ \gamma,}{a.\ b.\ a.\ b.}$ ὁλοχερής· ὅπερ ἄλλως ἐκ ἂν εἴη (§. 124.) μήτινων ἁπλῶν ἀριθμῶν τῶν ἐν τῷ ἀριθμητῇ, τῶν αὐτῶν τοῖς ἐν τῷ παρονομαςῇ ἁπλοῖς a καὶ b ὄντων· τετέςι μὴ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{\alpha.\ \beta.\ \gamma}{a.\ b}$ (ὃς ἐτίθετο κλασματικὸς εἶναι) ὁλοχερὲς τυγχάνοντος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 142. Ἀριθμοῦ τοίνυν ἐπέκεινα εἰσὶν οἱ ὁλοχερεῖς ἀριθμοὶ, ὧν αἱ ῥίζαι, ἐπεὶ μηδ' ὁλοχερεῖς, μηδὲ κεκλασμέναι, πάντη πάντως εἰσὶν ἀναπόδοτοι. Τουτέςιν οἱ τῷ δι' ἑαυτοῦ πολλαπλασιασμῷ ἀριθμοῦ τινὸς, ὃς ἂν δοθείη, παραχθῆναι μὴ ἔχοντες.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 143. Ἡ τοῦ κεκλασμένου τετραγωνικὴ ῥίζα οὐκ ἂν δοθείη, μὴ καὶ τοῦ ἐν τῷ κλάσματι ἀριθμητοῦ τετραγώνου ὄντος, καὶ τοῦ παρονομάζοντος. Ὡς ἐὰν ᾖ, ἔσαι μὲν ὁ τῆς ῥίζης ἀριθμητὴς ῥίζα τοῦ ἀριθμητοῦ, ἔσαι δὲ ὁ παρονομαςὴς τοῦ παρονομαςοῦ. Οὐδὲ μὲν οὖν ὁ δεκαδικὸς κλασματίας, ἢ ὁςισοῦν ἀριθμὸς ὃς ἂν, παρὰ τὰς καθ' οἱανδήτινα τάξιν ὁλοχερεῖς μονάδας, καὶ μόρια δεκαδικὰ περιέχοι, τετράγωνος ἔσαι, εἰ μὴ καὶ ὁ τῶν ἐν αὐτῷ χαρακτήρων ἀριθμὸς, δι' ὧν τὰ δεκαδικὰ τῶν μορίων δηλοῦται, οὕς τε διὰ τοῦ (,) συνήθες τῶν λοιπῶν ὑποδιαςέλλεσθαι, ἄρτιος ᾖ, καὶ τοῦ σημείου (,) ἐκ μέσου γινομένου προκύπτῃ ὁ τετράγωνος τοῦ ὁλοχεροῦς. Ὁ οὖν ἀριθμὸς 16, 9 οὐκ ἔςι τετράγωνος, καίτοι ὁ 169 τετράγωνος τυγχάνει τῆς ῥίζης 13. Ἀλλὰ γὰρ ὁ 1, 69, ἔςι τετράγωνος ἀπὸ ῥίζης 1, 3. (§. 133.).

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 144. Ἀλλ' εἰ καὶ ἀριθμὸς οὐκ ἔςιν, ὃς καὶ καθ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθεὶς, ἀριθμὸν ἄλλον τινὰ,

φέρε

φέρε τὸν 3, ἐπ' ἀκριβὲς ἐδέποτ' ἂν ἀποδοίη, δοθείη τις ἂν ὅμως, ὁ τῦτο δυνάμενος ἐν διαφορᾷ πάνυ ἐλαχίςῃ. Καὶ τέτε δὲ δοθέντος, ἄλλος, ὃς ἂν ἐφ' ἑαυτῷ πολλαπλασιαθεὶς τὸ 3 παράγοι, ἐν διαφορᾷ ἔτι πολλῷ ἐλάσσονι. Ἔπειτα δὲ καὶ τέτε ἀκριβέςερον τρίτος· καὶ ἕτως ἐπ' ἄπειρον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 145. Ἀριθμῦ ὁλοσχερῦς δοθέντος, ἢ κατὰ τύπον ὁλοσχερῦς διὰ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων ἐκκειμένε, ἀριθμὸν ἕτερον εὑρεῖν, ὃς ἂν τῇ ἐκείνε τετραγωνικῇ ῥίζῃ, ὅτι ἔγγιςα γίγνοιτο.

ΛΥΣΙΣ.

Τὰς ἁπλᾶς τῶν μονάδων ἐπὶ τῦ προτεθέντος ἀριθμῦ ὑποδιαςείλας, καὶ τὸν ἀριθμὸν ἀπὸ τῦ κατὰ τὴν ὑποδιαςολὴν τόπε ἔνθεν καὶ ἔνθεν κατὰ κόμματα ἀνὰ δύο χαρακτῆρας διελόμενος, (ἕτω γεμὴν ὡς τὸ ἔχατον, ὧν αἱ μονάδες ἁπασῶν ἐλάχιςαι, διὰ τῦ μηδενικῦ σημείε ἀναπληρῦν, ἐὰν οἱ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων χαρακτῆρες τύχωσι περισσάριθμοι) προςίθει δὴ ἀπὸ τῆς τελευτῆς τοσαῦτα, ἐκ μηδενικῶν κόμματα, ὅσα ἂν δέξῃ ἅλις ἂν ἔχειν εἰς τὸ προκείμενον· ἐκεῖνο εὖ ἐπιςάμενος, ὡς ἕκαςον τῶν ἐκ δυοῖν χαρακτήρων κομμάτων, χαρακτῆρα ἕνα τῶν τῆς ῥίζης πέφυκεν ἀποδιδόναι. Τὰ δὲ λοιπὰ ὡσαύτως πέραινε, ὡς εἴπερ καὶ τετράγωνος ἦν, ὁ ἀριθμὸς ὁ προκείμενος. Εἰ μὴ ὅτι τῦ λοιπῦ, μετὰ τὸ διὰ πάντων ἐλθεῖν τῶν κομμάτων, λόγος ἐδείς.

Οἷον εἰ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν εὑρεῖν προκέοιτο τῦ ἀριθμῦ 4, 67, προςιθεὶς τὰ μηδενικὰ, ἕτως εἰς κόμματα διαιρῶ.

4, | 67 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00.

Ἐξαγαγὼν δὲ τὴν ῥίζαν ἐντεῦθεν ἔχω ὡς ἔγγιςα 2, 1610182· ἕτος γὰρ δι' ἑαυτῦ πολλαπλασια-

θεὶς

θεὶς ὁ ἀριθμὸς, ἐ δήπε τὸν προτεθέντα 4, 67 ἐπ' ἀκριβὲς, τέτε γεμὴν μόλις ἐλάσσονα παράγει τὸν ἑξῆς· 4, 66999966073124.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἅπαντες οἱ κατὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ῥίζης ἀπὸ τε̃ προτεθέντος ἀφαιρεθέντες, τετράγωνον συντιθέασι, τε̃ προτεθέντος ἀριθμε̃ 4, 67 ἐλάσσονα, ἐ̃ ἡ ῥίζα παρίσαται· ὁ δὲ τετράγωνος ἔτος πρὸς τὸν προτεθέντα τοσέτῳ ἔγγιον γίνεται, ὅσῳ διὰ πλειόνων χαρακτήρων ἐκφέρεται. Ἡ γὰρ διαφορὰ ἐν κλάσμασι τοσέτῳ ἐλάττοσι κεῖται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 146. Τὰ τῶν μηδενικῶν σημείων κόμματα κατὰ βραχὺ προσάπτεσθαι δύναται, καθ' ὅσον ἡ κατὰ τὴν εὕρεσιν ἐργασία χωρε̃σα πρόεισιν. Ἀλλ' ὅσα δήποτ' ἂν ᾖ προσάψαις, ὡς δ' ἂν καὶ πονήσαις, εἰ μὴ τετράγωνος ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς, ἐδέποτ' ἂν εἰς πέρας τε̃ προκειμένε ἀφίκοιο. Τὴν γὰρ ἐπ' ἀκριβὲς ῥίζαν ἐθέλοντι ἀποδε̃ναι, μάτην ἂν εἴη πονητέον τέλες ἐπέκεινα. Οὐκε̃ν ἡ κατὰ νε̃ν ἀνατυπεμένη ῥίζα τετραγωνικὴ τε̃ ἀριθμε̃ τε̃ μὴ τετραγώνε, διὰ μερῶν τῶν τῆς μονάδος, ἅτε μεγέθες ἂν εἴη τινὸς ὡρισμένε, ὅσον ἂν ἐλάχιστα προσληφθῇ, ἐδέποτε παραστῆναι δυνήσεται. Καὶ ἔστιν ἄρα ἡ τοιάδε ῥίζα ἀριθμὸς ἄλογος. (§. 9.). Ὁ τοίνυν λέγων τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀπὸ ἀριθμε̃ τε̃ μὴ τετραγώνε, μὴ δύνασθαι ἀποδοθῆναι, εἰ μὴ τῆς μονάδος εἰς ἄπειρεστὰ μόρια διαιρεθείσης, κομιδῇ αὐτὸ τε̃το τυγχάνει ἀποφαινόμενος.

ΠΑΡΑΡ.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ
ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΤΟΥ
ΚΥΒΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ
ΣΥΣΤΑΣΕΩΣ,
ΚΑΙ
῾ΕΥΡΕΣΕΩΣ ΤΗΣ ΚΑΤ᾿ ΑΥΤΟΝ ῾ΡΙΖΗΣ.

---

§. α΄.

Ὥσπερ ἐπὶ τοῦ τετραγωνικοῦ ἀριθμοῦ τὰ μηδενικὰ σημεῖα, δὶς τοσαῦτα εἰσάγεται, ἢ ὅσα ἐπὶ τῆς ῥίζης (§. 132.), οὕτως ἐπὶ τοῦ κύβου τρὶς τοσαῦτα, ὡς ἡ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ φύσις ἀπαιτεῖ. (§. 69.). Οἷον Ῥίζ. 50, Τετρ. 2500, Κύβ. 125000. Καὶ ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν δὲ κλασμάτων (§. 133.) Ῥίζ. 0, 5, ἢ 0, •5· Τετρ. 0, 25, ἢ 0, 0025· Κύβ. 0, 125, ἢ 0, 00015· Δὶς μὲν τοσούτων μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν ἐπὶ τοῦ τετραγώνου τῶν χαρακτήρων ἀριθμουμένων, τρὶς δ᾿ ἐπὶ τοῦ κύβου τοσούτων, ὁπόσοι τοῦ τοιοῦδε γένους ἐπὶ τῆς ῥίζης εἰσί. Καὶ ἐν τῷ τοῦ κλασματικοῦ δὲ κύβῳ, ἀντὶ μὲν ἀριθμητοῦ ὁ κύβος ἐστὶν ὁ τοῦ ἀριθμητοῦ, ἀντὶ δὲ παρονομαστοῦ ὁ τοῦ παρονομαστοῦ· οἷον τοῦ $\frac{2}{3}$ κύβος $\frac{8}{27}$· τοῦ δὲ $\frac{5}{2}$, ὁ $\frac{125}{8}$, ὥσπερ ἐν τῷ τοῦ κλασματικοῦ τετραγώνῳ, ἄμφω οἱ ὅροι εἰσὶν οἱ τῶν τῆς ῥίζης τετράγωνοι. (§. 134.).

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. β΄. Ἀριθμοῦ τοῦ ἐκ δυοῖν μερῶν συγκειμένου ὁ κύβος, περιέξει μὲν ἑκατέρων τοὺς κύβους τῶν μερῶν, περιέξει δὲ προσέτι, τρὶς μὲν τὸ ὑπὸ τȣ̃ τετραγώνȣ τȣ̃ Α. μέρȣς, καὶ ὑπὸ τȣ̃ Β. ἁπλῶς γινόμενον, τρὶς δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τȣ̃ τετραγώνȣ τȣ̃ Β. μέρȣς, καὶ ὑπὸ τȣ̃ Α. ἁπλῶς, ἀνάπαλιν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Καὶ γὰρ τὸ τετράγωνον ΑΑ + 2ΑΒ + ΒΒ (§. 136.) διὰ τῆς ἑαυτȣ̃ ῥίζης πολλαπλασιάσθαι δεήσαν εἰς κύβȣ γένεσιν, πολλαπλασιαστέον ἕκαστον τῶν ἐκείνȣ μερῶν, δι᾽ ἑκατέρȣ τῶν ταύτης (§. 129.)· Καὶ ἀποβήσεται ἔτως ὁ κύβος ΑΑΑ + 2ΑΑΒ + ΑΒΒ + ΑΑΒ + 2ΑΒΒ + ΒΒΒ = ΑΑΑ + 3ΑΑΒ + 3ΑΒΒ + ΒΒΒ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. γ΄. Ἐὰν ἄρα ἀριθμὸς ληφθῇ, φέρε ὁ 3, εἰς μέρη δύο 2 + 1 διῃρημένος, ὁ ἀπ᾽ ἐκείνȣ κύβος συντεθήσεται ἔτω.

Κύβος ὁ ἀπὸ τȣ̃ Α. μέρȣς	$2 \times 2 \times 2 = 8$
Κύβος ὁ ἀπὸ τȣ̃ Β.	$1 \times 1 \times 1 = 1$
Τρὶς τὸ Τετρ. τȣ̃ Α. ἐπὶ τȣ̃ Β.	$3.(2 \times 2).\ 1 = 12$
Τρὶς τὸ Τετρ. τȣ̃ Β. ἐπὶ τȣ̃ Α.	$3.(1 \times 1).\ 2 = 6$
Ὁ ὁλοσχερὴς Κύβος =	27

Ἐὰν δὲ ἀντὶ ῥίζης ἀριθμὸς ληφθῇ	$21 = 20 + 1$
Συστήσεται Κυβ. ὁ ἀπὸ τȣ̃ Α. μέρȣς =	8000
ὁ ἀπὸ τȣ̃ Β. =	1
Τὸ τρὶς ὑπὸ τȣ̃ Τετρ. τȣ̃ Α. καὶ ὑπὸ τȣ̃ Β. =	1200
Τὸ τρὶς ὑπὸ τȣ̃ Τετρ. τȣ̃ Β. καὶ ὑπὸ τȣ̃ Α. =	60
Ὁ ὁλοσχερὴς κύβος	9261

Ἐὰν δὲ τῷ ἐπὶ τῆς ῥίζης ἀντὶ Β. μέρȣς λαμβανομένῳ χαρακτῆρι, μηδενικόντι σημεῖον προσὸν εἰς δεκάδας τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας ἐξαίρῃ, τῷ ὡς ἀνωτέρω προκύπτοντι κύβῳ, καὶ μηδενικὰ ἔτι σημεῖα προσθετέον τρία. Οἷον ἐὰν ἡ ῥίζα 21 τῇ τȣ̃ 0 προσθέσει κατὰ τὸ τέλος ἐπὶ τὴν 210 προσβιβασθῇ, τὸ μὲν πρῶτον αὐτῆς μέρος ἔσαι 200, τὸ δὲ δεύτερον 10· ὅ,τε ἐκ τούτων ὁλοχερῶς συγκροτέμενος κύβος 9261000, αὐτὸς ἔσαι ὁ ἀνωτέρω, μηδενικὰ τρία σημεῖα προσπαρειληφώς. (§. α.).

ΠΟΡΙΣΜΑ. Β.

§. δ'. Τὸν αὐτὸν δὲ συγκείσεται τρόπον ὁ κύβος καὶ τοῦ ἀντὶ ῥίζης ἀριθμοῦ ἐκ πλειόνων ἢ δύο χαρακτήρων συγκροτουμένου· οἷον τοῦδε 214. Διαιρεθέντες γὰρ εἰς μέρη καὶ οὕτω δύο, οἷον 210, καὶ 4, ληφθήσεται παραπλησίως ὁ τοῦ Α. μέρους 210 κύβος· καὶ ὁ τοῦ Β. 4· καὶ τὸ τρὶς ὑπότε ἐκείνου τετραγωνισθέντος, καὶ τούτου ἁπλῶς γινόμενον· καὶ τὸ τρὶς ἀνάπαλιν ὑπὸ τοῦ κατὰ τόδε τετραγώνου, καὶ ἁπλῶς ἐκείνου· καὶ προσεθείσεται ταῦτα πάντα εἰς τὴν τοῦ ὁλικοῦ κύβου συμπλήρωσιν. Καὶ τόδε δὴ γενήσεται ἐφεξῆς, ἐξ ὁποσωνοῦν ἂν ἡ ῥίζα χαρακτήρων συγκέοιτο· οἷον εἰς παράδειγμα ἀντὶ ῥίζης ὁλικῆς προκειμένου τοῦ Ἀριθμοῦ 75342, ἐκ τῶν εἰρημένων στοιχείων οὕτως ἡμῖν ὁ ὅλος κύβος συγκροτηθήσεται.

Α.

Ῥίζα μερικὴ 75 = 70 + 5.

	Κ. 70 × 70 × 70 =	343000
	Κ. 5 × 5 × 5 =	125
Τρὶς τὸ Α. γινόμενον	3. (70 × 70) 5 =	73500
Τρὶς τὸ Β.	3. (5 × 5) 70 =	5250
Κύβος ὁ ἐκ τούτων		421875

Β.

Ῥίζα μερικὴ 753 = 750 + 3

Κ. 750 × 750 × 750 =		421875000
Κ. 3 × 3 × 3 =		27
Τρὶς τὸ Α. γινόμ.	3. (750 × 750) 3 =	5062500
Τρὶς τὸ Β.	3. (3 × 3) 750 =	20250
Κύβος ὁ ἐκ τούτων		420957777

 Γ. Ῥι-

Γ.

Ῥίζα μερ. 7534 = 7530 + 4

Κ. 7530 × 7530 × 7530 =	426957777000
Κ. 4 × 4 × 4 =	64
Τρὶς τὸ Α. γινόμ. 3.(7530 × 7530) 4 =	680410800
Τρὶς τὸ Β. 3.(4 × 4) 7530 =	361440
Κύβος ὁ ἐκ τούτων	427638549304

Δ.

Ῥίζα ὁλικὴ 75342 = 75340 + 2

Κ. 75340 × 75340 × 75340 =	427638549304000
Κ. 2 × 2 × 2 =	8
Τρὶς τὸ Α. γινόμ. 3.(75340 × 75340) 2 =	34056693600
Τρὶς τὸ Β. 3.(2 × 2) 75340 =	904080
Ὁ ὁλικὸς Κύβος	427672606901688

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. έ. Ἀριθμοῦ δοθέντος Κυβικοῦ, τὴν κατ' αὐτὸν ῥίζαν ἀποδοῦναι.

ΛΥΣΙΣ.

Προκειμένου τοῦ πρὸ μικροῦ συγκροτηθέντος κύβου, διαιρεθήτωσαν οἱ χαρακτῆρες εἰς κόμματα, ἀνὰ τρεῖς διαστελλόμενοι· μηδὲν διαφέρον εἰ τὸ πρὸς τὰ λοιπὰ τελευταῖον κόμμα, τριῶν ἐλάσσονας περιείληφεν· οὕτως·

	427	672	606	901	688 (75342	Ρ
	343	–	–	–	– – –	Α
	84	672				
147. 5	– 73	5 –	–	–	– – –	Β
75. 7	– 5	25 –	–	–	– – –	Γ
5. 5. 5	–	125	–	–	– – –	Δ
		5797	606			
16875. 3	–	5062	5 –	–	– – –	Ε
27. 75	–	20	25 –	–	– – –	Ζ
3. 3. 3	–	–	27	–	– – –	Η
			714829	901		
1701027. 4	–		680410	8 –	– – –	Θ
48. 753	–		361	44 –	– – –	Ι
4. 4. 4	–	–	–	64	– – –	Κ
				34057597	688	
170283468. 2	–			34056693	6 – – –	Λ
12. 7534	–	–	–	904	08 – –	Μ
2. 2. 2	–	–	–	–	8 – –	Ν
				0000000000		

Καὶ Α. ληφθήτω ὁ ἐγγὺς ἐλάσσων τοῦ πρώτου πρὸς ἀριστερὰν κόμματος κύβος, (εἰμὴ αὐτὸ τοῦτο τὸ κόμμα ᾖ), ἡ δὲ ἐκείνου ῥίζα ἀντίστοιχος τῷ Ρ γραφήτω· ὅ,τε κύβος αὐτὸς ὁ ἀπεναντίον τοῦ Α, ἀπὸ τῶν τοῦ πρώτου τοῦδε κόμματος χαρακτήρων ἀφαιρεθήτω· καὶ τῷ λοιπῷ 84 ὑπογραφέντι, τὸ δεύτερον ἑξῆς τῶν κομμάτων συνεπικαταγραφήτω.

Β. Τοῦ ὧδε προκειμένου ἀριθμοῦ, διὰ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τοῦ Α. τῆς ῥίζης μέρους διαιρεθέντος, τὸ ἐντεῦθεν πηλίκον εἰς δεύτερον τῆς ῥίζης χαρακτῆρα ἀποτιθέσθω· εἶτα τὸ μὲν ὑπὸ τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ καινοῦ πηλίκου, κατὰ τὸν πρῶτον πρὸς τὰ λαιὰ χαρακτῆρα τοῦ δευτέρου κόμματος ἐκτερματιζόμενον ὑπογραφέγραφέσθω, ὡς τὸ ἀντικρὺ τῦ Β. Τὸ δὲ ὑπὸ τῦ τριπλῦ τετραγώνυ τῦ καινῦ πηλίκυ, καὶ ὑπὸ τῦ πρὸ τύτυ τῆς ῥίζης μέρυς γινόμενον κατωτέρω ὑπὸ τὸν μέσον, ὡς τὸ ἀντικρὺ τῦ Γ. Ὁ δέτοι κύβος ὁ ἀπὸ τῦ εἰρημένυ καινῦ πηλίκυ, ὑπὸ τὸν ἔχατον τῶν ἐν τῷ κόμματι χαρακτήρων καὶ δεξιώτατον, ἔτι κατωτέρω ἐκπερατύσθω, ὡς ὁ ἀντικρὺ τῦ Δ. Τύτων δὲ συγκεφαλαιωθέντων, καὶ τῦ προκειμένυ ἀριθμῦ ἀφαιρεθέντων, τὸ λοιπὸν ὅσον ὑποσημειύσθω, καὶ τῷδε, τὸ ἑξῆς τῦ κύβυ κόμμα τὸ τρίτον προσκαταγραφέσθω.

Γ. Τῷ τρὶς ἀπὸ τῆς ἤδη εὑρεθείσης ῥίζης συνεςῶτι τετραγώνῳ, τῦ προκειμένυ αὖθις ἀριθμῦ διαιρεθέντος, τὸ πηλίκον ὡς μέρος ἄλλο τῆς ῥίζης καινὸν ἀποσημειύσθω. Εἶτα ἑξῆς ὡς ἀνωτέρω τὰ τρία γινόμενα ἐκεῖνα ὑπογραφέσθω, ἄλλο μετ᾽ ἄλλο· Τὸ μὲν ὑπὸ τῦ διαιρέτυ, καὶ τῦ ἄρτι ἀνακύψαντος πηλίκυ, ἐπὶ τὸ λαιότατον ὁμοίως τῦ καταχθέντος νέον κόμματος ἐκτερματιζόμενον, ὡς τὸ ἀντικρὺ τῦ Ε. Τὸ δὲ ὑπὸ τῦ τριπλῦ τετραγώνυ τῦ καινῦ πηλίκυ, καὶ τῆς πρoαναφανείσης ῥίζης πρὸς τὰ λαιὰ, ἐπὶ τὸ μέσον, ὡς τὸ ἀπέναντι τῦ Ζ· Ὁ δὲ τέως ἀπὸ τῦ ἀρτιφανῦς πηλίκυ κύβος, ἐπὶ τὸ δεξιώτατον, ὡς τὸ ἀπέναντι τῦ Η· Καὶ τὸ ἐκ τῶν τριῶν δὲ τύτων συναχθὲν, ἀπὸ τῦ προκειμένυ ἀριθμῦ ἀφαιρεθὲν, τὸ ἑπόμενον κόμμα καταγέσθω.

Δ. Κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον τῆς ἐφόδυ χωρύσης, καὶ τῶν ὅτως ἀεὶ τῇ ἑκάςυ τῶν κομμάτων καταγραφῇ, καὶ τῇ τῦ καινῦ πηλίκυ ἀνακύψει διὰ πολλαπλασιασμῦ γινομένων, ὡσαύτως ἄντικρυ τῶν γραμμάτων Θ, Ι, Κ, καὶ Λ, Μ, Ν, σημειυμένων, καὶ ἀφαιρυμένων, ἡ ὁλοκερὴς τελευταία κυβικὴ ῥίζα ἀποδίδοται.

ΔΕΙΞΙΣ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπάναγκες γὰρ τὸν ἔτω προκύπlοντα ἀριθμὸν 75342, τὃ ἐξ ἀρχῆς προτεθέντος τlὼ ῥίζαν εἶναι τlὼ κυβικlὼ, εἰ ὁ ἀπὸ τᾶδε κύβος, ἐκ μερῶν ὤφθη συναπαρτιζόμενος (§. δ.) τῶν ἀντιςοίχως κειμένων τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ, Ν, ἅπερ διὰ τῆς τελεσθείσης πράξεως (§. ε.) τὸν κύβον ἡμῖν ἐξεκένωσεν.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. ϛ'. Ἡ τᾶ ὁλοχερᾶς ἀριθμᾶ κυβικὴ ῥίζα, ἣν ἐν ἀριθμοῖς ὁλοσχερέσιν ἐπ' ἀκριβὲς ἐχ οἷόντε λαβεῖν, ἐδ' ἐν τοῖς κλασματικοῖς ἄλως ληφθήσεται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Κείσθω γὰρ ῥίζα ἔσα κλασματικὴ, ὁλοχερᾶς ἀριθμᾶ κυβικᾶ, ἐν τοῖς πρώτοις τε καὶ ἁπλεςάτοις τῶν παραγόντων κατ' ἄμφω τὲς ὅρες ἀναλελυμένη, ἡ $\frac{\alpha.\ \beta.\ \gamma}{a.\ b}$, τᾶ $\frac{\alpha.\ \beta.\ \gamma.}{a.\ b.}\frac{\alpha.\ \beta.\ \gamma.}{a.\ b.}\frac{\alpha.\ \beta.\ \gamma.}{a.\ b}$ Τοιγαρᾶν οἱ ἐν τῷ παρονομαςῇ τᾶ ὁλοχερᾶς κύβε ἁπλοῖ ἀριθμοὶ a. b, οἱ αὐτοὶ ἔνεισι κἀν τῷ ἀριθμητῇ, ἵν' αὐτὸ τᾶτο, ὁλοχερὴς δηλονότι ἀριθμὸς ὁ κύβος ᾖ (§. 124.). Ἐπειδὴ δὲ κἀν τῇ ῥίζῃ τᾶτο συμβαίνει, ἔςαι ἄρα καὶ αὐτη $\frac{\alpha.\ \beta.\ \gamma}{a.\ b}$ ὁλοχερὴς, καίτοιγε κλασματικὴ εἶναι ὑποτεθᾶσα· ὅπερ ἀδύνατον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. ζ'. Ἀριθμᾶ τοίνυν ἐπέκεινα εἰσὶν οἱ ὁλοχερεῖς ἀριθμοὶ, ὧν αἱ κυβικαὶ ῥίζαι, ἐπεὶ μηδ' ὁλοχερεῖς

 ρεῖς

ρεῖς ἂν ληφθεῖεν, μηδὲ κεκλασμέναι, πρὸς τὸ ἀκριβὲς εἰσὶν ἀναπόδοτοι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. η΄. Ἡ τοῦ κεκλασμένου κυβικὴ ῥίζα, οὐκ ἂν ἀποδοθείη, μὴ καὶ τοῦ ἐν τῷ κλάσματι ἀριθμητοῦ κυβικοῦ ὄντος, καὶ τοῦ παρονομάζοντος· ὡς ἵνα τούτο ᾖ, ἔσαι μὲν ὁ τῆς ῥίζης ἀριθμητὴς ῥίζα τοῦ κατὰ τὸν κύβον ἀριθμητοῦ, ἔσαι δ᾽ ὁ παρονομαστὴς τοῦ παρονομαστοῦ. Ἐὰν δὲ ἀριθμὸς ᾖ ἐκ μονάδων ἁπλῶν καὶ δεκαδικῶν κλασμάτων συγκείμενος, εἰς δὲ ῥίζαν ληφθεὶς κυβωθῇ, οὐχ ἑκάτερον τῶν ἐν αὐτῷ διὰ τοῦ κόμματος διεσαλμένων ὅρων ἴδιον κύβον παρέξεται. Τοῦ γὰρ 2, 3 ὁλικῶς οὐκ ἔσι κύβος ὁ 8, 27, ἀλλ᾽ ὁ 12, 167. Διὸ καὶ ἐκ τούτου ἡ κυβικὴ ῥίζα 2, 3 ὑπεξάγεται, ἐξ ἐκείνου δὲ οὔ· ἀλλ᾽ ἡ 2, 0222 κ. ξ. ἐπ᾽ ἄπειρον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. θ΄. Εἰ γὰρ καὶ ὑπὲρ ἀριθμὸν οἱ ἀριθμοί εἰσιν, ὧν οὐκ ἔσιν ἐπ᾽ ἀκριβὲς τὴν κυβικὴν ῥίζαν λαβεῖν (§. ζ.) ἐσιγεμὴν ἀεὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἐπὶ τὸ ἀκριβὲς τῆς κατ᾽ αὐτοὺς ῥίζης ἔγγιον γίνεσθαι, χωροῦντας ἐπ᾽ ἄπειρον.

Οἷον τοῦ ἀριθμοῦ 30434564, τῆς κυβικῆς ὑπεξαχθείσης ῥίζης 312, καὶ λοιποῦ τοῦ 63236 μένοντος, εἴτις τὴν εὑρεθεῖσαν ῥίζαν τετραγωνίσας, αὐτὴν ταύτην ἔπειτα τῷ τετραγώνῳ προσθείη, καὶ τὸ κεφάλαιον τριπλασιάσειεν· εἶτα προσεπαγάγοι τῷ γινομένῳ καὶ μονάδα· συσήσειε δὲ κλάσμα ἐν ἀριθμητῇ μὲν τῷ ὑπολοίπῳ ἐκείνῳ, παρονομαστῇ δὲ τῷ κατὰ τὴν εἰρημένην πρᾶξιν ἀνακύπτοντι, τοιοῦτον $\frac{63236}{292968+1}$· Τέως τὸ κλάσμα τόδε τῇ μὴ ἀκριβῶς ληφθείσῃ ῥίζῃ προσθέμενος, ἀπο-

ἀποδώσει ταύτηγε τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ μὴ ἀκριβοῦς κύβου, τὴν ὅτι ἔγγιστα· οἷον τοῦ 30434564, τὴν $312 + \frac{63236}{292969}$.

ΑΛΛΩΣ.

§. α. Τῷ καταλειφθέντι τρία τῶν μηδενικῶν σημείων προσθεὶς, καὶ τὴν εὕρεσιν τῆς κυβικῆς ῥίζης ἐπιτηδεύων ὡς ἀνωτέρω (§. ε.) ἐγγυτέρω γενήσῃ τοῦ ἀκριβοῦς ἐν κλάσμασι δεκαδικοῖς. Προσθεὶς δ' ἔτι τρία τῷ λοιπῷ, ἔτι μᾶλλον προσεγγιεῖς, ἐν κλάσμασιν ἑκατονταδικοῖς· καὶ τοῦτο εἰς ἄπειρον.

Οἷον,	63236	000	(312, 21 κξ.
	58406	4	
	37	44	
		8	
	4792152	000	
	2924065	2	
	93	66	
		1	
	1867993139 κξ.		

Οὕτως ἄντις καὶ ἐξ ἀριθμοῦ τοῦ ἐξ ὁλοσχερῶν μονάδων, καὶ δεκαδικῶν, τῇ κατὰ τὸ δέον τῶν μηδενικῶν σημείων προσθέσει, τὴν κυβικὴν ῥίζαν, ὅσον ἂν βούλοιτο, μᾶλλόν τε καὶ μᾶλλον ἀκριβεστέραν ἐκσπάσειεν.

Οιον 8, 27 (2, 02225 κζ.

8,

0, 270 | 000
240 | 0
2 | 40
8

27592 | 000
24482 | 4
24 | 24
8

8085352 | 000
2453090 | 4
242 | 64
8

632018952 | 090 κζ.

ΤΜΗΜΑ

ΤΜΗΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟΝ
ΠΕΡΙ
Α Ν Α Λ Ο Γ Ι Ω Ν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 147.

Ἐπὶ δυεῖν δυάδων ποσοτήτων ληφθεισῶν Α, Β καὶ Γ, Δ, ὧν ἂν ἰσαρίθμως αἱ ἑπόμεναι Β καὶ Δ τετμημέναι ὦτι κατὰ μόρια ἀλλήλοις ἴσα, ἐὰν ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τῶν μὲν ἐν τῇ Β μερῶν ἡ ποσότης Α συγκέηται, τῶν δ᾽ ἐν τῇ Δ ἡ Γ, ἀνάλογον εἰρήσονται αἱ ποσότητες, ὡς ἔχουσι τάξεως ἐκκείμεναι. Ὅθεν τί ἐστιν **ἀναλογία** νοῆσαι ῥάδιον. Σχ. 4.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 148. Τὰ ἴσα μέρη ἐξ ὧν αἱ τοῦ πρώτου ζεύγους Α, Β ποσότητες σύγκεινται, οὐκ ἂν εἴη ὡρισμένου μεγέθους, εἰ μὴ ἐκεῖναι συμμέτρως ἔχοιεν. Τὸ γὰρ πηλίκον μόριον, ἐξ οὗ καὶ Α συνολοῦται καὶ Β, τούτων κοινὸν μέτρον ἐστί. Ταυτὸ δὲ καὶ περὶ θατέρου ζεύγους Γ καὶ Δ ῥητέον. Ἐὰν δὲ ἀσύμμετροι ὦσιν αἱ ποσότητες Α καὶ Β, καθ᾽ ὁποσονοῦν ἂν ἀριθμὸν μερῶν ἴσων ἀλλήλοις διαιρεθείη ἡ Β, εἰ μόνον τὰ τοῦ ἀριθμοῦ πέρας ἔχοι, καθ᾽ ὃν ὡρισμένου τινὸς μεγέθους τὰ μέρη ὄντα προβάλλεται, ἐκ τῶν τηλίκων οὐδέποτε μερῶν ἐπ᾽ ἀκριβὲς ἡ Α συγκείσεται. (§. 9.). Ἀλλὰ κἂν συμμέτρως ἔχωσι πρὸς ἀλλήλας αἱ Α καὶ Β, δυνατὸν μέντοι τὴν Β εἰς ἴσα διαιρεθῆναι, τὰ, ὅπως ἂν καὶ ἐπαναληφθῇ, τὴν Α συμπληρῶσαι μὴ ἔχοντα. Οὐ γὰρ ἅπαντα δηλαδὴ τὰ μόρια, ἄτία πηλίκα ὄντα τῆς ἑτέρας τῶν συμμέτρων ποσοτήτων, φέρε τῆς Β ἐςὶ, ταῦτα ἤδη καὶ τὴν ἑτέραν, ἤτοι τὴν Α καταμετρεῖ. Ἀλλ᾽ ἐκ ἀταλαιπώρως πολλάκις τῶνδε τὸ κοινὸν μέτρον ζητητέον ἐςί. Καὶ ἐν οἷς τοίνυν ἡ Α ἐκ τῶν τῆς Β ποσότητος μορίων, κατὰ τὸ ἀκριβὲς συγκεῖσθαι ἐ πέφυκεν, ἐδὲ ἡ Γ ἐκ τῶν τῆς Δ, ἡ ἀναλογία ἐντεῦθεν ἐπικρίνεται, ἐὰν τῶν ποσοτήτων Β καὶ Δ, τῶν ἐν τοῖς δυσὶ ζεύγεσιν ἑπομένων, κατ᾽ ἴσατε ἀλλήλοις καὶ ἰσάριθμα ἐπ᾽ ἀμφοῖν μόρια διαιρεθεισῶν, αἱ ἐν ταῖς δυάσιν ἡγέμεναι ποσότητες Α καὶ Γ ἐκ τῶν τηλικέτων μορίων, τοσέτῳ ἔγγιον τῷ ἀκριβῦς ἀεὶ συγκεῖσθαι ἔχωσιν, ὅσῳ ἂν τῇ ἐπ᾽ ἔλασσω ἀεὶ καὶ ἐλάσσω ὑποδιαιρέσει, ὁ τῶν μερῶν ἀριθμὸς κατὰ τὸ μᾶλλον ἀεὶ καὶ μᾶλλον πληθύνοιτο.

§. 149. Ἐν γένει δηλονότι, ἐὰν περὶ τῶν προκειμένων ποσοτήτων Α, Β καὶ Γ, Δ εἰπεῖν δέῃ, πότερον ἀνάλογοι, ἢ ἔ; ἡ βάσανος ὡδέπη περανθήσεται, ἤπως ἄλλως παραπλησίως. Ἐὰν ἡ Α μείζων ᾖ τῆς Β, ἀνάγκη καὶ τὴν Γ τῆς Δ. Ἐπαναληφθήσεται ἔν ἡ Β, ἕως ἐ πηλικότης ἀνακύψῃ ἴση τῇ Α, ἢ ταύτης ἐγγὺς ἐλάσσων. Ἐπαναληφθήσεται δὲ καὶ ἡ Δ ὡσαύτως, ἕως ἐ ἤτοι ἡ Γ προκύψῃ, ἢ τῆς Γ ἡ ἐγγὺς ἐλάσσων. Ἐὰν ἔν ἐπὶ παραδείγματος $Α = 3 Β$, καὶ παραπλησίως καὶ $Γ = 3 Δ$, αἱ ποσότητες ἀνάλογον ἔσονται. Ἐὰν δὲ $Α = 3 Β$, ἀλλ᾽ ἡ Γ μείζων, ἢ ἐλάσσων τῆς 3 Δ, ἐδεμία παρέςαι ἀναλογία. Ἔτι ἐὰν Α μείζων μὲν ἢ 3 Β, ἐλάσσων δὲ ἢ 4 Β, τὰς ποσότητας ὁμοίως ἐκ ἀνάλογες εἶναι ῥητέον, μὴ καὶ τῆς Γ μείζονος μὲν ἔσης 3 Δ, ἐλάσσονος δὲ 4 Δ. Καίτοι καὶ τῆς Α μείζονος μὲν ἔσης 3 Β, ἐλάσσονος δ᾽ 4 Β, κἂν ἡ $Γ > 3 Δ$, καὶ $Γ < 4 Δ$, ἐ παραυτίκα ἐνθένδε δῆλον, καὶ εἰ τὸ ἀνάλογον διασώζεται. Οὐκἔν διαιρεθήσεται ἡ Β εἰς ἀριθμόν τινα μορίων ἀλλήλοις ἴσων, διαιρεθήσεται δὲ καὶ ἡ Δ κατ᾽ ἀριθμὸν ἴσον μερῶν ἀλλήλοις ἴσων.

Ἔςω

Ἔσω δὲ ὁ τῶνδε τῶν μορίων ἀριθμὸς κατὰ τὸ δοκῦν ληφθεὶς = 10, καὶ τὸ M = $\frac{1}{10}$B, καὶ τὸ T = $\frac{1}{10}$Δ· καὶ συντεθείσεται ἔπειτα ἡ μὲν A ἐκ τῶν μερῶν M, ἡ δὲ Γ ἐκ τῶν τμημάτων T, ὡς οἷοντε ἐπ' ἀκριβές. Ἐὰν οὖν ἡ μὲν A μείζων καταληφθῇ, ἢ φέρε 37 M, ἐλάσσων δὲ ἢ 38 M, ἀναλογία οὐδὲ οὕτως ἔσαι, μὴ καὶ τῆς Γ μείζονος μὲν οὔσης ἢ 37 T, ἐλάσσονος δὲ, ἢ 38 T. Αἱ δὲ ποσότητες A καὶ Γ εἴσω τῶν τοιῶνδε πίπτουσαι ὁρίων, ἀπὸ μὲν τῆς ἀναλογίας οὐ πάνυ σφόδρα μακρὰν ἀφέξουσιν, ἀνάλογοι δ' οὖν ὅμως ἀναγκαίως οὐκ ἔσονται. Ἰτέον ἄρα προσωτέρω ἐπὶ τὴν ἔρευναν, τῶν ποσοτήτων B καὶ Δ, εἰς μέρη ἔτι ἐλάσσονα (ἰσαρίθμως ἑκατέρας) διαιρουμένων. Ἔσω δ' ὁ ἀριθμὸς 100. Καὶ ἤδη τὸ μὲν M = $\frac{1}{100}$B, τὸ δὲ T = $\frac{1}{100}$Δ. Τῶν δὲ ποσοτήτων παρὰ τηλίκα ἤδη παραβαλλομένων μέρη, καταληφθήτω φέρε ἡ μὲν A μείζων οὖσα ἢ 374 M, ἐλάσσω δὲ ἢ 375 M. Καὶ παραπλησίως δὲ Γ > 374 T, καὶ Γ < 375 T. Καὶ τόγε διάπτωμα ἐνταῦθα τὸ ἀπὸ τοῦ ἀκριβοῦς ἐπὶ τῆς ἀναλογίας, εἴτι εἴη, ἔσαι ἤδη πολλῷ ἔλαττον. Ἀναλογίαν δὲ μὴ εἶναι οὐκ ἂν ἄλλως συμπεράνοιτις, ἢ ἐὰν τῆς A εἴσω τῶν ὁρίων 374 M, καὶ 375 M πιπτούσης, ἡ Γ μὴ εἴσω πίπτῃ τῶν 374 T, καὶ 375 T. Ἐὰν δὲ ἐφεξῆς ληφθῇ M = $\frac{1}{1000}$B, καὶ T = $\frac{1}{1000}$Δ, παραπλησίῳ πόνῳ τὴν ἔρευναν ποιουμένοις, εἴτις ἐπὶ τῆς ἀναλογίας τοῦ ἀκριβοῦς ἐσὶ διάπτωσις, πολλῷ οὖσα τῆς προτέρας ἐλάσσων ἐκκαλυφθήσεται. Καὶ ταύτης ἔτι ἐλάσσων, ἐὰν ληφθῇ M = $\frac{1}{10000}$B, καὶ T = $\frac{1}{10000}$Δ. Καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Γίνονται γὰρ τοῦ ἔργου ταύτῃ πρόσω χωροῦντος τὰ μόρια M καὶ T, οὕτω τέως βραχέα, ὡς ἀπ' ὄψεως γίνεσθαι. Καὶ τῶν ὀφθαλμῶν ἄρα μηδεμίαν καταφωρᾶν ἐξαπάτην ἐπὶ τῆς ἀναλογίας δυναμένων, ἐπιφέρειν ἔξεσαι ἀληθεύουσαν εἶναι τὴν προκειμένην, κατὰ γοῦν τὴν αἴσθησιν. Τηνικαῦτα γὰρ ἡ τῶν, συνθέσει τῶν M καὶ T μορίων, συγκειμένων

μένων ποσοτήτων διαφορὰ, ἣ διοίσουσιν ἀπὸ τῶν Α καὶ Γ, ἐστὶν ἀνεπαίσθητος. Καί εἰσὶν ἄρα πρὸς ὄψιν δικάζουσαν αἱ Α καὶ Γ ποσότητες συνθέσει τῶν μορίων Μ καὶ Τ παρηγμέναι. Ἡ δὲ διάνοια τὴν ἐν τῇ ἀναλογίᾳ ἐξαπάτην ἀνακαλυφθῆναι μὴ δύνασθαι προορῶσα, εἰ ὁποσονοῦν ἂν ὁ τῶν ἐν Β καὶ Δ μορίων ἀριθμὸς πληθυνθείη, ἢ, ὁποσονοῦν ἂν αὐτὰ ἀποβραχυνθείη, περὶ τῆς ἐν τῇ ἀναλογίᾳ ἀπολύτου ἀληθείας ὑφορᾶσθαι τὸ σύνολον οὐ δυνήσεται· ὅτι τῶν μορίων Μ καὶ Τ διηνεκῶς ἀπομειουμένων, αἱ διαφοραὶ, αἷστισιν αἱ ἐξ αὐτῶν σύνθετοι ποσότητες διαφέρουσι τῶν Α καὶ Γ, τοσούτῳ μᾶλλον ἀποβραχύνονται, ὡς τέως ὑποκαταφέρεσθαι εἰς τὸ, καὶ παντὸς μεγέθους, ὃ ἂν δοθείη, ἐλαττιοῦσθαι· οὗ δὴ γινομένου, τὴν μὲν Α ἐκ τῶν Μορίων Μ, τὴν δὲ Γ ἐκ τῶν Τ σύνθετον νομίζειν χρεών.

§. 150. Ἐπειδὴ τοίνυν τῶν ἐν ἀναλογίᾳ ποσῶν Α, Β καὶ Γ, Δ, τὸ μὲν πρῶτον Α ἐκ τοῦ δευτέρου Β, καὶ τούτου γε πηλίκων τινῶν μορίων, τὸν αὐτὸν πάντῃ σύγκειται τρόπον, ὃν καὶ τὸ τρίτον Γ ἐκ τοῦ τετάρτου Δ, καὶ τῶν αὐτοῦ πηλίκων (εἰ μόνον τὰ πηλίκα ταῦτα ἐπὶ Β καὶ Δ ἰσάριθμα ᾖ) μερῶν· ἑπόμενον ἐστὶ τοῦ Β ἀντὶ μονάδος τεθέντος, τὸν ἐκ τῆς τηλίκης μονάδος ἀριθμὸν Α, τὸν αὐτὸν ἔσεσθαι τῷ ἀριθμῷ, τῷ ἐκ τῆς μονάδος Δ, τὸ Γ σημαίνοντι. (§. 3.). Τοῦτο δὲ, εἴτε ἀληθῶς, διὰ τῶν ἰδίων ἀριθμῶν αἱ ποσότητες Α καὶ Γ παρίστανται, εἴτε καὶ ὡς ἔγγιστα μόνον. Οὕτως ἐπὶ τοῦ πρὸ μικροῦ ληφθέντος παραδείγματος, ἢν ἐκφέρειν δέοι τὸ μὲν Α διὰ μονάδος τῆς κατὰ τὸ Β, τὸ δὲ Γ διὰ τῆς κατὰ τὸ Δ, γίνεται Α = 3, καὶ Γ = 3, παχυλῶς δέπως. Ἀκριβέστερον δὲ Α = 3, 7 καὶ Γ = 3, 7. Ἔτι δὲ καὶ μᾶλλον ἀκριβῶς, Α = 3, 74, καὶ Γ = 3, 74. Καὶ εἰ τῶν Β καὶ Δ ποσοτήτων περαιτέρω διαιρεθεισῶν, γένοιτο Α = 3, 7468, ἀνάγκη παραπλησίως εἶναι καὶ Γ = 3, 7468. Καὶ οὕτως ἀείποτε.

§. 151.

§. 151. Τῶδε δ' ἂν τῷ καθόλου τεκμηρίῳ ἡ τῶν Α, Β, Γ, Δ, ποσοτήτων ἀναλογία διαγιγνώσκοιτο. Ἐὰν ἀριθμοῦ ὁλοχεροῦς m πρὸς τὸ δοκοῦν ληφθέντος, ἢ τῶν μορίων παραχθέντων $\frac{B}{m} = M$, καὶ $\frac{\Delta}{m} = T$, εἶτα εὑρεθῇ τις ἀριθμὸς ὁλοχερὴς ἕτερος ὁ n, δι' οὗ τῶν μερῶν ἐκείνων πολλαπλασιασθέντων γένοιτο $A = nM$, καὶ $\Gamma = nT$· ἢ $A = \frac{nB}{m}$, καὶ $\Gamma = \frac{n\Delta}{m}$ ἤτοι ἐπ' ἀκριβὲς, ἢ γοῦν ἀεὶ ἐπὶ τ' ἀκριβέστερον, ὅσῳ ἂν μείζων ὁ m λαμβάνοιτο· οὕτω δηλαδὴ, ὡς (εἰμὴ εἰσὶν αἱ ἰσότητες αἵδε πάντη ἀκριβεῖς) τὴν μὲν Α ἐντὸς τῶν ὁρίων πίπτειν nM, καὶ nM + M (ὧνπερ ἑνὶ καὶ μόνῳ μορίῳ τῷ M ἡ δευτέρα ὑπερέχει τὴν πρώτην.) Τὴν δὲ Γ μείζονα μὲν εἶναι τῆς nT, ἐλάσσονα δὲ τῆς nT + T· κατὰ τήνδε τὴν ἔννοιαν αἱ ἰσότητες ἐκληφθεῖσαι,

$$A = \frac{nB}{m} \text{ καὶ } \Gamma = \frac{n\Delta}{m}$$

ταῖς πάντη ἀκριβέσιν ἰσοδυνάμοι εἰσί. Δύναται γὰρ ὁ ἀριθμὸς m, εἰς τοσόνδε πλήθους ἐπαυξηθῆναι, ὥστε τὰς ὑπεροχὰς, αἷς ἡ μὲν Α ποσότης ὑπὲρ τὴν $\frac{nB}{m}$ ἡ δὲ Γ ὑπὲρ τὴν $\frac{n\Delta}{m}$ ἐστὶν, ἁπάσης δοτῆς ποσότητος ἐλάσσους καθίστασθαι. Κἀντεῦθεν δήπου $A = \frac{nB}{m}$ καὶ $\Gamma = \frac{n\Delta}{m}$ ἢ, ὅπερ εἰς ταυτὸ φέρει, $A = nM$, καὶ $\Gamma = nT$.

§. 152. Τούτοις ἐρειδόμενοι τὴν ἀναλογίαν τῶν ποσοτήτων Α, Β καὶ Γ, Δ τοιῷδε τεκμηρίῳ ὑποσυνάψομεν· ληφθήσεται μὲν ἀριθμὸς ὁστισοῦν ὁλοχερὴς ὁ m, καὶ γενήσονται (τῶν ὅρων Β καὶ Δ διὰ τȣ̃δε τȣ̃ ἀριθμȣ̃ διαιρεθέντων) μόρια, τὸ μὲν $M = \frac{B}{m}$, τὸ δὲ $T = \frac{\Delta}{m}$. εἶτα παραθέσει τȣ̃ μορίȣ M πρὸς τὴν ποσότητα A, ὑποσημαφθήσεται ὁ n ἀριθμὸς τῶν μορίων M, τῶν ἐμπεριεχομένων τῇ ποσότητι A, ȣ̓́τω δήπȣθεν, ὥςε μὴ εἶναι τὴν A ἐλάσσονα τῆς nM, ἐλάσσονα δὲ εἶναι τῆς $nM+M$. Εἶτ᾽ αὖθις παραθέσει τῆς Γ ποσότητος πρὸς τὸ μόριον T, ὁ τῶν μερῶν T ἀριθμὸς, τῶν ἐμπεριεχομένων τῇ ποσότητι Γ ζητηθήσεται παραπλησίως, ȣ̓́τως ὥςε δηλαδὴ (τεθὲν τόνδε τὸν ἀριθμὸν εἶναι h) τὴν Γ ποσότητα, μηδ᾽ ἐλάσσονα εἶναι τῆς hT, καὶ ἐλάσσονα μέντοι τῆς $hT+T$. Ἐὰν ȣ̓̃ν ἀποδείξει ἔχῃ βεβαιωθῆναι, ὡς ἔςαι $n=h$, ὅςτις ποτ᾽ ἂν ἀριθμὸς ληφθείη ἀντὶ τȣ̃ m, αἱ ποσότητες A, B καὶ Γ, Δ ἀνάλογον ἔσονται. Τȣ́των γὰρ ȣ̓́τως ἐχόντων, ἔςαι μὲν $A = \frac{nB}{m}$, ἔςαι δὲ $\Gamma = \frac{n\Delta}{m}$ τοσȣ́τῳ ἀεὶ ἀκριβέςερον, ὅσωπερ ἂν ὁ ἀριθμὸς m μείζων παραλαμβάνοιτο. Τὸ δὲ τεκμήριον τȣ̃το τῆς ἀναλογίας, καὶ ȣ̓́τως ἂν προτεθείη. Τῶν ποσοτήτων B καὶ Δ, εἰς μέρη ἴσα διὰ τȣ̃ αὐτȣ̃ ἀριθμȣ̃ m διῃρημένων, ἐὰν ὁ μέγιςος ἀριθμὸς τῶν τῆς ποσότητος B, τῶν ἐμπεριεχομένων τῇ A, ὁ αὐτὸς ἀεὶ ὑπάρχῃ τῷ μεγίςῳ ἀριθμῷ τῶν μορίων τῶν τῆς ποσότητος Δ, τῶν ἐμπεριεχομένων τῇ Γ, ὁποσοσȣ̃ν ἂν καὶ προσληφθείη ὁ τῶν μορίων ἀριθμὸς m, αἱ ποσότητες A, B, καὶ Γ, Δ ἀνάλογοι ἔσονται.

§. 153. Τὰ δ᾽ ἄλλα φανερὸν, ὡς ἐν ἑκάςῃ ἀναλογίᾳ, τὸ μὲν πρῶτον τῶν ποσῶν A, ὁμογενὲς εἶναι δέον τῷ δευτέρῳ B, τὸ δὲ τρίτον Γ τῷ τετάρτῳ Δ. Δεῖ γὰρ μέρος τι τῶν ἐν τῷ A, ἴσον εἶναι μέρει τινὶ τῶν ἐν τῷ B. Καὶ τι τῶν ἐν τῷ Γ, τινὶ τῶν ἐν τῷ Δ. Διὸ δὴ καὶ τὰ ποσὰ ὁμογενῆ εἴρηται. Τάγε μὴν πρῶτα δύο, δυσὶ τοῖς ὕςερον ὁμογενῆ τυγχάνειν ȣ̓κ ἔςιν

ἐπεὶ

ἐπάναγκες, καίτοι ὁμογενῆ εἶναι δυνάμενα. Ἐπεὶ καὶ τὸ Β τῷ Γ ἴσον εἶναι δύναται.

ΠΟΡΙΣΜΑ

§. 154. Ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὡς ὁ πολλαπλασιαστὴς πρὸς τὴν μονάδα, οὕτως ὁ παραγόμενος ἀριθμὸς πρὸς τὸν πολλαπλασιασθέντα. Ἐπὶ δὲ τῆς διαιρέσεως, ἡ μονὰς πρὸς τὸν διαιρέτην, ὡς τὸ πηλίκον πρὸς τὸν ἀριθμὸν τὸν διαιρεθέντα (§. 44. 45.). Καὶ τὸ πηλίκον δὲ πρὸς τὴν μονάδα, ὡς ὁ διαιρετέος πρὸς τὸν διαιρέτην (§. 60.). Ἐν γένει καὶ γάρ, ὁ κατὰ τὴν ἀναλογίαν δευτερεύων, μετὰ τῶν ἐν αὐτῷ πηλίκων μορίων, ἐν τῷ πρωτεύοντι ὅρῳ τὸν αὐτὸν ἐμπεριέχεται τρόπον, ὡς ὁ τεταρτεύων καὶ τὰ ἐν αὐτῷ ὁμώνυμα (τοῖς ἐν τῷ δευτερεύοντι) μέρη, περιέχεται ἐν τῷ τρίτῳ. Καὶ ἀνάπαλιν ποσότητες τέτταρες, Α, Β, Γ, Δ, ὧν ἡ δευτέρα Β ἐν τῇ πρώτῃ Α τοσάκις ἔνεστιν, ὁσάκις ἡ τετάρτη Δ, ἐν τῇ τρίτῃ Γ, ἀνάλογοι εἰσίν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 155. Ἐὰν ᾖ ποσὰ Α, Β, Γ, Δ ἀνάλογον, καὶ τούτων Β = Γ, ἡ ἀναλογία **συνεχὴς** εἰρήσεται· ἄλλως **διωρισμένη**.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 156. Ὁ δὲ τρόπος ὁ ὡρισμένος καθ' ὃν γίνεται μὲν ἐκ τοῦ Β τὸ Α, γίνεται δὲ ἐκ τοῦ Δ τὸ Γ, συνθέσει τοῦ Β, ἢ τοῦ Δ, καὶ τῶν ἐν αὐτοῖς πηλίκων μορίων, λέγεται ὁ **λόγος** τοῦ Α πρὸς τὸ Β, ἢ τοῦ Γ πρὸς τὸ Δ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 157. Ὁ δέτοι λόγος τοῦ Α πρὸς τὸ Β **ἴσος** εἶναι εἰρήσεται, τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸ Δ, ἐὰν τῶν ἑπομένων Β καὶ Δ κατὰ τοὺς αὐτοὺς ἀριθμοὺς εἰς μέρη ἴσα διαιρεθέντων, ἀεὶ τῶν τῦ Β, τὸ Α ἰσάριθμα περιέχῃ μέρη, ὡς καὶ τῶν τῦ Δ τὸ Γ, ὁποσοσῦν ἂν εἴη ὁ τῶν μορίων ἀριθμὸς ἐν τοῖς Β καὶ Δ. Καὶ συνελόντι, ἐὰν τὰ Α, Β, Γ, Δ ἀνάλογα ᾖ. Ἐὰν δὲ τῶν, ἅπερ ἕπεται, ποσῶν Β καὶ Δ, ἔτω διῃρημένων, τὸ μὲν Α πλείονα περιέχῃ μέρη τῶν ἐκ τῦ Β, τὸ δὲ Γ τῶν ἐκ τῦ Δ ἐλάσσονα, μείζων μὲν εἰρήσεται ὁ τῦ Α πρὸς τὸ Β λόγος, ἐλάσσων δὲ ὁ τῦ Γ πρὸς τὸ Δ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 158. Οὐδὲν ἕτερον ἐςὶν ἡ ἀναλογία, ἢ δυοῖν λόγων ἡ ἰσότης, ἥτις καὶ ὁμοιότης καλεῖσθαι φιλεῖ, καὶ ταυτότης· τῦ τοίνυν λόγε τῦ Α πρὸς Β, ἔτω καθ᾽ ἡμᾶς εἰωθότος διασημαίνεσθαι Α : Β, ἡ ἀναλογία σημειωθήσεται ὡδέπως Α : Β = Γ : Δ. Εἰσὶ δὲ οἱ μὲν Α καὶ Γ, οἱ τῶν λόγων ὅροι οἱ ἡγέμενοι· οἱ δὲ Β καὶ Δ, οἱ ἑπόμενοι. Ἐν φωναῖς δὲ ἡ ἀναλογία Α : Β = Γ : Δ, ἔτως εἴωθεν ἀπαγγέλλεσθαι, ὅτι τὸ Α ἔχει πρὸς τὸ Β, ὥσπερ ἔχει τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· ἢ, βραχυλογεῖν αἱρεμένοις, Α πρὸς Β, ὡς Γ πρὸς Δ.

§. 159. Φανερὸν δὲ ἐκ τῶν εἰρημένων, μόνον τὸ μέγεθος ἐπὶ τῶν λόγων τε, καὶ τῶν ἐξ αὐτῶν ἀναλογιῶν ἐπιθεωρεῖσθαι. Διὸ καὶ ὅτε τὰ ἴσα ἀλλήλων ἀντικαθίςαται, οἱ λόγοι, ἢ ἡ τέτων ἰσότης, ἥτις ἐςὶν ἡ ἀναλογία, τροπὴν ἐχ ὑφίςαται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 160. Ἐπειδὴ ποσῶντινων ὁμογενῶν προσληφθέντων Α καὶ Β, τὸ πρῶτον Α ἐκ μερῶν πηλίκων τῶν ἐν τῷ Β δευτέρῳ συγκεῖσθαι δύναται, ἤτοι ἐπ᾽ ἀκριβὲς, ἢ ὡς ἔγγιςα. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐν τῷ Β πηλίκων μορίων, ὡς ἄχρι τῦδε, ᾖ m, ὁ δὲ τέτων ἀριθμὸς ὁ ἐπὶ τῦ Α, σημειωθῇ n, γενήσεται Α ἐκ

τῦ

τȢ B, παραπλησίως καθάπερ δὴ καὶ n γίνεται ἐκ τȢ m. Καὶ ἔσαι ἄρα τέτων κειμένων $A : B = n : m$· ὡς ἔχειν ἅπαντα λόγον $A : B$, δι' ὁλοχερῶν ἀριθμῶν $n : m$ ἐκτίθεσθαι, τῶν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ καθισαμένων, ἤτοι ἐπ' ἀκριβὲς, ἢ ὡς ἔγγισα· καὶ τῆς ἀπάτης, εἴτις ἐγχωροίη, τοσέτῳ ἐλάσσονος ἔσης, ὅσῳ μείζων ὁ ἀριθμὸς m προσλαμβάνεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 161. Τῶν A καὶ B πρὸς τȣ̀ς ἀριθμȣ̀ς ἐκείνȣς ἀναλόγως ἐχόντων $A : B = n : m$, ἔσαι (τȢ N ἑτερόν τινα ἀριθμὸν ὑποσημαίνοντος) $A = nN$, καὶ $B = mN$. Ἔνθεντοι καὶ $\frac{A}{B} = \frac{nN}{mN}$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ δεύτερον τῶν κλασμάτων ἐπαναχθὲν γίνεται $\frac{n}{m}$, ἔσαι καὶ $\frac{A}{B} = \frac{n}{m}$. Ἤτε τῶν ἀριθμῶν ἀναλογία $A : B = n : m$, ἀεὶ κλάσματα ἀποδώσει ἴσα ἀλλήλοις τάδε $\frac{A}{B} = \frac{n}{m}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 162. Ἀνάπαλιν δὲ, ἐὰν τὰ κλάσματα $\frac{A}{B}$ καὶ $\frac{n}{m}$ ἴσα ἀλλήλοις ᾖ, ἐπειδὴ οἱ τȢ πρώτȣ ὅροι, ἀεὶ προκύπ]ȣσι τῶν τȢ δευτέρȣ ὅρων διὰ τȢ αὐτȢ ἀριθμȢ, ἤτοι ὁλοχερȢς, ἢ κλασματικȢ πολλαπλασιαζομένων (§. 106.), ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ȣ̃τος ᾖ N, ἔσαι $A = nN$, καὶ $B = mN$. Ἔνθεντοι ἐπειδὴ $nN : mN = n : m$, ἔσαι καὶ $A : B = n : m$. Καὶ δύο ἄρα ὁποιαδήτινα κλάσματα, ἀλλήλοις ἴσα, ἀναλογίαν δώσȣσι, τῶν ἀριθμητῶν πρὸς τȣ̀ς ἰδίȣς αὐτῶν παρονομασὰς ἀναφερομένων.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 163. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ n καὶ m οἱ ἐλάχιστοι ὦσι, τῶν οἷς ἂν ὁ τῶν ἀριθμῶν λόγος A : B ἐκφέροιτο, ἔτω δηλαδὴ ὡς εἶναι $A : B = n : m$, ἔσονται δὴ ἐλάχιστοι καὶ τῶν οἷς ἂν παραστάιη τὸ κλάσμα $\frac{A}{B}$. Καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν ὦσιν ἐλάχιστοι τῶν οἷς ἂν τὸ κλάσμα $\frac{A}{B}$ παραστάιη, ἔσονται ἐλάχιστοι καὶ τῶν, ὧνπερ ὁ λόγος τῶ A : B ἐστὶν ὁ αὐτός. Καὶ τηνικαῦτα ἄρα ὁ ἀριθμὸς N, ὃς πολλαπλασιασθεὶς μὲν διὰ n παράγει τὸν A, πολλαπλασιασθεὶς δὲ διὰ m παράγει τὸν B, ὁλοχερὴς ἐστί. (§. 107.). Καὶ δυοῖν ἀριθμῶν δεθέντων A καὶ B, εὑρεθήσονται οἱ τέτων ἐλάχιστοι, ὧν ὁ λόγος A : B, ἑκατέρε διὰ τὸ κοινὸ μεγίσε διαιρέτε τῶν ἐν αὐτοῖς διαιρεθέντος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 164. Ἐν γένει δὲ ἀμφοῖν τῶν ὅρων τὸ λόγε A : B διὰ τὸ αὐτὸ, ἤτοι κλασματώδες, ἢ ὁλοχερὲς n πολλαπλασιασθέντος, τροπὴν ὁ λόγος ἐδεμίαν ὑποστήσεται ὅλως. Ἐὰν γὰρ ᾖ $A = \frac{n}{m} . B$, ἔσαι $nA = \frac{n}{m} . nB$. Γίνεται δὲ $\frac{n}{m} . nB$ ἐκ τὸ nB, τὸν αὐτὸν τρόπον ὃν καὶ $\frac{n}{m} . B$, γίνεται ἐκ τὸ B. Ἄρα $nA : nB = A : B$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ διὰ τὸ κλάσματος διελεῖν, ἐδὲν ἐστὶν ἢ αὐτόχρημα πολλαπλασιάζειν δι' ἀντιστρόφε τὸ κλάσματος (§. 97.)· ἅπας δὲ ἀριθμὸς κλάσματος δίκην ἔχει λαμβάνεσθαι (§. 84.)· αὐτὸ τὸτο ἀληθεύσει τὸ εἰρημένον, καὶ τῶν A καὶ B διὰ τὸ αὐτὸ n διαιρεθέντων. Ἀμέλειτοι ὁ λόγος A : B, ἐδὲν μᾶλλον ἐδὲ παρὰ τὸτο τραπήσεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

ΠΟΡΙΣΜΑ ϛ'.

§. 165. Ἐπεὶτε ἐφ' οἱασῦν ἀναλογίας Α : Β = Γ : Δ, εἴπερ $\text{Α} = \frac{n}{m}\,\text{Β}$, ἔςι καὶ $\text{Γ} = \frac{n}{m}\,\text{Δ}$· τυτέςιν, ἐπεὶ οἱ τῶν λόγων ἡγέμενοι ὅροι προκύπτυσι τῶν ἑπομένων Β καὶ Δ, διὰ τῦ αὐτῦ ἀριθμῦ $\frac{n}{m}$ πολλαπλασιαζομένων· ἔσονται δὴ καὶ ἐφ' οἱασῦν ἀναλογίας, ἧς ἅπαντες οἱ ὅροι ὁμογενεῖς, οἱ τῶν λόγων ἡγέμενοι ὅροι, ὡς οἱ ἑπόμενοι. Καὶ τῶνγε ὅρων τῆς ἀναλογίας Α : Β = Γ : Δ ἐναλλὰξ ληφθέντων, ἀναλογία ἀληθὴς ἀνακύψει Α : Γ = Β : Δ. Ἐὰν μέντοι ἑτερογενεῖς ὦσιν οἱ ὅροι τῶν λόγων Α : Β καὶ Γ : Δ τῶν ἀλλήλοις ἴσων, ὁ λόγος Α : Γ, περινοηθῆναι ὐ δυνήσεται, ὐ δ' ὁ Β : Δ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 166. Ἐὰν ᾖ Κ : Λ = Α : Β
Μ : Ν = Β : Γ
Π : Φ = Γ : Δ
Ρ : Σ = Δ : Ε, ϗ ὕτως ἐφεξῆς·

Τυτέςιν ἐὰν τὸ ἐν τῷ λόγῳ Α : Β ἑπόμενον ἡγύμενον ᾖ ἐν τῷ ἐφεξῆς Β : Γ, καὶ τὸ ἐν αὐτῷ τύτῳ ἑπόμενον ἡγύμενον ἐν τῷ Γ : Δ, καὶ ὕτω διὰ παντός. Ἐκφέρηται δὲ τῶν τοιῶνδε ἕκαςος λόγων, καὶ δι' ἄλλων ὅρων· οἷον ὁ μὲν Α : Β διὰ Κ : Λ, ὁ δὲ Β : Γ διὰ Μ : Ν, καὶ ὕτως οἱ λοιποί. Εἰρήσεται δὴ, τὸν μὲν Α : Γ λόγον συγκεῖσθαι ἐκ τῶν λόγων Α : Β καὶ Β : Γ, ἢ ἐκ τῶν ἴσων Κ : Λ καὶ Μ : Ν· τὸν δὲ Α : Δ ἐκ τῶν Α : Β, καὶ Β : Γ, καὶ Γ : Δ· ἢ ἐκ τῶν ἴσων Κ : Λ, καὶ Μ : Ν, καὶ Π : Φ. Τὸν δὲ Α : Ε, ἐκ τῶν Α : Β, Β : Γ, Γ : Δ, Δ : Ε· ἢ ἐκ τῶν Κ : Λ, Μ : Ν, Π : Φ, Ρ : Σ· καὶ ὕτως ἐφεξῆς.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 167. Ἐὰν οἱ λόγοι Α : Β, Β : Γ, Γ : Δ, Δ : Ε, ἅπαντες ἀλλήλοις ἴσοι τυγχάνωσιν, ὁ λόγος Α : Γ, ὁ ἐκ τῶν δυοῖν Α : Β, καὶ Β : Γ συγκείμενος, πρός γε τούτων τὸν ἕτερον Α : Β, ἢ Β : Γ, ἢ πρὸς τὸν Κ : Λ, ἢ τὸν Μ : Ν, τοὺς ἐκείνοις ἴσους, **λόγος διπλασίων** κληθήσεται. Ὁ δὲ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν Α : Β, καὶ Β : Γ, καὶ Γ : Δ λόγος ὁ Α : Δ, πρός γε τὸν ἕνα τούτων Α : Β, ἢ ὀντινοῦν αὐτῷ ἐξισούμενον ἄλλον, **λόγος τριπλασίων.** Καὶ **τετραπλασίων** δὲ ὁ ἐκ τεττάρων· καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Πρὸς δέ γε ἕκαστον τῶν δε τῶν εἰρημένων λόγων, ὁ λόγος Α : Β, ἢ ὁστισοῦν αὐτῷ ἴσος, εἰρήσεται λόγος **ἁπλοῦς.** Καὶ **ὑποδιπλασίων** μὲν, πρός γε τὸν αὐτοῦ διπλασίονα, **ὑποτριπλασίων** δὲ πρὸς τὸν τριπλασίονα· καὶ ἐφεξῆς ὡσαύτως.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 168. Λόγος ἅπας, ἐξ ὁποσωνοῦν τὸν ἀριθμὸν ἄλλων, συγκεῖσθαι δύναται ἀπείροις τοῖς τρόποις. Ἔστω γὰρ λόγος Α : Δ ἐκ τριῶν συγκροτητέος· ληφθήτωσαν δὲ ὅροι Β καὶ Γ, ὥπερ ἔτυχε. Καὶ ἔστω δὴ ὁ λόγος Α : Β ἴσος τῷ λόγῳ Κ : Λ· ἔστω δὲ ὁ Β : Γ = Μ : Ν. καὶ ὁ Γ : Δ = Π : Φ, καὶ συγκείσεται δήπου ὁ Α : Δ, ἐξ ἁπάντων τῶν Α : Β, Β : Γ, Γ : Δ, ἢ ἐκ τῶν Κ : Λ, Μ : Ν, Π : Φ. Παραπλησίως οὖν καὶ λόγος ἕκαστος, ἐκ λόγων ἴσων συγκεῖσθαι δύναται ὁποσωνοῦν τὸν ἀριθμόν. Καὶ δυνατὸν ἄρα τὸν αὐτὸν λόγον, νῦν μὲν ἁπλοῦν, νῦν δὲ σύνθετον ἀποκαλεῖν, διπλασίονα, τριπλασίονα, ἢ ὁπωσοῦν ἄλλως πολλαπλασίονα, ὥπερ ἄντις αὐτὸν ἐκπροϊόντα νοήσειεν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 169. Ὁ λόγος ὁ διπλασίων **ὑπέρτερος** τοῦ ἁπλοῦ εἶναι εἰρήσεται· τοσούτῳ δὲ μᾶλλον τοῦ πρὸς αὐτὸν ὑποδιπλασίονος, ἢ ἔτι τοῦ ὑποτριπλασίονος. Ὡσαύτως δὲ καὶ ὁ τριπλασίων, ὑπέρτερος τοῦ διπλασίονος· πολλῷ δὲ μᾶλλον τοῦ ἁπλοῦ, καὶ ἔτι τοῦ πρὸς αὐτὸν ὑποδιπλασίονος· καὶ οὕτω καὶ τοῖς λοιποῖς. Τοὐναντίον δὲ ὁ ἁπλοῦς ὑποδεέστερος εἶναι ῥηθήσεται τοῦ διπλασίονος, καὶ ὁ διπλασίων τοῦ τριπλασίονος, καὶ ὅδε τοῦ τετραπλασίονος· καὶ ἑξῆς ὁμοίως. Ὅθεν καὶ τίποτε νοητέον εἶναι τὸ τοῦ λόγου ὕψωμα, συνιδεῖν ῥᾴδιον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 170. Τὸ τοῦ λόγου ὕψωμα μέγεθος ὑπὸ πολλῶν ὀνομάζεται, κατὰ σημασίαν γεμὴν ὡς λίαν διαφέρουσαν, τῆς καθ' ἣν λόγος λόγου μείζων, ἢ ἐλάσσων εἶναι λέγεται (§. 157.). Οὕτω γὰρ ὁ διπλοῦς λόγος μακρῷ τοῦ διπλασίονος διενήνοχε, καὶ ὁ τριπλοῦς τοῦ τριπλασίονος, ὅ,τε ὑποδιπλοῦς τοῦ ὑποδιπλασίονος· καὶ ἐπὶ τῶν ὁμοιωνύμων ὡσαύτως. Διπλοῦς γὰρ λέγεται, ἐν ᾧ τὸ ἡγούμενον, δὶς τοσοῦτον, ὅσον ἐστὶ τὸ ἑπόμενον· οἷον 2 : 1, 6 : 3, 10 : 5· καὶ τριπλοῦς ἐν ᾧ τρίς· οἷον 3 : 1, 6 : 2, 15 : 5. Ὑποδιπλοῦς δέ, ἐν ᾧ τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου ἡμίσεια ἐστίν· ὡς ἐν τοῖσδε 1 : 2, 3 : 6, 5 : 10· κἀντεῦθεν καὶ τὰ τοιουτώδη ἄλλα τῶν ὀνομάτων σύζευκται, ἃ τὸν λόγον πάντῃ διορίζει, καὶ ἀπείρους διαχορηγεῖ τοὺς ὅρους, δι' ὧν ἂν αὐτὸς παρίσταιτο. Διπλασίων δὲ λόγος οὐδεὶς καλεῖται, εἰ μὴ σχέσει τῇ πρὸς ἕτερόν τινα, τὸν ὡς ἁπλοῦν ἐπιθεωρούμενον. Τούτου δὲ μεταβαλόντος, ὁ τὸ πρὶν διπλασίων, τάχα ἂν τριπλασίων γένοιτο, ἢ ὑποδιπλασίων· διπλασίων δὲ πάντως μετὰ τὴν τούτου τροπήν, οὐκ ἂν μείνοι. Πρὸς οὖν διαφυγὴν τῆς περὶ ταῦτα συγχύσεως, μᾶλλον ἂν συντελέσειε τὰς πλείστην ἐχούσας τὴν διαφορὰν ἐννοίας, διαφέρουσι καὶ τοῖς ὀνόμασι διασημαίνειν, τὸ μέν, τοῦ λόγου μέγεθος ἀποκαλόντας, τὸ (§. 157.) ὁρισθὲν, τὸ δὲ ὕψωμα, ἢ κατ' ἄλλιω, καὶ ἄλλιω ἐννοίας ἐκδοχὴν τῷ αὐτῷ ὀνόματι ἀποδιδόναι.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 171. Ἐὰν ᾖ, $A : B = \Gamma : \Delta$

Ἔςαι καὶ $B : A = \Delta : \Gamma$

$$A + B : A = \Gamma + \Delta : \Gamma$$
$$A + B : B = \Gamma + \Delta : \Delta$$
$$A : A + B = \Gamma : \Gamma + \Delta$$
$$B : A + B = \Delta : \Gamma + \Delta$$
$$A - B : A = \Gamma - \Delta : \Gamma$$
$$A - B : B = \Gamma - \Delta : \Delta$$
$$A : A - B = \Gamma : \Gamma - \Delta$$
$$B : A - B = \Delta : \Gamma - \Delta$$
$$A + B : A - B = \Gamma + \Delta : \Gamma - \Delta$$
$$A - B : A + B = \Gamma - \Delta : \Gamma + \Delta$$

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 4. Ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῆς ληφθείσης ἀναλογίας $A : B = \Gamma : \Delta$, τὰ ἐν τοῖς λόγοις ἑπόμενα B καὶ Δ, εἰς μέρη ἴσα διαιρεθῇ, ἰσαρίθμως ἑκάτερον m, ἐξέςαι ἀεὶ τὸ A ἐκ τῦ αὐτῦ ἀριθμῦ n τῶν $\frac{B}{m}$ μερῶν, συγκείμενον νοεῖν· ἐξ ῦ δὴ ἀριθμῦ τῶν μερῶν $\frac{\Delta}{m}$ συγκείσεται καὶ τὸ Γ (§. 151.)· τύτυ δὲ κειμένυ, αὐτόθεν δῆλον, ὅτι καὶ ἐφ' οἱασῦν τῶν ἀναλογιῶν, τῶν ἐξ ἐκείνης εἰρημένων ἐπιφέρεσθαι, ὁ μὲν πρῶτος τῶν ὅρων τοσάδε μέρη περιέξει, ὅσα ὁ τρίτος· ὁ δὲ δεύτερος, ὁπόσα ὁ τέταρτος. Καὶ τῦ μὲν πρώτυ τῶν ἐν τῇ ἀναλογίᾳ ὅρων τὰ μέρη, τοῖς ἐν τῷ δευτέρῳ τὸ μέγεθος ἐξισωθήσεται· τὰ δὲ τῦ τρίτυ τοῖς ἐν τῷ τετάρτῳ. Τοιγαρῦν καὶ πᾶσαι αἱ τεθεῖσαι ἀναλογίαι ἀληθεῖς ἔσονται (§. 147.).

ΠΟΡΙΣΜΑ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 172. Ὡσαύτως δειχθήσεται, ὡς ἐὰν ᾖ,

$$A : B = \Gamma : \Delta$$
$$\text{Καὶ}\quad E : B = Z : \Delta$$
$$\text{Ἔσαι καὶ}\quad A + E : B = \Gamma + Z : \Delta$$
$$\text{καὶ}\quad A - E : B = \Gamma - Z : \Delta$$

τῶν γὰρ ποσοτήτων B καὶ Δ, ἰσαρίθμως κατὰ τὸ m εἰς μόρια ἴσα ἀλλήλοις καθ' ἑκάτερον ἰδίᾳ διῃρημένων, ἐξ ὧν ἂν οἱ ἐν τοῖς λόγοις ἡγέμενοι ὅροι συγκέοιντο, ἐὰν ᾖ $M = \frac{B}{m}$, ἢ $T = \frac{\Delta}{m}$. Καὶ $A = nM$, καὶ $E = hM$, ἔσαι δὴ καὶ $\Gamma = nT$, καὶ $Z = hT$ (§. 151.). Ἔνθεντοι καὶ $A + E = nM + hM = (n + h)M$. Καὶ $\Gamma + Z = nT + hT = (n+h)T$. Καὶ συγκείσεται ἄρα $A + E$, ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ $n + h$ τῶν μορίων M, ἐξ οὗ δὴ ἀριθμοῦ τῶν μορίων T, σύγκειται καὶ $\Gamma + Z$. Τὸν δ' αὐτὸν ἂν ὑποσυναφθείη τρόπον, καὶ $A - E$ ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ $n - h$ τῶν μορίων M συγκεῖσθαι, ἐξ οὗ τῶν T μορίων ἀριθμοῦ, καὶ $\Gamma - Z$ συνέστηκεν.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 173. Ἐὰν οἱ λόγοι $A : B$ καὶ $\Gamma : \Delta$ ἴσοι ἀλλήλοις ὦσιν· οἵτε τοῦ πρώτου ὅροι, ὁμογενεῖς τοῖς ἐν τῷ δευτέρῳ· ληφθῶσι δὲ τάγε κεφάλαια, καὶ αἱ διαφοραὶ τῶν ἡγουμένων, καὶ ἑπομένων· ἔσαι καὶ ὁ λόγος $A + \Gamma : B + \Delta$, ἢ $A - \Gamma : B - \Delta$, ἴσος ὁποτερωοῦν τῶν προτέρων $A : B$, ἢ $\Gamma : \Delta$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τῶν ὅρων τῆς ἀναλογίας $A : B = \Gamma : \Delta$ οὕτω διαιρεθέντων, ὡς ἐν τῇ ἀποδείξει τοῦ προτοῦδε θεωρήματος, ἐπειδήπερ ἐν τῷ A, τοσάδε ἔνεστι μόρια, Σχ. 4. καὶ 5.

ὅσα

ὅσα καὶ τῷ Γ, πρόθες ἕκαςον μέρος τȣ̃ ποσȣ̃ Α, τῷ μέρει τȣ̃ ποσȣ̃ Γ τῷ πρὸς ἐκεῖνο ἀντιςιχȣ̃ντι, καὶ ἐκ τῶν ȣ̃τω συςάντων μερῶν σιώθες τὸ Ε, ὅπερ ἔςαι $= \mathrm{A} + \Gamma$, καὶ τοσάδε μέρη ἴσα συνέξει, ὅσα ἔχει τὸ Α, ἢ τὸ Γ· τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ ἑκάςȣ τῶν ἐν τῷ ποσῷ Β μερῶν ἑκάςῳ τῶν ἐν τῷ Δ προσεπιτεθέντος συςήσεται τὸ Ζ, ὅπερ ἴσον ἔςαι τῷ $\mathrm{B} + \Delta$, καὶ τοσάδε περιέξει μέρη, ὅσα ἔχει τὸ Β, ἢ τὸ Δ. Κἀντεῦθεν δὲ ἑπομένως ἔςαι $\mathrm{E} : \mathrm{Z} = \mathrm{A} : \mathrm{B} = \Gamma : \Delta$ (§. 147.)· ὅπερ ἰῶ τὸ πρῶτον.

Ὑπὲρ δὲ τῶν διαφορῶν, ληφθήτω ἡ διαφορὰ ἡ μεταξὺ δυοῖν ὁποιωνȣ̃ν μορίων τῶν ἐν τοῖς ὅροις Α καὶ Γ, τῶν ἀλλήλοις ἀντιςιχȣ̃ντων, κἀκδὲ τȣτωνὶ τῶν διαφορῶν, αἵπερ ἴσαι τε ἔσονται, καὶ τοσαίδε τῷ ἀριθμῷ, ὅσα μέρη ἔνεισι τῷ Α, ἢ τῷ Γ, συντιθέσθω τὸ Η, ὃ ταυτὸν ἔςαι τῷ $\mathrm{A} - \Gamma$· ταυτὸ δὲ γινέσθω κἀπὶ τῶν ὅρων Β, καὶ Δ· καὶ ἔςαι ὁ ȣ̃τω προκύπτων ὅρος $\Theta = \mathrm{B} - \Delta$· ὃς τοσάδε μέρη ἕξει, ἀλλήλοις τε, καὶ τοῖς ἐν τῷ Η ὅρῳ μέρεσιν ἴσα, ὅσα ἔχει τὸ Β, ἢ τὸ Δ. Ἄρ᾽ ȣ̃ν καὶ $\mathrm{H} : \Theta = \mathrm{A} : \mathrm{B} = \Gamma : \Delta$· ὅπερ ἰῶ θάτερον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 174. Ἔνθεντοι ἐν γένει, ἐὰν οἱ λόγοι $\mathrm{A} : \mathrm{B}$, $\Gamma : \Delta$, $\mathrm{E} : \mathrm{Z}$, $\mathrm{H} : \Theta$, κξ. ἅπαντες ἴσοι ἀλλήλοις ὦσι· τȣτέςιν ἐὰν ᾖ,

$$\begin{aligned} \mathrm{A} : \mathrm{B} &= \mathrm{A} : \mathrm{B} \\ \Gamma : \Delta &= \mathrm{A} : \mathrm{B} \\ \mathrm{E} : \mathrm{Z} &= \mathrm{A} : \mathrm{B} \\ \mathrm{H} : \Theta &= \mathrm{A} : \mathrm{B}, \end{aligned}$$

ἔςαι καὶ,

$$(\mathrm{A}+\Gamma+\mathrm{E}+\mathrm{H}) : (\mathrm{B}+\Delta+\mathrm{Z}+\Theta) = \mathrm{A} : \mathrm{B},$$ ἢ γȣ̃ν,

$$(\mathrm{A}-\Gamma+\mathrm{E}-\mathrm{H}) : (\mathrm{B}-\Delta+\mathrm{Z}-\Theta) = \mathrm{A} : \mathrm{B}.$$

Ὁποῖοι δ᾽ ἂν ὦσιν οἱ ἀφαιρȣ́μενοι ὅροι, καὶ ὁποσοιȣ̃ν τὸν ἀριθμὸν, οἱ μόνον ἀνὰ δύο ἀεὶ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ὦσι λόγον ἀνήκοντες.

ΘΕΩΡΗ

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 175. Τῶν μὲν ἐλασσόνων γραμμάτων, οἷον μ καὶ ν, ἀριθμὲς ὁλοχερεῖς, ἢ κλασματικὲς, τῶν δὲ μειζόνων Α, Ω, ἤτοι ἀριθμὲς καὶ τέτων, ἢ ἑτέρας ποσότητας ὑποσημαινόντων, ἐὰν ᾖ $\mu : \nu = A : \Omega$, ἔσαι $\Omega = \frac{\nu A}{\mu}$. Καὶ $\mu\Omega = \nu A$. Καὶ ἐὰν ᾖ $\mu\Omega = \nu A$, ἔσαι $\mu : \nu = A : \Omega$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν μ καὶ ν ὁλοχερεῖς ὦσι, φανερὸν αὐτόθεν ὅτι $\Omega = \frac{\nu A}{\mu}$, καὶ μάλισα τῆς ἀναλογίας ἀνάπαλιν γραφείσης ὧδε, $\Omega : A = \nu : \mu$ (§. 151.) Ἐὰν δὲ διὰ τῶν μ καὶ ν κλάσματα ὑποσημαίνηται, καὶ ᾖ τὸ μὲν $\mu = \frac{\sigma}{\vartheta}$, τὸ δὲ $\nu = \frac{\beta}{\varkappa}$, ὥςε τὴν ἀναλογιαν γράφεσθαι ἔχειν ὡδέπως· $\frac{\sigma}{\vartheta} : \frac{\beta}{\varkappa} = A : \Omega$, ἑκατέρε τῶν κλασμάτων διὰ $\vartheta\varkappa$ πολλαπλασιασθέντων, γίνεται $\frac{\sigma\vartheta\varkappa}{\vartheta} : \frac{\beta\vartheta\varkappa}{\varkappa} = A : \Omega$ (§. 164.). Καὶ τῶν κλασμάτων ἐπ' ἐλάσσονα ὀνόματα ἀνηγμένων $\sigma\varkappa : \beta\vartheta = A : \Omega$. Εἰσὶ δὲ ἤδη οἱ ἀριθμοὶ $\sigma\varkappa$, $\beta\vartheta$ ὁλοχερεῖς· ἔσαι ἄρα διὰ τὰ δειχθῆναι φθάσαντα, $\Omega = \frac{\beta\vartheta A}{\sigma\varkappa}$. Ἀναφυήσεται δὲ τὸ κλάσμα $\frac{\vartheta\beta}{\sigma\varkappa}$, ἐὰν τὸ $\frac{\beta}{\varkappa}$ διαιρεθῇ διὰ τῦ $\frac{\sigma}{\vartheta}$ (§. 97.). Ἐπειδὴ ὖν τὸ μὲν πρότερον τῶνδε τῶν κλασμάτων ἐςὶ ν, τὸ δὲ δεύτερον μ, ἔσαι $\frac{\vartheta\beta}{\varkappa\sigma} = \frac{\nu}{\mu}$.

Καὶ

Κἀντεῦθεν $\Omega = \frac{\nu}{\mu}\Lambda$· ὧν ἐὰν ἑκάτερον διὰ μ πολλαπλασιασθῇ, ἐπιφέρεται $\mu\Omega = \nu\Lambda$.

Ἀνάπαλιν τεθὲν $\mu\Omega = \nu\Lambda$. Ἐὰν ᾖ $\mu : \nu = \Lambda : X$, ἔσται $\mu X = \nu\Lambda$. Ἄρα καὶ $\mu X = \mu\Omega$, καὶ $X = \Omega$. Διὸ καὶ $\mu : \nu = \Lambda : \Omega$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 176. Δυοῖν ἄρα δοθέντων ἀριθμῶν μ, ν, καὶ ποσότητος ἡστινοσοῦν τῆς Λ, ἀεὶ εὑρεθήσεται τῆς ἀναλογίας $\mu : \nu = \Lambda : \Omega$ ὁ τέταρτος ὅρος Ω, πολλαπλασιαζομένης τῆς Λ ποσότητος, διὰ τοῦ δευτέρου τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ν, καὶ τοῦ παραγομένου $\nu\Lambda$, διαιρεθέντος διὰ τοῦ πρώτου μ· ἢ γοῦν τῆς Λ ποσότητος διαιρουμένης διὰ τοῦ πρώτου τῶν ἀριθμῶν μ, καὶ τοῦ ἐντεῦθεν προκύπτοντος $\frac{\Lambda}{\mu}$ πολλαπλασιαζομένου διὰ τοῦ δευτέρου ν. Καὶ τοῦτο, εἴτε ὁλοχερεῖς οἱ διδόμενοι ἀριθμοί, εἴτε καὶ κλασματώδεις. Καὶ εἴτε ἀριθμὸς εἴη ὁ Λ, εἴτε καὶ γραμμή, ἤτι τοιοῦτο. Τὸ δ' οὕτω γινόμενον Ω, τέταρτος ὅρος τὴν τάξιν ἐστί. Δύναται δὲ πᾶσα ἀναλογία (§. 171.) οὕτως ἀντιστρέφεσθαι, ὡς ἕκαστον τῶν ἐν αὐτῇ ὅρων γίνεσθαι τῇ τάξει τέταρτον. Καὶ τούτου γινομένου, ἐὰν οἱ δύο πρῶτοι τῆς ἀντιστραφείσης ἀναλογίας ὅροι ἀριθμοὶ ὦσιν, ἀείποτε ὁ τέταρτος οὗτος ἐκ τῶν λοιπῶν, διὰ τοῦ αὐτοῦ κανόνος ἐξευρεθήσεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 177. Ἐντεῦθεν ἐὰν ᾖ
$$\begin{aligned} \mu : \nu &= A : B \\ \pi : \phi &= B : \Gamma \\ \rho : \sigma &= \Gamma : \Delta \\ \tau : \upsilon &= \Delta : Z \end{aligned}$$

Ἔσται

"Εςαι $$B = \frac{\nu}{\mu}.A$$
$$\Gamma = \frac{\phi}{\pi}.B = \frac{\nu\phi}{\mu\pi}.A$$
$$\Delta = \frac{\sigma}{\varrho}.\Gamma = \frac{\nu\phi\sigma}{\mu\pi\varrho}.A$$
$$Z = \frac{\upsilon}{\tau}.\Delta = \frac{\nu\phi\sigma\upsilon}{\mu\pi\varrho\tau}.A$$

Ὁ γὰρ δὴ λόγος Α : Ζ, σύγκειται ἐκ τῶν Α : Β, Β : Γ, Γ : Δ, Δ : Ζ· εἰ δὲ διδόμενοι εἰσὶ διὰ τῶν ἀριθμῶν μ : ν, π : φ, ρ : σ, τ : υ (§. 166.). Τῶν ἐν λόγων ὃς δέον συνθέσθαι δι' ἀριθμῶν ἐκφερομένων, καὶ τȣγε ὅρȣ τȣ ἐν τῷ συνθέτῳ λόγῳ ἡγȣμένȣ Α δοθέντος, εὑρεθήσεται, τὸ ἑπόμενον Ζ, ἐὰν γένηται $\mu\pi\varrho\tau : \nu\phi\sigma\upsilon = A : Z$· τȣτέστιν ἐὰν ὑποσυναφθῇ, ὡς τὸ ὑπὸ πάντων τῶν ἡγȣμένων ἀριθμῶν παραγόμενον, πρὸς τὸ ὑπὸ πάντων τῶν ἑπομένων, ὅτως ὁ τȣ συνθέτȣ λόγȣ ἡγȣμενος ὅρος, πρὸς τὸν ἐν αὐτῷ ἑπόμενον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 178. Ὁ ἄρα λόγος τȣ παραγομένȣ $\mu\pi\varrho\tau$, πρὸς τὸ παραγόμενον $\nu\phi\sigma\upsilon$, τῷ ὅτω συνθέτῳ λόγῳ Α : Ζ ἴσος ἐςί.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 179. Μετακινηθείσης οἱωδήποτε τρόπῳ τῆς τάξεως τῶν παραγόντων, τῶν ἐν τοῖς δε τοῖς παραγομένοις, ἐπειδὴ τὰ παραχθέντα μεταβολὴν ἐχ ὑφίςαται (§. 98.), μένει δὲ καὶ μετὰ τὴν μετάθεσιν λόγος ὁ αὐτός· τοιγαρȣν ὅτε τῶν ἐν τοῖς λόγοις ὃς συνθέσθαι δέον ἡγȣμένων $\mu\pi\varrho\tau$, ὅτε δὴ τῶν ἑπομένων $\nu\phi\sigma\upsilon$, ἡ κατ' ἄλλην τάξιν ταραχῆτε καὶ μετακίνησις, τροπὴν ἐδεμίαν τῷ συνθέτῳ λόγῳ

γῳ προσεμποιήσει. Καὶ ἐὰν ἐπὶ παραδείγματος γένηται,

$$\begin{array}{l} \pi : \sigma = \mathrm{A} : \mathrm{b} \\ \mu : \upsilon = \mathrm{b} : \mathrm{c} \\ \varrho : \nu = \mathrm{c} : \mathrm{d} \\ \tau : \phi = \mathrm{d} : \mathrm{X} \end{array}$$

Κἂν οἱ ὅροι b, c, d ἀπὸ τῶν ἐν τῷ Β΄. πορίσματι διαφέροντες ὦσιν, ἀλλὰ τὸ Χ τῦ Ζ ἐδὲν διοίσει. Ἐπειδὴ γὰρ $\mu\pi\varrho\tau = \pi\mu\varrho\tau$, καὶ $\nu\phi\sigma\upsilon = \sigma\upsilon\nu\phi$, ἔςαι καὶ $\mu\pi\varrho\tau : \nu\phi\sigma\upsilon = \pi\mu\varrho\tau : \sigma\upsilon\nu\phi$. Κἀντεῦθεν, ὅτι $\mu\pi\varrho\tau : \nu\phi\sigma\upsilon = \mathrm{A} : \mathrm{Z}$ (§. 178.). καὶ δὴ καὶ $\pi\mu\varrho\tau : \sigma\upsilon\nu\phi = \mathrm{A} : \mathrm{X}$, ἔςαι $\mathrm{A} : \mathrm{Z} = \mathrm{A} : \mathrm{X}$, καὶ $\mathrm{X} = \mathrm{Z}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 180. Οὐδὲν πλέον ἐκ τῶν τοιῶνδε ταραχῶν οἷα καλῦσι, καὶ μεταθέσεων ἕπεται, καὶ εἰ ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν μ, ν καὶ π, ϕ, καὶ ϱ, σ, καὶ τ, υ, ποσάτινα ὁποιαδήποτε ἄλλα ληφθῇ, ὧν ἕκαςον ᾖ πρὸς ἕκαςον τῶν λοιπῶν, ὡς ὁ ἀριθμὸς ὅπερ ἀντικαθίςαται ἐκεῖνο, πρὸς τὸν ἀριθμὸν ὃ ἀντικαθίςαται τῦτο. Ἐπὶ γὰρ τοιᾶδε ὑποθέσει, ἐὰν ἀντὶ τῦ μ ἀριθμῦ ἀντικαταςῇ $\mu\Pi$, ἀντὶ τῦ ν θετέον $\nu\Pi$. Καὶ ἀντὶ μὲν τῦ π, $\pi\Pi$, ἀντὶ δὲ τῦ ϕ, $\phi\Pi$, καὶ ὅτως ἐφεξῆς. Δῆλον δὲ, ὡς εἰ ἐπὶ τῦ ἐν τῷ Β΄. Πορίσματι Σχήματος,

$$\begin{array}{l} \mu : \nu = \mathrm{A} : \mathrm{B} \\ \pi : \phi = \mathrm{B} : \Gamma \\ \varrho : \sigma = \Gamma : \Delta \\ \tau : \upsilon = \Delta : \mathrm{Z} \end{array}$$

Καὶ ἐπὶ τῦ ἑτέρυ τῦ ἐν τῷ Δ΄. πορίσματι,

$$\begin{array}{l} \pi : \sigma = \mathrm{A} : \mathrm{b} \\ \mu : \upsilon = \mathrm{b} : \mathrm{c} \\ \varrho : \nu = \mathrm{c} : \mathrm{d} \\ \tau : \phi = \mathrm{d} : \mathrm{X} \end{array}$$

Ἀντὶ

Ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν μ, ν, π, φ, κ.ξ. ληφθείη τὰ ποσὰ μΠ, νΠ, πΠ, φΠ, καὶ ὕτως ἐφεξῆς. αἱ ποσότητες Β, Γ, Δ, Ζ, ταῖς b, c, d, X προκύψεσιν αἱ αὐταί.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ϛ'.

§. 181. Διὰ δὴ τύτων, τὺς λόγυς ὓς ἂν συνθέσθαι δεήσοι, ἐπ' ἐλάσσονας ἀνάγειν ἐξέσαι. Ἔσωσαν λόγοι ὓς συντιθέναι δέον,

$$\begin{array}{c} M : N \\ \Pi : M \\ \Phi : \Pi \\ P : \Sigma \end{array}$$

Καὶ ὅρυ τῦ Α, ὅς ἂν μὴ δεδομένος ᾖ, πρὸν τὸ δοκῦν ληφθέντος, δῆλον ὅτι καὶ τῆς τῶν ὅρων τάξεως, ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις τεταραγμένης, γένοιτ' ἂν;

$$\begin{array}{c} M : M = A : A \\ \Pi : \Pi = A : A \\ \Phi : N = A : B \\ P : \Sigma = B : Z \end{array}$$

Ἐξ ὧν ἐπεὶ αἱ δισσαὶ πρῶται ἀναλογίαι ἐνταῦθα κομιδῇ ἀχρηστῦσιν, ἐκ τῶν δύο λόγων Φ : Ν καὶ Ρ : Σ, ὁ αὐτὸς Α : Ζ συντεθήσεται λόγος, τῷ συντιθεμένῳ πρὶν ἐκ τῶν τεττάρων. Ἐξευρίσκονται δ' οἱ λόγοι ὗτοι, ἢ γῦν ἄλλοι τινὲς Φ : Σ, καὶ Ρ : Ν, ἐξ ὧν ὁ αὐτὸς λόγος Α : Ζ συντίθεται, τῶν ἐν τοῖς λόγοις ὅρων Μ καὶ Π, οἳ κοινῇ ἔντε τοῖς ἡγυμένοις καὶ τοῖς ἑπομένοις οἱ αὐτοὶ ἀπαντῶσι, παραλειφθέντων.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ.

§. 182. Τῦ ἀριθμῦ τῶν λόγων ὓς δεῖ συντιθέναι τοιᾶδε μεθόδῳ ἐλαττυμένυ, ἐπεὶ μηδὲν τῶν ἐν τῷ συνθέτῳ τροπιῶ ὑπομένει, ἐάν τις λόγος Α : Ζ

 συγκει-συγκείμενος νοῆται ἐκ τριῶν ὡντινωνȣ̃ν $M:N$, $\Pi:\Phi$, $P:\Sigma$, ἔχῃ δὲ ὁ αὐτὸς λόγος $A:Z$, καὶ ἐκ δυοῖν $A:B$, $\Gamma:\Delta$ συντίθεσθαι, τῶν προτέρων λόγων ἐπὶ τȣ̀ς δύο ἀναχθέντων $M:N$, $\Pi:\Sigma$ (ὃ γενέσθαι δύναται εἴθα $\Phi = P$)· ὁ ἐκ τῶν δύο σύνθετος $M:N$ καὶ $\Pi:\Sigma$, ἴσος ἔςαι τῷ ἐκ τῶν δύο $A:B$ καὶ $\Gamma:\Delta$. Ἐὰν δὲ παρὰ ταῦτα ᾖ καὶ $N = \Pi$, ὁ ἐκ τῶν δύο $M:N$ καὶ $\Pi:\Sigma$ σύνθετος, ἐςὶν ὁ $M:\Sigma$, ὃς καὶ αὐτὸς ἴσος τῷ ἐκ τῶν δυοῖν $A:B$ καὶ $\Gamma:\Delta$ συνθέτῳ. Διὸ ἐὰν καὶ οἱ λόγοι ȣ̃τοι διὰ $B = \Gamma$ ἀναχθῆναι δυνηθῶσιν ἐπὶ τὸν μοναδικὸν $A:\Delta$, ἔςαι $M:\Sigma = A:\Delta$. Δῆλον δ᾽ ὅτι τὸ αὐτὸ ἔςαι, πηλίκον ἂν καὶ ὑποτεθείη τὸ τῶν λόγων πλῆθος τῶν προκειμένων εἰς σύνθεσιν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Η.

§. 183. Ἔνθεντοι ἐὰν ᾖ $A:B = \Gamma:\Delta$, ἐπειδὴ ἀεὶ ἐςὶ $\mu A : A = \mu\Gamma : \Gamma$, τȣ̃ μ ἀριθμὸν δηλȣ̃ντος, εἴτε ὁλοχερῆ, εἴτε καὶ κλασματιαν, τῶν ἀναλογιῶν ὧδε διαταχθεισῶν,

$$A : B = \Gamma : \Delta$$
$$\mu A : A = \mu\Gamma : \Gamma$$

Φανερὸν ὡς καὶ $\mu A : B = \mu\Gamma : \Delta$. Ἐναλλὰξ ἄρα τῶν τῆς ἀναλογίας ὅρων, τȣ̃ πρώτȣ δηλαδὴ, καὶ τȣ̃ τρίτȣ, διὰ τȣ̃ αὐτȣ̃ ἀριθμȣ̃ μ πολλαπλασιασθέντων, ἢ διαιρεθέντων, ἡ ἀναλογία ȣ̓κ ἀνατρέπεται. Καὶ γάρτοι μA τὸν τȣ̃ ποσȣ̃ A πολλαπλασιασμὸν διὰ τȣ̃ μ παρίςησι, καὶ τὴν αὐτȣ̃ τȣ́τȣ διαίρεσιν διὰ τȣ̃ $\frac{1}{\mu}$ ὁμοίως.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Θ.

§. 184. Οὕτω δὲ, καὶ ὅτι ἀείποτε,

$$B : \nu B = \Delta : \nu\Delta$$

Ἐὰν ᾖ καὶ $\quad A : B = \Gamma : \Delta$

Ἔςαι καὶ $\quad A : \nu B = \Gamma : \nu\Delta$

Καὶ

Καὶ τῶν τῆς ἀναλογίας ὅρων τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τετάρτου, διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ν πολλαπλασιασθέντων, ἢ διαιρεθέντων, ἡ ἀναλογία οὐδέντι μᾶλλον περιτραπήσεται. Καὶ ἐν γένει ἄρα ἐὰν ᾖ $A : B = \Gamma : \Delta$, ἔσαι καὶ $\mu A : \nu B = \mu \Gamma : \nu \Delta$, ὁποῖοι ποτ' ἂν ὦσιν οἱ ἀριθμοὶ μ καὶ ν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι.

§. 185. Ἐὰν ᾖ $A : B = \Gamma : \Delta$
καὶ $E : B = \Gamma : Z$

τουτέστιν ἐὰν οἱ μέσοι ὅροι ὦσιν οἱ αὐτοὶ, τῶν ἀναλογιῶν οὕτω γραφομένων, $B : A = \Delta : \Gamma$
$E : B = \Gamma : Z$

καὶ τῶν ὅρων B, Γ παραλειφθέντων, δῆλον ὡς ἔσαι,

$$E : A = Z : \Delta$$
ἢ
$$A : E = \Delta : Z.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΑ.

§. 186. Ἐὰν δὲ ᾖ $A : B = M : N$
καὶ $\Gamma : \Delta = N : M$

Ἐπειδὴ ὁ λόγος $N : M$ τοῦ πρὸ αὐτοῦ $M : N$ ἐσὶν ὁ ἀνάπαλιν, ὁ λόγος ὁ σιώθετος ἐκ τῶν $A : B$ καὶ $\Gamma : \Delta$, λόγος ἔσαι ἰσότητος· ὁ γὰρ αὐτὸς καὶ ἐκ τῶν λόγων $M : M$, καὶ $N : N$ σύγκειται. Καὶ οὐκ ἂν ἔχοι λόγος ἄλλος προελθεῖν, ἢ ὁ $M : M$, καὶ $N : N$· τουτέσιν $1 : 1$.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΒ.

§. 187. Καὶ ἐὰν ὁ λόγος ὁ συγκείμενος ἐκ δυοῖν $A : B$ καὶ $\Delta : \Gamma$ λόγος ἰσότητος ᾖ, ἐκείνων ὁ πρῶτος $A : B$, τῷ δευτέρῳ $\Delta : \Gamma$ ἀνάπαλιν ληφθέντι ἐξισωθήσεται· τουτέσιν ἔσαι, $A : B = \Gamma : \Delta$
Ἐὰν γὰρ γένηται, $A : B = \Gamma : \Phi$
Ἐπειδὴ ἀεὶ ἔσαι $\Delta : \Gamma = \Delta : \Gamma$

Ἔςαι ὁ ἐκ τῶν δύο $A : B$ καὶ $\Delta : \Gamma$ σύνθετος, ἴσος τῷ $\Delta : \Phi$. Ἐπεὶ δὲ ὁ σύνθετος ἐκεῖνος λόγος τίθεται εἶναι ἰσότητος, ἔςαι $\Delta = \Phi$. Κἀντεῦθεν $A : B = \Gamma : \Delta$.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΓ.

§. 188. Ἐὰν ἐπὶ τῶν ἀναλογιῶν

$$\mu : \nu = M : N$$
$$\pi : \varphi = \Pi : \Phi$$

Ἅπαντες οἱ ὅροι ἀριθμοὶ ὦσιν, ἔςαι $\mu\pi : \nu\varphi = M . \Pi : N . \Phi$. Ἔςι γὰρ ὁ λόγος $\mu\pi : \nu\varphi$ σύνθετος ἐκ τῶν $\mu : \nu$ καὶ $\pi : \varphi$. Καὶ ὁ $M . \Pi : N . \Phi$, ἐκ τῶν $M : N$ καὶ $\Pi : \Phi$· εἰσὶ δὲ ἔτι οἱ λόγοι τοῖς πρώτοις ἴσοι. Ὅθεν κἂν πλείες ὦσι τοιαίδε ἀναλογίαι, ὁπόσαι δήποτε τὸν ἀριθμὸν, τῶν κατ' αὐτὰς ὅρων κατὰ τὸ δέον ἐπιπολλαπλασιαζομένων, καινή τις ἀνακύψει ἀναλογία (§. 178.)· τετέςιν ἐὰν ᾖ,

$$\mu : \nu = M : N$$
$$\pi : \varphi = \Pi : \Phi$$
$$\varrho : \sigma = P : \Sigma$$
$$\tau : \upsilon = T : \Upsilon$$

ἔςαι $\mu\pi\varrho\tau : \nu\varphi\sigma\upsilon = M . \Pi . P . T : N . \Phi . \Sigma . \Upsilon$. καὶ τοῖς λοιποῖς ὡσαύτως.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΔ.

§. 189. Ἐπιπολλαπλασιασθέντων τῶν κατὰ τὴν ἀναλογίαν ὅρων ἐφ' ἑαυτῶν, προκύπτεσιν οἱ τέτων τετράγωνοι· κἀντεῦθεν οἱ κύβοι, καὶ τέτων αἱ δυνάμεις αἱ καθυπέρτεραι. Τοιγαρεν οἱ τετράγωνοι καὶ οἱ κύβοι τῶν ἀναλογέντων, καὶ αὐτοὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὁμοίως δὲ καὶ αἱ δυνάμεις πᾶσαι αἱ ὁμοιοταγεῖς.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΕ.

§. 190. Οὕτω καὶ τῶν ἐν ἀναλογίᾳ ὄντων τετραγώνων, αἱ ῥίζαι ἀνάλογοί εἰσιν. Ἐὰν γὰρ τῶν

ἀνα

ἀναλόγων τετραγώνων Α, Β, Γ, Δ αἱ ῥίζαι ἐν ὑποθέσει α, β, γ, δ μὴ ὦσιν ἀνάλογον, ἔστω α : β = γ : ε. Ὁ δὲ ε ἀριθμὸς ἔσται τοῦ δ ἤτοι μείζων, ἢ ἐλάσσων. Καὶ ληφθέντων ἄρα τῶν ἀπὸ τῶνδε τετραγώνων, ἔσται Α : Β = Γ : Ε· ὅ, τε Ε τοῦ Δ ἤτοι μείζων, ἢ ἐλάσσων. Οὐκ ἄρα Α : Β = Γ : Δ. Τὸ δ᾽ αὐτὸ καὶ κατὰ τῶν κυβικῶν ῥιζῶν, καὶ τῶν κατὰ τὰς ὑπερτέρας δυνάμεις ὁποιωνοῦν, τὸν αὐτὸν ἂν τρόπον ἀποδειχθείη.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙϚ'.

§. 191. Ἐὰν ᾖ $\mu : \nu = A : B$
$\mu : \nu = B : \Gamma$
$\mu : \nu = \Gamma : \Delta$
$\mu : \nu = \Delta : E$· καὶ οὕτως ἐφεξῆς·

Ἔσται ὁ λόγος Α : Γ, ὁ διπλασίων τοῦ μ : ν, ὁ αὐτὸς τῷ τῶν ἀπὸ μ, καὶ ν τετραγώνων· ὁ δὲ Α : Δ, ὁ τριπλασίων τοῦ μ : ν, τῷ τῶν ἀπὸ τῶν αὐτῶν ἐκείνων κύβων, ὁ αὐτός. Ὁ δὲ Α : Ε, ὁ τετραπλασίων τοῦ μ : ν, ὁ λόγος ἔσται τῶν ἀπὸ τῶν αὐτῶν τετάρτων δυνάμεων. Καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΖ.

§. 192. Ἀνάπαλιν ἄρα ὁ λόγος μ : ν, ὃς ὑποδιπλασίων ἐστὶ τοῦ Α : Γ, λόγος ἔσται ὁ τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν, τῶν ἐκ τῶν ἀριθμῶν ἐκείνων, δι᾽ ὧν ὁ λόγος δίδοται Α : Γ. Ὁ δ᾽ αὐτὸς μ : ν, ὁ ὑποτριπλασίων τοῦ Α : Δ, λόγος ἔσται τῶν κυβικῶν ῥιζῶν, τῶν ἐκ τῶν ἀριθμῶν, ὧν ὁ λόγος ἐστὶν Α : Δ· καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΗ.

§. 193. Ἐπὶ τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας Α : Β = Β : Γ, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ὅρων Α καὶ Γ παραγόμενον, ἴσον ἐστὶ τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου Β . Β (§. 175.). Διὸ καὶ τῶν ἄκρων ἀριθμῶν Α καὶ Γ

 δοθέν-

δοθέντων, εὑρεθήσεται ὁ κατὰ τὴν ἀναλογίαν μέσος Β, ἀπὸ τοῦ παραχθέντος Α . Γ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ὑπεξαγομένης (§. 145.).

ΣΧΟΛΙΟΝ Α.

§. 194. Ταῦτα δὴ τὰ περὶ τῶν ἀναλογιῶν θεωρήματα, ἐκ ἂν εἴποις ὅσης τῆς χρείας ἐσὶ, διὰ πάσης τε τῆς μαθήσεως, καὶ ἐπὶ τοῦ κοινοῦ βίου· καὶ πρὸ τῶν ἄλλων τὸ ἔχατον (§. 175.). Οὐδὲν γὰρ ἁπανταχῇ συνεχέστερον, τοῦ δοθέντων ἀριθμῶν τριῶν προσευρέσθαι δεῖν ἐπὶ τούτοις τὸν τέταρτον, τὸν πρὸς τὸν τρίτον τῶν δοθέντων ἔχοντα, ὡς ὁ δεύτερος πρὸς τὸν πρῶτον· ἢ πέντε δεδομένων, εὑρεῖν τὸν ἕκτον, τὸν πρὸς τὸν πέμπτον ἐν λόγῳ ὄντα συνθέτῳ, ἐκ τῶν λόγων τοῦ τετάρτου πρὸς τὸν τρίτον, καὶ τοῦ δευτέρου πρὸς τὸν πρῶτον· ἢ ἑπτὰ, εὑρεῖν τὸν ὄγδοον, τὸν πρὸς τὸν ἕβδομον ἐν συνθέτῳ λόγῳ τυγχάνοντα, ἐκ τῶν τοῦ ἕκτου πρὸς τὸν πέμπτον, καὶ τοῦ τετάρτου πρὸς τὸν τρίτον, καὶ τοῦ δευτέρου πρὸς τὸν πρῶτον. Καὶ οὕτως ἐφεξῆς· ἃς μεθόδους κοινῇ καλοῦσι τῶν τριῶν, τῶν πέντε, τῶν ἑπτὰ· καίτοι καὶ τῶν ἐννέα, καὶ τῶν ἕνδεκα, ἢ καὶ πλειόνων ἔτι ἀριθμῶν δοθέντων, τὸ τοιόνδε ἔχει προβάλλεσθαι ζήτημα.

§. 195. Τῶν γὰρ ποσῶν, τῶν, ἐκ μονάδος ἡστινοσοῦν ὡρισμένης, κατ᾽ ἀριθμοὺς ἐκφερομένων, αἱ σχέσεις αἱ αὐταὶ εἰσὶ ταῖς ἐν τοῖς ἀριθμοῖς ἀναμφισβητήτως. Ἐὰν οὖν ἄλλοθεν δῆλον ᾖ, τοῦ ζητουμένου ποσοῦ τὸν πρὸς τὰ δοθέντα λόγον, τὸν αὐτὸν εἶναι, τῷ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ πρὸς τοὺς δεδομένους· ὅτι οὐδὲ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς, τὸ ἐν ζητήσει ποσὸν ὀρθῶς ἐκδηλώσει, οὐκ ἄν τις ἐνδοιάσειεν ὅλως. Ἀλλὰ γὰρ τὰς τῶν ποσῶν σχέσεις πρὸς ποσὰ ἄλλα, ἅσπερ ἔχουσιν ἐκδιδάσκειν, οὐχὶ τοῦ Ἀριθμητικοῦ ἐσί. Καὶ ζητητέαι ἄρα αἱ τοιαίδε σχέσεις παρὰ τῶν Ἐπιστημῶν, ὑφ᾽ ὧν τὰ παντοῖα τῶν ποσῶν εἴδη ἰδιαίτερον φιλο-

φιλοκρινεῖται. Καίτοι πολλαὶ ἐξ αὐτῶν καὶ διὰ μόνων τῶν κοινοτέρων ἐννοιῶν πεφύκασι διακρίνεσθαι. Εἰσὶ δ' αἱ τούτων καὶ ἀπὸ βουλῆς ἠρτημέναι εἰσὶν ἀνθρώπων, καὶ ἀπὸ συμβολαίων, καὶ νόμων, ἃ τοὺς περὶ αὐτὰ ἔχοντας λανθάνειν οὐ δύναται.

§. 196. Οὕτως ἐάν τις ποσότης δι' ἀριθμοῦ ἐκφέρηται, πρὸς μονάδα ὡρισμένην τινά, οἷον τὴν Α, ἀναφερομένου· δεήσῃ δὲ τὴν αὐτήν, καὶ δι' ἑτέρου ἀριθμοῦ ἐκδηλῶσαι, τοῦ πρὸς ἑτέραν μονάδα, οἷον τὴν Β, τὴν ἀναφορὰν ἔχοντος· δῆλον δὲ καὶ περὶ ἡστινοσοῦν ἄλλης ποσότητος τῆς Σ, ὅτι ἐξ ἀριθμοῦ μ τῶν Α μονάδων, καὶ ἐξ ἀριθμοῦ ν τῶν Β σύγκειται· Φανερὸν ὅτι ὡς ἔχει μ πρὸς ν, οὕτως ἔσται καὶ ὁ τῶν μονάδων Α ἀριθμὸς, ὁ ἐν τῇ πρώτως ἐνὼν προτεθείσῃ ποσότητι, πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων Β, τὸν συμπληροῦντα τὴν ποσότητα τὴν αὐτήν. Οὕτως ἐπεὶ τρία τάλαντα Αἰγιναῖα, ταυτὸν Ἀττικοῖς πέντε ταλάντοις συνεπλήρουν κεφάλαιον, ἐὰν ποσότης προβληθῇ χρημάτων, 31 Αἰγιναῖα τάλαντα περιέχουσα, ζητηθῇ δὲ ὅσα τὰ Ἀττικὰ ἐν αὐτοῖς, ἔσται ὡς 3 πρὸς 5, οὕτω 31 πρὸς τὸν ζητούμενον τῶν Ἀττικῶν ταλάντων ἀριθμόν· ὃς δῆτα ἔσται

$$\frac{5\times 31}{3}=\frac{155}{3}=51\frac{2}{3}.$$

§. 197. Ἐπεὶ δὲ τῶν ἴσων κλασμάτων τὸν τυχόντα παρονομαστὴν πρὸς τὸν ἀριθμητὴν, ἐν τῷ αὐτῷ δεῖν εἶναι λόγῳ, ἐκ τῶν εἰρημένων φανερόν ἐστιν (§. 162.)· ἐὰν τῷ δοθέντι κλάσματι, κλάσμα ἕτερον ἴσον εὑρεῖν δεήσῃ, οὗ ὁ παρονομαστὴς ἐστὶ δεδομένος, τοῦτο γενήσεται κατ' ἐπιφορὰν τοιάνδε· ὡς ὁ τοῦ δοθέντος κλάσματος ὀνομαστὴς, πρὸς τὸν αὐτοῦ ἀριθμητὴν, οὕτω καὶ ὁ δοθεὶς παρονομαστὴς πρὸς τὸν ζητούμενον ἀριθμητήν. Προκείσθω οὖν ἡ εὕρεσις κλάσματος, ὅπερ ἂν ἴσον εἴη τῷ $\frac{1}{3}$, ἐν παρονομαστῇ τῷ 60, καὶ ἔςαι ὁ τέτε ἀριθμητὴς $= \frac{3 \times 60}{5}$ $= \frac{180}{5} = 36$· ὅθεν δὴ τὸ κλάσμα $\frac{36}{60}$. Ἐὰν ἄρα τὸ $\frac{3}{5}$ πρὸς τὸ Ἀττικὸν τάλαντον ἀναχθῇ, ἕ τὸ ἑξηκοςημόριον μνᾶ, περιέξει τὸ ῥηθὲν κλάσμα μνᾶς 36.

§. 198. Διὰ τέτων ἔν ῥᾶςα, αἱ δι' ἀριθμῶν, διαφερέσας μεγέθει τὰς μονάδας ἐχόντων, δηλέμεναι ποσότητες. οἵας δὴ πολλὰς ὁ καθ' ἡμέραν βίος προβάλλεται, διασημανθήσονται οἱ ἀριθμοῖς μονάδας ἔχεσι τὰς αὐτάς· οἷον χρηματικῆς περιεσίας Κεφάλαιον, τοσάδε μὲν ἀτλικὰ τάλαντα, τοσάςδε δὲ μνᾶς περιέχον, διὰ τἕ ἀριθμἕ τῶν μνῶν, ὅσαι ἐν αὐτῷ περιέχονται. Ἡ γἕν σώματος βάρος λιτρῶν τοσέτων, καὶ τοσῶνδε μὲν ἐγκιῶν, τοσῶνδε δὲ δραχμῶν, διὰ τἕ ἀριθμἕ τῶν δραχμῶν ἐξ ὧν συνέςηκε. Κἀν τοῖς λοιποῖς ὡσαύτως. Δεήσαν δὲ τὸν λόγον δι' ἀριθμῶν μόνων ἐκφέρεσθαι, ἀνάγκη μονάδας ἐν τέτοις νοεῖσθαι τὰς αὐτάς. Ἄλλως γὰρ πλὼ τῶν ἀριθμῶν, καὶ τοῖς τῶν μονάδων μεγέθεσι προσεκλέον· οἷον εἴτις εἶναι φαίη, τὸν τἕ Α ποσἕ λόγον πρὸς τὸ Β, ὃν ἔχεσιν ὀκτωκαίδεκα ςάδια, πρὸς μίλλια τέτλαρα.

§. 199. Τέτων εὖ κατανεεμένων ἡ τῶν τριῶν μέθοδος ῥᾶςα ἐφαρμοσθήσεται, τοῖς περὶ ὠνὴν, καὶ πρᾶσιν, καὶ τὰ ὅμοια συναλλάγματα. Καίγε ἡ τἕ διαπραθέντος εἴδες τιμὴ εὑρεθήσεται, ἐὰν ἑτέρας ποσότητος ὁμοειδἕς ἡ τιμὴ δήλη τυγχάνῃ· ἡ γἕν τῆς τιμῆς δοθείσης, εὑρεθήσεται ἡ τἕ πιπρασκομένε ποσότης· οἷον ἐάντινος ὠνίε λίτραι 5, μνῶν πιπράσκωνλαι 7, πόσε ἄρα ἀπεμπωληθήσονται τἕ αὐτἕ ὠνίε λίτραι 13; ὡς γὰρ λίτραι 5, πρὸς 13, ἕτως αἱ 7 μναῖ, ἡ τἕ πενταλίτρε τιμὴ, πρὸς τὴν τῶν λιτρῶν τῶν 13· ἢ συντόμως $5 : 13 = 7 : \pi$. Ἔςαι δὲ $\pi = \frac{7 \times 13}{5} = \frac{91}{5} = 18\frac{1}{5}$.

§. 200.

§. 200. Εἰ δραχμῶν 7 ϛαθμὸν λιτρῶν 17, τὸ ὅ,τι ἄντις καθ᾽ ὑπόθεσιν εἴποι, ὠνήσατότις, πόσας ἄρα λίτρας, δραχμὰς ἀποτίσας δέκα, ἀποίσεταί; Ἔϛαι ὂν $7 : 10 = 17 : \pi$. Ἀμέλειτοι ὡς δραχμαὶ 7 πρὸς δραχμὰς 10, ὅτω λίτραι 17, πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν λιτρῶν τὸν ζητόμενον. Ἔϛαι δὲ ὅτος

$$\pi = \frac{17 \times 10}{7} = \frac{170}{7} = 24\,\frac{2}{7}.$$

§. 201. Ὁ δὲ τῇ περὶ τῶν πέντε ἀριθμῶν μεθόδῳ ἐϛὶ προσανῆκον, αὕτη ἐν τοῖς τοιοῖσδε ζητήμαμασιν ὑπεργήσει. Μνῶν 330 τὸ Κεφάλαιον, ἐν μησὶ 17, τόκον παρέχεται μνῶν 15· πηλίκος ὂν ἔϛαι ὁ 500 μνῶν τόκος, ἐν μησὶ 30 λογιζόμενος; Ἔϛω δὴ τόκος ὁ ζητόμενος π, ὃν δ᾽ ἀποφέρουσιν αἱ 500 μναῖ, ἐν μησὶ 17, ἔϛω ν. Ἐπειδὴ τοίνυν οἱ ἰσόχρονοι τοκισμοὶ εἰσὶν ὡς τὰ Κεφάλαια· ἀνάπαλιν δὲ, οἱ ἐξ ἴσων Κεφαλαίων εἰσὶν ὡς οἱ χρόνοι· ἔϛαι,

$$330 : 500 = 15 : \nu$$
$$17 : 30 = \nu : \pi$$

Συντεθείσεται δηλονότι (§. 166.) ὁ λόγος τοῦ δοθέντος τόκου 15, πρὸς τὸν ζητόμενον π, ἐκ τῶν λόγων τῶντε Κεφαλαίων $330 : 500$, καὶ τῶν χρόνων $17 : 30$. Καὶ ὅτως ἔϛαι $\pi = 33 \times 17 : 50 \times 30 = 15 : \pi$ (§. 177.). Ἔνθεντοι καὶ $\pi = \frac{50 \times 30 \times 15}{33 \times 17}$ $= 40\,\frac{20}{187}$.

§. 202. Οὐδὲν πλείων ἐν τῇ τῶν ἑπλα λεγομένῃ μεθόδῳ, ἢ καὶ τῶν ἔτι μᾶλλον συνθέτων, ἀπαντᾷ ἡ δυσχέρεια. Οἷον ζητείσθω τὸ ἑξῆς. Κεφάλαιον 3300 μνῶν, ἀποδίδωσιν ἐν 18 μησὶ τόκον 180. Τὸ δὲ Κεφάλαιον 5000, κατετέθη δάνειον ἐν μησὶ μὲν τριάκοντα, ἐπὶ δὲ τόκῳ τῷ αὐτῷ. Ἐν ᾧ ὂν ὁ τοῦ τοσοῦδε Κεφαλαίου τόκος ἀποδίδοσθαι μέλλει, εἴτε δικαϛοῦ ψήφῳ, εἴτε καὶ ἐκείνος συνθήκης, εἰς τοῦτο

 περι-

περιΐσαται τὸ πρᾶγμα, ὡς ἀντὶ 5 μνῶν, ἀποδοθῆναι δεῖν 4· τὸ δ' οὕτως ἀποδοθησόμενον μεταξὺ ἀδελφοῦ τε καὶ ἀδελφῆς τοιᾶδε διανομῇ διαμεριστέον, ὡς ἐκ τῶν τριῶν μερῶν τὸν ἀδελφὸν τὰ δύο καρποῦσθαι. Ῥητέον οὖν πηλίκη ἡ τοῦ ἀδελφοῦ μερὶς ἔσται;

Τίθημι $3300 : 5000 = 180 : \mu$

$$18 : 30 = \mu : \nu$$
$$5 : 4 = \nu : \phi$$
$$3 : 2 = \phi : \pi$$

Ἔσται δὲ μ ὁ τοῦ Κεφαλαίου τόκος τῶν 5000, διὰ χρόνου μηνῶν 18. Καὶ ν ὁ τόκος τοῦ αὐτοῦ Κεφαλαίου, ἐν χρόνῳ μηνῶν 30. Καὶ φ ὁ τόκος ὁ ἐκ ψήφου, ἢ διὰ συνθήκης, ἐπὶ τὸ ἔλαττον ἀνηγμένος. Καὶ π, ἣν ὁ ἀδελφὸς καρπώσεται ἡ μερίς· ὁ δὲ λόγος 180 : π, ἐκ τῶν λόγων σύγκειται τῶν ἐν τάξει καταγεγραμμένων, οὕτως ὥστε εἶναι $3300 \times 18 \times 5 \times 3$, πρὸς $5000 \times 30 \times 4 \times 2$, ὡς 180 πρὸς π (§. 177.). Ἔσται δὲ ἄρα,

$$\pi = \frac{5000 \times 30 \times 4 \times 2 \times 180}{3300 \times 18 \times 5 \times 3} = 242 \tfrac{14}{33}.$$

§. 203. Αἱ δὲ ἀριθμητικαὶ πράξεις, δι' ὧν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εὑρίσκεται, οὐ μικρὸν ἐνίοτε συστέλλεσθαι δύνανται. Τῆς δὲ συστολῆς τὸν τρόπον τοῦ ϛ'. πορίσματος ἐπιχορηγοῦντος, κατ' ἐπιτομὴν ἑτοίμως πάρεστι καθορᾶν, ἐὰν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς π, πρῶτον ἐν κλάσματος εἴδει οὕτω γραφῇ, ὡς ἀεὶ ἐς τόδε ἡμῖν ἐγένετο. Ἑκάστου γὰρ τῶν ἐν τῷ ἀριθμητῇ τοῦ κλάσματος παραγόντων, δι' ἀριθμοῦ τινος διαιρουμένου, τοῦ καί τινα τῶν ἐν τῷ παρονομαστῇ διαιροῦντος, οἱ πολλαπλασιασμοὶ συνεπιτμηθήσονται, καὶ τῆς διαιρέσεως γενομένης, ὅπῃ παρείκοι, εὐπετέστερον τελεσθήσονται. (§. 101.). Οὕτω τόδε τὸ ἀνακύψαν ἔσχατον κλάσμα.

$$\frac{5000 \times 30 \times 4 \times 2 \times 180.}{3300 \times 18 \times 5 \times 3}$$

Ἐὰν

Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ 5000 καὶ 3300, διαιρεθῶσι διὰ 100, ὅ,τε ὅτως ἐν τῷ ἀριθμητῇ ἀνακύπτων 50, καὶ ὁ 5 τῷ παρονομαςῷ διὰ 5· ὁ δὲ τῷ ἀριθμητῷ 180, καὶ 18 τῷ παρονομαςῷ διὰ 18. Καὶ ὁ 30 δὲ τῷ ἀριθμητῷ καὶ ὁ 3 τῷ παρονομαςῷ διὰ 3, εἰς τόδε ἀποκατασήσεται.

$$\frac{10 \times 10 \times 4 \times 2 \times 10}{33 \times 1 \times 1 \times 1}$$

Ὃ συνεξισῶσθαι τῷ $\frac{8000}{33}$, εὔδηλόν ἐςι. Καὶ ἔςιν ἄρα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς $242\frac{14}{33}$.

§. 204. Ὃ δ᾽ ἀνήκει περὶ τῶν μέσων ἀναλόγων, τῶν μεταξὺ δυοῖν ἀριθμῶν δοθέντων, οἱ τοιῦτοι ἐπ᾽ ἀκριβὲς σπανίως ἡμῖν ἀπαντῶσιν. Οὐ γὰρ δηλονότι, εἰμὴ ὅτε διὰ τῷ πολλαπλασιασμῷ τῶν ἄκρων τετράγωνος ὁ γινόμενος (§. 193.)· ὅτω μεταξὺ 2 καὶ 8 μέσος ὁ 4· ὅτι $2 \times 8 = 16$, ὅστις τετράγωνος. Ἀλλ᾽ ὅγε μεταξὺ 2 καὶ 10 παρεμπίπτων μέσος, ἄλογος ἐςίν· ὃς διὰ δεκαδικῶν κλασμάτων ἀποδίδοσθαι μέλλων, πρῶτως ἕξει προκύπτοντας χαρακτῆρας 3, 473, οὓς κατὰ μικρὸν προϊούσης τῆς ῥίζης, δυνατὸν ἐπαύξειν ἐπ᾽ ἄπειρον.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.

§. 205. Ἐὰν λόγον συντιθέναι δέῃ ἐκ τοιωνὶ τῶν τριῶν, Α:Β, Γ:Δ, Ε:Ζ, ὁ λόγος ὁ σύνθετος σημειωθήσεται τῷδε τῷ τρόπῳ Α × Γ × Ε : Β × Δ × Ζ. Καὶ οἱ λοιποὶ πάντες ὡσαύτως. Ἐπὶ μὲν γὰρ τῶν ἐν ἀριθμοῖς, ὅπως οἱ τῷ συνθέτῳ, ἐκ τῶν ἐν τοῖς ἁπλοῖς πεφύκασιν ἀνακύπτειν (§. 178.) φανερὸν γίνεται· Ἔνθα δὲ οἱ ὅροι Α, Γ, Ε, καὶ Β, Δ, Ζ ὀκ ἀριθμοί, πολλαπλασιασμὸς μὲν κυρίως εἰπεῖν ὀδεὶς χωρεῖ, τηρητέον δὲ ὅμως κἀπὶ τότων τὸν αὐτὸν τῆς καταγραφῆς τρόπον, πρὸς γῶν ὑπόμνησιν, εἰ μηδὲν ἄλλο, ὅτι τῶν ἐν τοῖς ὅροις ἡγεμένων Α, Γ, Ε, καὶ ἑπομένων Β, Δ, Ζ, καθ᾽ οἱανδήποτε μεταληφθέντων τάξιν, ὁ αὐτὸς λόγος συνίςαται (§. 180.).

ΤΜΗΜΑ

ΤΜΗΜΑ ΠΕΜΠΤΟΝ
ΠΕΡΙ
ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 206.

Στίχος ἐςὶν ἀριθμῶν πληθὺς, κατάτινα κοινὸν νόμον ἀλλήλοις ἐφεπομένων. Λέγεται δὲ καὶ πρόοδος. Καὶ Ἀριθμητικὴ μὲν ἡ πρόοδος καθ᾽ ἣν τῶν ἡγȣμένων ἀριθμῶν ἕκαςος, τȣ̃ ἀμέσως ἐφεπομένȣ ἐπίσης διαφέρων ἐςί. Γεωμετρικὴ δὲ καθ᾽ ἣν ὁςτιςȣ̃ν τῶν ἡγȣμένων ὅρων, πρὸς τὸν ἀμέσως αὐτῷ ἐφεπόμενον, τὸν αὐτὸν ἀείποτε λόγον ἔχων ἐςίν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 207. Παρὰ δὴ τȣ́τȣς καὶ ςίχοι ἕτεροι ὑπὲρ ἀριθμὸν ἂν συςαῖεν, ἐν οἱῳδήποτε νόμῳ τεθέντι, καθ᾽ ὃν ἂν χωροίη τὰ τῆς προόδȣ. Μεταξὺ μὲν ȣ̃ν τῶν ἀριθμητικῶν καὶ ὅδε ὁ ςίχος ἐςὶν 1, 2, 3, 4, 5, 6 κξ. ἐν ᾧ οἱ ἐκκείμενοι ἀριθμοὶ φυσικῇ ἀλλήλȣς τῇ τάξει ἐπιδιαδέχονται, ἥ, τε ἐν δυσὶ τȣ́των ἑκάςοις διαφορὰ ἀμέσως ἐκτασσομένων, ἐςὶ 1. Ἐκ τȣ̃ αὐτȣ̃ δὲ γένȣς ϗ ὁ ςίχος 0, 2, 4, 6, 8, 10, κξ. καὶ ὅδε 1, 3, 5, 7, 9, 11, κξ. ἐν οἷς ἡ τῶν ἑξῆς ἀμέσως διαδεχομένων ὅρων διαφορὰ ἐςὶ 2. Καὶ ἄλλοι δὲ ἀνάριθμοι. Στίχοι δὲ γεωμετρικοὶ οἵδε· 1, 2, 4, 8, 16, 32, κξ. Καὶ 1, 3, 9, 27, 81, 243, κξ. Καὶ 2, 3, $\frac{9}{2}$, $\frac{27}{4}$, $\frac{81}{8}$, $\frac{243}{16}$· καὶ ὑπὲρ ἀριθμὸν ἄλλοι.

ΠΟΡΙΣ-

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 208. Ἡ μὲν ἂν ἀριθμητικὴ πρόοδος δίδοται, ἑνός τινος τῶν κατ᾽ αὐτὴν ὅρων διδομένε, καὶ τῆς ἀπὸ τῆ προσεχῆς ὅρε διαφορᾶς διοριζομένης. Ἐντεῦθεν γὰρ τῆς διαφορᾶς προστιθεμένης, ἢ ἀφαιρεμένης, ἅπαντες παράγεσθαι οἱ ἑξῆς ὅροι δυνήσονται, οἵτε τῷ δοθέντι ὅρῳ ἑπόμενοι, καὶ οἱ τέτε ἡγέμενοι, προαγομένης κατὰ τὸ συνεχὲς ἑκατέρωθεν τῆς προόδε ἐπ᾽ ἄπειρον· ὅτω δοθέντος τῆ ὅρε 7, καὶ τῆς διαφορᾶς τεθείσης 3, προκύψεσιν ὅροι, οἱ μὲν τῆ 7 μείζονες 10, 13, 16, 19, 22, κ.ξ. οἱ δὲ ἐλάσσονες, 4, 1, − 2 − 5 − 8, κ.ξ. Δυνατὸν δὲ τὸν διδόμενον ὅρον καὶ κλασματικὸν εἶναι, ἢ ἄλογον· ὁμοίως δὲ καὶ τὴν διαφοράν.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Β.

§. 209. Ἔστω Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ μέρος ἀριθμητικῆς προόδε εἰς ἄπειρον ἑκατέρωθεν προακλέας ὁποιασεν. Ἔσαι δὲ ἡ τῶν ὅρων Α καὶ Γ διαφορὰ, ἐν οἷς ἂν ὅρος εἷς ὁ Β μεσολαβοίη, διπλῆ τῆς τῶν Α, καὶ Β, ἢ Β καὶ Γ. Ἡ δὲ τῶν ὅρων Α καὶ Δ, ἐν οἷς οἱ μεσολαβῆντες δύο, τριπλῆ. Ἡ δὲ τῶν Α καὶ Ε, ἐν οἷς τρεῖς, τετραπλῆ. Καὶ ὅτως ἐφεξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 210. Ἔνθεντοι ἐὰν ἀπὸ τῆς ἀριθμητικῆς προόδε ὑπεξενεχθῶσιν ὅροι τινες ὁποιοιποτῦν, ὧν μέντοι ἀπὸ τῆ προσεχῆς εἴη ἐπίσης ἕκασος ἀφιστάμενος, παρέξεσι δὴ καὶ ὅτοι παραπλησίαν τὴν πρόοδον· οἷον ἐπὶ τῆς προόδε, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, προσληφθέντων τῶν 1, 4, 7, 10, 13, 16.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§ 211. Δυοῖν ὁποιωνῦν ὅρων δοθέντων τῆς ἀριθμητικῆς προόδε, καὶ τῆ ἀριθμῆ τῶν ὅρων τῶν ἐν

τοῖς

τοῖς δοθεῖσι μεσολαβέντων, δεθήσεται καὶ ἡ πρόοδος· οἷον ἐὰν ᾖ αὕτη, Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ κξ., ἧς οἱ ὅροι συνεχῶς μεγεθύνοιντο καθ' ὑπόθεσιν, τῷ λόγῳ τῆς ἀπὸ τε ὅρε Α ἀποςάσεως· δοθῶσι δὲ οἱ ὅροι Α καὶ Ζ, ὅ,τε ἀριθμὸς τῶν ἐν τέτοις μεσολαβέντων = 4, ἔςαι (§. 209.) $Β - Α = \frac{Ζ - Α.}{5}$ τοιγαρεν δοθήσεται Β − Α. Διὸ τῆς τῶν ἔγγιςα ὅρων διαφορᾶς ταύτης τῷ πρώτῳ Α, προςεθείσης, προκύψει ὁ δεύτερος Β, κἀντεῦθεν καὶ ὁ Γ ὁμοίως, καὶ οἱ λοιποί.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 212. Ἐντεῦθεν ἐμπαραβύεσθαι, καὶ ἡ ἀριθμητικὴ δυνήσεται πρόοδος. Τὸ δὲ ἐμπαραβύεσθαι, τὸ δυοῖν ἐςὶ μεταξὺ τῶν κατ' αὐτὴν ὁποιωνεν ὅρων, ὅρες ἄλλες ἐμπαρεισάγεσθαι, ὑφ' ὧν ἂν μετὰ τῶν προτέρων, καινήτις πρόοδος ἀριθμητικὴ ἀναφύοιτο. Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἀνιέσης προόδε Α, Β, Γ, ἰὼ ἀνετυπωσάμεθα, μεταξὺ δυοῖν ὅρων Α καὶ Β, δεήσῃ τρίτον ἐμπαραβύσαι, ἔςαι ἡ τέτε ἀπὸ τε Α διαφορά, ἥδε $\frac{Β - Α}{2}$, ἥτις τῷ ὅρῳ Α ἐπιπροςεθεῖσα, τὸν μέσον παρέξεται $= Α + \frac{Β}{2} - \frac{Α}{2} = \frac{Α}{2} + \frac{Β}{2}$, ἤτοι $\frac{Α + Β}{2}$, τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ὅρων Α + Β.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ϛ'.

§. 213. Ἡ δὲ δὴ γεωμετρικὴ πρόοδος δίδοται, δοθέντος ὁτινοσεν τῶν ὅρων, καὶ τε λόγε ὃν ἔχει πρὸς τὸν αὐτῷ ἔγγιςα. Τε γὰρ τοιεδε λόγε διὰ πάσης τῆς προόδε τε αὐτε σωζομένε (§. 206.) δυνατὸν τὸν τῷ δοθέντι, ἢ εὑρεθέντι προσεγγίζοντα ὅρον, διὰ τε τῶν ἀναλογιῶν κανόνος λαμβάνεσθαι· οἷον ἐὰν ὁ λόγος ᾖ 3 : 5, ὑποκέηται δ' ὅρος ὁ 45, ἔςαι ἔσται δὴ ὁ τούτῳ προσεχὴς $\frac{45 \times 5}{3} = 75$. Ὁ δὲ τούτῳ ἐφεπόμενος $\frac{75 \times 5}{3} = 125$. Καὶ οὕτως ἐφεξῆς· τοῦ δὲ ὅρου 45 ἐπὶ τῆς προόδου ἡγεῖται $\frac{45 \times 3}{5} = 27$. Καὶ τούτου δὲ $\frac{27 \times 3}{5} = \frac{81}{5}$. Καὶ τούτου δ' ἔτι $\frac{243}{25}$. Καὶ ἔτι $\frac{729}{125}$, καὶ $\frac{2187}{625}$ κξ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ.

§. 214. Ἐὰν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, γεωμετρικῆς τινος προόδου μέρος ᾖ, τῆς ἑκατέρωθεν ἐς ἄπειρον προελθουσομένης, ἔσται ὁ λόγος Α : Γ διπλασίων τοῦ Α : Β· καὶ ὁ Α : Δ, τριπλασίων· καὶ ὁ Α : Ε, τετραπλασίων· καὶ οὕτως ἐφεξῆς (§. 167.)· ὡσαύτως δὲ, καὶ ὁ λόγος Ζ : Δ, διπλασίων ἔσται τοῦ Ζ : Ε, ἢ Β : Α· ὁ δὲ Ζ : Γ, τριπλασίων· ὁ δὲ Ζ : Β, τετραπλασίων· ὁ δὲ Ζ : Α, πενταπλασίων. Καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ Η.

§. 215. Ἐπειδὴ δὲ οἱ τοῦ αὐτοῦ λόγου διπλασίονες, τριπλασίονες, καὶ ἁπλῶς οἱ ἰσοπολλαπλασίονες, ὁποῖοι δ' ἂν ὦσιν, ἀλλήλοις ἴσοι εἰσὶν (§. 82.), ἐὰν ἐκ τῆς γεωμετρικῆς προόδου, ἐξαιρεθῶσιν ὅροι οἵτινεσοῦν, ἐπίσης ἀλλήλων ἀπέχοντες, δώσουσι δὴ καὶ οὗτοι πρόοδόν τινα γεωμετρικήν· οὕτως ἐὰν ἀπὸ τῆς προόδου $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16, 32, ὑπεξαιρεθῶσιν οἱ παρ' ἕνα ἐναλλὰξ, ἀναφυήσεται καινή τις πρόοδος γεωμετρική, ἥδε· $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$, 2, 8, 32.

ΠΟΡΙΣΜΑ Θ.

§. 216. Δυοῖν δοθέντων ὅρων ὁποιωνοῦν, τῶν ἐπὶ τῆς γεωμετρικῆς προόδου, συνάμα τῷ ἀριθμῷ τῶν ὅρων, τῶν ἐν αὐτοῖς διειλημμένων, διοριωθήσεται μὲν

τὰ

τὰ τῆς προόδου, εὑρεθῆναι δὲ οὐ δυνήσεται, εἰ μὴ παρὰ τοῦ διὰ τῶν διπλασιόνων, τριπλασιόνων, καὶ ἁπλῶς τῶν ἰσοπολλαπλασιόνων ὁποιωνοῦν εἰδότος, τοὺς ἁπλοῦς τῶν λόγων ἐξευρίσκειν, ὧν ἐκεῖνοι πολλαπλασίονες εἰσί. τουτέστι τοὺς τῶν δοθέντων ὑποδιπλασίονας, ὑποτριπλασίονας, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· ὁ δ' αὐτὸς καὶ τὴν δοθεῖσαν γεωμετρικὴν πρόοδον ἐμπαραβύσει, ὁπόσοι ἂν ποτ' αὐτῷ ἐπιταχθεῖεν, μεταξὺ δυοῖν ὁποιωνοῦν τῶν ἐν αὐτῇ ὅρων, τοσούτους ἐπεμβαλὼν ὅρους ἑτέρους (§. 192.).

ΠΟΡΙΣΜΑ I.

§. 217. Ἢν δὲ γεωμετρικὴν πρόοδον ἐμπαραβύσαι δέοι, ἑνὸς μόνου ὅρου, μεταξὺ δυοῖν ἑκάστων τῶν ἐν αὐτῇ ἐπεμβαλλομένου, τοῦτο διὰ τῶν ἀποδειχθέντων ῥᾷστα γενήσεται, μόνου τοῦ ἀναλόγου μέσου ἐκείνων μεταξὺ παρεισαγομένου (§. 193.). Οὕτω τὴν πρόοδον $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$, 2, 8, 32 ἐμπαραβύσαι ἔνι, τῇ μεταξὺ τῶν ὅρων $\frac{1}{8}$ καὶ $\frac{1}{2}$ παρεμπλώσει τοῦ ὅρου $\frac{1}{4}$, ὃς ἐκείνων ὁ μέσος ἐστὶν ὁ ἀνάλογος· μεταξὺ δὲ τῶν $\frac{1}{2}$ καὶ 2, τοῦ 1, τοῦ καὶ αὐτοῦ κατ' ἀναλογίαν ἐν τούτοις μεσιτεύοντος. Καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Εἰ μὴ δόξειε μᾶλλον τοῦ λόγου τοῦ μεταξὺ τοῦ ἡγουμένου τε καὶ τοῦ ἑπομένου ἐπὶ τῆς προόδου τῆς ἤδη ἐμπαραβυσθείσης (ὃς ὧδε ἐστὶν 1 : 2) διὰ τοῦ πρώτως εὑρεθέντος ὅρου $\frac{1}{4}$, καὶ τοῦ ἡγουμένου $\frac{1}{8}$, ἢ τοῦ ἑπομένου $\frac{1}{2}$, ἤδη δοθέντος, εἶτ' ἀπ' ἐκείνου ἐφεξῆς τοῦ ὅρου τὴν πρόοδον προαγαγεῖν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 218. Ἐὰν ὁ λόγος A : B ἐξ ἄλλου ἀνακύπτων τοῦ α : β νοῆται, τούτου διπλασιαζομένου, τριπλασιαζομένου, ἢ ὁπωσοῦν ἄλλως πολλαπλασιαζομένου, τὸ ἐπίσημον τοῦ ὑψώματος τοῦ λόγου A : B, πρός γε τὸν προσληφθέντα α : β, Λογάριθμος τοῦ λόγου ἐκείνου λέγεται τοῦ A : B· ὡς ἐὰν ὁ λόγος A : B

διπλα-

διπλασίων ᾖ τȣ̃ α : β, ἢ, ἐὰν ἐκεῖνος τȣ́τȣ δὶς ὑπέτερος ᾖ, ἔςαι λογάριθμος τȣ̃ λόγȣ Α : Β, ὁ ἀριθμὸς 2. Ἐὰν δὲ Α : Β πενταπλασίων ᾖ τȣ̃ α : β· ἢ ἐὰν τὸ τȣ̃ Α : Β ὕψωμα πενταπλάσιον ᾖ τȣ̃ ὑψώματος τȣ̃ α : β, ἔςαι ὁ λογάριθμος τȣ̃ Α : Β, ὁ ἀριθμὸς 5. Καὶ ȣ̃τω κἀν τοῖς λοιποῖς.

§. 219. Ἐὰν δὲ ἐπὶ τȣ̃ λόγȣ Α : Β, τȣ̃ ȣ̃τως ἐκ τȣ̃ α : β προκύπτοντος, ὁ μὲν Α ἀριθμὸς ᾖ, ὁ δὲ Β μονὰς, ὁ τȣ̃ λόγȣ τȣ̃δε Α : Β Λογάριθμος, καὶ τȣ̃ ἀριθμȣ̃ Α Λογάριθμος εἰρήσεται ὁ αὐτός.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α·

§. 220. Ἔνθεντοι, ἐὰν ἐπὶ τῆς γεωμετρικῆς προόδȣ τῆσδε, Α : Β : Γ : Δ : Ε : Ζ ὁ λόγος ἑκάςȣ τῶν ὅρων πρὸς τὸν ἑπόμενον, Α : Β, ἢ Δ : Ε, ἢ Ε : Ζ, ὡς ἁπλȣ̃ς νομίζηται, ἔςαι λογάριθμος τȣ̃ λόγȣ, παντὸς ἡγȣμένȣ Α πρὸς τὸ, παρ᾽ ἓν, ἑπόμενον Γ, ὁ ἀριθμὸς 2. Καίγε ὁ τȣ̃ αὐτȣ̃ ὅρȣ Α, πρὸς τὸν ἀπ᾽ αὐτȣ̃ τρίτον Δ, ὁ 3 (§. 214.). Καὶ ἐν γένει ληφθέντος τȣ̃ λόγȣ δυοῖν ὡντινωνȣ̃ν ἐπὶ τῆς προόδȣ ὅρων Α : Ζ, τῷ λογαρίθμῳ τȣ̃ τοιȣ̃δε λόγȣ Α : Ζ διασημανθήσεται, πηλίκος ὅρος τῶν ἐν τῇ προόδῳ, ὁ τȣ̃ λόγȣ ἑπόμενος ἐςὶν ἀπὸ τȣ̃ ἡγȣμένȣ· ἤ, πηλίκοις ὅρων διαςήμασιν ὁ Ζ ἀπὸ τȣ̃ Α ἀφέςηκε. Κἀντεῦθεν ἕπεται καὶ τὸ αὐτὸ ἔσεσθαι μέγεθος τȣ̃ λογαρίθμȣ τȣ̃ λόγȣ Ζ : Α, τῷ τȣ̃ ἀνάπαλιν Α : Ζ· οἱ γὰρ ἀπὸ Ζ πρὸς Α κατὰ τὴν πρόοδον ὅροι, τοῖς ἀπὸ Α πρὸς τὸ Ζ ἰσάριθμοι εἰσίν. Ἀλλ᾽ εἴπερ ἄρα ὁ ὅρος Ζ ἕπεται τῷ Α, ὁ Α δήπȣ τȣ̃ Ζ ἡγήσεται. Καὶ ἔςιν ἡ ὁδὸς καθ᾽ ἣν ἀπὸ τȣ̃ Ζ ἐπὶ τὸ Α ἐπάνιμεν, ὑπεναντία τῇ καθ᾽ ἣν ἀπὸ τȣ̃ Α ἐπὶ τὸ Ζ προβαίνομεν. Τοιγαρȣ̃ν τῶν ȣ̃τως ἐχȣσῶν ποσοτήτων τῆς καταςάσεως διὰ τῶν σημείων τῶνδε +, −, διακρίνεσθαι φιλȣ̃σης (§. 42.). Ἐὰν ὁ λογάριθμος τȣ̃ λόγȣ Α : Ζ λέγηται + 5, ὁ τȣ̃ ἀνάπαλιν Ζ : Α ἔςαι − 5· καὶ καθόλȣ, οἱ δυοῖν λόγων λογάριθμοι, ὧν ἅτερος θατέρȣ ἀνάπαλιν ἐςὶ, μεγέθει μὲν ȣ̓δαμῶς, μόνοις δὲ τοῖς σημείοις διοίσȣσιν, οἷς τὰ θετικὰ τῶν ἀποφατικῶν ἀντιδιαςέλλεται. Διὸ καὶ τȣ̃ λογαρίθμȣ τȣ̃ λόγȣ Α : Β, ἢ Δ : Ε ὄντος + 1, ὁ τȣ̃ Β : Α, ἢ Ε : Δ, ἔςαι − 1.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 221. Ἐὰν ἐπὶ τῆς γεωμετρικῆς προόδȣ τῆς ἀπὸ μονάδος αὐξανȣ́σης, ἑκάςῳ τῶν ὅρων ἀριθμοὶ προσεπιγραφῶσιν, ὡς ἐπὶ τȣ̃ ἐφεξῆς Σχήματος·

1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1024	10
2048	11
4096	12
8192	13
16384	14
32768	15
65536	16
131072	17
262144	18
524288	19
1048576	20

νοῆται δὲ ὁ ἑκάςȣ τῶν ἐπὶ τῆς προόδȣ ὅρων λόγος, πρὸς τὸν ἔγγὺς ἡγȣ́μενον ἁπλȣ̃ς εἶναι, ἔςαι ὁ ἀριθμὸς ὁ τῷ ὅρῳ προσεπιγραφεὶς, λογάριθμος αὐτȣ̃γε τȣ́τȣ τȣ̃ ὅρȣ, ἅτε δὴ λογάριθμος ὢν τȣ̃ λόγȣ, ὃν ὁ τοιόσδε ὅρος πρὸς τὴν μονάδα ἔχων διατελεῖ. Οὕτως ȣ̓̃ν ὁ λογάριθμος τȣ̃ ὅρȣ 2, ἐςὶ 1· ὁ δὲ τȣ̃ 32, ἐςὶ 5· ὁ δὲ τȣ̃ 524288, ἐςὶ 19.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 222. Τοῦ δὲ λόγου, ἑκάστου τῶν ἐν τῇ προόδῳ ὅρων πρὸς ἕνα τινὰ τῶν ἡγουμένων, ὁ λογάριθμος προκύψει, τοῦ κατὰ τὸν ἐλάσσονα τῶν ὅρων, ὃς ἐν τῇ προόδῳ ἡγεῖται, λογαρίθμου, ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸν μείζονα, ὃς ἕπεται, ὑφαιρουμένου. Ἐὰν οὖν λ μὲν ᾖ τοῦ λογαρίθμου ἐπίσημον, Μ δὲ ὁ κατὰ τὴν πρόοδον μείζων ὅρος, Ε δὲ ὁ ἐλάσσων, ἔσται δή, λ (Μ : Ε) = λΜ − λΕ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 223. Τοῦ δὲ λόγου Ε : Μ, ὃς ἂν ᾖ τοῦ προτέρου ἀνάπαλιν, ἐπειδὴ ὁ λογάριθμος ἴσος ἐστὶ τῷ τοῦ Μ : Ε ἀποφατικῶς ληφθέντι (§. 220.), καὶ αὐτοῦ ὡσαύτως ὁ λογάριθμος προκύψει, ἐὰν ὁ τοῦ ὅρου Μ λογάριθμος τοῦ ἐν τῷ λόγῳ ἑπομένου, τῷ σημείῳ − μετὰ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἐν τῷ λόγῳ ἡγουμένου Ε ὅρου, συναφθῇ· ὥστε γενέσθαι λ (Ε : Μ) = λΕ − λΜ. Ἡ γάρτοι διαφορὰ λΕ − λΜ, τῇ προτέρᾳ λΜ − λΕ, ἴση μὲν ἐστιν, ἀλλ' ἐπεὶ λΜ > λΕ, τὸ μὲν λΕ − λΜ ἀποφατικὸν ἔσται, τὸ δὲ λΜ − λΕ, θετικόν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 224. Ἔνθεν τοι τῶν ἐν (§. 221.) προσληφθέντων, ὁποῖος δ' ἂν ᾖ ὁ λόγος Α : Β, ἔσται ἐν γένει ὁ ἐκείνου λογάριθμος, ἤτοι λ (Α : Β), ἴσος τῷ προκύπτοντι ἐὰν ληφθῇ λΑ − λΒ. Ἀλλὰ μὴν Α : Β = $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$: 1 (§. 164.). Ἔστι δὲ ὁ λογάριθμος τοῦ λόγου $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$: 1, λογάριθμος τοῦ κλάσματος $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ (§. 219.). Ἄρα καὶ ὁ τοῦ κεκλασμένου ἀριθμοῦ λογάριθμος προκύψει, ἐὰν τῷ λογαρίθμῳ τοῦ ἀριθμητοῦ λΑ, ὁ τοῦ παρονομαστοῦ λΒ, διὰ τοῦ σημείου − ἐπισυναφθῇ, ὧδε λΑ − λΒ. Καὶ ἔσαι ὁ λογάριθμος ἕτος καταφατικὸς, ἐὰν Α > Β, τετέσιν ἐὰν νόθον τὸ κλάσμα ῇ· ἀποφατικὸς δὲ, ἐὰν Α < Β· τετέσιν ἐὰν ῇ τὸ κλάσμα γνήσιον. Ἐν γένει δὲ $\lambda \frac{A}{B} = - \lambda \frac{B}{A}$. ὅτι $\lambda \frac{A}{B} = \lambda (A : B)$, καὶ $\lambda \frac{B}{A} = \lambda (B : A.)$.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 225. Ἐὰν πρόοδος γεωμετρικὴ ἄλλητε καὶ ἄλλη ληφθῇ, παραπλησίως καὶ οἱ λογάριθμοι τῶν αὐτῶν λόγων τραπήσονται. Καὶ ἔσιν ἄρα ἐπέκεινα πέρατος ἃ τῶν λογαρίθμων κατασκευασθῆναι δυνάται τὰ συσήματα. Οὕτως ἐὰν ἀντὶ τῦ 1 : 2 λόγος ἁπλῦς τεθῇ ὅδε 1 : 4, ὥσε πρόοδον ἀνακύπτειν τὴν 1 : 4 : 16 : 64 : 256, ὁ λογάριθμος τῦ 256, ὃς ἐπὶ τῦ ἄχρι τῦδε ὑποκειμένυ συσήματος ἦν 8, ἔσαι ἤδη 4. Καὶ ἐν γένει οἱ τῦ προτέρυ συσήματος λογάριθμοι, τῶν τῦ καινῦ τῦδε, ἔσονται διπλοῖ· λέγω δὴ τῶν τοῖς αὐτοῖς ἀριθμοῖς προσεπανηκόντων.

§. 226. Οἱ λογάριθμοι οἱ Βριγγιανοὶ (ὡς ἀπὸ τῦ εὑρόντος) καλέμενοι, οἷς χεδὸν μόνοις τυγχάνομεν χρώμενοι, ἐκ τῆς γεωμετρικῆς ἐλήφθησαν προόδυ, καθ' ἣν ἀπὸ μονάδος ἄχρι 10, ὅροι ἐμφιλοχωρῦσιν 10000000. Διὸ καὶ ἰσάριθμοι ἔσονται οἱ ὅροι, καὶ ἀπὸ 10, ἄχρις 100· ἀπὸ 100, ἄχρι 1000· καὶ ὕτως ἐφεξῆς. Καὶ ἔσαι τῦ μὲν ἀριθμῦ 10 λογάριθμος, ὁ 10000000· τῦ δὲ 100, ὁ 20000000· τῦ δὲ 1000, ὁ 30000000. Καὶ ὕτως ἐφεξῆς. Πολλῷ δὲ προσφυέσερον εἰρήσεται ἐπὶ τῦ τοιῦδε συσήματος, 1 μὲν εἶναι τὸν λογάριθμον τῦ ἀριθμῦ 10, 2 δὲ τῦ 100, 3 τῦ 1000, καὶ ὕτως ἐφεξῆς. Οὗ δὴ κειμένυ οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν τῶν κατὰ πρόοδον δεκαδικὴν 1, 10, 100, 1000, 10000, 10000, ἀριθμοὶ εἰσὶν ὁλοχερεῖς, φυσικῇ τάξει προβαίνοντες 0, 1, 2, 3, 4· ὅ,τε λογάριθμος τοσαύτας περιείληφε μονάδας, ὁπόσα τῷ ἀριθμῷ, ᾧ προσανήκει, τὰ μηδενικὰ σημεῖα εἰσίν. Οἱ δὲ τῶν ἀριθμῶν λογάριθμοι τῶν μεταξὺ γινομένων, κλάσματα γίνονται δεκαδικά· οἱ μὲν δὴ τοῖς μεταξὺ 1 καὶ 10 ἀριθμοῖς ἐπανήκοντες, πάντες μονάδος ἐλάσσονες· οἱ δὲ τοῖς μεταξὺ 10 καὶ 100, μονάδος μὲν μείζονες οἱ πάντες, 2 δὲ ἐλάσσονες· οἱ δὲ τοῖς μεταξὺ 100 καὶ 1000, 2 μὲν μείζονες, 3 δὲ ἐλάσσονες· ὥστε κατὰ γένος τὸν ἀριθμὸν τῶν ὁλοχερῶν μονάδων, τῶν ἐμπεριεχομένων τῷ λογαρίθμῳ, παρὰ μονάδα ἴσον εἶναι τῷ ἀριθμῷ τῶν χαρακτήρων, δι᾽ ὧν ἐκδηλοῦνται αἱ ὁλοχερεῖς μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ, ὥπερ ὁ λογάριθμος προσήκων ἐστί. Καὶ εἶναι παρ. χάρ. τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ 30857, 234, μείζονα μὲν ἢ 4, ἐλάσσονα δὲ ἢ 5· οἱ γὰρ χαρακτῆρες οἱ ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ τὰς ὁλοχερεῖς μονάδας διασημαίνοντες (οὐ γὰρ καὶ οἱ τὰ τούτων δεκατημόρια) εἰσὶ πέντε.

§. 227. Εἴωθε δὲ ὁ ἀριθμὸς οὗτος τῶν ἐν τῷ λογαρίθμῳ ὁλοχερῶν μονάδων, τὸ τοῦ λογαρίθμου χαρακτηριστικὸν ὀνομάζεσθαι. Καὶ τόδε ἄρα ἀείτοιγε δίδοται τοῦ ἀριθμοῦ διδομένου. Δοθέντος δὲ τοῦ χαρακτηριστικοῦ, καὶ τῶν τοῦ ἀριθμοῦ χαρακτήρων, δίδοται δὴ ὁ τῶν ἁπλῶν τόπος μονάδων, ἃς ἀντιδιαστέλλειν δέον διὰ τοῦ κόμματος (§. 22.).

§. 228. Τὸ σύστημα, περὶ οὗ ὁ λόγος, τῶν λογαρίθμων ἐκ τῆς προόδου 1, 10, 100, 1000 συνέστη κατὰ τὰ ἀνωτέρω (§. 212. 216.) σημειωθέντα, ἐπιτετμημένου, ὅπη παρῆκε, τοῦ ὑπολογισμοῦ· ὁ δὲ τρόπος ὧδε ἂν νοηθείη.

§. 229. Προκείσθω ἡ τῶν ἀριθμῶν εὕρεσις, τῶν μεταξὺ 10000 καὶ 100000 παρεμπιπτόντων κατὰ παραβυσμὸν τῆς γεωμετρικῆς προόδου. Καὶ δὴ καὶ

 ἡ τῶν

ἢ τῶν ἀντιϛοιχέντων τοῖς ἀριθμοῖς ἐκείνοις λογαρίθμων. Ζήτει δὴ μεταξὺ τῶν δοθέντων ὅρων τὸν μέσον ἀνάλογον, ὃς ἔϛαι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τȣ̃ ἀριθμȣ̃ 1000000000 = 31622. Ζήτει δὲ καὶ τὸν ἀντιϛοιχȣ̃ντα αὐτῷ λογάριθμον, ὃς ἔϛαι ὁ μεταξὺ 4 καὶ 5 μέσος ἀριθμητικὸς, ἤτοι ὁ $\frac{4+5}{2} = 4,5$.

§. 230. Λεγέσθωσαν τῶν ἄκρων ὅρων ὁ μὲν 10000 Α, ὁ δὲ 100000 Β, ὁ δὲ μέσος Γ. Λαβὲ δὴ ἐφεξῆς τὸν μέσον ἀνάλογον τὸν ἐν τοῖς Α καὶ Γ, ἐξενεχθείσης ἐκ τȣ̃ ἀριθμȣ̃ 316220000 τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, ἥτις ἔϛω Δ = 17783. Καὶ παρασώσαψον δὲ καὶ αὐτῇ τὸν λογάριθμον, ὃς ἂν ἀριθμητικὸς δηλαδὴ μέσος εἴη τῶν 4 καὶ 4, 5· ἡλίκος ὁ 4, 25. Ἔπειτα δὲ λαβὲ καὶ τὸν μεταξὺ Γ καὶ Β μέσον τὸν Ε, ἐκ τȣ̃ ἀριθμȣ̃ 3162200000 τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἐξελόμενος, ἥτις ἔϛαι 56233, ᾗ λογάριθμος ἀντιϛοιχήσει, ὁ ἀριθμητικῶς μέσος τῶν 4, 5 καὶ 5, ὃς ἔϛαι ὁ 4, 75· Οὕτω δὴ καὶ μεταξὺ Α καὶ Δ μέσον ἀνάλογον λαβὲ τὸν Ζ = 13335. Καὶ μεταξὺ δὲ Δ καὶ Γ μέσον ἀνάλογον τὸν Η = 23713. Καὶ μεταξὺ Γ καὶ Ε μέσον τὸν Θ = 42169. Καὶ μεταξὺ τȣ̃ Ε καὶ Β τὸν Ι = 74988.

§. 231. Ἡμῖν ȣ̃ν ταῦτα εἰς δεῖγμα ἀποχρήσει. Εἰ δέ τις ἐθέλοι τῶν λογαρίθμων τȣ̀ς πίνακας καταγράψαι, τῇ μεθόδῳ ταύτῃ χωρεῖν ὀφείλει, ὑπεξάγων ἀεὶ τὰς ῥίζας, ἄχρις ȣ̃ πρόοδος αὐτῷ ὑπανακύψῃ, καθ᾽ ἣν ἕκαϛος τῶν ὅρων τὰ ἔγγιϛα καθεξῆς ἐφεπομένῳ, μικρȣ̃ δεῖν, καὶ ἴσος ἂν εἴη, τῆς διαφορᾶς παρὰ τὴν τῶν ὅρων πυκνότητα μονονȣχὶ καὶ ἀφανιζομένης.

§. 232. Μιᾶς δέ τινος τῶν λογαρίθμων κλάσεως ȣ̃τως ἐκπερανθείσης, αἱ ταύτης ἡγȣ́μεναι λοιπαὶ κλάσεις ῥᾷϛα ἀποτελȣ̃νται. Οἷον ἐπεὶ ἡ τȣ̀ς

ἀπὸ

ἀπὸ 10000 ἄχρις 100000 ἀριθμὺς περιέχυσα κλάσις, καθ᾽ ὅσον αὐτὴν ἐπήλθομεν, ἥδε ἐςίν.

	Ἀριθμ.	Λογάρ.
Α	10000	4, 000
Ζ	13335	4, 125
Δ	17783	4, 250
Η	23713	4, 375
Γ	31622	4, 500
Θ	42169	4, 625
Ε	56233	4, 750
Ι	74988	4, 875
Β	100000	5, 000

Ἔςαι ἡ κλάσις ἡ πρὸ αὐτῆς ἡγυμένη, ἐν ᾗ περιέχονται οἱ τῶν ἀριθμῶν λογάριθμοι τῶν ἀπὸ 1000, ἄχρις 10000, αὕτη.

	Ἀριθμ.	Λογάρ.
Α	1000, 0	3, 000
Ζ	1333, 5	3, 125
Δ	1778, 3	3, 250
Η	2371, 3	3, 375
Γ	3162, 2	3, 500
Θ	4216, 9	3, 625
Ε	5623, 3	3, 750
Ι	7498, 8	3, 875
Β	10000, 0	4, 000

Ὁ ῥᾶςα ἄντις σωιίδοι τοῖς ἀριθμοῖς προσέχων, ὧν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τὺς ὅρυς τῆςδε παρισῶσι τῆς κλάσεως· ὁ δ᾽ αὐτὸς ἅμα σωήσει, ὅτι καὶ ἡ κλάσις ἡ πρὸ ταύτης ἔτι ἡγυμένη, ἡ τὺς ἀριθμὺς ἀπὸ 100 ἄχρι 1000 περιέχυσα, τοιάδέτις καὶ αὐτὴ ἔςαι.

	Ἀριθμ.	Λογάρ.
Α	100, 00	2, 000
Ζ	133, 35	2, 125
Δ	177, 83	2, 250
Η	237, 13	2, 375
Γ	316, 22	2, 500
Θ	421, 69	2, 625
Ε	562, 33	2, 750
Ι	749, 88	2, 875
Β	1000, 00	3, 000

Δῆλον δ' ὅτι καὶ ἐκ ταύτης αἱ ἡγέμοναι τῶν κλάσεων συνίστασθαι δύνανται, ἐπὶ μὲν τῶν ἀριθμῶν, τοῦ σημείου τῆς τῶν ἁπλῶν ὑποδιαστολῆς μονάδων, ἑνὶ, ἢ πλείοσι τόποις πρὸς ἀριστερὰν μεταβιβαζομένου, ἐπὶ δὲ τῶν λογαρίθμων τοῦ χαρακτηριστικοῦ τοσαῖσδε μονάσι μειουμένου, ὅσοι οἱ, καθ' οὓς τὸ σημεῖον ἐκεῖνο μετενήνεκται, τόποι.

§. 233. Τοῦτον δὴ τὸν τρόπον πάρεστι νοεῖν καταγεγράφθαι τῶν Λογαρίθμων τὸν πίνακα, ἐξ οὗ μόνοι ἔπειτα ἐξῄρηνταί τε τῶν ἄλλων, καὶ ἐκδέδονται, οἱ τοῖς ὁλοσχερέσιν ἔγγιστα γινόμενοι ἀριθμοὶ, μετὰ τῶν λογαρίθμων αὐτῶν· οὗ δὴ χάριν οὐδ' ἴχνος σχεδὸν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ἐκείνων προόδου καταφαίνεται γεωμετρικῆς, ὡς οὐδὲ ἐπὶ τῶν λογαρίθμων ἀριθμητικῆς.

§. 234. Ἤρκεσε δ' ἂν τῶν λογαρίθμων κλάσιν μίαν ἐκδεδόσθαι τῶν ὑπερτέρων, οἷον τὴν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν περιέχουσαν τῶν ἀπὸ 10000 ἄχρι 100000, ὡς ἐκ τῶν ἐν αὐτῇ, καὶ τῶν κατὰ τὰς ὑποδεεστέρας κλάσεις, ῥᾷστα συνισταμένων. Οὕτως ἐὰν ὁ τοῦ ἀριθμοῦ 35682 λογάριθμος ᾖ 4, 5524492, ἔσται δὴ ὁ τοῦ 356, 82, οὗτος 2, 5524492· ὁ δὲ τοῦ 3, 5682, οὗτος 0, 5524492· ὁ δὲ λογάριθμος τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος 0, 0035682, οὗτος ὄντος − 3, 5524492. Ἔνθα τὸ σημεῖον − μόνον τὸ χαρακτηριστικὸν διατίθησι, καὶ οὐχὶ τοὺς μετ' ἐκεῖνο ἑπομένους ἀριθμούς· ὥστε δεῖν τὸν λογάριθμον ἐκεῖνον οὕτως ἀναγινώσκειν, ὡς εἴπερ ὧδε ἦν γεγραμμένος − 3 + 0, 5524492.

§. 235. Πρέργου οὖν μοι δοκῶν ποιήσειν εἰ τοὺς λογαρίθμους ἐνταῦθα τοῖς πρωτοπείροις γυμνασίας ἕνεκα καταγράψαιμι, μόνους τέως τοὺς τῶν τριῶν προτέρων κλάσεων ὁλοχερεῖς ἀριθμοὺς συνάμα τοῖς αὐτῶν λογαρίθμοις, ἐπιτετμημένοις ἀλλ' οὖν καὶ τούτοις, παραθέσθαι διέγνωκα· προσεπικαταγράψας ἐπ' αὐτοῖς καὶ ἀριθμοὺς τινὰς ἑτέρους τοῖς κύκλοις προσεπανήκοντας, ὧν ἡ χρῆσις ὕστερον δηλωθήσεται. Ἀλλὰ γὰρ ἐπὶ τῶν ἤδη ὑποσυναφθησομένων ἑξῆς ὑποδειγμάτων, οὐχὶ τοῖς δε τοῖς παρ' ἡμῖν, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν πλατυτέρων λαμβανομένοις πινάκων λογαρίθμοις προσχρήσομαι.

§. 236. Ληφθήσεται δὲ ἀπὸ τῶν πινάκων, τῶν εἴτε προσγεγραμμένα τὰ τῶν λογαρίθμων χαρακτηριστικὰ ἐχόντων, εἴτε καὶ μὴ, ὁ λογάριθμος τοῦ δοθέντος ὁλοχεροῦς ἀριθμοῦ, ἢ τοῦ δεκαδικῶς κεκλασμένου· ἢ γοῦν, ἐὰν ὁ λογάριθμος ᾖ δεδομένος, ὁ αὐτῷ προσήκων ληφθήσεται ἀριθμὸς, εἴτε ὁλοχερὴς ὢν, εἴτε καὶ κατὰ τύπον τῶν ὁλοχερῶν, διὰ δεκαδικῶν κλασμάτων ἐκκείμενος, τόνδε τὸν τρόπον.

§. 237. Δεῖ δὴ προσευρεῖν τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ 79428, ὁποῖαι ποτ' ἂν ὦσιν αἱ τῶν μονάδων τάξεις, αἱ ἐν αὐτῷ σημαινόμεναι. Ἀποληφθήτω οὖν ἀπὸ τῆς τῶν λογαρίθμων ὑπερτάτης κλάσεως μέρος τοῦ λογαρίθμου, τῷ δοθέντι ἀριθμῷ ἀντίστοιχον, ὃ ἑπόμενον ἐστὶ τῷ χαρακτηριστικῷ, τοῦτο, ἐὰν τοῖς πίναξι παρῇ, ἀμελουμένου. Ἔσται δὲ τόδε τὸ μέρος 8999736, ᾧ χαρακτηριστικὸν ἐπιγραφήσεται τὸ προσῆκον, ἐν τοσαῖς δε μονάσιν, ὅσοις τόποις τὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων σημεῖον (,) ἀπὸ τοῦ ὂν ἐν τῷ δοθέντι ἀριθμῷ ἐπέχει τόπε πρὸς ἀριστερὰν, ἢ δεξιὰν προακλέον, ἵνα ὁ τῦ ἀριθμῦ χαρακτὴρ ὁ τὰς τῆς ὑπερτάτης τάξεως μονάδας τὸ πρὶν διασημαίνων, τῶν μονάδων ἤδη τὰς ἁπλᾶς παριστᾷ· ληφθήσεται δὲ τόδε τὸ χαρακτηριστικὸν, καταφατικὸν μὲν, ἐὰν τὸ σημεῖον πρὸς τὰ λαιὰ προάγεσθαι δέῃ· τουτέστιν ἐὰν ὁ ἀριθμὸς μονάδος ᾖ μείζων· ἀποφατικὸν δὲ, ἐὰν εἰς δεξιά· τουτέστιν, ἐὰν ᾖ ὁ ἀριθμὸς μονάδος ἐλάσσων. Τοίνυν τῦ ἀριθμῦ ὄντος 79428, ἔσαι ὁ λογάριθμος 4, 8999736. Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμὸς ᾖ 794, 28, ἔσαι ὁ λογάριθμος, 2, 8999736. Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμὸς ᾖ 7, 9428, ὁ λογάριθμος ἔσαι 0, 8999736· ἐὰν δὲ ᾖ ὁ ἀριθμὸς 0, 00079428, ὁ λογάριθμος − 4, 8999736· τῦ σημείε − μόνον τὸ χαρακτηριστικὸν διατιθέντος, καθάπερ εἴρηται (§. 234.).

§. 238. Τὐναντίον δὲ τῦ λογαρίθμε δοθέντος, ὁ ἀριθμὸς ἀπὸ τῶν πινάκων ἐξενεχθήσεται, ὁ ἐκείνῳ ἀντίστοιχος, ἀμελεμένε πρῶτον τῦ χαρακτηριστικῦ, καὶ τῶν χαρακτήρων καταγραφομένων, τῶν τῷ λογαρίθμῳ ἐπὶ τῦ πίνακος ἀντιστοιχέντων. Ἔπειτα δὲ ἐν τοῖσδε τοῖς χαρακτῆρσι, τῦ τῶν ἁπλῶν μονάδων σημείε ἐντοπιζομένε, ἔνθα ἂν τὸ χαρακτηριστικὸν διασημαίνῃ· οἷον τῷ λογαρίθμῳ 3. 8999736, ἀριθμὸς ἀντιστοιχεῖ ἔτος 79428. Τῦ γεμίῳ ἐν αὐτῷ χαρακτηριστικῦ αὐτῦ ἐκείνε ὄντος τῦ γεγραμμένε, ἤτοι τῦ 3, ὁ ἀριθμὸς ἔσαι 7942, 8· ὡς εἴπερ εἴη χαρακτηριστικὸν τὸ 5, γένοιτ' ἂν καὶ ὁ ἀριθμὸς 794280. Καὶ ἐὰν ἐκεῖνο − 1, ὁ ἀριθμὸς 0, 79428.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 239. Ἐφ' ὁποιῳδηποτῦν δοθέντι λογαριθμικῷ συστήματι, δοθέντων τῶν λογαρίθμων ἀριθμῶν τριῶν, τὸν τῦ τετάρτε ἀναλογικῦ λογάριθμον προσευρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

ΛΥΣΙΣ.

Κείσθωσαν δοθέντες οἱ τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, λογάριθμοι λΑ, λΒ, λΓ. Καὶ ἔστω δὴ τὸν τοῦ τετάρτου ἀριθμοῦ Δ προσευρεῖν, τοῦ πρὸς Γ ἔχοντος, ὡς Β πρὸς Α· ὡς εἶναι· Α : Β = Γ : Δ. Ποίει οὖν λΔ = λΒ + λΓ − λΑ, καὶ ἕξεις τὸ προτεθέν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Καὶ γὰρ ὁ λογάριθμος τοῦ λόγου Β : Α, ἐστὶ λΒ − λΑ· ὁ δὲ τοῦ Δ : Γ, ἐστὶ λΔ − λΓ (§. 224.). Ἐπεὶ οὖν οἱ λόγοι οἵδε ἴσοι εἰσὶν, ἔσται καὶ λΔ − λΓ = λΒ − λΑ. Καὶ κοινοῦ τοῦ λΓ ἑκατέρωσε προστεθέντος, ἔσται λΔ − λΓ + λΓ = λΓ + λΒ − λΑ· τουτέστι λΔ = λΓ + λΒ − λΑ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

§. 240. Ἔστω Α = 17, Β = 597, Γ = 83.

Ἔσται δὲ, λΑ = 1, 2304489
λΒ = 2, 7759743
λΓ = 1, 9190781

λΓ + λΒ = 4, 6950524

λΓ + λΒ − λΑ = 3, 4646035 = λΔ.

ᾧ δὴ, ἀριθμὸς ἀντιστοιχεῖ 2914, 7 = Δ.

Ἐὰν δὲ ληφθῇ Α = 1, 7· Β = 59, 7· Γ = 0, 083.

Γίνεται λΑ = 0, 2304489
λΒ = 1, 7759743
λΓ = − 2, 9190781

Κἀντεῦθεν λΓ + λΒ = 0, 6950524

Καὶ λΓ + λΒ − λΑ = 0, 4646035 = λΔ.

ᾧ δὴ, ἀντιστοιχεῖ ἀριθμὸς Δ = 2, 9147.

Ἐὰν

Ἐὰν δὲ ληφθῇ Α = 170· Β = 59,7· καὶ Γ = 0, 83·

Γίνεται	λΑ =	2, 2304489
	λΒ =	1, 7759743
	λΓ =	− 1, 9190781
Κἀντεῦθεν	λΓ + λΒ =	1, 6950524

Καὶ λΓ + λΒ − λΑ = − 1, 4646035 = λΔ.

ᾧπερ ἀριθμὸς ἀντιστοιχεῖ ὁ Δ = 0, 29147.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 241. Τοιγαροῦν ὡς ὁ τῆς μονάδος λογάριθμος ἐστὶ 0, ὅγε τοῦ παραγομένου, τὸ ἄθροισμα ἔσται τῶν λογαρίθμων τῶν ἀνηκόντων τοῖς παράγουσιν· ὁ δὲ τοῦ πηλίκου ἡ διαφορά, τοῦ κατὰ τὸν διαιρέτην λογαρίθμου ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸν διαιρετέον ἀφαιρουμένου (§. 224.). Διὸ κατὰ γένος, τὰ πολλαπλασιασμῷ γινόμενα, καὶ τὰ ἐκ διαιρέσεως πηλίκα ἐν ἀριθμοῖς, διὰ τῶν λογαρίθμων εὑρίσκεται προχειρότατα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

§. 242. Ἔστω Α = 3524. Β = 596, 3. Γ = 24, 38. Δ = 913. Ε = 85, 74. Καὶ ἔστω δὴ τοῦ παραγομένου Α × Β × Γ διαιρεθέντος διὰ Δ × Ε, πηλίκον τὸ Π.

Ἔσται	λΑ =	3, 5470359	
	λΒ =	2, 7754648	
	λΓ =	1, 3870337	
	λ(Α × Β × Γ) =	7, 7095344	
	λΔ =	2, 9604708	Ἀφαιρ.
	λΕ =	1, 9331835	
	λ(Δ × Ε) =	4, 8936543	
	λΠ =	2, 8158801	

ᾧ δή, ἀντιστοιχεῖ ἀριθμὸς ὁ Π = 654, 4554.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 243. Ὁ ἄρα λογάριθμος ὁ τȣ̃ τετραγώνȣ, ἐπεὶ ἀνακύπ]ει τȣ̃ τῆς ῥίζης λογαρίθμȣ καθ᾽ ἑαυτὸν πολλαπλασιαζομένȣ, διπλȣ̃ς ἐςὶ τȣ̃ λογαρίθμȣ τῆς ῥίζης· ὁ δὲ τȣ̃ κύβȣ τριπλȣ̃ς· ὁ δὲ τῆς τετάρτης δυνάμεως τετραπλȣ̃ς· καὶ ὁ τῆς πέμπ]ης πενταπλȣ̃ς. Καὶ ȣ̃τω κἀν τοῖς λοιποῖς.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 244. Καὶ ἀνάπαλιν ὁ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης παντὸς ἀριθμȣ̃ Ν λογάριθμος, ἴσος τῷ ἡμίσει τȣ̃ κατὰ τὸν ἀριθμὸν Ν. Καὶ ὁ τῆς κυβικῆς, τριτημορίῳ· καὶ ὁ τῆς ἐκ τῆς τετάρτης δυνάμεως, τῷ τεταρτημορίῳ, καὶ ȣ̃τως ἑφεξῆς. Διὸ αἱ τῶν κατὰ πᾶσαν τάξιν ῥιζῶν ὑπεξαγωγαὶ, διὰ τῶν λογαρίθμων ὅτι ῥᾷςα περαίνονται. Εἰ μόνον ὁ τῶν χαρακ]ήρων ἀριθμὸς τῶν τίω ῥίζαν εἰσιόντων, ἢ πρὸς αὐτίω ἀπαιτȣμένων (ἐὰν ἀκριβὴς ἡ ῥίζα ἀποδοθῆναι ȣ̓χ οἷατε ᾖ) μὴ τὸν ἀριθμὸν ὑπερέχῃ τῶν χαρακ]ήρων, τȣ̃ μεγίςȣ τῶν ἀριθμῶν, καθ᾽ ȣ̃ς ὁ τῶν λογαρίθμων πίναξ καταγέγραπ]αι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Α.

§. 245. Τȣ̃ ἀριθμȣ̃ 57932 λογάριθμος ὁ 4, 7629185· ταύτητοι ὁ τῆς ἐκείνȣ τετραγωνικῆς ῥίζης, ἔςαι 2, 3814592. Ἡ δὲ ῥίζα 240, 6907. Ὁ δὲ τῆς κυβικῆς ῥίζης τȣ̃ αὐτȣ̃ ἐκείνȣ λογάριθμος 1, 5876395· ἧτε ῥίζα 38, 69364· ὁ δὲ τῆς τετάρτης δυνάμεως 1, 1907296· ἡ δὲ δὴ ῥίζα, 15, 51421.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Β.

§. 246. Τȣ̃ ἀριθμȣ̃ 0, 57932 λογάριθμος −1, 7629185· ἔνθα τὸ − πρὸς μόνον ἀνάγεται τὸ χαρακ]ηριςικὸν (§. 224.)· τȣ̃ ἄρα λογαρίθμȣ τȣ̃δε, ἣν δέοι τὸ ἥμισυ λαβεῖν, τȣτέςι τὸν λογάριθμον τῆς

τετρα-

τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ 0, 57932, λαβεῖν δεήσει τὴν τοῦ χαρακτηριστικοῦ ἡμίσειαν ἐν μέρει, ὅπερ οὐχ οἷόν τε, ἐπάναγκες ὂν τὰ χαρακτηριστικὰ ταῦτα ἀριθμοὺς εἶναι τῶν ὁλοχερῶν. Ἔνθαντοι ἀντὶ τοῦ χαρακτηριστικοῦ ἐκείνου − 1, γραπτέον − 2 + 1 ὃ ταυτὸν ἐστί· τοῦ δὲ λογαρίθμου οὕτω γεγραμμένου, − 2 + 1, 7629185 λαμβάνω τὸ ἥμισυ − 1, 8814592· ὁ γὰρ τούτῳ ἀντιστοιχῶν εὑρεθεὶς ἀριθμὸς, ἡ τετραγωνικὴ ἔσται ῥίζα τοῦ προτεθέντος. Ἐκ δὲ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἣν δέοι τὴν ῥίζαν ἐξελέσθαι τὴν κυβικὴν, χαρακτηριστικὸν ἀναπλάσας τὸ − 3 + 2, καὶ τοῦ λογαρίθμου οὕτω γεγραμμένου − 3 + 2, 7629185, λαβὼν τὸ τριτημόριον, οἷον τὸ − 1, 9209728, τὸν λογάριθμον ἕξω τῆς ῥίζης τῆς κυβικῆς. Τὸ δ' αὐτὸ ὁμοίως κἀπὶ τῶν λογαρίθμων τῶν κατὰ τὰς ἀνωτέρας δυνάμεις ῥιζῶν παρατηρηθήσεται.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ Α΄.

ΠΕΡΙ ΓΡΑΜΜΩΝ ΚΑΙ ΓΩΝΙΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 247.

Στερεὸν, ἤτοι σῶμα γεωμετρικὸν ἐστὶ τὸ πανταχόθεν ἐκτεταμένον. Πέρατα δὲ αὐτοῦ, ἤτοι ὅροι αἱ Ἐπιφάνειαι. Τῶν δὲ ἐπιφανειῶν αἱ Γραμμαί. Τῶν δὲ γραμμῶν τὰ Σημεῖα.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 248. Τοῦ Σημείου οὔτε μέγεθος, οὔτε μέρος οὐδέν. Γραμμῇ δὲ μῆκος μὲν ἐστὶ, πλάτος δὲ, ἢ βάθος, οὔ. Ἡ δ᾽ Ἐπιφάνεια καὶ μῆκος ἔχει, καὶ πλάτος, βάθος δὲ οὔ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 249. Τὶς δὲ ἡ Εὐθεῖα γραμμὴ καλουμένη, δῆλον. Καμπύλη δὲ γραμμὴ, ἧς οὐδὲν μέρος εὐθεῖα. Αἱ λοιπαὶ δὲ, εἴτε ἐξ εὐθειῶν, εἴτε ἐκ καμπύλων, εἴτε ἐξ εὐθειῶν καὶ καμπύλων, σύνθετοί εἰσι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 250. Μεταξὺ δυοῖν σημείων εὐθεῖα διατείνει μία μόνη, καὶ αὕτη βραχυτάτη ἁπασῶν τῶν ἀπὸ θατέρου σημείου ἐπὶ θάτερον ἀποτεινομένων.

§. 251. Εὐθεῖαι δὲ δύο, δυσὶ σημείοις διαπερατούμεναι τοῖς αὐτοῖς, προσεφαρμόζουσί τε ἀλλήλαις, καὶ ἴσαι εἰσίν· ἄνισοι δὲ, ὧν τῇ ἑτέρᾳ, οὐκ ἂν σημεῖα τὰ αὐτὰ πέρατα γένοιτο, ἃ τῇ ἑτέρᾳ. Ἐξ οὗ ἕπεται, καὶ τὸ πάσας ἔχειν τὰς ἴσας εὐθείας ἀλλήλαις προσεφαρμόζεσθαι.

§. 252. Ἡ δὲ εὐθεῖα ἀφ' ἑκατέρου τῶν ἐπ' αὐτῆς περάτων ἀεὶ προάγεσθαι δύναται τέρματος ἄνευ, προαγωγῇ μέντοι καθ' ἑκάτερον τῇ αὐτῇ. Ἐπεὶ δὲ δισσαὶ εὐθεῖαι, αἳ τοῖς αὐτοῖς ἐνδιῆχθαι δυσὶ σημείοις νοούμεναι, ἀλλήλαις προσεφαρμόζουσι, καὶ ἡ ἑτέρα ἄρα ἐξ αὐτῶν προαχθεῖσα, ἐπὶ τὴν ἑτέραν, ὅσον ἂν δέοι προαχθεῖσαν, ἐπιπεσεῖται. Καὶ οὐκ ἄρα εὐθεῖαι δύο, μέρος ἑαυτῶν ἐν δυσὶ σημείοις ἐναπειλημμένον κοινὸν ἔχειν πεφύκασιν· οὐδὲ κατὰ πλείονα ἑνὸς σημεῖα δι' ἀλλήλων τεμνόμεναι χωρεῖν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 253. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἡ πανταχόθεν ἐπ' εὐθείας οὕτω προεκλεινομένη, ὥστε τὴν ἐν δυσὶ τῶν ἐπ' αὐτῆς σημείων ἐναπειλημμένην εὐθεῖαν γραμμὴν, ὁπωσοῦν προαχθεῖσαν, ὅλην πίπτειν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς. Λέγεται καὶ Ἐπίπεδον. Ἐπιφάνεια δὲ καμπύλη, ἧς οὐδὲν μέρος ἐπίπεδον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 254. Οἱ μὲν οὖν Γεωμετροῦντες δι' εὐθειῶν, ἢ καμπύλων τῶν ἐν ἐπιπέδῳ καταγραφομένων, ἐπιλυόμενοι τὰ προβλήματα, εὐλόγως δὴ τοὺς τὰ αὐτῶν στοιχειωθησομένους αἰτοῦνται, εὐθείας τε ἄγειν ἑτοίμως ἔχειν, ἀχθείσας δὲ, καὶ περαιτέρω προά-

γειν

γειν τῶν κατ' ἐπίνοιαν ἀνατυπουμένων ὡς οἷόντ' ἐλάχιστα διαφερούσας, καὶ οἵαις δ' ἂν καὶ πρόςγε τὴν αἴσθησιν εὐθυνομέναις ἐξείη προχειρίσθαι, ὡς δὴ καὶ πάντῃ εὐθείαις οὔσαις κατὰ πᾶσαν ἀκρίβειαν.

§. 255. Δυεῖν δὲ διαφόρων εὐθειῶν ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἠγμένων, ἑτέρα ὑπὸ τῆς ἑτέρας κατὰ τὸ ῥηθὲν σημεῖον οὕτω τμηθήσεται, ὡς μέρος μὲν ἐπὶ τάδε, μέρος δ' ἐπ' ἐκεῖνα τῆς τεμνούσης ἀπολαμβάνεσθαι.

§. 256. Ἐὰν δὲ τῆς πρὸς τῷ Α, ὑπὸ τῆς ΑΒ Σχ. 6.
τμηθείσης εὐθείας, ὁτιοῦν μέρος ληφθῇ τὸ ΑΓ, αὕτη δὴ ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Γ προηγμένη, τῆς ΑΒ διηνεκῶς ἀποστήσεται. Γίνεται γὰρ ἡ ΓΔ, ἡ ἐλαχίστη τῶν ἀπὸ τοῦ πέρατος Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ πιπτουσῶν, ἀεὶ μείζων τε καὶ μείζων, ὅσωπερ ἂν μᾶλλον ἡ ΑΓ προάγοιτο. Τῆς τε ΑΓ, ὅσον ἄλις προαγομένης, καὶ ἡ ΓΔ, ἐφ' ὅσον ἄντις καὶ βούλοιτο, μεγεθύνεται.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 257. Δυεῖν εὐθειῶν ἐν ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀχθεισῶν, ἡ ἑτέρας ἐπὶ τὴν ἑτέραν κλίσις **Γωνία** καλεῖται ἐπίπεδός τε καὶ εὐθύγραμμος. Εἰσὶ γὰρ καὶ καμπυλόγραμμοι γωνίαι, καὶ οὐκ ἐπί-
πεδοι. Τὸ δὲ Β σημεῖον ἀφ' οὗ ἄν, ἢ πρὸς ὅ, αἱ Σχ. 7.
ΒΑ, ΒΓ εὐθεῖαι ἀχθεῖεν, **Κορυφὴ** λέγεται τῆς γωνίας. Αἱ δὲ εὐθεῖαι αὗται ΒΑ, ΒΓ τῆς γωνίας **Σκέλη**, καὶ **Πλευραί**.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 258. Τῇ δὲ γωνίᾳ μέγεθος ἀπονέμεται. Τὸ δὲ, οὐκ ἀπὸ τοῦ μήκους ἤρτηται τῶν πλευρῶν, ἀλλ' ἐκ τῆς κλίσεως μόνον τῆς ἑτέρας πρὸς τὴν ἑτέραν. Διὸ καὶ ἴσαι αἱ γωνίαι, αἳ οὕτως ἀλλήλαις προσαρμόζουσαι, ὡς τῶν κορυφῶν συνιουσῶν ἐπὶ τὸ αὐτὸ, καὶ τῆς ἑτέρας τὰ σκέλη, ἐπιπίπτειν ἔχειν τοῖς τῆς ἑτέρας, ὁποῖα δ' ἂν ᾖ τὰ σημεῖα, ἐφ' ἃ τὰ σκέλη ἀποτερματίζεται.

§. 259. Τῆς δὲ κατὰ τὴν γωνίαν ΑΒΓ κορυφῆς, τῇ κατὰ τὴν ΔΒΓ κορυφῇ ἐπιπιπτούσης, καὶ τοῦ σκέλους ΒΓ ἐκείνης, τῷ σκέλει ταύτης ΒΓ, ἐὰν τὸ λοιπὸν ΑΒ, τῷ λοιπῷ ΔΒ, μὴ συμπίπτῃ, μείζων μὲν εἰρήσεται ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΔΒΓ, ἧς τὸ ΒΔ σκέλος, ἧττον τοῦ σκέλους ΒΓ ἀφέστηκεν. Αἱ γὰρ γωνίαι ΑΒΓ, ΔΒΓ, ὧν ἡ ἑτέρα οὐκ ἐφαρμόζει τῇ ἑτέρᾳ, ἄνισοι εἰσίν· ἐξ οὗ ἕπεται ἁπάσας τὰς ἀλλήλαις ἴσας γωνίας ἔχειν καὶ προσεφαρμόζεσθαι.

§. 260. Πότερον δὲ ἐφαρμόσαι ἀλλήλαις ἔχουσι γωνίαι δύο ἐπίπεδοί τε καὶ εὐθύγραμμοι, ἢ οὐκ ἔχουσιν· εἰ δ' ἐκεῖνο, πότερα τούτων ἡ μείζων, ἢ ἡ ἐλάσσων, εὖ μάλα ἂν ἐπιγνοίη πᾶς τις οὕτω συλλογισά-
Σχ. 8. μενος. Τῶν προτεθεισῶν γωνιῶν τῆς μὲν ὑπὸ ΔΕΓ καταγεγράφθαι νοουμένης, τῆς δὲ ὑπὸ ΑΒΓ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ μὲν ἐκείνῃ ἐπιπέδου, οὕτω δέ τοι κινεῖσθαι ὑποτιθεμένης, ὡς ταύτης τὸ σκέλος ΒΓ ἀπὸ τοῦ ἐκείνης ΕΓ μηδέποτ' ἀφίστασθαι· προσίτω ἔπειτα ἡ Β κορυφὴ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ, τῇ Ε τῆς ὑπὸ ΔΕΓ. Ἐὰν οὖν τοῦ Β ἐπὶ τὸ Ε προσπελάζοντος, ἡ ΑΒ πλευρὰ τῇ ΔΕ μὴ προσαντήσῃ, πρὶν ἡ κατὰ τὸ Β κορυφὴ, ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ Ε κατὰ τὸ ἀκριβὲς γένοιτο, ἡ ὑπὸ ΑΒΓ, τῆς ὑπὸ ΔΕΓ μείζων οὐκ ἔσται· ἀλλ' ἤτοι ταύτης ἐλάσσων, ἢ αὐτῇ ἴση. Καὶ ἐλάσσων μὲν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ, τῆς ὑπὸ ΔΕΓ, ἐὰν τοῦ Β σημείου, ἐπὶ τὸ Ε γενομένου, ἡ ΑΒ, πλευρὰ κατὰ τὸ πρὸς Β μέρος προαχθεῖσα, διατέμνῃ προαχθεῖσαν τὴν ΔΕ· ἴσαι δὲ ἔσονται αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΓ, ἐὰν τοῦ Β πίπτοντος ἐπὶ τὸ Ε, ἡ πλευρὰ ΑΒ, μηδαμῶς οὕτω τέμνῃ τὴν ΔΕ, ἀλλ' ἐπὶ τῆς αὐτῆς πίπτῃ. Ἐὰν δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ συναντήσῃ, πρὶν ἢ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε ἵκοιτο, ἡλίκον ἂν καὶ ᾖ τὸ διάστημα ΕΒ, ἡ ὑπὸ ΑΒΓ

γωνία,

γωνία τῆς ὑπὸ ΔΕΓ μείζων ἔϛαι. Εὔδηλον γὰρ ἐντεῦθεν, ὡς εἴπερ ἡ ΑΒ τῇ ΕΔ δεῆσαν προηγμένῃ, προσαντήσειεπου, οἷον κατὰ τὸ Ζ, ἡ ὑπὸ ΑΒΓ, ὔτε τῇ ὑπὸ ΔΕΓ ἐφαρμόσαι δυνήσεται, ὔτε τῷ ἐν αὐτῇ μέρει.

§. 261. Ἐὰν ὖν διὰ τῦ τυχόντος σημείυ Ζ, ὃ ἂν ἔξω ᾖ τῆς ΕΓ, διαχθῶσιν εὐθεῖαι δύο ΕΖ, ΒΖ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἄμφω ΕΓ εὐθείας προσπίπτυσαι, ὥϛε διοϛὰς ἀνακύπτειν γωνίας κατὰ μέρη τὰ αὐτὰ, τὴν μὲν ἐντὸς ὑπὸ ΖΕΓ, τὴν δὲ ἐκτὸς ὑπὸ ΖΒΓ, ἡ ἐκτὸς ἤδε τῆς ἐνδοτέρας ἐκείνης ἀεὶ μείζων ἔϛαι.

§. 262. Ἐὰν δὲ ἡ ΔΕ προαχθεῖσα προσπέσῃ τῇ πλευρᾷ ΑΒ, τῦ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ σωζομένυ μεγέθυς, τὸ διάϛημα ΕΒ αὔξειν ἢ μειῦσθαι δυνήσεται, ὕτως ὥϛε καὶ τὴν ΕΔ προαχθεῖσαν, ἣν δέοι, τῇ ΑΒ ὁμοίως ἣν δέοι προαχθείσῃ, προσαπαντᾶν. Κατὰ γὰρ τὸ Ζ φέρε σημεῖον ἡ ΕΖ ἀπαντῶσα, ἣν προαχθείη, τὴν ΑΒ τεμεῖ, ἐντός τε τῆς ὑπὸ ΑΒΓ γωνίας πίπτυσα, ἀπὸ τῆς ΑΒ γραμμῆς μᾶλλον τε καὶ μᾶλλον ἀεὶ ἀποϛήσεται (§. 256.)· ὅθεν ἐπιδήλως ἀναφαίνεται, εἴτε τῆς Β κορυφῆς, τῆς ὑπὸ ΑΒΓ, ὁπωσῦν τῷ σημείῳ Ε προσιέσης, εἴτε καὶ τῦδε ἀπωτέρω γινομένης, ἀεὶ τὴν ΕΔ προαγομένην, τῇ πλευρᾷ ΑΒ προσπίπτειν. Ἐπεὶ δὲ τύτυ δὴ ἔτι καὶ ἔτι γινομένυ ἡ ΕΒ ἐφ᾽ ὁποσονῦν μέγεθος καταϛῆναι δυνήσεται, ἐντεῦθεν ἕπεται ἐκ τῦ ἀκολύθυ, ὡς εἴπερ ἡ ΕΔ, τέμνοι προαχθεῖσαν τὴν ΑΒ, ληφθείσης τῆς ΕΒ ὁποσηοῦν τὸ μέγεθος, καὶ ἡ ΑΒ, ἀπὸ τῆς ΕΔ προαχθείσης ἐξ ἀνάγκης τμηθήσεται, ὅσον ἂν καὶ προσαυξήσειε τῷ διαϛήματι ΕΒ τὸ μέγεθος· εἰ μόνον τὰ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ γωνίας ἀμεταποίητα σώζοιτο.

§. 263. Τύτοις τὸν νῦν προσέχοντι ῥᾴδιον συνιδεῖν, ὡς ἐὰν κατὰ τὰ αὐτὰ εὐθείας τινὸς τῆς ΕΓ, δύο τεθῶσι γωνίαι, ὥσπερ ἤδη θέσεως ἔχυσιν αἱ ὑπὸ

 ΔΕΓ,

ΔΕΓ, ΑΒΓ, ὧν ἡ ἐκτὸς μείζων τῆς ἐντὸς ὑπὸ ΔΕΓ· αἱ τῶνδε τῶν γωνιῶν πλευραὶ ΕΔ, ΒΑ, προαχθεῖσαι ἰῶ δέοι, συμπεσοῦνται ἐξ ἀνάγκης, ὁποσοῦν ἂν εἴη μεγέθους ἡ ΕΒ, ἡ ἐν ταῖς τῶν γωνιῶν κορυφαῖς ἐναπειλημμένη. Συμπεσοῦνται γὰρ αἱ ΑΒ, ΔΕ, τῆς κορυφῆς Β, καθάπερ ἐκτέθειται (§. 260.) τῇ Ε προσιούσης, πρὶν ἢ τὸ Β σημεῖον ἀφικέσθαι ἐπὶ τὸ Ε. Εἰ μὴ γὰρ, οὐκ ἂν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ, τῆς ὑπὸ ΔΕΓ μείζων ὑπάρξειεν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 264. Ἐὰν εὐθεῖα ΑΒ, εἰς εὐθεῖαν ἄλλην
Σχ. 9. ΓΔ ἐμπίπτουσα τὰς ἐφεξῆς δύο γωνίας ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ ἴσας ποιῇ, Ὀρθὴ ἑστάναι, ἢ Κάθετος ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ εἰρήσεται. Τῶν δὲ γωνιῶν ΑΒΓ, ΑΒΔ τῶν ὑπὸ τῶν εὐθειῶν περιεχομένων τῆς τε καθέτου, καὶ τῆς ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν, ἑκατέρα Γωνία ὀρθὴ ὀνομάζεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 265. Ἐφ' οἱασδήποτε εὐθείας ΓΔ, εὐθεῖα ἄλλη κάθετος σταθῆναι δύναται, διὰ παντὸς ἀγομένη σημείου Α, ἢ Β, τοῦ ἐπιπέδου ἐν ᾧ ἡ ΓΔ ἧκται. Καὶ τούτου δὴ, πρός τε διαφερούσας εὐθείας, ἀπό τε διαφόρων ἐπ' εὐθείας τῆς αὐτῆς σημείων, γινομένου, ἅπασαι αἱ ἀνακύπτουσαι ὀρθαὶ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἡ τῆς ὀρθῆς ἄρα μείζων, ἢ ἐλάσσων, οὐδεμία τῶν ὀρθῶν ἴση ἐστὶ, οὐδ' ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένη, ὧν ἑτέρα ἐφ' ἑτέρας σταθείη κάθετος.

§. 266. Ἐὰν ἄρα ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, εὐθεῖα
Σχ. 10. ἡ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, ἀχθῇ δὲ διά τινος τῶν ἐπ' αὐτῆς σημείων τοῦ Δ, ἢ τοῦ Γ, εὐθεῖα ἄλλη ΔΕ, ἢ ΓΖ, ἡ ἀχθεῖσα αὕτη ΔΕ, ἢ ΓΖ, ἐπὶ τῆς ΑΒ κάθετος οὐκ ἔσται· οὐδὲ γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΔΒ (§. 259.), οὐδ' ἡ ὑπὸ ΓΖΒ (§. 261.) τῇ ὑπὸ ΓΔΒ ὀρθῇ ἴση ἐστί.

Δύο

Δύο ἄρα εὐθεῖαι, αἱ πρὸς τὴν αὐτὴν ΑΒ κάθετοι, οὐδέποτε ὑπ' ἀλλήλων τμηθήσονται, κἂν ἀπὸ τῆς ΑΒ προεκβληθῶσιν ἐπ' ἄπειρον.

§. 267. Εἴωθε δὲ μέτρου δίκην ἡ ὀρθὴ γωνία παραλαμβάνεσθαι, πρὸς ὅπερ ἂν τὰ τῶν λοιπῶν γωνιῶν μεγέθη παραβαλλόμενα ἐπικρίνοιτο. Διὸ καὶ συνεχέστερον ταῖς ἄλλαις γωνίαις παρατεθεισομένη, συντομίας χάριν διὰ τοῦ Ο ἐφεξῆς ἡμῖν ὑποσημανθήσεται· τὸ δὲ κεφάλαιον τὸ ἐκ δυεῖν ὀρθῶν, διὰ 2Ο· τὸ δ' ἐκ τεττάρων, διὰ 4Ο· καὶ τὰ λοιπά.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 268. Εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ εἰς εὐθεῖαν ἄλλην τὴν ΓΔ οὕτω προσπίπτουσα, ὡς τὰς ἐφεξῆς γωνίας ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ ἀνίσους ποιεῖν, πρὸς τὴν ῥηθεῖσαν ΓΔ Πλαγία ἔσαι· αἵτε ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ γωνίαι Πλάγιαι· ἐπεὶ δὲ τούτων ἡ μὲν ΑΒΓ μείζων τῆς ὀρθῆς ΕΒΓ, ἡ δὲ ΑΒΔ ἐλάσσων, ἡ μὲν μείζων Ἀμβλεῖα, ἡ δ' ἐλάσσων Ὀξεῖα ὠνόμασαι. Σχ. 11.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 269. Ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἀμβλεῖα, τὴν ὑπὸ ΕΒΓ ὀρθὴν τοσῷδε ὑπερβάλλει, ὅσῳγε ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ὀξεῖα, ἡ ἐπὶ τῆς ΓΔ εὐθείας ἐκείνῃ ἐφεξῆς οὖσα, τῆς ὀρθῆς ΕΒΔ ἐλλείπει. Τῆς οὖν ὑπερβολῆς τὴν ἔλλειψιν ἀντικαθισώσης, τὸ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν γωνιῶν ΑΒΓ, ΑΒΔ κεφάλαιον, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσον ἐσίν.

§. 270. Ἔνθεντοι ἐὰν ΓΒ, ΒΔ τὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΓΒΔ μέρη, γωνίαν νοῆται περιέχειν τὴν ὑπὸ ΓΒΔ, ἔσαι δὴ ἡ τηλικαύτη γωνία, ὡς τῷ ἐκ ταῖν δυοῖν ΑΒΓ, ΑΒΔ κεφαλαίῳ ἐξισουμένη, καὶ δυσὶν ὀρθαῖς ἴση. Τῶν δὲ λοιπῶν γωνιῶν ἡτισοῦν, δυεῖν ὀρθῶν ἤτοι ἐλάσσων, ἢ μείζων.

§. 271. Ἡ δυεῖν ὀρθῶν μείζων γωνία, ὅποτε ἐν χρήσει εἴωθε γίγνεσθαι, εἰμήτις ἄλλως χρεία τόδε ποτὲ ἐπιτάξειε. Καὶ ἀποχρώσης τοίνυν ὡς τὰ πολλὰ τῆς τῶν δυεῖν ὀρθῶν ἐλασσόνων γωνιῶν διασκέψεως, τὰς πλείους τῶν προτάσεων, ἐν αἷς περὶ τῶν γωνιῶν ὁ λόγος, κατ' ἐκείνας δὴ τὰς γωνίας ἐνδεκτέον, αἳ δυεῖν ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι. Καίπερ γὰρ δισσῶν ἐξαγομένων εὐθειῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ σημείου, δύο ἀείποτε ἀνακύπτουσι γωνίαι, ὧν ἡ μὲν ἐλάσσων 2 O, ἡ γοῦν ἥκιστα μείζων· ἡ δὲ μείζων, ἡ γοῦν ἥκιστα ἐλάσσων· αὐτηγεμὼν ἡ δευτέρα οὐδέποτε ἀντὶ τῆς πρώτης παραληφθήσεται, εἰμὴ παρὰ ταύτην, ἐκδοχὴν ἑτέραν ὁ νοῦς οὐκ ἐπιτρέπει ὁ τῆς προτάσεως.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

Σχ. 12. §. 272. Εὐθεῖαι **Παράλληλοι** εἰσὶν, αἳ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἀγόμεναι, καὶ μηδέποτε ἀλλήλαις συμπίπτουσαι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 273. Τοιαίδε αἱ ΑΒ, ΓΔ, αἳ πρὸς τὴν αὐτὴν τρίτην ΕΖ οὖσαι πρὸς κάθετον, ἃς συμπεσεῖν μὴ ἔχειν ἐπὶ τὰ πρὸς Α, Γ προαχθείσας, κατείδομεν (§. 266.). Ἐὰν οὖν κἀπὶ τὰ πρὸς Β καὶ Δ προαχθῶσιν ἀντίθετα, ἡ ὑπὸ ΑΒΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἰσωθήσεται (§. 270.), καὶ τῆς ὑπὸ ΑΒΕ ὀρθῆς οὔσης, καὶ ἡ ὑπὸ ΕΒΗ ὀρθὴ ἔσται. Ἧτε ΒΗ πρὸς τὴν ΕΖ κάθετος, ὥσπερ δὴ καὶ ἡ ΔΘ· οὐκ ἄρα οὐδ' ἐπὶ τὰ πρὸς τάδε μέρη προαχθεῖσαι, αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εὐθεῖαι, ἀλλήλαις συμπεσοῦνται.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ. 13. §. 274. Ἐὰν πλείους εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ τȣ̃ ἀχθῶσι σημείȣ τȣ̃ Α· διαχθῇ δὲ διὰ τȣ̃ αὐτȣ̃ σημείȣ, καὶ εὐθεῖά τις ἄλλη ἡ ΖΗ, αἱ ταύτῃ ἀνακύπτȣσαι γωνίαι ὑπὸ ΖΑΒ, ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΗ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῆς ΖΗ εὐθείας μέρη, κεφάλαιον συναποτελȣ̃σιν ἴσον τῷ ἐκ δυεῖν ὀρθῶν γωνιῶν. Ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ ἐπὶ τὰ ἀντίθετα ΖΑΕ, ΕΑΗ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ γὰρ τῶν γωνιῶν, ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς ΖΗ εὐθείας, κεφάλαιον, ἴσον τῇ ὑπὸ ΖΑΗ, ἡ δυσὶν ὀρθαῖς ἴση ἐςίν (§. 270.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 275. Τὸ τοίνυν κεφάλαιον τὸ ἐξ ἁπασῶν τῶν γωνιῶν, ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΕ, ΕΑΒ, τῶν ἐπὶ τȣ̃ ἐπιπέδȣ περὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον Α, τέτταρσιν ὀρθαῖς ἴσον ἐςί.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 276. Κἀντεῦθεν ὁμοίως ἕπεται, καὶ ὅτι ἐὰν τὴν αὐτὴν ΑΒ, εὐθεῖαι δύο ἄλλαι ΓΔ, ΕΖ πρὸς τοῖς Α καὶ Η σημείοις ȣ̔́τω τέμνωσιν, ὡς τὰς ὑπὸ ΔΑΒ, ΖΗΒ, τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῆς εὐθείας ΑΒ, (ἤτοι τὴν ἐκτὸς ὑπὸ ΖΗΒ, τῇ ἐντὸς ὑπὸ ΔΑΒ) μὴ ἐξισȣ̃σθαι, αἱ ΓΔ, ΕΖ εὐθεῖαι, πρὸς θάτερα τῶν τῆς εὐθείας ΑΒ μερῶν συμπεσȣ̃νται. Ἐὰν γὰρ ἡ $\Delta AB < ZHB$, συμπεσȣ̃νται αἱ εὐθεῖαι ἐκεῖναι ἐπὶ μέρη τὰ Δ, Ζ (§. 263.). Ἐὰν δὲ ἡ $\Delta AB > ZHB$, ἐπεὶ $\Delta AB + \Gamma AB = 2O$, καὶ ὡσαύτως $ZHB + EHB = 2O$· ἔςαι ΓΑΒ, ἐλάσσων τῆς ΕΗΒ. Καὶ συμπεσȣ̃νται ἄρα αἱ αὐταὶ εὐθεῖαι προαχθεῖσαι ἐπὶ θάτερα τὰ πρὸς Γ, Ε. Σχ.14.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

Σχ. 15. §. 277. Δυεῖν ἄρα εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ ἐπί τινος ἐπιπέδου διατεμνομένων, οὐκ ἂν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εὐθεῖα τρίτη ἡ ΖΗ ἀχθείη, ἥτις μὴ τῇ ἑτέρᾳ τῶν προτέρων ΑΒ, ΓΔ, ἢ ἑκατέρᾳ συμπίπτοι προαχθεῖσα, ἢν δέοι, προαχθείσῃ. Ἐὰν γὰρ ἀχθῇ ἀπὸ τοῦ Ε ἡ ΕΙ εὐθεῖα, ἡ τὴν ΖΗ, ὡς ἔτυχεν, οἷον κατὰ τὸ Θ τέμνουσα, ἐπάναγκές ἐστι θατέραν γοῦν τῶν ὑπὸ ΒΕΙ, ΔΕΙ, τῆς ὑπὸ ΗΘΙ, ἤτοι μείζονα εἶναι, ἢ ἐλάσσονα.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ. 16. §. 278. Ἐὰν τέμνῃ εὐθεῖαν εὐθεῖα, αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι, ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΒΕ, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ γὰρ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ κεφάλαιον, τῷ ἐκ τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΔΒΕ κεφαλαίῳ ἴσον. Τῆς οὖν κοινῆς ΑΒΔ ἑκατέρωθεν ἀρθείσης, ΑΒΓ = ΔΒΕ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

χ. 17. §. 279. Ἐὰν εἰς εὐθείας δύο τὰς ΑΒ, ΓΔ, εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ, ταῖς κατὰ τὰ Η καὶ Θ τομαῖς, τὴν ἐκτὸς γωνίαν ΕΗΒ, τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ΕΘΔ ἴσην ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τῶν ὑπὸ ΑΗΖ, καὶ ΕΗΒ ἴσων ἀλλήλαις οὐσῶν (§. 278.), καὶ ΓΘΖ = ΕΘΔ, ἔσονται καὶ ὑπ᾽ ΑΗΖ, ΓΘΖ ἀλλήλαις ἴσαι. Ἐὰν οὖν αἱ ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖαι μὴ ὦσι παράλληλοι, συμπεσοῦνται προαχθεῖσαι,

θεῖσαι, ἤτοι ἐπὶ τὰ πρὸς Β, Δ, ἢ ἐπὶ τὰ πρὸς Α, Γ. Καὶ ἰὼ μὲν ἐπ' ἐκεῖνα, ἄνισοι ἔσονται αἱ ὑπὸ ΕΗΒ, ΕΘΔ· ἢν δ' ἐπὶ ταῦτα, ἄνισοι ἔσονται αἱ ὑπὸ ΑΗΖ, ΓΘΖ (§. 261.). Οὐκ ἄρα συμπεσοῦνται, ὅπως ἂν ᾖ προαχθεῖσαι, ἀλλὰ παράλληλοι ἔσονται (§. 272.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 280. Καὶ ἐὰν τῶν ΑΒ, ΓΔ, ὡς εἴρηται τεμνομένων, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΗΖ, ΕΘΔ ἴσαι ὦσι, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ. Ἐπειδὴ γὰρ ΑΗΖ = ΕΗΒ, ἐὰν ᾖ ΑΗΖ = ΕΘΔ, ἴσαι καὶ ΕΗΒ = ΕΘΔ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 281. Καὶ ἐὰν αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ αἱ ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ὦσι, παράλληλοι ὡσαύτως ἔσονται αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ. Ἐπειδὴ γὰρ ΑΗΘ + ΘΗΒ = 2Ο (§. 274.), ἔσαι ΑΗΘ + ΘΗΒ = ΘΗΒ + ΗΘΔ· καὶ τῆς κοινῆς ἐκ μέσου γενομένης ΘΗΒ, ΑΗΘ = ΗΘΔ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 282. Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους ΑΒ, ΓΔ, ἐμπίπτουσα εὐθεῖα ΕΖ, καὶ ταύτας κατὰ τὸ Η καὶ Θ τέμνουσα, τὰς ὑπὸ ΕΗΒ, καὶ ΕΘΔ (τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη) ἴσας ἀλλήλαις ποιήσει. Σχ. 17.

ΔΕΙΞΙΣ.

Εἰ μὴ γὰρ αἱ ὑπὸ ΕΗΒ, ΕΘΔ ἴσαι, προαχθεῖσαι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἐπὶ τάδε, ἢ τάδε τῆς εἰς

 αὐτὰς

αὐτὰς ἐμπιπτούσης ΕΖ συμπεσοῦνται (§. 276.). Καὶ οὐκ ἄρα αἱ ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖαι παράλληλοι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 283. Ἐπειδὴ ἡ ὑπὸ ΑΗΖ, τῇ ὑπὸ ΕΗΒ ἴση, τῶν αὐτῶν τεθέντων, καὶ ὑπὸ ΑΗΖ, τῇ ἐναλλὰξ ἀντιθέτῳ ΕΘΔ ἴση ἐστί.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 284. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΖ, τῇ ὑπὸ ΖΗΒ προστεθεῖσα, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας συναποτελεῖ (§. 274.)· ἐὰν ἀντὶ ταύτης, ἡ ὑπὸ ΕΘΔ τῇ ὑπὸ ΖΗΒ ἐπιπροστεθῇ, τὸ προκύπτον κεφάλαιον ΗΘΔ + ΘΗΒ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσον ἔσται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 285. Ἡ ἐπὶ τῆς ἑτέρας τῶν παραλλήλων κάθετος, κἀπὶ τῆς ἑτέρας αὐτὸ τοῦτο ἔσται. Ἔνθεντοι καὶ εὐθεῖαι δύο, αἱ πρὸς τὴν αὐτὴν τρίτην ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου παράλληλοι, καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι εἰσίν.

ΤΜΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ
ΠΕΡΙ
ΓΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΠΛΕΥΡΩΝ
ΤΩΝ ΕΝ ΤΟΙΣ
ΣΧΗΜΑΣΙΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 286.

Σχῆμα ἐστὶν ἤτοι ἐπιφάνεια, ἢ στερεὸν πανταχόθεν ἔχουσα, ἢ ἔχον πέρατα. Σχῆμα Ἐπίπεδον τὸ πανταχόθεν πεπερατωμένον ὑπὸ γραμμῆς, ἤτοι καμπύλης, ἢ ἐκ καμπύλων, ἢ ἐκ καμπύλων τε καὶ εὐθειῶν, ἢ τέως ἐξ εὐθειῶν μόνων, συγκειμένης. Ἡ δὲ γραμμὴ τῇ μὲν τοῦ σχήματος Περιφέρεια καλεῖται, τῇ δὲ Περίμετρος. Αἱ δὲ εὐθεῖαι, ἢ αἱ καμπύλαι ἐξ ὧν ἡ περίμετρος, ἕκασται, τοῦ Σχήματος Πλευραί.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 287. Κοινὸν ἁπάσαις τῶν ἐπιπέδων σχημάτων ταῖς περιμέτροις, τὸ ὑπ᾽ εὐθείας διά τινος τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος σημείων ἀχθείσης τε καὶ προαχθείσης, κατὰ δισσὰ τοὐλάχιστον σημεῖα τέμνεσθαι. Καὶ δυοῖν δὲ σχημάτων τεμνόμεναι αἱ περίμετροι, κατὰ δισσὰ τοὐλάχιστον ὡσαύτως σημεῖα τμηθήσονται.

§. 288. Τῶν δὲ σχημάτων τὰ ἐπίπεδα, τὰ ἐν τοῖς αὐτοῖς δυνάμενα συνέχεσθαι πέρασιν· ἢ ἂν θάτερον οὕτω θατέρῳ παρατίθεσθαι δύναται, ὥστε τὰς περιμέτρους ἀλλήλαις προσεφαρμόζεσθαι, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Καίτοι, τάγε μὴ ἐφαρμόζοντα ἐν τοῖς ἀνίσοις τακτέον πάντα· ἡ γὰρ θατέρου μέρȣς ὑπεροχὴ τῇ ἐλλείψει θατέρȣ πολλάκις ἀντικαθίςαται.

§. 289. Τῶν δὲ μὴ μιᾷ καμπύλῃ περατȣμένων χημάτων, πλείοσι δὲ πλȣραῖς, εἰσὶν αἱ γωνίαι ταῖς πλȣραῖς ἰσάριθμοι· ὧν δὴ πλȣρῶν ἥτις εὐθεῖα, τȣ̃ λοιπȣ̃ αὐτη τῆς περιμέτρȣ ἐξ ἀνάγκης ἐλάοσων ἔςαι (§. 250.).

ΟΡΙΣΜΟΣ·

Σχ. 18. §. 290. Κύκλος ἐςὶ χῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς καμπύλης περιεχόμενον, ἧς ἡ φύσις τὸ καθ᾽ ἕκαςον τῶν ἐπ᾽ αὐτῆς σημείων, ἀφ᾽ ἑνὸς τινος σημείȣ τῶν ἐντὸς τȣ̃ χήματος ἐπίσης ἀφίςαϑαι. Τὸ δὲ σημεῖον τȣ̃το, οἷον τὸ Α, Κέντρον τȣ̃ κύκλȣ καλεῖται. Ἡ δὲ ΑΒ, ἡ τȣ̃ κέντρȣ ἀπὸ παντὸς τῶν ἐπὶ τῆς περιφερείας σημείων ἀπόςασις, Ἀκτὶς, ἢ Ἡμιδιάμετρος, ἢ Διάςημα.

ΣΧΟΛΙΟΝ·

§. 291. Ἡ τȣ̃ Κύκλȣ Περιφέρεια ἑτέρατις ἐςὶ γραμμὴ, ὡς λίαν ὑπȣργȣ̃σα ἐν ταῖς τῶν προβλημάτων ἐπιλύσεσι, παρ᾽ ἣν ȣ̓δεμία τῶν καμπύλων ἄλλη ἐπὶ τῆς ςοιχειώδȣς ταύτης Γεωμετρίας χώραν εἴληχεν. Ὅ, τι γὰρ ἐν ταύτῃ τελεῖται, διὰ γραμμῆς εὐθείας, καὶ τῆς τȣ̃ κύκλȣ περιφερείας τελεῖται. Διὸ καὶ ἡ τȣ̃ κύκλȣ καταγραφὴ ἐν τῷ δοθέντι κέντρῳ καὶ διαςήματι, τὸν αὐτὸν αἰτεῖται τρόπον, ὃν καὶ τὸ εὐθεῖαν γραμμὴν ἄγεσθαι, ὥσπερ εἴρηται (§. 254.).

§. 292. Τȣ̃ δὲ κύκλȣ καταγραφέντος, εὐθεῖα τῇ δοθείσῃ ΑΒ ἴση, ἀπὸ τȣ̃ δοθέντος σημείȣ Α ἐπὶ τȣ̃ ἐπιπέδȣ, τίθεται κατὰ πᾶν μέρος. Δι᾽ ȣ̔ δὴ μόνȣ καὶ ἡ εὐθείας ἐπ᾽ εὐθεῖα πρόσθεσις τελεῖται, καὶ ἡ τῆς ἐλάοσονος ἀπό γε τῆς μείζονος ἀφαίρεσις.
Σχ. 19. Κέντρῳ καὶ γὰρ τῷ Β, ὃ πέρας τῆς εὐθείας ἐςὶν ΑΒ,

ΑΒ, διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ = Δ, ἐὰν ἡ περιφέρεια καταγραφῇ, καὶ πρὸς ταύτην προαχθῇ ἡ ΑΒ, ἔσται καὶ ἡ ΒΕ = Δ. Ἔνθεντοι ΑΕ = ΑΒ + ΒΕ = ΑΒ + Δ. Καὶ ΑΓ = ΑΒ − ΒΓ = ΑΒ − Δ.

§. 293. Αὕτη δὲ ἡ τῆς περιφερείας χρῆσις, τὸ καὶ τὸν κύκλον ἡμᾶς ἐνταῦθα ὁρισμῷ ἀποδοῦναι ἀπήτησεν· ἢ γὰρ ὁ κύκλος σχῆμα, μετὰ τῶν αὐτοῦ μερῶν τῶν δυσὶν, ἢ πλείοσι γραμμαῖς ἐκπερατωμένων, ἐν τοῖς ἐφεξῆς τέως θεωρηθήσεται.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 294. Σχῆμα ἐπίπεδον, οὗ αἱ πλευραὶ πᾶσαι εὐθεῖαι, Εὐθύγραμμον λέγεται. Τὰ δὲ λοιπὰ Καμπυλόγραμμα, τὰ εἴθ' ὑπὸ καμπύλης, ἢ καμπύλων περατέμενα, εἴθ' ὑπὸ καμπύλων καὶ εὐθειῶν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 295. Τοῦ ἐπιπέδου καὶ εὐθυγράμμου σχήματος, τρεῖς τοὐλάχιστον αἱ πλευραὶ, τῶν δὲ τριῶν καὶ πλείονες τῷ σχήματι προσεῖναι δύνανται, ἐν παντὶ ἀριθμῷ.

§. 296. Κατασκευάζεται δὲ ἅπαν σχῆμα ἐπίπεδον εὐθύγραμμον προσληφθεισῶν ὁπωσοῦν παρὰ μίαν ἁπασῶν αὐτοῦ τῶν πλευρῶν, καὶ τούτων οὕτω συναφθεισῶν, ὡς ἑκάστην μετὰ τῆς προσεχοῦς αὐτῇ γωνίαν περιέχειν, πρὸς τὸ δοκοῦν καὶ ταύτην προσληπτέαν· ἔπειτα δὲ τῶν ἄκρων σημείων τοῦ μέρους τῆς οὕτω καταγραφείσης περιμέτρου ΑΒΓ, Σχ.20. δι' εὐθείας τῆς ΑΓ συνημμένων. Τὴν γραμμὴν ΑΓ ταύτην τὸ λοιπὸν τῆς περιμέτρου μέρος διατέμνειν οὐ δεῖ, εἰ μοναδικόν τις ἔχειν ἐθέλοι τὸ σχῆμα, καὶ μὴ ἐκ πλειόνων σχημάτων συγκείμενον.

§. 297. Ἀχθείσης δὲ τῆσδε τῆς ΑΓ, ταῖς τοῦ σχήματος γωνίαις δύο προσεπιγίνονται Α καὶ Γ, ταῖς δὲ

πλευ-

πλευραῖς μία ἡ ΑΓ. Τούτων δὲ πάντων τὸ μέγεθος ἀπὸ τῶν προσληφθεισῶν ἤρτηται πλευρῶν τε καὶ γωνιῶν, ὑφ' αἷς αἱ πλευραὶ τῆς συναφείας ἔτυχον. Καίτινων οὖν ἐξ αὐτῶν τρεπομένων, τὰ πολλὰ τρέπεται.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 298. Σχῆμα τὸ ἐπίπεδον καὶ εὐθύγραμμον, οὗ τρεῖς αἱ πλευραὶ, **Τρίπλευρον** καλεῖται, ἢ **Τρίγωνον**· οὗ δὲ τέτταρες **Τετράπλευρον**, ἢ **Τετράγωνον**· οὗ δὲ πέντε **Πεντάγωνον**, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἐν γένει δὲ τὰ εὐθύγραμμα τὰ ὑπὸ πλειόνων, ἢ τεσσάρων πλευρῶν περιεχόμενα, καλοῦνται **Πολύγωνα**.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Σχ.21. §. 299. Γίνεται τὸ τρίγωνον, δυοῖν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ὑπὸ τῇ τυχούσῃ γωνίᾳ Β, πρὸς ἀλλήλας ἐπίκλισιν λαβουσῶν, συναπτομένης καὶ τῆς ΑΓ· ὅθεν αὐτίκα δῆλον, τὰς ἐν αὐτῷ πλευρὰς, πῇ μὲν ἀλλήλαις ἴσας δύνασθαι εἶναι, πῇ δ' ὁπωσοῦν ἀνίσους.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 300. Τὸ τρίγωνον οὗ ἅπασαι αἱ πλευραὶ ἀλλήλαις ἴσαι, **Ἰσόπλευρον** λέγεται. Οὗ δὲ αἱ δύο μόναι ἀλλήλαις ἴσαι, **Ἰσοσκελές**. Τούτου δὲ **Σκέλη** μὲν τὰ ἴσα, **Βάσις** δὲ ἡ τρίτη. Οὗ δ' ἂν ἅπαντα ἄνισα εἴη, τὸ τοιοῦτο **Πλάγιον**, καὶ **Σκαληνόν**.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ.22. §. 301. **Ἐπὶ παντὸς τριγώνου ΑΒΓ, ἁπασῶν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΓΑΒ + Β + Γ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσον ἐστί.**

ΔΕΙΞΙΣ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τῆς ΒΑ πλευρᾶς προαχθείσης, νοείσθω ὑπὸ ΔΑΕ ἴση τῇ γωνίᾳ Β, καὶ ἔσαι ΑΕ πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ παράλληλος (§. 279.)· ἤτε ὑπὸ ΕΑΓ, ἴση τῇ Γ (§. 282.). Ἔνθαντοι Β + ΒΑΓ + Γ = Β + ΒΑΓ + ΓΑΕ. Ἀλλαμὴν ΒΑΓ + ΓΑΕ = ΒΑΕ. Ἄρα Β + ΒΑΓ + Γ = Β + ΒΑΕ. Αἱ δὲ Β καὶ ΒΑΕ, τὸ ἐκ δυεῖν ὀρθῶν συναποτελοῦσι κεφάλαιον (§. 284.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 302. Ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐπὶ τοῦ τριγώνου δύο γωνιῶν, διορίζεται ἡ τρίτη, καὶ ἐκ τῆς μιᾶς τῶν τριῶν ὁποιασοῦν, τὸ δυεῖν ἄθροισμα τῶν λοιπῶν. Καὶ ἐπέσαι ἄρα, ὥσπερ ἐκ τῶν δύο ἅμα τὴν τρίτην, οὕτως ἀνάπαλιν ἐκ ταύτης, ἐκείνας ἅμα, ἡλίκαι προσθορεῖν. Ἔσω ΑΒΓ, τῶν ἐπὶ τοῦ τριγώνου Σχ. 23. δύο γωνιῶν τὸ ἄθροισμα· προεκβληθείσης δὲ τῆς ΒΓ κατὰ τὸ Δ, ἔσαι ὑπὸ ΑΒΔ γωνία τῶν ἐν τῷ τριγώνῳ ἡ τρίτη (§. 275.). Καὶ ἐὰν ὑπὸ ΑΒΔ, τινὶ τῶν ἐπὶ τοῦ τριγώνου γωνιῶν ἴση ᾖ, ἔσαι ὑπὸ ΑΒΓ τῶν λοιπῶν τὸ ἄθροισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 303. Ἐάντις τῶν ἐπὶ τοῦ τριγώνου γωνιῶν ὀρθὴ ᾖ, ἔσαι δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν ἄθροισμα ἴσον ὀρθῇ· καὶ τούτων ἑκατέρα ὀρθῆς ἐλάσσων καθ᾽ ἑαυτὴν, ἤτοι ὀξεῖα. Οὐδ᾽ ἂν γένοιντο ἐν τῷ τριγώνῳ γωνίαι ὀρθαὶ πλείους μιᾶς.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 304. Ἐὰν δέ τις τῶν ἐπὶ τοῦ τριγώνου γωνιῶν, ὀρθῆς ᾖ μείζων, ἤτοι ἀμβλεῖα, τὸ ἐκ τῶν λοιπῶν ἄθροισμα, ὀρθῆς ἐλάσσονα, ἤτοι ὀξεῖαν παρέξεται. Διὸ τοσῷδε μᾶλλον ἑκατέρα ἐκείνων ἐν τῷ μέρει ὀξεῖα ἔσαι. Οὐδ᾽ ἂν ἐγγένοιντο ἐν ἑνὶ καὶ τῷ αὐτῷ τριγώνῳ, γώνω, ἀμβλεῖαι δύο· ἐδὲ μὲν ἓν ἀμβλεῖατε καὶ ὀρθή.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 305. Τὸ ἐκ δυεῖν ὁποίωνδήποτε τῦ τριγώνυ γωνιῶν ἄθροισμα, δυεῖν ὀρθῶν ἔλαττον ἐςί· τὸ δ' αὐτὸ καὶ μιᾶς ὀρθῆς ἔλαττον τυχὸν, ἡ λοιπὴ τρίτη ἀμβλεῖα ἔςαι· ἴσον δὲ ὂν ὀρθῇ, ὀρθή· μεῖζον δὲ ὀρθῆς, ὀξεῖα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 306. Παντός τριγώνυ ΑΒΓ, μιᾶς τῶν πλευρῶν ΒΓ κατὰ τὸ Δ προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς ὑπὸ ΑΓΔ, δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, Α, καὶ Β
Σχ. 24. ἅμα ληφθείσαις ἴση ἐςίν. Ἐπειδὴ γὰρ ΑΓΔ + ΑΓΒ = 2Ο = Α + Β + ΑΓΒ. Ἄρα τῆς κοινῆς ΑΓΒ ἐκ μέσυ ληφθείσης ΑΓΔ = Α + Β.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 307. Ἐπὶ παντὸς σχήματος ἐπιπέδυ εὐθυγράμμυ, τὸ κεφάλαιον ἁπασῶν τῶν γωνιῶν, ἴσον ἐςὶ δὶς τοσαύταις ὀρθαῖς γωνίαις, ὅσαι εἰσὶ τῷ σχήματι αἱ πλευραὶ, πλὴν τεσσάρων.

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 25. Ὁποιονῦν ληφθὲν σημεῖον Θ, τῶν ἐντὸς τῦ σχήματος ΑΒΓΔΕΖΗ, καὶ ἀπ' αὐτῦ ἀχθεισῶν τῶν ΘΑ, ΘΒ, ΘΓ, κλ. ἐφ' ἁπάσας τὰς τῶν γωνιῶν κορυφὰς, τοσαῦτα τὸν ἀριθμὸν προκύψει τρίγωνα, ὅσαι τῷ σχήματι αἱ πλευραὶ, ἐφ' ὧν ἁπάντων τὸ τῶν γωνιῶν ἄθροισμα, τὸ κεφάλαιον συναποτελεῖ δὶς τοσύτων ὀρθῶν (§. 301.). Ἀλλ' αἱ περὶ τὸ Θ γωνίαι, αἱ τῷ σχήματι μὴ προσανήκυσαι, ἅμα ληφθεῖσαι, ὀρθαῖς τέτλαρσιν ἴσαι εἰσί (§. 175.). Τύτων ἄρα ἀφαιρεθεισῶν, αἱ κατὰ τὰ τρίγωνα λοιπαὶ γωνίαι, ὧν τὸ κεφάλαιον ἴσον τῷ ἀθροίσματι

τῶν

τῶν τȣ̃ σχήματος γωνιῶν, δὶς τοσαύτας ὀρθὰς συναποτελȣ̃σιν, ὅσαι τῷ σχήματι αἱ πλȣραὶ, πλιὼ τεσσάρων.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 308. Ἐπὶ παντὸς τετραπλȣ́ρȣ, τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν γωνιῶν, τέτlαρσιν ὀρθαῖς ἴσον ἐςίν. Ἐπὶ δὲ τȣ̃ πενταγώνȣ ἕξ. Ἐπὶ δὲ τȣ̃ ἑξαγώνȣ ὀκlὼ· καὶ ȣ̃τως ἐφεξῆς, δυεῖν ὀρθῶν ἑκάςῃ πλȣρᾶ προσεπιγραφομένων, καθ' ἣν ὁ τῶν πλȣρῶν ἀριθμὸς προσαύξει ἐπὶ τȣ̃ σχήματος.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 309. Τὸ ᾧπερ ἔνεςι γωνία ὀρθὴ, τρίγωνον Ὀρθογώνιον καλεῖται. Τὸ δ' ᾧπερ ἀμβλεῖα, Ἀμβλυγώνιον. Ἐν ᾧ δ' ἂν τȣ́των ȣ̓δετέρα ἐνείη, πᾶσαι δ' ὀξεῖαι, Ὀξυγώνιον.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 310. Τὸ τετράπλȣρον ȣ̃ αἱ ἀπεναντίον πλȣραὶ παράλληλοι, Παραλληλόγραμμον λέγεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 311. Ἐπὶ τȣ̃ παραλληλογράμμȣ, τῶν γωνιῶν ἀεὶ αἱ τυχȣ̃σαι δύο, αἷς ἡ πλȣρὰ κοινὴ, οἷον Α, Β, τῷ ἐκ δυεῖν ὀρθῶν ἀθροίσματι ἴσαι εἰσίν. (§. 284.). Σχ. 26.

§. 312. Κἀντεῦθεν ἕπεται τὰς ἐπὶ τȣ̃ παραλληλογράμμȣ ἀπεναντίον κειμένας τῶν γωνιῶν, ἴσας ἀλλήλαις εἶναι, ἤτοι $Α = Γ$ καὶ $Β = Δ$. Καὶ γὰρ $Α + Β = Α + Δ$.

§. 313. Καὶ ἐὰν μία κατὰ τὸ παραλληλόγραμμον Α, γωνία ὀρθὴ ᾖ, ἔσονται ὀρθαὶ πᾶσαι. Ἡ μὲν γὰρ Β, ὅτι $Α + Β = 2O$. Ἡ δὲ Γ καὶ ἡ Δ, ὅτι ταῖς ὀρθαῖς ἀντικείμεναι εἰσί.

§. 314. Ἐὰν δὲ μία ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ γωνία πλαγία ᾖ, πλάγιαι ἔσονται καὶ αἱ λοιπαὶ πᾶσαι. Εἰ γάρ τις ἐν αὐταῖς ὀρθὴ, καὶ ἡ κατ' ἀρχὰς ληφθεῖσα ὀρθὴ ἂν εἴη.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 315. Τὸ παραλληλόγραμμον, ὃ πᾶσαι αἱ γωνίαι ὀρθαὶ, λέγεται Ὀρθογώνιον, τὸ δ' ὀρθογώνιον καὶ τὰς πλευρὰς ἔχον ἀλλήλαις ἴσας, καλεῖται Τετράγωνον.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ. 27. §. 316. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἡ μὲν Β γωνία, ἴση ᾖ τῇ ἐν τῷ αβγ τριγώνῳ γωνίᾳ β. Αἵτε πλευραὶ ὑφ' ὧν αἱ ἴσαι γωνίαι περιέχονται, ἀλλήλαις ἴσαι, οἷον ΑΒ = αβ, καὶ ΒΓ = βγ, ἔσονται καὶ αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις. ΑΓ = αγ, καὶ αἱ γωνίαι ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν Α = α, καὶ Γ = γ· Καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐφαρμόσει γὰρ πλευρὰ ἡ βγ πλευρᾷ τῇ ΒΓ, τοῦ β σημείου ἐπὶ τοῦ Β πίπτοντος· ἐφαρμόσει δὲ καὶ ἡ κατὰ τὸ β γωνία τῇ κατὰ τὸ Β. Καὶ πλευρὰ δὲ βα, πλευρᾷ ΒΑ. Τοιγαροῦν καὶ πλευρὰ αγ, πλευρᾷ ΑΓ ἐφαρμόσει· καὶ γωνία ἡ κατὰ τὸ α γωνίᾳ τῇ κατὰ τὸ Α· καὶ ἡ κατὰ τὸ γ τῇ κατὰ τὸ Γ. Καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον αβγ, ὅλῳ τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 317. Τῶν αὐτῶν τεθέντων, ἐὰν ᾖ καὶ ΑΒ = ΒΓ, κἀντεῦθεν καὶ αβ = βγ· ὅπερ ἐστὶν, ἐὰν τὰ τρίγωνα καὶ ἰσοσκελῆ ᾖ, προσεφαρμόσαι δυνήσεται

σεται ȣ̓ μόνον τῆς βγ ἐπὶ τῆς ΒΓ πιπτȣ́σης, ἀλλ᾽ ἔτι δὴ καὶ τῆς βα ἐπὶ τῆς ΒΓ. Καὶ ἔσαι δὲ ȣ̓ μόνη ἄρα ἡ γωνία Γ, ἴση τῇ γ· ἀλλὰ καὶ ἡ Α = γ. Ἔνθεντοι καὶ ἡ Γ = Α· τȣτέσιν ἐπὶ παντὸς ἰσοσκελȣ̃ς τριγώνȣ, αἱ πρὸς τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἔσονται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 318. Ἐπὶ τȣ̃ ἰσοσκελȣ̃ς τριγώνȣ ΑΒΓ, ȣ̃ βάσις ἡ ΒΓ, μιᾶς τῶν γωνιῶν δοθείσης, δίδονται πᾶσαι. Ἐὰν γὰρ ἡ Β δοθῇ, δοθήσεται καὶ ἡ ταύτῃ ἴση Γ· κἀντεῦθεν καὶ ἡ τρίτη Α. Ἐὰν δὲ δοθῇ ἡ Α, δοθήσεται καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν λοιπῶν Β + Γ, ȣ̃ τὸ ἥμισυ ἐσὶ Β, ἢ Γ (§. 302.). Σχ. 28.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 319. Ἐπὶ τȣ̃ ἰσοπλεύρȣ τριγώνȣ, πᾶσαι αἱ γωνίαι ἴσαι εἰσί· διὸ καὶ τȣ́των ἑκάσῃ, ὅσα καὶ δύο τριτημόρια ὀρθῆς δύναται.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 320. Ἐὰν αἱ δύο γωνίαι τȣ̃ ΑΒΓ τριγώνȣ, δυσὶ ταῖς τȣ̃ αβγ ἴσαι ὦσιν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ πλευρὰ πλευρᾷ, αἱ ἐπίσης ταῖς ῥηθείσαις γωνίαις προσκείμεναι· ἔσονται δὴ καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνȣσαι, ἀλλήλαις ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ τὸ ὅλον τρίγωνον τῷ ὅλῳ τριγώνῳ. Σχ. 29.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔσω γωνία Α ἴση γωνίᾳ α, καὶ Β = β, ἔσαι καὶ ὑπὸ ΒΓΑ = γ (§. 302.). Ἔσω καὶ πλευρὰ ΒΓ = βγ πλευρᾷ, αἳ δὴ πλευραὶ ἐπίσης ταῖς ἴσαις γωνίαις προσκείμεναι εἰσί· Φημὶ δὴ ὅτι καὶ ΒΑ = βα. Εἰ μὴ γάρ, ἔσω ΒΔ = βδ. Ἐπειδὴ ȣ̓̃ν καὶ Β = β, καὶ ΒΓ = βγ, ἔσαι καὶ ὑπὸ ΔΓΒ = γ (§. 316.). Ἀλλὰ καὶ ΑΓΒ = γ. Ἄρα ΔΓΒ = ΑΓΒ· ὅπερ

 ἀδύνα-

ἀδύνατον. Ἔστιν ἄρα ΑΒ = αβ, κἀντεῦθεν καὶ ΑΓ = αγ. Καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἴσον τῷ τριγώνῳ αβγ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

Σχ. 28. §. 321. Παντὸς τριγώνου ΑΒΓ, οὗ αἱ δύο τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ αἱ πλευραὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· ΑΒ = ΑΓ. Καὶ ἔσται ἰσοσκελές. Ἐντὸς γὰρ τῶν αὐτῶν περιγραφήσεται ὅρων τὸ τοιόνδε τρίγωνον ἀναστραφὲν, ὡς (τοῦ σημείου Α κατὰ χώραν μένοντος) τὸ μὲν Γ ἐπὶ τὸ Β πεσεῖν, τὸ δὲ Β ἐπὶ τὸ Γ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 322. Διὸ τὸ ἰσογώνιον καὶ ἰσόπλευρον.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 323. Τὰ τρίγωνα ὧν ἴσαι αἱ πλευραὶ ἑκάστη ἑκάστῃ, ἴσα τε ἐστὶ, καὶ ἴσας ἀλλήλαις ἔχοντα τὰς γωνίας, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 30. 31. Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΑΒΔ, ὧν ἴσαι αἱ πλευραὶ ΑΒ = ΑΒ, ΑΓ = ΑΔ, καὶ ΒΓ = ΒΔ, οὕτω διατεταγμένα ὡς ἐπὶ τοῦ σχήματος φαίνεται. Καὶ ἀχθήτω ΓΔ. Ἔστι τοίνυν τῶν τριγώνων ἑκάτερον ΓΑΔ, ΓΒΔ ἰσοσκελές. Διὸ καὶ ὑπὸ ΑΓΔ = ΑΔΓ. Καὶ ΔΓΒ = ΓΔΒ (§. 317.). Ἄρα καὶ ὑπὸ ΑΓΒ = ΑΔΒ τὰ ἐκείνων κεφάλαια, ἢ αἱ διαφοραί. Καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων ΑΓΒ, ΑΔΒ, αἱ ἴσαι γωνίαι ὑπὸ ΑΓΒ, ΑΔΒ, ὑπὸ ἴσων περιέχονται πλευρῶν ΑΓ = ΑΔ, καὶ ΒΓ = ΒΔ· ὅθεν δῆλον τὸ προτεθέν (§. 316.).

ΠΡΟΒΛΗ-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 324. Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσὶ πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, τρίγωνον ἐξ αὐτῶν συςήσαθαι.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔςωσαν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι Α, Β, Γ. Καὶ ἐπὶ Σχ. 32.
εὐθείας μὴ πεπερασμένης γινέθω $ΔΕ = Α$, $ΔΖ = Β$, $ΕΗ = Γ$. Καὶ κέντροις μὲν τῷ Δ καὶ τῷ Ε, διαςήμασι δὲ τῷ ΔΖ καὶ τῷ ΕΗ, κύκλων γεγράφθωσαν περιφέρειαι, αἱ διὰ τὴν ὑπόθεσιν (καθ' ἣν δηλονότι $ΕΗ + ΖΔ > ΔΕ$. Καὶ $ΖΔ + ΔΕ > ΕΗ$. Καὶ ἔτι $ΔΕ + ΕΗ > ΖΔ$.) ἀλλήλας διατεμοῦσι. Καὶ δὴ τεμνέθωσαν κατὰ τὸ Θ. Συζευχθεισῶν γὰρ τῶν ΘΔ, ΘΕ, ἔςαι τὸ ΔΘΕ τρίγωνον, τὸ ζητούμενον.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔςι γὰρ $ΘΔ = ΔΖ = Β$. Καὶ $ΘΕ = ΕΗ = Γ$. Καὶ $ΔΕ = Α$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 325. Ἐὰν αἱ δύο τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, τὸ τρίγωνον ἰσοσκελὲς συςαθήσεται· ὃ ἐπὶ βάσεως οἱασοῦν ςήσεται δοθείσης, ἧς ἂν τοῦ ἡμίσεως, τὸ δοθὲν σκέλος μεῖζον ὑπάρχοι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 326. Ἐὰν αἱ εἰς πλευρὰς δοθεῖσαι Α, Β, Γ, πᾶσαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι· τουτέςιν ἐὰν δοθῇ μία ἀντὶ πασῶν, τὸ ἐξ αὐτῶν συνιςάμενον τρίγωνον ἔςαι ἰσόπλευρον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 327. Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ, Σχ. 33.
καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ δοθέντι σημείῳ Α, γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ Γ, θέσθαι.

Ληφθεισῶν τῶν ΓΔ, ΓΕ πρὸς τὸ δοκῦν, πληρέσθω τὸ τρίγωνον ΓΔΕ. Εἶτα ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, ἀπὸ τῦ δοθέντος σημείȣ Α, τρίγωνον συνεςάσθω, ἐν ᾧ ἡ ΑΖ = ΓΔ, ΑΗ = ΓΕ, καὶ ΗΖ = ΕΔ (§. 324.).

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπὶ τῶν ΗΑΖ, ΕΓΔ τριγώνων, ὧν αἱ πλευραὶ ἴσαι ἑκάςη ἑκάςῃ, ἡ κατὰ τὸ Α γωνία, τῇ κατὰ τὸ Γ ἴση ἔςαι (§. 323.).

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 328. Ἔξεςαι ἀεὶ τὴν ΓΕ = ΓΔ λαμβάνειν, τὸν ἐπὶ τῇ κατασκευῇ πόνον ὁπωσῦν ἐπιτέμνοντας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Σχ. 34. §. 229. Τῇ ἐπὶ τῦ ἐπιπέδȣ δοθείσῃ εὐθείᾳ ΑΒ, διὰ τῦ δοθέντος σημείȣ Γ, παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἄχθήτω διὰ τῦ σημείȣ Γ ἡ ΕΔ, τῇ ΑΒ δοθείσῃ προσπίπτουσάπȣ. Εἶτα γινέσθω ἡ ὑπὸ ΕΓΖ, ἢ τῦτο δόξαν, ἡ ὑπὸ ΗΓΔ, τῇ ὑπὸ ΕΔΒ ἴση.

ΔΕΙΞΙΣ.

Αἱ γὰρ ΗΖ, ΑΒ, ὑπὸ τῆς αὐτῆς τρίτης ἐμπιπτȣ́σης ΕΔ τεμνόμεναι, ἐν ἴσαις ταῖς γωνίαις ΕΓΖ, ΕΔΒ, ἢ ΗΓΔ, ΕΔΒ, παράλληλοι ἔσονται (§. 279. 280.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

Σχ. 35. §. 330. Διὰ τȣ́των καὶ τὸ παραλληλόγραμμον πληρωθήσεται, ὑπὸ γωνίᾳ ὁποιᾳδήποτε δοθείσῃ τῇ Β, καὶ δυσὶν εὐθείαις ΑΒ, ΒΓ· ἀγομένων δηλονότι παραλλήλων, τῆς μὲν ΑΔ τῇ ΒΓ, τῆς δὲ ΓΔ τῇ ΑΒ. Τῶν δὲ δὴ εὐθειῶν τῶνδε ἑκατέρα ληφθέληφθήσεται, πληρωθέντος τȣ̃ ΑΒΓ τριγώνȣ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ τριγώνȣ ἄλλȣ συςάντος τȣ̃ ΑΔΓ, ὅπερ ἂν ἡ πλευρὰ ΑΔ, τῇ ἐπὶ θατέρȣ ΒΓ ἴση εἴη, καὶ ΔΓ = ΑΒ. Τȣ́τȣ γὰρ γινομένȣ ἔσονται ὑπὸ ΑΓΒ = ΔΑΓ, καὶ ΒΑΓ = ΔΓΑ (§. 323.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 331. Κἀντεῦθεν δὲ δῆλον, ὅτι ἅπαν τετράπλευρον, ὅπερ ἂν αἱ ἀπεναντίον τῶν πλευρῶν ἴσαι ἔιεν, παραλληλόγραμμον εἶναι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 332. Ἐὰν ἡ κατὰ τὸ Β γωνία ὀρθὴ ᾖ, τὸ παραλληλόγραμμον συςαθήσεται ὀρθογώνιον (§. 313.). Ἐὰν δὲ ᾖ προσέτι καὶ ΑΒ = ΒΓ, τὸ ὀρθογώνιον ἔςαι τετράγωνον (§. 315.)· ὅπερ καὶ ἐφ᾽ οἱασȣ̃ν δοθείσης πλευρᾶς δύναται συςαθῆναι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 333. Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ὑπὸ ΑΒΓ, δίχα (ὅπερ ἐςὶν εἰς γωνίας ἀλλήλαις ἴσας) τεμεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἀποτμηθεισῶν, ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΒΓ σκελῶν, τῶν ΒΔ, ΒΕ ἀλλήλαις ἴσων, ἀχθήτω ἡ ΔΕ, καὶ ἐπ᾽ αὐτῆς ὡς βάσεως συνεςάθω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΔΕΖ, πρὸς ὁπότερον ἂν δόξειε τῶν μερῶν. Εἶτα συζευχθήτω ἡ ΒΖ. Σχ. 36.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ τȣ̃ ΔΒΖ τριγώνȣ πλευραὶ, ταῖς τȣ̃ ΕΒΖ, ἑκάςη ἑκάςῃ ἴσαι εἰσὶ, καὶ αἱ τȣ́των πρὸς τῷ Β γωνίαι, ἐξ ὧν ἡ τεθεῖσα γωνία ΑΒΓ συνολȣ̃ται, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται (§. 323.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

Σχ. 37. §. 334. Διὰ τῆς αὐτῆς δὲ κατασκευῆς, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ εὐθείας, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου Β, κάθετος εὐθεῖα ἀχθήσεται. Ἡ γὰρ δὴ οὕτως ἀγομένη, τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τὴν δυσὶν ὀρθαῖς ἴσην οὖσαν, δίχα τέμνει· καὶ γενομένης ἄρα ΒΔ = ΒΕ· καὶ ἐπὶ τῆς ΔΕ, τριγώνου ἰσοσκελοῦς συστάντος τοῦ ΔΖΕ, ἡ ΖΒ ἐπὶ τῆς ΑΓ πρὸς ὀρθὰς σήσεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 335. Ἐπειδὴ δὲ διὰ τὴν τῶν πλευρῶν ἰσότητα, καὶ τὰ τρίγωνα ΖΒΔ, ΖΒΕ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· καὶ αἱ λοιπαὶ δὲ τούτων γωνίαι, αἱ πρὸς ταῖς ἴσαις πλευραῖς, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἰσοσκελοῦς ΔΖΕ ἀγομένη, καὶ τὴν βάσιν ΔΕ δίχα τέμνουσα, πρὸς τῷ κάθετος αὐτῇ εἶναι, καὶ τὸ τρίγωνον διχοτομεῖ, καὶ τὴν γωνίαν ὑφ' ἣν ἡ βάσις ὑποτείνει.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 336. Ἡ δὲ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Ζ τοῦ ἰσοσκελοῦς ΖΔΕ, κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τῆς βάσεως, ταύτην δίχα τέμνει. Εἰ γὰρ μή, ἡ ἄρα κάθετος ἐκείνη, ἐπὶ τῆς ΖΒ, τῆς τὴν βάσιν διχοτομούσης οὐ πίπτει. Καὶ διελεύσονται ἄρα διὰ τοῦ Ζ εὐθεῖαι δύο τῇ βάσει κάθετοι· ἥτε ΒΖ δηλονότι αὕτη, καὶ ἡ ἑτέρα· ὅπερ οὐχ οἷόν τε (§. 266.).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Σχ. 38. §. 337. Τὴν δοθεῖσαν ΑΒ, δίχα τεμεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Συνεστάθω ἐπὶ τῆς ΑΒ δοθείσης τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ. Καὶ δίχα τετμήσθω ἡ γωνία, ὑφ' ἣν ὑφ᾽ ἣν ἡ βάσις ὑποτείνει (§. 333.), καὶ προαχθήτω ἡ ΓΔ, ὥστε τὴν βάσιν ΑΒ τεμεῖν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ᾖ· ἐπεὶ καὶ ΑΓ = ΓΒ, καὶ ΓΔ = ΓΔ, καὶ αἱ λοιπαὶ τῶν ΓΑΔ, ΓΒΔ τριγώνων πλευραὶ, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. τουτέστιν ΑΔ = ΒΔ (§. 316.).

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 338. Τῶν αὐτῶν γινομένων, καὶ τὸ τρίγωνον ΓΔΑ, τῷ τριγώνῳ ΓΒΔ ἴσον ἐστί. Καὶ ὑπὸ ΓΔΑ, ἴση τῇ ὑπὸ ΓΔΒ. Καὶ ἡ εὐθεῖα ἄρα ΓΔ, ἡ τὴν γωνίαν τοῦ ἰσοσκελοῦς διχοτομοῦσα ὑφ᾽ ἣν ἡ βάσις ὑποτείνει, τήν τε βάσιν αὐτὴν δίχα τέμνει, καὶ τὸ τρίγωνον, καὶ δὴ καὶ πρὸς τὴν βάσιν κάθετος ἐστί.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 339. Πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, ἀπὸ τοῦ σημείου ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽ αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Σχ. 39.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ σημεῖον Γ. Καὶ ληφθείτος τοῦ Δ, ἐπὶ θάτερα τῆς εὐθείας, κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΔ, περιφέρεια γεγράφθω ἡ τὴν ΑΒ κατὰ δισσὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ τέμνουσα. Συνεζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ ΓΕ, ΓΖ: ἥτε ὑπὸ ΕΓΖ, δίχα τετμήσθω διὰ τῆς ΓΗ, ἥτις προαχθήτω, ἕως οὗ τῇ δοθείσῃ ΑΒ προσπέσῃ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ αἱ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἡμιδιάμετροι ΓΕ, ΓΖ, ἴσαι, τὸ ΕΓΖ τρίγωνον ἐστὶν ἰσοσκελές· ἥτε ΓΗ, ἡ

 τὴν

τlὼ γωνίαν, ὑφ' lὼ ἡ βάσις ὑποτείνει, δίχα τέμνουσα, τῇ αὐτῇ βάσει κάθετός ἐςι (§. 338.).

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 340. Ἐπὶ παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ, τlὼ μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ.40. Ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἔςω ὑπὸ ΑΒΓ μείζων τῆς γωνίας τῆς κατὰ τὸ Γ. Φημὶ δὴ ὅτι ἡ ΑΓ πλευρὰ, τῆς ΑΒ πλευρᾶς μείζων. Γινέσθω γὰρ, ἡ ὑπὸ ΔΒΓ = Γ, καὶ ἔςαι ΒΔ = ΔΓ (§. 321.). Προςεθείσης δ' ἑκατέρωσε τῆς ΑΔ, ἔςαι ΑΔ + ΒΔ = ΑΔ + ΔΓ. Ἔςι δὲ ΑΔ + ΒΔ, τὸ ἄθροισμα τὸ ἐκ τῶν δύο τοῦ τριγώνου πλευρῶν, τῆς λοιπῆς πλευρᾶς ΑΒ, μεῖζον (§. 289.). Ἄρα καὶ ΑΔ + ΔΓ, τουτέςιν ἡ ΑΓ πλευρὰ, τῆς πλευρᾶς αὐτῆς ΑΒ μείζων ἔςαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 341. Ἐπὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἡ ὑποτείνουσα τlὼ ὀρθlὼ γωνίαν πλευρὰ, ἁπασῶν ἐςὶ τῶν ἐν τῷ τριγώνῳ πλευρῶν ἡ μείζων. Ἐπὶ δὲ τοῦ ἀμβλυγωνίου, ἡ τlὼ ἀμβλεῖαν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

Σχ.41. §. 342. Ἔνθεν τοι, ἐὰν ἀπὸ τοῦ σημείου Γ, τοῦ ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΒ δοθέντος, πρὸς ταύτlω κάθετος ἀχθῇ ἡ ΓΔ, αὕτη ἁπασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τlὼ αὐτlὼ ΑΒ ἀχθlῶαι δυναμένων, ὥσπερ ἡ ΓΕ, ἔςαι ἡ ἐλαχίςη. Η γὰρ ΓΕ ἐπὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΔΕ, τlὼ ὀρθlὼ τῶν γωνιῶν ὑποτείνουσα, μείζων ἐςὶ τῆς ΓΔ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 343. Καὶ ἐὰν παρὰ τὴν ΓΕ, καὶ εὐθεῖα ἄλλη ΓΖ, ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὴν ΑΒ ἀχθῇ, μᾶλλον τῆς καθέτου ΓΔ ἀφισαμένη, ἤπερ ἡ ΓΕ, μείζων ταύτης ἐκείνη ἔσαι, ἡ ΓΖ τῆς ΓΕ. Τῆς γὰρ ὑπὸ ΓΕΔ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ὀξείας οὔσης, ἡ ὑπὸ ΓΕΖ ἐσὶν ἀμβλεῖα· ἥτε ΓΖ ἐπὶ τοῦ ΓΕΖ ἀμβλυγωνίου, τὴν ἀμβλεῖαν τῶν γωνιῶν ὑποτείνει.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 344. Ἔνθαντοι μία μόνη ΓΕ, ἰσομεγέθης δὲ αὐτῇ εὐθεῖα ἄλλη ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ οὐκ ἂν ἀχθείη ἐπὶ τὰ μέρη τῆς καθέτου ΓΔ τὰ αὐτά. Ἐπὶ δὲ τ' ἀντίθετα, ἐὰν γένηται ΔΗ = ΔΕ, ἔσαι καὶ ΓΗ = ΓΕ. Παράγεμὴν ταύτην τὴν ΓΗ, οὐδ' ἐπὶ τάδε, ἴση τῇ ΓΕ ἄλλη γένοιτο ἄν, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπίπἰουσα. Καὶ καθόλου τοίνυν, δυεῖν πλείονες εὐθεῖαι ἀλλήλαις ἴσαι, ἀπό τοῦ Γ σημείου ἐπὶ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν οὐκ ἂν ἀχθεῖεν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 345. Ἀχθείσης τῆς ΓΗ, ἐπὶ τῆς ΑΒ, πλαγίως, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Γ, εὐθεῖαι δύο πρὸς τὴν ΑΒ ἀχθῆναι δυνήσονται, ἴσαι μὲν ἀλλήλαις, τῆς μέντοι ΓΗ ἐλάσσονες, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, ὧν ἡ μὲν ἐντὸς τῆς ὑπὸ ΗΓΔ πεσεῖται, ἡ δὲ ἐντὸς τῆς ὑπὸ ΔΓΕ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ϛ.

§. 346. Δύο δ' εὐθεῖαι τῆς πρὶν ἀχθείσης ΓΗ μείζονες, καὶ ἀλλήλαις ἴσαι, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἐκείνης μέρη κείμεναι, ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἐπὶ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν ἀχθῆναι οὐ δύνανται. Ἐὰν γὰρ τούτων ἡ ἑτέρα εἶναι τεθῇ ΓΕ, ἡ ἑτέρα ἐπὶ τὸ μέρος Δ πεσεῖται τῆς εὐθείας ΓΗ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ.

§. 347. Ταύτητοι τῆς ὑπὸ ΓΗΒ δοθείσης, καὶ τῆς προσκειμένης αὐτῇ πλευρᾶς ΓΗ, καὶ δὴ καὶ τῆς πλευρᾶς ἥτις ἂν τὴν αὐτὴν γωνίαν ὑποτείνοι· ἐδὲν τρίγωνον κατασκευασθήσεται, ἐὰν ἡ ὑποτείναι τὴν γωνίαν ΓΗΒ ὀφείλεσα πλευρὰ, τῆς καθέτε ΓΔ ἐλάσσων ᾖ. Ἓν δὲ κατασκευασθήσεται, ἐὰν ἴση ᾖ τῇ καθέτῳ, ἐλάσσων δὲ τῆς πλευρᾶς ΓΗ. Καὶ αὖθις ἓν μόνον, ἐὰν ἤτοι ἴση ᾖ τῇ ΓΗ, ἢ ταύτην ὑπερέχεσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Η.

Σχ. 42. §. 348. Ἐπὶ τε ὀρθογωνίε τριγώνε ΑΒΓ, μενέσης τῶν πλευρῶν τῆς μεγίστης, εἴτις τῶν λοιπῶν πλευρῶν μειωθείη, ἡ τρίτη πλευρὰ ἐπαυξήσει. Ἐὰν γὰρ ἀπὸ ΒΓ γένηται ΒΔ, ἀπὸ τε αὐτε Α σημείε, ἀχθεῖσα ἡ ΑΔ, ἐλάσσων ἔσαι τῆς ΑΓ. Ἔνθεντοι ἡ ΔΕ, ἴσω τῇ μεγίσῃ πλευρᾷ ΑΓ ἴσιω ἀπὸ τε Δ σημείε ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΒΕ δέον ἀγαγεῖν, ἐκτὸς τῆς ΑΔ πεσεῖται, καὶ τὴν ΒΕ τῆς ΒΑ μείζονα ἀπολήψεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ. 43. §. 349. Ἐπὶ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΒΓ, αβγ, ὧν ἴσαι αἱ πλευραὶ αἱ τῶν ὀξειῶν τινα γωνιῶν περιέχεσαι, ΑΒ = αβ, καὶ ΑΓ = αγ, καὶ ἡ τρίτη τῇ τρίτῃ πλευρᾷ ἴση ἔσαι· ἢ αἱ γωνίαι ταῖς γωνίαις, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνεσιν, ἴσαι ἔσονται· καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσαι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν γὰρ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΓ, μὴ ἴση ᾖ πλευρᾷ τῇ βγ, ἔσαι τῆς ἑτέρας ἡ ἑτέρα ἐλάσσων. Ἔσω οὖν βγ ἐλάσσων τῆς ΒΓ. Ἐπεὶ δὲ αγ = ΑΓ, ἔσται αβ μείζων τῆς ΑΒ (§. 348.)· κατὰ τῆς ὑποθέσεως. Οὐκ ἄρα ἄνισοι αἱ τῶν τριγώνων πλευραὶ ΒΓ, βγ· ὅθεν δῆλον τὸ προτεθέν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 350. Ἤδε ἡ πρότασις, μετὰ τοῦ ἐσχάτου τῆς προσεχῶς ἀνωτέρας πορίσματος, οὐδὲν ἧττον ἀληθεύουσι καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου μὴ ὀρθογωνίου κειμένου· εἰ μόνον ἡ ΑΓ πλευρά, ἡ τὴν γωνίαν Β ὑποτείνουσα, μείζων ᾖ τῆς ΑΒ πλευρᾶς τῆς πρὸς τῇ ῥηθείσῃ γωνίᾳ. Ἀμέλει τοι τῆς ΒΓ καὶ ὧδε μειουμένης, μενούσης δὲ τῆς ΑΓ, ἐπαύξει ἡ ΑΒ. Καὶ δύο δὴ τοιάδε τρίγωνα, ἐν οἷς ἴσαι μὲν αἱ γωνίαι, ὥσπερ αἱ κατὰ τὸ Β, ἴσαι δὲ καὶ αἱ ῥηθεῖσαι πλευραί, ὑφ᾽ ὧν ἡ Β γωνία ἥκιστα περιέχεται, ἀεὶ ἐφαρμόζειν ἀλλήλοις δυνήσεται. Ἀλλὰ σπανιωτέρα ἡ τῶν τοιῶνδε προτάσεων χρῆσις· ἔστι τε τὰ ἐξ αὐτῶν ἑπόμενα, καὶ ἄλλοθεν οὐ χαλεπῶς ἀποδείκνυσθαι. Διὸ καὶ δεόντως αἵδε αἱ προτάσεις παρελείφθησαν.

ΤΜΗΜΑ ΤΡΙΤΟΝ
ΠΕΡΙ
ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 351.

Σχ.44. Ἡ δύο τῶν ἐπὶ τῆς τῦ κύκλυ περιφερείας σημείων τὰ τυχόντα συνάπτυσα εὐθεῖα, Ὑποτείνυσα, ἢ Χορδὴ καλεῖται τῶν μερῶν ΑΓΒ, ΑΔΒ, εἰς ἅπερ αὐτὴ τὴν περιφέρειαν διαιρεῖ. Τὰ δὲ τῆς περιφερείας μέρη ταῦτα, τῆς αὐτῆς ὑποτεινύσης, ἢ χορδῆς ΑΒ, τόξα ὀνομάζεται. Ἡ δὲ διὰ τῦ κέντρυ ὑποτείνυσα ΓΔ, Διάμετρος τῦ κύκλυ ἀκύει, ἧς ἡ ἀκτὶς ἡμίσεια ὖσα, εἰκότως Ἡμιδιάμετρος εἴωθε λέγεσθαι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Σχ.45. §. 352. Ἡ δὲ ὑποτείνυσα ΑΒ ὁπωσῦν προαχθεῖσα, καινὴν αὖθις τομὴν τῷ κύκλῳ ἐκ ἀπεργάζεται. Εἰ γὰρ ἔτεμνεν ἔτι κατὰ σημεῖον ὁποιονῦν τὸ Δ, αἱ ἀπὸ τῦ κέντρυ ἀγόμεναι τρεῖς εὐθεῖαι ΓΑ, ΓΒ, ΓΔ, ἀλλήλαις ἴσαι ἐτύγχανον ἄν, ὡς ἡμιδιάμετροι κύκλυ τῦ αὐτῦ. Ἀδύνατον δὲ (§. 344.)· διὰ τὸ περατῦσθαι ἐπ' εὐθείας ΑΒ τῆς αὐτῆς. Οὐκ ἄρα ἡ τῦ κύκλυ περιφέρεια κατὰ τρισσὰ σημεῖα διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἀχθῆναι δύναται.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

Σχ.46. §. 353. Τῶν μερῶν ἕκαστον ΑΓΒΑ, ΑΔΒΑ, εἰς ἃ ὁ κύκλος ὑπὸ τῆς χορδῆς διαιρεῖται, Τμῆμα καλεῖται, ἔλαττον μὲν, ᾧ τὸ τῦ κύκλυ κέντρον ὐκ

ἔνεστι·

ἔνεστι· μεῖζον δὲ ᾧ ἔνεστιν. Ἐὰν δὲ ἡ διάμετρος διάμετρον ἄλλην ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ διατέμνῃ κύκλου, ἡ ΑΒ τὴν ΓΔ, τὸ ὑπὸ δυεῖν ἡμιδιαμέτρων ΑΕ, ΕΔ, καὶ τοῦ τόξου ΑΔ περατέμενον σχῆμα, ἢ τὸ ΑΓΒΔ, Τομεὺς προσηγόρευται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 354. Τὸ τμῆμα οὗ χορδὴ ἡ τοῦ κύκλου ἐστὶ διάμετρος, ἢ δυσὶ καὶ αὐτὸ ἡμιδιαμέτροις, καὶ μέρει τῆς περιφερείας περατέμενον, ἅμα καὶ τομεὺς ἐστίν. Ἡ δὲ γωνία ἣν ἐν τῷδε τῷ τομεῖ αἱ δύο ἡμιδιάμετροι περιέχουσιν, ἴση τυγχάνει δυσὶν ὀρθαῖς.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 355. Οἱ κύκλοι ὧν αἱ ἀκτῖνες ἴσαι, καὶ αὐτοὶ ἴσοι. Καὶ οἱ τούτων τομεῖς, ὧν αἱ πρὸς τοῖς κέντροις γωνίαι ἴσαι. Καὶ αἱ περιφέρειαι, ἢ τὰ τόξα, ὑφ᾽ ὧν οἱ ἴσοι κύκλοι, ἢ τομεῖς τῶν κύκλων περατοῦνται. Ἐὰν δὲ τῶν ταῖς αὐταῖς ἀκτῖσι καταγεγραμμένων τομέων, ἄνισοι ὦσιν αἱ γωνίαι, οὔτε τομεῖς αὐτοί, καὶ τὰ τούτων τόξα, ἄνισα ἔσται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν γὰρ τῶν ἐν ἴσοις ἡμιδιαμέτροις ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καταγραφέντων κύκλων, θατέρου τὸ κέντρον ἐπιπέσῃ ἐπὶ τὸ θατέρου, ἐφαρμόσουσι δὴ αἱ τούτων περιφέρειαι, ὅπως ἂν καὶ νοηθεῖεν οἱ κύκλοι οὗτοι περὶ τὰ αὐτῶν κέντρα περιαγόμενοι (§. 290.). Ἐὰν τοίνυν οὕτω περιαχθῶσιν, ὥστινας τῶν ἐν αὐτοῖς ἀκτίνων ἐφαρμόσαι ἀλλήλαις, τὰ εἰρημένα πάντα ῥᾷστα καταφαίνεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 356. Πᾶσα διάμετρος, δίχα τόν τε κύκλον διατέμνει, καὶ τὴν αὐτοῦ περιφέρειαν. Αἱ ἄρα ἐπὶ

τοῦ

τȣ̃ κύκλȣ διάμετροι αἱ πρὸς ὀρθὰς ἐπ' ἀλλήλας ἐφεςῶσαι, τόν τε κύκλον, καὶ τὴν αὐτȣ̃ περιφέρειαν, εἰς τέτταρα τεταρτημόρια διατέμνȣσιν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 357. Ἐὰν κύκλων δύο ἐν ἡμιδιαμέτροις ἴσαις καταγεγραμμένων, οἱ τομεῖς, ἢ τὰ τȣ́των τόξα ἴσα ᾖ, καὶ αἱ τῶν τομέων πρὸς τοῖς κέντροις γωνίαι ἴσαι ἔσονται. Ἐὰν γὰρ ἄνισοι, καὶ οἱ τομεῖς αὐτοὶ ἄρα, καὶ τὰ τȣ́των τόξα ἄνισα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 358. Τȣ̃ κατὰ τὸν τομέα τόξȣ εἰς μέρη ἴσα, ὁσαδήποτε τῷ ἀριθμῷ τμηθέντος, ἐὰν ἀπὸ τῶν κατὰ τὰς διαιρέσεις σημείων ἐπὶ τὸ κέντρον ἀκτῖνες ἀχθῶσιν· εἰς τοσάδε μέρη ἴσα ἡ γωνία τμηθήσεται. Καὶ τῆς γωνίας εἰς μέρη ἴσα τμηθείσης, τῶν τε διατεμνȣσῶν εὐθειῶν προεκβεβλημένων, εἰς μέρη τοῖς κατὰ τὴν γωνίαν ἰσάριθμα καὶ τὸ τόξον διαιρεθήσεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 359. Ἡ ἀπὸ τȣ̃ κέντρȣ ἐπὶ τὴν ὁποιονδήποτε τῶν τȣ̃ κύκλȣ τόξων ὑποτείνȣσαν κάθετος, δίχα τέμνει τὴν ὑποτείνȣσαν. Ἥτε ταύτην δίχα τέμνȣσα, καὶ διὰ τȣ̃ κέντρȣ διατείνȣσα, ἐπ' αὐτὴν ταύτην κάθετος ἐφέστηκεν. Ἡ δὲ δὴ καὶ δίχα τέμνȣσα, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἐφεςῶσα, ἣν προαχθείη διὰ τȣ̃ κέντρȣ διήξει. Προαχθεῖσα δὲ ἡ αὐτὴ ἑκατέρωθεν, καὶ τῆς ὑποτεινȣ́σης τὸ τόξον ἑκάτερον διατέμνει.

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 47. Ἐν τῷ κύκλῳ ȣ̃ κέντρον τὸ Α, ἀχθήτω ὑποτείνȣσα ἡ ΒΓ· ἀχθήτωσαν δὲ καὶ ἡμιδιάμετροι

αἱ

αἱ ΑΒ, ΑΓ καὶ ἔσαι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἰσοσκελὲς, ἧ βάσις μὲν ἡ ΒΓ, γωνία δὲ ὑφ᾽ ἣν ἡ βάσις ὑποτείνει ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· ἐκεῖν ἡ ΑΕ εὐθεῖα ἡ ἀπὸ τῦ κέντρυ Α, ἐπὶ τὴν ὑποτείνυσαν ΒΓ κάθετος, ταύτην δίχα τεμεῖ (§. 336.). Καὶ ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΕ, διὰ τῦ κέντρυ διατείνειν, καὶ τὴν ὑποτείνυσαν δίχα τέμνειν ὑποτεθῇ, ἡ αὐτὴ, ἐπὶ τῆς ὑποτεινύσης κάθετος ἐπιςήσεται (§. 335.).

Ἀλλ᾽ ἐὰν ἡ ἐπὶ τῆς ὑποτεινύσης κάθετος, καὶ ταύτην διχοτομῦσα εὐθεῖα, μὴ διήκῃ διὰ τῦ κέντρυ, κείσθω δὴ κατὰ τὴν ΕΖ· διαχθήτω δὲ καὶ ἡ ΑΕ ἀπὸ τῦ κέντρυ ἐπὶ τὸ μεσαιτάτω τῆς ὑποτεινύσης σημεῖον Ε· καὶ ἔσαι δὴ παρὰ τὴν ΕΖ, καὶ ἡ ΑΕ αὐτὴ ἐπὶ τῆς ὑποτεινύσης κάθετος· ὅπερ ἀδύνατον.

Τελευταῖον δὲ, ἡ τὴν βάσιν ΒΓ τῦ ἰσοσκελῦς ΑΒΓ δίχα τέμνυσα, δίχα τεμεῖ καὶ τὴν τῦ τομέως γωνίαν ὑπὸ ΒΑΓ (§. 335.)· εἰ δὲ ταύτην, καὶ τὸ τόξον ἄρα ΒΔΓ δίχα τεμεῖ, ὥςε εἶναι ΒΔ = ΔΓ (§. 358.). Καὶ ἐὰν ἄρα ἡ ΑΕ εἰς ἐπὶ τὸ Η προεκβληθῇ, ἐπειδὴ ΗΒΔ = ΗΓΔ, ἔςαι καὶ ΗΒΔ − ΒΔ = ΗΓΔ − ΓΔ· τυτέςιν ΗΒ = ΗΓ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 360. Ἔνθεντοι ἡ δοθεῖσα κύκλυ περιφέρεια ΑΔΒ δίχα τμηθήσεται, ἐὰν ἡ ταύτην ὑποτείνυσα ΑΒ, δι εὐθείας ἐπ᾽ αὐτὴν καθέτυ τῆς ΓΔ δίχα τμηθῇ. Αὕτη γὰρ ἡ ΓΔ προεκβληθεῖσα, καὶ τὴν περιφέρειαν κατὰ τὸ Δ δίχα τεμεῖ. Σχ. 48.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 361. Καὶ τῦ ἐν τῷ κύκλῳ κέντρυ μὴ διδομένυ, Σχ. 49. ἐὰν προσαρμοσθῇ μὲν ὑποτείνυσα αὐτῷ ὁποιατισῦν, ἡ ΑΒ, ἀχθῇ δ᾽ ἐπὶ ταύτης καὶ εὐθεῖα ἡ ΓΔ, δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνυσα, ἡ αὐτὴ ΓΔ προεκ-

προεκβληθεῖσα διὰ τοῦ κέντρου διατενεῖ. Καὶ δῆτα ἐὰν αὕτη κατὰ τὸ Ε σημεῖον δίχα τμηθῇ, τόδε τὸ σημεῖον, ἔσαι τὸ τοῦ κύκλου κέντρον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 362. Διὰ τριῶν δοθέντων σημείων, ἃ μὴ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ᾖ, κύκλου περιφέρειαν καταγράψαι.

ΛΥΣΙΣ.

Σχ.50. Ἔσω τὰ δοθέντα τρία σημεῖα Α, Β, Γ· καὶ συνεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, καὶ ΒΓ· καὶ τούτων ἑκατέρας δίχα τμηθείσης κατὰ Δ καὶ Ε, ἤχθωσαν ἐπ᾽ αὐτῶν πρὸς ὀρθὰς αἱ ΔΖ, καὶ ΕΖ· προσεκβεβλήσθωσάντε αἱ ἀχθεῖσαι, ὥσε συμπεσεῖν κατὰ τὸ Ζ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διασήματι δὲ τῷ ΖΑ κύκλος γεγράφθω.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἀχθήτωσαν αἱ ΑΖ, ΒΖ, ΓΖ. Διὰ γοῦν τὰς πρὸς τῷ Δ ὀρθὰς γωνίας, καὶ τὰς ΑΔ = ΔΒ, καὶ ΔΖ = ΔΖ, ἐπὶ τῶν ΑΔΖ, ΒΔΖ τριγώνων αἱ πλευραὶ ΑΖ, ΒΖ ἔσονται ἴσαι. Κατὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἡ πλευρὰ ΒΖ ἐπὶ τοῦ ΒΕΖ τριγώνου, ἴση ἔσαι τῇ πλευρᾷ ΓΖ, τῇ ἐπὶ τοῦ ΓΕΖ. Τοιγαροῦν ἡ κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διασήματι δὲ τῷ ΖΑ, καταγραφομένη περιφέρεια, καὶ διὰ τῶν Β καὶ Γ σημείων διαχθήσεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 363. Διὰ τῶν τριῶν δοθέντων σημείων Α, Β, Γ δισσαὶ κύκλων δυοῖν διαφέρουσαι περιφέρειαι οὐ διήξουσιν. Ἐὰν γὰρ διήκειν ὑποτεθῶσιν, ἡ ΑΒ κοινὴ ἑκατέραν ὑποτενεῖ, ἑκατέρας τε τὸ κέντρον ἔσαι ἐπὶ τῆς ΔΖ (§. 359.). Ἀλλὰ καὶ ἡ ΒΓ τῶν περιφερειῶν ἑκατέραν ὑποτενεῖ, καὶ ἄμφω ἄρα τὰ κέντρα ἐπὶ

ἐπὶ τοῦ Ζ πεσεῖται. Προσέτι δὲ, ἐπεὶ δέον ἑκατέραν διὰ τοῦ Α διέρχεσθαι, ἔσται καὶ ἀμφοῖν τῶν περιφερειῶν ἡμιδιάμετρος ἡ αὐτή. Καὶ οὐκ ἄρα διαφέρουσαι ἀλλήλων ἔσονται αἱ περιφέρειαι, ἀλλ᾽ ἐπὶ τὸ αὐτὸ συμπεσοῦνται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 364. Δοθήσεται ἄρα καὶ τὸ κέντρον, μέρους ὁτινοσοῦν τῆς περιφερείας δοθέντος, ἐὰν ἐν τρισὶν ἐπ᾽ αὐτῆς σημείοις πρὸς τὸ δοκοῦν ληφθεῖσι, τὸ κέντρον προσευρεθῇ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 365. Ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ, ἢ τῶν ἴσων κύκλων, αἱ ἐπίσης τοῦ κέντρου ἀφιστάμεναι ὑποτείνουσαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἀνίσως δ᾽ ἀφισταμένων, μείζων μὲν ἥτις ἧττον, ἐλάσσων δὲ ἥτις μᾶλλον ἀφέστηκε.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐν τῷ κύκλῳ οὗ κέντρον Α, ἐπὶ τὰς ὑποτεινού- Σχ.51.
σας ΒΓ, ΔΕ ἀχθήτωσαν ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετοι αἱ ΑΖ, ΑΗ. Αἱ δὲ κάθετοι αἱ τῶν ὑποτεινουσῶν ἔσονται ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ ταύτας δίχα κατὰ τὰ Ζ καὶ Η σημεῖα τεμοῦσι (§. 359.). Ἀχθήτωσαν δὲ καὶ αἱ ἡμιδιάμετροι ΑΒ, ΑΕ. Ἔσονται δὴ οὖν τὰ ΒΑΖ, ΕΑΗ τρίγωνα ὀρθογώνια, ὧν αἱ μέγισται τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΕ ἀλλήλαις ἴσαι. Ἐὰν οὖν καὶ $AZ = AH$, ἔσται καὶ $BZ = HE$, καὶ $\Gamma B = \Delta E$ (§. 349.). Ἐὰν δὲ $AZ > AH$, ἔσται καὶ $ZB < HE$ (§. 348.). Τό, τε διπλοῦν ἐκείνης ΓΒ, ἧττον τοῦ διπλοῦ ταύτης ΕΔ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 366. Πᾶσα ὑποτείνουσα πίπτει τοῦ κύκλου ἐντός. Πᾶσα γὰρ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου Α δυναμένη ἀχθῆναι ἐπὶ τὸ τῆς ὑποτεινέσης μέρος ΒΖ, ἔλαττον ἔςαι τῆς ἡμιδιαμέτρε ΑΒ (§. 343.). Τὸ δ' αὐτὸ καὶ περὶ τῆς λοιπῆς ἡμισείας ΖΓ ἀληθῶς εἰρήσεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 367. Ἐπὶ τε αὐτε κύκλε, ἡ μὲν τῶν ὑποτεινεσῶν μεγίςη, ἐςὶν ἡ διάμετρος, ὡς μηδεμίαν ἔχεσα ἀπὸ τε κέντρε ἀπόςασιν· αἱ δὲ λοιπαὶ, παραλλήλως ἄγεσθαι τινὶ διαμέτρῳ νοέμεναι, τοσῶδε ἐλάσσονες καθίςανται, ὁπόσῳ ἐλάσσονα ἀπὸ μὲν τε ἡμικυκλίε ἀπολαμβάνεσι τμήματα, ἀπὸ δὲ τῆς ἡμιπεριφερείας τόξα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

Σχ. 52. §. 368. Τὰ δέτοι τόξα, τὰ ἀπὸ δυοῖν τε αὐτε κύκλε παραλλήλων ὑποτεινεσῶν ΑΒ, ΓΔ ἀπολαμβανόμενα, ἴσα ἀλλήλοις ἐςίν. Ἀχθήτω γὰρ ἀπὸ τε Ε κέντρε ἐπὶ τῆς ΑΒ ὑποτεινέσης κάθετος, καὶ προαχθήτω, εἰς ὃ τὴν περιφέρειαν τέμοι κατὰ τὸ Ζ· ἔςαι ἡ αὐτὴ ΕΖ, καὶ ἐπὶ τῆς ΓΔ κάθετος (§. 285.). Ἔνθεντοι ΖΑ = ΖΒ, καὶ ΖΓ = ΖΔ (§. 359.). Καὶ τῶνδε ἀπ' ἐκείνων ἀφαιρεθέντων, λοιπὸν ΑΓ = ΒΔ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 369. Τε αὐτε, ἢ τῶν ἴσων κύκλων, καὶ τῶν κατ' αὐτὲς περιφερειῶν, αἱ ἴσαι ὑποτείνεσαι, τμήματάτε καὶ τόξα ἀναπολαμβάνεσιν ἴσα. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων κύκλων τόξα ἴσα ἀναπολειφθῇ, καὶ αἱ ὑποτείνεσαι τὰ τοιαῦτα τόξα ἔσονται ἴσαι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 53. Ἐπὶ τῶν κύκλων, ὧν κέντρα Α καὶ Β, ἔςωσαν ὑποτείνεσαι ΓΔ, ΕΖ· καὶ ἡμιδιάμετροι ἀχθήτωσαν

σαν

σαν ΑΓ, ΑΔ καὶ ΒΕ, ΒΖ, αἱ πᾶσαι ἀλλήλαις ἴσαι ἐσόμεναι. Ταύτητοι δέ.

Ἐὰν Α΄. Ἡ ΓΔ ὑποτείνουσα τῇ ΕΖ ὑποτεινούσῃ ἴση ᾖ, ἔσονται καὶ τὰ τρίγωνα, καὶ αἱ γωνίαι ὑπὸ ΓΑΔ, ΕΒΖ ἴσαι. Τοιγαροῦν καὶ τὸ τόξον ΓΗΔ, τῷ τόξῳ ΕΙΖ ἴσον ἔσαι. Καὶ ὁ τομεὺς δὲ ΓΑΔ τῷ τομεῖ ΕΒΖ (§. 355.). Κἀντεῦθεν τῶν ἴσων τριγώνων ἑκατέρωθεν ἀφαιρεθέντων, καὶ τὸ τμῆμα ΓΗΔ, ἴσον τῷ τμήματι ΕΙΖ. Ἐξ οὗ ἔτι ἕπεται, ὅτι καὶ τὸ ΓΘΔ τμῆμα, τῷ τμήματι ΕΚΖ.

Ἐὰν δὲ Β΄. Τὸ τόξον ΓΗΔ ἴσον ᾖ τῷ τόξῳ ΕΙΖ, ἔσαι ἡ Α Γωνία ἴση τῇ Β (§. 357.). Καὶ εἰσὶν οὖν ἐπὶ τῶν τριγώνων ΓΑΔ, ΕΒΖ, ἐν οἷς αἱ ἴσαι αὐται γωνίαι περιέχονται ὑπὸ πλευρῶν ἀλλήλαις ἴσων, καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ἴσαι ΓΔ = ΕΖ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 370. Διὰ δὴ τούτων ἀπὸ τῆς δοθείσης περιφερείας τόξον, τόξῳ τῷ δοθέντι ἐν περιφερείᾳ τῇ αὐτῇ, ἴσον ἀπολαμβάνομεν, τὴν τοῦτο ὑποτείνουσαν τῇ ἐκεῖνο ὑποτεινούσῃ ἴσην ποιοῦμενοι.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 371. Εὐθεῖα, ἡ διάτινος τῶν ἐπὶ τῆς περιφερείας σημείων οὕτω διήκουσα, ὡς τῷ κύκλῳ μηδαμῶς ἐμπίπτειν, ἅπτεσθαι τοῦ κύκλου λέγεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 372. Διὰ τοῦ δοθέντος ἐπὶ τῆς περιφερείας σημείου, γραμμὴν εὐθεῖαν ἁπτομένην τοῦ κύκλου ἀγαγεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔσω ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, οὗ κέντρον τὸ Α, δοθὲν σημεῖον τὸ Β. Ἀχθήτω δὲ διά τε Α Σχ.54

καὶ Β εὐθεῖα ἡ ΑΓ, καὶ πρὸς αὐτὴν κατὰ τὸ Β κάθετος ἐφεστάσθω ἡ ΔΕ. Φημὶ δὴ ταύτην εἶναι τὴν κατὰ τὸ Β τοῦ κύκλου ἐφαπτομένην.

ΔΕΙΞΙΣ.

Διήκει γὰρ ἡ ΔΕ διὰ τοῦ ἐπὶ τῆς περιφερείας Β σημείου. Ἐὰν μὲν ἐπὶ ταύτην ἡ τυχοῦσα ἄλλη ἀχθῇ ΑΖ, τριγώνου συνισταμένου ὀρθογωνίου τοῦ ΑΒΖ, ἡ ΑΖ μείζων ἔσται τῆς τοῦ κύκλου ἡμιδιαμέτρου ΑΒ (§. 341.), ὥστε τὸ ἐπὶ τῆς ΔΕ σημεῖον Ζ, πίπτειν τοῦ κύκλου ἐκτός.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 373. Τὸ τῆς ἐπαφῆς σημεῖον Β μοναδικόν ἐστιν· οὐδ᾽ ἄντι μέρος τῆς περιφερείας δοθείη, ὅπερ ἂν τῇ εὐθείᾳ ΔΕ ἐφαρμόσειε.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 374. Ἐὰν εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτηται, ἡ ἐπὶ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς ἀγομένη ἡμιδιάμετρος, τῇ ἐφαπτομένῃ κάθετος ἐπιστήσεται. Καὶ ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην κάθετος ἐπιστῇ, ἐπὶ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς ἐπιστήσεται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τοῦ κύκλου οὗ κέντρον τὸ Α, ἁπτέσθω δὴ ἡ ΔΕ εὐθεῖα κατὰ τὸ Β, καὶ ἔστω·

Α΄. Ἀγομένη ἡ ΑΒ, ἧς καθέτου μὴ οὔσης, ἔστω ἄλλη τις ἡ ΑΖ· καὶ ἔσται ἡ ὑπὸ ΑΖΒ ὀρθή, ἥτε ΑΒ ἡμιδιάμετρος μείζων τῆς ΑΖ· τὸ ἄρα σημεῖον Ζ ἐντὸς τοῦ κύκλου πεσεῖται, ὃ τὸν τῆς ἐφαπτομένης ὁρισμὸν ἐστὶν ἀνατρέπον (§. 371.).

Β΄. Ἐὰν δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁπτομένην κάθετος, μὴ ἐπὶ τὸ κατὰ τὴν ἐπαφὴν σημεῖον

μεῖον τὸ Β, πίπτῃ, ἀλλ' ἐφ' ἕτερον τὸ Ζ, ἀχθήτω δὴ ἡ ΑΒ, καὶ ἔσαι δὴ καὶ αὕτη πρὸς τὴν ἐφαπτομένην κάθετος· ὅπερ ἀδύνατον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 375. Ἡ ἄρα εὐθεῖα, ἡ τοῦ κύκλου ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἁπτομένη σημείου, μοναδικὴ οὖσα ἐςίν. Εἴπερ γὰρ διὰ τοῦ Β καὶ ἑτέρα τις, παρὰ τὴν ΔΕ, τοῦ κύκλου ἤγετο ἁπτομένη, ἡ αὐτὴ ΑΒ ἐφ' ἑκατέρας ἂν κάθετος ἐπιςαίη· ὅπερ οὐκ ἔςιν.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 376. Ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐςὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἤτοι ἐπὶ θάτερον τῶν τῆς γωνίας σκελῶν τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ τὸ κέντρον πεσεῖται, ἢ τῆς γωνίας ἐντὸς, ἢ ἐκτός. Καὶ δὴ

Α'. Τοῦ κέντρου Α πίπτοντος ἐπὶ τοῦ σκέλους ΒΓ Σχ.55. τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ ΒΓΔ γωνίας, τῆς ἐπὶ τῇ αὐτῇ περιφερείᾳ ΒΔ βαινούσης, ἐφ' ᾗ καὶ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ βαίνει γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, τὸ τρίγωνον ΔΑΓ ἔσαι ἰσοσκελὲς, καὶ ἡ κατὰ τὸ Γ γωνία, ἴση τῇ κατὰ τὸ Δ. Ἀλλὰ μὴν ἡ ὑπὸ ΔΑΒ ἐκτὸς, ἴση ταῖς ἐντὸς Γ + Δ (§. 306.). Ἔσαι ἄρα καὶ ΔΑΒ = 2Γ.

Β'. Τοῦ κέντρου Α ἐντὸς τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ Σχ.56. γωνίας ΒΓΔ πίπτοντος, καὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τῷ κέντρῳ οὔσης, ἐὰν ἡ ΓΑ διὰ τοῦ κέντρου ἀχθεῖσα προεκβληθῇ ἕως ἐπὶ τὸ Ε, ἔσαι ΒΑΕ = 2ΒΓΕ· καὶ ΕΑΔ = 2ΕΓΔ. Ἔνθεντοι καὶ ΒΑΔ = 2ΒΓΔ.

Σχ. 57. Γ΄. Τȣ̃ κέντρȣ Α, ἐκτὸς τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ ΒΓΔ γωνίας πίπτοντος, καὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τῷ κέντρῳ ȣ̓́σης· ἐὰν καὶ ἤδη ἡ ΓΑ ἀχθεῖσα προεκβληθῇ ἐςγ ἐπὶ τὸ Ε, ἔςαι ὑπὸ ΕΑΒ = 2ΕΓΒ· καὶ ΕΑΔ = 2ΕΓΔ· διὸ δὴ τῶν προτέρων ἀπὸ τῶν ὑςέρων ἀφαιρȣμένων, ΒΑΔ = 2ΒΓΔ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 377. Ἐπειδὴ ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ, αἱ ἐπὶ ἴσων, βεβηκεῖαι περιφερειῶν καὶ πρὸς τῷ κέντρῳ ἴσαι γωνίαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι εἰσὶν (§. 357.), ἔσονται δὴ καὶ αἱ πρὸς τῇ περιφερείᾳ τȣ̃ αὐτȣ̃ κύκλȣ, τῷ αὐτῷ, ἢ ἴσοις ἐπιβαίνȣσαι τόξοις, ἀλλήλαις ἴσαι· οἷα δὴ καὶ αἱ γωνίαι, αἱ ἐν τοῖς ἴσοις τȣ̃ αὐτȣ̃ κύκλȣ τμήμασι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 378. Ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία, ἐὰν τῇ ἡμιπεριφερείᾳ βεβήκῃ, ὀρθὴ ἔςαι· ἐὰν δὲ τόξῳ τῆς ἡμιπεριφερείας μείζονι, ἀμβλεῖα· ἐὰν δ᾽ ἐλάσσονι, ὀξεῖα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 379. Οὕτω καὶ ἡ ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐςίν· ἡ δὲ ἐν τμήματι ἡμικυκλίȣ μείζονι, ὀξεῖα· ἡ δ᾽ ἐν ἐλάσσονι, ἀμβλεῖα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

Σχ. 58. §. 380. Ἐὰν ῇ κύκλȣ ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἡ ΒΓ, ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία ὑπὸ ΒΓΔ, ἐπὶ τȣ̃ τόξȣ ΓΕΔ βεβηκεῖα ἔςαι. Καὶ ἴση ἄρα τῇ γωνίᾳ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι ΓΖΔ, τῇ τῷ αὐτῷ τόξῳ ΓΕΔ, καὶ αὐτῇ βεβηκείᾳ· ἢ καὶ τῷ ἡμίσει τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίας Α, ἐὰν ῇ καὶ αὐτὴ τῷ τόξῳ ΓΕΔ βαίνȣσα.

ΠΡΟΒΛΗ-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 381. Κατ' ἄκρον σημεῖον τὸ Β, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ΑΒ, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Κέντρου ὁτινοσοῦν ληφθέντος τοῦ Γ, περιφέρεια γεγράφθω, διήκουσα μὲν διὰ τοῦ Β, τέμνουσα δέ που καὶ τὴν ΑΒ, οἷον κατὰ τὸ Δ. Ἄχθητω δὲ καὶ ΔΓ, καὶ προεκβληθήτω, ὥστε εἶναι ΓΕ = ΓΔ· καὶ ἐπιζεύχθω ΕΒ. Ἡ δὲ τῇ ΑΒ καθετος ἔσαι. Σχ. 59.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστι γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία, ὡς ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ οὖσα, ὀρθή (§. 379.).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 383. Διὰ τοῦ ἐκτὸς τοῦ κύκλου δοθέντος σημείου, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν τοῦ κύκλου ἐφαπτομένην.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστω κύκλος οὗ κέντρον τὸ Α· τούτου δ' ἐκτὸς δοθὲν σημεῖον τὸ Β. Ἐπεζεύχθω δὲ ἡ ΑΒ, καὶ κύκλος ἕτερος γεγράφθω, οὗ διάμετρος ἡ ΑΒ, τέμνων τὸν πρότερον κατὰ δισσὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Ἀχθήτω δὲ ΒΓ καὶ ΒΔ. Ἑκατέρα γὰρ τοῦ περὶ τὸ Α κύκλου ἐφάψεται. Σχ. 60.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν γὰρ ἀχθῶσιν αἱ ἡμιδιάμετροι ΑΓ, ΑΔ, εὔδηλον ὡς αἱ ἐν τοῖς ἡμικυκλίοις γωνίαι ὑπὸ ΑΓΒ, ΑΔΒ ἔσονται ὀρθαί. Ἡ ἄρα ΒΓ εὐθεῖα, ἡ ἐπὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου ΑΓ, πρὸς τῷ ἐπὶ τῆς περιφερείας Γ, κάθε-

κάθετος, τῦ δοθέντος κύκλυ ἐφάψεται (§. 372.)· ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ ΒΔ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 383. Ἐπειδὴ ἐπὶ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΓΒ, ΑΔΒ αἱ ΑΓ, ΑΔ πλευραὶ ἴσαι εἰσίν· ἥτε ΑΒ ἑκατέρω κοινή· εἰσὶ δὴ καὶ ΓΒ, ΒΔ ἀλλήλαις ἴσαι· αἵτε πρὸς τῇ εὐθείᾳ ΑΒ ἑκατέρωθεν γωνίαι, αἱ κατὰ τὸ Β, καὶ τὸ Α (§. 349.) ὁμοίως ἴσαι.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 384. Σχῆμα ἐπίπεδον εὐθύγραμμον Κανονικὸν λέγεται, ὗ ἅπασαι αἱ πλευραὶ ἀλλήλαις τε ἴσαι, καὶ γωνίας ἴσας εἰσὶ περιέχυσαι. Τὰ δὲ λοιπὰ Ἀκανόνιςα καλεῖται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Σχ. 61. §. 285. Τῆς τῦ κύκλυ περιφερείας εἰς μέρη ἴσα διαιρεθείσης, ἐὰν αἱ ὑποτείνυσαι τὰ τοιάδε μέρη ἀχθῶσιν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ, σχῆμα κανονικὸν ἀνακύψει, ὗ τοσαίδε αἱ πλευραί, ὅσα τῆς περιφερείας τὰ μέρη εἰς ἃ διῄρηται. Τὰς δέτοι πλευρὰς τῦ ὕτως ἐγγραφομένυ τῷ κύκλῳ σχήματος, ἴσας ἀλλήλαις εἶναι, αὐτόθεν φανερόν. Ἀλλὰ καὶ αἱ γωνίαι, ὡς ἄρα ἐν ἴσοις τῦ αὐτῦ κύκλυ ἅπασαι ἐνῦσαι τμήμασι, καὶ αὗται ἀλλήλαις ἴσαι εἰσὶν (§. 377.).

§. 386. Καὶ τόνδε δὴ τὸν τρόπον, εἴπερ ἐνῆν καθ' ὀντιναῦν ἀριθμὸν μορίων ἴσων ἀλλήλοις τὴν τῦ κύκλυ περιφέρειαν διαιρεῖν, ἀείποτ' ἂν παρῆν, καὶ ἰσάριθμον τὰς πλευρὰς κανονικὸν σχῆμα ἐντὸς τῦ κύκλυ ἐγγράφειν. Ἀλλὰ γὰρ ἡ Στοιχειώδης Γεωμετρία, καθόλυ τινὰ λόγον τῦ τὴν περιφέρειαν εἰς ὅσα ἄντις βύλοιτο μέρη διατέμνειν, ὐδένα οἶδεν. Τὰς γὰρ τοιάσδε διαιρέσεις, διὰ κύκλυ τε καὶ εὐθείας,

θείας, οἷς μόνοις αὕτη ὀργάνοις εἴωθε χρῆσθαι λαβεῖν (§. 254. 291.) ἀμήχανον. Τοιγαροῦν λείπεται κατ' ἀπόπειραν τῆς περιφερείας τὴν διαίρεσιν εἰς ὁσαδήποτε διαμηχανᾶσθαι· καὶ ἥπω ἐ λίαν δυσχερῶς, ἐδὲ πάνυ πόῤῥω τῦ ἀκριβῦς γινομένοις. (§. 370.). Καὶ εἰ τοίνυν πρὸς μόνην τις ἀπίδοι τὴν χρῆσιν, ἐκ ἔστιν ὅ,τι περὶ τὰς μηχανικὰς ταύτας κατασκευὰς ἐπιμέμψαιτο.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 387. Τῦ ἀριθμῦ τῶν πλευρῶν δοθέντος, δίδοται καὶ ἡ γωνία παντὸς σχήματος κανονικῦ, ἣν δηλονότι, αἱ δύο συναπτόμεναι πλευραὶ περιέχουσι. Δῆλον γὰρ τὸ κεφάλαιον τῶν γωνιῶν $\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma + \Delta + \mathrm{E}$ (§. 307.)· ὧν ἴσων ἀλλήλαις οὐσῶν, ἑκάστη ἐν τῷ μέρει προκύπτει τῦ ὅλε ἀθροίσματος, διὰ τῦ κατ' αὐτὰς ἀριθμῦ, εἴτ' οὖν διὰ τῦ ἀριθμῦ τῶν πλευρῶν διαιρεμένε· οἷον ἔστω α ὁ τῶν τῦ σχήματος πλευρῶν ἀριθμὸς, καὶ ἔσται ὁ τῶν ὀρθῶν ἀριθμὸς γωνιῶν τῶν ἐν ἁπάσαις περιεχομένων ταῖς γωνίαις τῦ σχήματος $= 2\alpha - 4$. Κἀντεῦθεν ἑκάστη τῶν ἐν τῷ σχήματι γωνιῶν ἴση ἐπιφέρεται τοσοῖς δὲ μέρεσι γωνίας ὀρθῆς, ὅσα τὰ ἐν τῷδε τῷ κλάσματι $\frac{2\alpha - 4}{\alpha}$ ἐκδηλέμενα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 388. Οὐκ ἄρα τὸ μέγεθος τῆς τῦ κανονικῦ σχήματος γωνίας, ἣν αἱ δύο ὁποιαιδήποτε προσεχεῖς πλευραὶ περιέχεσιν, ἀπὸ τῦ μεγέθες ἤρτηται τῶν δὲ τῶν πλευρῶν, μόνῳ δὲ τῷ κατ' αὐτὰς ἀριθμῷ προσδιορίζεται. Ἐὰν γὰρ, φέρε, ἐπὶ τῆς κατὰ γένος δηλώσεως τῦ κλάσματος $\frac{2\alpha - 4}{\alpha}$, τεθῇ $\alpha = 7$ εὑρεθήσεται ἡ γωνία παντὸς κανονικῦ ἑπταγώνε $= \frac{10}{7}$ γωνίας ὀρθῆς· ἡ δὲ ταύτης ἡμίσεια $= \frac{5}{7}$ O.

Ὡσαύ-

Ὡσαύτως δὲ κἀπὶ τοῦ κανονικοῦ τριγώνου τὸ τῆς γωνίας ἥμισυ καταλαμβάνεται $\frac{1}{3}$ O. Κἀπὶ τοῦ τετραγώνου $\frac{2}{4}$ O. Κἀπὶ τοῦ πενταγώνου $\frac{3}{5}$ O. Κἀπὶ τοῦ Ἑξαγώνου $\frac{4}{6}$ O. Κἀπὶ τοῦ Ἑπταγώνου $\frac{5}{7}$ O. Κἀπὶ τοῦ Ὀκταγώνου $\frac{6}{8}$ O· καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ῥᾷστα δ' ἐξευρίσκεται τάδε τὰ κλάσματα· οἱ γὰρ ἐν τούτοις παρονομασταί, οἱ ἀριθμοί εἰσι τῶν ἐπὶ τῶν σχημάτων πλευρῶν, οἱ δ' ἀριθμηταί, οἱ αὐτοὶ παρὰ δυάδα. Καὶ τοῦ ἄρα κατὰ γένος τύπου οὕτως ἔχοντος $\frac{\alpha - 2}{\alpha}$, ἡ τοιῷδε τρόπῳ δοθεῖσα γωνία ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καταγραφήσεται, ἐὰν περιφερείας κύκλου τεταρτημόριον, εἰς μέρη α, ἀλλήλοις ἴσα διαιρεθῇ (§. 386.)· τούτου γὰρ γενομένου ἡ γωνία $\frac{1}{\alpha}$ O, δοθήσεται. (§. 358.). Καὶ ἐκ τῶν τοσῶνδε τῷ μεγέθει γωνιῶν ἡ ζητουμένη $\frac{\alpha - 2}{\alpha}$ O, συγκροτεῖσθαι δυνήσεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 389. Ἅπαν κανονικὸν σχῆμα, τῇ διχοτομίᾳ πασῶν τῶν ἐν αὐτῷ γωνιῶν, εἰς τρίγωνα ἰσοσκελῆ διατέμνεται, ὧν ἕκαστον ἑκάστῳ τῶν λοιπῶν ἐφαρμόζειν δυνήσεται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 62. Δίχα τετμήσθω ἡ τοῦ κανονικοῦ σχήματος γωνία ὑπὸ ΑΒΓ διὰ τῆς εὐθείας ΒΔ, καὶ ἡ ταύτῃ δὲ προσεχὴς ΒΓΕ, διὰ τῆς ΓΔ. Αἱ δὲ διατέμνουσαι εὐθεῖαι προσαχθήτωσαν, ὥστε κατὰ τὸ Δ ἀλλήλαις συμπεσεῖν. Ἐπειδὴ τοίνυν αἱ ὑπὸ ΔΒΓ, ΔΓΒ, γωνιῶν ἴσων ἡμίσειαι εἰσίν, ἴσαι εἰσί· καὶ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον ἰσοσκελές. Ἀπὸ γοῦν τοῦ Δ σημείου ἀχθήτω ΔΕ ἐπὶ τὴν κορυφὴν τῆς προσεχοῦς γωνίας τοῦ σχήμα-

σχήματος. Καὶ ἔσαι ΔΓΕ, ἡ ὡσαύτως ἡμίσεια τῆς γωνίας τοῦ σχήματος, ἴση τῇ γωνίᾳ ΔΒΓ. Ἀλλὰ καὶ ΔΓ = ΔΒ, καὶ ΓΕ = ΒΓ· ἄρα καὶ τρίγωνον τὸ ΔΓΕ, τριγώνῳ τῷ ΔΒΓ ἴσον ἐςὶν, ὡς αὐτῷ καὶ ἔχειν προσεφαρμάζεσθαι. Ἐντεῦθεν οὕτω καὶ ἑξῆς προϊόντας δυνατὸν δεικνύειν καὶ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ τῷ τριγώνῳ ΔΓΕ· καὶ ἁπλῶς ἕκαςον, τῷ προσεχῶς πρὸ αὐτοῦ ἔχειν προσεφαρμόζεσθαι. Εἰ δὲ τοῦτο, καὶ ἕκαςον τῶν λοιπῶν ἑκάςῳ. Καὶ πάντα ἄρα τὰ τοιάδε τρίγωνα ἰσοσκελῆ. Καὶ ἐπεὶ δὲ αἱ ἐν τῷ σχήματι γωνίαι Ε καὶ Ζ, καὶ αἱ λοιπαὶ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΔΕ, ΔΖ, κτ. δίχα τέμνονται, τὰ αὐτὰ τρίγωνα ληφθήσεται, τῶν δὲ τῶν γωνιῶν, ὁποιωδήποτε τρόπῳ ἄλλῳ διχοτομουμένων.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 390. Ἑκάςη τῶν περὶ τὸ Δ γωνιῶν δίδοται, ὀρθῶν τεσσάρων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐπὶ τοῦ σχήματος πλευρῶν διαιρεμένων (§. 275.). Καὶ ἔςιν ἄρα ἡ τηλικαύτη γωνία, τῶν τεττάρων ὀρθῶν τὸ μόριον, τὸ διὰ τοῦ κλάσματος $\frac{1}{a}$ δηλούμενον, ὅπερ ἰσοδυναμεῖ μέρεσι $\frac{4}{a}$ ὀρθῆς μιᾶς. Καὶ τῆς δὲ δὴ τῆς γωνίας ἀπὸ δυεῖν ὀρθῶν ἀφαιρεθείσης, ὑπολείπεται τῆς ὀρθῆς μέρος ὃ σημαίνει ὁ ἀριθμὸς $2 - \frac{4}{a}$, ὃς ἐπὶ τὸ αὐτὸ ὄνομα ἀναχθεὶς, ἴσος γίνεται τῷ $\frac{2a - 4}{a}$, δι' οὗ παρίςασθαι εἴρηται ἡ γωνία τοῦ σχήματος (§. 387.). Τὸ δ' αὐτὸ καὶ ἐκ τοῦ σχήματος καταφαίνεται. Τῆς γὰρ ὑπὸ ΑΔΒ, ἀπὸ τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ ΑΔΒ τριγώνου ἀφαιρεθείσης, αἱ δύο καταλείπονται γωνίαι ΔΑΒ, ΔΒΑ, ὧν ἑκατέρα τῆς ἐν τῷ σχήματι γωνίας ΑΒΓ ἡμίσεια ἐςίν.

ἐστίν. Εἰσὶ γὰρ αἱ παντὸς τριγώνου γωνίαι ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς (§. 301.).

ΠΟΡΙΣΜΑ. Β.

§. 391. Ἑξαπλεύρου τοῦ κανονικοῦ σχήματος ὄντος, ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία τέτταρσιν ἑκτημορίοις, ἢ δυσὶ τριτημορίοις ὀρθῆς γωνίας ἴση ἐστίν. Ἔνθαντοι ἡ τοῦ σχήματος γωνία τριτημορίων ἔσται τεττάρων, ἡ δὲ ταύτης ἡμίσεια, δυοῖν. Τὰ ἄρα τρίγωνα, εἰς ἃ κατὰ διχοτομίαν τῆς γωνίας ἀναλύεται τὸ ἑξάγωνον, εἰσὶν ἰσόπλευρα. (§. 322.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 592. Ἡ τοῦ κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΑ, καταγραφομένου κύκλου περιφέρεια, διὰ τῶν κορυφῶν ἁπασῶν τῶν γωνιῶν τοῦ σχήματος διαβαίνει. Δύναται ἄρα περὶ ἅπαν σχῆμα κανονικὸν περιγράφεσθαι κύκλος. Τοῦ δὲ τὸ κέντρον ἐφ᾽ οἱασοῦν κείσεται εὐθείας, τῆς οἱανδήποτε τῶν γωνιῶν τοῦ σχήματος διχοτομούσης. Διὸ καὶ τῇ διατομῇ δυεῖν τῶν τοιούτων εὐθειῶν ἐξευρίσκεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 393. Ἡ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου πλευρά, ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τοῦ κύκλου, ᾧ ἐγγράφεσθαι δύναται. Τοῦ δ᾽ ἑπταγώνου, καὶ τῶν λοιπῶν κανονικῶν σχημάτων, τῶν ὑπὸ πλειόνων ἢ ἓξ πλευρῶν ἐκπερατουμένων, ἡ πλευρὰ ἐλάσσων τῆς ἡμιδιαμέτρου ἐστί. Τοῦ δὲ πενταγώνου ἡ πλευρὰ τῆς ἡμιδιαμέτρου μείζων· καὶ ἔτι μείζων ἡ τοῦ τετραγώνου· καὶ προσέτι ἡ τοῦ τριγώνου τοῦ ἰσοπλεύρου.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

Σχ. 63. §. 394. Αἱ εὐθεῖαι αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου Δ, (ὃ κατὰ τὰ εἰρημένα (§. 392.) οἷόντε εὑρίσκειν) αἱ ἐπὶ

τὰς

τὰς πλευρὰς τοῦ σχήματος κάθετοι ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ, καὶ αἱ λοιπαὶ, ἅπασαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἔνθεντοι τῆς κέντρῳ τῷ Δ διὰ τοῦ Α καταγραφομένης περιφερείας, ἅπασαι αἱ πλευραὶ ἐφάψονται (§. 372.). Καὶ δυνατὸν ἄρα ἐν οἱῳδήποτε κανονικῷ σχήματι κύκλον ἐγγράφειν, οὗπερ ἂν αἱ πλευραὶ τοῦ σχήματος πᾶσαι ἐφάπτοιντο.

ΠΟΡΙΣΜΑ ϛʹ.

§. 395. Τὰς αὐτὰς δὲ εὐθείας ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ, τὰς ἐπὶ τῶν τοῦ σχήματος πλευρῶν ἀπὸ τοῦ Δ κέντρου καθέτους, τάς τε πλευρὰς δίχα τέμνειν, καὶ περὶ τὸ κέντρον γωνίας ἴσας τὰς ὑπὸ ΑΔΒ, ΒΔΓ συνιστᾶν ἀλλήλαις ἰσαρίθμους ταῖς γωνίαις, ἢ ταῖς πλευραῖς ταῖς ἐν τῷ σχήματι· κἀντεῦθεν δὴ καὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν εἰς τοσαῦτα ἴσα μέρη διαιρεῖν· ἐκ τῶν εἰρημένων ῥᾷστα συνάγεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ.

§. 396. Καὶ τοῦτο δ' ἄντις ῥᾳδίως κατίδοι, ὡς ἐὰν τῆς περιφερείας εἰς μέρη ἴσα ΑΒ, ΒΓ, κτλ. διῃρημένης, δι' ἑκάστου τῶν σημείων, οἷς ἡ περιφέρεια οὕτω διαιρεῖται Α, Β, Γ, εὐθεῖα ἀχθῇ τῆς περιφερείας ἁπτομένη, ἑκαστησοῦν τῶν δὲ τῶν ἁπτομένων προεκβαλλομένης, ὥστε τῇ προσεχεῖ συμπεσεῖν, σχῆμα ἀνακύψει κανονικὸν, τὰς πλευρὰς ἰσαρίθμους ἔχον τῆς περιφερείας τοῖς μέρεσι. Τὸ δ' αὐτὸ καὶ περὶ τὸν κύκλον εἰρήσεται περιγράφεσθαι, τῇ αὐτῇ διανοίᾳ καθ' ἣν καὶ ὁ κύκλος ἐγγράφεσθαι τῷ σχήματι λέγεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Η.

§. 397. Δοθέντος δὲ τοῦ τῶν πλευρῶν ἀριθμοῦ Σχ. 62.
α, καὶ τῆς πλευρᾶς αὐτῆς ΑΒ, τὸ κανονικὸν σχῆμα καταγραφήσεται, καταγραφέντος τριγώνου ἰσο-

σκελοῦς

σκελοῦς τοῦ ΑΔΒ, οὗ ἂν αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ΒΑΔ, ΑΒΔ, τῶν τοῦ σχήματος γωνιῶν ὦσιν ἡμίσειαι. Πεσεῖται γὰρ ἡ κορυφὴ Δ τοῦ τοιοῦδε τριγώνου κατὰ τὸ κέντρον τοῦ σχήματος, καὶ συγκροτηθῆναι δυνήσεται τὸ σχῆμα τοσῶνδε τριγώνων (ἴσων τε καὶ ὁμοίων) περὶ τὸ Δ τιθεμένων, ὅσα τῷ διαστήματι ἐγχωρεῖ. Ἡ γοῦν τῆς περὶ τὸ Δ διὰ τοῦ Α καταγραφομένης περιφερείας εἰς μέρη διατεμνομένης, ὧν αἱ ὑποτείνουσαι ἴσαι ὦσι τῇ δοθείσῃ πλευρᾷ ΑΒ. Ἕπεται γὰρ ἐκ τῶν ἀποδειχθέντων περὶ τῶν ἐν τοῖς κανονικοῖς σχήμασι γωνιῶν, τὸν ἀριθμὸν τῶν γωνιῶν τῶν περὶ τὸ Δ, ἢ τῶν τῆς περιφερείας ἴσων μερῶν, τῆς περὶ τὸ Δ διὰ τοῦ Α καταγεγραμμένης, τούτων γενομένων, ἔσεσθαι τὸν α, ὅθεν οὐδεμία περὶ τὰ λοιπὰ δυσχέρεια περιλείπεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 398. Ἐκ πάντων ἅμα ὅσα περί τε τῆς ἐν τῷ κύκλῳ ἐγγραφῆς τῶν κανονικῶν εἴρηται σχημάτων, ἢ τῆς αὐτῶν τούτων περὶ τὸν κύκλον περιγραφῆς, καὶ περὶ τῶν ὑποτεινουσῶν, καὶ τῶν ἐφαπτομένων, φανερὸν, ὅτι ἅπαν σχῆμα κανονικὸν, ὅπερ ἂν τῷ κύκλῳ ἐγγραφείη, ἔλαττον τοῦ κύκλου ἐστί· καὶ ἡ αὐτοῦ περίμετρος ἐλάσσων τῆς ἐκείνου περιφερείας· ἥτε κάθετος ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν πλευρὰν, ἐλάσσων τῆς ἡμιδιαμέτρου. Διπλασιασθέντος δὲ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν τοῦ σχήματος πλευρῶν, ἢ ὁπωσοῦν προσαυξηθέντος, ἡ ἀπὸ τοῦ κύκλου διαφορὰ τοῦ σχήματος, καὶ ἡ τῆς τούτου περιμέτρου ἀπὸ τῆς ἐκείνου περιφερείας, καὶ ἡ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν πλευρὰν καθέτου, ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου, οὕτως ἀπομειοῦται, ὥστε τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ τῶν πλευρῶν ἀριθμοῦ ἐπαναληφθέντος, τὴν τηλικαύτην διαφορὰν, οἵασοῦν ἐλάσσονα, ἥτις ἂν δοθείη, ὁμογενοῦς καθίστασθαι ποσότητος.

§. 399. Τὸ δὲ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένον κανονικὸν σχῆμα ἀεὶ τοῦ κύκλου μεῖζόν ἐστιν· ἥτε αὐτοῦ περίμετρος τῆς τοῦ κύκλου μείζων περιφερείας, καὶ ἡ τῆς κορυφῆς τῆς αὐτοῦ γωνίας ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπόστασις, μείζων τῆς ἡμιδιαμέτρου. Τοῦ μέντοι τῶν πλευρῶν ἀριθμοῦ ἐπαναδιπλουμένου, καὶ τούτων ὡσαύτως ἡ διαφορὰ διηνεκῶς ἀπομειοῦται, καὶ παντὸς ἐλάσσων μεγέθους, ὅπερ ἂν δοθείη, καθίσταται. Καὶ καθ᾽ ἑκάτερον ἄρα τὸ κανονικὸν σχῆμα, κατάτε δὴ τὴν ἐν τῷ κύκλῳ ἐγγραφὴν, καὶ τὴν περὶ τὸν κύκλον περιγραφὴν, τῇ διηνεκεῖ τῶν ἐπ᾽ αὐτῷ πλευρῶν κατ᾽ ἀριθμὸν προσαυξήσει, μετὰ τοῦ κύκλου τέως, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ἔννοιαν συναναμιχθήσεται. Καθ᾽ ἣν δὴ ἔννοιαν, καὶ περὶ τοῦ κύκλου οἷόντε λέγειν, ὅτι κανονικόν τι καὶ οὗτος σχῆμα τυγχάνει, ἐξ ἀπειραρίθμων πλευρῶν συγκροτούμενον.

ΤΜΗΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟΝ
ΠΕΡΙ
ΕΥΘΕΙΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 400.

Τὸ τετράπλευρον, ὃ δύο τῶν πλευρῶν αἱ ἀπεναντίον, ἴσαιτε εἰσὶ, καὶ παράλληλοι, ἐςὶ παραλληλόγραμμον. Ἐν παντὶ δὲ παραλληλογράμμῳ αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ.64. Ἀχθήτω ἐπὶ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, ἡ διαγώνιος ΑΓ. Ἐὰν οὖν ἡ ΑΔ παράλληλος ᾖ τῇ πλευρᾷ ΒΓ, ἔςαι ὑπὸ ΔΑΓ, ἴση τῇ ὑπὸ ΑΓΒ (§. 283.). Ἐνθεντοι καὶ ἐὰν ᾖ, ΑΔ = ΒΓ, ἐπὶ τῶν τριγώνων ΔΑΓ, ΑΓΒ, αἱ ἴσαι γωνίαι ὑπὸ τῶν ἴσων ἔσονται πλευρῶν περιεχόμεναι· ἐκεῖν καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση ἔςαι τῇ ὑπὸ ΔΓΑ (§. 316.)· κἀντεῦθεν καὶ ἡ ΑΒ πλευρὰ παράλληλος τῇ ΓΔ (§. 280.).

Ἐὰν δὲ τὸ τετράπλευρον παραλληλόγραμμον ᾖ. παρὰ τὰς εἰρημένας ΔΑΓ, ΑΓΒ, καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΔΓΑ ἔσονται ἴσαι· κἀντεῦθεν ἐπὶ τῶν ἴσων τριγώνων ΑΒΓ, ΑΔΓ ἡ πλευρὰ ΑΔ ἴση τῇ ΒΓ· καὶ ΑΒ = ΓΔ (§. 320.).

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ.65. §. 401. Ἐὰν εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἐκ μορίων σύνθετος ᾖ ἀλλήλοις ἴσων· τῇ δ᾽ ΑΓ ὁπωσοῦν ἀχθείσῃ παράλληλοι γραφῶσιν εὐθεῖαι, ἀφ᾽ ἑκάςε τῶν διαιρέντων τὴν ΑΒ σημείων ἑκάςη, ἐπὶ δὲ εὐθεῖαν, τὴν ὡς ἔτυχε κειμένην ΓΔ ἀπάσαι ἀπαντῶσαι· καὶ αὕτη παραπλησίως ἡ ΓΔ εἰς ἴσα μέρη ὑπ' ἐκείνων τμηθήσεται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἀχθήτωσαν αἱ ΓΕ, ΖΗ τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ ἐκ τοῦ ἀκολούθου καὶ ἀλλήλαις παράλληλοι, καὶ παραλληλόγραμμα πληρώσουσι τὰ ΑΕ, ΘΗ· ἐν οἷς ἐπειδὴ ΓΕ = ΑΘ, καὶ ΖΗ = ΘΙ (§. 400) καὶ ΓΕ = ΑΘ = ΘΙ = ΖΗ. Τῶν δὲ δὴ παραλλήλων ΓΕ, ΖΗ ὑπὸ τῆς αὐτῆς ΓΔ τεμνομένων, ἔςαι καὶ ὑπὸ ΕΓΖ = ΗΖΛ. Τῆς δ' αὐτῆς ΓΔ, καὶ τὰς παραλλήλους ΘΖ, ΙΛ τεμνούσης, καὶ ὑπὸ ΓΖΕ = ΖΛΗ (§. 282.). Ἐπὶ ἄρα τῶν τριγώνων ΓΕΖ, ΖΗΛ, ἐν οἷς αἵδε αἱ γωνίαι, πρὸς τὰς ἴσας πλευρὰς ΓΕ, ΖΗ, τὴν αὐτὴν ἐχήκασι θέσιν, καὶ αἱ πλευραὶ ΓΖ, ΖΛ, ἀλλήλαις ἔσονται ἴσαι (§. 320.). Τὸ δ' αὐτὸ ὡσαύτως δειχθήσεται, καὶ περὶ τῶν λοιπῶν τῆς ΓΔ εὐθείας μερῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 402. Ἐντεῦθεν δὴ, ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ εἰς μέρη ὁποσαοῦν τῷ ἀριθμῷ α, ἀλλήλοις ἴσα διαιρεθήσεται, ἀχθείσης ἀπὸ τοῦ σημείου Α πέρατος αὐτῆς τῆς ΑΓ, κἂν αὐτῇ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α, εὐθείας, ἣ ἂν πρὸς τὸ δοκοῦν ληφθείη, τῆς ΑΔ τοσάκις τεθείσης, ὁπόσαι τῷ ἀριθμῷ α ἔνεισι μονάδες. Τῶν δὲ γὰρ τῶν μερῶν ἐὰν τὸ ἔσχατον τερματίζηται ἐπὶ τὸ Γ, ἐπεζεύχθω ἡ ΓΒ. Ἀχθεισῶν δὲ ἀφ' ἑκάςου τῶν σημειωθέντων σημείων ἐπὶ τῆς ΑΓ, εὐθειῶν παραλλήλων τῇ ΓΒ, ἡ ΑΒ ταύτῃ γε, ὥσπερ ἦν προτεθέν, διαιρεθήσεται. Σχ. 66.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ. 67. §. 403. Τριῶν ἀχθεισῶν εὐθειῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς ἑτέρας ἐπὶ τὴν ἑτέραν τῶν ἐν ἄκροις, δυεῖν ἑτέρων εὐθειῶν τεθεισῶν ΗΘ, ΙΚ, αἱ ὑπὸ τῆς μεσούσης κατὰ τὰ σημεῖα Λ καὶ Μ τμηθήσονται· ἔσαι ΗΛ : ΗΘ = ΙΜ : ΙΚ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Διαιρεθήτω γὰρ ΗΘ εἰς μέρη ἴσα, ὁσαδήποτε τὸν ἀριθμὸν, καὶ ἀχθήτωσαν διὰ τῶν κατὰ τὰ μέρη ἐχάτων σημείων εὐθεῖαι, ταῖς κατ' ἀρχὰς ἀχθείσαις ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ παράλληλοι, αἵτινες προεκβαλλόμεναι καὶ τὴν εὐθεῖαν ΙΚ εἰς μέρη ἀλλήλοις ἴσα τεμοῦσιν (§. 401.). Ὁ τοίνυν μέγιςος ἀριθμὸς τῶν τῆς εὐθείας ΗΘ μορίων, τῶν ἐνόντων τῇ ΗΛ, ἀείποτε ἴσος ἔσαι τῷ μεγίςῳ ἀριθμῷ τῶν μορίων τῶν ἀπὸ τῆς ΙΚ, τῶν ἐνόντων τῇ ΙΜ· ὁποσοσοῦν ἂν εἴη ὁ τῶν μορίων ἀριθμὸς, ἐν οἷς οὕτω διῃρημέναι εἰσὶν αἱ ΗΘ, ΙΚ. Αἱ ἄρα εὐθεῖαι ΗΛ, ΗΘ, καὶ ΙΜ, ΙΚ, ἀνάλογοι εἰσίν (§. 152.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 404. Τῇ αὐτῇ δείξει κατασκευάζεται ὅτι καὶ ΛΘ : ΗΘ = ΜΚ : ΙΚ. Ἐκ δὲ τῆς ἐν τῷ θεωρήματι ἀναλογίας ΗΛ : ΗΘ = ΙΜ : ΙΚ· ἕπεται ἓν καὶ ὅτι ΗΛ : ΗΘ − ΗΛ = ΙΜ : ΙΚ − ΙΜ (§. 171.) τουτέςιν ΗΛ : ΛΘ = ΙΜ : ΜΚ. Καὶ ἐν γένει ἄρα αἱ εὐθεῖαι, ἢ τὰ μέρη τῶν εὐθειῶν ΗΘ, ΙΚ, τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ παραπλησίως ἔχοντα θέσεως, πρὸς ἄλλα ὁποιαδήποτε τῶν αὐτῶν μέρη εὐθειῶν, τὰ ἐν ταῖς παραλλήλοις καὶ αὐτὰ ὡσαύτως ἔχοντα θέσεως, ἀνάλογον ἐςίν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 405. Ἔνθεν τοι ἐὰν ἐν ταῖς παραλλήλοις Σχ. 68. ΑΒ, ΓΔ, εὐθεῖαι δύο ΑΔ, ΒΓ ἀχθῶσιν, ἀλλήλας πῃ, οἷον κατὰ τὸ Ε, τέμνουσαι, ἔσται ΑΕ : ΑΔ = ΒΕ : ΒΓ. Καὶ ΑΕ : ΕΔ = ΒΕ : ΕΓ. Δύναται γὰρ καὶ τρίτη παράλληλος διὰ τοῦ Ε, ταῖς κατ' ἀρχὰς τεθείσαις ΑΒ, ΓΔ ἀχθῆναι, ὑφ' ἧς ἂν ἑκατέρα τῶν ΑΔ, ΒΓ κατὰ τὸ Ε τέμνοιτο.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 406. Οὕτω καὶ ἐὰν ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, Σχ. 69. μιᾷ τινι τῶν πλευρῶν ΒΓ, παράλληλος εὐθεῖα ἀχθῇ ἡ ΔΕ, ἀνάλογον γίνονται ΑΔ : ΑΒ = ΑΕ : ΑΓ. Καὶ ΑΔ : ΔΒ = ΑΕ : ΕΓ. Καὶ ΔΒ : ΑΒ = ΕΓ : ΑΓ. Δύναται γὰρ καὶ ταῖς δυσὶ ταύταις ΒΓ, ΔΕ, τρίτη παράλληλος ἀχθῆναι διὰ τοῦ Α, ἑκατέραν τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ, παρ' αὐτὸ τὸ σημεῖον τέμνουσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 407. Ἐὰν ᾖ ΑΒ : ΑΔ = ΑΓ : ΑΕ, αἱ Σχ. 70. ἀγόμεναι ΒΓ, ΔΕ, παράλληλοι ἔσονται. Εἰ γὰρ μή, ἔστω ἡ διὰ Δ εὐθεῖα ΔΖ παράλληλος τῇ ΒΓ. Καὶ ἔσται ΑΒ : ΑΔ = ΑΓ : ΑΖ· ὅπερ ἀνατρέπει τὸ ὑποτεθέν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 408. **Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τὴν τε-** Σχ. 71. **τάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.**

ΛΥΣΙΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι α, β, γ. Καὶ δὴ γωνίας τῆς τυχούσης ληφθείσης Δ, γινέσθω ΔΕ = α, καὶ ΔΖ = β καὶ ΔΗ = γ, καὶ ἐπεζεύχθω Ε, Η, τὰ πέρατα τῆς πρώτης ΔΕ, καὶ τρίτης ΔΗ. Τῇ δὲ

ΕΗ διὰ Ζ παράλληλος ἀχθήτω ἡ ΖΘ· καὶ ἔςαι ΔΘ ἡ ζητυμένη.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπὶ γὰρ τῦ ΔΖΘ τριγώνυ τῇ ΖΘ πλευρᾷ, ἡ ΕΗ παράλληλος ἐςί. Διὸ δὴ $\Delta E : \Delta Z = \Delta H : \Delta\Theta$ τυτέςιν $\alpha : \beta = \gamma : \Delta\Theta$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 409. Ἐὰν ληφθῇ $\Delta H = \Delta Z$, καὶ τὰ λοιπὰ γένηται ὡσαύτως, ευρίσκεται πρὸς δύο τὰς δοθείσας α, β, ἡ τρίτη ἀνάλογαν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 410. Διὰ τῶν αὐτῶν καὶ εὐθεῖα ἐξευρεθήσεται, ἥτις ἂν ᾖ πρὸς εὐθεῖαν ἄλλην, ἤτοι δοθεῖσαν, ἢ πρὸς τὸ δοκῦν ληφθεῖσαν, ἐν λόγῳ συνθέτῳ, ἐξ ὁποσωνῦν τὸν ἀριθμὸν λόγων, τῶν ἐν γραμμαῖς δεδομένων. Οἷον ἔςωσαν διδόμενοι λόγοι $\alpha : \beta$, $\gamma : \delta$, $\varepsilon : \zeta$, $\eta : \vartheta$, κειμένων δηλονότι τῶν γραμμάτων ἀντὶ γραμμῶν. Καὶ δὴ προσληφθείσης (εἰ μὴ δεδομένη τύχοι) πρὸς τὸ δοκῦν τῆς εὐθείας Α, γινέσθω

$$\begin{aligned} \alpha : \beta &= A : B \\ \gamma : \delta &= B : \Gamma \\ \varepsilon : \zeta &= \Gamma : \Delta \\ \eta : \vartheta &= \Delta : E \end{aligned}$$

Καὶ ἔςαι ὁ λόγος $A : \Gamma$, σύνθετος ἐκ τῶν δύο $\alpha : \beta$, καὶ $\gamma : \delta$. Ὁ δὲ λόγος $A : \Delta$, ἐκ τῶν τριῶν $\alpha : \beta$, $\gamma : \delta$, $\varepsilon : \zeta$. Ὁ δὲ λόγος $A : E$, ἐκ τῶν τεσσάρων $\alpha : \beta$, $\gamma : \delta$, $\varepsilon : \zeta$, $\eta : \vartheta$. Καὶ ὕτως ἐφεξῆς (§. 166.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 411. Ἐὰν οἱ λόγοι ὑς δεῖ συνθέσθαι, ἴσοι ἀλλήλοις ὦσιν, ἔςαι ὁ μὲν λόγος $A : \Gamma$ διπλασίων τῦ $\alpha : \beta$.

α : β. Ὁ δὲ Α : Δ, τῷ αὐτῷ α : β τριπλασίων. Ὁ δὲ Α : Ε τετραπλασίων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 412. Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ, τὸν Σχ. 72. αὐτὸν λόγον διελεῖν, ὃν ἡ δοθεῖσα ἄλλη ΑΓ διήρηται.

ΛΥΣΙΣ.

Τῶν Εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ, ὑφ' ὁποιαδήποτε γωνία συντεταγμένων ΓΑΒ, ἄχθητω ἡ ΓΒ, καὶ ταύτῃ παράλληλοι αἱ ΔΕ, ΖΗ, ΘΙ, δι' ἁπάντων τῶν σημείων, καθ' ἃ ἡ διῃρημένη ΑΓ διήρηται. Αὗται γὰρ δὴ προεκβαλλόμεναι καὶ τὴν ΑΒ τεμοῦσι, κατὰ τὸ προτεθέν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν γὰρ καὶ διὰ τοῦ Α εὐθεῖα νοηθῇ ἠγμένη παράλληλος τῇ ΒΓ, δύο ὁποιαδήποτε μέρη τῆς ΑΒ εὐθείας, ἐν ταῖς παραλλήλοις ἐναπολειφθήσεται, ἐν αἷς καὶ τὰ ἐπὶ τῆς ΑΓ μέρη τὰ ἐκείνοις ἀντιστοιχοῦντα ἐναπείληπται. Τὰ δὲ τοιάδε μέρη ἀνάλογον ἐστίν (§. 404.).

ΤΜΗΜΑ ΠΕΜΠΤΟΝ
ΠΕΡΙ
ΣΧΗΜΑΤΩΝ
ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 413.

Σχ. 73. Σχήματα ἐπίπεδα εὐθύγραμμα ὅμοια καλεῖται, ὧν πρὸς ἄλληλα παραβαλλομένων, πᾶσαι μὲν αἱ γωνίαι ἴσαι, πᾶσαι δ' αἱ πλευραὶ, αἱ ταῖς ἴσαις γωνίαις παρεγκείμεναι, ἀνάλογον. Οὕτως ἐὰν ἐπὶ τῶν τετραπλεύρων ΑΒΓΔ, αβγδ, ᾖ Α = α, Β = β, Γ = γ, καὶ Δ = δ· καὶ παρὰ ταῦτα, ΑΒ : αβ = ΒΓ : βγ, καὶ ΒΓ : βγ = ΓΔ : γδ, καὶ οὕτως ἑξῆς, ἔσαι τὰ τετράπλευρα ἀλλήλοις ὅμοια.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 414. Ἅπαντα τὰ κανονικὰ τῶν σχημάτων, οἷς ἰσάριθμοι αἱ πλευραὶ, ὅμοιά ἐςι· τουτέςι πάντα τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα, καὶ τὰ τετράγωνα πάντα, καὶ τὰ πεντάγωνα, καὶ τὰ ἑξάγωνα, κτ. τὰ κανονικά. Καὶ δῆλον ἄρα ὡς καὶ οἱ κύκλοι πάντες ἀλλήλοις ὅμοιοι ἔσονται (§. 399.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 315. Ἐπειδὴ οὖν ἐπὶ τῶν ὁμοίων σχημάτων, ὁ αὐτὸς ἐςὶ λόγος τῶν ὁποιωνδηποτοῦν πλευρῶν, τῶν ταῖς ἴσαις γωνίαις παρεγκειμένων, ἔςω ὁ λόγος ὅδε πλευρᾶς πρὸς πλευρὰν Π : π, καὶ ἔςαι ἕκαςος τῶν λόγων ΑΒ : αβ, ΒΓ : βγ, ΓΔ : γδ, ΔΑ : δα, τῷ τοιῷδε λόγῳ Π : π, ἴσος. Ἔνθεντοι καὶ τῶν ἡγου-ἡγȣμένων, καὶ ἑπομένων εἰς κεφάλαια ἰδία προσαθροισθέντων, ἔσονται οἱ λόγοι $(AB + B\Gamma + \Gamma\Delta) : (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta)$. Καὶ $(AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A) : (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\alpha)$ ἴσοι τῷ λόγῳ $\Pi : \pi$ (§. 174.). Τȣτέςι $\Pi : \pi = AB\Gamma\Delta : \alpha\beta\gamma\delta = AB\Gamma\Delta A : \alpha\beta\gamma\delta\alpha$. Καὶ τοῖς ὁμοίοις ἄρα τῶν χημάτων, τὰ μέρη τῶν περιμέτρων, τὰ ἐν ταῖς τῶν ἴσων γωνιῶν κορυφαῖς, ἐπίσης θέσεως ἔχοντα, ὡς αἱ ἐν αὐτοῖς εἰσὶ πλευραὶ, αἱ ἐν ταῖς ἴσαις τῶν γωνιῶν παρεγκείμεναι. Τὸ δ᾽ αὐτὸ καὶ περὶ ὁλοχερῶν τῶν περιμέτρων ἀληθεύσει λεγόμενον.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 416. Ἐὰν αἱ δύο γωνίαι τῶν ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ, δυσὶ γωνίαις ταῖς ἐν τῷ αβγ ἴσαι ὦσιν $A = \alpha$ καὶ $B = \beta$, τὰ τρίγωνα ἔςαι ὅμοια. Σχ. 74.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐκ γὰρ δὴ τῶν τεθέντων καὶ $\Gamma = \gamma$ (§. 302.). Γινέσθω ȣ̓ν $B\Delta = \beta\gamma$, καὶ ἀχθήτω ἡ ΔΕ παράλληλος τῇ ΑΓ, καὶ ἔςαι γωνία $\Delta = \Gamma = \gamma$· τό,τε $EB\Delta = \alpha\beta\gamma$, ὡς αὐτῷ ἔχειν καὶ προσεφαρμόζεσθαι (§. 320.). Ἐπειδὴ τοίνυν $BA : BE = B\Gamma : B\Delta$ (§. 406.), ἔςαι καὶ $BA : \beta\alpha = B\Gamma : \beta\gamma$. Αἱ ἄρα πλευραὶ αἱ τὰς τῶν τριγώνων ἴσας γωνίας Β, β περιέχȣσαι, ἀνάλογον εἰσίν. Ἐπεὶ δὲ τȣ̃το καὶ περὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως ἔχει δειχθῆναι πλευρῶν, τῶν τὰς ἴσας γωνίας περιεχȣσῶν, ὅμοια ἔςαι τὰ τρίγωνα (§. 413.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 417. Ἐὰν ἐπὶ τȣ̃ ΑΒΓ τριγώνȣ, τινὶ τῶν πλευρῶν ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΔΕ, ἀποτμηθήσεται τὸ ΕΒΔ τρίγωνον, τῷ ὅλῳ ΑΒΓ ὅμοιον. Καὶ παρὰ τὰς ἀναλογίας ἄρα ἃς εἴδομεν (§. 406.), ἀληθὴς ἀεὶ καὶ αὐτη ΑΒ : ΑΓ = ΕΒ : ΕΔ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

Σχ.75. §. 418. Ἔνθεντοι ἐὰν ἐπὶ τῆς βάσεως τοῦ ΑΒΓ τριγώνου προεκβεβλημένης, σαθῇ τρίγωνον ἄλλο τὸ ΔΕΖ, οὗ ἡ κορυφὴ Δ, ἰὼ ἡ βάσις ὑποτείνει, ἐπὶ τῆς εὐθείας πίπ]ει ΑΔ, τῆς διὰ τοῦ Α παραλλήλου τῇ προεκβληθείσῃ βάσει ἠγμένης. Ἀχθῇ δέτις καὶ ἑτέρα εὐθεῖα ΗΚ, τῇ αὐτῇ ΒΖ παράλληλος· ἐπειδὴ ΒΓ : ΗΘ = ΑΒ : ΑΗ, καὶ ΕΖ : ΙΚ = ΔΕ : ΔΙ. Καὶ δὴ ΑΒ : ΑΗ = ΔΕ : ΔΙ (§. 403.), ἔσαι ΒΓ : ΗΘ = ΕΖ : ΙΚ. Ὅθεν ἐὰν ᾖ καὶ ΒΓ = ΕΖ, ἔσαι ΗΘ = ΙΚ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ.74. §. 419. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, γωνία τις Β ἴση ᾖ τῇ ἐπὶ ἑτέρου τινὸς τριγώνου αβγ, γωνίᾳ β· ὦσι δὲ καὶ αἱ ταύτας περιέχουσαι τὰς γωνίας πλευραὶ ἀνάλογον, ὅμοια ἔσαι τὰ τρίγωνα.

ΔΕΙΞΙΣ.

Γινέσθω ΒΔ = βγ. Καὶ ἀχθήτω ΔΕ τῇ ΑΓ παράλληλος. Καὶ ἔσαι τὰ ΑΒΓ, ΕΒΔ τρίγωνα ὅμοια (§. 417.)· καὶ ΒΓ : ΒΔ ἤτοι πρὸς βγ = ΒΑ : ΒΕ. Τίθεται δὲ ΒΓ : βγ = ΒΑ : βα, ἔσαι ἄρα ΒΕ = βα. Ἐπεὶ δὲ οὕτως ἐπὶ τῶν αβγ, ΕΒΔ τριγώνων, αἱ ἴσαι γωνίαι Β, β, ὑπὸ ἴσων πλευρῶν περιέχονται· τὸ αβγ τρίγωνον τῷ ΕΒΔ οὕτως ἐσὶν ἴσον, ὡς αὐτῷ ἔχειν καὶ προσεφαρμόζεσθαι (§. 316.). Ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον αβγ τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ, ὅμοιον ἐσίν.

ΘΕΩΡΗ-

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 420. Ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ πλευραὶ ὦσιν ἀνάλογον, ταῖς ἐν τῷ τριγώνῳ αβγ, τὰ τρίγωνα ἔσαι ὅμοια. Σχ. 74.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν ᾖ ΑΒ : αβ = ΒΓ : βγ, γενομένων ΒΕ = βα, καὶ ΒΔ = βγ, ἔσαι ΑΒ : ΒΕ = ΒΓ : ΒΔ. Ἡ δὲ ΕΔ τῇ πλευρᾷ ΑΓ παράλληλος (§. 407.). Διὸ τὸ ΕΒΔ τρίγωνον, τῷ ΑΒΓ ὅμοιον. Καὶ ΒΓ : ΒΔ, ἤτοι πρὸς βγ = ΓΑ : ΔΕ (§. 417.). Τίθεται δὲ καὶ ΒΓ : βγ = ΓΑ : γα. Ἄρα καὶ ΔΕ = γα. Αἱ ἄρα τοῦ ΒΔΕ πλευραὶ, ταῖς τοῦ βγα ἴσαι. Καὶ τόγε τρίγωνον αβγ, τῷ τριγώνῳ ΕΒΔ οὕτως ἴσον, ὡς αὐτῷ ἔχειν καὶ ἐφαρμόζεσθαι. Ἄρα καὶ τὸ αβγ τρίγωνον τῷ ΑΒΓ ὅμοιον.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 421. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα, ὧν αἱ τὴν ἑτέραν τῶν ὀξειῶν περιέχουσαι πλευραὶ ἀνάλογον εἰσὶν, ὅμοια ἐσί.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπὶ τῶν ΑΒΓ, αβγ, ὧν ὀρθαὶ μὲν αἱ Γ, γ, καὶ μὲν δὴ καὶ ΑΒ : αβ = ΑΓ : αγ, γινέσθω ΒΔ = βα, καὶ ἀχθήτω ΔΕ ἐπὶ τῆς ΒΓ κάθετος, ἢ δὴ παράλληλος μὲν ἔσαι τῇ πλευρᾷ ΑΓ, ὅμοιον δὲ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον συσήσει τῷ ΑΒΓ (§. 417.)· ἔσαι οὖν ΑΒ : ΒΔ, ἤτοι πρὸς βα = ΑΓ : ΔΕ. Ταύτης δὲ τῆς ἀναλογίας πρὸς τὴν προτέραν παραβαλλομένης, εὔδηλον ὅτι ΔΕ = αγ. Τὸ ἄρα τρίγωνον ΔΒΕ τῷ τριγώνῳ αβγ, οὕτως ἴσον ἐσὶν, ὡς αὐτῷ ἔχειν καὶ ἐφαρμόζεσθαι (§. 349.)· ταυτητοι καὶ τόδε τὸ αβγ τρίγωνον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ὅμοιον ἔσαι. Σχ. 76.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 422. Κἀκ τούτων οὖν ἐν γένει φανερὸν ὅμοια καθίςασθαι τὰ τρίγωνα, τῶν μὲν γωνιῶν δι' ὧν διορίζονται, ἴσων λαμβανομένων, τῶν δὲ πλευρῶν τῶν ταῖς ἴσαις γωνίαις παρεγκειμένων ἀνάλογον, καθ' οἷον δήτινα τῶν ὑποδειχθέντων ἐξ ἀρχῆς τρόπων (§. 316. 320. 323. 349.) τῆς τούτων κατασκευῆς τελουμένης· τουτέςιν, εἴτε ἐκ γωνίας μιᾶς καὶ δυεῖν πλευρῶν τοῦ τριγώνου κατασκευαζομένου· εἴτε ἐκ δυεῖν γωνιῶν καὶ πλευρᾶς μιᾶς· εἴτε ἐκ πλευρῶν τριῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 423. Τῶν ὁμοίων τριγώνων οὕτω συναπτομένων, ὡς ἀείποτε ἐν δυσὶ τριγώνοις κοινήν τινα χωρεῖν τὴν πλευρὰν, πρὸς ἣν ὁμοίως τὰ τρίγωνα κείμενα ᾖ· ἐὰν ἅπασαι αἱ τούτων ὁμόλογοι πλευραὶ, πλευραὶ γίγνωνται τῶν εὐθυγράμμων ἐπιπέδων σχημάτων, ἔςαι τὰ τοιάδε σχήματα ὅμοια.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔςωσαν ἐν Σχήμασιν 77. καὶ 78. τὰ ὅμοια τρίγωνα τοῖς αὐτοῖς γράμμασιν ἐπισημειούμενα. Καὶ ληφθεισῶν οὖν τινῶν, τῶν ἐν τοῖσδε τοῖς τριγώνοις ὁμολόγων πλευρῶν, γινέσθω σχήματα τὰ ΑΒΓΔΕΖΗ καὶ αβγδεζη. Φημὶ δὴ ὅτι ταῦτα ὅμοιά ἐςίν. Εἰσὶ γὰρ αἱ τῶνδε τῶν σχημάτων γωνίαι, αἱ τοῖς αὐτοῖς γράμμασιν ἐπισεσημειωμέναι, ἴσαι· ὡς, ἤτοι ἴσαι ταῖς γωνίαις τῶν ὁμοίων τριγώνων, ταῖς πρὸς τὰς ἀνάλογον πλευρὰς, ἐπίσης θέσεως ἐχούσαις, ἢ γοῦν ἐκ τῶν τοιῶνδε γωνιῶν προσθέσει, ἢ ἀφαιρέσει ἀναφυόμεναι. Ὁ δὲ δὴ ταῖς ἐπὶ τούτων πλευραῖς ἀνήκει, ἐςὶν $\mathrm{HZ} : \eta\zeta = \mathrm{ZE} : \zeta\varepsilon = \mathrm{HE} : \eta\varepsilon = \mathrm{HA} : \eta\alpha = \mathrm{AE} : \alpha\varepsilon = \mathrm{A\Delta} : \alpha\delta = \mathrm{E\Delta} : \varepsilon\delta$. καὶ οὕτως ἐξῆς. Κἀκείνων ἄρα τῶν ἐν

τοῖς

τοῖς τριγώνοις πλευρῶν ἐκλελεγμένων, αἱ πλευραὶ ἔσονται αἱ αὐταὶ καὶ τῶν σχημάτων ΑΒΓΔΕΖΗ, αβγδεζη, ἕπεται καὶ τὰς ἐν τοῖς σχήμασι πλευρὰς, τὰς πρὸς τὰς ἴσας γωνίας ὡσαύτως θέσεως ἐχούσας, εἶναι ἀνάλογον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 424. Διὰ δὴ τούτων, οἱῳδήποτε ἐπιπέδῳ εὐθυγράμμῳ σχήματι ΑΒΓΔΕΖΗ, ὅμοιον, ἕτερον τὸ αβγδεζη κατασκευασθήσεται, τῶν τριγώνων τῶν πρὸς τὸ πρῶτον σχῆμα, ἐξ ὧν δηλαδὴ τὸ σχῆμα τόδε τὸ δοθὲν ἀνακύψει, πρὸς τὸ δοκοῦν ληφθέντων. Δεῖ δὲ τὸν λόγον διδόμενον εἶναι τινὸς τῶν ἐπὶ τοῦ σχήματος ΑΒΓΔΕΖΗ πλευρῶν, πρὸς τὴν ἐκείνῃ ὁμόλογον πλευρὰν τοῦ ἑτέρου σχήματος αβγδεζη, ὃ δέον κατασκευάσαι. Ἢ γοῦν τὸν λόγον, ὃν μίατις ἔχει πλευρὰ, ἐνόστινος τῶν ἐπὶ τοῦ προτέρου σχήματος καταγραφομένων τριγώνων, πρὸς μίαν τινὰ πλευρὰν, τὴν ἐν τῷ τριγώνῳ τοῦ κατασκευασθησομένου ἐκείνῃ οὖσαν ὁμόλογον· ἵνα ἀπὸ τῆς οὕτω διδομένης πλευρᾶς ἀρχὴν λάβοι ἡ κατασκευὴ τοῦ αβγδεζη, σχήματος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 425. Δύναται καὶ τρίγωνον ἅπαν ἐξ ἄλλων ἀνακύπτειν τριγώνων, συνθέσει τῇ τούτων, ἢ τινῶν ἀφαιρέσει ἀπὸ τῶν λοιπῶν. Ἁπλούστατα δὲ ἐκ δυοῖν ὀρθογωνίων, ἢ ἀμβλυγωνίων. Εἴπερ οὖν τρίγωνα δύο, ἐξ ὁμοίων τριγώνων ὡσαύτως παράγεσθαι δύνανται, ἐπιφέρειν ἔξεσται παραπλησίως καὶ τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ὅμοια.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 426. Ὡς δ' ἂν τὸ ἔργον τῆς τοῦ αβγδεζη, κατὰ τὸ ΑΒΓΔΕΖΗ σχηματογραφίας οὕτω προέλθοι, ὡς ἐν μόνον τρίγωνον τὸ εζη, τοῖς λοιποῖς προ-

σεπι-

σεπιτεθεισόμενον ὑπολείπεσθαι, διωνήσεται τὸ σχῆμα ἐκπερανθῆναι τῆς μὲν ὑπὸ αηζ = ΑΗΖ, τῆς δὲ ὑπὸ δεζ = ΔΕΖ, καθισαμένων. Προσεκβληθεισῶν γὰρ τῶν πλευρῶν ηζ, εζ, ὥστε κατὰ τὸ ζ ἀλλήλαις συμπεσεῖν, τὸ προκύψαν τρίγωνον εζη, ὡς τῷ τριγώνῳ ΕΖΗ ὅμοιόν τε ἔσεται, καὶ ὁμοίως κείμενον, αὐτόθεν δῆλον (§. 416.). Ἐπειδὴ τοίνυν αἱ ηζ καὶ εζ πλευραὶ, μετὰ τῆς ὑπ' αὐτῶν ἀπολαμβανομένης γωνίας ζ, διὰ τῶν λοιπῶν τοῦ σχήματος γωνιῶντε καὶ πλευρῶν διορίζονται, ἐν γένει ἐξέσται ὑποσυνάψαι, ὅτι σχήματα δύο ἐπίπεδα εὐθύγραμμα αβγδεζη καὶ ΑΒΓΔΕΖΗ, ὅμοια ἔσαι, εἰ δῆλον εἴη ἁπάσας τὰς ἐν ἐκείνῳ γωνίας καθ' ἣν ἔχον τάξιν, ἁπάσαις ταῖς ἐν τούτῳ ἴσας εἶναι πλὴν μιᾶς· τῆς ζ. Καὶ τὰς πλευρὰς ἁπάσας τὰς ἐν ἐκείνῳ, ᾗ τετάχαται, ταῖς πλευραῖς ταῖς ἐν τούτῳ ἀνάλογον εἶναι, πλὴν δυεῖν, ηζ, εζ, ὑφ' ὧν ἡ ῥηθεῖσα γωνία ζ περιέχεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 427. Τοῦ δ' αὐτοῦ αὖθις μέρους τοῦ σχήματος αβγδεζη, ἐκτετελεσμένου, ἐὰν ἡ ὑπὸ αηζ ἴση γένηται τῇ ΑΗΖ, ἀμελουμένων καὶ τῶν λοιπῶν ζ, καὶ ζεδ, διορισθῇ δὲ τὸ μέγεθος τῆς πλευρᾶς ηζ διὰ τῆς ἀναλογίας ΑΒ : αβ = ΗΖ : ηζ, ἐπιζευγνυμένης τῆς εζ, τρίγωνον συστήσεται τὸ ηεζ, τῷ τριγώνῳ ΗΕΖ ὡσαύτως ὅμοιον (§. 419.), καὶ ὁμοίως κείμενον. Ἐπειδὴ τοίνυν ἡ πλευρὰ ζε, μετὰ τῶν γωνιῶν ζ, καὶ ὑπὸ ζεδ, ἐν αἷς ἡ ζε ἐναπολαμβάνεται, διὰ τῶν λοιπῶν τοῦ σχήματος γωνιῶντε καὶ πλευρῶν προσδιορίζεται· ἐξέσται παραπλησίως, τὴν δυοῖν ἐπιπέδων εὐθυγράμμων σχημάτων αβγδεζη, ΑΒΓΔΕΖΗ ὁμοιότητα ὑποσυνάπτειν, εἰ δῆλον, ἁπάσας μὲν τὰς ἐν ἐκείνῳ γωνίας, ᾗ τετάχαται, ἴσας εἶναι πάσαις ταῖς ἐν τούτῳ, πλὴν δυεῖν ζ, καὶ ὑπὸ ζεδ· πάσας δὲ τὰς ἐκείνου πλευρὰς, ᾗ τετάχαται, χᾶται, ἀνάλογον εἶναι πάσαις ταῖς τούτου, πλὴν μιᾶς, τῆς ζε, τῆς ἐν ταῖς κορυφαῖς τῶν γωνιῶν ζ καὶ ὑπὸ ζεδ ἀπειλημμένης· ἃς δὴ γωνίας, ταῖς Ζ καὶ ὑπὸ ΖΕΔ ἴσας τυγχάνειν, ὃ προὔκειτο.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 428. Ἡ τοῦ, πρὸς ὅμοιον τὸ δοθὲν, σχήματος κατασκευὴ, ἐπὶ τὰ εἰδικώτερα κατιοῦσι διαφόροις τρόποις ἂν ἔχοι ποικίλλεσθαι, ἢ ταῦτα, ἢ ἐκεῖνα τὰ τρίγωνα, πρὸς τὸ σχῆμα τὸ δοθὲν καταγράφεται· ἢ καθὸ τὰ τρίγωνα τοῦ, ὅπερ ἂν δέοι κατασκευάσαι, σχήματος, ἐκείνοις ὅμοια καθίσταται, ἤτοι προσλήψει ἴσων γωνιῶν, ἢ πλευρῶν ἀναλόγων, ἢ πῇ μὲν γωνιῶν, πῇ δὲ πλευρῶν.

Ἐκ τῶν ἁπλουστάτων δὲ κατασκευῶν ἐστὶν, ἡ παρὰ Σχ. 79. τῷ δοθέντι σχήματι, ἢ ἐντὸς αὐτοῦ, σημεῖόν τι λαμβάνουσα οἷον τὸ Θ, κἀπὸ τοῦδε ἐπὶ πάσας ἁπασῶν τὰς κορυφὰς τῶν ἐν τῷ σχήματι γωνιῶν εὐθείας ἄγουσα, τὰς ΘΑ, ΘΒ, ΘΓ, καὶ τὰς λοιπάς. Ἔπειτα (Σχ. 86.) πρὸς τῷ θ σημείῳ τῆς θα, συνιστῶσα γωνίας ταῖς πρὸς τῷ Θ ἴσας. Ἀπὸ δὲ τῶν περιεχουσῶν τάσδε τὰς γωνίας εὐθειῶν, μέρη ἀποτέμνουσα, ὧν ἕκαστον ἂν εἴη πρὸς τὴν ἐπὶ τοῦ δοθέντος σχήματος, ὡσαύτως ἠγμένην, ὡς ἡ τοῦ σχήματος πλευρὰ, ὃ δέον κατασκευάσαι, ἐστὶ πρὸς τὴν ἐν τῷ δοθέντι σχήματι πλευρὰν τὴν ὁμόλογον. Ἀμέλει τοι ἐὰν ὁ λόγος οὗτος ᾖ ὡς Π : π, ἐπάναγκες γενέσθαι Π : π = ΘΑ : θα = ΘΒ : θβ = ΘΓ : θγ· καὶ οὕτως ἐφεξῆς, κατὰ γωνίας ΑΘΒ, αθβ, ΑΘΓ, αθγ, καὶ ἑξῆς, ἀλλήλαις ἴσας. Τούτου γὰρ γενομένου τὸ αβγδεζη σχῆμα καταγραφήσεται, τῶν α, β, γ καὶ τῶν λοιπῶν, ἢ δεῖ, ἐπιζευγνυμένων.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 429. Οἱ τῶν κύκλων τομεῖς, ὧν αἱ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίαι ἴσαι, ὅμοιοί εἰσιν· ὥσπερ δὴ

καὶ

καὶ τὰ τμήματα, ὧν αἱ περιφέρειαι αἱ αὐταὶ εἰσὶ ταῖς τῶν εἰρημένων τομέων.

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 81. Ἔστωσαν γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, αβγ ἀλλήλαις ἴσαι. Κείσθω δὲ ἐντὸς τῆς ὑπὸ αβγ γωνίας, σχῆμα κατασκευάσαι τῷ τομεῖ ΑΒΓ ὅμοιον. Καὶ τοίνυν σημείε προσληφθέντος τε Β, ἀχθείσης τε τῆς ΒΔ, γινέσθω αβδ = ΑΒΔ· καὶ ΑΒ : αβ = ΒΔ : βδ· τετέστιν, ἐπεὶ ΒΔ = ΑΒ, γινέσθω βδ = αβ. Καὶ ἔστω τὸ δ σημεῖον ἐπὶ τῆς περιφερείας τε σχήματος ὃ δέον καταγράψαι. Ἀλλὰ γὰρ τέτε πρὸς ἅπαντα τὰ ἐν τῷ τόξῳ ΑΔΓ σημεῖα γεγονότος, ὁ τομεὺς καταγραφήσεται αβγ, ὃς τῷ τομεῖ ἑπομένως ΑΒΓ ὅμοιος ἔσαι. Ὅτι δὲ τῶν ὑποτεινεσῶν ἠγμένων ΑΓ, αγ καὶ τὰ τμήματα ὅμοια γίνεται, ἐκ τῶν αὐτῶν δῆλον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 430. Τῶν ἄρα ὁμοίων τομέων τε καὶ τμημάτων αἱ περιφέρειαι, ὡς αἱ ἡμιδιάμετροι εἰσίν· ἢ ὡς τῶν τμημάτων αἱ ὑποτείνεσαι (§. 415.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 431. Καὶ αἱ τῶν κύκλων δὲ ἡμιπεριφέρειαι, εἰσὶν ὡς αἱ ἡμιδιάμετροι, καὶ αἱ διάμετροι. Καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον καὶ αἱ περιφέρειαι αἱ ὁλοκερεῖς (§. 354.).

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 432. Ἐὰν αἱ τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ πρὸς ταῖς ἀναλόγοις πλευραῖς ὁμοίως κειμένων, ἐπὶ δυοῖν ὁμοίων σχημάτων κορυφαὶ δι' εὐθειῶν ὡσαύτως ἐπιζευχθῶσιν, εἰς ἄλλα μὲν διαιρεθήσεται τὰ σχήματα, ἀλλήλοις δὲ ὅμοια.

ΔΕΙΞΙΣ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπὶ τῶν ὁμοίων σχημάτων ΑΒΓΔΕ, αβγδε, ἔςωσαν ὕτως ἠγμέναι αἱ ΒΕ, βε. Ἐπεὶ δὲ φανερὸν ὡς αἱ πλευραὶ τῦ σχήματος ΒΓΔΕ, ἀνάλογον εἰσὶν αἱ πᾶσαι πρὸς τὰς τῦ βγδε, παρὰ τὴν ΒΕ, καὶ αἱ τῦ προτέρυ σχήματος γωνίαι, ἴσαι εἰσὶ ταῖς τῦ δευτέρυ, παρὰ τὴν ὑπὸ ΓΒΕ, καὶ ΒΕΔ, ἃς ἡ ΒΕ ἀναπολαμβάνεται, ἔσονται δήπυ τὰ σχήματα ταῦτα ΒΓΔΕ, βγδε, τὰ ἀπὸ τῶν δοθέντων ἀποτετμημένα, ἀλλήλοις ὅμοια (§. 427.). Σχ. 82.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 433. Ἐπὶ τῶν ὁμοίων σχημάτων, αἱ εὐθεῖαι αἱ τὰς ἴσας γωνίας ὡσαύτως ἐπιζευγνῦσαι, ΒΕ, βε, ἢ ΓΕ, γε, εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ τῶν σχημάτων αὐτῶν πλευραὶ, αἱ πρὸς τὰς ἴσας γωνίας ὁμοίως κείμεναι, ΑΒ, αβ, ἢ ΒΓ, βγ, καὶ ὕτως ἐφεξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 434. Τῶν δὲ σχημάτων ΒΓΔΕ, βγδε, ἅπερ ὕτως ἀπὸ τινων δοθέντων ἀποτεμνόμενα καθίςαται ὅμοια, παραπλησίῳ καὶ αὐτῶν ἑξῆς τῷ τρόπῳ διαιρυμένων, ἑκάτερον τέως εἰς τρίγωνα ἀναλυθήσεται, ἐξ ὧν τὰ ὁμοίως κείμενα, εἰσὶ καὶ ὅμοια· οἷον τὰ ΑΒΕ, αβε, καὶ ΒΓΕ, βγε, καὶ ΓΔΕ, γδε.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 435. Ἐὰν ἐπὶ τῶν ὁμοίων σχημάτων ΑΒΓ, αβγ, αἱ πλευραὶ ΑΒ, αβ, πρὸς τὰς ἴσας γωνίας ὡσαύτως ἔχωσι θέσεως· ληφθέντες δὲ ἐπὶ μιᾶς τῶνδε τῶν πλευρῶν τῦ Δ σημείυ πρὸ τὸ κοινὸν, γένηται $AB : \alpha\beta = B\Delta : \beta\delta$. Ἔςαι καὶ (§. 173.) $(AB - B\Delta) : (\alpha\beta - \beta\delta) = AB : \alpha\beta$. Ἰυτέςιν $A\Delta : \alpha\delta = AB : \alpha\beta = B\Delta : \beta\delta$. Καὶ μενεῖ ἄρα τὰ σχήματα ὅμοια, ἐὰν ταῖς ἐν αὐτοῖς γωνίαις προσεπιγενέσθαι ὑποτεθῶσιν αἱ γωνίαι Δ, δ, ὧν ἑκατέρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴση τυγχάνοι· ἀντὶ δὲ τῶν πλευρῶν Σχ. 83.

τῆς μὲν ΑΒ, καταλαχθῶσαι αἱ δύο ΑΔ, ΔΒ, τῆς δὲ αβ, αἱ δύο αδ, δβ. Τοιγαρῦν καὶ τὰ δειχθέντα ὁμοίως ἀληθεύσει, ἐὰν καὶ τὰ σημεῖα Δ, δ, καὶ ὅσα δήποτε ἄλλα τοιϑτώδη, ὡς κορυφαὶ γωνιῶν ἐκληφθῶσιν, εἴτε ταῦτα ἐπιζευγνῦσαι εὐθεῖαι, νοηθῶσιν ὡς διαγώνιοι. Ἔσονται γὰρ δὴ καὶ αἱ διαγώνιοι αὗται, ταῖς ὁμολόγοις τῶν σχημάτων πλευραῖς ἀνάλογοι· καὶ τάγε σχήματα, εἰς ἅπερ τὰ δοθέντα ΑΒΓ, αβγ διατέμνϑσιν, ἀλλήλοις ὅμοια παρέξονται. Ἐπιζεύγνυνται δὲ τοιαῦται διαγώνιοι ΔΓ, δγ ἢ, ΔΕ, δε, ϗ ὑπὲρ ἀριθμὸν ἄλλαι μυρίαι, αἳ ἀπὸ τῶν σημείων Δ καὶ δ ἀρχόμεναι, ἐπὶ τὰ σημεῖα τῶν περιμέτρων ἐκπερατϑνται, ὧν ἡ εὕρεσις τῇ τῶν Δ, καὶ δ ἐςὶ παραπλήσιος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 436. Ἐπειδὴ δὲ τῶν ὁμοίων σχηματων ὅτως εἰς ὅμοια διαιρεμένων, αἱ ἐπ᾽ ἐκείνων διαγώνιοι ὅσαι ἐπὶ τϑτων καθίσανται πλευραὶ, τὸ περὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, αβ εἰρημένον, τῶν κατὰ τὰ Δ καὶ δ διαιρεθεισῶν, ϗ περὶ τῶν διαγωνίων κρατήσει λεγόμενον, τῶν τὰ ἐπὶ τῶν περιμέτρων ὁμοίως κείμενα σημεῖα ἐπιζευγνυσῶν. Ἀμέλειτοι ἐὰν ΑΒ, αβ τοιαίδε ὦσι διαγώνιοι, οἱωνδηποτϑν σχημάτων ἀλλήλοις ὁμοίων, κἀν ταύταις δὲ ταῖς διαγωνίοις σημεῖα ληφθῇ τὰ Δ, δ, ὡς εἴρηται, ἐπιζευγνυμένων ἤδη καὶ τϑτων μετὰ τῶν λοιπῶν σημείων, τὰ ἀνακύπλοντα σχήματα ὡσαύτως ὅμοια ἔςαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 43.. Τὰ δὲ σημεῖα, οἷον τὰ Α, α, ἢ Δ, δ, τὰ ἤτοι ὄντα, ἢ νοϑμενα ὡς κορυφαὶ τῶν ἴσων γωνιῶν, τῶν ἐν ταῖς κατὰ τὰ ὅμοια σχήματα ὁμολογϑσαις πλευραῖς ὁμοίως κειμένων, εἴτε αἱ ΑΒ, αβ πλευραὶ δήπϑ ὦσιν ἐν τοῖς προκειμένοις ὁμοίοις σχήμασιν, εἴτε ἄλλως καὶ διαγώνιοι, δύναται δὴ ἐπὶ τῶν προτεθέντων

των

των χημάτων, σημεῖα λέγεσθαι ὁμοίως ἔχοντα θέσεως. Καὶ δυοῖν ἄρα σημείων ἐπὶ τῦ ΑΓ χήματος ληφθέντων ὡς ἔτυχεν, ἐὰν κἀπὶ τῦ α γ, τῦ ἐκείνῳ τῷ ΑΓ ὁμοίου σημεῖα δύο ληφθῇ ὁμοίως κείμενα, ἔςαι τὸ μεταξὺ τῶν ἐπὶ τῦ ΑΓ σημείων διάςημα, πρὸς τὸ διάςημα τῶν ληφθέντων ἐπὶ τῦ α γ, ὡς Π : π· τυτέςιν· ΑΒ : αβ, ἢ ΒΓ : βγ. κξ. Ἔνθεντοι ἐὰν σημεῖα τρία ληφθῇ ἐπὶ τῦ ΑΓ, μὴ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὄντα εὐθείας· καὶ ἐπὶ τῦ α γ δὲ τρία ἐκείνοις ὁμοίως κείμενα· ἐπιζευχθῶσιτε διὰ τύτων κἀκείνων εὐθεῖαι, τρίγωνα ἀνακύψει ὅμοια. Ἐὰν δὲ ἑκατέρωσε σημεῖα τοιαῦτα τέτταρα προσληφθῇ, ἐξ αὐτῶν κατὰ τὸ δέον ἐπιζευγνυμένων, τετράπλευρα διαγραφήσεται ὅμοια. Ἐὰν δ' ἔτι πλείονα, χήματα πολύγωνα οἱαδήποτῦν ὅμοια. Αὕτη δὲ δὴ ἡ τῶν χημάτων ὁμοιότης, τὰς τῶν γωνιῶν συνείληφεν ἰσότητας, καὶ τὰ λοιπὰ πάντα, ἅτ[ι]α ἄχρι τῦδε κατείδομεν.

ΠΟΡΙΣΜΑ ϛ'.

§. 438. Ἐὰν τὸ π γραμμὴν εὐθεῖαν ὑποσημαίνῃ, καὶ τὸ Π ἄλλην, ἥτις ἂν εἴη πρὸς τὴν π, ὡς ΑΒ : αβ, ἢ ΒΓ : βγ, κξ.· διαιρεθῇ δὲ τύτων ἑκατέρα ἡ Π καὶ π, εἰς μέρη ἴσα ἰσαρίθμως· ὅσα δήποτε μέρη τῆς εὐθείας Π, ἔνεισι τῇ ΓΕ, τοσαῦτα δὴ καὶ τῆς π, ἐνέςαι τῇ γε (§. 165.). Τὸ δ' αὐτὸ κρατήσει καὶ ἐπὶ ἀντὶ τῶν πλευρῶν ΓΕ, γε ἡλικαδήποτε ληφθῇ διαςήματα, μεταξὺ τῶν σημείων τῶν ὁμοίως ἐχόντων θέσεως, ὧν τὰ μὲν δύο ἐπὶ τῦ ΑΓ χήματος, τὰ δὲ λοιπὰ δύο ἐπὶ τῦ α γ. Οὐδὲν ἄρα μᾶλλον τὰ ὅμοια τῶν χημάτων τῇ πληθυῖ τῶνδε τῶν μορίων διακριθήσονται, ἢ τῷ τῶν γωνιῶν μεγέθει, ἃς προσεχῶς συνεωράκαμεν (§. 437.).

ΤΜΗΜΑ ΕΚΤΟΝ
ΠΕΡΙ ΤΩΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ
ΤΩΝ ΚΑΤΑ ΤΟΝ
ΚΥΚΛΟΝ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 439.

Σχ. 84. 85. Ἐὰν διὰ τῦ Α σημείυ, τῦ ἤτοι ἐντὸς τῦ κύκλυ, ἢ ἐκτὸς, ὡς ἔτυχε ληφθέντος εὐθεῖαι δύο ἀγόμεναι, τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὰ σημεῖα Β, Γ, Δ, Ε προσπίπτωσιν, ἔσαι ΑΒ : ΑΔ = ΑΕ : ΑΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπιζευχθεισῶν γὰρ τῶν ΒΕ, ΔΓ, ἔσονται αἱ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίαι ΒΓΔ, ΒΕΔ, ὡς ἐπὶ τόξω τῷ αὐτῷ ΔΒ βεβηκεῖαι, ἀλλήλαις ἴσαι (§. 377.). Ἐπεὶ τοίνυν καὶ αἱ πρὸς τῷ Α γωνίαι τῶν τριγώνων ΑΒΕ, ΑΔΓ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, τὰ τρίγωνα ὅμοιά ἐςί (§. 416.)· καὶ ΑΒ : ΑΔ = ΑΕ : ΑΓ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 440. Εἰσὶν ἄρα αἱ ΑΔ, ΑΕ τῶν ΑΒ, ΑΓ μέσαι ἀνάλογοι. Τῦ δὲ σημείυ Α ἐκτὸς μὲν τῦ κύκλυ πίπτοντος, ἡ τέτων διαφορὰ, ἐντὸς δὲ, τὸ τύτων ἄθροισμα, ἴσον ἐςὶ τῇ ὑποτεινύσῃ ΔΕ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

Σχ. 85. 86. §. 441. Τῦ δὲ Α ἐκτὸς τῦ κύκλυ πίπτοντος, ἡ ῥηθεῖσα διαφορὰ ΔΕ ἀπομειῦται, τῆς κατὰ τὸ Α

γωνίας

γωνίας ἐπαυξανέσης, ἀναιρεῖται δὲ πάμπαν τῆς ΑΔ τῦ κύκλυ ἐφαπτομένης (§. 373.). Ἐνταῦθα δὲ δὴ εἰς ταυτὸ συνιόντων τῶν σημείων Δ καὶ Ε, γίνεται ΑΒ : ΑΔ = ΑΔ : ΑΓ· ἤτε ΑΔ μέση ἐστὶ ἀνάλογος τῶν ΑΒ, καὶ ΑΓ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 442. Τῦ δέτοι Α ἐντὸς πίπτοντος τῦ κύκλυ, δυνατὸν τὴν ΔΕ ὕτως ἀχθῆναι, ὥστε κατὰ τὸ Α δίχῃ τεμνομένην, παρέχειν τὴν ΔΑ = ΑΕ. Κἀνταῦθα ὖν ἡ ἀναλογία ΑΒ : ΑΔ = ΑΕ : ΑΓ, εἰς τήνδε τραπήσεται ΑΒ : ΑΔ = ΑΔ : ΑΓ· ὡς εἶναι καὶ ὕτως αὖθις τὴν ΑΔ, τῶν ΑΒ, ΑΓ μέσην ἀνάλογον. Σχ. 84. 87.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 443. Δυεῖν δοθεισῶν εὐθειῶν φ καὶ ρ, δύο ἄλλας προσευρεῖν ἐν ἐκείναις μέσας ἀνάλογον, ὧν ἡ διαφορὰ ἡ δεδομένη π.

ΛΥΣΙΣ.

Ἀχθήτωσαν εὐθεῖαι δύο πέρατος ἄτερ, πρὸς ὀρθὰς τεμνόμεναι. Ἀπὸ δὲ τῦ σημείυ τῆς τομῆς Α, ἐπὶ τῆς ἑτέρας αὐτῶν τεθείσθω ΑΒ = π, ἐπὶ δὲ τῆς ἑτέρας ΑΓ = φ, καὶ ΑΔ = ρ· αὗται δηλαδὴ ἐπὶ τὰ πρὸς ἀλλήλας ἀντίθετα. Δίχα ὖν τετμήσθω ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Ε, ἤτε ΓΔ κατὰ τὸ Ζ· καὶ πληρέσθω δὴ τὸ ὀρθογώνιον ΑΗ. Καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΓ, κύκλυ περιφέρεια γεγράφθω, ἡ καὶ διὰ τῦ Δ διήξυσα, καὶ τὴν ΑΒ προεκβληθεῖσαν τέμνυσα κατὰ τὸ Θ, καὶ τὸ Κ. Καὶ ἔσονται ὖν αἱ ΑΘ, καὶ ΑΚ αἱ ζητύμεναι. Σχ. 88.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ ΗΕ ἀπὸ τῦ κέντρυ, κάθετος ἐφίσταται ἐπὶ τὴν ΘΚ ὑποτείνυσαν, ἐστὶ ΘΕ = ΕΚ. (§. 359.).

(§. 359.). Ἀλλὰ καὶ ΕΒ = ΕΑ. Ἄρα ΘΑ = ΒΚ. Ἡ ἄρα τῶν ΑΚ, ΒΚ εὐθειῶν διαφορὰ ΑΒ ἢ π, ἡ αὐτὴ ἔσαι τῇ τῶν εὐθειῶν ΑΚ, ΑΘ. Ἔςι δὲ παρὰ ταῦτα καὶ ΑΓ : ΑΘ = ΑΚ : ΑΔ (§. 439.)· τετέςι, φ : ΑΘ = ΑΚ : ϱ. Γέγονεν ἄρα τὸ προβληθέν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 444. Ἐὰν ΑΘ ῥηθῇ χ, ἔσαι ΑΚ $= \chi + \pi$, καὶ ἡ ἀναλογία ὕτως ἐκτεθείσεται $\varphi : \chi = (\chi + \pi) : \varrho$. Ἐὰν δὲ ΑΚ ῥηθῇ χ, ἔσαι ΑΘ $= \chi - \pi$, καὶ ἡ ἀναλογία ὕτω καταγραφήσεται, $\varphi : (\chi - \pi) = \chi : \varrho$.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Β.

§. 445. Ἐὰν δὲ ᾖ $\varphi = \varrho$, ἔσαι ΑΓ = ΑΔ, καὶ τόγε τῦ κύκλυ κέντρον πεσεῖται κατὰ τὸ Ε. Ἐὰν δὲ ἡ διαφορὰ π, ἤτοι ἡ ΑΒ ἐκλίπῃ, πεσεῖται τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΓΔ, καὶ τῶν ἐν τῷ Α΄. πορίσμ. ἀναλογιῶν, εἰς τἰώδε $\varphi : \chi = \chi : \varrho$ μεταβαλυσῶν, ἔσαι χ ἡ μέση ἀνάλογος τῶν φ καὶ ϱ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 446. Ἐὰν ἑκάςη τῶν τριῶν εὐθειῶν π, φ, ϱ, ἴση ληφθῇ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ α, ἡ ὑποτεθεῖσα δίδοσθαι (§. 444.) ἀναλογία $\varphi : \chi = (\chi + \pi) : \varrho$, ἀμειφθήσεται εἰς ταύτἰω $\alpha : \chi = (\chi + \alpha) : \alpha$. Ἐν ᾗ χ = ΑΘ. Τοιγαρῦν ἡ ΑΘ, εἴτ' ὖν ἡ χ, ἰῶ ληφθῶσιν ΑΒ = ΑΓ = ΑΔ $= \alpha$, ἀεὶ εὑρεθἰῶαι δυνήσεται. Ἀφαιρεθέντων δὲ τῶν ὅρων τῦ λόγυ $\alpha : \chi$, ἀπὸ τῶν ὅρων τῦ λόγυ $(\chi + \alpha) : \alpha$ τῦ αὐτῷ ἐκείνῳ ἴσυ, ἐπειδὴ ὁ λόγος τροπἰὼ ὐχ ὑφίςαται (§. 173.), ἔσαι $\alpha : \chi = \chi : \alpha - \chi$. Ἐν ᾗ δὴ ἀναλογίᾳ χ καὶ $\alpha - \chi$, μέρη εἰσὶ τῆς δοθείσης α. Ἔςιν ἄρα τὸ ὅλον α, πρὸς τὸ ὕτως εὑρεθὲν μέρος χ, ὡς αὐτὸ τῦτο τὸ μέρος χ, πρὸς μέρος θάτερον $\alpha - \chi$ τῦ αὐτῦ ὅλυ α. Τῦτο δὲ ἐςὶ γεωμετρικῶς φράσασι, τὸ τὸ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν α, ἄκρον τε καὶ μέσον λόγον τεμεῖν. Ἔστι δὲ, ὅτι $\alpha > \chi$, ἐξ ἀνάγκης καὶ $\chi > \alpha - \chi$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 447. Δυεῖν δοθεισῶν εὐθειῶν φ καὶ ϱ, ἑτέρας δύο ἐν ἐκείναις μέσας ἀνάλογον προσευρεῖν, ὧν τὸ ἄθροισμα διδόμενον εἴη π.

ΛΥΣΙΣ.

Ἀχθήτωσαν εὐθεῖαι τέρματος ἄνευ, πρὸς ὀρ- Σχ. 89.
θὰς ἀλλήλας τέμνουσαι. Ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου καθ' ὃ τέμνονται Α, τιθέσθω ἐπὶ μὲν τούτων τῆς ἑτέρας ἡ $AB = \pi$, ἐπὶ δὲ τῆς ἑτέρας ἡ $A\Gamma = \varphi$, καὶ $A\Delta = \varrho$· ἀμφότεραι δηλονότι αὗται ἐπὶ μέρη τὰ αὐτά. Καὶ δίχα τετμήσθω ἡ μὲν ΑΒ κατὰ τὸ Ε, ἡ δὲ ΓΔ κατὰ τὸ Ζ. Πληρωθέντος δὲ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΗ, κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΓ, κύκλου γεγράφθω περιφέρεια, ἡ διελευσομένη καὶ διὰ τοῦ Δ. Αὕτη μὲν οὖν ἐὰν καὶ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τέμνῃ κατὰ τὰ Θ καὶ Κ, ἔσονται αἱ ΑΘ, καὶ ΑΚ αἱ ζητούμεναι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπειδὴ ΗΕ ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸν κύκλον κέντρου Η ἐπὶ τῆς ΘΚ ἐφέστηκε κάθετος, ἔστι $\Theta E = EK$. Ἀλλὰ καὶ $EA = EB$. Ἄρα καὶ $A\Theta = KB$. Ἐπειδὴ δὲ τῶν ΑΚ, ΚΒ ἄθροισμα ἡ ΑΒ, ἔσται ἡ αὐτὴ ΑΒ, ἤτοι ἡ π, ἄθροισμα ὡσαύτως καὶ τῶν ΑΘ, ΑΚ. Ἔστι δὲ παρὰ ταῦτα $A\Gamma : A\Theta = AK : A\Delta$ (§. 439.) τουτέστι, $\varphi : A\Theta = AK : \varrho$. Γέγονεν ἄρα τὸ προτεθέν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 448. Ἐὰν ΑΘ ῥηθῇ χ, γίνεται $AK = \Theta B = \pi - \chi$· ἡ δὲ ἀναλογία ὧδε ἐκδηλωθήσεται $\varphi : \chi =$

$(\pi - \chi) : \rho$. Οὐδέτι ἐνταῦθα τὸ σιώολον τραπήσεται ἐὰν καὶ ΑΚ ῥηθῇ χ. Καὶ γὰρ καὶ ὅτως ΑΘ γίνεται $\pi - \chi$, ἤτε ἀναλογία, $\phi : (\pi - \chi) = \chi : \rho$ ὀδέντι πλέον, ἢ τῇ ἐναλλὰξ τῶν μέσων ὅρων μεταθέσει, τῆς προτέρας διαφέρουσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 449. Ἐὰν δὲ ἡ $\phi = \rho$, ἐκλιπούσης τῆς ΓΔ, ἡ ΑΔ ἐφάψεται τοῦ κύκλου, ἐπὶ τῆς ΗΖ διαμέτρου προεκβαλλομένης, τῶν λοιπῶν ἁπάντων σωζομένων.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 450. Ἐὰν δὲ αἱ ΑΓ καὶ ΑΔ ἐπίσης ἐπαύξωσιν, ἀφισαμένου τοῦ σημείου Α ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΑ, τὰ σημεῖα Θ, Κ, ἀμοιβαδὸν ἀλλήλοις προσεγγιοῦσι, τῆς ὑποτεινούσης ΘΚ ὑπομειουμένης, καὶ τῶν ΓΑ, ΔΑ, ἐπιμεγεθυνομένων, ὥστε τὰ σημεῖα τέως εἰς ταυτὸ συμπεσεῖν ἐκεῖνα τῆς ΘΚ ἀποιχομένης. Τηνικαῦτα δὲ μία τις εὑρεθήσεται ἡ μεταξὺ ΑΓ, καὶ ΑΔ μέση ἀνάλογος· ἡ δὲ, ἴση ἔσαι τῇ ΖΗ. Τὸ δ' ἀπ' ἐντεῦθεν, ἐὰν αἱ ΔΑ, ΓΑ προσεπαυξηθῶσιν, ἡ ΑΒ οὐδὲ ἐφάψεται ὅλως τοῦ κύκλου, ἀλλ' ἔσονται αἱ ΑΘ, ΑΚ, μεταξὺ τῶν δύο ΑΓ καὶ ΑΔ, μέσαι ἀνάλογοι, ὧν ἂν τὸ ἄθροισμα εἴη τὸ ΑΒ, ὅλως ἀδύνατοι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 451. Ὑπὲρ ἀριθμὸν ἐσὶ τὰ διὰ τῶν μέσων τούτων (§. 443. 447.) ἐπιλυόμενα προβλήματα, διὸ οὐδὲ παρελθεῖν ἔδοξεν ἡμῖν ἐνταῦθα τὸν τρόπον τῆς αὐτῶν εὑρέσεως. Ἀλλ' ἄλλοις μὲν ἄλλως τὸ πρᾶγμα τελεῖται, καίτισιν οὕτω καὶ προβάλλεται, ὡς αὐτὰ ταῦτα τυγχάνειν τὰ προτεθέντα χαλεπὸν εἶναι καὶ συμβαλέσθαι· ἡ μέντοι μέθοδος ἧπερ αὐτοὶ ἐχρησάμεθα προβαλόμενοίτε καὶ ἐπιλυσάμενοι, ἁπασῶν ἡμῖν ἔδοξεν εἶναι ἡ ἁπλουσάτη.

ΠΡΟΒΛΗ-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 452. Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, τὴν μέσην ἀνάλογον ἐπιτομώτερον προσευρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπ' εὐθείας τῶν δοθεισῶν ΑΒ καὶ ΒΓ κειμένων, ἡμικυκλίου τε ἐπὶ τῆς ΑΓ καταγραφέντος, καὶ ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῆς ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἀχθείσης, ἔσται ΑΒ : ΒΔ = ΒΔ : ΒΓ. Σχ. 90.

Ἐὰν δὲ αἱ δοθεῖσαι ὦσιν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ πέρατος Α ἠγμέναι ΑΒ, ΑΓ, τῶν αὐτῶν γινομένων ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ, καὶ ἔσαι ΑΒ : ΑΔ = ΑΔ : ΑΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπιζευχθείσης τῆς ΔΓ, ἡ ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὑπὸ ΑΔΓ ὀρθὴ ἔσαι (§. 378.)· ὀρθαὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τῷ Β γωνίαι· ἥτε κατὰ τὸ Α, ἐπὶ ἀμφοῖν τῶν τριγώνων ΑΔΒ, ΑΔΓ κοινή. Ἐπεὶ οὖν τὰ τρίγωνα ὅμοια, ἔσαι ΑΒ : ΑΔ = ΑΔ : ΑΓ. Ὃ το Β: ἦν.

Ἀλλὰ καὶ τὰ ὀρθογώνια ΑΔΓ, ΔΒΓ, ὅμοιά ἐσι, διὰ τὴν κοινὴν γωνίαν τὴν κατὰ τὸ Γ. Ἄρα καὶ τὸ ΑΒΔ, τῷ τριγώνῳ ΔΒΓ, ὅμοιον. Καὶ τοίνυν ΑΒ : ΒΔ = ΒΔ : ΒΓ· ὅπερ ἦν τὸ Α'.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 453. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ, ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας Δ, ἐπὶ τὴν μεγίστην τῶν πλευρῶν ΑΓ, κάθετος εὐθεῖα ἀχθῇ ἡ ΔΒ, τὸ τρίγωνον εἰς ἄλλα δύο διαιρεθήσεται ΑΒΔ, ΔΒΓ, καὶ ἀλλήλοις ὅμοια καὶ τῷ ὅλῳ ΑΔΓ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 454. Πᾶσαι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ΑΒΓ, ΑΒΔ, ἐν λόγῳ εἰσὶ τῶν περιφερειῶν τῶν ταῖς Σχ. 91.

αὐτῶν μὲν κορυφαῖς Β ὡς κέντροις, τῇ δ' αὐτῇ, ἢ ταῖς ἴσαις ἡμιδιαμέτροις καταγραφομένων, καὶ ὑπὸ τῶν σκελῶν ἐναπολαμβανομένων.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστωσαν αἱ περιφέρειαι αὗται ΕΖ, ΕΗ. Φημὶ δὴ ὅτι ὑπὸ ΑΒΓ : ΑΒΔ = ΕΖ : ΕΗ. Τῆς γὰρ περιφερείας ΕΗ εἰς μέρη ἴσα ἀλλήλοις ὁποσαδήποτε διαιρεθείσης, ἀφ' ἑκάστου τῶν κατὰ τὰς γενομένας διαιρέσεις σημείων, εὐθειῶν ἀχθεισῶν πρὸς τὸ Β, ὑφ' ὧν καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία εἰς ἰσαρίθμους τε καὶ ἀλλήλαις ἴσας γωνίας διαιρεθήσεται (§. 358.), ἔσονται ἐπὶ τῆς ΕΖ περιφερείας ἐκ τῶν τοῦ τόξου ΕΗ μερῶν τοσάδε, ὁπόσα μέρη τῆς ὑπὸ ΑΒΔ γωνίας, ἔνεστι τῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ· ὁποσοσοῦν ἂν καὶ εἴη ὁ τῶν μερῶν ἀριθμὸς ἐπὶ τῆς ΕΗ. Τοιγαροῦν αἱ γωνίαι πρὸς τὰς περιφερείας ἀνάλογον ἔσονται (§. 152.).

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 455. Πᾶσα ἄρα γωνία ἐστὶ πρὸς τὴν ὀρθὴν, ὡς ἡ ὑπὸ τῶν ἐκείνης σκελῶν καθ' ὅνπερ εἴρηται τρόπον ἐναπειλημμένη περιφέρεια, πρὸς τὸ τεταρτημόριον τὸ ὡσαύτως δὴ καταγεγραμμένον. Πρὸς δὲ δισσὰς ὀρθὰς, ὡς ἡ αὐτὴ ἐκείνη ἐναπειλημμένη περιφέρεια πρὸς τὴν τοῦ κύκλου ἡμιπεριφέρειαν. Διὰ τοῦδε δὲ τοῦ λόγου, ὃν ἔχει τὸ τῆς περιφερείας μέρος πρὸς τὸ τεταρτημόριον αὐτῆς, ἢ τὸ ἥμισυ, ἢ τὸ ὅλον, πᾶσα ἂν γωνία δοθείη.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 456. Κἀντεῦθεν τὸ τόξον, ἤτοι τῆς ἀπὸ τοῦ κορυφαίου τῆς γωνίας σημείου, ὡς ἀπὸ κέντρου καταγραφομένης περιφερείας, τὸ ἐν τοῖς σκέλεσιν ἐναπειλημπεριλημμένον μέρος, Μέτρον τῆς γωνίας εἶναι λέγεται. Τοῦ γὰρ τόξου οὕτω καταγραφέντος, ὁ τούτου πρὸς τὸ τεταρτημόριον, ἢ ὁ πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγος, ὅσον ἅλις ἐπ' ἀκριβὲς ἔχει λαμβάνεσθαι, ἐὰν τὸ τεταρτημόριον εἰς μέρη ἴσα, ὅσον τε ἀπόχρη βραχέα ἐπιδιαιρεθῇ, καὶ τούτων δὴ τὸ τόξον συμπληρωθῇ, ὡς οἷόν τ' ἐπ' ἀκριβές, τῶν μορίων. Δοθέντος δὲ τοῦ λόγου τοῦδε, ἔπειτα καὶ αἱ γωνίαι οὐδέν τι χεῖρον δοθήσονται, ἢ αἱ εὐθεῖαι δίδοσθαι εἰώθασι διά τινος μέτρου τοῦ αὐταῖς προσαρμοζομένου. Κυριώτατα δὲ τὸ τόξον καταμετρεῖν οὐχ οἷόν τε τὴν γωνίαν· ἐπεὶ μεγέθη ἄττα ταῦτα τῷ παντὶ ἀλλήλων ἐστὶ διαφέροντα. Οὐ γὰρ ἂν γωνία συντελεσθείη ποτέ, ὁπωσοῦν ἂν τὸ τόξον εἴτ' ἐπαναληφθείη, εἴτε διαιρεθείη· ὁπότε δὴ τὸ κυρίως τε καὶ ἀληθῶς λεγόμενον μέτρον, τῇ αὐτοῦ, ἢ τῶν ἐπ' αὐτῷ μορίων, ἐπαναλήψει τὸ μετρητὸν ἀείποτε ἐκμετρεῖν πέφυκεν. (§. 3.).

ΤΜΗΜΑ ΕΒΔΟΜΟΝ
ΠΕΡΙ ΤΗΣ
ΠΑΡΑΘΕΣΕΩΣ
ΤΩΝ
ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 457.

Σχ. 92. Ἅπαντα τὰ ἐπίπεδα τῶν σχημάτων, τὰ ἐν δυσὶν εὐθείαις παραλλήλοις ΑΒ, ΓΔ, ὕτω περιεχόμενα, ὥςε τύτων ἑκατέραν ἅπ]εσθαι, ὅμοια ἔςαι, ἐὰν ἀχθείσης ὁπωσῦν τῆς ΕΖ, ταῖς αὐταῖς ΑΒ, ΓΔ παραλλήλυ, τὰ τῆςδε τῆς εὐθείας μέρη ΗΘ, ΙΚ, τὰ ἐντὸς τῶν σχημάτων πίπ]οντα, ἴσα ἀλλήλοις ᾖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὰ γάρτοι ὕτως ἔχοντα σχήματα ἀφ' ἑτέρας ἐπὶ τὴν ἑτέραν τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ ἐξ ἴσυ ἐκτείνεται. Ἀπὸ δὲ τῆς ἰσότητος ἁπασῶν τῶν ἀχθεῖσαι δυναμένων εὐθειῶν ΗΘ, ΙΚ, ἕπεται τὰ αὐτὰ σχήματα, καὶ κατάγε τὸ μῆκος τῶν εἰρημένων παραλλήλων ἐξίσυ ἐκτείνεσθαι, κατὰ πᾶν ὁτιῦν σημεῖον τὸ τῶν παραλλήλων αὐτῶν ἐπίσης ἀπέχον. Οὐδέτερον ἄρα τῶν ῥηθέντων σχημάτων ὕτε μεῖζον ἂν εἴη, ὕτ' ἔλατ]ον.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 458. Σαφὴς ἡ πρότασις καὶ ἐναργής. Οὐκῦν δὲ τὰ σχήματα ὑπείληφα συγκροτεῖσθαι ἐξ εὐθειῶν παραλλήλως παρακειμένων· τῦτο γὰρ δήπυ διὰ τὸ ἀπλατὲς τῆς εὐθείας ἄτοπον, ἀλλὰ ταῖς εὐθείαις εἰς ἔλεγχον μόνον ἐχρησάμην τῆς τῶν σχημάτων πρὸς ἅπαν τὸ δοθὲν μέρος ἐκτάσεως.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 459. Τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒ, ΓΔ, Σχ. 93.
καὶ δὴ καὶ τὰ τρίγωνα ΕΖΗ, ΘΙΚ, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς, ἢ τῶν ἴσων βάσεων ΛΒ = ΜΔ = ΖΗ = ΙΚ, σαθῆναι δυνάμενα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ΑΝ, ΛΚ, ἴσα ἀλλήλοις ἐσὶ, παραλληλόγραμμόν τε παραλληλογράμμῳ, καὶ τριγώνῳ τρίγωνον. Τὸ δὲ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου διπλάσιον.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἀχθείσης γὰρ ὁπωσοῦν τῆς ΟΠ, ἥτις ἂν εἴη ταῖς αὐταῖς ΑΝ, ΛΚ παράλληλος, γίνεται ΟΦ = ΡΣ, καὶ ΤΥ = ΧΠ (§. 418.). Ἄρα ΑΒ = ΓΔ, καὶ ΕΖΗ = ΘΙΚ (§. 457.). Ἐὰν οὖν ἡ ΘΝ τῇ βάσει ΙΚ γένηται ἴση, πληρωθῇ δὲ τὸ παραλληλόγραμμον ἀχθείσης τῆς ΝΚ, αὐτὸ τοῦτο τὸ παραλληλόγραμμον ΘΙΚΝ ἑκάσῳ τῶν προτέρων ΑΒ, ἢ ΓΔ ἴσον ἔσαι. Ἐπεὶ δὲ καὶ διπλάσιον τὸ αὐτὸ τοῦ ΘΙΚ τριγώνου, ἔσαι δὴ καὶ τὸ ΑΒ, ἢ ΓΔ τοῦ αὐτοῦ ΘΙΚ διπλάσιον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 460. Ἔνθεντοι ἐὰν ἡ ΑΒ βάσις τοῦ παραλ- Σχ. 94.
ληλογράμμου ΑΓ, ἡμίσεια ᾖ τῆς βάσεως ΔΕ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ, ἐν ταῖς αὐταῖς ἀμφοῖν παραλλήλοις κειμένων, τὸ παραλληλόγραμμον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 461. Ἐὰν δὲ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις πλείονα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΓΕ, ΖΕΗ, ἐπὶ βάσεων ἴσων, ἢ ὁπωσοῦν ἀνίσων σαθῇ τῶν ΒΓ, ΓΕ, ΕΗ, τῶν πάντων τὸ κεφάλαιον ἴσον ἔςαι τῷ ΑΒΗ τριγώνῳ, τῷ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐπὶ βάσεως τῆς ΒΗ συνισαμένῳ, ἥτις ἂν εἴη τῶν ΒΓ, ΓΕ, ΕΗ τὸ ἄθροισμα. Ἔςι γὰρ ΑΓΕ = ΔΓΕ, καὶ ΑΕΗ = ΖΕΗ. Ἔνθαντοι καὶ ΑΒΓ + ΔΓΕ + ΕΖΗ = ΑΒΓ + ΑΓΕ + ΑΕΗ = ΑΒΗ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 462. Ἡ τῶν παραλλήλων διάςασις, ἤτοι ἡ ἀπὸ τῆς ἑτέρας τούτων ἐπὶ τὴν ἑτέραν κάθετος εὐθεῖα, Ὕψος εἴωθε καλεῖσθαι τοῦ παραλληλογράμμου, ἢ τοῦ τριγώνου, τοῦ ἐν ταῖς αὐταῖς ὄντος. Τούτου κειμένου τὸ θεώρημα, καὶ οὕτως ἂν ἀπαγγέλλοιτο· τὰ παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ τρίγωνα ὧν ἴσαι αἱ βάσεις, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ, ἴσα ἀλλήλοις ἐςί· τὸ δὲ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ τριγώνου, τοῦ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ ἰσοΰψοῦς. Δυνατὸν δὲ ἐπὶ τῶν παραλληλογράμμων, καὶ τῶν τριγώνων, οἱανδήποτε τῶν πλευρῶν ἀντὶ βάσεως ἐκλαμβάνεσθαι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 463. Τῷ δοθέντι παραλληλογράμμῳ, ἢ τριγώνῳ, ὑπὸ δοθείσῃ τῇ γωνίᾳ, παραλληλόγραμμον, ἢ τρίγωνον ἴσον συςήσασθαι.

ΛΥΣΙΣ.

Σχ. 96. Ἔςω τὸ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ, ἢ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ· ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία, ἐπὶ τὴν βάσιν προεκβεβλημένην ΒΓ μετενεχθεῖσα ἡ Ε. Καὶ γινέσθω ΕΖ = ΒΓ. Καὶ προαχθείσης τῆς ΑΔ, παραλλήλου τῇ βάσει ΒΓ, πληρούσθω ἤτοι τὸ τρίγωνον ΗΕΖ, ἢ τὸ παραλληλόγραμμον ΗΕΖΘ. Τὸ γὰρ ΗΕΖ τρίγωνον, τῷ δοθέντι ΑΒΓ ἴσον ἔςαι· τὸ δὲ παραλληλόγραμμον ΗΕΖΘ, τῷ παραλληλογράμμῳ ΑΒΓΔ. Ἦν δὲ τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ, ἴσον παραλληλόγραμμον συςῆσαι δέοι, τῶν λοιπῶν ὡς

πρὶν

πρὶν γινομένων, δίχα τετμήσθω ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Ι, καὶ πληρέσθω τὸ παραλληλόγραμμον ΕΚ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Εἰσὶ γὰρ τὰ ταύτηγε συνιςάμενα σχήματα, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ΑΘ, ΒΖ ὄντα, καὶ ἐπὶ βάσεων ἑςῶτα, ἐφ᾽ αἷς ἴσα καθίςαται, ὡς ἔδει, τοῖς ἐξ ὑπαρχῆς (§. 459.). Ἔχει δὲ καὶ γωνίαν ἀπαντα τὴν δοθεῖσαν Ε.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 464. Διὰ δὴ τούτων, παντὶ τῷ δοθέντι παραλληλογράμμῳ, ἢ τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον κατασκευασθήσεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 465. Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ εὐθυγράμμῳ σχήματι, τῷ ἐκ πλειόνων ἢ τριῶν πλευρῶν περιεχομένῳ, σχῆμα ἕτερον ἴσον συςήσασθαι, οὗ ἂν ἡ ὁ τῶν πλευρῶν ἀριθμὸς μονάδι ἐλάσσων.

ΛΥΣΙΣ.

Ἔςω δὴ τὸ δοθὲν σχῆμα ΑΒΓΔ. Καὶ ἀποτμη- Σχ. 97.
θέντος ἀπ᾽ αὐτοῦ οἱουδήποτε τριγώνου τοῦ ΑΒΔ, ἀχθήτω ΑΕ τῇ διαγωνίῳ ΒΔ, ὑφ᾽ ἧς τὸ τρίγωνον ἀποτέτμηται, παράλληλος· προσεκβεβλήσθω δὲ ἡ τοῦ σχήματος πλευρὰ ΓΔ, ἡ τῷ τριγώνῳ ἔνθεν, ἢ ἔνθεν προσκειμένη, ἕως οὗ ἐκείνῃ προσπέσοι κατὰ τὸ Ε· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ· τὸ γοῦν ΕΒΓ σχῆμα, παρέχεται τὸ ἐπιταχθέν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ γὰρ ΕΒΔ τρίγωνον ἴσον τῷ ΑΒΔ (§. 459.). Ἔνθεντοι $ΒΓΔ + ΕΒΔ = ΒΓΔ + ΑΒΔ$· τουτέςι τὸ ΕΒΓ σχῆμα, ἴσον τῷ ΑΒΓΔ· ὁ δὲ τῶν πλευρῶν ἀριθμὸς ἐπὶ τοῦ ΕΒΓ, μονάδι ἐλάσσων τοῦ τῶν πλευπλϐρῶν ἐπὶ τϐ ΑΒΓΔ. Ἐπειδὴ γὰρ ἀντὶ τῶν ΑΒ, ΑΔ πλϐρῶν ἀντικατέςησαν αἱ ΕΒ, ΕΔ, τϐτων ἡ δϐτέρα τῇ ΓΔ ϐτω σωῆλθεν, ὥςε τὸ ἄθροισμα τῶν ΓΔ+ΔΕ, ἐπ' εὐθείας κειμένων, ϐκ ἀντὶ δυεῖν πλϐρῶν, ἀντὶ δὲ μιᾶς δεῖν ἐκλαμβάνεσθαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 466. Τόνδε τὸν τρόπον τϐ ἀριθμϐ τῶν πλϐρῶν διηνεκῶς ὑπομειϐμένϐ, τέως ἄν τις ἀφίκοιτο ἐπὶ τὸ τρίγωνον, ὅπερ ἴσον ἂν ᾖ τῷ χήματι τῷ δοθέντι ἐξ ὑπαρχῆς, οἷα δὴ καὶ τῶν ἄλλων ἑκάςω εἰς ὃ ϐτως ἐκεῖνο μεταμεμόρφωτο.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 467. Ἅπαν χῆμα κανονικὸν, ἴσον ἐςὶ τριγώνῳ, ϐ ἡ μὲν βάσις ἴση τῇ τϐ χήματος περιμέτρῳ· τὸ δὲ ὕψος, τῇ τϐ κύκλϐ ἡμιδιαμέτρῳ, ὃς ἂν τῷ χήματι ἐγγράφοιτο.

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 98. Ἔςω χῆμα κανονικὸν τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ Ζ κέντρον τϐ κύκλϐ, ὃς ἂν τῷ χήματι τῷδε ἐγγράφοιτο. Ἀχθεισῶν δὲ τῶν ΑΖ, ΒΖ, ΓΖ, κξ., διαιρεθήσεσαι δὴ τὸ χῆμα εἰς τρίγωνα ἴσα τὰ ΑΖΒ, ΒΖΓ, ΓΖΔ, κξ. (§. 389.), ὧν ἐὰν βάσεις εἶναι τεθῶσιν αἱ τϐ κανονικϐ χήματος πλϐραὶ, ὕψος ἅπασι τὸ αὐτὸ ἔσεται, ἡ ἀπὸ τϐ κέντρϐ Ζ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος· τϐτέςιν (§. 394.) ἡ ἡμιδιάμετρος τϐ κύκλϐ, ὃς ἂν τῷ χήματι ἐγγράφοιτο. Ἔσονται ἄρα (§. 461.) ἅπαντα ταῦτα τὰ τρίγωνα ἅμα ληφθέντα ἴσα γέ τῷ ΖΗΘ, ϐ βάσις μὲν ἡ ΗΘ, τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ + ΕΑ· τϐτέςιν ἡ τϐ κανονικϐ χήματος περίμετρος, ὕψος δὲ, ἡ ῥηθεῖσα ἡμιδιάμετρος. Καὶ αὐτῷ τϐτῳ ἄρα τῷ τριγώνῳ ΖΗΘ, τὸ κανονικὸν χῆμα ἴσον ἐςαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 468. Ἕκαστον μέρος τῶν τοῦ κανονικοῦ σχήματος ΕΑΒΖ, ἴσον τῷ τριγώνῳ ΗΒΖ, οὗ τὸ αὐτὸ μὲν ὕψος ἐστὶν ἐκείνῳ, βάσις δὲ ἡ ΗΒ, ἡ ἴση τῷ ἀθροίσματι τῶν πλευρῶν ΕΑ + ΑΒ, τῶν τῷ προτεθέντι μέρει ἀνηκουσῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 469. Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ, τὸ δὲ ὕψος τῇ ἡμιδιαμέτρῳ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὁ γὰρ κύκλος τοῦ αὐτῷ ἐγγεγραμμένου, ἢ περὶ αὐτὸν περιγεγραμμένου κανονικοῦ σχήματος, τοσούτῳ ἧττον ἐστὶ διαφέρων, ὅσῳ δὴ ὁ τῶν πλευρῶν τοῦδε τοῦ σχήματος ἀριθμὸς μείζων ἐστίν· ἥτε διαφορὰ, τοῦ τῶν πλευρῶν ἀριθμοῦ εἰς ἄπειρον ἐπηυξημένου, οἱασοῦν, ἥτις ἂν δοθείη, ποσότητος ἐλάσσων καθίσταται, τῆς τοῦ κανονικοῦ σχήματος περιμέτρου, τῇ τοῦ κύκλου τέως περιφερείᾳ εἰς ταυτὸ συνιούσης (§. 398, 399.).

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 470. Τοιγαροῦν καὶ ὁ τοῦ κύκλου τομεὺς ἴσος ἔσται τριγώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις τῷ τοῦ τομέως τόξῳ, τὸ δὲ ὕψος τῇ ἡμιδιαμέτρῳ ἰσοῦται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 471. Εὐθείας ἄρα δοθείσης, ἥτις ἂν ἴση ὑπάρχοι τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ, τρίγωνον, ἢ παραλληλόγραμμον τῷ κύκλῳ ἴσον ῥᾷστα καταγραφήσεται. Ἀλλὰ γὰρ οὐδεὶς ἐστὶ τρόπος γεωμετρικὸς δῆλος, τοῦ εὐθεῖαν ἀποδοῦναι γραμμὴν τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ παρισουμένην. Καίτοι τινὲς φέρονται τρόποι οἷς τοῦτο τελεῖται, ἐν ἐξαπάτη μόλισπου γινομένῃ ὑπὸ τὴν αἴσθησιν. Ἐρείδονται δὲ οἱ τρόποι

τοῖς ἀριθμοῖς, δι' ὧν ἡ Ἀριθμητικὴ τὸν τῆς διαμέτρε πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγον, ὅσον ἄντις ἐπ' ἀκριβὲς βέλοιτο, καὶ πλέον δ' ἴσως ἤτις βεληθείη, παρίστησιν. Ἐκ γεν τῶν κατασκευῶν ἐκείνων, προκείσθω αὕτη ἅλις προσφυῶς ἔχεσα. Περιφέρειά τις
Σχ. 99. τετραχῇ διαιρείσθω. Ἀχθήτω δὲ ἡ τὸ τεταρτημόριον ὑποτείνεσα ΑΒ. Ἀχθεῖσα δὲ πενταχῇ διατμηθήτω, ὧν δὴ ἴσων μερῶν τὸ πρῶτον ἔσω ΒΓ. Καὶ ἔσαι δὴ ἡ περιφέρεια ἴση τρισὶ διαμέτροις ΒΔ, καὶ προσέτι τῷ μορίῳ ΒΓ· τῆς ἐντεῦθεν συμβαινέσης ἐξαπάτης, ἢ τῆς ἀληθεῖς ἐλάσσων ἂν εἴη ἡ ἔτως ἐξευρεθεῖσα περιφέρεια, ἐν ἡμιμυριοστῷ μορίῳ τῆς διαμέτρε $\frac{1}{5000}$ ὑφισαμένης. Δυνατὸν δὲ, ἐν διαπλώματι ὡσαύτως ἅλις σμικροτάτῳ, ὁ τῆς διαμέτρε πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγος τίθεσθαι $= 7 : 22$, ἢ $1 : 3\frac{1}{7}$.

§. 472. Τῶδε δὴ, ἢ ἑτέρῳ ὁτῳοῦν τῷ τρόπῳ, τῆς εὐθείας εὑρεθείσης, ἥτις ἂν τῇ ὁλοσχερεῖ περιφερείᾳ ἴση τυγχάνοι, ἀποδοθήσεται καὶ εὐθεῖα ἡ τῷ δοθέντι τόξῳ παρισεμένη, ἕ δηλονότι ὁ πρὸς τὴν περιφέρειαν δίδοται λόγος, ἐὰν γένηται ὡς ἡ ὁλοσχερὴς περιφέρεια πρὸς τὴν ἐν μέρει, ἤτοι τὸ τόξον, ἕτως ἡ τῇ ὅλῃ περιφερείᾳ ἴση εὐθεῖα, πρὸς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἴσην τῷ τόξῳ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 473. **Τὰ παραλληλόγραμμα, ὧν ἴσα τὰ ὕψη, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις. Τὸ δ' αὐτὸ καὶ περὶ τῶν ἰσοΰψων τριγώνων λεγόμενον κρατεῖ.**

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 100. Ἔσω δὴ τῶν παραλληλογράμμων ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἴσα τὰ ὕψη, οἷαιποτ' ἂν ὦσιν αἱ τέτων γωνίαι. Γινέσθω δὲ ΒΗ = ΕΖ. Καὶ ἀχθήτω διὰ τῦ Η τῇ

πλευπλϑρᾶ ΑΒ παράλληλος. Ἔςαι δὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΗ, τῷ ΔΕΖ ἴσον. Καὶ δὴ ΑΒΗ : ΑΒΓ = ΔΕΖ : ΑΒΓ. Διαιρεθήτω τοίνυν ἡ ΒΓ, εἰς μέρη ὁσαδηποτῦν τὸν ἀριθμὸν ἀλλήλοις ἴσα· διὰ δὲ τῶν κατὰ τὰς διαιρέσεις σημείων ἀχθήτωσαν εὐθεῖαι παράλληλοι τῇ αὐτῇ πλϑρᾷ ΑΒ, αἷς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓ, εἰς ἰσάριθμα παραλληλόγραμμα διανεμηθήσεται ἀλλήλοις ἴσα (§. 462.). Ἐπειδὴ ὖν ἐπὶ τῆς ΒΗ τοσάδε μέρη ἐμφιλοχωρεῖ τῶν ἀπὸ τῆς βάσεως ΒΓ, ὅσα μέρη τῶν τῦ ΑΒΓ παραλληλογράμμυ ἄεσι τῷ ΑΒΗ. Ἔςαι ἄρα (§. 152.) ΑΒΗ = ΔΕΖ : ΑΒΓ = ΒΗ : ΒΓ.

Τὸ δ᾽ αὐτὸ ϗ περὶ τῶν τριγώνων ὡσαύτως ἀποδειχθήσεται, προσαρμοζομένης τῆς δείξεως τῷ Σχήματι 101.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 474. Τὰ παραλληλόγραμμα ὧν ἴσαι αἱ βάσεις, εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη. Τὸ δ᾽ αὐτὸ καὶ περὶ τῶν ἐπὶ ἴσων βάσεων τριγώνων λεγόμενον κρατεῖ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔςωσαν ἐπὶ τῶν παραλληλογράμμων ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἴσαι αἱ βάσεις ΒΓ = ΕΖ· ὕψη δὲ τὰ ΑΗ, ΔΘ· καὶ συνεςάθω ἐπὶ τῆς βάσεως βγ = ΒΓ ὀρθογώνιον τὸ αβγ, ὖ ἡ πλϑρὰ αβ ἴση ᾖ τῇ ΑΗ· καὶ ἐπὶ τῆς βάσεως ὁμοίως εζ = ΕΖ τὸ δεζ, ὖ ἡ πλϑρὰ δε = ΔΘ. Ἔςαι ὖν αβγ = ΑΒΓ, καὶ δεζ = ΔΕΖ (§. 462.). Ἔνθεντοι καὶ ΑΒΓ : ΔΕΖ = αβγ : δεζ. Ἀλλαμὴν ἐὰν αἱ τῶν ὀρθογωνίων αβγ, δεζ, ἴσαι πλϑραι βγ, εζ, ἀντὶ ὕψϑς ληφθῶσιν, ἔςαι τὰ παραλληλόγραμμα ταῦτα αβγ : δεζ, ὡς αἱ λοιπαὶ πλϑραὶ αβ : δε, ἢ ὡς ΑΗ : ΔΘ (§. 473.). Ἄρα καὶ ΑΒΓ : ΔΕΖ = ΑΗ : ΔΘ. Σχ. 102.

Σχ. 103. Καὶ περὶ τῶν τριγώνων δὲ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τῶν ἐπὶ ἴσων βάσεων, τὰ αὐτὰ ὡσαύτως ἀποδειχθήσεται, ἐὰν ἀντὶ τῶν παραλληλογράμμων τρίγωνα ὀρθογώνια συςαθῇ τὰ αβγ, δεζ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ. 104. §. 475. Ὁ τῶν παραλληλογράμμων λόγος καὶ τῶν τριγώνων ΑΒΓ : αβγ, σύγκειται ἔκτε τȣ̃ λόγȣ τῶν βάσεων ΒΓ : βγ, καὶ τȣ̃ τῶν ὑψῶν ΑΗ : αη.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὑπὲρ τῶν παραλληλογράμμων, παραλληλογράμμȣ τρίτȣ προσληφθέντος τȣ̃ ΔΕΖ, ȣ̃ τὸ μὲν ὕψος ΔΕ ἴσον ᾖ τῷ ὕψει ΑΗ, ἡ δὲ βάσις ΕΖ = βγ, ἔςαι· ΑΒΓ : ΔΕΖ = ΒΓ : βγ (§. 473.).
καὶ ΔΕΖ : αβγ = ΑΗ : αη (§. 474.).

Ἄρα ΑΒΓ : αβγ σύγκειται πάντως ἐκ τῶν λόγων, ΒΓ : βγ, καὶ ΑΗ : αη (§. 166.).

Τὸ δ' αὐτὸ καὶ περὶ τῶν τριγώνων ὡσαύτως δειχθήσεται, ἐὰν ἀντὶ τȣ̃ παραλληλογράμμȣ ληφθῇ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 476. Καὶ δι' ἀριθμῶν ἄρα δηλȣμένων τῶν λόγων ȣ̃ς αἱ βάσεις τε καὶ τὰ ὕψη ἔχει πρὸς ἄλληλα, ὁ τῶν παραλληλογράμμων ἢ τριγώνων παραςήσεται λόγος, ἐὰν ᾖ δέον οἱ ἀριθμοὶ δι' ἀλλήλων ἐπιπολλαπλασιασθῶσιν (§. 178.)· οἷον ἔςω ΒΓ : βγ = 3 : 5 καὶ ΑΗ : αη = 4 : 7. Καὶ ἔςαι ΑΒΓ : αβγ = 3 × 4 : 5 × 7 = 12 : 35. Εἴτε περὶ τῶν τριγώνων ὁ λόγος εἴη, εἴτ' ȣ̃ν καὶ περὶ τῶν παραλληλογράμμων.

ΠΟΡΙΣΜΑ

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 477. Ἐὰν δὲ γραμμὴ εὐθεῖα ζητῆται Φ, ἧς, πρὸς εὐθεῖαν ἄλλῳ δεδομένῳ, ἢ κατὰ τὸ δοκοῦν προσληπτέαν Π, ὁ λόγος εἴη ἴσος τῷ λόγῳ παραλληλογράμμου πρὸς παραλληλόγραμμον, ἢ τριγώνου πρὸς τρίγωνον· γινέσθω (§. 410.),

$$\text{ΒΓ} : \beta\gamma = \Pi : \text{Χ}.$$

$$\text{καὶ}\quad \text{ΑΗ} : \alpha\eta = \text{Χ} : \Phi.$$

Καὶ ἔσται ἡ προσληφθεῖσα Π, πρὸς τὴν ἤδη εὑρεθεῖσαν Φ, ὡς ΑΒΓ πρὸς αβγ. Ἐὰν οὖν προσληφθῇ Π = ΒΓ, ἔσται Χ = βγ. Ἡ δὲ Φ, ἡ τετάρτη ἀνάλογος, πρὸς τὰς ΑΗ, αη, καὶ βγ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 478. Κἀντεῦθεν ἐὰν ᾖ ΒΓ : βγ = αη : ΑΗ· τουτέστιν ἐὰν τὰ τῶν παραλληλογράμμων, ἢ τριγώνων ὕψη, πρὸς τὰς βάσεις ἀντιπεπονθότα ᾖ, τὰ παραλληλόγραμμα ἴσα ἔσται (§. 186.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 489. Καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ ἡ τοῦ τετραγώνου ΔΕΖ, μέση ἀνάλογος ᾖ τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓ, τῷ ὀρθογωνίῳ τὸ τετράγωνον ἴσον ἔσται. Ἔστι γὰρ τούτου τεθέντος Αβ : ΔΕ = ΕΖ : ΒΓ· τουτέστιν ἀντιπεπόνθασι τὰ ὕψη ταῖς βάσεσιν. Σχ. 105.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 490. Ἐντεῦθεν καὶ τῷ δοθέντι ὀρθογωνίῳ, ἢ οἱῳδηποτοῦν παραλληλογράμμῳ, τετράγωνον ἴσον συσταθήσεται· ληφθείσης ἀντὶ πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου εὐθείας, ἥτις ἂν τῆς ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ βάσεως καὶ τοῦ ὕψους, μέση εἴη ἀνάλογος (§. 452.). Τῷ δὲ τριγώνῳ τετράγωνον ἴσον τεθήσεται, ἐὰν εἰς πλευρὰν τοῦ τετραγώνου ληφθῇ εὐθεῖα, ἥτις ἂν τῆς τοῦ τριγώνου ἡμιβάσεως, καὶ τοῦ ὕψους μέση εἴη ἀνάλογος.

ΠΟΡΙΣΜΑ ϛ'.

§. 481. Ἐὰν ᾖ τῶν παραλληλογράμμων, ἢ τῶν τριγώνων τὰ ὕψη ὡς αὐτῶν αἱ βάσεις, ἔσαι τὰ παραλληλόγραμμα, ἢ τὰ τρίγωνα, ἐν λόγῳ διπλασίονι τῶν βάσεων, ἢ τῶν ὑψῶν αὐτῶν (§. 167.). Παντα ἄρα τὰ τετράγωνα ἐςὶν ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν ἰδίων πλευρῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ.

Σχ. 106. §. 482. Τῶν ἴσων παραλληλογράμμων, ἢ τριγώνων αἱ βάσεις καὶ τὰ ὕψη ἀντιπεπόνθασι· τȣτέςιν ἐὰν ΑΒΓ = αβγ, ἔσαι ΒΓ : βγ = αη : ΑΗ (§. 187.)· ἐςὶ γὰρ ἐνταῦθα ὁ λόγος ὁ συνθετος, ἐκ τῶν λόγων ΒΓ : βγ, καὶ ΑΗ : αη, λόγος ἰσότητος.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ. 107. §. 483. Ἐπὶ τȣ ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ ΑΒΓ, τὸ ἀπὸ ΒΓ, τῆς ὑποτεινȣσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν τετράγωνον, ἴσον ἐςὶ τοῖς δυσὶ τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν ΒΑ, καὶ ΑΓ, ἅμα ληφθεῖσιν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Συνεςώτων τῶν τετραγώνων ΒΔΕΓ, ΑΖ καὶ ΑΗ, ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἀχθήτω ΑΘ κάθετος πρὸς τὴν ΒΓ, ἥτις δὴ προεκβληθεῖσα ἕως ἐπὶ τὸ Κ, διελεῖ τὸ ΒΕ τετράγωνον, εἰς ὀρθογώνια δύο, τὸ μὲν ΒΔΚΘ, τὸ δὲ ΘΚΕΓ. Ἔςι δὲ ΒΘ : ΒΑ = ΒΑ : ΒΓ, ἢ ΒΔ. Καὶ ΘΓ : ΓΑ = ΓΑ : ΒΓ, ἢ ΓΕ (§. 452.). Τὸ ἄρα τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΒΑ, ὅπερ ἐςὶ τὸ ΑΖ, ἴσον ἐςὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΒΔΚΘ. Καὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΑΓ, ὅπερ ἐςὶ τὸ ΑΗ, ἴσον ἐςὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΘΚΕΓ (§. 479.). Διὸ τὸ ἄθροισμα

τῶν

τῶν τετραγώνων, ΑΖ + ΑΗ, ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν ὀρθογωνίων, ἢ τῷ τετραγώνῳ ΒΔΕΓ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 484. Ἐντεῦθεν εὑρεθήσεται τετράγωνον, τὸ δυσὶ τοῖς δοθεῖσι τετραγώνοις ἴσον, ὥπερ ἔπειτα ὁποιονοῦν τετράγωνον ἕτερον προστεθεῖναι δύναται, καὶ τούτῳ αὖθις ἕτερον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἕως οὗ τετράγωνον προκύψῃ, τὸ ἅπασι τοῖς δοθεῖσιν ὁποσοιοῦν ἴσον. Ἐὰν γὰρ τὰ δύο πρῶτα τετράγωνα ἡ ΑΖ, ΑΗ, συναφθεισῶν πρὸς ὀρθὴν τῶν ἐπ' αὐτοῖς πλευρῶν, ἀχθήσεται ἡ ΒΓ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, τοῦ τοῖς δυσὶν ἐκείνοις ἅμα ληφθεῖσιν ἴσου. Τεθείσης δὲ τῆσδε τῆς πλευρᾶς ἀντὶ τῆς ΑΓ, καὶ ἀντὶ τῆς ΑΒ πλευρᾶς τινος προσληφθείσης ἑτέρας, ἑνὸς τῶν συντεθεισομένων τετραγώνων, ἤτοι τοῦ τρίτου, προελεύσεται ἀντὶ τῆς ΒΓ, ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ, τοῦ τοῖς τρισὶν ἅμα ληφθεῖσιν ἴσου. Οὕτω τοίνυν προϊοῦσι, παρέσται τέως τὰ δοθέντα τετράγωνα, εἰς τετράγωνον ἓν συναγαγεῖν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 485. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου οὗ πλευρὰ ἡ ΑΒ, ἀφελεῖν δέῃ τετράγωνον οὗ πλευρὰ ΓΔ· ζητῆται δὲ ἡ πλευρὰ τετραγώνου τοῦ τῷ λοιπῷ ἴσου· ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικυκλίου καταγραφέντος, προσηρμόσθω τῇ περιφερείᾳ ἀπὸ τοῦ σημείου Α ὑποτείνουσα ἡ ΑΕ = ΓΔ, καὶ ἡ ἐπιζευχθεῖσα ΕΒ ἔσται ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ τοῦ ζητουμένου· τὸ γὰρ ἀπὸ ταύτης τετράγωνον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ, τὸ ἄθροισμα παρέχεται, ὃ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ ἴσον ἐστί. (§. 379.). Σχ. 108.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 486. Τὰ ὅμοια τρίγωνα εἰσὶν ἐν λόγῳ διπλασίονι τῶν πλευρῶν, τῶν μεταξὺ, ἢ ἀπεναντίον τῶν ἴσων γωνιῶν κειμένων.

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 109. 110. Ἐπὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ, αβγ, εἰσὶν αἱ γωνίαι Β, β, καὶ Γ, γ ἴσαι. Ἐὰν ἂν ληφθῶσιν ΒΓ, βγ ὡς βάσεις, καταχθεισῶν ἐπ' αὐτὰς καθέτων, εἰς δήλωσιν τῶν ὑψῶν ΑΔ, αδ, ἔσαι καὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ, αβδ ὅμοια, καὶ ΑΔΓ, αδγ (§. 416.). Ἔνθεντοι καὶ ΒΔ : βδ = ΑΔ : αδ. Καὶ ΔΓ : δγ = ΑΔ : αδ· ὅθεν καὶ ΒΔ + ΔΓ : βδ + δγ = ΑΔ : αδ· ἢ ΒΔ − ΔΓ : βδ − δγ = ΑΔ : αδ (§. 173.). Τοιγαρῦν ἑκατέρωσε ΒΓ : βγ = ΑΔ : αδ. Τυτέςι τὰ τῶν τριγώνων ὕψη ἔςαι, ὡς τύτων αὐτῶν αἱ βάσεις. Καὶ τὰ ἄρα τρίγωνα, ἐν λόγω ἔςαι διπλασίονι τῶν βάσεων, ἢ γῦν τῶν πλευρῶν ΒΓ, βγ, τῶν ἐν ταῖς ἴσαις γωνίαις παρεγκειμένων (§. 481.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

Σχ. 111. §. 487. Ἅπαντα τοίνυν τὰ ὅμοια χήματα ΑΒΓΔ, αβγδ, εἰσὶν ἐν λόγω διπλασίονι τῶν εὐθειῶν ΑΒ : αβ, ἢ ΑΓ : αγ, τῶν πρὸς τὰς ἴσας γωνίας ὁμοίως θέσεως ἐχυσῶν. Διαιρεθέντων γὰρ τῶν χημάτων (§. 432.) εἰς τρίγωνα ὅμοια, ἔςαι ὁ λόγος ἑκάςυ τῶν τριγώνων τῶν ἐπὶ τῦ χήματος ΑΒΓΔ, πρὸς τὸ τρίγωνον τὸ ἐκείνω ὅμοιον, τὸ ἐν τῷ χήματι αβγδ, διπλασίων τῦ λόγυ Αβ : αβ, ἢ ΑΓ : αγ. Ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ἁπάντων τῶν ἐν τῷ πρώτω χήματι, τυτέςιν αὐτὸ τὸ χῆμα ΑΒΓΔ, πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων τῶν ἐν τῷ δευτέρω, ἤτοι πρὸς τὸ αβγδ, κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔςαι (§. 174.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 488. Ἔσονται ἄρα τὰ ὅμοια χήματα, ἐν διπλασίονι λόγω καὶ τῶν εὐθειῶν, τῶν ἐπιζευγνυσῶν οἱαδήποτε σημεῖα, τὰ ἐν τοῖς χήμασιν αὐτοῖς

ὁμοίως

ὁμοίως ἔχοντα θέσεως· οἷαι δὴ παρὰ τὰς ΑΓ, αγ, καὶ ἄλλαι εἰσὶν ἀπειράριθμοι (§. 437.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 489. Τὰ κανονικὰ ὅμοια σχήματα, καὶ τούτων ἔτι τὰ μέρη τὰ ὅμοια, εἰσὶν ἐν λόγῳ διπλασίονι τῶν ἡμιδιαμέτρων τῶν κύκλων, τῶν οἷς ἐκεῖνα ἐγγράφεται, ἢ περὶ οὓς περιγράφεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 490. Οἱ δὲ κύκλοι εἰσὶν ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν διαμέτρων, ἢ τῶν ἡμιδιαμέτρων. Καὶ ὡσαύτως δὲ, καὶ οἱ τομεῖς οἱ ὅμοιοι, καὶ τὰ τμήματα τὰ ὅμοια.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 491. Εἰσὶ δ' οἱ ὅμοιοι τομεῖς, καὶ τὰ ὅμοια τμήματα, ἐν διπλασίονι λόγῳ καὶ τῶν τὰ ἐκείνων τόξα ὑποτεινουσῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ϛ'.

§. 492. Ὁ δὲ διπλασίων λόγος τοῦ λόγου ὡντινωνοῦν εὐθειῶν Α καὶ Β, ἐπείπερ ἀείποτε τῷ λόγῳ τῶν τετραγώνων ἴσος ἐστὶν, ὧν αἱ τοιαίδε εὐθεῖαι εἰσὶ πλευραὶ (§. 481.)· ἔσται δὴ καὶ πάντα τὰ ὅμοια σχήματα, ὡς τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἐπ' αὐτοῖς πλευρῶν, ὧν ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσίν· αἵτε κύκλοι ὡς τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων αὐτῶν, ἢ τῶν ἡμιδιαμέτρων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 493. Δυοῖν δοθέντων σχημάτων ὁμοίων, ὁμοιοῦντε, καὶ ἅμα ληφθεῖσιν ἴσον, σχῆμα προσαναγράψαι.

ΛΥΣΙΣ.

Σχ. 112. Δεδόσθω σχήματα ὅμοια τὰ ΑΒΓΔ, αβγδ, ἃ τὸν εἰρημένον τρόπον συνάψαι δέον· ληφθεισῶν ἐν, τῶν, αἵπερ ἂν τύχοιεν, ἐπὶ τοῖς σχήμασι πλευρῶν Αβ, αβ, τῶν πρὸς τὰς ἴσας γωνίας ὁμοίως θέσεως ἐχεσῶν, συνεςάσθω ἐξ αὐτῶν τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΕΖΗ, ἐν ᾧ ΕΖ = ΑΒ, καὶ ΖΗ = αβ. Ἐπὶ δὲ δὴ τῆς μεγίςης τῦδε τῦ τριγώνυ πλευρᾶς ΕΗ, συνεςάσθω σχῆμα τὸ ΕΗΘΙ, ἑνὶ τῶν δοθέντων ΑΒΓΔ ὅμοιον, ὥςε τὴν ΕΗ πλευρὰν πρός γε τὰς τῦδε τῦ σχήματος γωνίας, τὰς ἴσας ταῖς τῦ ΑΒΓΔ, ὕτω θέσεως ἔχειν, ὡς ἡ ΑΒ κεῖται πρὸς αὐτὰς τὰς ἴσας γωνίας τὰς ἐπ' αὐτῷ. Καὶ ἔςαι ἄρα τὸ ΕΘ = ΑΓ + αγ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τῦ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τετραγώνυ, ὡδέπως AB^{τ} ἐπισημειυμένυ, ὑποσημαίνοντος δὲ καὶ τῦ $\alpha\beta^{\tau}$, τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς αβ τετράγωνον, ἔςαι $AB^{\tau} : \alpha\beta^{\tau} = A\Gamma : \alpha\gamma$ (§. 492.). Ἔνθεντοι $A\beta^{\tau} + \alpha\beta^{\tau} : AB^{\tau} = A\Gamma + \alpha\gamma : A\Gamma$ (§. 171.). Ἐπειδὴ τοίνυν $EZ = AB$, καὶ $ZH = \alpha\beta$· καὶ $EZ^{\tau} + ZH^{\tau} = EH^{\tau}$ (§. 483.)· ἔςαι καὶ $AB^{\tau} + \alpha\beta^{\tau} = EH^{\tau}$. Καὶ $EH^{\tau} : AB^{\tau} = A\Gamma + \alpha\gamma : A\Gamma$. Ἀλλὰ καὶ $EH^{\tau} : AB^{\tau} = E\Theta : A\Gamma$ (§. 492.). Ἄρα καὶ $E\Theta : A\Gamma = A\Gamma + \alpha\gamma : A\Gamma$, καὶ $E\Theta = A\Gamma + \alpha\gamma$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 494. Παραπλησίως καὶ κύκλος δυσὶ κύκλοις ἴσος συνίςαται, ἀντὶ τῶν πλευρῶν, ἢ τῶν διαγωνίων, παραλαμβανομένωντε καὶ ζητυμένων τῶν διαμέτρων καὶ ἡμιδιαμέτρων. Τῇ δὲ ἐπαναλήψει τῆς κατασκευῆς παραχθήσεται δὴ καὶ κύκλος, ὁ ὅσοις ποτ' ὖν δοθεῖσιν ἅμα ἴσος. Ἐξ ὧν ὐ δυσχερῶς καὶ ὁ τρόπος ἐκποριϑήσεται, τῦ καὶ τῶν δοθέντων ὁμοίων

ὁμοίων χημάτων τῇ διαφορᾷ, χῆμα ἴσον καὶασκευάζειν ἐν ὁμοιότητι (§. 485.).

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 495. Ἡμικυκλίου ζητουμένου, δυσὶ τοῖς δοθεῖσιν ἡμικυκλίοις ΑΒΓ, ΓΔΕ ἴσου, ἐὰν αἱ τούτων διάμετροι ΑΓ, ΓΕ πρὸς ὀρθὴν γωνίαν συςαθῶσιν, ἡ ἐπιζευγνῦσα αὐτὰς ΑΕ, ἡ τοῦ ζητουμένου ἔςαι διάμετρος. Ἡ δὲ τοῦ περὶ τὴνδε τὴν διάμετρον καταγραφομένου ἡμικυκλίου περιφέρεια, διὰ τῆς κορυφῆς Γ τῆς ὀρθῆς γωνίας διήξει (§. 379.). Καὶ ἔςαι οὕτω τῷδε τῷ ἡμικυκλίῳ, καὶ τοῖς δυσὶν ἐλάτ]οσιν ἡμικυκλίοις κοινὰ τὰ τμήματα ΑΖΓ, ΓΗΕ. Καὶ ἐὰν ἄρα ταῦτα, ἔνθεν μὲν ἀπὸ τῶν ἡμικυκλίων ΑΒΓ, ΓΔΕ, ἔνθεν δὲ ἀπὸ τοῦ ἡμικυκλίου ΑΓΕ τοῦ ἐκείνοις ἴσου, ἀφαιρεθῇ, ὑπολειφθήσεται τὸ ἄθροισμα τῶν μηνίσκων ΑΒΓΖ + ΓΔΕΗ = τῷ τριγώνῳ ΑΓΕ. Καὶ τόδε ἡμῖν περίεςι παράδειγμα πάντη Γεωμετρικῶς τοῦ τετραγωνισμοῦ χήματός τινος καμπυλογράμμου. Ἐὰν δὲ αἱ διάμετροι ΑΓ, ΓΕ ἴσαι ληφθῶσιν, ὡς τὰ ΑΖΓ. ΓΗΕ τεταρτημόρια τυγχάνειν, οἱ μηνίσκοι ἀλλήλοις ἴσοι γενήσονται, ἑκάτερός τε τούτων χωρὶς, ἴσος ἔςαι τῇ ἡμισείᾳ τοῦ τριγώνου ΑΓΕ· τουτέςι τῷ τεταρτημορίῳ τοῦ τετραγώνου, ὅπερ ἂν τῷ κύκλῳ, οὗ ἡμίσεια ἡ ΑΓΕ, ἐγγράφοιτο. Σχ. 113.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 496. Δυοῖν δοθέντων ἐπιπέδων σχημάτων εὐθυγράμμων ἀνομοίων Α καὶ Β, τρίτον Χ συςήσασθαι θατέρῳ μὲν τῷ Α ἴσον, θατέρῳ δὲ τῷ Β ὅμοιον.

ΛΥΣΙΣ.

Τῶν Α καὶ Β εἰς τρίγωνα πρῶτον (§. 466.) εἶτα εἰς τετράγωνα (§. 480.) ἀμειφθέντων, ἔςω Μ

πλευρὰ

πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἴσου τῷ Α, καὶ Ν τοῦ ἴσου τῷ Β. Καὶ πλευρᾶς οὖν ἐκ τῶν τοῦ Β ληφθείσης ὁποιασοῦν τῆς Π, γινέσθω Ν : Μ = Π : Τ· παρὰ δὲ τὴν εὑρεθεῖσαν Τ, ὡς ὁμόλογον τῇ Π, σχῆμα ὅμοιον συνεστάσθω τῷ Β (§. 424.). Ἔσται δὲ τὸ ζητούμενον Χ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεὶ γὰρ $Μ^{τ} = Α$, καὶ $Ν^{τ} = Β$, ἐστὶν $Α : Β = Μ^{τ} : Ν^{τ}$. Ἐπεὶ δὲ Β καὶ Χ ὅμοια, καὶ ἐπ' αὐτῶν Π, Τ πλευραὶ ὁμόλογοι· ἔσονται (§. 487.) $Β : Χ = Π^{τ} : Τ^{τ}$· ὁ μὲν οὖν λόγος Α : Χ, ἐκ τῶν λόγων Α : Β = Β : Χ συγκείμενος, καὶ ἐκ τῶν $Μ^{τ} : Ν^{τ}$, καὶ $Π^{τ} : Τ^{τ}$ συγκείσεται. Ἀλλὰ Ν : Μ = Π : Τ. Ἄρα καὶ $Ν^{τ} : Μ^{τ} = Π^{τ} : Τ^{τ}$· ὁ δὲ λόγος $Π^{τ} : Τ^{τ}$ τῷ ἀνάπαλιν τοῦ λόγου $Μ^{τ} : Ν^{τ}$ ἴσος ἔσται (ἤτοι τῷ $Ν^{τ} : Μ^{τ}$). Ἔσται ἄρα ὁ ἐκ τῶνδε τῶν λόγων $Μ^{τ} : Ν^{τ}$ καὶ $Π^{τ} : Τ^{τ}$ συγκείμενος λόγος Α : Χ, λόγος ἰσότητος (§. 186.) καὶ Χ = Α.

ΤΜΗΜΑ ΟΓΔΟΟΝ
ΠΕΡΙ ΘΕΣΕΩΣ
ΤΩΝ
ΕΠΙΠΕΔΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 497.

Διὰ σημείων τῶν δοθέντων ἐπίπεδον θέσθαι, οὐδέν ἐστιν ἀλλ᾽ ἢ τοιάνδε τῷ ἐπιπέδῳ ἀπονεῖμαι θέσιν, ὡς ἐπ᾽ αὐτὸ, καὶ μὴ ἐκτὸς αὐτοῦ τὰ σημεῖα τυγχάνειν πίπτοντα.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 498. Ἐπίπεδον διὰ τριῶν ὁποιωνοῦν σημείων τεθεῖναι δύναται· τὸ γὰρ διὰ δυοῖν, αὐτόθεν δῆλον· τούτου δὲ γενομένου, ἡ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνῦσα εὐθεῖα, ὅλη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου πίπτουσά ἐστιν, ὅπως ἂν καὶ προσεκβληθείη (§. 253.)· περὶ δὲ ταύτην περιαγόμενον τὸ ἐπίπεδον, ἐφικνεῖται τέως καὶ τοῦ τρίτου σημείου, ὅπου ποτ᾽ ἂν τοῦτο κείμενον ᾖ. Ὑποτίθεται γὰρ τὸ ἐπίπεδον ἐπέκεινα πέρατος.

§. 499. Ἔνθεν τοι, ἐὰν τρία σημεῖα ὡς ἔτυχε κείμενα, δι᾽ εὐθειῶν ἐπιζευχθῇ, τρίγωνον ἀναφυήσεται, οἷον κατ᾽ ἀρχὰς ὥρισται εἶναι, σχῆμα δηλονότι ἐπίπεδον. Αἱ γὰρ τοιαίδε εὐθεῖαι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου πίπτουσι, τοῦ διὰ τῶν εἰρημένων τριῶν σημείων τὴν θέσιν ἔχοντος, καὶ μέρος αὐτοῦ ἀποπερατοῦσι· τούτου γὰρ μὴ συμβαίνοντος, τεκμήριον ἂν εἴη, τὸ διὰ τῶν σημείων κείμενον μηδαμῶς εἶναι ἐπίπεδον.

§. 500. Ἀλλὰ καὶ αἱ εὐθεῖαι, αἱ τὰς δύο παραλλήλους εὐθείας, ὁπωσοῦν ἐπιζευγνύουσαι, ἅπασαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου πίπτουσαι εἰσὶν, ἐφ' οὗ καὶ αἱ παράλληλοι, ὧν ἑκατέραν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἤχθαι ἐπιπέδου ὁ ὁρισμὸς τίθησιν (§. 272.).

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 501. Τὰ διὰ τῶν δοθέντων τριῶν σημείων Α, Β, Γ, τῶν μὴ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, κείμενα ἐπίπεδα, ἀλλήλοις συμπίπτουσι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 114. Νοείσθω διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ, δύο διήκειν ἐπίπεδα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ. Ἐπειδὴ οὖ τὰ σημεῖα Α καὶ Β, ἐφ' ἑκατέρου τῶν ἐπιπέδων εἴληπται, καὶ ἡ ΑΒ εὐθεῖα ὁπωσοῦν προαχθεῖσα ἐφ' ἑκάτερον τῶν ἐπιπέδων πεσεῖται· οὐδὲν ἧττον δὲ καὶ ἡ ΒΓ (§. 253.). Τὰ ἄρα σημεῖα τῶν ἐπιπέδων ἅπαντα, τὰ ἐπὶ τῶνδε τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐς ἄπειρον προεκβεβλημένων, συμπεσοῦνται. Ληφθήτω τοίνυν τὸ τυχὸν σημεῖον Δ ἐφ' ἑνὸς τῶν ἐπιπέδων, δι' οὗ ἂν αἱ ΑΒ, ΒΓ εὐθεῖαι προαγόμεναι μὴ διέρχοιντο, καὶ ἀχθήτω ἐπ' αὐτοῦ τοῦ ἐπιπέδου εὐθεῖα, ἑκατέραν τέμνουσα τῶν κατ' ἀρχὰς ἀχθεισῶν, κατὰ τὸ Ε καὶ Ζ, καὶ ἔσαι ἡ ΕΖ ἐφ' ἑκατέρου ἐπιπέδου, ὅτι καὶ Ε καὶ Ζ ἐφ' ἑκατέρου εἰσί. Κἀντεῦθεν καὶ αὐτὴ ἡ ΕΖ προεκβληθεῖσα ἐπ' ἀμφοῖν ἔσαι τῶν ἐπιπέδων, καὶ τὸ ἐπ' αὐτῇ σημεῖον Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 502. Ἐπίπεδον οὐ τέμνει ἐπίπεδον ἕτερον κατὰ γραμμὴν οὐκ εὐθεῖαν. Εἴπερ γὰρ, τριῶν ἐπ' ἐκείνης ληφθέντων σημείων, μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, δύο ἂν διὰ τῶνδε τῶν σημείων ἀχθεῖεν ἐπίπεδα μὴ συμπίπτοντα· ὅπερ οὐχ οἷόν τε. Ἡ ἄρα δυοῖν ἐπιπέδων κοινὴ τομὴ εὐθεῖα μία ἐστίν.

ΟΡΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 503. Γραμμὴ εὐθεῖα τῷ ἐπιπέδῳ παράλληλος εἶναι λέγεται, ἤ, ὅπως ἂν καὶ προεκβληθείη, τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ πᾶν μέρος ἐς ἄπειρον προεκβαλλομένῳ, μηδέποτε προσπίπτουσα.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 504. Εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ ἔξω τοῦ ἐπιπέδου ΕΖ, εὐθεία τινὶ ΓΔ τῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου παράλληλος οὖσα, καὶ αὐτῷ τῷ ἐπιπέδῳ ΕΖ ἔσται παράλληλος, καὶ οἱαδήποτε ἄλλῃ εὐθείᾳ τῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῇ ΓΔ παραλλήλων. Σχ. 115.

ΔΕΙΞΙΣ.

Α΄. Αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ παράλληλοι, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ εἰσὶν ἐπιπέδου ΑΓΔΒ, ὅπερ ἐκτὸς ἡ ΑΒ ὁπωσοῦν προεκβληθεῖσα γενέσθαι οὐ δύναται. Ἐὰν ἄρα ἡ ΑΒ τῷ ἐπιπέδῳ ΕΖ προσπέσῃ, προσπεσεῖται δὴ καὶ τῇ εὐθείᾳ ΓΔ, ᾗ παράλληλος ἐστίν· ὅπερ ἀδύνατον.

Β΄. Διὰ τῆς ΑΒ, καὶ σημείου, ὃ ἂν τὸ τυχὸν Η ληφθείη ἐπὶ τοῦ ΕΖ ἐπιπέδου κείσθω ἐπίπεδον τὸ ΑΗΘΒ (§. 498.) τέμνον τὸ ΕΖ ἐπίπεδον κατὰ τὴν ΗΘ. Ἔσται οὖν ΓΔ, ἡ παράλληλος οὖσα τῇ ἐν τῷδε τῷ ἐπιπέδῳ ΑΗΘΒ ἠγμένῃ ΑΒ, καὶ αὐτῷ τῷ ἐπιπέδῳ ΑΘ παράλληλος, καὶ οὐκ ἄρα τεμεῖ τὴν εὐθεῖαν ΗΘ, τὴν ἐν τῷδε τῷ ἐπιπέδῳ ΑΘ (§. 503.). Ἐπεὶ τοίνυν ἡ αὐτὴ ΓΔ καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶν ΕΖ, ἡ ΗΘ εὐθεῖα, ἡ διὰ τοῦ Η σημείου, τῇ εὐθείᾳ ΓΔ παράλληλος ἔσται (§. 272.)· τῇ δ' αὐτῇ ΗΘ καὶ τὴν ΑΒ παράλληλον τυγχάνειν ἐντεῦθεν δῆλον, ὅτι ἄμφω ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ οὖσαι ἐπιπέδου ΑΒΘΗ, συμπεσεῖν ὅμως οὐ δύνανται, εἰμὴ πρότερον ἡ ΑΒ τῷ ἐπιπέδῳ ΕΖ προσπέσῃ, ᾧ παράλληλος ἐστί.

ΠΟΡΙΣ-

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 505. Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι δύο ΑΒ, ΗΘ, αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ ΓΔ παράλληλοι, καὶ αὐταὶ παράλληλοι εἰσὶ, καίτοι ἐπὶ τῦ αὐτῦ ἐπιπέδυ αἱ τρεῖς μὴ ὦσαι. Ἀεὶ μέντοι διὰ δυεῖν τέτων ΓΔ, ΗΘ, ἐπίπεδον οἷόντε τίθεσθαι τὸ ΕΖ, καὶ διὰ δυεῖν ΑΒ, ΓΔ, τὸ ΑΔ. Οὗ γενομένυ, ὡς ἐκ τῦ Β΄. μέρυς τῆς ἀποδείξεως συνάγεται, τὴν ΗΘ πίπτειν χρεὼν ἐπὶ τῦ ἐπιπέδυ ΑΗΘΒ, τῦ διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Η διατείνοντος. Καὶ εἰσὶν ἄρα ΑΒ, ΗΘ ἐπὶ ἐπιπέδυ τῦ αὐτῦ ΑΘ, ἐν ᾧ συνδραμεῖν ὐκ ἔχυσιν εἰς τὸ αὐτὸ, εἰμὴ ἡ ΑΒ καταλάβοι τὸ ΕΖ ἐπίπεδον, ᾧ τυγχάνει παράλληλος.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

Σχ. 116. §. 506. Ὀρθὴ, ἢ Κάθετος ἐπὶ τῦ ἐπιπέδυ ΕΖ λέγεται εὐθεῖα πᾶσα ΑΒ, ἡ τῷ ἐπιπέδῳ, πρὸς τῷ Β, ὕτω προσπίπτυσα, ὡς μετὰ πασῶν τῶν εὐθειῶν, τῶν ἀπὸ τῦδε τῦ σημείυ ἐπὶ τῦ ΕΖ ἐπιπέδυ ἠγμένων ΒΓ, ΒΔ γωνίας ὀρθὰς περιέχειν. Αἱ δὲ ἄλλως ἀπαντῶσαι τῷ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαι, Πλάγιαι πρὸς αὐτὸ εἶναι ἀκύυσι.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ. 117. §. 507. Ἐὰν εὐθεῖα ΑΒ, δυσίτισι ταῖς ἐν ἐπιπέδῳ τῷ ΖΗ εὐθείαις ΒΓ, ΒΔ, κάθετος ᾖ, καὶ αὐτῷ τῷ ἐπιπέδῳ κάθετος ἔσαι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Προαχθεισῶν τῶν ΒΓ, ΒΔ, εἰς ὃ γένοιτο Βγ = ΒΓ, καὶ Βδ = ΒΔ, καὶ ἐπιζευχθεισῶν ΓΔ, γδ, τὰ τρίγωνα ΒΓΔ, Βγδ ἴσα ἔσαι, καὶ αἱ γωνίαι ἐν αὐτοῖς ἴσαι αἱ γδΒ, ΓΔΒ (§. 316.). Ἔνθεντοι ἐὰν διὰ τῦ Β σημείυ, καὶ εὐθεῖα ἄλλη ἡτισῦν ἡ εΕ γραφῇ, γενήσεται καὶ εΒ = ΒΕ, ᾗ δε = ΔΒ (§. 320.). Ἐπιζευχθεισῶν ὖν τῶν ΑΓ, ΑΔ, καὶ δὴ δὴ καὶ τῶν Αγ, Αδ, τὰ τρίγωνα ΑΓΔ, Αγδ ὡσαύτως ἴσα προκύψουσι, τὰς παρὰ τῷ Δ καὶ δ γωνίας ἴσας ἔχοντα (§. 323.). Ὅθεν ἐὰν καὶ Αε, ΑΕ ἀχθῶσιν, ἔσαι καὶ Αε = ΑΕ (§. 316.). Καὶ ἔσονται ἄρα τῶν τριγώνων ΑΒΕ, ΑΒε, αἱ πλευραὶ ἴσαι· τοιγαροῦν ἴσαι καὶ αἱ γωνίαι ΑΒΕ, ΑΒε. Οὐκοῦν ἡ ΑΒ εὐθεῖα, ἐπὶ τῆς εΕ κάθετος ἐφέστηκεν (§. 264.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 508. Διὰ τοῦ Β σημείου τοῦ κατὰ τὸ ΖΗ ἐπίπεδον δοθέντος, μία δίεισι μόνη ἡ ΑΒ εὐθεῖα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κάθετος· αἱ δὲ λοιπαὶ πᾶσαι, οἷον ἡ ΒΓ, ἐκείνῳ πλάγιαι εἰσίν· ἐὰν δὲ καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ σημείων ἐπίπεδον διατείνῃ, ὑφ' οὗ τὸ ΖΗ, κατὰ τὴν ΒΔ τέμνοιτο εὐθεῖαν, ἔσαι ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ὀρθή, καὶ ἐκ τοῦ ἀκολούθου, ἡ ὑπὸ ΓΒΔ ὀρθῆς ἐλάσσων. Σχ. 118.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 509. Καὶ διὰ τοῦ Α δὲ σημείου, τοῦ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ΖΗ δοθέντος, μία μόνη εὐθεῖα διήκει ἡ ΑΒ τῷ ἐπιπέδῳ κάθετος. Ἐὰν γὰρ παρὰ τὴν ΑΒ, καὶ ἄλλη τις εὐθεῖα ἡ ΑΓ, διὰ τοῦ σημείου Α οὕτως ἀγομένη τεθῇ, προσαντῶσα τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Γ, ἀχθείσης τῆς ΒΓ, ἔσαι δήπου τῆς κατὰ τὸ Β ὀρθῆς ὁμολογουμένης, ἡ κατὰ τὸ Γ ὀξεῖα. Σχ. 119.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 510. Ἐὰν εὐθείαις δυσὶν ΑΒ, ΓΒ, γωνίαν τὴν ΑΒΓ περιεχούσαις, παράλληλοι ὦσιν αἱ κατὰ τὸ σημεῖον Ε συνιοῦσαι ΔΕ, ΖΕ, ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ ἴση ἔσαι. Σχ. 120.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἀποτετμημένων ἀπὸ τῶν τεθεισῶν εὐθειῶν μερῶν ἴσων, ΑΒ = ΔΕ, καὶ ΖΕ = ΓΒ, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, καὶ ἀχθήτωσαν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ· ἔσαι δὲ τὰ ΑΕ καὶ ΓΕ παραλληλόγραμμα (§. 400.). Ἔνθεντοι αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΔ, ΓΖ, ὡς καὶ τῇ αὐτῇ ΒΕ, παράλληλοι εἰσὶ ἢ ἴσαι (§. 505.). Καὶ ἔσαι ἄρα καὶ τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον, καὶ ΑΓ = ΔΖ. Ἐπείτε τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΔΕΖ αἱ πλευραὶ ἴσαι, καὶ αἱ ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχόμεναι γωνίαι Ε καὶ Β ἔσονται ἴσαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Σχ. 121. §. 511. Ἐντεῦθεν καὶ ἐὰν ἐπίπεδον τὸ ΑΒ, τέμνῃ ἐπίπεδον τὸ ΑΓ, κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΔ, ἀχθῶσι δὲ ἐπὶ τοῦ ΑΒ ἐπιπέδου, εὐθεῖαι ΕΖ, ΗΘ, ἐπὶ τῆς τομῆς ΑΔ κάθετοι· ἐπὶ δὲ τοῦ ἐπιπέδου, ΑΓ, ἄλλαι εὐθεῖαι ΖΙ, ΘΚ, πρὸς τὴν αὐτὴν ΑΔ κάθετοι, αἱ ὑπὸ ΕΖΙ, ΗΘΚ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 512. Κλίσις ἐπιπέδου ΑΒ, πρὸς ἐπίπεδον ΑΓ, ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΙ, ἢ ΗΘΚ γωνία, ἡ ὑπὸ δυεῖν εὐθειῶν ΕΖ, ΖΙ περιεχομένη, ὧν ἡ μὲν ἐπὶ τοῦ ΑΒ ἐπιπέδου, ἡ δὲ ἐπὶ τοῦ ΑΓ, τῇ κοινῇ τῶν ἐπιπέδων τομῇ ΑΔ, κάθετοι εἰσίν.

§. 513. Ἡ δὲ γωνία ΕΖΙ, ἢ ΗΘΚ ἐὰν ὀρθὴ ᾖ, τὸ ἐπίπεδον ΑΒ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΓ, ὀρθὸν, ἢ κάθετον εἶναι λέγεται. Ἦν δὲ μὴ ὀρθή, τὸ ἐπίπεδον τῷ ἐπιπέδῳ πλάγιον.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ. 122. §. 514. Ἐὰν εὐθεῖα ΑΒ, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΖΗ κάθετος ἐπισῇ, ἅπαν ἐπίπεδον ΓΔ, ὅπερ

ἂν

ἂν δι' αὐτῆς διήκη, τῷ αὐτῷ ΖΗ κάθετον ἐπιϛήσεται. Καὶ ἐὰν ἐπίπεδον ΓΔ, ἐπιπέδῳ ΖΗ πρὸς κάθετον ἐπιϛῇ. εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ ἐν τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ, τῇ κοινῇ τῶν ἐπιπέδων τομῇ ΓΒ κάθετος ἀγομένη, καὶ αὐτῷ τῷ ἐπιπέδῳ ΖΗ κάθετος ἐπιϛήσεται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπὶ τῷ ΖΗ ἐπιπέδῳ ἀχθήτω ἡ ΒΕ, τῇ κοινῇ τῶν ἐπιπέδων τομῇ ΓΒ κάθετος. Ἐὰν ἄρα ἡ ΑΒ, τῷ ΗΖ ἐπιπέδῳ κάθετος ἐπιϛῇ, κάθετος ἔϛαι καὶ ἐπὶ τῆς ΒΓ, καὶ ἐπὶ τῆς ΒΕ (§. 506.)· ὥϛε καὶ τὸ ΓΔ ἐπίπεδον τῷ ἐπιπέδῳ ΖΗ πρὸς κάθετον ἐπιϛήσεται (§. 513.).

Ἐὰν δὲ τὸ ἐπίπεδον ΓΔ, τῷ ἐπιπέδῳ ΖΗ κάθετον ἐπιϛῇ, ἥτε ὑπὸ ΑΒΓ ὀρθὴ ᾖ, ἔϛαι καὶ ὑπὸ ΑΒΕ ὀρθή· ὥϛε καὶ ΑΒ, ἡ δυσὶν εὐθείαις ἐπὶ τῷ ἐπιπέδῳ ΖΗ ἠγμέναις ΒΓ, ΒΕ, κάθετος ἐφεϛῶσα, καὶ αὐτῷ τῷ ἐπιπέδῳ κάθετος ἐπιϛήσεται. (§. 507.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 515. Ἐὰν ἡ ΑΒ ἐπὶ τῷ ἐπιπέδῳ ΖΗ κάθετος, Σχ. 123.
καὶ ΓΔ παράλληλος τῇ ΑΒ, καὶ ἡ ΓΔ τῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐπιϛήσεται. Ἐπειδὴ γὰρ τὸ διὰ τῶν παραλλήλων ἐπίπεδον ΑΔ, διὰ τῆς ΑΒ καθέτου διϊεισιν, ἐπὶ τῷ ΖΗ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐπιϛήσεται. Τέμνον δὲ καὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο κατὰ τὴν ΒΔ, ἡ κατὰ τὸ Β γωνία ὀρθὴ ἔϛαι. Κἀντεῦθεν καὶ ἡ κατὰ τὸ Δ (§. 284.). Ἡ ἄρα ΓΔ, ἡ ἐν τῷ ΑΔ ἐπιπέδῳ, τῷ ἐπὶ τῷ ΖΗ ἐφιϛαμένῳ πρὸς κάθετον, ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων ΒΔ, κάθετος ἐϛί.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

Σχ. 124. §. 516. Εὐθεῖαι δύο ΑΒ, ΓΔ, ἐπὶ τȣ͂ αὐτȣ͂ ἐπιπέδου ΖΗ κάθετοι ἐφεςῶσαι, παράλληλοι εἰσίν. Εἰ μὴ γὰρ, διὰ τȣ͂ σημείȣ Δ ἄλλητις ἂν ἀχθείη ΔΕ, παράλληλος τῇ ΑΒ. Ἡ δὲ καὶ τῷ ἐπιπέδῳ κάθετος ἔςαι, ὅπερ ἀδύνατον. Καὶ γὰρ ἡ ΓΔ, διὰ τȣ͂ Δ, τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ εἶναι κάθετος ὑποτίθεται (§. 508.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

Σχ. 125. §. 517. Ἐὰν τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΑΒ, ἐπὶ δυοῖν ΓΔ, ΕΖ, κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΗΘ ἀμοιβαδὸν τεμνομένοιν, πρὸς κάθετον ἐφεςὼς ᾖ, καὶ ἡ τομὴ αὐτὴ ἐπὶ τȣ͂ ἐπιπέδȣ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ςήσεται. Ἀχθεῖσα γὰρ ἐπὶ τȣ͂ ΑΒ ἐπιπέδȣ ἡ ΘΙ, ἥτις ἂν πρὸς ὀρθὰς εἴη ἐφεςῶσα ἐπὶ ΘΓ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων ΑΒ, ΓΔ, ἡ αὐτὴ καὶ τῷ ἐπιπέδῳ ΓΔ κάθετος ἐπιςήσεται (§. 514.)· καὶ δὴ καὶ τῇ εὐθείᾳ ΘΗ τῇ ἐν αὐτῷ κειμένῃ ὁμοίως. Ἀλλὰ καὶ τὴν ΘΚ τὴν ἐν τῷ αὐτῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ ἐπὶ τῆς τομῆς ΘΖ πρὸς ὀρθὰς ȣ͂σαν, κάθετον αὐτὴν ὡσαύτως ἐφίςαθαι κἀπὶ τῆς ΗΘ, τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται. Ἡ ἄρα ΗΘ, ἡ ἐπὶ δυεῖν ΘΙ, ΘΚ τῶν ἐν τῷ αὐτῷ καταγεγραμμένων ἐπιπέδῳ ΑΒ κάθετος ȣ͂σα, καὶ αὐτῷ τȣ́τῳ τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒ κάθετος ἐπιςήσεται (§. 507.).

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 518. Ἐπίπεδα παράλληλα ἐςὶ, τὰ, ὅσον ἂν προεκτανθείη, μηδέποτε συμπίπτοντα.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Σχ. 126. §. 519. Οὐχ οἷατε δὲ συμπεσεῖν ἐπίπεδα δύο, ΑΒ, ΓΔ, οἷς ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ΕΖ κάθετος ἐςίν. Ἐὰν γὰρ διὰ τῆς ΕΖ ἐπίπεδον τεθῇ τὸ ΕΖΗΘ,

ἔςαι

ἔςαι τῦτο ἑκατέρῳ τῶν πρώτων ΑΒ, ΓΔ, πρὸς κάθετον ἐφεςὼς (§. 514.), καὶ ταῦτα κατὰ τὰς εὐθείας ΕΗ, ΖΘ διατέμνον, τὰς τῇ αὐτῇ ΕΖ καθέτες, ἃς δὴ συμπεσεῖν καὶ αὐτὰς ἐπάναγκες ἀλλήλαις τῶν ἐπιπέδων συμπεσόντων.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 520. Δυεῖν ἐπιπέδων παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ, διὰ τῦ αὐτῦ τρίτυ ἐπιπέδυ ΕΘ ὁπωσῦν τμηθέντων, αἱ τομαὶ ΕΗ, ΖΘ παράλληλοι γίνονται. Εἰσὶ γὰρ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ τέμνοντι ΕΘ, συμπεσεῖν δ' ἐκ ἔχυσιν ἀλλήλαις, ὅτι καὶ ἐπὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒ, ΓΔ, κάμεναι εἰσίν.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 521. Ἐὰν εὐθείαις δυσὶν ΑΒ, ΑΓ, ἕτεραι δύο ΕΖ, ΗΘ ὦσι παράλληλοι, ὧν αἱ μὲν πρῶται ἐπὶ ἐπιπέδυ τῦ ΙΚ, αἱ δὲ δεύτεραι ἐπὶ τῦ ΜΝ, ἔςαι δὴ τὰ ἐπίπεδα ταῦτα ΙΚ, ΜΝ παράλληλα. Σχ. 127.

ΔΕΙΞΙΣ.

Πρὸς τῷ σημείῳ Α, ἐφεςάθω τῷ ΙΚ ἐπιπέδῳ κάθετος Αα, προσπίπτυσα τῷ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ ΜΝ κατὰ τὸ α. Εἶτα διὰ τῦ α τῇ μὲν εὐθείᾳ ΗΘ παράλληλος ἀχθήτω ἡ αγ, τῇ δὲ ΖΕ παράλληλος ἡ αβ. Καὶ ἔσονται δὴ ΑΓ τῇ αγ, καὶ ΑΒ τῇ αβ παράλληλοι (§. 505.). Ἐνθέντοι τῆς ὑπὸ ΓΑα ὀρθῆς ὔσης, ἔςαι καὶ ὑπὸ Ααγ ὀρθή. Ὀρθὴ δὲ ἔςαι καὶ ἡ ὑπὸ Ααβ, ὅτι κ ἡ ὑπὸ ΒΑα. Ἡ ἄρα Αα, ἡ ἐπὶ τῦ ἐπιπέδυ ΙΚ κάθετος ὖσα, κἀπὶ τῦ ΜΝ πρὸς ὀρθὰς ἐπιςήσεται. Διὸ καὶ τὰ ἐπίπεδα ἔςαι παράλληλα (§. 519.)

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ. 128. §. 522. Τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ, τῶν ὑπὸ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΘΙ, ΚΛ, ΜΝ τετμημένων, τὰ μέρη τὰ ὑπὸ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων ἐναπολαμβανόμενα, ἀνάλογον ἐςίν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ, καὶ ἄχθητω ΓΒ, τεμνέτω δὲ τὸ τȣ̃ τριγώνȣ ΑΓΒ ἐπίπεδον, τὸ ἐπίπεδον ΚΛ, κατὰ τὴν ΕΖ· τὸ δὲ ἐπίπεδον τȣ̃ τριγώνȣ ΓΒΔ, τὸ αὐτὸ ΚΛ κατὰ τὴν ΕΗ. Ἔσονται δὲ ΕΖ καὶ ΑΓ, ὥσπερ δὴ καὶ ΒΔ, ΕΗ παράλληλοι (§. 520.). Ἔνθεντοι ἐπὶ τȣ̃ ΑΒΓ τριγώνȣ ΑΖ : ΖΒ : ΓΕ : ΕΒ. Κἀπὶ τȣ̃ τριγώνȣ ΓΒΔ, ΓΕ : ΕΒ = ΓΗ : ΗΔ (§. 406.). Ἄρα ΑΖ : ΖΒ = ΓΗ : ΗΔ. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ἀποδειχθήσεται, ὅτι καὶ ΑΖ : ΑΒ = ΓΗ : ΓΔ· ἢ ΑΒ : ΖΒ = ΓΔ : ΗΔ.

ΤΜΗΜΑ ΕΝΝΑΤΟΝ
ΠΕΡΙ
ΣΤΕΡΕΩΝ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 523.

Δυοῖν ςερεῶν ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, δι' ἐπιπέδε παντὶ τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ΙΚ παραλλήλε τεμνομένων, ἐὰν τὰ ἐπ' ἀμφοῖν προκύπτοντα καθ' ἑκάςτην ἀεὶ τομὴν δύο χήματα βγδ, ζηθ, ἴσα ἀλλήλοις ἤ, τὰ ςερεὰ ἴσα ἔςαι. Σχ. 129.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐκ τῶν δὴ τεθέντων ἕπεται, ὡς ἐὰν τὸ ἐπίπεδον ΛΜ, τὸ τῷ δοθέντι ΙΚ παράλληλον, τε ςερεε ΑΒΓΔ ἅπτηται, τὸ αὐτὸ καὶ τε ςερεε ΕΖΗΘ ἐφάψεται. Κἀντεῦθεν δῆλον τὰ δύο ςερεὰ ἀφ' ἑτέρε ἐπὶ θάτερον τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΙΚ, ΛΜ ἐπίσης ἐκτείνεσθαι. Ἡ δὲ τῶν χημάτων ἰσότης τῶν ἐπιπέδων βγδ, ζηθ, ἃ τῇ αὐτῇ κατατομῇ ἐπ' ἄμφω ὑποτίθεται ἀνακύπτειν, σαφῶς ἐλέγχει, καὶ τὴν κατ' αὐτὰ τὰ ἐπίπεδα τοῖς ςερεοῖς εἰς μῆκος τε καὶ εὖρος ἴσην περιεσαν ἔκτασιν, διὰ πάντων τῶν ἐν αὐτοῖς ἀντιςοιχέντων σημείων· ὥςε ἄνισα εἶναι ε δύναται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 524. Οὔκεν τὰ ςερεὰ ἐκ χημάτων συγκροτεμεν ἐπιπέδων, καθάπερ ἐδὲ τὰ ἐπίπεδα ἐκ γραμμῶν συγκεῖσθαι ἐλέγομεν (§. 457.), ἀλλὰ τῇ

τῶν

τῶν ἐπιπέδων ἰσότητι, εἰς ἔλεγχον τῆς τῶν ςερεῶν προσχρώμεθα.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

Σχ. 130. §. 525. Ἐὰν ᾖ σχῆμα ἐπίπεδον εὐθύγραμμον τὸ ΑΒΓΔΕ, ἐπιπέδῳ τῷ ΛΜ παράλληλον· διὰ δὲ τινος τῶν ἐπὶ τοῦ σχήματος γωνιῶν, οἷον τῆς Α, ἀχθῇ ἡ ΑΖ τῷ ἐπιπέδῳ προσπίπτουσα κατὰ τὸ Ζ· τῇ δὲ, παράλληλοι ἀχθῶσιν αἱ ΒΗ, ΓΘ, ΔΙ, ΕΚ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΛΜ πίπτουσαι, ἐπιζευχθέντων τῶν σημείων Ζ, Η, Θ, Ι, Κ, τὸ ὑπό τε τῶν σχημάτων ΑΒΓΔΕ, καὶ ΖΗΘΙΚ, καὶ δὴ καὶ ὑπὸ ΑΗ, ΗΓ, ΓΙ, ΙΕ, ΕΖ περατούμενον ςερεὸν, **Πρίσμα** καλεῖται· οὗ τὰ μὲν σχήματα ΑΒΓΔΕ, καὶ ΖΗΘΙΚ αἱ **βάσεις**, τὰ δὲ λοιπὰ τῶν περιεχόντων ἐπιπέδων εἰσὶν αἱ **πλευραί**.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 526. Αἱ ΑΒ, ΖΗ εὐθεῖαι, καθ' ἃς τὸ ὑπὸ τῶν παραλλήλων ΑΖΒΗ ἐπίπεδον, τὰ παράλληλα ἐπίπεδα ΛΜ καὶ ΑΓ τέμνει, παράλληλοι εἰσίν. (§. 520.). Εἰσὶν ἄρα αἱ τοῦ πρίσματος πλευραὶ παραλληλόγραμμα, ταῖς πλευραῖς τῆς βάσεως ἰσάριθμα. Καὶ ἔςιν ΑΒ = ΖΗ, ΒΓ = ΗΘ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ τῶν παραλλήλων περιεχόμεναι γωνίαι ἀλλήλαις ἴσαι· ΑΒΓ = ΖΗΘ, ΒΓΔ = ΗΘΙ, καὶ αἱ λοιπαὶ §. 510.). Ἔνθεντοι αἱ ἀπεναντίον τοῦ πρίσματος βάσεις ΑΓ, ΖΘ, ὁμοιαί τε καὶ ἴσαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 527. Ἐὰν πρίσμα τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ τυχόντος, παραλλήλου ταῖς βάσεσι, τὸ κατὰ τὴν τομὴν σχῆμα, ὅμοιον ταῖς βάσεσιν αὐταῖς ἔςαι, καὶ ἴσον.

ΠΟΡΙΣ-

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 528. Τὰ δ' ἄλλα ἐπὶ παντὸς πρίσματος ἡ ΑΖ, ἤτοι κάθετος ἐςὶν ἐπὶ τῶν βάσεων, ἢ πλαγιάζεσα. Καὶ εἰ μὲν ἐκεῖνο, καὶ αἱ λοιπαὶ ΒΗ, ΔΙ, ἐπὶ τὰς βάσεις κάθετοι ςήσονται (§. 515.)· ὥστε τῆ πρίσματος παραλληλόγραμμοι πλευραὶ ὀρθογώνιοι ἔσονται, καὶ ταῖς βάσεσιν ὀρθαὶ (§. 514.). Ἢν δὲ ἡ ΑΖ πλαγιάζοι ταῖς βάσεσι, καὶ αἱ λοιπαὶ τοιαίδε εὐθεῖαι ΒΗ, ΔΙ, πλαγιάσεσιν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 529. Τὸ δὲ πρίσμα, ἒ αἱ ΑΖ, ΒΗ εὐθεῖαι κάθετοι εἰσὶν ἐπὶ τῶν βάσεων, Ὀρθὸν καλεῖται· τὰ δὲ λοιπὰ Πλάγια.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 530. Καὶ τὸ πρίσμα ἒ αἱ βάσεις παραλληλόγραμμα εἰσὶ, λέγεται Παραλληλεπίπεδον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 531. Τὸ δὲ παραλληλεπίπεδον ὑπὸ ἓξ παραλληλογράμμων περατῆται, ὧν τὰ δύο ἀεὶ τὰ ἀπεναντίον ἴσατε ἐςὶ, καὶ παράλληλα (§. 521.). Εἶεν δ' ἂν ἄλλως αὐτὰ ἤτοι ὀρθογώνια, ἐξ ἴσων ἢ ἀνίσων πλευρῶν, ἢ πλαγιογώνια (§. 528.).

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 532. Τὸ ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον, ἒ αἱ βάσεις ὀρθογώνιοι, Παραλληλεπίπεδον ὀρθογώνιον εἰρήσεται. Ἐὰν δὲ τὰ ὀρθογώνια πάντα οἷς περατῆται, καὶ τετράγωνα ᾖ, Κύβος.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 533. Ὁ κύβος ὑπὸ τετραγώνων ἓξ ἴσων ἀλλήλοις περατῆται. Ἑκάςε δὲ τῶν εἰρημένων τετραγώνων ἡ πλευρὰ, καὶ τῆ Κύβε ἔςαι πλευρά·

καὶ ταύτης δοθείσης, ἢ κατὰ τὸ δοκȣ̃ν ληφθείσης ὁ κύβος κατασκευασθήσεται, ἐὰν ἀντὶ, φέρε, ΑΓ, συςῇ τετράγωνον, ȣ̔ ἡ αὐτὴ αὕτη εἴη πλευρὰ, ἀντὶ δὲ ΑΖ κάθετος ἀχθῇ τῷ ἐπιπέδῳ τȣ̃ τετραγώνȣ, τῇ τȣ̃ κύβȣ πλευρᾷ καὶ αὐτὴ ἴση· τὰ δὲ λοιπὰ τὸν αὐτὸν ἐκτελεσθῇ τρόπον, ὡς καὶ ἐπὶ παντὸς παραδέδοται πρίσματος.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

Σχ. 131. §. 534. Ἐὰν δὲ ἀντὶ τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων (§. 525.), ληφθῶσιν εἰς βάσεις κύκλοι ἴσοι, ὧν ἂν τὰ κέντρα ἐπιζευγνύοι εὐθεῖα ἡ ΑΒ· ταῖς δὲ τȣ́των περιφερείαις ἐπιφάνεια προσεφαρμοσθείη καμπύλη, ἐφ' ἣν, ἅπασα εὐθεῖα ΓΔ, τῇ ΑΒ παράλληλος, ἡ διά τινος σημείȣ τῶν κατὰ τὴν περιφέρειαν τῆςδε, ἢ τῆςδε τῆς βάσεως, Γ ἢ Δ, διήκȣσα, ὅλη πίπτοι· τὸ ςερεὸν τὸ ὑπὸ τῶν τοιῶνδε βάσεων καὶ τῆς καμπύλης ἐπιφανείας περατȣ́μενον, **Κύλινδρος** κληθήσεται. Ἡ δ' ΑΒ ὁ τȣ̃ Κυλίνδρȣ **Ἄξων** ἔςαι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 535. Ὁ Κύλινδρος ἐςὶ πρίσμα, ȣ̔ ἡ βάσις σχῆμα τυγχάνει κανονικὸν, ὑπὸ ἀπειραρίθμων πλευρῶν περατȣ́μενον (§. 399.). Καὶ ἐὰν ἄρα δι' ἐπιπέδȣ τμηθῇ παραλλήλȣ ταῖς βάσεσι, κύκλος προελεύσεται, ταῖς βάσεσιν ἴσος (§. 527.). Ὁ δὲ τȣ̃ κυλίνδρȣ ἄξων, ἤτοι κάθετος ταῖς βάσεσιν ἐςὶν, ἢ πλάγιος.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 536. Ὁ Κύλινδρος, ȣ̔ ταῖς βάσεσιν ὁ ἄξων κάθετος **Ὀρθὸς** λέγεται. Ὁ δὲ καθ' ὃν πλάγιος ἐκείναις, **Πλάγιος**.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 537. Ἐὰν θάτερον τῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας σκελῶν, περὶ θάτερον νοηθῇ περιάγεσθαι ἀκινητῶν, τομεὺς κύκλου, ἢ ἡμικύκλιον, ἢ κύκλος ὁλοσχερὴς ἀνατυπωθήσεται. Εὔδηλον γὰρ ὡς τὸ κινούμενον σκέλος, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἀεὶ βήσεσθαι ἐπιπέδου (§. 507.), ἐν ᾧ ταύτηγε καταγράψει καμπύλην, τὴν ἐπίσης πανταχόθεν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας ἀπέχουσαν. Διωήσεται τοίνυν καὶ ὁ ὀρθὸς κύλινδρος, διὰ περιαγωγῆς τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου γεννᾶσθαι, ὃ ἂν περὶ μίαν τῶν ἐπ' αὐτῷ πλευρῶν ἀκινητοῦσαν περιάγοιτο.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 538. Τὰ πρίσματα καὶ οἱ κύλινδροι ΑΒ, ΓΔ, ἐὰν ὦσιν ἐπὶ ἴσων βάσεων, καὶ ἐν τοῖς αὐτοῖς παραλλήλοις ἐπιπέδοις ΕΖ, ΗΘ, ἀλλήλοις ἐξισωθήσονται. Σχ. 132.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τμηθέντος καὶ γὰρ τῶνδε τῶν στερεῶν ἑκατέρου δι' ἐπιπέδου παραλλήλου ταῖς βάσεσι, τομαὶ πανταχοῦ ἴσαι ἀλλήλαις ἀναφυήσονται (§. 527.). Τὰ ἄρα πρίσματα ἴσα ἐστὶ (§. 523.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 539. Οἱ κύβοι ὧν αἱ πλευραὶ ἴσαι, ἴσοι. Καὶ τῶν ἴσων κύβων αἱ πλευραὶ ἴσαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 540. Παντὶ πρίσματι, ἢ κυλίνδρῳ, παραλ- Σχ. 133.
ληλεπίπεδον ὀρθογώνιον ἴσον ἐνὶ κατασκευάσαι, ἐπὶ βάσεως πηλικησοῦν τὸ εὖρος δοθείσης. Ἔστω γὰρ ΑΒΓ πρίσμα τὸ δοθὲν· εὖρος δὲ τῆς τοῦ παραλληλεπιπέδου βάσεως ΔΕ. Ἐὰν ἄρα κατ' ἐπίπεδον τὸ τῆς βάσεως ΑΒ, ὀρθογώνιον καἰασκευασθῇ τὸ ΔΕΖ

τοῦ

τῇ ΑΒ βάσει τȣ̃ πρίσματος ἴσον, τὸ ΔΓΘ παραλληλεπίπεδον, τὸ ἐπὶ τῆς ΔΕΖ βάσεως, καὶ ἐν ὕψει τῷ ΕΘ, ἴσῳ τῷ ὕψει τȣ̃ ΑΒΓ πρίσματος, τῷ δὲ τῷ ΑΒΓ ἴσον ἐςαι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 541. Ἀμέλειτοι τȣ̃ πρίσματος, ἢ τȣ̃ κυλίνδρȣ ὕψος εἶναι λέγεται, ἡ ἀπὸ τȣ̃ ἐπιπέδȣ τȣ̃ κατὰ τὴν ἑτέραν τȣ̃ πρίσματος ἢ τȣ̃ κυλίνδρȣ βάσιν, ἀγομένη κάθετος, καὶ μέχρι τȣ̃ ἐπιπέδȣ τῆς ἀπ' ἐναντίον βάσεως διήκȣσα. Διὸ τῶν πρισμάτων τε καὶ κυλίνδρων, ὧν ἐν τοῖς αὐτοῖς αἱ βάσεις εἰσὶν ἐπιπέδοις, τȣτέςι τῶν ἐν τοῖς αὐτοῖς παραλλήλοις ἐπιπέδοις περιεχομένων, τὸ ὕψος ἴσον ἐςί. Καὶ ὧν δ' ἀνάπαλιν τὸ ὕψος ἴσον, πρισμάτων λέγω καὶ κυλίνδρων, τȣ́των καὶ αἱ βάσεις ἐν τοῖς αὐτοῖς παραλλήλοις ἐπιπέδοις εἰσίν.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 542. **Τὰ πρίσματα καὶ οἱ κύλινδροι, ὧν αἱ βάσεις ἴσαι, εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη.**

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 134. Ἐςω ΑΒ βάσις τȣ̃ πρίσματος ΑΒΓ, ἴση τῇ τȣ̃ ΔΕΖ, ȣ̃ ὕψος τὸ ΕΖ. Καὶ γινέσθω ΒΗ = ΕΖ. Τετμήσθω δὲ τὸ πρίσμα ΑΒΓ, κατὰ τὸ Η, δι' ἐπιπέδȣ παραλλήλȣ ταῖς βάσεσιν. Ἐςαι δὲ δὴ τὸ ἀποτμηθὲν ΑΒΗΘ, ἴσον τῷ πρίσματι ΔΕΖ (§. 538.). Διαιρεθήτω τοίνυν ἡ ΒΓ εἰς μέρη ὁποσαδήποτε τὸν ἀριθμὸν ἴσα, ἀχθήτωτε δι' ἑκάςȣ τῶν κατὰ τὰς διαιρέσεις σημείων, ἐπίπεδον τῇ βάσει ΒΑ παράλληλον. Καὶ ἔςαι τὰ πρίσματα, ἐν οἷς τὸ ΑΓ ταύτῃ κατατέμνεται ἀλλήλοις ἴσα. Ἐνέςαι δὲ τῷ ΑΗ τοσαῦτα ἐκ τῶν τηλικȣ́των πρισμάτων· τȣτέςι τοσάδε τῶν μερῶν τȣ̃ ΑΓ πρίσματος, τῷ ΑΗ πρίσματι ἐνέςαι, ὅσα τῶν μερῶν τȣ̃ ὕψȣς

ΒΓ,

ΒΓ, ἐμπεριέχεται τῷ ΒΗ. Τοιγαροῦν καὶ ἔςαι ΑΒΗΘ : ΑΒΓ = ΒΗ : ΒΓ (§. 152.). Κἀντεῦθεν καὶ ΔΕΖ : ΑΒΓ = ΕΖ : ΒΓ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 543. Τὰ ἰσοϋψῆ πρίσματα καὶ οἱ κύλινδροι, εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις, ὅπως ἂν πρὸς ἄλληλα παρατεθείη· κἄντε ὀρθὰ τὰ ςερεὰ ταῦτα ληφθείη, κἄντε πλάγια.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔςω παραλληλεπίπεδα ὀρθογώνια ἰσοϋψῆ, τὰ ΑΒΓΔ, αβγδ· τὰς τῶν βάσεων πλευρὰς ΒΓ, βγ προσέτι ἴσας ἔχοντα. Ἔςαι δὲ καὶ τὸ ΒΔ ὀρθογώνιον ἴσον τῷ βδ ὀρθογωνίῳ. Ἡ δὲ βάσις ΑΒΓ, ἔςαι πρὸς τὴν βάσιν αβγ, ὡς ΑΒ : αβ (§. 474.). Ἐὰν οὖν ΒΔ, βδ ἀντὶ βάσεων ληφθῶσιν, ΑΒ, αϐ εἰς ὕψη λογισθήσονται· ὁπότε καὶ σαφῶς ἔςαι ΑΔ : αδ = ΑΒ : αβ (§. 542.)· ἐκοῦν ἔςαι καὶ ΑΔ : αδ = ΑΒΓ : αβγ. Ἐὰν οὖν ἀντὶ τοῦ ΑΔ. καὶ ἕτερόν τι πρίσμα ληφθῇ τὸ Π, οὗ ἡ μὲν βάσις Β, ἴση ᾖ τῇ βάσει ΑΒΓ, τὸ δὲ ὕψος = ΓΔ· καὶ ἀντὶ δὲ τοῦ αδ, ἕτερον ὡσαύτως τεθῇ τὸ π, οὗ ἡ μὲν βάσις ϐ = αβγ, τὸ δὲ ὕψος = γδ. Ἔςαι δὴ Π = ΑΔ, καὶ π = αδ (§. 538.). Καὶ τούτων ἀντικαθεςώτων ἡ ἀναλογία ΑΔ : αδ = ΑΒΓ : αβγ, εἰς τήνδε μεταποιεῖται, Π : π = Β : β. Σχ. 135.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 544. Ἅπαν πρίσμα, καὶ πᾶς κύλινδρος, πρίσματι, ἢ κυλίνδρῳ παραβάλλεται, συνθέσει τῶν λόγων τῶν ἐν ταῖς βάσεσι, καὶ τοῖς ὕψεσιν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ληφθήτω δὴ εἰς παράθεσιν κύλινδρος ὁ ΑΒΓ, Σχ. 135.
οὗ βάσις μὲν ἡ Β ὕψος δὲ τὸ Υ, πρὸς πρίσμα τὸ

ΔΕΖ,

ΔΕΖ, ȣ̃ βάσεις μὲν ἡ β, ὕψος δὲ τὸ υ. Νοείσθω δὲ καὶ τρίτον ςερεὸν τοιȣτῶδες, οἷον τὸ ΗΘΙ, ȣ̃ ἡ μὲν βάσις Β, ἴση δηλαδὴ τῇ τȣ̃ ςερεȣ̃ ΑΒΓ, ὕψος δὲ υ, ἴσον τῷ τȣ̃ ςερεȣ̃ ΔΕΖ. Καὶ ἔςαι·

ΑΒΓ : ΗΘΙ = Υ : υ (§. 542.).

καὶ ΗΘΙ : ΔΕΖ = Β : β (§. 543.).

Ὅθεν δῆλον τὸ προτεθέν. (§. 166.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 545. Ἐντεῦθεν ῥαδίως ὁ λόγος πρίσματος, ἢ κυλίνδρȣ πρὸς ἕτερόν τι τȣ̃ τοιȣ́τȣ γένȣς ςερεὸν εὑρίσκεται, ἐὰν ὁ λόγος τῶν βάσεων καὶ τῶν ὑψῶν διδόμενος ᾖ, εἴτε δι᾽ ἀριθμῶν, εἴτε καὶ δι᾽ εὐθειῶν. Ἐὰν μὲν γὰρ δι᾽ ἀριθμῶν προκέωνται οἱ τῶν βάσεων λόγοι καὶ τῶν ὑψῶν, καὶ πρίσμα πρίσματι ὅπως ἔχει, καὶ κύλινδρος κυλίνδρῳ, ἢ πρίσμα κυλίνδρῳ παραβαλλόμενα, δι᾽ ἀριθμῶν ἐκδηλωθήσεται (§. 178.). Ἐὰν δὲ διὰ γραμμῶν εὐθειῶν οἱ λόγοι ȣ̃ς συνθέσθαι δέον ἐκφέρωνται, διὰ γραμμῶν καὶ ὁ τῶν ςερεῶν λόγος ἐκκείσεται (§. 410.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

Σχ. 137. §. 546. Ἐὰν δὲ, ἃ δεῖ παραθέσθαι, τὰ ςερεὰ παραλληλεπίπεδα ὀρθογώνια ᾖ, ΑΒΓΔ, αβγδ, ὁ τῶν βάσεων λόγος, συγκείσεται, ἐκ τῶν λόγων τῶν πλευρῶν ΑΒ : αβ, καὶ ΒΓ : βγ (§. 475.). Διὸ καὶ ὁ τῶν παραλληλεπιπέδων αὐτῶν λόγος ἐκ τῶν τριῶν συγκείσεται τῶνδε· ΑΒ : αβ, ΒΓ : βγ, ΓΔ : γδ· οἳ καὶ εἰς ἐλάσονας καταςήσονται, τῶν ἴσων ὅρων, εἴτινες ἂν τύχοιεν ἐν τοῖς ἡγȣμένοις τε καὶ ἑπομένοις, παραλειπομένων (§. 181.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 547. Διὸ καὶ ὁ τῶν κύβων λόγος τριπλασίων ἐςὶ τȣ̃ λόγȣ τῶν πλευρῶν. Ἵνα γὰρ ἐκ παραλληλεπιλεπιπέδε γένηται κύβος, λαβεῖν ἐπάναγκες ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ. (§. 533.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 548. Ἐὰν αἱ τῶν πρισμάτων βάσεις ἀλλήλαις ὅμοιαι τύχωσιν, ὁ τέτων λόγος διπλασίων ἔσαι τε λόγε τῶν πλευρῶν, τῶν πρὸς τὰς ἴσας γωνίας ὡσαύτως θέσεως ἐχεσῶν (§. 487.). Διὸ καὶ τῶν τοιέτων ὁ λόγος πρισμάτων, ἔκτε τεδε τε διπλασίονος τῶν πλευρῶν, καὶ ἐκ τε λόγε τῶν ὑψῶν συγκείσεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 549. Ἔνθενται καὶ πάντες οἱ κύλινδροι, ἐν λόγῳ εἰσὶ συνθέτῳ, ἔκτε τε διπλασίονος τῶν κατὰ τὰς βάσεις διαμέτρων, καὶ ἐκ τε λόγε τῶν ὑψῶν (§. 490.).

ΠΟΡΙΣΜΑ ϛ'.

§. 550. Τὰ ἐπὶ ὁμοίων βάσεων πρίσματα, ὧν τὰ ὕψη ὡς αἱ τῶν βάσεων ὁμόλογοι πλευραὶ, εἰσὶν ἐν λόγῳ τριπλασίονι τῶν ἐπ' αὐτοῖς πλευρῶν. Ὁ γὰρ τῶν βάσεων λόγος διπλασίων τε λόγε τῶν τοιέτων πλευρῶν. Προσεπιγίνεται δὲ τῷ δε καὶ ὁ τῶν ὑψῶν, ὃς τῷ τῶν εἰρημένων πλευρῶν ἴσος τίθεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ.

§. 551. Καὶ πάντες οἱ κύλινδροι, ὧν τὰ ὕψη ὡς αἱ τῶν βάσεων διάμετροι, ἐν λόγῳ εἰσὶ τριπλασίονι τῶν διαμέτρων, ἢ τῶν ὑψῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Η.

§. 552. Τὰ δὲ ςερεὰ, ἅτια ἂν ἐν λόγῳ τριπλασίονι ᾖ τινῶν τῶν ἐπ' αὐτοῖς πλευρῶν, εἰσὶν ὡς οἱ κύβοι οἱ ἀπὸ τῶν αὐτῶν πλευρῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Θ.

§. 553. Δύο ληφθέντων πρισμάτων, ἢ κυλίνδρων, ἢ πρίσματος καὶ κυλίνδρε, ὧν βάσεις μὲν αἱ

Β, β,

Β, β, ὕψη δὲ τὰ Υ : υ, εἰ ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι· τ8τέςιν ἐὰν ᾖ Β : β = υ : Υ, τὰ ςερεὰ ἴσα ἔςαι. Εἴη γὰρ ἂν ὅτως ὁ ἐκ τῶν λόγων σύνθετος Β : β καὶ Υ : υ, λόγος ἰσότητος (§. 186.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι.

§. 554. Καὶ ἐὰν τὰ τ8 τοιότ8 γένες ςερεὰ ἴσα ᾖ, Ἔςαι Β : β = υ : Υ· τ8τέςιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν ἀντιπεπονθεῖαι ἔσονται (§. 187.).

ΟΡΙΣΜΟΣ.

Σχ. 138. §. 555. Ἐπιπέδ8 σχήματος εὐθυγράμμ8 τ8 τυχόντος ληφθέντος ΑΒΓΔΕ, ἐὰν ἀπὸ τ8 ἐν μετεώρῳ σημεί8 Ζ, εὐθεῖαι ἀχθῶσι ΖΑ, ΖΒ, κτλ. ἐπὶ πάσας τὰς γωνίας τ8 σχήματος, τὸ ὅτως ἐκπεραττόμενον ςερεὸν, ὑπό τε τ8 ῥηθέντος ἐπιπέδ8 ΑΒΓΔΕ, καὶ τῶν τριγώνων ΖΑΒ, ΖΒΓ, ΖΓΔ, καὶ τῶν λοιπῶν, Πυραμὶς λέγεται, ἧς τὸ μὲν σχῆμα ΑΒΓΔΕ ἡ βάσις, τὰ δὲ τρίγωνα ΖΑΒ, ΖΒΓ, καὶ τὰ λοιπὰ, αἱ πλ8ραί.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 556. Αἱ τῆς πυραμίδος πλ8ραὶ ἰσάριθμοι ταῖς τῆς βάσεως. Ἐξ 8 καὶ τῶν πυραμίδων αἱ μὲν τρίπλ8ροι, αἱ δὲ τετράπλ8ροι, πεντάπλ8ροι, κτλ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

Σχ. 139. §. 557. Ἐὰν ἀντὶ τῆς εὐθυγράμμ8 βάσεως κύκλος ληφθῇ 8 κέντρον τὸ Α. Διά δὲ τινος τῶν ἐν μετεώρῳ σημεί8 Β, καὶ τῆς τ8 κύκλ8 περιφερείας, ἐπιφάνεια καμπύλη διατείνῃ, ἐφ' ἣν αἱ εὐθεῖαι πίπτοιεν ἅπασαι ΒΓ, ΒΔ, ὁπόσαι ἂν ἀχθεῖεν ἀπὸ τ8 Β σημεί8 ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, τὸ ὑπὸ τ8 κύκλ8, καὶ τῆς τοιᾶσδε καμπύλης περατέμενον ςερεὸν Κῶνος κληθήσεται, 8 ὁ κύκλος ΓΔ ἡ βάσις.

ΟΡΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 558. Ἡ δὲ ΑΒ εὐθεῖα ἡ τὸ κέντρον τῆς βάσεως Α, τῇ τοῦ κώνου κορυφῇ Β συνεπιζευγνύουσα, ὁ Ἄξων τοῦ κώνου ἀκούεται· οὗ ὀρθοῦ μὲν ἐφισταμένου τῇ βάσει, Ὀρθὸς ὁ κῶνος· πλαγίως δὲ, Πλάγιος.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 559. Ὁ δέτοι κῶνος οἷατις πυραμὶς ἐστὶν ἐκ Σχ. 140.
πλευρῶν ἀπειραρίθμων συγκροτουμένη. Πᾶσαι δὲ αἱ ἐπὶ τοῦ ὀρθοῦ κώνου, ἀπὸ τῆς κορυφῆς Β ἐπὶ τὴν τῆς βάσεως περιφέρειαν ἀγόμεναι εὐθεῖαι ΒΓ, ΒΔ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὅθεν καὶ ἡ γένεσις τοῦ ὀρθοῦ κώνου, τοῦ τυχόντος ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, περὶ τὴν ἑτέραν ΒΑ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν, περιαγομένου (§. 537.).

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 560. Ἐπὶ τοῦ ὀρθοῦ κώνου, ἑκάστη τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τῆς βάσεως περιφέρειαν ἀγομένων εὐθειῶν ΒΓ, πλευρὰ τοῦ κώνου καλεῖται.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 561. Οἱασδήποτε πυραμίδος ΑΒΓΔΕΖ, δι' ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει τεμνομένης, τὸ ἀνακύπτον κατὰ τὴν τομὴν σχῆμα βγδεζ, ὅμοιον τῇ βάσει ἐστί.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστι γὰρ ἡ βγ παράλληλος τῇ πλευρᾷ ΒΓ, καὶ Σχ. 141.
γδ τῇ ΓΔ (§. 520.). Ἄρα καὶ ὑπὸ $βγδ = ΒΓΔ$ (§. 510.). Καὶ οὕτω δι' ὅλης τῆς περιμέτρου. Ἐν μὲν οὖν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ ἐστὶ $ΒΓ : βγ = ΑΓ : Αγ$. Κἀν τῷ ΑΓΔ δὲ, $ΑΓ : Αγ = ΓΔ : γδ$ (§. 417.). Ἄρα $ΒΓ : βγ = ΓΔ : γδ$. Τὰ δὲ σχήματα ἐν οἷς αἱ ἴσαι γωνίαι ὑπὸ ἀναλόγων εὐθειῶν περιέχονται, ὅμοια ἐστίν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 562. Ἡ ἄρα βγδεζ τομὴ, πρὸς τὴν ΒΓΔΕΖ βάσιν ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐςὶ τȣ̃ τῶν πλευρῶν βγ : ΒΓ (§. 487.)· τȣ̃ δὲ λόγȣ βγ : ΒΓ τῷ Αγ : ΑΓ ἴσȣ τυγχάνοντος (§. 417.), ἴςαι ὁ τῆς τομῆς πρὸς τὴν βάσιν λόγος διπλασίων καὶ τȣ̃ Αγ : ΑΓ. Ἡ δὲ τῆς τομῆς περίμετρος πρὸς τὴν τῆς βάσεως ἐςὶν ὡς Αβ : ΑΒ (§. 415.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

Σχ. 142. §. 563. Ἐὰν κῶνος ΑΒΓ, δι' ἐπιπέδȣ τῇ βάσει ΒΓ παραλλήλȣ τμηθῇ, κύκλος ἀνακύψει ὁ βγ, ȣ̃ ὁ λόγος πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ, διπλασίων ἐςὶ τȣ̃ λόγȣ Αβ : ΑΒ. Ἡ δὲ κατὰ τὴν τομὴν περιφέρεια πρὸς τὴν κατὰ τὴν βάσιν, ὡς Αβ : ΑΒ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ. 143. §. 564. Αἱ πυραμίδες καὶ οἱ κῶνοι ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἐπὶ ἴσων βάσεων ΒΓ, ΕΖ ὄντα, καὶ ἐν ἐπιπέδοις παραλλήλοις ΗΘ, ΙΚ, ἴσα ἐςί.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν γὰρ ἑκάτερον τῶν ῥηθέντων ςερεῶν δι' ἐπιπέδȣ τμηθῇ παραλλήλȣ ταῖς βάσεσι, κἀντεῦθεν ἀνακύψωσι τομαὶ αἱ βγ καὶ εζ, ἔςαι βγ : ΒΓ ἐν διπλασίονι λόγῳ τȣ̃ Αβ πρὸς ΑΒ· καὶ εζ : ΕΖ, ὡσαύτως ἐν διπλασίονι λόγῳ τȣ̃ Δε : ΔΕ· οἱ δέτοι λόγοι Αϐ : ΑΒ, καὶ Δε : ΔΕ ἀλλήλοις ἴσοι (§. 522.). Ἄρα καὶ βγ : ΒΓ = εζ : ΕΖ· καὶ βγ : εζ = ΒΓ : ΕΖ. Ἐπειδὴ δὲ ΒΓ = ΕΖ, ἔςαι καὶ βγ = εζ. Τὰ δὲ ςερεὰ, ὧν αἱ τομαὶ αἱ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ παράλληλοι ἅπασαι ἀλλήλαις ἴσαι εἰσὶ, καὶ αὐτὰ ἀλλήλοις ἴσα ἐςὶ (§. 523.).

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 565. Ἁπάσῃ ἄρα πυραμίδι, καὶ κώνῳ παν-

..., πυραμὶς ἴση τρίπλυρος κατασκευασθῆναι, ἢ ... ἐπινοηθῆναι δυνήσεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 566. Ἐὰν εὐθεῖα, ἡ ἀπὸ τῆ παραλλήλυ τῇ βάσει ἐπιπέδυ, ἐφ' ὃ ἡ τῆς πυραμίδος, ἢ τῦ κώνυ κορυφὴ ἀφικνεῖται, πρὸς τὸ κατὰ τὴν βάσιν ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη, ὕψος τῆς πυραμίδος, ἢ τῦ κώνυ ῥηθῇ, ἡ παρῦσα προτασις ὕτω προτεθήσεται, ὅτι αἱ πυραμίδες καὶ οἱ κῶνοι, ὧν ἴσαι εἴτε „βάσεις, καὶ τὰ ὕψη, ἴσοι εἰσίν.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 567. Τὸ πρίσμα, ἢ ὁ κύλινδρος ὗ ἡ μὲν βάσις τῇ βάσει, τὸ δ' ὕψος τῷ ὕψει τῷ τῆς πυραμίδος, ἢ τῷ τῦ κώνυ ἴσα ἐςὶ, τῆς πυραμίδος, ἢ τῦ κώνυ τὸ τριπλῦν ἐςίν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὑποκείσθω δὴ σημαινόμενον τὸ πρίσμα, ἢ ὁ κύλινδρος διὰ τῦ Π, ἡ δὲ πυραμὶς ἢ ὁ κῶνος διὰ τῦ Φ. Ἔςω δὲ καὶ Β σχῆμα τῇ βάσει ἑκατέρυ τῶν ςερεῶν Π καὶ Φ ἴσον, καὶ Υ αὐτῶν ἐκείνων τὸ ὕψωμα. Γενέσθω δὲ πρίσμα τρίγωνον ΑΒΓΔΕΖ· ὗ βάσις Σχ. 144 ἡ ΑΒΓ = ΔΕΖ ἔςω = Β· τὸ δὲ ὕψος ΑΔ = ΓΖ = ΒΕ = Υ. Καὶ ἔςαι δὴ τὸ πρίσμα τόδε ἴσον τῷ προσληφθέντι Π (§. 538.). Ἀχθήτωσαν ὖν ΔΒ, ΔΓ. Καὶ νοείσθω ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ, ἥτις, ὡς τὴν μὲν βάσιν ΑΒΓ = Β ἔχυσα, τὸ δ' ὕψος ΑΔ = Υ, τῷ ςερεῷ Φ ἴση ἔςαι (§. 564.). Φημὶ δὴ, ὅτι τῆσδε τῆς πυραμίδος ΑΒΓΔ, τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ τριπλῦν ἐςί. Τετμήσθω γὰρ ἡ ΒΖ βάσις τῆς λοιπῆς πυραμίδος ΓΒΕΖΔ διὰ τῆς διαγωνίυ ΓΕ. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ΒΖ ὀρθογώνιον ἐςὶν, ἅτε δὴ πλευρὰ ὖσα πρίσματος ὀρθῦ (§. 528.), ἔςαι ΓΒΕ = ΓΖΕ· ὥςε ἡ πυραμὶς ΔΓΒΕ = τῇ ΔΓΕΖ, παρὰ τὸ αὐτὸ ἀμφοτέρεις εἶναι καὶ τὸ ὕψωμα. Ἀλλὰ γὰρ τῆς ΔΓΕΖ πυραμίδος ἐὰν βάσις μὲν ληφθῇ ἡ ΔΕΖ, ὕψος δὲ τὸ ΓΖ, καὶ τὸ μέγεθος δῆλον ὅτι τῷ τῆς πυραμίδος ΑΒΓΔ ἴσον. Ἔστιν ἄρα τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ, τῆς πυραμίδος ΑΒΓΔ τριπλάσιον· ταύτητοι καὶ Π = 3Φ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 568. Ἔνθεντοι ἐὰν ἐπὶ τῆς βάσεως Β, πρίσμα ἢ κύλινδρος σαθῇ, ὃ ὕψος $\frac{1}{3}$Α, τὸ τηλικοῦτον στερεὸν ἴσον ἔσται πυραμίδι, ἢ κώνῳ, ἐπὶ βάσεως μὲν = Β, ἐν ὕψει δὲ = Α.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 569. Οἱ δὲ κῶνοι καὶ αἱ πυραμίδες, οἱ ὡδέπως εἰς κυλίνδρους ἢ πρίσματα μεταβαλόντες ῥᾶστα παρατεθείσονται, καὶ πρὸς κώνους ἑτέρους ἢ πυραμίδας, καὶ πρὸς κυλίνδρους ἢ πρίσματα. Καὶ ἐν γένει ὁ μὲν πυραμίδος ἢ κώνου, πρὸς πυραμίδα ἢ κῶνον λόγος, ἐκ τῶν λόγων συγκείσεται τῶντε βάσεων καὶ τῶν ὑψῶν· ὁ δὲ τῆς πυραμίδος ἢ τοῦ κώνου λόγος πρὸς τὸ πρίσμα ἢ τὸν κύλινδρον, ἐκ τοῦ λόγου συγκείσεται τῆς τοῦ κώνου, ἢ τῆς πυραμίδος βάσεως πρὸς τὴν τοῦ κυλίνδρου ἢ τοῦ πρίσματος, καὶ ἐκ τοῦ λόγου τοῦ τριτημορίου τοῦ ὕψους τοῦ κώνου ἢ τῆς πυραμίδος, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος, ἢ τοῦ κυλίνδρου τὸ ὁλοχερές.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 570. Καθόλου μὲν οὖν ἐκ τῆς κατὰ τὴν δεῖξιν ἐφόδου φανερὸν, ὅτι τὰ περὶ τῶν πρισμάτων καὶ κυλίνδρων καὶ πυραμίδων καὶ κώνων ἀποδειχθέντα, καὶ περὶ ἀναριθμήτων ἄλλων στερεῶν λεγόμενα κρατεῖ, ὧν αἱ ἐπίπεδοι βάσεις, οὔτε κύκλοι, οὔτε εὐθύγραμμα σχήματα εἰσί. Νοεῖται δὲ εὐχερῶς τὰ τοιάδε στερεὰ, τοῖς εἰς τόδε τεθεωρημένοις παραβαλλόμενα. Δῆλον γὰρ ὡς ἀνάριθμα τούτοις, καὶ ὧν ὧν αἱ βάσεις κύκλων εἰσὶ τομεῖς, ἅτινα ἐκ κυλίνδρων ἢ κώνων, ὀρθῶν ἢ πλαγίων μορφοῦσθαι δύναται, ἐὰν διὰ τῶν ἀξόνων ὑπὸ δυοῖν ἐπιπέδων τὰ στερεὰ τάδε τέμνηται. Διὸ καὶ τομεῖς ἂν τὰ οὕτως ἀνακύπτοντα τῶν στερεῶν εἰκότως κληθείη· τὸ μὲν ὑπὸ τῶν διὰ τοῦ κατὰ τὸν κύλινδρον ἄξονος χωρούντων ἐπιπέδων συνιστάμενον, τομεὺς τοῦ κυλίνδρου, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν διὰ τοῦ κατὰ τὸν κῶνον, τομεὺς τοῦ κώνου, ὀνομαζόμενα.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 571. Ἐὰν κύκλου τεταρτημόριον ΑΒΓ, περὶ τὴν ἡμιδιάμετρον ΑΓ, ὡς περὶ ἄξονα περιαχθῇ ἕως γε τὸ ΑΔΓ, τὸ στερεὸν ΑΒΓΔ, τὸ ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓΔ, παρὰ τὰ δύο τεταρτημόρια ΑΒΓ, ΑΔΓ, καὶ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ΑΒΔ πέρατα ἔχον, τομεὺς τοῦ ἡμισφαιρίου εἰρήσεται. Ἀπογεννᾶται γὰρ τὸ ἡμισφαίριον, τῇ ὁλοσχερεῖ τοῦ τεταρτημορίου ΑΒΓ περιαγωγῇ, καθ᾽ ἣν ἡ ΓΒ κύκλον γράφει τὸν εἰς βάσιν τῷ ἡμισφαιρίῳ ἐσόμενον. Ἐὰν δὲ ἀντὶ τοῦ τεταρτημορίου ἡμικύκλιον περιαχθῇ, ὁ μὲν τομεὺς ἔσται τῆς σφαίρας, τὸ δὲ διὰ τῆς ὁλοσχεροῦς περιαγωγῆς γινόμενον ἡ αὐτὴ σφαῖρα. Σχ. 145.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 572. Ἡ βάσις ἡ τοῦ κατὰ τὸ ἡμισφαίριον τομέως, ἐστὶ τοῦ κύκλου τομεὺς (§. 537.), ἐν ᾧ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ, τὴν τῶν ἐπιπέδων ΑΒΓ, ΑΔΓ, πρὸς ἄλληλα κλίσιν καταμετρεῖ (§. 512.). Καὶ ἐὰν ὁ τοῦ ἡμισφαιρίου τομεὺς δι᾽ ἐπιπέδου τμηθῇ παραλλήλου τῇ βάσει, τὸ ἐντεῦθεν προκύπτον σχῆμα βγδ, καὶ αὐτὸ τομεὺς ἔσται κύκλου τῇ βάσει ὅμοιος, τοσούτῳ δὲ ἐλάσσων, ὅσῳ δὴ μᾶλλον τοῦ κατὰ τὸ Γ κέντρου ἐστὶν ἀφιστάμενος. Ἀναφύεται γὰρ τὸ σχῆμα τόδε βγδ, ἐὰν ἡ γβ εὐθεῖα, ἡ ἐπὶ τῆς ἀκινήτου ΑΓ κάθετος, ἐν τῷ κατὰ τὸ τεταρτημόριον ΑΓΒ ἐπιπέδῳ, π'λω, περὶ αὐτὴν τὴν ΑΓ περιαχθῇ, ἔςγε τὸ ἐπίπεδον τῦ τεταρμορίυ ΑΓΔ. Ἐντεῦθεν γὰρ δὴ τομεὺς καταγράφεται, ῦ ἡ μὲν ὑπὸ βγδ γωνία, τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐςὶν (§. 511.), ἡ δὲ ἡμιδιάμετρος ϐγ, τῆς ἡμιδιαμέτρυ ΒΓ ἐλάσσων.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 573. Ἅπαν δὲ σημεῖον τῶν ἐπὶ τῆς ΑΒΔ κυρτῆς ἐπιφανείας, ἀπὸ τῦ κέντρυ Γ τῦ τεταρτημορίυ ἐπίσης ἀπέχειν ἐπάναγκες· ὅτι καὶ πάντα τὰ ἐπὶ τῆς περιφερείας ΑΒ, ἧς τῇ περὶ τὴν ΑΓ περιαγωγῇ ἡ ἐπιφάνεια καταγράφεται, ἐπίσης ἀπὸ τῦ σημείυ Γ ἀφέςηκεν. Ἔςι δὲ ἡ ἀπόςασις αὕτη ἴση τῇ τῦ τεταρτημορίυ ἡμιδιαμέτρῳ ΓΒ, ἢ ΑΓ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

Σχ. 146. §. 574. Ἐπὶ τῦ ἡμικυκλίυ ΑΒΓ, ὁ περὶ τὴν ΑΓ διάμετρον πάντη περιαχθὲν τὴν σφαῖραν ἀπογεννᾷ, ἐὰν ἀχθῶσιν εὐθεῖαι ΔΒ, ΕΖ, ἐπὶ τὴν ΑΓ διάμετρον κάθετοι, καὶ ἐκ τῦ ἀκολύθυ παράλληλοι, ἑκάςη τῶνδε ἐν τῇ περιαγωγῇ κύκλον καταγράψει, ἐφ' ὃν ἡ ΑΓ κάθετος ἐπιςήσεται· καὶ τῦτον τοσῦτω μείζονα, ὅσω ἡ ἡμιδιάμετρος ΔΒ, ΕΖ μείζων ἐςί. Τῶν δὲ εὐθειῶν ΔΒ, ΕΖ, ἡ ἧττον τῦ κέντρυ Η ἀπέχυσα μείζων. Ἔνθεντοι καὶ πάντων τῶν ὕτω καταγραφομένων μέγιςος ὁ κύκλος, ῦ τὸ ἐπίπεδον διὰ τῦ κέντρυ Η διατείνει. Οἱ λοιποὶ δὲ τοσῦτω ἐλάσσονες, ὅσω δὴ μᾶλλον τῦ κέντρυ Η ἀπέχοντες. Οἱ δὲ δὴ κύκλοι ὗτοι καὶ πρὸς ἀλλήλυς παράλληλοι ἔσονται, καθ' ὃν δήπυ λόγον ἐν γένει ἐπίπεδον ἐπιπέδῳ παράλληλον εἶναι λέγεται (§. 519.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 575. Τὰ δὲ ἐπίπεδα χήματα, ἅπερ αἱ ἐπὶ τῆς διαμέτρυ ΑΓ κάθετοι εὐθεῖαι ΔΒ, ΕΖ, ΗΘ,

αἱ

αἱ τῷ ἡμικυκλίῳ ΑΘΓ συμπεριαγόμεναι καταγράφουσι, τὰ αὐτὰ ἐστὶ τοῖς ἀνακύπτουσιν, ἐὰν ἡ οὕτω συνισταμένη σφαῖρα, δι' ἐπιπέδων τμηθῇ, οἷς ἡ αὐτὴ ΑΓ κάθετος ἐστί. Καὶ ἔσονται ἄρα ἅπαντα τὰ διὰ τῶν τοιῶνδε τῆς σφαίρας τομῶν ἀναφυόμενα σχήματα κύκλοι, ἴσοι, ἢ γοῦν ἄνισοι πρὸς ἀλλήλους, ᾗπερ αἱ τῶν διατεμνόντων ἐπιπέδων ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ κέντρου Η, ἴσαι ἢ ἄνισοι προσλαμβάνονται· καὶ τοσούτῳ δὴ ἐλάσσονες ὁπόσῳ ἡ ἀπόστασις μείζων. Πεσεῖται δὲ τῶνδε τῶν κύκλων ἁπάντων τὰ κέντρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς ΑΓ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 576. Τῶν ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας σημείων ἕκαστον, ἀπὸ τοῦ Η κέντρου τοῦ ἡμικυκλίου, οὗ τῇ περὶ τὴν ΑΓ περιαγωγῇ ἀπογεννᾶται ἡ σφαῖρα, ἐπίσης ἀφέστηκεν. Καὶ τὸ αὐτὸ ἄρα σημεῖον Η, τὸ κέντρον ἔσται τῆς σφαίρας, καθ' ὃν δήπου λόγον καὶ κέντρον εἶναι τοῦ κύκλου λέγεται. Ἡ δ' ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ἀγομένη εὐθεῖα, ἡ τῆς σφαίρας ἐστὶν ἡμιδιάμετρος. Ἡ δὲ δισσὰ τῶν ἐπὶ τῆς σφαίρας σημεῖα οὕτω συζευγνῦσα εὐθεῖα, ὡς καὶ διὰ τοῦ ἐν αὐτῇ κέντρου διήκειν, ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας ἐστί. Τῆς δὲ δὴ σφαίρας περὶ τὸ ἑαυτῆς κέντρον ὁπωσοῦν περιδινουμένης, ἕκαστον τῆς ἐπιφανείας μέρος, τὴν ἴσην ἐπέχον ἕτερον αὐτῆς μέρος θέσιν ἐπικαταλαμβάνει διαδεχόμενον· πᾶσά τε ἡμιδιάμετρος, τὴν ἴσην ἑτέρα τις ἡμιδιάμετρος ὡσαύτως. Ἥ τε σφαῖρα τέως αὐτὴ ἑαυτῇ ἐφαρμόζει, ὅπως ἂν περὶ τὸ κέντρον τὸ ἴδιον περιστρέφοιτο.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ϛ'.

§. 577. Ἃ τοίνυν περὶ τῆς διαμέτρου ΑΓ τῆς σφαίρας παρατετήρηται, καὶ περὶ πασῶν αὐτῆς κατατομῶν, διὰ τῶν ἐπὶ τῆς εἰρημένης διαμέτρε καθέτων ἐπιπέδων, αὐτὰ δὴ ταῦτα ἀληθεύσει, καὶ περὶ ὁιασδηποτῦν ἄλλης διαμέτρε λεγόμενα. Ἀμέλει τοι, ὅπως ἂν καὶ κατατμηθείη δι᾽ ἐπιπέδε ἡ σφαῖρα, κύκλος ἀεὶ ἀνακύπτει, ὃ τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς εὐθείας, τῆς καθέτε ἐφεςώσης ἀπὸ τῦ τῆς σφαίρας κέντρε, ἐπὶ τὸ τῦ κύκλε ἐπίπεδον. Ἐπειδὴ δὲ ἡ τὰ κέντρα ταῦτα ἐπιζευγνῦσα εὐθεῖα, τό, τε τῆς σφαίρας καὶ τὸ τῦ κύκλε, οἷαι ΗΔ, ΗΕ, ὐδὲν ἀλλ᾽ ἡ τῦ κύκλε ἐςὶν ἡ ἀπὸ τῦ κέντρε τῆς σφαίρας ἀπέςασις, ἔςαι ἀληθὲς ἐν γένει φάναι, ἅπαντα τὸν ἐκ κατατομῆς τῆς σφαίρας ἀπογενόμενον κύκλον τοσύτῳ μείζονα τυγχάνειν, ὅσῳ δὴ ἐλάσσων ἡ τύτε ἀπὸ τῦ κέντρε τῆς σφαίρας ἀπόςασις.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ.

§. 578. Δύο δὲ κύκλοι ὧν τὰ ἐπίπεδα διὰ τῦ κέντρε τῆς σφαίρας δίεισιν, ἀλλήλοις ἴσοι εἰσί. Πίπτει γὰρ ἑκατέρε τὰ κέντρα ἐπὶ τῦ τῆς σφαίρας κατὰ ταὐτό. Αἵτε τῶν κύκλων ἡμιδιάμετροι ταῖς τῆς σφαίρας εἰσὶν αἱ αὐταί. Καὶ ἐν γένει ἂν ὁ κύκλος, ὃ τὸ ἐπίπεδον διὰ τῦ κέντρε δίεισι τῆς σφαίρας, ἁπάντων τῶν ἐκ κατατομῆς τῆς αὐτῆς σφαίρας δυναμένων ἀνακύψαι κύκλων ὁ μέγιςος ἐςίν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 579. Ἡ διάμετρος ΑΓ Ἄξων καλεῖται τῶν κύκλων, ὃς αἱ ἐπ᾽ αὐτῇ κάθετοι ΔΒ, ΕΖ, συνάμα τῷ ἡμικυκλίῳ ΑΒΓ συμπεριαγόμεναι καταγράφυσι· καὶ δὴ καὶ τῦ ἡμισφαιρίε αὐτῦ, ὅπερ ἐκ περιαγωγῆς τῦ ΑΗΘ τεταρτημορίε συνίςαται. Τὰ δὲ τῦ ἄξονος πέρατα Α καὶ Γ, τῶν αὐτῶν τε κύκλων οἱ Πόλοι, καὶ τῆς τῦ ἡμισφαιρίε βάσεως, ἣν ἡ περιαγομένη ΗΘ καταγράψειεν.

ΠΟΡΙΣ-

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 580. Ὁ δὲ ἄξων διὰ τῶν κέντρων διατείνει τῶν κύκλων οἷς ἀνήκων ἐστὶ, καὶ τοῖς κατ' αὐτοὺς ἐπιπέδοις ἐφέστηκε κάθετος. Καὶ πάντες ἄρα οἱ τῆς σφαίρας κύκλοι, ὧν ἄξων ὁ αὐτὸς, παράλληλοι εἰσὶν (§. 519.). Ἐπειδὴ δὲ τῆς ΔΒ περὶ τὸν ἄξονα ΑΓ περιαγομένης, ἡ τοῦ σημείου Β ἀπόστασις ἀπὸ τῶν τοῦ κύκλου (οὗ τὴν περιφέρειαν τὸ Β τῇ τοιᾷδε περιαγωγῇ καταγράφει) πόλων Α καὶ Γ, οὐδόλως ἀμείβεται, ἔνθεν τοι καὶ ἐπὶ τῆς κατὰ τὴν σφαῖραν ἐπιφανείας, περὶ τὸν ἕτερον τῶν πόλων Α ἢ Γ, δυνατὸν ὡσαύτως τὴν περιφέρειαν καταγραφῆναι, καθ' ὃν δὴ τρόπον καὶ ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου περὶ τὸ δοθὲν κέντρον κύκλος καταγράφεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 581. Ἐὰν τοῦ ἀπὸ ἡμισφαιρίου τομέως Σχ. 147.
ΑΒΓΔ, καὶ τοῦ ἀπὸ ὀρθοῦ κυλίνδρου ΕΖΗΘ, ὁμοιαί τε καὶ ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν αἱ βάσεις ΒΓΔ, ΖΗΘ· ἢ δὲ τούτων καὶ ὕψη τὰ αὐτὰ. ΑΒ, ΕΖ, ἔσται ὁ τοῦ ἡμισφαιρίου τομεὺς, πρὸς τὸν τοῦ κυλίνδρου, ὡς 2 πρὸς 3.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τῶν δὲ γὰρ δὴ τῶν στερεῶν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΧΨ καθεστώτων, ἔστω ΙΚΛΜ τομεὺς κώνου ὀρθοῦ, οὗ ἡ βάσις ΙΚΛ, τῇ βάσει παραπλησίως ΒΓΔ, ἢ ΖΗΘ, ὁμοία τε εἴη καὶ ἴση, τό, τε ΙΜ ὕψος, ἴσον τῷ ὕψει ΑΒ, ἢ ΕΖ, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΧΨ κάθετον. Ἔστω δὲ παρὰ ταῦτα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΧΨ, ὀρθὸν ἐφεστὼς ἐπίπεδον τὸ ΝΟ· ἐν ᾧ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΠΟ, ἥτις ἂν εἴη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΧΨ, ἴση τῷ ὕψει ΑΒ, καταγραφήτω τετράγωνον τὸ ΝΠΟΦ, καὶ ἐν τῷ τετραγώνῳ ἐγγεγράφθω κύκλου τεταρτημόριον τὸ ΝΟΠ. Ἔςαι τοίνυν ἡ ΝΠ ἐπὶ τȣ̃ ΧΨ ἐπιπέδȣ κάθετος, καὶ δὴ καὶ = ΑΒ. Ἤδη μὲν ȣ̃ν τετμήσθω τὰ ςερεὰ ταῦτα, δι' ἐπιπέδȣ παραλλήλȣ ταῖς αὐτῶν βάσεσι, τȣ̃ καὶ τὸ ΝΟ ἐπίπεδον κατὰ τὴν ΡΤ τέμνοντος. Καὶ ἔσονται δὴ αἱ κατατομαὶ δβγ, ηζθ, λικ, ἅπασαι ἀλλήλαις ὅμοιαι. Καὶ παρὰ ταῦτα καὶ βδ = ΡΣ, καὶ ζθ = ΡΤ = ΠΟ = ΠΣ, καὶ ιλ = ΡΥ = ΠΡ. Καὶ γὰρ βδ, ζθ, ιλ, ἤτοι ΡΣ, ΠΣ, ΠΡ, εἰσὶ πλευραὶ τῶν τομῶν ὁμόλογοι. Ἐπειδὴ τοίνυν τὸ ΠΡΣ τρίγωνον ἐςὶν ὀρθογώνιον, ἔςαι $\Pi\Sigma^{\tau} = P\Sigma^{\tau} + \Pi P^{\tau}$, (§. 483.). Τὸ δ' αὐτὸ ἀληθὲς καὶ ἣν ἀντὶ τῶν τετραγώνων, οἱαδήποτε σχήματα ὅμοια τεθείη, ὧν ἂν αἱ ὁμόλογοι τῶν πλευρῶν εἰσιν ΠΣ, ΡΣ, ΠΡ (§. 493.)· ἔςαι γὰρ ἁπανταχȣ̃ ηζθ = δβγ + λικ. Κἀντεῦθεν τὸ ςερεὸν ΕΖΗΘ, ἴσον τοῖς δυσὶ ςερεοῖς ΑΒΓΔ, καὶ ΙΚΛΜ ἅμα ληφθεῖσιν (§. 523.). Ἀλλαμὴν τὸ ΙΚΛΜ τριτημόριον ἐςὶ τȣ̃ ΕΖΗΘ (§. 567.), τὸ ἄρα ΑΒΓΔ, τριτημορίοις δυσὶ τȣ̃ ΕΖΗΘ ἴσον ἔςαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 582. Καὶ τὸ ἄρα ἡμισφαίριον ἴσον ἔςαι, δυσὶ κυλίνδρȣ τριτημορίοις, ȣ̃ ἡ μὲν βάσις τῇ τȣ̃ ἡμισφαιρίȣ βάσει, τὸ δ' ὕψος τῷ ὕψει, τȣτέςι τῇ ἡμιδιαμέτρῳ ἴσον. Ἤτε σφαῖρα ἴση δυσὶ τριτημορίοις κυλίνδρȣ, ȣ̃ βάσις μὲν τῶν ἐπὶ τῆς σφαίρας κύκλων ὁ μέγιςος, ὕψος δὲ ἡ διάμετρος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 583. Τόνδε τὸν τρόπον ἐπὶ τȣ̀ς κυλίνδρȣς, ἢ τὰ τῶν κυλίνδρων μέρη, τὰ τȣ̃ τοιȣ̃δε γένȣς ςερεὰ ἀποκαθιςάμενα, καὶ τοῖς κυλίνδροις αὐτοῖς, ἢ τοῖς τȣ́των μέρεσιν εὐμαρῶς παραβάλλεται. Ἐπειδὴ γὰρ ἐν γένει ἐςὶν, $\frac{2}{3}A : \frac{2}{3}\alpha = A : \alpha$, ὁ,τίποτ' ἂν σημαίνῃ τὰ Α, α, (§. 164.), ἔςαι τὰ ἡμισφαίρια

ἐν

ἐν λόγῳ συνθέτῳ ἐκ τῶν λόγων τῶντε βάσεων αὐτῶν καὶ τῶν ὑψῶν· τουτέστιν ἐκ τοῦ διπλασίονος λόγου τῶν ἡμιδιαμέτρων, καὶ ἐκ τοῦ ἁπλοῦ τῶν ἡμιδιαμέτρων αὐτῶν Ἡλίκος ὁ τῶν ἡμιδιαμέτρων, ἢ τῶν διαμέτρων λόγος ἐστὶν ὁ τριπλάσιων (§. 551.). Ἐν τῷ αὐτῷ δὲ λόγῳ ἔσονται καὶ αἱ σφαῖραι αἱ ὁλοχερεῖς· οἵτε τῶν ἡμισφαιρίων τομεῖς, οἷς αἱ βάσεις ὅμοιαι, καὶ οἱ τῶν σφαιρῶν, οἱ ἐκ δυοῖν ἡμισφαιρικῶν τομέων συγκείμενοι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 584. Ἐν γένει δὲ τῶν τριῶν στερεῶν, ἃ τὸ σχῆμα παρίστησι, διὰ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου τεμνομένων, τὸ Εζηθ τοῖς δυσὶν Αβγδ + Ιικλ ἴσον ἐστί. Καὶ ζΖΗΘ = βΒΓΔ + ικλΜ. Καὶ γὰρ καὶ τοῦτο ἐκ τῆς ἀποδείξεως ἑπόμενον ὡσαύτως ἐστίν.

TMHMA

ΤΜΗΜΑ ΔΕΚΑΤΟΝ
ΠΕΡΙ ΤΙΝΩΝ
ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ
ΚΑΜΠΥΛΩΝ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 585.

Σχ. 148. Η τῦ ὀρθῦ ἐπιφάνεια κυλίνδρυ ΑΒΓ, ἴση ἐςὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΔΕΖ, ὗ τὸ μὲν ὕψος ΔΕ, τῷ τῦ κυλίνδρυ ὕψει ΑΒ, ἡ δὲ βάσις ΕΖ, τῇ κατὰ τὴν βάσιν τὴν ἐκείνυ περιφερείᾳ ΒΓ, ἴση ἐςίν.

ΔΕΙΞΙΣ.

Συμπιπτέσης γὰρ τῆς εὐθείας ΔΕ, οἱαδήποτε τῶν ἐπὶ τῆς τῦ κυλίνδρυ ἐπιφανείας εὐθειῶν, οἷον τῇ ΑΒ, παραλλήλῳ ὔσῃ τῷ ἐν αὐτῷ ἄξονι, ἐὰν τυλίσσεσθαί πως τὸ ὀρθογώνιον περιβαλλόμενος ὁ κύλινδρος νοηθῇ, τὸ ὀρθογώνιον ὗτω διακυρτωθὲν τῇ τῦ κυλίνδρυ ἐπιφανείᾳ προσεφαρμόσει.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 586. Σωζομένυ δὲ τῦ ὕψυς ΔΕ = ΑΒ, ἐὰν ἡ ΕΗ, μέρει τῆς περιφερείας τῷ ΒΘ, ἴση ληφθῇ, ἀχθῶσιτε ἡ μὲν ΗΙ τῇ ΕΔ, ἡ δὲ ΘΚ τῇ ΑΒ παράλληλοι, τὸ ὀρθογώνιον ΔΗ, τῇ ἐπιφανείᾳ ΑΒΘΚ ἴσον ἔσεσθαι, τὸν αὐτὸν τρόπον ὑποσιωαφθήσεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ. 149. §. 587. Ἡ τῦ ὀρθῦ ἐπιφάνεια κώνυ ΑΒΓ, ἴση ἐςὶ τῷ τριγώνῳ ΔΕΖ, ὗ ὕψος

μεν

μὲν τὸ ΔΕ ἴσον τῇ τȣ̃ κώνȣ πλευρᾷ ΑΒ, ἡ δὲ βάσις ΕΖ, τῇ ἐκείνȣ περιφερείᾳ ΒΓ.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔςω ΗΘΙ τομεὺς τȣ̃ κύκλȣ, ȣ̃ ἡ ἡμιδιάμετρος ΗΘ = ΔΕ, ἥτε περιφέρεια ΘΙ = ΕΖ· ἔςαι ȣ̃ν ΗΘ ἴση καὶ τῇ τȣ̃ κώνȣ πλευρᾷ ΑΒ· τό, τε τόξον ΘΙ, ἴσον τῇ περιφερείᾳ ΒΓ. Ὁ δὲ τομεὺς ΗΘΙ, ἴσος τῷ τριγώνῳ ΔΕΖ (§. 470.). Συμπιπλέσης τοίνυν τῆς ΗΘ τῇ ΑΒ, ἐὰν ὁ κῶνος περιτυλιχθῇ τὸν τομέα, ἐφαρμόσει δήπȣ ἡ τȣ̃ τομέως ἐπιφάνεια τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ κωνικῇ. Ἄρα καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῇ τȣ̃ κώνȣ ἐπιφανείᾳ ἴσον ἔςαι. Σχ. 150.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 588. Ἐὰν ὁ ΑΒΓ κῶνος δι᾽ ἐπιπέδȣ τȣ̃ βγ παραλλήλȣ τῇ βάσει τμηθῇ, καὶ γενομένης τῆς Δε = Αβ, ἀχθῇ εζ παράλληλος τῇ πλευρᾷ ΕΖ, γενήσεται τὸ Δεζ τρίγωνον, ἴσον τῇ τȣ̃ κώνȣ ἐπιφανείᾳ Αβγ. Ἐπειδὴ γὰρ ἡ τῆς βάσεως περιφέρεια ΒΓ, πρὸς τὴν κατὰ τὴν τομὴν περιφέρειαν βγ, ὡς ΑΒ πρὸς Αβ (§. 561.), καὶ ΕΖ : εζ = ΔΕ : Δε = ΑΒ : Αβ, ἔςαι καὶ ΕΖ : εζ = ΒΓ : βγ. Ἀλλαμὴν ΕΖ = ΒΓ. Ἄρα καὶ εζ = βγ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 589. Ἐντεῦθεν τοι, καὶ ἀπὸ τῶν ἴσων ἐπιφανειῶν ἴσων ἀφαιρεθεισῶν, φανερόν, ὡς ἡ τȣ̃ ἀκρωτηριασθέντος κώνȣ ἐπιφάνεια ΒβγΓ, ἴση τῷ τετραπλεύρῳ εΕΖζ. Δίχα ȣ̃ν τετμήσθω ἡ εΕ κατὰ τὸ Μ, καὶ ἀχθήτω ΜΝ τῇ πλευρᾷ ΕΖ παράλληλος, ἡ τὴν πλευρὰν ζΖ κατὰ τὸ Ν δίχα τέμνȣσα. Πληρωθήτω δὲ τὸ ὀρθογώνιον ΕΗ, ὃ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων ζΗΝ, ΖηΝ, ἴσον ἔςαι τῷ τετραπλεύρῳ εΕΖζ· ἐκ τȣ̃ ἀκολȣ́θȣ δὲ καὶ τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ βΒΓγ. Ἀλλὰ γὰρ ἐὰν καὶ βΒ

δίχα

δίχα τμηθῇ πρὸς τῷ Κ, ἔσαι καὶ ΑΚ = ΔΜ· κἀντεῦθεν καὶ ἡ περιφέρεια ΚΛ, ἡ τῆς διὰ τȣ̃ Κ κατατομῆς, τῆς τῇ βάσει παραλλήλȣ, ἴση τῇ εὐθείᾳ ΜΝ. Ἔσιν ἄρα ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια ἴση τῷ ὀρθογωνίῳ ΕΗ, ȣ̃ ὕψος μὲν τὸ βΒ, βάσις δὲ ἡ εὐθεῖα, ἡ τῇ περιφερείᾳ ΚΛ ἴση.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ·

§. 590. Ἀχθείσης ἐπὶ τῆς τȣ̃ ὀρθȣ̃ κώνȣ ἐπιφανείας, ὡς ἔτυχεν εὐθείας τῆς ΑΠ, ἐὰν ΕΦ ληφθῇ ἴση τῇ περιφερείᾳ ΒΠ, καὶ τὰ λοιπὰ ὡσαύτων γένηται, τὸ ΔΕΦ τρίγωνον, τῇ ἐπὶ τȣ̃ κώνȣ ἐπιφανείᾳ ΑΒΠ ἴσον ἔσαι· καὶ τ' ἄλλα ὅσα ἐντεῦθεν ὑποσωῆκίαι, τῇ αὐτῇ συλλογισικῇ ἐφόδῳ ἧπερ ἐχρησάμεθα, συμπερανθήσεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ·

Σχ. 151. §. 591. Ὁ ὀρθὸς κῶνος, ὁ διὰ τομῆς παραλλήλȣ τῇ βάσει ἀκρωτηριασθεὶς, ȣ̃ τὴν ἐπιφάνειαν ἐνταῦθα διεσκεψάμεθα, καὶ διὰ τῆς τȣ̃ τετραπλεύρȣ περιελίξεως ἡμῖν ἀναφύεται. Δεῖ δὲ τȣ̃ τετραπλεύρȣ ΑΒΖΕ, τὰς μὲν κατὰ τὸ Α καὶ Β γωνίας ὀρθὰς εἶναι· τὰς δὲ λοιπὰς Ε, Ζ, πλαγίας. Περιελισσομένȣ γὰρ τȣ̃ τοιȣ̃δε τετραπλεύρȣ περὶ τὴν ΑΒ, γίνονται αἱ ΒΖ, ΑΕ, βάσεις τῶν ὀρθῶν κώνων, ὧν ἄξων κοινὸς ἡ ΒΑ προεκβληθεῖσα. Καὶ καταγράφεται ἄρα, ἡ τȣ̃ ἠκρωτηριασμένȣ ἐπιφάνεια κώνȣ, τῷ περιελιγμῷ τῆς ΕΖ.

ΘΕΩΡΗΜΑ·

Σχ. 15. §. 592. Ἐὰν ἐπὶ τȣ̃ παραλληλογράμμȣ ΑΒΓΔ, πλαγίατις ὡς ἔτυχεν ἡ ΕΖ ἀχθῇ, καθ' ἧς τὸ μέσον Η, κάθετος πίπλῃ ἡ ΗΘ ἀπὸ τȣ̃ Θ σημείȣ, τῆς πλευρᾶς ΑΒ προεκβληθείσης· περιελιχθῇ δὲ τό, τε ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, καὶ τὸ τετράπλευρον ΑΒΖΕ,

ΑΒΖΕ, περὶ τὸν κοινὸν ἄξονα ΑΒ, ἔςαι ἡ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, ἣν ἡ ΔΓ καταγράφει, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τὴν κωνικὴν, ἣν ἡ ΕΖ καταγράφει διὰ τῆς αὐτῆς περιελίξεως, ὡς ΒΓ πρὸς ΗΘ.

ΔΕΙΞΙΣ·

Ἀχθήτω ΗΙ τῷ ΑΒ ἄξονι κάθετος, ἥτις αὐτὸν δίχα τεμεῖ· αχθήτω δὲ καὶ ΕΚ τῷ αὐτῷ παράλληλος. Καὶ ἔςαι ΕΚ = ΑΙ. Ἐπεὶ δὲ αἱ ὑπὸ ΕΗΘ, ΕΚΗ ὀρθαὶ, ἔςαι ΕΗΚ + ΚΗΘ = ΚΗΘ + Θ. Ἔνθεντει ΕΗΚ = Θ· τό, τε ὀρθογώνιον τρίγωνον ΕΗΚ, τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΗΘΙ ὅμοιον. Ὅθεν ΙΗ : ΗΘ = ΕΚ : ΕΗ = 2 ΕΚ : 2 ΕΗ = ΑΒ : ΕΖ. Τοιγαρῦν ἔςω Π περιφέρεια, ἣν, τῦ σχήματος περιελισσομένυ, καταγράφει τὸ σημεῖον Η, καὶ Φ ὁμοίως περιφέρεια, ἣν τῷ αὐτῷ περιελιγμῷ τῦ σχήματος τὸ σημεῖον Γ καταγράφει. Καὶ ἔςαι Π : Φ = ΙΗ : ΒΓ (§. 431.). Ἐπειδὴ τοίνυν ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἣν ἡ ΕΖ περιελισσομένη καταγράφει, ἴση ἐςὶν ὀρθογωνίῳ ὖ βάσις μὲν ἡ Π, ὕψος δὲ τὸ ΕΖ (§. 589.). Ἡ δὲ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, ἣν περιελισσομένη καταγράφει ἡ ΔΓ, ἴση ἐςὶν ὀρθογωνίῳ, ὖ βάσις μὲν ἡ Φ, ὕψος δὲ τὸ ΓΔ (§. 585.)· ἔςαι δὴ καὶ ἡ κυλινδρικὴ πρὸς τὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν ἐν λόγῳ συνθέτῳ, ἐκ τῶν λόγων Φ : Π, καὶ ΔΓ : ΕΖ· ἢ ἐκ τῶν λόγων ΒΓ : ΙΗ, καὶ ΑΒ : ΕΖ· ἢ κἀκ τύτων, ΒΓ : ΙΗ, καὶ ΙΗ : ΗΘ· τυτέςιν ὡς ΒΓ πρὸς ΗΘ· ὕτος γὰρ ὁ λόγος διὰ τῆς συνθέσεως ἀναφύεται, τῦ ὀρῦ ΙΗ παραλειφθέντος (§. 181.).

ΘΕΩΡΗΜΑ·

§. 593. Ἐγγραφέντος ἐν τῷ τετραγώνῳ ΑΒΓΔ τεταρτημορίυ κύκλυ, ἀχθεισῶν τῦ Σχ. 152

σῶν τῦ

σῶντε δύο εὐθειῶν ΓΖ, ΗΘ παραλλήλων τῇ βάσει ΒΓ, καθ' ἃςτινασᾶν ἀπ' αὐτῆς ἀποςάσεις· Ἐὰν τᾶ τεταρτημορίε συνάμα τῷ τετραγώνῳ περὶ τὴν ΑΒ περιελιχθέντος, ἡ μὲν ΕΗ σφαιρικὴν καταγράψῃ ἐπιφάνειαν. ἡ δὲ ΖΘ κυλινδρικὴν, αἵδε αἱ ἐπιφάνειαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ληφθήτω ἀντὶ τᾶ τεταρτημορίε, τὸ τεταρτόν τινος χήματος εὐθυγράμμε κανονικᾶ, ἅπερ ἂν δύο τῶν γωνιῶν πίπτοιεν κατὰ τὰ Ε καὶ Η. Ὑποσημαινέτω δὲ Π μὲν, τὴν τῶν πλευρῶν τᾶ τοιᾶδε χήματος ἀπὸ τᾶ κέντρε Β ἀπόςασιν· τὸ δὲ Ρ τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἢ γᾶν, τὴν τᾶ κύκλε, ὥπερ ἂν τὸ τοιόνδε χῆμα ἐγγεγράφθαι ἔχοι, ἡμιδιάμετρον. Ἀχθήτωσαν δὲ καὶ ΙΚ, ΛΜ τῇ πλευρᾷ ΒΓ παράλληλοι, διὰ πασῶν τῶν τᾶ πολυγώνε γωνιῶν, τῶν μεταξὺ Ε καὶ Η. Ἐὰν ἂν τὸ τοιόνδε τᾶ κανονικᾶ χήματος μέρος, συνάμα τῷ τετραγώνῳ περὶ τὴν ΑΒ περιελιχθῇ, καταγράψωσι δὲ τῶν πλευρῶν ἑκάςη ΕΙ, ΙΛ, ΛΗ ἐπιφανείας κωνικὰς, αἱ δὲ ΖΚ, ΚΜ, ΜΘ, ἑκάςη κυλινδρικὰς, ἔσαι τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν ἑκάςη, πρὸς ἑκάςην τῶν κυλινδρικῶν, τὴν ἐκείνῃ ἀντιςοιχᾶσαν, ὡς Π πρὸς Ρ, (§. 592.). Τοιγαρᾶν καὶ πᾶσαι αἱ κωνικαὶ ἐπιφάνειαι, τετέςιν ἡ ἐπιφάνεια, ἣν τὸ μέρος τᾶ πολυγώνε ΕΗ περιελιχθὲν καταγράψει, πρὸς πάσας τὰς ἐπιφανείας τὰς κυλινδρικὰς, τετέςι πρὸς ἣν ἡ ΖΘ ἅμα περιελισσομένη, ἐπιφάνειαν καταγράψει, ὡς Π πρὸς Ρ (§. 174.), ὅσαι ποτ' ἂν ὦσιν αἱ τᾶ πολυγώνε πλευραὶ, καὶ ὅσος ποτὲ τέτων ἀριθμὸς μεταξὺ τῶν Ε καὶ Η σημείων πίπτοι. Ἀλλὰ γὰρ τᾶ ἀριθμᾶ τῶν κατὰ τὸ εἰρημένον κανονικὸν χῆμα πλευρῶν διώκως αὔξοντος, ἅμα καὶ ἡ Π ἀπόςασις

συναύ-

συναύξουσα, τέως δή, ἐν ᾧ αἱ πλευραὶ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ συγχέονται, ἴση καθίσταται τῇ ἡμιδιαμέτρῳ Ρ (§. 398.)· τῆς ἄρα τεταρτημορικῆς ἤδη ἐπιφανείας ΑΕΓ ἡ ἀπὸ τοῦ ΕΗ τόξου καταγραφομένη ἐπιφάνεια, τῇ ἅμα ἀπὸ τοῦ ΖΘ μέρους τῆς τοῦ τεραγώνου πλευρᾶς συγκαταγραφομένῃ διὰ τοῦ αὐτοῦ περιελιγμοῦ, ἡ αὐτὴ ἔσται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 594. Ἡ ἄρα τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια, ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ὀρθοῦ κυλίνδρου, οὗ ἡ μὲν βάσις τῇ βάσει τοῦ ἡμισφαιρίου, τὸ δ' ὕψος τῇ κατ' αὐτὸ ἡμιδιαμέτρῳ, ἴσον ἐστίν. Ἡ δὲ ἐπιφάνεια τῆς ὁλοσχεροῦς σφαίρας, ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ὀρθοῦ κυλίνδρου, οὗ βάσις μὲν ὁ κατὰ τὴν σφαῖραν μέγιστος κύκλος, ὕψος δὲ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 595. Κἀντεῦθεν ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια, ἴση ἔσται ὀρθογωνίῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τῆς κατὰ τὴν σφαῖραν διαμέτρου περιφέρεια, ὕψος δὲ ἡ αὐτὴ διάμετρος (§. 585.). Ἐπειδὴ δὲ τῶν ἐπὶ τῆς σφαίρας κύκλων ὁ μέγιστος, ἴσος ὀρθογωνίῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ περιφέρεια, ὕψος δὲ τὸ τῆς διαμέτρου τεταρτημόριον (§. 469.)· ἔσται δὴ ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια, πρὸς τὸν ἐπ' αὐτῆς μέγιστον κύκλον, ὡς 4, πρὸς ἕν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 596. Τῇ δὲ πρὸς ἀλλήλας παραθέσει, εἰσὶν αἱ δυοῖν σφαιρῶν ἐπιφάνειαι, ὡς οἱ ἐν αὐταῖς μέγιστοι τῶν κύκλων· ἔνθεν τοι καὶ ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν διαμέτρων, ἤτοι ὡς τὰ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΤΟΥ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ.

ΤΜΗΜΑ Α΄.
ΠΕΡΙ ΤΗΣ
ΚΑΘΟΛΟΥ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 597.

Εὰν ἡ ποσότης ἔκλασιν ἔχουσα, ἢ ἄλλη ἡτισοῦν ἡ Π, πρὸς ἄλλην ποσότητα ἤτοι δοθεῖσαν, ἢ πρὸς τὸ δοκοῦν ληφθεῖσαν τὴν Μ, ὡς ἀριθμὸς Α πρὸς μονάδα τὴν αὐτοῦ, εἰρήσεται δὴ ἡ ποσότης Π διὰ τοῦ ἀριθμοῦ Α, παρίςασθαι, ἢ ἐκφέρεσθαι. Τὴν δὲ Μ ποσότητα, δι' ἧς ἡ Π οὕτω δηλοῦται, ἰδιαιτέρα σημασίᾳ Μέτρον καλοῦμεν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 598. Εἴωθε γὰρ τὸ τοῦ μέτρου ὄνομα, καὶ κατ' ἄλλην ἐνδοχὴν λαμβάνεσθαι, ὡς ὅτε μέτρον τῆς Π ποσότητος λέγεται, οἱαδήποτε ποσότης Ν, ἡ πρὸς δοθεῖσαν τινὰ ἐςὶν, ὡς ἐςιν ἡ Π αὐτὴ πρὸς τὴν Μ φέρε, καὶ ταύτην δοθεῖσαν. Τοιῷδε λόγῳ τὸ μέρος τῆς περὶ τὴν τῆς γωνίας κορυφὴν καταγραφομένης κυκλικῆς περιφερείας, τὸ ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῶν ἐκείνης ἀπολαμβανόμενον, λέγεται

τῆς

τῆς γωνίας εἶναι τὸ μέτρον· τὸ γὰρ τηλικοῦτον τόξον ἐστὶ πρὸς τὸ τεταρτημόριον, ὡς ἡ γωνία, ἧς ταῖς πλευραῖς ἐναπείληπται, πρὸς γωνίαν ἔχει τὴν ὀρθήν (§. 455. 456.). Ἐπειδὰν οὖν τούτῳ χρώμεθα, ἔστι δὴ τὸ τεταρτημόριον τῶν τοιῶνδε μέτρων οἷα τις ῥυθμὸς, ἢ ὅρος· παρὰ Λατίνοις Modulus.

§. 599. Ὁ δ' ἐνταῦθα μέτρον καλεῖται, κατὰ τὸ γένος τῆς ἐκμετρηθησομένης ποσότητος ποικίλλεται. Τὸ γὰρ μέτρον ὁμογενὲς ἀεὶ τῇ ποσότητι ἐξ ἀνάγκης ἐστίν· ἡλίκον ἀμέλει τοι αὐτῇ, ἢ μέρει αὐτῆς, ὅλον, ἢ μέρος, ἔχειν καὶ ἐξισοῦσθαι. Καὶ γραμμὴ τοιγαροῦν διὰ γραμμῆς μετρηθήσεται, καὶ γωνία διὰ γωνίας, καὶ ἐπιφάνεια δι' ἐπιφανείας, καὶ στερεὸν διὰ στερεοῦ, καὶ βάρος διὰ βάρους, καὶ τὰ ἄλλα ὁμοίως.

§. 600. Ὁ δὲ ἀριθμὸς Α ὁ τὴν Π ποσότητα παριστὰς, ἤτοι διαμετρήσει εὑρίσκεται, ἢ ἐξ ἄλλων ἀριθμῶν ἐπιφέρεται. Ὁ δὲ λόγος τοῦ διαμετρεῖν, ὁ κατὰ παραβολὴν γοῦν τοῦ μέτρου πρὸς τὸ μετρητὸν γινόμενος, οὐδεμίαν φέρει δυσχέρειαν, καὶ κατ' ἀρχὰς ἡμῖν τῶν ἀριθμητικῶν (§. 3.) τεθεώρηται. Χώραν δ' ἔχει πρὸ πάντων ἔντε γραμμαῖς εὐθείαις, καὶ τῶν καμπύλων ὅσαις εὐθείας ἴσας ἀποδιδόναι ἐνδέχεται.

§. 601. Ἐπεὶ δὲ δεῖ καὶ τὸ μέτρον τὰ πολλὰ διαιρεῖν, ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μορίων, εἰς ἅπερ ἂν αὐτὸ διαιρεθείη, τὸ προσφυὲς ἤρτηται τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν, οἷς ἡ Π ποσότης, ἢ τὸ ταύτης μέρος ἐκδηλωθήσεται. Τό,τε προσφυὲς οὕτω καὶ κατάλληλον ἐν τοῖς κλάσμασι διαιρέσει μάλιστα τοῦ μέτρου θηρωμένοις, ἀριθμὸν μορίων ληπτέον, τὸν μήτε πολὺν καθ' ἑαυτὸν, καὶ ὑπὸ ἄλλων ἀριθμῶν ἐλασσόνων, ὡς οἷόντε πλείστων ὑποδιαιρούμενον· τοιοῦτοι δὲ οἱ ἀριθμοὶ 12, 30, 60, καὶ οἱ παραπλήσιοι. Ἔστι γὰρ $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$· καὶ $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$· καὶ $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$·

καὶ $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$· καὶ $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$· καὶ $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$· καὶ $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$. Ἐὰν δὲ μείζων παραληφθῇ τῶν μορίων ἀριθμὸς, οἷον 30, ἢ 60, καὶ πλείονα ἔτι κλάσματα διὰ τῶν ἀριθμῶν τῶν μορίων τοῦ μέτρου ἐκδηλωθήσονται. Ἀλλὰ καὶ τῶν μερῶν ἕκαστον ὡσαύτως ἄντις περαιτέρω ὑποδιέλοι, εἰς ὃ ἂν εἰς μέρη ἀποχρώντως ἔχοντα λεπτότητος γένοιτο.

§. 602. Ἐὰν δὲ, ἐπὶ τῆς τοῦ μέτρου διαιρέσεως, πρὸς τὴν τοῦ ὑπολογισμοῦ τις ἀποβλέπῃ εὐχέρειαν, ἄριστα ἂν τῇ δεκαδικῇ προσχρήσαιτο διαιρέσει, εἰς δέκα μὲν τὸ μέτρον διελόμενος μόρια, εἰς δέκα δὲ τούτων ἕκαστον τῶν μορίων δεύτερα, εἰς δέκα δὲ καὶ τούτων ἕκαστον τρίτα, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Οἱ γὰρ, ἐκ τοῦ ὧδε διαιρεθέντος μέτρου ἀριθμοὶ, οἷς αἱ ποσότητες παρίστανται, οὐδὲν ἄλλο, παρὰ τὰ δεκαδικὰ ταῦτα, παρεισάγοντες κλάσμα, ἐπισήμως τὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ ἐπιτέμνουσι. Πηλίκον δ᾽ ἐὰν ᾖ τὸ μέτρον τὸ ὁλοσχερὲς, ὃ οἱ πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς τῶν ἁπλῶν μονάδων ἀριθμοὶ ὑποσημαίνουσι, τὰ τοῦ μέτρου μόρια, τὰ ὑπὸ τῶν ἐφεπομένων τῇ τοιᾶδε ὑποδιαστολῇ ἀριθμῶν ἐκδηλούμενα, ἐπίσης ἐστὶν εὔγνωστα· καὶ δι᾽ αὐτῶν ὑπολογισμὸς ἅπας, εὐμαρῶς ὡς οἷόν τε καὶ προχείρως διεκπεραίνεται.

§. 603. Ἀμέλει τοι δυεῖν γραμμῶν ὑπὸ τῷ αὐτῷ μέτρῳ, ἐν ἀριθμοῖς παρισταμένων, δοθήσεται διὰ μὲν τοῦ τῶν ἀριθμῶν κεφαλαίου, τὸ τῶν γραμμῶν κεφάλαιον, διὰ δὲ τῆς διαφορᾶς ἡ διαφορά· οἷον ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ 13, 523, καὶ 6, 71 γραμμὰς δύο ὑποσημαίνωσιν, ἔσται τούτων τὸ μὲν κεφάλαιον, ἴσον γραμμῇ, τῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 20, 233 ὑποδηλουμένῃ· ἡ δὲ διαφορὰ, ἴση τῇ διὰ τοῦ 6, 813.

§. 604. Τριῶν δὲ γραμμῶν δι᾽ ἀριθμῶν δηλουμένων, εὑρεθήσεται ἡ τετάρτη ἀνάλογον, τῇ αὐτῇ μεθόδῳ, ᾗ καὶ τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων ὁ τέταρτος ἀνάλογον ἐξευρίσκεται (§. 175.). Οἷον, ἐὰν οἱ τὰς

δοθει-δοθείσας γραμμὰς παρισῶντες ἀριθμοὶ ὦσιν εἰδε, 13, 25· καὶ 19, 8· καὶ 17, 94, εἴη ἂν ὁ τὴν τετάρτην ἀνάλογον ἀποδιδὲς ἔτος, 26, 8.

§. 605. Ὡσαύτως καὶ γραμμὴ, ἡ μεταξὺ δυεῖν ἐν ἀριθμοῖς παρισαμένων τοῖς δε, 5, 32, καὶ 7, 14 μέση ἀνάλογος, ἀποδοθήσεται διὰ τῦ ἀριθμῦ 6, 16· ὃς μέσος ἐςὶ τῶν δοθέντων ἀνάλογος· ἤτοι τῦ ὑπ' αὐτῶν παραγομένε ἡ ῥίζα ἡ τετραγωνικὴ (§. 193.).

§. 606. Εἰώθασι δὲ τὰ πολλὰ ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν, αὐτὰς τὰς γραμμὰς ὀνομάζειν, ἢ τὰ ὁποιαδήποτε ἄλλα ποσὰ τὰ δι' αὐτῶν παρισάμενα. Προςιθέντες γὰρ ἀριθμὲς ἀλλήλοις, ἢ ἀπ' ἀλλήλων ὑφαιρέμενοι, αὐτὰς φασὶ προσαθροίζειν, ἢ διαιρεῖν τὰς γραμμὰς, ἢ τὰς οἱασδήποτ' ἄλλας ἐν ἀριθμοῖς ἐκφερομένας ποσότητας.

§. 607. Ὡσαύτως καὶ τὴν δέοι πρὸς μονάδα, ἢ δύο ἀριθμὲς εὐθείας γραμμὰς παρισῶντας 5 ἢ 7, τὸν τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν, ὁ 5 × 7, ἢ ὁ 35, τὴν τετάρτην γραμμὴν ἀποδώσει. Ταυτητοι καὶ παρὰ τὸ μόνε πολλαπλασιασμῦ δεῖν ἐνταῦθα, ἡ τετάρτη ἐκείνη τῷ δι' ἀλλήλων πολλαπλασιασμῷ τῶν γραμμῶν λαμβάνεσθαι λέγεται. Καίτοι τὸ πολλαπλασιάζειν τῦ ἀριθμῦ μόνε ἴδιον κυρίως ἐςίν.

§. 608. Ἔνθεντοι καὶ τετράγωνον ἐνίοτε ἡ γραμμὴ καλεῖται, ἡ ἀνάλογον ἔσα δυσὶν ἑτέραις, ὧν ἡ πρώτη διὰ μονάδος παρίσαται· ὁ γὰρ ἀριθμὸς δι' ἕ ἡ τρίτη αὕτη ἀποδίδοται, τετράγωνος ἐςίν· οἷον εἰ πρὸς εὐθείας ἃς οἱ ἀριθμοὶ δηλῦσιν 1, καὶ 3, τὴν τρίτην δέοι ἀνάλογον προσευρεῖν, ἐπεὶ 1 : 3 = 3 πρὸς τὴν ζητεμένην, ἡ ζητεμένη αὕτη δι' ἀριθμῦ τετραγώνε τῦ 9 ἐκδηλωθήσεται.

§. 609. Τῇ δ' αὐτῇ διανοίᾳ καὶ γραμμὴ λέγεται διαιρεῖσθαι διὰ γραμμῆς, ἡ ποσότης ὁποιαδήποτε διὰ ποσότητος. Ἐὰν γὰρ πρὸς γραμμὰς τρεῖς, ὧν τὰς μὲν δύο προτέρας οἱ ἀριθμοὶ 5, 32 καὶ 11, 4 ὑποσημαίνουσι, τὴν δὲ τρίτην ἡ μονάς, προσθηρεῖν δέῃ τὴν τετάρτην ἀνάλογον, ἐπειδὴ τὸν ἀριθμὸν 11, 4, διὰ τοῦ 5, 32 διαιρεῖν δεῖ, ἵν' ὁ 2, 14 ἀνακύψῃ, ὁ τὴν γραμμὴν ἐκείνην παραστησόμενος, τούτουγε ἕνεκα καὶ ἡ γραμμὴ αὐτή, τῇ διαιρέσει γραμμῆς διὰ γραμμῆς προϊέναι λέγεται.

§. 610. Εἰσὶ δὲ τοιοῦτοι καὶ ἕτεροι ἑρμηνείας τρόποι, οὓς ἥτε τῶν μεγεθῶν ἐν ἀριθμοῖς εἰσήγαγε δήλωσις, καὶ ἡ τῆς Ἀριθμητικῆς, ἐν τῇ ἐπιλύσει τῶν Γεωμετρικῶν προβλημάτων, προσεκύρωσε χρῆσις· οἷς ἐάν τις προσοχθίζων ᾖ, ἀντὶ τῶν ποσοτήτων οὕτος, τοὺς ἀριθμοὺς ὀνομάζων δι' ὧν ἐκεῖναι παρίστανται· ἢ καὶ ἀντὶ τῶν ἀριθμητικῶν ὅρων, ταῖς ἐκ τῆς τῶν ἀναλογικῶν διδασκαλίας φωναῖς προσχρώμενος καὶ φράσεσι, ταῖς ἐπίσης παντοίῳ γένει ποσότητος προσηκούσαις, πᾶσαν ῥᾳδίως τὴν δοκοῦσαν δυσχέρειαν ἐκ μέσου ποιήσεται.

§. 611. Ἐντεῦθεν οὖν τῆς κοινῆς τῆσδε καὶ πεπατημένης Ἀριθμητικῆς, τῇ Γεωμετρίᾳ εἰς χρῆσιν οὕτω παραληφθείσης, καινόν τι εἶδος Ἀριθμητικῆς ἐξέφυ, ἣν Καθόλου τε καὶ Γενικὴν δεόντως ἐκάλεσαν. Αὕτη δὲ οὐ δι' ἀριθμῶν προβάλλεται τὰς ποσότητας, δι' ἑτέρων δέ τινων σημείων τε καὶ εἰδῶν αὐτὰς τῇ διανοίᾳ παρίστησιν, οἷσπερ οὐδέν τι ἧττον καὶ ἀριθμοί, καὶ γραμμαί, καὶ ἐπιφάνειαι, καὶ στερεά, καὶ παντοίου γένους ἄλλα μεγέθη, ὑποσημαίνεσθαι ἔχουσι. Καὶ ταῦτα δὴ τὰ σημεῖα, οὐ πολλῷ διαφερόντως ἡμῖν, ἢ τοὺς ἀριθμοὺς ὁ ἀριθμητικὸς φιλεῖ, μεταχαριζομένοις, οὐκ ἐν ὑποθέσεσιν εἰδικωτάταις τὰ προβαλλόμενα τυγχάνει τῆς ἐπιλύσεως,

ὥσπερ

(ὥσπερ διὰ τῆς κοινοτέρας Ἀριθμητικῆς ἐξ ἀριθμῶν τινων δεδομένων, ἀριθμοὶ ἄλλοι ἐξεχόμενοίπως ἐκείνων ἐπιφέρονται) ἀλλὰ θεωρήματ' ἄττα κατασκευάζεται, καὶ μέθοδοίτινες πρὸς ἐπίλυσιν τῶν προβαλλομένων τὰ μέγιστα συντελοῦσαι ἀνακαλύπτονται, αἱ μὲν ἀριθμητικῶς δι' ὑπολογισμοῦ, αἱ δὲ γεωμετρικῶς διὰ τῆς τῶν διαγραμμάτων κατασκευῆς τὰ τῆς ἐφόδου περαίνουσαι. Μεγίστης οὖν, καὶ ὅσης οὐκ ἄντις ῥαδίως εἴποι, τῆς κατὰ τὴν τοιάνδε Λογιστικὴν χρήσεως οὔσης, πάρεργον ἄν, μᾶλλον δὲ πολλοῦ ἄξιον εἴη, τοὺς κατ' αὐτὴν ὅρους τε καὶ κανόνας εἰς ἓν συλλέξασι, πλατύτερον ἐνταῦθα διεξελθεῖν. Τῶν γὰρ οἷον ἀρχῶν χώραν ἐν αὐτῇ ἐπεχόντων, τὰ μὲν, ὡς ἄρα κοιναί τινες ἔννοιαι οὖσαι, προϋπετέθη, τὰ δ' ἐν τοῖς φθάσασιν ἐξετέθη, καὶ εἰς χρῆσιν παρείληπται ἐν ταῖς ἀποδείξεσιν.

ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ.

§. 612. Ὁποιαδηποτοῦν ποσότης, γραμμή, ἐπιφάνεια, στερεόν, ἀριθμός, καὶ ἥτισοῦν ἄλλη, ἢ ἂν ἐξ ἄλλων μηδαμῶς ἠρτημένη νοοῖτο, διά τινος τῶν γραμμάτων α, β, γ, κξ. ὑποσημαινέσθω, προχαρασσομένου μὲν τοῦ − σημείου ἀποφατικῆς οὔσης, καθὰ προείρηται (§. 39. κξ.), καταφατικῆς δέ, καὶ ἤτοι μοναδικῶς, ἢ κατ' ἀρχὴν τοῦ στίχου τελούσης, σημείου μηδενὸς ἐπιγραφομένου· ἐπιτασσομένου δὲ μόνον τοῦ +, ἔνθα ἂν κατὰ συνέπειαν ἐν τῷ στίχῳ ἄλλῃ ποσότητι συνεκτάσσοιτο.

§. 613. Αἱ ἐν ἰσότητι ἐπιδήλῳ ποσότητες διὰ τοῦ αὐτοῦ δηλούσθωσαν γράμματος. Πλείοσι δ' οὔσαις ὁ ἀριθμὸς προσεπιγραφέσθω, οἷον 2α ἀντὶ $\alpha+\alpha$· καὶ ἀντὶ $\alpha+\alpha+\alpha$, 3α· καὶ ἀντὶ $2\beta+3\beta$ τιθέσθω 5β· καὶ ὡσαύτως δὲ καὶ 13γ, καὶ 15δ νοείσθω. Τὴν μέντοι μονάδα οὐδὲν δέον ἐπιχαράσσεσθαι, εἰμήποτε καθ' ἑαυτὴν τυχὸν ἀπαντῶσαν, ἢ σαφηνείας ἕνεκα μείζονος. Τῶν δὲ ποσοτήτων αἱ ἑτερογενεῖς· ἢ αἱ ὁμογενεῖς μὲν, ἄνισοι δέ· ἢ ὧνπερ ἂν ἔπω δῆλα τὰ τῆς ἰσότητος, ἢ δι' οντινοῦν λόγον ἀνυπόθετα, ἅπασαι ἐν διαφέρουσι καὶ τοῖς γράμμασι χαρακτηριζέσθωσαν.

§. 614. Ἐὰν δὲ ἡ ποσότης ἐξ ἄλλων ἠρτημένη ᾖ, καὶ τοῦτο δὴ, ὅπως ἐκείνων ἐξῆπται, δι' ἰδιαζόντων ἐκδηλούσθω σημείων, ὧν ἤδη τὰ πλεῖστα ἐν τοῖς Ἀριθμητικοῖς προεκτέθειται.

§. 615. Ἀμέλειτοι τὸ μὲν παραγόμενον ὑπὸ δυοῖν ποσοτήτων, ἃς τὰ δύο α καὶ β ὑποδηλοῖ γράμματα, ἢ (§. 154.) τὸ πρὸς μονάδα, καὶ α, καὶ β τέταρτον ἀνάλογον, γραφέσθω αβ· εἰμή τινα ἐκ τῆς γραφῆς α $\times$ β, ἢ β·α (§. 52.) παρείη μείζονα ἐλπίζειν σαφήνειαν· ἡ δέ τοι μονὰς, τῶν τῆς ἀναλογίας 1 : α = β : αβ ὅρων ὁ πρῶτος, ἀεὶ θετικῶς ἐκλαμβανέσθω.

§. 616. Τὸ παραγόμενον ὑπὸ τριῶν ποσοτήτων, α, β, γ, τῷδε τῷ ἁπλουστάτῳ τρόπῳ δηλούσθω αβγ, ἢ βγα, ἢ αγβ, ἢ ἄλλως ὁπωσοῦν μετατασσομένων τῶν γραμμάτων· ἢ ὧδε α $\times$ βγ, ἢ αβ $\times$ γ, ἢ α·βγ, ἢ αβ·γ, ἢ καὶ α $\times$ β $\times$ γ, ἢ α·β·γ, εἴτις λόγος ἀναπείσειεν. Ἀλλὰ καὶ τὰ ὑπὸ τεττάρων, ἢ πλειόνων παραγόντων προκύπτοντα παραπλησίως γραφέσθω.

§. 617. Εἰ δὲ τοῖς γράμμασιν, οἷς αἱ ποσότητες ἐκδηλοῦνται, καὶ ἀριθμοὶ προσκέοιντο, ἀντὶ 2α $\times$ 3β, γεγράφθω 6αβ, τῶν ἀριθμῶν ἐπιπολλαπλασιαζομένων. Ἤνδε τις λόγος ὑπαγορεύοι, τοὺς ἀριθμοὺς διαστέλλειν χρείωαι, κατ' ἀρχὰς γοῦν γραφέσθωσαν ὧδε 2. 3. αβ. Αὐτὸ δὲ τοῦτο παρατηρηθήσεται καὶ τῶν ἀριθμῶν ὄντων πλειόνων.

§. 618. Τὰ ἀπὸ ἴσων παραγόμενα, ἃ τοῦ παράγοντος ἀξίαι τε καὶ δυνάμεις ἀκούουσιν (§. 130.), ἤτοι

ἤτοι τῷ εἰωθότι τρόπῳ σημειέσθω, ἢ ἀντὶ αα γραφέσθω α^2, ἀντὶ ααα, α^3, ἀντὶ αααα, α^4, καὶ ὕτως ἐφεξῆς, ὡς τῷ πρὸς δεξιὰν προσεπιγραφομένῳ ἀριθμῷ, ἰσαρίθμους εἶναι τὰς μονάδας τοῖς ἰσαλλήλοις παράγουσιν ἀφ' ὧν προκύπτει ἡ δύναμις. Τηνικαῦτα δὲ ὁ τοιόσδε ἀριθμὸς, ὁ τῆς δυνάμεως ἡμῖν ἔσαι Δείκτης, ἢ τὸ Ἐπίσημον, δι' ὗ ἡλίκη τις ἐσὶ τὴν τάξιν ἡ ἀξία καὶ δύναμις, ὑποσημαίνεται.

§. 619. Κατὰ τὸν αὐτὸν δὲ τύπον καὶ ἀντὶ αααββ γράφοιτ' ἂν $\alpha^3\beta^2$· καὶ ἀντὶ αααα ββγγγ, $\alpha^4\beta^2\gamma^3$· καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων παραπλησίως.

§. 620. Τὸ Πηλίκον ὃ κατὰ διαίρεσιν τῆς ποσότητος φέρε β, διὰ τῆς α προκύπτει· ἢ τὸ τέταρτον ἀνάλογον πρὸς α, καὶ 1, καὶ β, κἀνταῦθα σημειέσθω διὰ $\frac{\beta}{\alpha}$.

§. 621. Καὶ ἐν γένει τὸ τέταρτον ἀνάλογον, πρὸς τὰ τρία ποσὰ α, β, γ, δηλέσθω εἰ δόξειεν σαφέστερον ὕτω $\frac{\beta \times \gamma}{\alpha}$, ἢ $\frac{\beta}{\alpha} \times \gamma$, ἢ $\frac{\gamma}{\alpha} \times \beta$, ἐπιτομώτερον δ' ὕτω $\frac{\beta\gamma}{\alpha}$.

§. 622. Τὸ ἄρα τέταρτον ἀνάλογον ἐπὶ τοῖς τρισὶν α, β, $\frac{\delta\epsilon}{\gamma}$, ὕτω σημειωθήσεται $\frac{\beta\delta\epsilon}{\alpha\gamma}$. Καὶ τὸ ἐπὶ α, β, $\frac{\beta\delta\epsilon}{\alpha\gamma}$, ὕτω $\frac{\beta\beta\delta\epsilon}{\alpha\alpha\gamma}$. Καὶ τοῖς λοιποῖς ὡσαύτως.

§. 623. Ἡ τετραγωνικὴ Ῥίζα τῆς ποσότητος α, ἤτοι ἡ μέση ἀνάλογον ἐντε μονάδι, καὶ τῇ ποσότητι α, ὕτω διατυπωθήσεται $\sqrt{\alpha}$. Ἦν δὲ καὶ τὰς ὑπερτέρας δέοι σημειῦν ῥίζας, ἐπιγραπἶέον τῷ σημείῳ τῆς ῥίζης, τὸ τῆς τάξεως ἐπίσημον, ὥςε $\sqrt[3]{\alpha}$ δηλῦν τὴν κυβικὴν ῥίζαν, καὶ $\sqrt[4]{\alpha}$ τὴν τεταρτοταγῆ, καὶ ὕτως ἐφεξῆς.

§. 624. Ἐὰν ἡ ἐκ πλειόνων ἀθροιζομένη ποσότης ὡς μία θεωρῆται, τὰ γράμματα δι' ὧν ἐκείνη δηλῦται μετὰ τῶν περὶ αὐτὰ σημείων, ἐν παρενθέσει ἐναπολειφθήσεται, καὶ τότε δὴ τὸ ὕτω συνημμένον, ὡς εἰ καὶ γράμμα ἓν τι μοναδικὸν ἐτύγχανε διαχειρισθήσεται. Οὕτως $\alpha \times (\beta + \gamma)$, τὸ ὑπὸ τῆς α ποσότητος, καὶ τῦ ἀθροίσματος τῶν β καὶ γ, παρίςησι γινόμενον· τὸ δὲ $\alpha \times (\beta - \gamma)$, τὸ ὑπὸ α, καὶ τῆς τῶν ἄλλων διαφορᾶς. Τὸ δὲ $(\beta + \gamma) \times (\beta - \gamma)$, τὸ ὑπὸ τῦ ἀθροίσματος τῶν β καὶ γ ποσοτήτων, καὶ τῆς αὐτῶν τέτων διαφορᾶς. Τὸ δὲ $(\alpha + \beta)^2$, τὸ τετράγωνον σημαίνει, ἤτοι τὴν δευτέραν τῶν δυνάμεων, τὴν ἀπὸ τῦ ἀθροίσματος τῶν α καὶ β. Ἔςι δὲ $\sqrt{}(\alpha + \beta)$ ἡ ῥίζα τῆς αὐτῆς ἡ τετραγωνική.

§. 625. Ἀντὶ δὲ τῆς τοιᾶσδε συμπλοκῆς, συντελὲς πολλάκις εὐθεῖαν ἐπάγειν ἐπὶ ταῖς συμπλεκομέναις ποσότησι. Ταῖς δὲ ποσότησι ταῖς ἐν εἴδει κλασμάτων ἐκκειμέναις, ἡ γραμμὴ ἡ τὸν διαιρετέον ὅρον ἀπὸ τῦ διαιρέτυ διαςέλλυσα, ἀντὶ συνδέσμυ εἰς συμπλοκὴν ὑπυργεῖ. Καὶ γὰρ $\frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{\alpha - \beta}$, σημαίνει ὅτι τὸ ἄθροισμα $\alpha\beta + \gamma\delta$, διαιρετέον διὰ τῆς διαφορᾶς $\alpha - \beta$.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 626. Ἡ καθόλυ Πρόσθεσις, ἤτοι ἡ εἰς ταυτὸ συγκεφαλαίωσις τῶν ὑπὸ τοῖς εἴδεσι τύτοις δηλυμένων ποσοτήτων, ἁπλῆτις ἐςὶ τύτων προσάθροισις· ἢ δὴ πολλάκις, καὶ ἡ τῦ ἀθροίσματος

συμπα-

συμπαραλαμβάνεται ἀναγωγὴ εἰς ὅρους, δι' ὧν ἂν ἐκδηλωθείη, τοὺς βραχυτάτους.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α.

§. 627. Οὕτω τὸ κεφάλαιον τῶν α καὶ β, ἐστὶν $\alpha+\beta$· τὸ δὲ τῶν α, καὶ $-\beta$, ἐστὶν $\alpha-\beta$· τὸ δὲ τῶν 3α, καὶ 2α, ἐστὶ $3\alpha+2\alpha$· ἢ συντομώτερον 5α· τὸ δὲ τῶν 5α καὶ -2α, ἐστὶ $5\alpha-2\alpha$· καὶ συντομώτερον 3α· τὸ δὲ τῶν 2α καὶ -5α, ἐστὶ $2\alpha-5\alpha$· συντομώτερον -3α.

§. 628. Κατὰ τύπον δὲ τῶνδε τῶν ὑποδειγμάτων, πᾶσα πρόσθεσις ῥᾶστα ἐκτελεσθήσεται.

Ἐὰν ἐπὶ $\alpha\beta+2\beta\gamma$ προστεθῇ $\alpha\beta-\beta\gamma$, συγκροτηθήσεται κεφάλαιον $2\alpha\beta+\beta\gamma$.

Ἐὰν ἐπὶ $\alpha\beta-3\beta\gamma$ προστεθῇ $\gamma\delta-\alpha\beta+\gamma\gamma$, κεφάλαιον $\gamma\delta-3\beta\gamma+\gamma\gamma$.

Ἐὰν ἐπὶ $2\alpha^2-2\beta^2$ προστεθῇ $3\alpha^2+\beta^2-\gamma\alpha$, κεφάλαιον $5\alpha^2-\beta^2-\gamma\alpha$.

Ἐὰν ἐπὶ $3\alpha^3-4\alpha^2\beta$ προστεθῇ $2\alpha^2\beta-3\alpha^3$, κεφάλαιον $-2\alpha^2\beta$.

Ἐὰν ἐπὶ $\frac{\alpha\beta}{\gamma}+\frac{2\beta\beta}{\alpha}$ προστεθῇ $\frac{2\alpha\beta}{\gamma}-\frac{\beta\beta}{\alpha}$, κεφάλαιον $\frac{3\alpha\beta}{\gamma}+\frac{\beta\beta}{\alpha}$.

Ἐὰν ἐπὶ $\sqrt{\alpha\beta}-\sqrt{\beta\gamma}$ προστεθῇ $\sqrt{\beta\gamma}-\sqrt{\gamma\delta}$, κεφάλαιον $\sqrt{\alpha\beta}-\sqrt{\gamma\delta}$.

Καὶ ἐὰν ἐπὶ $2\sqrt{\alpha\beta}-3\sqrt{\beta\gamma}$ προστεθῇ $2\sqrt{\beta\gamma}-\sqrt{\gamma\delta}$, κεφάλαιον συστήσεται $2\sqrt{\alpha\beta}-\sqrt{\beta\gamma}-\sqrt{\gamma\delta}$.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ ἐὰν $\alpha\cdot(\beta\gamma-\gamma\delta)+\beta\cdot(\alpha\gamma+\beta\delta)$ προστιθέναι δέῃ ἐπὶ $3\alpha\cdot(\beta\gamma-\gamma\delta)-2\beta\cdot(\alpha\gamma+\beta\delta)-\alpha^3$, κεφάλαιον ὑπο-

ςσιαφσυναφθήσεται τὸ $4\alpha \cdot (\beta\gamma - \gamma\delta) - \beta \cdot (\alpha\gamma + \beta\delta) - \alpha^3$.

Καὶ παραπλησίως δὲ, ἐὰν ἐπὶ $\frac{2\alpha\beta - \beta\beta}{\gamma}$ προστεθῇ $\frac{3\beta\gamma + \beta\beta - \gamma\gamma}{\gamma}$, προκύψει $\frac{2\alpha\beta + 3\beta\gamma - \gamma\gamma}{\gamma}$.

Καὶ τῶν ποσοτήτων δὲ $2\sqrt{}(\alpha\beta + \beta\beta) - 3\sqrt{}(\beta\gamma - \gamma\gamma) + 2\sqrt{}\beta\gamma$· καὶ $5\sqrt{}(\alpha\beta + \beta\beta) + 2\sqrt{}(\beta\gamma - \gamma\gamma) + \sqrt{}\alpha\beta - \sqrt{}\beta\gamma$, τὸ κεφάλαιον ἐςὶ $7\sqrt{}(\alpha\beta + \beta\beta) - \sqrt{}(\beta\gamma - \gamma\gamma + \sqrt{}\alpha\beta + \sqrt{}\beta\gamma$.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.

§. 629. Ῥᾴδιον ἂν ἐκ τῶν δὲ συνιδεῖν, ὡς ἣν καθόλε ἐνταῦθα ὀνομάζομεν πρόσθεσιν, τῇ ἐπὶ τῶν Ἀριθμητικῶν (§. 31.), τῇ ἐδέντι ἧττον κἀν τοῖς Γεωμετρικοῖς ἐν χρήσει γινομένῃ, ἐν οἷς μόνον ὁμοιόσημα τυγχάνει τὰ συναπτόμενα, συμφωνεῖ. Ἐπὶ γὰρ τῶν ἑτεροσήμων ἤτοι μόνην ἀφαίρεσιν, ἢ γὲν προςαφαίρεσιν· τετέςι τὴν εἰς ταυτὸ προσθέσεώς τε ἅμα καὶ ἀφαιρέσεως σιωέλευσιν ἀπαιτεῖ. Προκύπτει γὰρ ταύτηγε τὰ πολλὰ, τὸ μὲν τῶν ποσοτήτων ἄθροισμα ἐδαμῶς, ἡ δ' ἐν αὐταῖς χωρἕσα διαφορά· ἣν, ὡς ἄρα ἐκ τῆς ὧδε καλεμένης προσθέσεως ἀπαιτεμένην, κεφάλαιον ὀνομάζειν εἰώθαμεν. Ἀλλὰ γὰρ εἴτις τε κυρίως τοιέτε ἀντιδιαςέλλειν ἕλοιτο, Ἀλγεβραϊκὸν τόδε Κεφάλαιον ἀποκαλέσας ἐκ ἂν ἀπροσφυῶς ὀνομάσειεν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 630. Ἡ καθόλε Ἀφαίρεσις ποσότητος Β ἀπὸ ποσότητος Α, τρίτης ἐςὶν εὕρεσις ποσότητος, ἧ προςεθείσης τῆς Β, ἀποκαταςήσεται ἡ Α. (§. 34.).

ΣΧΟΛΙΟΝ Α.

§. 631. Ἐξευρίσκεται δ' ἡ τρίτη αὕτη ῥαδίως, τῶν ἐπὶ ταῖς ἐξ ὧν ἡ Β συγκροτεῖται ποσότησι σημείων ἀμειβομένων· τοῦ μὲν + εἰς τὸ −, τοῦ δὲ − εἰς τὸ +· καὶ τῆς Β ποσότητος ἀντισήμως οὕτω τῇ Α προστιθεμένης. Τούτου γὰρ γινομένου ἐὰν τῇ ἐντεῦθεν προκυψάσῃ ἡ ποσότης Β ὡς ἰῶ κατ' ἀρχὰς ἔχουσα προσεπιτεθῇ, δῆλον ὅτι ἀποκαταστήσεται ἡ Α, τῶν ἀντισήμων ὑπ' ἀλλήλων ἀναιρουμένων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

§. 632. Ἔνθεντοι ἐὰν ἀπὸ τοῦ α ἀφαιρεθῇ β, προκύψει $\alpha-\beta$. Καὶ γὰρ $\alpha-\beta+\beta=\alpha$.

Ἐὰν δὲ ἀπὸ α ἀφαιρεθῇ $-\beta$, προκύψει $\alpha+\beta$. Καὶ γὰρ $\alpha+\beta-\beta=\alpha$.

Ἐὰν δὲ ἀπὸ $\alpha-\beta$ ἀφαιρεθῇ $\alpha+\beta-\gamma$, προκύψει $\gamma-2\beta$. Καὶ γὰρ $\gamma-2\beta+\alpha+\beta-\gamma=\alpha-\beta$.

Ἐὰν δὲ ἀπὸ $2\alpha\alpha-\alpha\beta+\gamma\gamma$ ἀφαιρεθῇ $\alpha\alpha+\alpha\beta-\beta\gamma$, προκύψει $2\alpha\alpha-\alpha\beta+\gamma\gamma-\alpha\alpha-\alpha\beta+\beta\gamma$; ὃ συνεπιτεμνουσῶν ἔσται $\alpha\alpha-2\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\gamma$. Δεῖ γὰρ καὶ ταῦτα ἐπὶ τὸ ὡς οἷόν τε ἁπλούστερον ἐπανάγειν.

Συνελόντα δὲ εἰπεῖν, τῶν ἐπὶ τῆς ἀφαιρετέας ποσότητος σημείων εἰς τἀναντία μεταβαλόντων, ἡ ἀφαίρεσις τὸν αὐτὸν ἐπ' ἀκριβὲς τελεῖται τρόπον, ὃν καὶ ἡ πρόσθεσις.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.

§. 633. Ἐκεῖνο γοῦν ἐπιδήλως τῇ ἀριθμητικῇ ἡ γεωμετρικὴ συνᾴδει ἀφαίρεσις, τὸ κἂν ταύτῃ τῆς διαφορᾶς τῷ ἀφαιρετέῳ ὑποσυναπτομένης, τὸ ἀφ' οὗ ἀφῄρητο πάλιν ἀποκαθίστασθαι. Τὸ δ' ἐν αὐταῖς διάφορον,

διάφορον, ὅτι κατὰ μὲν ἐκείνην τῆς τῶν δύο ποσοτήτων ἀληθοῦς ἀεὶ διαφορᾶς λαμβανομένης, διὰ ταύτης ἀριθμητικόντι τὰ πολλὰ παρίσαται κεφάλαιον. Ὃ δὴ, ὡς ἐξ ἀφαιρέσεως ἀνακύπτον, διαφορὰν καλεῖσθαι κἀνταῦθα ἐκράτησε. Προσέχειν οὖν κἀν τούτοις μὴ τὴν Ἀλγεβραϊκὴν λεγομένην, τῇ κυριωνύμῳ διαφορᾷ συγχέειν ἀνθ' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐκλαμβάνοντας.

ΟΡΙΣΜΟΣ·

§. 634. Ἐὰν ᾖ Α : Β = Γ : Δ, τὸ δὲ Α ἀντὶ μονάδος ληφθῇ, (ἣν ἂν διὰ μνήμης ἔχοιμεν οἱ δέοντι προσχρησόμενοι, ἀνεπιτιμήτως, ἔνθα οὐδεμία ἡ ἐκ τῆς θέσεως ἐπισυμβαίνουσα παραλλαγὴ πρὸς τὸ δοκοῦν ὑποτεθεισομένην) τὸ Δ ἐν γένει τὸ Γινόμενον εἶναι λέγεται ὑπὸ τῶν ποσοτήτων Β καὶ Γ. Ἡ δὲ πρᾶξις καθ' ἣν οὕτω τὸ Δ παράγεται, ὁποίαποτ' ἂν ᾖ, ὁ τοῦ ποσοῦ Γ διὰ τοῦ ποσοῦ Β καλεῖται Πολλαπλασιασμός. (§. 44.)

§. 635. Ἐὰν δὲ τῶν αὐτῶν κειμένων τὸ Β ἀντὶ μονάδος ληφθῇ, ἔσται δὴ Δ τὸ Πηλίκον τοῦ ποσοῦ Γ τοῦ διαιρουμένου διὰ τοῦ Α. Ἡ δὲ πρᾶξις, ὁποία δ' ἂν ᾖ, δι' ἧς ἀνακαλύπτεται τὸ Δ, καλεῖται Διαίρεσις. (§. 45.)

ΣΧΟΛΙΟΝ·

§. 636. Ἐὰν τὰ Α, Β, Γ ποσὰ ᾖ τῶν ὁμογενῶν· ᾖ δὲ Α : Β = Γ : Δ, ἔσται καὶ Α : Γ = Β : Δ. (§. 165.) Ὅθεν καὶ οὕτως ἂν τὸ Δ παραχθείη· μηδὲν διαφέρον τὸ Β διὰ τοῦ Γ πολλαπλασιάσαι, ἢ τὸ Γ διὰ τοῦ Β ἀνάπαλιν. Ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ αὐτὸ πηλίκον ἀνακύψει τὸ Δ, εἴτε γένοιτο ὡς Α (ληφθὲν ἀντὶ μονάδος) πρὸς Β, οὕτω καὶ Γ πρὸς Δ· εἴτ' οὖν καὶ ὡς Α πρὸς Γ, οὕτω καὶ Β (ἀντὶ μονάδος ἤδη τοῦτο ληφθὲν) πρὸς Δ.

§. 637. Ἐὰν ἓν πρῶτον μὲν γένηται $1 : B = \Gamma : \Delta$· τουτέστιν, ἐὰν τὸ Γ διὰ τοῦ Β πολλαπλασιασθὲν παραχθῇ Δ. Εἶτα δὴ καὶ $B : I = \Delta : \Pi$· τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δηλονότι προγεγονότος, διὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ Β ἤδη διαιρουμένου, ἔσται πηλίκον τὸ Π, τὸ τῇ πολλαπλασιασθείσῃ πρότερον ποσότητι Γ ἴσον (§. 54.). Καὶ ἔστιν ἄρα ἐν γένει τὸ πολλαπλασιάζειν τε καὶ διαιρεῖν οὕτως ἀλλήλοις ἀντίξοα, ὡς τὸ ὑπὸ θατέρου συμβαῖνον, διὰ θατέρου εἰς ὃ πρὸ τοῦ ἦν ἐπανάγεσθαι.

§. 638. Τοιγαροῦν ἐὰν δέῃ ποιῆσαι,

$$\begin{aligned} \alpha &: \beta = \gamma : a \\ \delta &: \epsilon = a : b \\ \zeta &: \eta = b : c \\ \vartheta &: \kappa = c : d \end{aligned}$$

Ἔσται κατὰ τὰ ἐν τοῖς περὶ τῶν ἀναλογιῶν εἰρημένα (§. 177.), ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἀναλογίας $a = \frac{\beta\gamma}{\alpha}$. Καὶ τούτου δ᾽ ἐπὶ τῆς δευτέρας ἀναλογίας ἀντὶ τοῦ ἰσοδυνάμου a ἀντεισενεχθέντος, εὔδηλον ὡς τὸ b οὕτως ἐκδηλωθήσεται $\frac{\epsilon\beta\gamma}{\delta\alpha}$. Ἐὰν δὲ καὶ τοῦτο ἐπὶ τῆς τρίτης ἀναλογίας ἀντὶ τοῦ ἰσοτίμου b ταχθῇ, τὸ c οὕτως ἐκκείσεται $\frac{\eta\epsilon\beta\gamma.}{\zeta\delta\alpha}$ Καὶ ὡσαύτως ἐπὶ τῆς τετάρτης τὸ d παριστάμενον ἔσται $\frac{\kappa\eta\epsilon\beta\gamma}{\vartheta\zeta\delta\alpha}$. Καὶ παραπλησίως ἐφ᾽ ὅσον καὶ δόξειε πορρωτέρω χωρεῖν.

§. 639. Ὡς εἴγε τῶν παραληφθέντων ἔστιν ἃ γραμμάτων μονάδος τύχῃ σημαντικὰ, παρέσται δὴ τὸ d κατά τινα τῶν ἑφεξῆς τύπων λαβεῖν· $\frac{\kappa\eta\epsilon\beta\gamma.}{\zeta\delta\alpha}$ ἢ $\frac{\kappa\eta\epsilon\beta\gamma.}{\delta\alpha}$ ἢ $\frac{\kappa\eta\epsilon\beta\gamma}{\alpha}$ ἢ τέως $\kappa\eta\epsilon\beta\gamma$·

ἢ καὶ

ἢ καὶ ὕτως $\frac{\eta\varepsilon\beta\gamma.}{\vartheta\zeta\delta\alpha}$ ἢ $\frac{\varepsilon\beta\gamma.}{\vartheta\zeta\delta\alpha}$ ἢ $\frac{\beta\gamma.}{\vartheta\zeta\delta\alpha}$ ἢ $\frac{\gamma:}{\vartheta\zeta\delta\alpha}$ ἢ τελδυταῖον $\frac{1}{\vartheta\zeta\delta\alpha}$. Ἀμέλειτοι τὰ κατὰ τὸν ἀριθμητικὼ γράμματα, τῶν ἐπὶ τȣ̃ παρονομαςȣ̃, ἀριθμῷ ὑπερέχειν ὁπωσȣ̃ν, ἢ ἐλλείπειν ἐνδέχεται.

§. 640. Ἐντεῦθεν ȣ̃ν καὶ ὅπως ἄντις εὕροι τὴν ἐνὶ τῶν ἐκτεθέντων τρόπων δηλȣμένὴν ποσότητα d, ἐκ τῶν α, β, γ, κξ. δοθέντων, ῥᾴδιον συνιδεῖν. Ὄντος γὰρ d = $\frac{\beta\gamma.}{\vartheta\zeta\delta\varepsilon}$ Ποίει,

$$\vartheta : \beta = \gamma : a$$
$$\zeta : 1 = a : b$$
$$\delta : 1 = b : c$$
$$\varepsilon : 1 = c : d$$

Τȣτέςι ζήτει πρὸς μὲν ϑ, β, καὶ γ, τὸ τέταρτον ἀνάλογον a· πρὸς δὲ ζ, 1, καὶ a τὸ ἤδη εὑρεθὲν, τὸ τέταρτον ὡσαύτως ἀνάλογον b· καὶ ȣ̃τω χώρει διὰ πάντων εἰς τέλος τῶν γραμμάτων, τὰ μὲν ἐπὶ τȣ̃ κλάσματος ὑπὸ τὴν γραμμὴν τελȣ̃ντα ἀντὶ ἡγȣμένων, τὰ δ' ὑπὲρ αὐτὴν ἀντὶ ἑπομένων κατὰ τȣ̀ς λόγȣς τιθέμενος, καὶ μονάδι πανταχȣ̃ τὴν τȣ̃ γράμματος ἀπȣσίαν ἀναπληρῶν.

§. 641. Ἐκ δὲ τȣ́των ἕπεται, ὅτι καὶ ἐὰν ἢ φέρε d = $\frac{\kappa\eta\varepsilon\beta\gamma}{\vartheta\zeta\delta\alpha}$, δέον δὲ ἐκ τῶν δοθέντων α, β, γ, καὶ τῶν λοιπῶν τȣ̃ τοιȣ́τȣ γένȣς τὸ d εὑρεῖν, ȣ̓δὲν ὅλως διοίσει ὅπως ἂν καὶ ἔχοι τάξεως ἐπὶ τȣ̃ πολλαπλασιασμȣ̃ τȣ̃ δι' ἀλλήλων τὰ γράμματα, οἷς οἱ λόγοι παρίςανται· ὥςε καὶ εἰ ἀντὶ τȣ̃ ἀνωτέρω τεθείη,

$$\delta : \gamma = \eta : a$$
$$\zeta : \kappa = a : b$$
$$\vartheta : \beta = b : c$$
$$\alpha : \varepsilon = c : d$$

Τὸ

Τὸ κἀνταῦθα ἔχατον γινόμενον d, ταυτὸν ἔςαι τῷ ἀνωτέρω d, τῷ ἐκ τῶν ὡς πρὶν ἐκτεταγμένων ὅρων προκύψαντι. Ἐὰν γὰρ θῶμεν, καθ' ἣν ὧδε καταγέγραπται τάξιν πρῶτον ἐκκεῖσθαι τὰ γράμματα· εἶτα, κατὰ χώραν μένοντος τȣ̃ η, τὰ ἡγȣ́μενα δ, ζ, θ, α, καὶ δὴ καὶ τὰ ἑπόμενα γ, κ, β, ε ὁπωσȣ̃ν ἐκταράσσεσθαι· δῆλον δὴ ἐκ τῶν περὶ ἀναλογίας εἰρημένων (§. 179.), ὡς ἡ ἔχατον ἀνακύπτȣσα ποσότης d, ȣ̓δεμίαν ὅλως ὑποςήσεται τροπὴν, κἂν αἱ λοιπαὶ πᾶσαι τραπεῖεν, αἱ διὰ τῶν a, b, c ὑποσημαινόμεναι. Ἐὰν δὲ καὶ ἡ τῷ η δηλȣμένη ἐναλλὰξ τεθῇ πρὸς τὴν ἀντὶ τȣ̃ γ ἀντικαθεςῶσαν, ȣ̓δὲ τὸ a μεῖζον ȣ̓δ' ἔλαττον, ἢ πρότερον προελεύσεται (§. 165.). Καὶ ȣ̓δ' ἡ τυχȣ̃σα ἄρα μεταβολὴ ȣ̓δ' ἐπὶ τῶν b καὶ c, ȣ̓δ' ἐπὶ τȣ̃ d, τὸ παράπαν ἐπιγενήσεται.

§. 642. Ἐκ τῶν αὐτῶν δὲ δῆλον, ὅτι καὶ εἰ ἐκτινων τῶν δεδομένων λόγων, οἷον τῶν δ : γ καὶ ζ : κ συγκείμενος εἴη λόγος ὁ μ : ν· ἐκ δὲ τῶν λοιπῶν, ἤτοι πάντων, ἢ τινῶν λόγος ἕτερος π : φ· τȣ́των ἀντὶ τῶν ἐξ ὧν σύγκεινται ἀντικαθιςαμένων, ἡ τȣ̃ d εὕρεσις εὐπετεςέρα. Συντιθεμένȣ τοίνυν τȣ̃ π : φ ἐκ τῶν λόγων θ : β καὶ α : ε, ποιεῖ

$$\mu : \nu = \eta : a$$

$$\text{καὶ}\quad \pi : \varphi = a : b, \text{ καὶ ἔςαι } b = d,$$

ὃ διεξοδικωτέρῳ πόνῳ, διὰ τῶν ἁπλȣςέρων λόγων ἐξ ὧν τοῖς μ : ν καὶ π : φ ἡ σύνθεσις, ἐξευρίσκεται. Καὶ φανερὸν ἐντεῦθεν ὡς πολύχȣς ἡ μέθοδος, καθ' ἣν ἡ d ποσότης, ἡ ἐν εἴδει κλάσματος ἐκκειμένη, ȣ̓ ἐκ πλειόνων ὅ, τε ἀριθμητὴς γίνεται καὶ ὁ παρονομαςὴς, ἐκείνων δοθέντων, εὑρίσκεται.

§. 643. Εἴωθε δὲ ἡ κλασματοειδῶς ἐκφερομένη ποσότης, Κλάσμα καὶ αὐτὴ ἐνταῦθα καλεῖσθαι, τȣ̃ ὀνόματος αὖθις ἐπὶ τῶν Γεωμετρικῶν καὶ τῶν ἄλλων Μαθημάτων παρεισενεχθέντος, ἐν οἷς περὶ

 κλασ-

κλασμάτων κυρίως εἰπεῖν λόγος ὐδείς. Ἀλλ' ἐςὶ δὴ τῦτο τῆς Φωνῆς τὸ χρειῶδες, ὅτι δι' αὐτῆς, τίνα τὰ ἐπὶ τῶν ὕτως ἐκκειμένων διαμεμπλέα κατὰ τὺς περὶ τὰ κλάσματα ἐν τοῖς Ἀριθμητικοῖς ὅρυς τε καὶ κανόνας, ὑπαναμιμνησκομένυς, ὐδὲν δέον ἐπὶ τὴν διδασκαλίαν ἀείποτε ἀνατρέχειν τῶν ἀναλογιῶν. Οἷον ἐὰν τὸ $\frac{\alpha\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\varepsilon}$ προθέσθαι δέῃ ἐπιτομώτερον, ῥᾷστα ἂν ἡμῖν τυτὶ ἐκτελεσθείη κλάσματος δίκην τὴν ὕτως ἐκκειμένην ἐπιθεωρῦσι ποσότητα, ὕπερ οἱ ὅροι διὰ τῶν αὐτῶν $\alpha\beta$ διαιρέσιμοι εἰσί. Ταύτῃ γὰρ τὸ $\frac{\alpha\gamma}{\varepsilon}$ προχείρως πρόεισιν. Ἄλλως γὰρ, εἴπερ ἐπὶ τῆς τῶν λόγων ἀνατρέχειν ἔδει συνθέσεως, ῥητέον ἂν εἴη ὅτι τὺς ὅρυς α καὶ β, παριέναι θέμις, ἅτε δὴ ἐπὶ τῶν ἡγυμένων τὺς αὐτὺς καὶ τῶν ἑπομένων ἀπαντῶντας τῶν ἁπλυςέρων λόγων, ἐξ ὧν τῷ συνθέτῳ ἡ σύνθεσις (§. 181.).

§. 644. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον παρὰ ταῦτα, καὶ ὅσα ἐπὶ τῶν κλασμάτων ἄλλως τρέπεσθαι φιλεῖ, ἥτε κατ' ἐκεῖνα πρόσθεσις, καὶ ἡ ἀφαίρεσις, καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς, καὶ ἡ διαίρεσις, καὶ τὰ ἄλλα, ἐκ τῆς τῶν ἀναλογιῶν διδασκαλίας εὐχερῶς ληφθήσεται· τά, τε ἐκείνοις ἀνήκοντα, διὰ φωνῶν ἐκδηλωθήσεται τῶν παντὶ ποσότητος γένει προσηκυσῶν, ὡς μὴ τοῖς ἀριθμοῖς μόνοις, τὰ ἐν χρήσει γινόμενα ἐνταῦθα προσδιορίζεσθαι.

§. 645. Ἐν γένει γῦν ὁ ὕτως ἐκκείμενος λόγος $\frac{\alpha\beta\gamma}{\pi\phi} : \frac{\zeta\eta\vartheta}{\mu\nu}$ τὸν ἐν συνθέσει λόγον ὑποσημαίνει τὸν ἐκ μὲν τῶν $\alpha : \zeta$, $\beta : \eta$, $\gamma : \vartheta$ ἐπ' εὐθείας· ἐκ δὲ τῶν $\pi : \mu$, $\phi : \nu$ ἀνάπαλιν ληφθέντων, οἷον, $\mu : \pi$, $\nu : \phi$. Ἐὰν γὰρ γένηται ἔνθεν μὲν,

$\pi : \alpha$

$$\begin{array}{l} \pi : \alpha = \beta : a \\ \phi : \gamma = a : b, \\ \text{Ἔνθαν δὲ,}\quad \mu : \zeta = \eta : c \\ \nu : \vartheta = c : d, \end{array}$$

Ἔςι δήπε $\frac{\alpha\beta\gamma}{\pi\phi} : \frac{\zeta\eta\vartheta}{\mu\nu} = b : d$· τὸ μὲν γὰρ b τῷ προτέρῳ, τὸ δὲ d τῷ δευτέρῳ τῶν κλασμάτων ἴσον ἐςί. Ἄλλως δέπως τῶν ἀναλογιῶν διαταχθεισῶν, εὑρεθείη ἂν ὁ $b : d$ λόγος διὰ συνθέσεως, κατὰ τόδε τὸ σχῆμα.

$$\begin{array}{l} \gamma : \phi = b : a \\ \alpha : \pi = a : \beta \\ \beta : \eta = \beta : \eta \\ \mu : \zeta = \eta : c \\ \nu : \vartheta = c : d \end{array}$$

Ἔνθα καὶ τὰ ἡγέμενα τῶν συντεθεισομένων λόγων, καὶ τὰ ἑπόμενα, ὅπως ἂν δόξειεν ἀμείβειν ἔςι. Τέτε γὰρ γενομένε, αὐτίκα δῆλον (§. 179.) τὲς λόγες ἐξ ὧν ὁ $b : d$, πρὸς τὲς ἐν ἀρχῇ τεθέντας $\alpha : \zeta$, $\beta : \vartheta$, $\gamma : \eta$, $\mu : \pi$, $\nu : \phi$, ἔχειν ἀνάγεσθαι.

§. 646. Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι διὰ τῦ $\alpha\beta\gamma\mu\nu : \zeta\eta\vartheta\pi\phi$, ὁ λόγος ὑποδηλῦται ὁ ἐκ τῶν διακριδὸν προτεθέντων συγκείμενος· διὸ καὶ ἰσοδυναμεῖ τῷ κλασματοειδῶς ἀνωτέρω ἐκφερομένῳ, $\alpha\beta\gamma\mu\nu : \zeta\eta\vartheta\pi\phi = \frac{\alpha\beta\gamma}{\pi\phi} : \frac{\zeta\eta\vartheta}{\mu\nu}$. Αἵτε δηλώσεις, κατὰ τὲς ἐν τοῖς περὶ τῶν κλασμάτων κανόνας εἰς ἀλλήλας μεθίςανται. Ἐὰν γὰρ ἑκατέρῳ τῶν ὅρων τῦ προτέρε λόγε, ὑποτεθῇ κοινὸς παρονομαςὴς ὁ $\mu\nu\pi\phi$, ἀναχθῇ δὲ τὰ ὅτως ἀναφυόμενα κλάσματα, ἐπὶ ὅρες τῶν οἷς ἂν ἐκδηλωθείη, τὲς ἐλαχίςες, ἔςαι δὴ, $\alpha\beta\gamma\mu\nu : \zeta\eta\vartheta\pi\phi = \frac{\alpha\beta\gamma\mu\nu}{\mu\nu\pi\phi} : \frac{\zeta\eta\vartheta\pi\phi}{}$

$\frac{\zeta\eta\vartheta\pi\phi}{\mu\nu\pi\phi} = \frac{\alpha\beta\gamma}{\pi\phi} : \frac{\zeta\eta\vartheta}{\mu\nu}$. Ἐκ δὲ τȣτωνὶ τῶν κλασμάτων οἱ τȣ͂ προτέρȣ λόγȣ ἀναφύονται ὅροι, ἑκατέρȣ διὰ $\pi\phi\mu\nu$ πολλαπλασιαζομένȣ. Γίνεται γὰρ ȣ̔́τω $\frac{\alpha\beta\gamma\pi\phi\mu\nu}{\pi\phi} : \frac{\zeta\eta\vartheta\pi\phi\mu\nu}{\mu\nu} = \alpha\beta\gamma\mu\nu :$ $\zeta\eta\vartheta\pi\phi$· τὸ δ᾽ αὐτὸ καὶ διὰ τῆς τῶν κλασμάτων ἐπὶ τὸ αὐτὸ ὄνομα ἀναγωγῆς διαπερανθήσεται.

§. 647. Κἀντεῦθεν ὁμοίως ἕπεται, τῶν α^2, β^2, α^3, β^3, καὶ τῶν ἄλλων ὅσα τοιȣτότροπα, εἴτε ἀριθμȣ̀ς, εἴτε καὶ ποσὰ ὁποιαδηποτȣ͂ν ἄλλα ὑποσημαινόντων, διὰ μὲν τȣ͂ $\alpha^2 : \beta^2$ λόγον δηλȣ͂σθαι τȣ͂ $\alpha : \beta$ τὸν διπλασίονα· διὰ δὲ τȣ͂ $\alpha^3 : \beta^3$ τὸν τȣ͂ αὐτȣ͂ τριπλασίονα· διὰ δὲ τȣ͂ $\alpha^4 : \beta^4$ τὸν τετραπλασίονα· καὶ ȣ̔́τως ἐφεξῆς. Ἔχειν τε τὸν $\alpha^2 : \beta^2$ διὰ δυοῖν ὁποιωνȣ͂ν παρίσασθαι ποσῶν, ὧν θάτερον πρὸς θάτερον ἐν διπλασίονι λόγῳ εἴη τȣ͂ $\alpha : \beta$. Τȣτέστι διὰ γραμμῶν, δι᾽ ἐπιφανειῶν, διὰ στερεῶν παντοίων τὰ σχήματα· ἁπλῶς δι᾽ ὧν ἂν ἐθέλοι τις ποσοτήτων. Τὸν δέ τοι λόγον $\alpha^3 : \beta^3$ δι᾽ ὁποιωνδήποτε παραπλησίως ποσῶν, ὧν ὁ λόγος τριπλασίων τȣ͂ $\alpha : \beta$· καὶ ȣ̔́τως ἐφεξῆς.

§. 648. Οὕτω τοι καὶ ὁ $\alpha^3\beta^2 : \gamma^2$, τὸν ἐκ τῶν λόγων σύνθετον σημαίνει, τȣ͂ μὲν τριπλασίονος ὄντος τȣ͂ $\alpha : 1$, τȣ͂ δὲ διπλασίονος τȣ͂ $\beta : \gamma$. Δεῖ γὰρ τὴν μονάδα κἀνταῦθα τὸ ἐλλεῖπον τȣ͂ κατὰ τὸν λόγον ὅρȣ ἀναπληρȣ͂ν. Ἔστι δὲ $1 = 1^2 = 1^3 = 1^4$· ὅτι τῆς μονάδος καθ᾽ ἑαυτὴν ἀγομένης, ȣ̓δέν τι πλέον ἢ μονὰς τὸ γινόμενον. Ἀλλὰ γὰρ ὁ αὐτὸς λόγος $\alpha^3\beta^2 : \gamma^2$, καὶ ἐξ ἄλλων ἂν συντεθείη πολυτρόπως· οἷον ἐκ τῶν $\alpha^2 : \gamma^2$ καὶ $\alpha\beta^2 : 1$· ἢ καὶ τȣ́των $\alpha\beta : \gamma$ καὶ $\alpha^2\beta : \gamma$.

§. 649. Ἔνθα τοι ὁ στίχος,

$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6, \alpha^7, \alpha^8, \alpha^9$, κτλ. γεωμετρικῆς ἐστὶ προόδȣ σημαντικός, ἧς ὁ μὲν πρῶτος τες τῶν ὅρων ποσότης ἐςὶν ἡ ςηθεῖσα 1· ὁ δὲ δεύτερος ποσότης ὁμογενὴς ἴσῳ σημαίνει τὸ α. Καιγὰρ $1 : \alpha = \alpha : \alpha^2 = \alpha^2 : \alpha^3 = \alpha^3 : \alpha^4$. Τῶν δὲ ἑφεπομένων ποσοτήτων ἑκάςη ἀναφύεται, τῆς ἡγεμένης διὰ τοῦ α πολλαπλασιαθείσης. Ἐὰν οὖν ἀφ' ὁτινοσοῦν τῶν ὅρων ἐπανιοῦσιν ἔςγε τὴν μονάδα, καὶ ἔτι περαιτέρω τὰ τῆς προόδου χωρήσῃ, τοῦ αὐτοῦ σωζομένου τρόπου ὁ ςίχος οὕτω διασημανθήσεται.

$$\alpha^3,\ \alpha^2,\ \alpha^1,\ \alpha^0,\ \alpha^{-1},\ \alpha^{-2},\ \alpha^{-3},\ \alpha^{-4},\ \alpha^{-5},\ \text{κξ.}$$

Δηλώσει δὲ τὸ α^0 τὸν ὅρον τὸν ἀντὶ μονάδος ἐπὶ τῆς προόδου ληφθέντα. Ὑπὲρ ὂν τοῦ α ὄντος, τοσῷ δὲ μᾶλλον οἱ μὲν α^2, α^3, καὶ οἱ λοιποὶ μονάδος ἔσονται μείζονες· οἱ δὲ α^{-1}, α^{-2}, α^{-3} μονάδος ἐλάσσονες. Τοὐναντίον δὲ τοῦ α πρὸς τὴν μονάδα ἐλαττουμένου, οἱ μὲν α^2, α^3, κξ. ἐλάσσονες ἔσονται τῆς μονάδος οἱ δὲ α^{-1}, α^{-2}, α^{-3}, κξ. μείζονες.

§. 650. Τὰ δ' ἄλλα, τὸ ἐν §. 634. 635. εἰρημένον, ὅτι ποσότης πᾶσα ἀντὶ μονάδος ληφθῆναι δύναται, οὐδὲν αἰνίζεται ὅ,τι καὶ δυσχερὲς ἢ δυσξύμβλητον. Περὶ γὰρ τὰς τῶν πραγμάτων ἀνασρεφομένοις παραθέσεις, τὸ μὲν ἕκαςον ἀπὸ τῶν λοιπῶν ἁπάντων εὖτε καὶ καλῶς διακρίνειν, τῷ παντὶ χρήσιμόν ἐςι, μᾶλλον δὲ ἀναγκαῖον. Τὸ δὲ ἐντίνι δήποτε σημείῳ, τὰ τῆς διαςολῆς ληφθείη, καὶ ὑπὸ ποίῳ διασημανθείη ὀνόματι, οὐδὲν τὸ παράπαν διαφέρον ἐςί. Διὸ οὐδὲ τὸ τῆς μονάδος ὄνομα, ἢ σημεῖον τῆς τοιᾶσδε χρήσεως ἀποκλειςέον. Πλὴν τούτου δὴ γινομένου, τὸ ἐπὶ προκειμένου τινὸς ζητήματος, ἑνὸς δίκην ὑποτεθὲν, ἐνταῦθα μὲν ὥρισαι, ἐν ἄλλοις δὲ πρὸς τὸ δοκοῦν παρέςαι, πηλίκην ἂν καὶ βουλητὸν εἴη τὴν μονάδα παραλαβεῖν· οἷον εἰ ἀγροῦ μῆκος, πρὸς τὸ αὐτοῦ τούτου εὖρος δέοι παραβαλεῖν, οὐδὲν διοίσει πηλίκῳ ποτ' ἄντις τῷ μέτρῳ προσχρήσαιτο, εἰ μόνον τὸ ἐν χρήσει ἅπαξ παραληφθὲν ἐφεξῆς τηροῖτο ἀπαραλλάκτως. Τὴν μὲν οὖν ἐν ζητήματι, τι, ἢ θεωρήματι ἀπαντῶσαν ποσότητα, ἧς ὡς ἂν τύχοι ληφθείσης τὰ λοιπὰ ἥκιστα μεταβάλλει εὔχρηστόν ἐστιν οἱονεὶ μονάδα οὖσαν διασημαίνειν· φύσει γὰρ τὸ τῆς μονάδος ἀπὸ βουλῆς ἤρτηται.

§. 651. Ἐθέλει δὲ ἡ μονὰς θετικῶς ἐνταῦθα ἀεὶ ἐκλαμβάνεσθαι· ἐν ᾧ καὶ τὸ πολλαπλασιάζειν τε καὶ διαιρεῖν Ἀλγεβραϊκῶς, τοῦ Ἀριθμητικῶς ταυτὰ ποιεῖν διενήνοχεν. Ὅ,τι γὰρ ἂν ἤποτε τὸ Α, ἐὰν ἀριθμητικῶς δεήσῃ πολλαπλασιάσαι αὐτὸ δι' ἀριθμοῦ τινος, φέρε τοῦ 3, οὐδὲν ὅτι μὴ τὸν τρόπον ἀποσκοπεῖν χρὴ ὃν ὁ ἀριθμὸς 3 ἐκ τῆς ἐν αὐτῷ μονάδος συνίσταται· τουτέστι τὸν τοῦ ἀριθμοῦ λόγον πρὸς τὴν μονάδα τὴν αὐτοῦ. Ὁποία δέ τις ἡ μονὰς αὕτη, οὐδὲν χρὴ ζητεῖν. Ἀλλὰ μὴν + 3 ἐκ + 1 ὡσαύτως γίνεται, ὡς δήπου καὶ − 3 ἐκ − 1· τῆς προσληφθείσης δηλονότι μονάδος τῷ τριπλασιασμῷ· ὅ,τε λόγος + 3 πρὸς + 1, τῷ λόγῳ − 3 πρὸς − 1 ἐπιδήλως ἴσος ἐστί. Τοιγαροῦν ἥκιστα μὲν τῷ σημείῳ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ προσεκτέον, μάλιστα δὲ τῷ τοῦ πολλαπλασιαστέου ἀριθμητικῶς πολλαπλασιάζοντας. Διὸ καὶ τὸ γινόμενον 3 Α, ἀεὶ τοιαύτης, οἵας καὶ ἡ πολλαπλασιαζομένη ποσότης Α, ἔχον ἐστὶ καταστάσεως, θετικῆς μὲν + 3 Α, θετικῶς ἐκείνης + Α ἐχούσης, ἀποφατικῆς δὲ − 3 Α, ἀποφατικῶς − Α. Καὶ ἐπὶ τῆς διαιρέσεως δὲ ὁ αὐτὸς λόγος κρατεῖ. Καὶ γὰρ καὶ τὸ ἀριθμητικῶς πηλίκον, οὐδὲν οὐδὲ τῷ τῆς ποσότητος εἴδει, οὐδὲ τῇ κατὰ τὰ σημεῖα + καὶ − ποιότητι τοῦ διαιρετέου διενήνοχε τὸ παράπαν. Ἀλλ' ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως καθόλου συνισταμένων, ἄλλως ἔχει τὸ πρᾶγμα. Εἴτε γὰρ καταφατικὸς εἴη ὁ πολλαπλασιαστής, ἢ ὁ διαιρέτης, εἴτε ἀποφατικὸς ἐπὶ τούτων, ἡ, πρὸς ἣν ἀνάγεται, μονὰς θετικῶς ἀείποτε ἐκλαμβάνεται. Καὶ ἐπεὶ τοίνυν − 3 ἐκ + 1 οὐκ ἂν γένοιτο τῷ τῆς οὕτως ἐχούσης μονάδος τριπλασιασμῷ, δεῖ δὲ τὴν ὑπεναντίως ἔχουσαν − 1 τριπλασιάσαι, ὡς ἂν τὸ ἐκ

τοῦ

τοῦ Α γινόμενον προέλθοι τὸν αὐτὸν τρόπον, ὃν καὶ τὸ − 3 ἐκ τοῦ + 1 παράγεται· τούτου δὴ χάριν οὐδὲ τὸ Α ποσὸν τριπλασιαστέον ἐστὶ, τὸ δ' ἐκείνῳ ἀντίθετον − Α, εἰ τὸ + Α πολλαπλασιάσαι δεήσει· καὶ τοὐναντίον τὸ + Α, εἰ τὸ − Α. Οὕτω γὰρ δὴ καὶ + 1 οὐχὶ τοῦ − 3 τριτημόριον ἐστὶ, τοῦ δ' ἀντιθέτου + 3. Ἵνα τοίνυν καὶ ἐκ τοῦ Α τὸ πηλίκον προκύψῃ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὃν καὶ + 1 πρόεισιν ἐκ − 3, οὐκοῦν τὸ τοῦ διαιρετέου τριτημόριον ληπτέον, τὸ δὲ τῆς ἀντιθέτου ποσότητος, ὅπερ ἔσαι − $\frac{1}{3}$ Α, ἐὰν τὸ Α ᾖ θετικόν· καὶ + $\frac{1}{3}$ Α, ἐὰν τὸ Α ᾖ ἀποφατικόν.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 652. Δυοῖν ποσῶν δι' ἀλλήλων πολλαπλασιαζομένων, ἢ διαιρουμένων, ὑπὸ μὲν σημείοις τοῖς αὐτοῖς, τοῦ παραγομένου, ἢ τοῦ πηλίκου σημεῖον ἔσαι τὸ +· ὑπὸ δὲ τοῖς ὑπεναντίως ἔχουσι, τὸ −.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν γὰρ τῶν ἃ δι' ἀλλήλων πολλαπλασιάσαι δέον, ἢ διελεῖν, α καὶ β, κατ' ἀναλογίαν ἐκλαοσομένων, μὴ μόνον τις προσέχῃ τῇ ποσότητι ἁπλῶς, ἀλλὰ καὶ τῇ καταστάσει καθ' ἣν αὐτὰ διὰ τῶν σημείων + καὶ − διώρισαι, φανερὸν ὅτι,

$$+1 : +\alpha = +\beta : +\alpha\beta$$
$$+1 : +\alpha = -\beta : -\alpha\beta$$
$$+1 : -\alpha = +\beta : -\alpha\beta$$
$$+1 : -\alpha = -\beta : +\alpha\beta$$

Καὶ δὴ καὶ $+\alpha : +1 = +\beta : +\frac{\beta}{\alpha}$

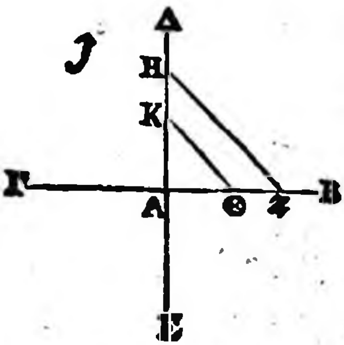
$$+\alpha : +1 = -\beta : -\frac{\beta}{\alpha}$$
$$-\alpha : +1 = +\beta : -\frac{\beta}{\alpha}$$
$$-\alpha : +1 = -\beta : +\frac{\beta}{\alpha}$$

Ἐν ταύταις οὖν ταῖς ἀναλογίαις, ἅπασαι αἱ τῶν σημείων ἔνεισι συζυγίαι, ὅσας ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἢ τῆς διαιρέσεως οἷόν τε λαβεῖν, ὅτι ἡ μονὰς καταφατικῶς ἀεὶ ἐκλαμβάνεται. Ὥστε δῆλον τὸ προτεθέν.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

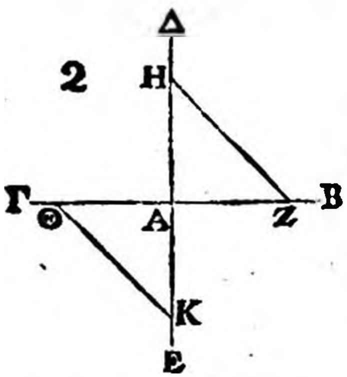
§. 653. Αὐτὸ δὲ τοῦτο καὶ ἐκ τῆς κατασκευῆς δῆλον, καθ' ἣν Γεωμετρικῶς τριῶν εὐθειῶν διδομένων τὴν τετάρτην ἀνάλογον προσευρίσκειν μανθάνομεν· τελοῖτο δ' ἂν τὰ τῆς κατασκευῆς ἐν γένει ὧδε.

Διὰ τοῦ Α σημείου ἀχθήτωσαν εὐθεῖαι δύο ἐπέκεινα πέρατος πρὸς ὀρθὰς τεμνόμεναι. Κείσθωσαν δὲ αἱ μὲν ἀπὸ Α πρὸς Β τείνουσαι εὐθεῖαι θετικαὶ εἶναι, αἱ δ' ἀπεναντίον ἀπὸ Α πρὸς Γ ἀποφατικαί. Καὶ τῶν ἐπὶ τῆς ἑτέρας δὲ τῶν εὐθειῶν, αἱ μὲν ἀπὸ Α πρὸς Δ θετικαί, αἱ δὲ ἀπὸ Α πρὸς Ε ἀποφατικαί.

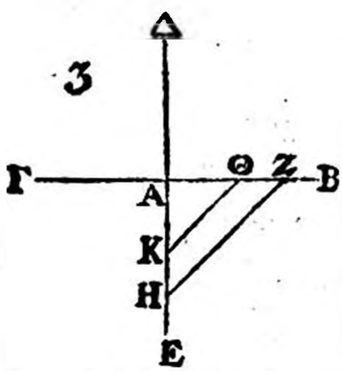


Ἐὰν οὖν ἐπὶ ταῖς τρισὶ δοθείσαις $+\alpha, +\beta, +\gamma$ τετάρτην ἀποδοῦναι δέῃ ἀνάλογον, ποίει $AZ = \alpha$, καὶ $AH = \beta$, ἐπιζεύξας τὴν ΖΗ. Εἶτα ποίει $A\Theta = \gamma$, καὶ ἀπό γε τοῦ Θ τὴν ΘΚ ἀγαγὼν παράλληλον τῇ ΖΗ, ἕξεις δὴ τὴν ζητουμένην ΑΚ, ἣν ἐπάναγκες καταφατικὴν εἶναι, ἐφ' ὁποῖον ἄντποτε σημεῖον τὸ Θ πέσοι, τῶν ἐπὶ τῆς ΑΒ, τῆς πέρατος ἐπέκεινα.

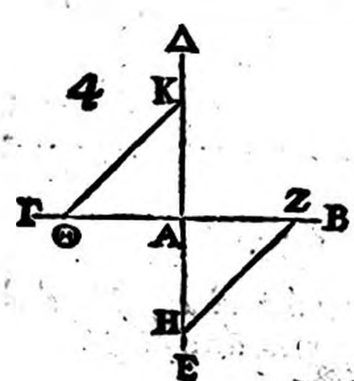
Ἐὰν



Ἐὰν δὲ δεύτερον ἐπὶ ταῖς + α, + β, − γ, τετάρτη ἡ ζητουμένη ἀνάλογον, τίθει καὶ ὧδε, ΑΖ = α καὶ ΑΗ = β, τὴν ΖΗ ὡς πρότερον ἐπιζεύξας. Τὴν δὲ ΑΘ = γ, ἅτε δὴ ἀποφατικὴν οὖσαν ἐπὶ τοὐναντίον ΑΓ μετάγαγε· τὴν γὰρ ΘΚ πρὸς ΗΖ παράλληλον ἐνταῦθα ἄγων, ἕξεις ΑΚ τὴν ζητουμένην ἐπιδήλως ἀποφατικήν.



Ἐὰν τρίτον ἐπὶ ταῖς + α, − β, + γ, τὴν τετάρτην ἀνάλογον δέησῃ προσευρεῖν, ποίει καὶ ὧδε ΑΖ = α, καὶ τὴν μὲν ΑΗ = β ἀπὸ τοῦ Α πρὸς τὸ Ε θοῦ, ὅτι β ἀποφατικῶς ὑπόκειται· τὴν δὲ ΑΘ = γ ἀπὸ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, ὅτι γ καταφατική. Ἐπιζευχθείσης δὲ αὖθις τῆς ΖΗ, καὶ διὰ τοῦ Θ πρὸς αὐτὴν ἀχθείσης παραλλήλου τῆς ΘΚ, ἔσται ΑΚ ἡ ζητουμένη, παραπλησίως καὶ ἤδη ἀποφατική.



Ἐὰν δὲ τέταρτον ἐπὶ ταῖς + α, − β, − γ τετάρτην ἀνάλογον εὑρέσθαι δέῃ· λαβὼν μὲν τὴν ΑΖ = α πρὸς τὸ κατὰ Β μέρος, ἅτε καταφατικήν, τάξας δὲ τὴν ΑΗ = β πρὸς τὸ κατὰ τὸ Ε, καὶ τὴν ΑΘ = γ πρὸς τὸ κατὰ τὸ Γ, ὡς ταύτας ἀμφω ἀποφατικάς· ἐπισυνάψαστε ὡς ἀνωτέρω τὴν ΖΗ, καὶ τὴν πρὸς ταύτην παράλληλον ἀπὸ τοῦ Θ ἀγαγὼν, λήψῃ δὴ κἀνταῦθα τὴν ζητουμένην ΑΚ αὖθις καταφατικήν.

Ἐὰν τοίνυν ἡ ΑΚ ἁπανταχοῦ ῥηθῇ δ, ἐπὶ τῶν τεττάρων τουτωνὶ τρόπων,

$$+\alpha : +\beta = +\gamma : +\delta$$
$$+\alpha : +\beta = -\gamma : -\delta$$
$$+\alpha : -\beta = +\gamma : -\delta$$
$$+\alpha : -\beta = -\gamma : +\delta$$

εὔδηλον ὡς τὸ ἐπὶ δ τοῦ τετάρτου τῶν ὅρων σημεῖον κεῖται ὀρθῶς. Λοιποὶ δὲ τρόποι οἱ ἑξῆς τέτταρες·

$$-\alpha : -\beta = -\gamma : -\delta$$
$$-\alpha : -\beta = +\gamma : +\delta$$
$$-\alpha : +\beta = -\gamma : +\delta$$
$$-\alpha : +\beta = +\gamma : -\delta$$

Ἐν οἷς τὰ τῶν προτέρων σημεῖα ἀντιστρόφως τέτακται. Ἀλλ' ἐν τούτοις τόγε τοῦ τετάρτου τῶν ὅρων σημεῖον ὀρθῶς ὑποκεῖσθαι διὰ τῶν αὐτῶν σχημάτων δειχθήσεται, ἐὰν οὕτω καὶ τὰ σχήματα ἀντίστροφα τεθῇ, ὡς τὸ μὲν ΑΒ τῆς ἔξω πέρατος εὐθείας εἰς χώραν τὴν τῶν ἀποφατικῶν ἀφορισθῆναι, τὸ δὲ ΑΓ εἰς τὴν τῶν θετικῶν. Καὶ τὸ μὲν ΑΔ ὁμοίως ταῖς ἀποφατικαῖς ἀποκληρωθῇ ποσότησι, τὸ δ' ΑΕ ταῖς θετικαῖς. Τούτου γὰρ γινομένου τὰ διαγραφέντα ἀνωτέρω σχήματα, ταῖσδε ταῖς ὑστέραις τέτταρσιν ἀναλογίαις εὐτάκτως ἀντιστοιχήσει. Ἀλλὰ γὰρ ὑπὲρ τὰς ὀκταρίθμους τάσδε συζυγίας, τὰ σημεῖα διαταχθῆναι ἀμήχανον.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 654. Ὅ,τίποτ' ἂν σημαίνῃ τὸ α, ἐὰν ἀπὸ τῆς μονάδος α°, ἑκατέρωθεν ἐς ἄπειρον στοιχοῦσα προβαίνῃ ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος

α^{3},

α^{-3}, α^{-2}, α^{-1}, α^{0}, α^{1}, α^{2}, α^{3}, α^{4}, α^{5}, ὁ ὅρος α Ῥίζα καλεῖται πάντων τῶν λοιπῶν· οἱ δὲ, Δυνάμεις αὐτῆς ἀκούουσιν ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸν ὅρον ἐπισήμου ἑκάστη παρονομαζόμεναι. Διὰ τοῦ αὐτοῦ δὲ ἀριθμοῦ καὶ τῇ ῥίζῃ τὸ ὄνομα, ἢ πρὸς τήνδε, ἢ τήνδε τὴν δύναμιν ἀναφέρεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 655. Ἐνθεντοι καὶ α^{2} δύναμις ἤκουσε Δευτέρα τῆς ῥίζης α· ἡ δὲ α ἀνάπαλιν ῥίζα Δευτέρα τῆς δυνάμεως α^{2}. Καὶ α^{3} δὲ δύναμις Τρίτη τῆς ῥίζης α· ἡ δὲ α ῥίζα Τρίτη τῆς δυνάμεως α^{3}· καὶ οὕτω κἀπὶ τῶν λοιπῶν. Καθ' ἃ δὴ καὶ α^{1} Πρώτην δύναμιν τῆς αὐτῆς ῥίζης α θέμις ἀποκαλεῖν ἀφ' ἧς οὐθὲν τι τὸ παράπαν διενήνοχε· τὸ δὲ α^{0}, ἤτοι 1 ἀδύναμον. Ἀλλὰ α^{-1} λέγοιτ' ἂν τῆς α ῥίζης δύναμις Ὑποπρώτη, καὶ α^{-2} Ὑποδευτέρα, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως. Εἰ καὶ οὕτως ἁπλῶς ἐκράτησε ταύτας ἀποκαλεῖν τοὺς κατὰ τὰ ἐπίσημα μόνον ἀριθμοὺς ὀνομάζοντας· οἷον τὴν α^{-5} φέρε, δύναμιν εἶναι λέγοντας τῆς ῥίζης α, ἧς τοὐπίσημον, ἤτοι ὁ ἐκθέτης -5. κξ.

§. 656. Κατὰ ταυτὰ δὲ καὶ α^{2} τὸ Τετράγωνον ἦν τῆς δυνάμεως α· καὶ α^{3} τῆς αὐτῆς ὁ Κύβος· καὶ α^{4} τὸ Διτετράγωνον, καὶ οὕτως ἑξῆς· ὅτι δηλαδὴ ὁ λόγος $\alpha^{2} : 1$ διπλασίων τοῦ $\alpha : 1$, ἡλίκος δὴ καὶ ὁ τῶν τετραγώνων, ὧν α καὶ 1 σημαίνουσι τὰς πλευράς. Καὶ ὁ λόγος $\alpha^{3} : 1$ τριπλασίων τοῦ $\alpha : 1$, ἡλίκος δὴ ὁ τῶν κύβων, ὧν αἱ πλευραὶ α καὶ 1. Παραπλησίως οὖν καὶ τῶν ῥιζῶν ἡ μὲν δευτέρα εἴρηται καὶ Τετραγωνική· ἡ δὲ τρίτη Κυβική· καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἀλλὰ γὰρ εἰς σημασίαν τῶν ὑπερτέρων δυνάμεών τε καὶ ῥιζῶν, ἡ τῶν τοιῶνδε ὀνομάτων χρῆσις καθ' ἡμᾶς ἤδη κατήργηται.

§. 657. Τὸ δ' εἰρημένον τὰς παρωνυμίας ταύτας τὰς αὐτὰς κρατεῖν, ὅ,τίποτ' ἂν τὸ α σημαίνειν τάσσοιτο, οὐδέπως ἐστὶ νοητέον· οἷον ἐὰν $\alpha = \beta^{\sigma}$, ἔσται $(\beta^{\sigma})^2$ ἡ τοῦ α, ἢ τοῦ β^{σ} δύναμις ἡ δευτέρα· καὶ $(\beta^{\sigma})^3$ ἡ τρίτη· καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἢ ἐὰν $\alpha = \sqrt{\beta}$, ἔσται $(\sqrt{\beta})^2$ ἡ τοῦ α, ἢ τοῦ $\sqrt{\beta}$ δύναμις ἡ δευτέρα· καὶ $(\sqrt{\beta})^3$ ἡ τρίτη· καὶ αἱ λοιπαὶ ὡσαύτως. Οὕτω καὶ ἐὰν τεθῇ $\alpha = (\beta\gamma\gamma + \gamma^3)$ ἔσται $(\beta\gamma^2 + \gamma^3)^{\sigma}$ αὐτοῦ τοῦ α, ἢ τοῦ $(\beta\gamma\gamma + \gamma^3)$ δύναμις, ἡ κατὰ τὸ σ. Καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον αὐτὸ τοῦτο καὶ περὶ τῶν ῥιζῶν τῶν κατὰ πάσας τὰς τάξεις νοήσομεν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 658. Ἐπειδὴ ἐν οἱαδήποτε προόδῳ γεωμετρικῇ, ἕκαστος τῶν ὅρων ἐστὶ πρὸς ἕτερον, ὡς τρίτος ὁ τυχὼν πρὸς τέταρτον τὸν ἐπίσης ἀπέχοντα, καὶ πρὸς μέρη τὰ αὐτά· ἐὰν ἐπὶ τῆς προσληφθείσης προόδου ὁποιοσοῦν ὅρος, δι' ὁποιουδήποτε πολλαπλασιασθῇ, ἢ γοῦν διαιρεθῇ, τὸ γινόμενον, ἢ τὸ πηλίκον, εἴστις τῶν κατὰ τὴν πρόοδον ὅρων εἶναι ὀφθήσεται, τοῖς ἀπὸ τοῦ τρίτου πρόσω, ἢ ὀπίσω ἀριθμοῦσιν ἁπάντων. Οὕτως $\alpha^2 \times \alpha^3 = \alpha^5$· καὶ $\alpha^{-1} \times \alpha^{-2} = \alpha^{-3}$· ὡς δ' αὕτως καὶ $\frac{\alpha^3}{\alpha^2} = \alpha$· καὶ $\frac{\alpha^5}{\alpha^3} = \alpha^2$· καὶ $\frac{\alpha^2}{\alpha^5} = \alpha^{-3}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 659. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι τῶν ἀπὸ τῆς αὐτῆς ῥίζης ὁποιωνδήποτε δυνάμεων, ἐπ' ἀλλήλας ἀγομένων, δύναμις ἐστὶ καὶ τὸ γινόμενον ἀπὸ ῥίζης τῆς αὐτῆς. Τῆς δὲ τηλικαύτης δυνάμεως ἐπίσημον, τὸ ἐκ τῶν ἐν ταῖς ἐπιπολλαπλασιαζομέναις δυνάμεσιν

ἐπι-

ἐπισήμων ἄθροισμα. Ἐὰν δὲ ὁποιαδήποτε δύναμις, δι᾽ ὁποιασδήποτε ὁμορρίζου δυνάμεως διαιρεθῇ, ἔσαι δὴ καὶ τὸ πηλίκον δύναμις ὁμόρριζος· ἧς ἐπίσημον ἡ τῶν ἐν ἐκείναις ταῖς δυνάμεσιν ἐπισήμων διαφορά. Τῶν μὲν οὖν α^{μ} καὶ α^{τ} δυνάμεων ἐπ᾽ ἀλλήλαις ἀγομένων, τὸ ἐπίσημον τοῦ γινομένου ἔσαι $\mu + \tau$· τῶν αὐτῶν δὲ τῆς προτέρας διαιρεθείσης διὰ τῆς δευτέρας, τὸ τοῦ πηλίκου ἐπίσημον ἔσαι $\mu - \tau$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 660. Ὅτι δὲ $\alpha^{-3} = \frac{\alpha^{2}}{\alpha^{5}}$, ἐὰν ἑκάτερος τῶν ὅρων τῶν ἐν τῷ κλάσματι διὰ α^{2} διαιρεθῇ, ἑπομένως ἔσαι $\alpha^{-3} = \frac{1}{\alpha^{3}}$. Καὶ ἐν γένει $\alpha^{-\mu} = \frac{1}{\alpha^{\mu}}$. Τὸ δ᾽ αὐτὸ καὶ ἐκ τῆς φύσεως τῆς γεωμετρικῆς προόδου καταφανές. Δῆλον γὰρ κἀν ἐκ τοῦδε τοῦ παραδείγματος,

$$\tfrac{1}{32},\ \tfrac{1}{16},\ \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{2},\ 1,\ \tfrac{2}{1},\ \tfrac{4}{1},\ \tfrac{8}{1},\ \tfrac{16}{1},\ \tfrac{32}{1}.$$

ὅτι οἱ ἀπὸ τῆς μονάδος ἐν ἴσοις τοῖς διαλείμμασιν ἀλλ᾽ ἐπὶ τὰ ἀντίθετα τῶν μερῶν ἀφεςῶτες ὅροι, διὰ κλασμάτων ἐκδηλοῦνται, ὧν θάτερον θατέρου ἐςὶ τὸ ἀντίςροφον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 661. Ἐπειδὴ δὲ ἐν γένει $\alpha^{\mu} \times \alpha^{\tau} = \alpha^{\mu+\tau}$, ἐὰν ᾖ $\mu = \tau$, ἔσαι $\alpha^{2\mu}$ τῆς ποσότητος α^{μ} δύναμις δευτέρα. Ἡ δὲ, πολλαπλασιασθεῖσα αὖθις διὰ α^{μ}, δώσει $\alpha^{3\mu}$ δύναμιν τὴν τρίτην, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Καὶ κατὰ γένος, πᾶσα δύναμις α^{μ}, ὡς ῥίζα τις θεωρουμένη, πρὸς ἄλλην ὁποιανοῦν δύναμιν ἧς ἐπίσημον φέρε τὸ σ, ἐξαίρεται, τῶν κατ᾽ αὐτὰς ἐπιπολλαπλασιαζομένων ἐπισήμων μ καὶ σ, οὕτως ὥςε ἀνακύπτειν $\alpha^{\mu\sigma}$. Ὅπερ αὖθις ἡ τῆς γεωμετρικῆς προόδου φύσις, σαφῶς παρίςησι. Δῆλον γὰρ (ὃς δ᾽ ἂν

εἴη

εἴη ὁ ὁλοχερὴς ἀριθμὸς ὁ ὑπὸ τοῦ μ σημαινόμενος) ὡς οἱ ἐν τῇ προόδῳ ὅροι,

$$1 \cdot\cdot\; \alpha^{\mu} \cdot\cdot\; \alpha^{2\mu} \cdot\cdot\; \alpha^{3\mu} \cdot\cdot\; \alpha^{4\mu} \cdot\cdot\; \alpha^{5\mu}$$

ἐν ᾗ ὁ δεύτερος ἐςὶν α^{μ}, ἴσῳ τῷ διαλείμματι ἀλλήλων ἀπέχουσιν· οἵτε μεταξὺ τῶν 1 καὶ α^{μ} παρεμπίπλοντες, ἰσάριθμοι τοῖς μεταξὺ τῶν α^{μ} καὶ $\alpha^{2\mu}$ εἰσὶ, καὶ τοῖς μεταξὺ τῶν $\alpha^{2\mu}$ καὶ $\alpha^{3\mu}$ ὡσαύτως· καὶ ἐφεξῆς. Τοιγαροῦν καὶ οἱ ἐκκείμενοι 1, α^{μ}, $\alpha^{2\mu}$, $\alpha^{3\mu}$, κ. ξ. γεωμετρικῶς προβαίνουσιν· ὅ, τε $\alpha^{2\mu}$ τοῦ α^{μ} ἐςὶν ὁ τετράγωνος, καὶ ὁ $\alpha^{3\mu}$ ὁ κύβος, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 662. Καὶ ἀνάπαλιν ἄρα ἐὰν τὸ ἐπίσημον ἡςτινοσοῦν δυνάμεως α^{μ} διαιρεθῇ διὰ 2, τὸ δὲ πηλίκον ὡς ἐπίσημον καινῆς δυνάμεως ἐκληφθῇ, ἔςαι $\alpha^{\frac{1}{2}\mu}$ τῆς προτέρας ἡ ῥίζα δυνάμεως ἡ τετραγωνική. Ἐὰν δὲ διὰ 3 τὸ $\alpha^{\frac{1}{3}\mu}$ τὴν ῥίζαν ἐκείνης δηλώσει τὴν κυβικήν. Καὶ ἐν γένει, τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{\sigma}}$ τῆς α^{μ} δυνάμεως τὴν ῥίζαν προβαλεῖται τὴν κατὰ τὸν βαθμὸν σ. Διαιρουμένου γὰρ τοῦ μ διὰ τοῦ σ, ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὡς τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{\sigma}}$ ἐξαρθὲν ἐπὶ τὴν δύναμιν, ἧς τοὐπίσημον σ, γίνεται α^{μ}· μὴ διαιρουμένου δὲ, καὶ τὸ $\frac{\mu}{\sigma}$ ἀριθμὸς ὁλοχερὴς εἶναι οὐ δύναται, ἀλλ' οὐδὲν ἧττον ὅμως τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{\sigma}}$ τὴν ῥίζαν $\sqrt[\sigma]{\alpha^{\mu}}$ ὑποσημανεῖ. ὅ, τι δ' ἂν τὸ α τις ὑποθείη.

ΠΟΡΙΣΜΑ ς'.

§. 663. Ἔςω $\alpha = \dfrac{\beta^{\varrho}\,\delta^{\tau}}{\gamma^{\upsilon}}$, καὶ ἔςαι· (§. 191.)

$$\alpha^{2} = \frac{\beta^{2\varrho}\,\delta^{2\tau}}{\gamma^{2\upsilon}}$$

$$\alpha^{3} = \frac{\beta^{3\varrho}\,\delta^{3\tau}}{\gamma^{3\upsilon}}$$

Καὶ

Καὶ ἐν γένει, $\alpha^{\mu} = \frac{\beta^{\mu\rho}\delta^{\mu\tau}}{\gamma^{\mu\nu}}$

Ὅθεν ἀνάπαλιν, ἐὰν ᾖ $\alpha^{\mu} = \frac{\beta^{\rho}\delta^{\tau}}{\gamma^{\nu}}$, δέῃ δὲ λαβεῖν ἀπὸ α^{μ} τὴν ῥίζαν τὴν κατὰ τὸν βαθμὸν σ, ἕκαστον τῶν ἐπισήμων ρ, τ, ν διαιρετέον διὰ σ, ὥστε γενέσθαι.

$$\alpha^{\frac{\mu}{\sigma}} = \frac{\beta^{\frac{\rho}{\sigma}}\delta^{\frac{\tau}{\sigma}}}{\gamma^{\frac{\nu}{\sigma}}} = \sqrt[\sigma]{\alpha^{\mu}}.$$

Διὸ δὴ οἱ τύποι οἵδε,

$$\sqrt[\sigma]{\frac{\beta^{\rho}\delta^{\tau}}{\gamma^{\nu}}} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\sqrt[\sigma]{\beta^{\rho}}\times\sqrt[\sigma]{\delta^{\tau}}}{\sqrt[\sigma]{\gamma^{\nu}}}$$

ἀείποτε ἰσοδυναμήσουσιν· ἤτε καθ᾽ οἱανδήποτε βαθμὸν σ ῥίζα τοῦ ὅρου α^{μ}, τοῦ τετάρτου ἀνάλογον πρὸς γ^{ν}, καὶ β^{ρ}, καὶ δ^{τ} τυγχάνοντος, τετάρτη ἀνάλογον καὶ αὐτὴ ἔσται πρὸς τὰς ῥίζας, γ^{ν}, β^{ρ}, δ^{τ}, τὰς ὁμοβαθμίους (§. 192.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ.

§. 664. Ἐὰν δὲ ᾖ $\alpha^{\mu} = \frac{\alpha^{\rho}\alpha^{\tau}}{\alpha^{\nu}}$, ἔσται $\mu = \rho + \tau - \nu$. Καὶ ἑκατέρωθεν ἄρα τῆς ὁμοβαθμίου ληφθείσης ῥίζης, ἐὰν γένηται $\alpha^{\frac{\mu}{\sigma}} = \frac{\alpha^{\frac{\rho}{\sigma}}\alpha^{\frac{\tau}{\sigma}}}{\alpha^{\frac{\nu}{\sigma}}}$, ἔσται $\frac{\mu}{\sigma} = \frac{\rho+\tau-\sigma}{\sigma} = \frac{\rho}{\sigma}+\frac{\tau}{\sigma}-\frac{\nu}{\sigma}$. Τοιγαροῦν τὸ ἐπίσημον $\frac{\mu}{\sigma}$ γίνεται ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{\rho}{\sigma}$, $\frac{\tau}{\sigma}$, $\frac{\nu}{\sigma}$ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὃν καὶ τὸ τοῦ ὅρου α^{μ}, τοῦ ἐπὶ τῆς ἀναλογίας $\alpha^{\nu} : \alpha^{\rho} = \alpha^{\tau} : \alpha^{\mu}$ τεταρτεύοντος,

ἐκ

ἐκ τῶν ὁλοχερῶν ἐπισήμων τῶν κατὰ τοὺς ἡγουμένους ὅρους συνεπιφέρεται· προθέσει δηλαδὴ τῶν ἐπισήμων τῶν ἐπὶ ταῖς δυνάμεσι τῆς ῥίζης α, ὧν τὴν ἑτέραν πολλαπλασιάζειν δεῖ διὰ τῆς ἑτέρας, καὶ ἀφαιρέσει τοῦ κατὰ τὸν διαιρέτην ἐπισήμου ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος. Ἔνθεντοι καὶ ἐὰν τύχῃ τῶν κλασματικῶν τὰ ἐπίσημα, παραπλησίῳ τῷ ὑπολογισμῷ, τὰ τοῦ γινομένου, ἢ τοῦ πηλίκου, ὡς καὶ κατὰ τὸ ὁλοχερῆ ἐκκαλύπτεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Η.

§. 665. Καὶ ἔσται δὴ $\alpha^{2\mu}$ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς δυνάμεως α^{μ}, καὶ $\alpha^{3\mu}$ ὁ κύβος, καὶ ἑξῆς ὁμοίως· κἄντε ὁλοχερὲς τύχοι τὸ μ, κἄντε ᾖ κλασματῶδες. Καθ' ἑκατέραν γὰρ τῶν ὑποθέσεων,

$$\alpha^{0},\ \alpha^{\mu},\ \alpha^{2\mu},\ \alpha^{3\mu},\ \alpha^{4\mu},\ \alpha^{5\mu} \ldots\ \alpha^{\sigma\mu}$$

πρόοδος ἡμῖν ἐκκείσεται γεωμετρικὴ, ἐν ᾗ ἀπὸ τῆς μονάδος α^{0}, ἄχρι τοῦ $\alpha^{\sigma\mu}$, ὅροι μεσιτεύουσι τὸν ἀριθμὸν σ, ὧν ὁ δεύτερος ἐστὶν ὁ α^{μ}.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 666. Διὰ τῶνδε τῶν κανόνων, τὰ ῥιζικὰ τῶν σημείων, ἅτινα τῷ τύπῳ ἀπαντήσει, ῥᾷστα ἐκ μέσου γενήσεται· καὶ εἴπου παρὰ ταῦτα, ἐπὶ ἐκκειμένου τινὸς τύπου, ὃς ἂν δίκην μέλους ἐξισώσεως θεωροῖτο, μηδὲ ποσότητες ἐνεῖεν ἐξ ἄλλων συνδέσμῳ συνημμένων συγκείμεναι, εἰς τύπον ἀείποτ' ἂν ἀναχθείη τὸν ἐμφερῆ τῷδε.

$$\alpha^{\mu}\beta^{\nu} + 3\alpha\beta^{\mu}\gamma^{-\xi} - 5\alpha^{\nu}\beta^{-\nu}\gamma^{\nu}.$$

Ἐν ᾧ δηλαδὴ ἕκαστον τῶν σημείων, γινόμενόν τι μοναδικὸν διατίθησιν, ἐκ δυνάμεων συνεστὼς ὧν τὰ ἐπίσημα ἤτοι ὁλοχερῆ, ἢ κεκλασμένα· θετικὰ, ἢ γοῦν ἀποφατικά. Νοητέον δὲ τοὺς οὕτως ἔχοντας τύπους, εὐκρινεῖς αὐτοὺς καὶ ἀρρίζους ἀκούοντας.

ΘΕΩΡΗ-

ΘΕΩΡΗΜΑ·

§. 667. Ἐὰν $\alpha + \beta - \gamma$ πολλαπλασιάσαι δέη διὰ $+ \delta$, ἔσαι δὴ τὸ γινόμενον $\delta\alpha + \delta\beta - \delta\gamma$. Ἐὰν δὲ διὰ $- \delta$, προκύψει $- \delta\alpha - \delta\beta + \delta\gamma$.

ΔΕΙΞΙΣ·

Ἔςι γὰρ $1 : \delta = + \alpha : + \delta\alpha$
καὶ $1 : \delta = + \beta : + \delta\beta$
καὶ $1 : \delta = - \gamma : - \delta\gamma$

Ἄρα (§. 174.), $1 : \delta = \alpha + \beta - \gamma : \delta\alpha + \delta\beta - \delta\gamma$· ὅπερ ἰῶ τὸ πρῶτον.

Ἐντεῦθεν δ' ἕπεται, ὅτι καὶ τῶν ἐπὶ τῆς ἀναλογίας σημείων, τῶν κατὰ τὸν δεύτερον καὶ τέταρτον ὅρον ἐπαμειβομένων (§. 652.) ἔσαι,

$$1 : - \delta = \alpha + \beta - \gamma : - \delta\alpha - \delta\beta + \delta\gamma.$$

ὅπερ ἰῶ θάτερον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α·

§. 668. Τοῦ ἄρα κατὰ συμπλοκὴν παράγοντος $\alpha + \beta - \gamma$ διὰ τοῦ ἁπλοῦ $+ \delta$, ἢ $- \delta$ πολλαπλασιαζομένου, γίνεται τὸ παραγόμενον, τῷ τὸν πολλαπλασιασμὸν διὰ πάντων ἐπάγεσθαι τῶν ὅρων, καὶ τὰ ἐντεῦθεν ἀνακύπτοντα, διὰ τῶν σὺν οἷς προκύπτει σημείων διασημαίνεσθαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β·

§. 669. Κἀντεῦθεν ὁ λόγος ἐπιφέρεται τοῦ δι' ἀλλήλων τοὺς ἐν συμπλοκῇ πολλαπλασιάζειν παράγοντας· οἷον τὸν $\alpha + \beta - \gamma$, διὰ τοῦ $\delta - \varepsilon + \zeta$. Μετιοῦσι γὰρ τὸν πολλαπλασιασμὸν ὡς εἰ καὶ ἁπλοῦς τις εἴη, γενήσεται $= \alpha(\delta - \varepsilon + \zeta) + \beta(\delta - \varepsilon + \zeta) - \gamma(\delta - \varepsilon + \zeta)$· τὰ δὲ γινόμενα ἐὰν ἤδη ὁ παράγων $\delta - \varepsilon + \zeta$ ἐκληφθῇ ὡς συγκείμενος, τοιαῦτα προβαίνει.

$$+\alpha(\delta-\varepsilon+\zeta)=\alpha\delta-\alpha\varepsilon+\alpha\zeta$$
$$+\beta(\delta-\varepsilon+\zeta)=\beta\delta-\beta\varepsilon+\beta\zeta$$
$$-\gamma(\delta-\varepsilon+\zeta)=-\gamma\delta+\gamma\varepsilon-\gamma\zeta.$$

Καὶ πρόεισι τοίνυν τὸ ὅτω παραγόμενον τῶν ὅρων ἑκάστου τῶν ἐπὶ θατέρου τῶν παραγόντων, πολλαπλασιαζομένου δι᾽ ἑκάστου τῶν ἐπὶ θατέρου, καὶ τῶν ἐντεῦθεν ἀνακυπτόντων τοῖς σὺν οἷς συμπροῆλθε σημείοις γνωριζομένων.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 670. Ἔνθεν τοι ὁ ποσότητος συμπεπλεγμένης διὰ παραπλησίας ἄλλης ῥᾶστα τελεῖται πολλαπλασιασμὸς, ἐὰν εὐκρινεῖς τε καὶ ἄῤῥιζοι ἀμφότεραι τύχωσι. Πρῶτον μὲν γὰρ ἐπ᾽ ἀλλήλων ἄγονται οἱ ἀριθμοί· ἔπειτα δὲ ἐπισημειοῦται τὰ γινόμενα ὑπὸ τῶν ποσοτήτων ἃς τὰ γράμματα ὑποδηλοῖ. Ἐπεὶ δ᾽ ἐν τούτοις ἡ τῶν γραμμάτων θέσις παρ᾽ ἡμῖν κεῖται, ὅπως ἂν βουλητὸν εἴη καταγράφειν αὐτὰ, εὖ ἂν ἔχοι κατὰ τὴν πρὸς ἄλληλα τάξιν τὰ στοιχεῖα ἐκτάσσειν, ἵν᾽ εὐδηλότερον οὕτω τῶν γινομένων ἅτ᾽ ἴσα ταυτὰ, καὶ ἅπερ ἕτερα καταφαίνοιτο. Ὧδε δέ τοι τῶν παραγομένων τὰ ἁπλούστερα εὑρεθέντα, ἐξ ὧν τὸ ὁλοσχερὲς συγκροτεῖται, συναπτέα ἐφ᾽ ἓν, ὡς ἂν ᾗπερ οἷόν τε ἁπλούστατα τὸ ζητούμενον παραστῇ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Α.

$$\begin{array}{r}
\alpha+2\beta-\gamma+3\delta \\
2\alpha-\beta+\gamma \\
\hline
2\alpha\alpha+4\alpha\beta-2\alpha\gamma+6\alpha\delta \\
-\alpha\beta-2\beta\beta+\beta\gamma-3\beta\delta \\
\alpha\gamma+2\beta\gamma-\gamma\gamma+3\gamma\delta \\
\hline
2\alpha\alpha+3\alpha\beta-\alpha\gamma+6\alpha\delta-2\beta\beta+3\beta\gamma-3\beta\delta-\gamma\gamma+3\gamma\delta.
\end{array}$$

ΠΑΡΑ-

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Β.

$$\begin{array}{l} 2\alpha\beta - 3\alpha\gamma + \beta\gamma \\ \alpha\gamma - 2\beta\gamma \\ \hline 2\alpha\alpha\beta\gamma - 3\alpha\alpha\gamma\gamma + \alpha\beta\gamma\gamma \\ -4\alpha\beta\beta\gamma + 6\alpha\beta\gamma\gamma - 2\beta\beta\gamma\gamma \\ \hline 2\alpha\alpha\beta\gamma - 3\alpha\alpha\gamma\gamma + 7\alpha\beta\gamma\gamma - 4\alpha\beta\beta\gamma - 2\beta\beta\gamma\gamma \end{array}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Γ.

$$\begin{array}{l} \alpha^3 + 2\beta\alpha^2 - 3\beta\gamma\alpha \\ 2\alpha^2 + 3\beta\alpha \\ \hline 2\alpha^5 + 4\beta\alpha^4 - 6\beta\gamma\alpha^3 \\ 3\beta\alpha^4 + 6\beta^2\alpha^3 - 9\beta^2\gamma\alpha^2 \\ \hline 2\alpha^5 + 7\beta\alpha^4 - 6\beta\gamma\alpha^3 + 6\beta^2\alpha^3 - 9\beta^2\gamma\alpha^2 \end{array}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Δ.

$$\begin{array}{l} \alpha^{\mu} + 2\alpha^{\mu-\nu}\beta^{-\tau} - 3\alpha^{-\mu}\beta^{\nu} \\ 3\alpha^{\nu} + \beta^{\tau} \\ \hline 3\alpha^{\mu+\nu} + 6\alpha^{\mu}\beta^{-\tau} - 9\alpha^{-\mu+\nu}\beta^{\nu} \\ \alpha^{\mu}\beta^{\tau} + 2\alpha^{\mu-\nu} - 3\alpha^{-\mu}\beta^{\nu+\tau} \end{array}$$

Ταῦτα δὲ συνεπιτμηθῆναι οὐχ οἷατε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ε.

Ἐὰν ἐπὶ τοῦ προσεχῶς ἀνωτέρω παραδείγματος διὰ τῶν μ καὶ ν καὶ τ ὑποσημαίνηται κλάσματα· ἢ δὲ καθ' ὑπόθεσιν $\mu = \frac{3}{2}$, $\nu = \frac{1}{2}$, $\tau = \frac{1}{3}$, ἔσται $\mu + \nu = 2$, καὶ $\nu - \mu = -1$, καὶ $\mu - \nu = 1$, καὶ $\nu + \tau = \frac{5}{6}$· ἅπερ ἀντὶ τῶν γραμμάτων ἀντεισενεχθέντα, τὸ ἀνῆκον τῇ ὑποθέσει τηρήσει. Ὡσαύτως δὲ χωρητέον συνάπλωσι καὶ τὰ διὰ γραμμάτων ἐκκείμενα κλάσματα.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 671. Καὶ κατὰ τάδε δὴ τὰ χήματα ἅπαντες οἱ τῶν εὐκρινῶς τε καὶ ἀῤῥίζως ἐγκειμένων ποσοτήτων πολλαπλασιασμοὶ περανθήσονται. Πρᾶργυ δ' ἂν εἴη τὸ ἕτω προκύπῖειν, κατὰ τὰς δυνάμεις τῶν ἐν αὐτῷ γραμμάτων ἕτως ἐκτάσσειν, ὡς τὰς μὲν ὑπερτερέσας ἡγεῖσθαι, τὰς δὲ βαθμηδὸν ὑποβαινέσας ἑφέπεσθαι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 672. Οἱασδηποτᾶν ποσότητος εὐκρινᾶς τε καὶ ἀῤῥίζε δι' ἄλλης ποσότητος παραπλησίας διαιρεθείσης, τὸ πηλίκον ὡς οἷοντε ἁπλέςατα ἔχον ἀποδᾶναι.

ΛΥΣΙΣ.

§. 673. Ἔςω δὴ πηλίκον $\frac{\alpha^3-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\beta^3}{\alpha+\beta}$, ἐν ᾧ τῶν ὅρων ἑκάτερον, κατὰ τὸ αὐτὸ γράμμα τὸ α ἐκτεταγμένον ὄντα ἁπλέςερον ἀποδᾶναι δεῖ. Ἐὰν τοίνυν τὴν διαιρέτην $\alpha+\beta$, δι' ἁπλᾶ παράγοντος, ὑφ' ὅπερ ἂν ὁ πρῶτος τᾶ διαιρετέα προέλθοι ὅρος, πολλαπλασιάσῃς, ὅς ἐπὶ τᾶ προκειμένα παραδείγματος ἐςὶν α^2 τό, τε γεγονὸς $\alpha^3+\alpha^2\beta$, ἀπὸ τᾶ διαιρεμένα ὑφέλῃς, καὶ τὸ λειπόμενον ὑποσημειώσῃς $-2\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\beta^3$, πηλίκον ἕξεις μικρὸν τᾶ ἀνωτέρω ἁπλέςερον τό, $\alpha^2+\frac{\beta^3-\alpha\beta^2-2\alpha^2\beta}{\alpha+\beta}$.

Ὡς εἴγε καὶ τᾶτο ἔτι βέλοιο τὸ ἁπλέςερον ἀπενέγκασθαι, μέτιθι καὶ τὸ ἐν χερσὶ κλάσμα παραπλησίως. Καὶ δὴ διαιρετέα μὲν ἤδη προκειμένα τᾶ $-2\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\beta^3$, διαιρέτα δὲ τᾶ αὐτᾶ ἐκείνα $\alpha+\beta$, ἐὰν τᾶτον διὰ $-2\alpha\beta$ πολλαπλασιάσῃς, προκύψει $2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2$. ὅπερ ἀπὸ τᾶ διαιρετέα

ἀφαι-

ἀφαιρεθέντος, ὑπολειφθήσεται $\alpha\beta^2 + \beta^3$. Καὶ παρέσαι ἤδη πηλίκον τὸ $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \frac{\alpha\beta^2 + \beta^3}{\alpha + \beta}$.

Ἁπλούστατον δὲ προελεύσεται τὸ πηλίκον, ἐὰν καὶ ἑξῆς τὸν διαιρέτην πολλαπλασιάσῃς ἔτι διὰ β^2· τὸ γὰρ οὕτω γινόμενον $\alpha\beta^2 + \beta^3$ ὡς ἂν ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸ ἔσχατον κλάσμα διαιρετέου ἀφαιρεθῇ, ἐπεὶ μηδὲν περαιτέρω ὑπολειφθήσεται, εὔδηλον ὅτι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον ἔσαι $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$.

§. 374. Εἰώθαμεν δὲ μιᾷ προόδῳ ἐπὶ τῆς οὕτω περαινομένης πράξεως χωρεῖν, ἐφ' ὅσον ἂν οὕτως ἄκλαστα τὰ μέρη τοῦ πηλίκου προκύπτοι, ὅπερ ἐπὶ τῶν ὑποκειμένων σχημάτων προχειρότατα τελεῖται. Ἔνθα τῶν παραγομένων, ἅπερ ἀφαιρεῖν δέον, τὰ σημεῖα ἐπὶ τἀναντία μετήμειπται, ὡς ἂν ἁπλῇ προσθέσει τὰ τῆς ἀφαιρέσεως ἐκπεραίνοιτο.

Διαιρέτης.	Διαιρετέος.	Πηλίκον.
$\alpha + \beta$	$\alpha^3 - \alpha^2\beta - \alpha\beta^2 + \beta^3$	$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
	$-\alpha^3 - \alpha^2\beta$	
	$-2\alpha^2\beta - \alpha\beta^2 + \beta^3$	
	$+2\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2$	
	$\alpha\beta^2 + \beta^3$	
	$-\alpha\beta^2 - \beta^3$	
	0	

Σχῆμα ἕτερον.

Διαιρέτης.	Διαιρετέος.
$\alpha^3 + 3\alpha\beta\gamma - \beta^2\gamma$	$2\alpha^5 + \alpha^3\beta\gamma - 2\alpha^2\beta^2\gamma - 15\alpha\beta^2\gamma^2$
	$+ 5\beta^3\gamma^2$
Πηλίκον.	$-2\alpha^5 - 6\alpha^3\beta\gamma + 2\alpha^2\beta^2\gamma$
$2\alpha^2 - 5\beta\gamma$	$-5\alpha^3\beta\gamma - 15\alpha\beta^2\gamma^2 + 5\beta^3\gamma^2$
	$+5\alpha^3\beta\gamma + 15\alpha\beta^2\gamma^2 - 5\beta^3\gamma^2$
	0

§. 675. Ἐπειδὴ δὲ οὐκ ἀεὶ διὰ τῶν ἀφαιρέσεων ὁ διαιρέτης οὕτως οἴχεται εἰς τὸ μηδὲν, λοιπὸν ἐστὶν (εἰμήτις ὡς ἐν ἀρχῇ ἦν κατὰ χώραν ἐάσαι τὸ κλάσμα ἕλοιτο) ἔκ τε τοῦ ὑπολειπομένου καὶ τοῦ διαιρέτου, καινόν τι κλάσμα πορίζεσθαι, ὃ τῷ ἀκλάστῳ τοῦ πηλίκου μέρει προσεπικαταγραπτέον· οἷον εἰ δέοι τὸ $\alpha^3 + 2\alpha^2\beta - \alpha\beta^2$ διελεῖν διὰ $\alpha\alpha + \alpha\beta$, ὧδέ πως ἔξει τό

ΣΧΗΜΑ.

Διαιρέτης.	Διαιρετέος.	Πηλίκον.
$\alpha\alpha + \alpha\beta$	$\alpha^3 + 2\alpha^2\beta - \alpha\beta^2$	$\alpha + \beta$
	$-\alpha^3 - \alpha^2\beta$	
	$\alpha^2\beta - \alpha\beta^2$	
	$-\alpha^2\beta - \alpha\beta^2$	
	$-2\alpha\beta^2$	

τὸ δ' ὅλον πηλίκον $\alpha + \beta - \dfrac{2\alpha\beta^2}{\alpha\alpha + \alpha\beta}$

Ἀλλὰ γὰρ τὸ κλάσμα δι' οὗ ἤτοι ὁλοσχερὲς τὸ πηλίκον, ἢ αὐτοῦ μέρος παρίσταται, ἐφ' ὅσον οἷόν τ' ἐλάχιστα συμπεπλεγμένον τὸν παρονομαστὴν ἀνακτέον, τῶν παραγόντων ὅσοι ἐπ' ἀμφοῖν τοῖς ὅροις κοινῇ ἐμφιλοχωροῖεν, ἀποβαλλομένων. Οἷον τὸ μὲν πηλίκον $\dfrac{\alpha^3 + 2\alpha^2\beta - \alpha\beta^2}{\alpha\alpha + \alpha\beta}$· ἁπλούστερον ἂν καταγράφοιτο $\dfrac{\alpha\alpha + 2\alpha\beta - \beta^2}{\alpha + \beta}$. τὸ δὲ ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύψαν, οὕτως $\alpha + \beta - \dfrac{2\beta\beta}{\alpha + \beta}$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς μὲν οὖν ὀρθῶς κατὰ τοὺς τεθέντας κανόνας τὰ τῆς διαιρέσεως χωρεῖ, ῥᾴδιον συνιδεῖν, τῷ τοῖς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ παραβαλεῖν ὅροις μὴ κατοκνήσαντι.

σαντι. Ἐςὶ γὰρ ὅτως ἀντίζυς τῶ πολλαπλασιασμῶ ἡ διαίρεσις, ὡς ταύτην ἀπὸ τῦ παραγομένυ διὰ θατέρυ τῶν παραγόντων, τὸν ἕτερον ἀποδιδόναι, τὸν μετὰ θατέρυ τὸ γεγονὸς συναποτελέσαντα. (§. 637.)

ΣΧΟΛΙΟΝ Α.

§. 676. Ὃς δ' ἂν κλασματίας εἴη τὸ πηλίκον ἐν τῷ μέρει συμπληρῶν, ἀλογεῖσθαι ὧδε ὐκ ἀεὶ δυνήσεται, καθάπερ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τὰ κλάσματα, (ἃ μετὰ τῦ ὁλοχερῦς συνίςησι τὸ πηλίκον, ὡς μικρόντι πάνυ φέροντα τὸ διάπλωμα), ὐδὲ λόγυ τὰ πολλὰ ἀξιῦται (§. 79.). Ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῦ ἐχάτυ τῶν ἀνωτέρω τὸ β φέρε, μάλα διαφέρον τύχῃ μεγέθει τῦ α, τὸ $\alpha + \beta$ μονονυχὶ τῷ β ϗ ἴσον ἔςαι, ὡς μορίῳ τύτυ πολλοςῷ ὑπερέχον. Ἔνθαυτοι τὸ $\frac{2\beta\beta}{\alpha+\beta}$, μικρόντι ἧττον ἔςαι τῦ 2β, τῦ ἐκ τῆς διαιρέσεως τῦ $2\beta\beta$ διὰ μόνυ τῦ β προκύπτοντος. Τοιγαρῦν τῦ $\frac{2\beta\beta}{\alpha+\beta}$ ἀμεληθέντος, πλέοντι ἂν ἀμεληθείη τῦ κατὰ τὸ λοιπὸν ἐν τῷ πηλίκῳ μέρος, ἤτοι τῦ $\alpha + \beta$. τὐναντίον μέντοι ἐὰν ἐπὶ τῦ αὐτῦ κλάσματος, μέγατι ὑπερβάλλον τύχῃ τὸ α ὑπὲρ τὸ β, πολλοςόντι ἔςαι τιννικαῦτα τὸ $\frac{2\beta\beta}{\alpha+\beta}$, ἡλίκον καὶ ἀδεῶς ἔχειν ὀλιγωρεῖσθαι, ἔνθα μάλιςα τὸ ὡς ἔγγιςα τῦ ἀληθῦς ζητεῖται γινόμενον.

§. 677. Ἄλλως τε δὲ ἐκ τῶν εἰρημένων καταφανὲς, ὅτι καὶ πολυτρόπως, τὴν δοθεῖσαν διὰ τῆς δοθείσης ποσότητος διαιρῦντας τὸ πηλίκον ἐςὶ παριςᾶν. Καὶ γὰρ δὴ καὶ τὸ κλάσμα, καθ' ὅπερ ἐπὶ τῆς ἐχάτης ἔςημεν διαιρέσεως, ἔχοι ἂν καὶ περαιτέρω ἀναπτυχθῆναι τόνδε τὸν τρόπον·

$$\begin{array}{l|l|l}
\alpha + \beta & 2\beta\beta \;\ldots\ldots & \dfrac{2\beta\beta}{\alpha} - \dfrac{2\beta^3}{\alpha^2} + \dfrac{2\beta^4}{\alpha^3} \\
 & -2\beta\beta - \dfrac{2\beta^3}{\alpha} & \\
\hline
 & \quad - \dfrac{2\beta^3}{\alpha} & \\
 & \quad + \dfrac{2\beta^3}{\alpha} + \dfrac{2\beta^4}{\alpha^2} & \\
\hline
 & \qquad \dfrac{2\beta^4}{\alpha^2} & \\
 & \qquad - \dfrac{2\beta^4}{\alpha^2} - \dfrac{2\beta^5}{\alpha^3} & \\
\hline
 & \qquad\qquad - \dfrac{2\beta^5}{\alpha^3} &
\end{array}$$

Οὗ προσληφθέντος γίνεται τὸ ὅλον πηλίκον,

$$\alpha + \beta - \frac{2\beta\beta}{\alpha} + \frac{2\beta^3}{\alpha^2} - \frac{2\beta^4}{\alpha^3} + \frac{2\beta^5}{\alpha^4\,(\alpha+\beta)}$$

Καὶ γὰρ οὐδ' ἐνταῦθα τὸ κλάσμα τὸ ἐκ τοῦ λοιποῦ καὶ τοῦ διαιρέτου ὀλιγωρητέον, εἰ μὴ καὶ τούτου πρόδηλον εἴη τὸ τῆς σμικρότητος. Ἔσται δὲ καὶ ὧδε τὸ $\frac{2\beta^5}{\alpha^4\,(\alpha+\beta)}$ τοσούτῳ μὲν ἔλαττον, ὅσῳ τὸ β τοῦ α ἐλαττονοῦται· τοσούτῳ δὲ μεῖζον, ὅσῳ τὸ β πρὸς τὸ αὐτὸ α μεγέθει διαφέρον ἐστί.

§. 678. Σημείωσαι ὅτι τοὺς ἐκτεθέντας κανόνας ῥᾴδιον καὶ ταῖς ποσότησι προσαρμόζειν, ταῖς δυνάμεις παρισώσαις, ὧν τὰ ἐπίσημα ἐν γράμμασι πρόκειται, τοῖς ἀριθμοὺς εἴτε ὁλοχερεῖς, εἴτε καὶ κλασματώδεις ὑποσημαίνουσι.

§. 679. Τούτων γὰρ ἁπάντων κειμένων, οὐδὲν δυσχερὲς οὐδὲ τὰ κλάσματα δι' ἀλλήλων πολλαπλασιάζειν

ζειν, ἢ διαιρεῖν εὐκρινῆτε ὄντα καὶ ἄῤῥιζα· οἷον τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ διὰ $\frac{\gamma}{\delta}$ πολλαπλασιασθὲν μὲν, παραγόμενον δώσει τὸ $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$· διαιρεθὲν δὲ, πηλίκον τὸ $\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$. Ἀλλὰ καὶ διαιρέσει μόνῃ ἑκατέρα ἂν τῶν πράξεων ἐκπερανθείη διὰ τοῦ (:) διασημαινομένη, ὥστε εἶναι μὲν τὸ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γινόμενον $\frac{\alpha}{\beta:}\frac{:\delta}{\gamma}$, εἶναι δὲ τὸ διὰ τῆς διαιρέσεως πηλίκον $\frac{\alpha:\gamma}{\beta:\delta}$. Ὡς οὐ μόνον τῷ μὲν ἐπαλλήλῳ πολλαπλασιασμῷ τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστῶν, τὸ ὑπὸ τῶν κλασμάτων προκύπτει γινόμενον, τῷ δ' ἐναλλὰξ, τὸ δι' αὐτῶν πηλίκον· ἀλλὰ καὶ διαιρέσει τῇ μὲν ἐναλλὰξ τῶν ὅρων αὐτὰ πολλαπλασιάζεσθαι πέφυκε, τῇ δ' ἐπαλλήλῳ διαιρεῖσθαι (§. 90. 91.).

Ταὔτητοι ἐὰν $\frac{\alpha^3\beta^2\gamma}{\varepsilon^4}$ ἐπιπολλαπλασιαστέον τε ᾖ ἐπὶ $\frac{\gamma\varepsilon^2}{\alpha\beta}$, καὶ διαιρετέον διὰ τοῦ αὐτοῦ, τὸ μὲν γινόμενον ἔσται $\frac{\alpha^3\beta^2\gamma^2\varepsilon^2}{\alpha\beta\varepsilon^4}$, τὸ δὲ πηλίκον $\frac{\alpha^4\beta^3\gamma}{\gamma\varepsilon^6}$. ὧν δὴ κλασμάτων ἑκάτερον ἐπὶ τὸ ἁπλούστερον ἔξεστι ἀναγαγεῖν, τὸ μὲν οὕτω γράφοντας, $\frac{\alpha^2\beta\gamma^2}{\varepsilon^2}$. τὸ δὲ οὕτω $\frac{\alpha^4\beta^3}{\varepsilon^6}$

Οὕτω καὶ $\frac{\alpha^\mu\beta^\nu}{\gamma^2\varepsilon^{\nu-1}}$ πολλαπλασιασθὲν διὰ $\frac{\gamma^\nu\varepsilon^3}{\alpha\beta}$, δώσει $\frac{\alpha^\mu\beta^\nu\gamma^\nu\varepsilon^3}{\alpha\beta\gamma^2\varepsilon^{\nu-1}} = \frac{\alpha^{\mu-1}\beta^{\nu-1}\gamma^{\nu-2}}{\varepsilon^{\nu-4}}$, ἢ $\alpha^{\mu-1}\beta^{\nu-1}\gamma^{\nu-2}\varepsilon^{4-\nu}$· ἑκάτερον γὰρ ἰσοδύναμον. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς διαιρέσεως τοῦ προτέρου διὰ τοῦ δευτέρου πηλίκον ἔσται, $\frac{\alpha^{\mu}+\beta^{\nu+1}}{\gamma^{\nu+2}\varepsilon^{\nu+2}}$.

Καὶ τὸ $\frac{\alpha^2\beta+\beta^3}{\alpha-\gamma}$ πολλαπλασιασθὲν διὰ $\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha\beta}$ δώσει παραγόμενον $\frac{(\alpha^2\beta+\beta^3)\times(\alpha^2-\gamma^2)}{(\alpha-\gamma)\,\alpha\beta}$. ὃ δήπου κλάσμα ἀναχθήσεται τῶν παραγόντων, τοῦ μὲν $\alpha^2\beta+\beta^3$, καὶ $\alpha\beta$, διὰ τοῦ β διαιρεθέντος, τοῦ δὲ $\alpha^2-\gamma^2$, καὶ $\alpha-\gamma$, δι' αὐτοῦ τούτου τοῦ $\alpha-\gamma$· ὅθεν πηλίκον τὸ $\alpha+\gamma$. Καὶ ἔσται ἄρα ἀναχθὲν $\frac{(\alpha^2+\beta^2)\times(\alpha+\gamma)}{\alpha}=\frac{\alpha^3+\alpha\beta^2+\alpha^2\gamma+\beta^2\gamma}{\alpha}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.

§. 680. Ἡ μὲν οὖν τοιάδε τοῦ κλάσματος εἰς τὸ ἁπλούστατον ἀναγωγή, τοὺς τῶν ὁπωσοῦν ἐγκειμένων ποσοτήτων διαιρέτας δήλους προϋποτίθησιν· ἢ γοῦν τὸν τρόπον τοῦ αὐτοὺς ἀνακαλύπτειν· ὧν ἐν χερσὶν ὄντων, οἱ τὸν ἀριθμητὴν κοινῇ καὶ τὸν παρονομαστὴν διαιροῦντες προχείρως ἐκλέγονται. Καὶ ἔστι μὲν αὐτομάτοις πολλαχοῦ ἀπαντῶσιν ἐντυγχάνειν τοῖς τοιοῖσδε διαιρέταις· ἁπλοῖς δὲ οὖσι καὶ μοναδικοῖς οὐκ ἔσθ' ὅπου οὐ πάρεστιν. Οὕτως αὐτόθεν φανερὸν τοῦ $\alpha\alpha+\alpha\beta$ μοναδικὸν ὑπάρχειν διαιρέτην τὸν α. Οὐ πολλῷ δὲ δυσχερέστερον καὶ τοῦ $\alpha\alpha+\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma$, τοὺς $\alpha+\beta$, καὶ $\alpha-\gamma$ διαιρέτας ὄντας συνιδεῖν. Ἀλλὰ γὰρ τοὺς τῶν μᾶλλον συνθέτων ἀνακαλύπτειν μακρῷ ἐργωδέστερον καὶ εὐκρινῶν ὄντων, καὶ ἀρρίζων· καὶ οὐδὲ τοῦ παρόντος ἐστὶ τόπου τοὺς κανόνας παραθέσθαι, οἷς πρὸς θήραν τὴν ἐκείνων ποδηγετούμεθα.

Διὸ καὶ εἰς τὴν ἀπόπειραν τὸ περὶ τούτου παραθετέον· καθ' ἣν ἀνυσιμώτατα ἐπιχειρήσομεν τῇ εὑρέσει, τοὺς ἐξ ὧν τὸ παραγόμενον, οὐ τοὺς διαιρέ-

τας

τας ζητῦμεν, συνέςηκεν ὅρυς, κατὰ τὴν τῶν δυνάμεων πρόοδον τινὸς τῶν ἐπ' αὐτῷ γραμμάτων, ἐκτάσσοντες. Τῦτυ γὰρ γινομένυ τὰ πολλὰ καταφανὴς καθίςαται, ἡ τῶν ὅρων τὺς πλείςυς διαιρῦσα ποσότης, ὅθεν καὶ ἀποπειρᾶσθαι πάρεςιν, εἰ ἄρα καὶ ἅπαντας. Τῦ δὲ τὸν κοινὸν δυεῖν ποσοτήτων διαιρέτην, εἴτις ἐςὶ, καὶ τὸν μάλιςα, εἰτύχοι, συμπεπλεγμένον ἀνακαλύπτειν ἡ μέθοδος, ὐδὲν τῆς κοινοτέρας ἐκείνης διαλλάσσει, δι' ἧς ἀριθμῶν δυοῖν δεδομένων ὁ μέγιςος διαιρέτης εὑρίσκεται (§. 114.). Ἀλλὰ ταύτην γὰρ ἅτε σπανιώτατα γινομένην ἐν χρήσει ἑκόντες ὑπερβησόμεθα.

§. 681. Οἴονται δὲ τὸ παραγόμενον, εἰς δύο ἀναλύεσθαι παράγοντας, δυσὶ διαφέρυσι τρόποις· ὅτι πάντων τῶν ἐφ' ἑκατέρῳ τῷ παράγοντι ἀνας ραφέντων σημείων, ὐδὲν ὅ, τι καὶ διαφέρον εἴη προκύψει. Οὕτωτοι τὸ $\alpha\beta$, εἴς τε τὺς $+\alpha$ καὶ $+\beta$ ἀναλυθείη, καὶ εἰς τὺς $-\alpha$ ϗ $-\beta$. Καὶ τὸ $-\alpha\beta$, καὶ τὺς $-\alpha$ καὶ $+\beta$, ϗ τὺς $+\alpha$ καὶ $-\beta$, ἐπίσης ἂν σχοίη παράγοντας. Καὶ ἐπὶ τῶν συγκειμένων δὲ ὡσαύτως. Καὶ γὰρ $\underline{\alpha\alpha-\beta\beta}=(\alpha+\beta).(\alpha-\beta)=(-\alpha-\beta).(-\alpha+\beta)$. Καὶ τὸ $\underline{\alpha\alpha-\alpha\gamma-\beta\beta+\beta\gamma}$ ἀνακύπτει παραπλησίως ἔκ τε τῶν $\underline{\alpha+\beta-\gamma}\times\underline{\alpha-\beta}$, καὶ ἐκ τῶν $\underline{-\alpha-\beta+\gamma}\times\underline{-\alpha+\beta}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 682. Τετραγώνυ, Κύβυ, Διτετραγώνυ, καὶ οἱασδηποτῦν ἔτι καθυπερτέρας δυνάμεως τὸν ἀπὸ δυωνύμυ ῥίζης τύπον ἐξευρεῖν.

ΠΡΟΚΑΤΑΣΚΕΥΗ.

§. 683. Ἐπειδὴ ὀνόματα ταῖς ποσότησιν ἐςὶ τὰ σημεῖα, ἢ τὰ γράμματα, οἷς αὗται διασημαίνονται

ται, ῥίζα διώνυμος ἐκ ἂν ἀπεικότως ῥηθείη, ἥτις ἂν ἐκ δυεῖν τοιούτων ὀνομάτων συγκέοιτο· οἷον $\alpha + \beta$, ἢ $-\alpha - \beta$, ἢ $\alpha - \beta$, ἢ $-\alpha + \beta$· παρὰ ταῦτα διωνύμου ῥίζης εἶδος ἕτερον θέσθαι ἀμήχανον.

ΛΥΣΙΣ·

§. 684 Ἐὰν οὖν ἡ ῥίζα $\alpha + \beta$, ἐφ' ἑαυτῆς πολλαπλασιασθῇ, καὶ τὸ γινόμενον αὖθις διὰ τῆς αὐτῆς, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ὑπ' ὄψιν παραστήσονται αἱ δυνάμεις ἡ δευτέρα, ἡ τρίτη, ἡ τετάρτη, ἡ πέμπτη, ἡ ἕκτη· ὧν δὴ αὐτὴ ἡ ῥίζα, ἅτε δὴ δύναμις πρώτη, προτάσσεται.

Α'. $\alpha + \beta$
Β'. $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
Γ'. $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
Δ'. $\alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \beta^4$
Ε'. $\alpha^5 + 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 + 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 + \beta^5$
Ϛ'. $\alpha^6 + 6\alpha^5\beta + 15\alpha^4\beta^2 + 20\alpha^3\beta^3 + 15\alpha^2\beta^4 +$
$6\alpha\beta^5 + \beta^6$.

§. 685. Ἐκ τῶνδε ῥᾶστα αἱ δυνάμεις συστήσονται αἱ ἀπὸ ῥίζης τῆς $\alpha - \beta$, ἐὰν ἀποφατικῶς σημειωθῇ τὰ γινόμενα, οἷς τὸ β ἐμφιλοχωρεῖ περισσάριθμον φέρον τοὐπίσημον· οὕτως·

Α'. $\alpha - \beta$
Β'. $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
Γ'. $\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
Δ'. $\alpha^4 - 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta^3 + \beta^4$
Ε'. $\alpha^5 - 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 - 10\alpha^2\beta^3 + \alpha\beta^4 - \beta^5$
Ϛ'. $\alpha^6 - 6\alpha^5\beta + 15\alpha^4\beta^2 - 20\alpha^3\beta^3 + 15\alpha^2\beta^4 -$
$6\alpha\beta^5 + \beta^6$.

§. 686. Τὸν αὐτὸν δὲ καταφαίνεται τρόπον, καὶ τὰς ἀπὸ τῆς $-\alpha + \beta$ ῥίζης δυνάμεις προκύψειν,

ἐὰν

ἐὰν ἀποφατικῶς σημειωθῇ, ἐφ' οἷς τὸ α περισσαρίθμου ἔλαχε τοῦ ἐπισήμου, τὰ γινόμενα· οἷον,

Α'. $-\alpha+\beta$

Β'. $+\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

Γ'. $-\alpha^3+3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2+\beta^3$

Δ'. $+\alpha^4-4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2-4\alpha\beta^3+\beta^4$

Ε'. $-\alpha^5+5\alpha^4\beta-10\alpha^3\beta^2+10\alpha^2\beta^3-5\alpha\beta^4+\beta^5$

Ϛ'. $+\alpha^6-6\alpha^5\beta+15\alpha^4\beta^2-20\alpha^3\beta^3+15\alpha^2\beta^4-6\alpha\beta^5+\beta^6.$

§. 687. Ἐπὶ τούτων, ἐὰν καὶ εἰς ἐμφιλοχωρεῖ τὸ β ἐν περισσαρίθμῳ τῷ ἐπισήμῳ ὑπεναντίως σημειωθῇ τὰ γινόμενα, αἱ τῶν δυνάμεων τύποι προκύψουσι τῶν ἀπὸ ῥίζης τῆς $-\alpha-\beta$.

Α'. $-\alpha-\beta$

Β'. $+\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

Γ'. $-\alpha^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2-\beta^3$

Δ'. $+\alpha^4+4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3+\beta^4$

Ε'. $-\alpha^5-5\alpha^4\beta-10\alpha^3\beta^2-10\alpha^2\beta^3-5\alpha\beta^4-\beta^5$

Ϛ'. $+\alpha^6+6\alpha^5\beta+15\alpha^4\beta^2+20\alpha^3\beta^3+15\alpha^2\beta^4+6\alpha\beta^5+\beta^6.$

§. 688. Ἐν ἅπασι δὴ τοῖς προτεθεῖσι τύποις οὐδὲν δυσχερὲς τήντε τῶν σημείων τάξιν ἥτις ποτὲ ἐστὶ συνιδεῖν, καὶ τῶν γινομένων τὴν διαδοχὴν περινοῆσαι, ἅτινα ἐκ τῶν κατὰ τὰ ὀνόματα α καὶ β συγκροτεῖται δυνάμεων. Ἐὰν γὰρ ὁ ὁλοσχερὴς ἀριθμὸς, ὁ ἀντὶ ἐπισήμου ὢν τῆς δυνάμεως πρὸς ἣν ἐξᾶραι τὴν ῥίζαν δεῖ τὴν διώνυμον, δηλωθῇ διὰ τοῦ σ τὰ γινόμενα οὕτως ἐν τάξει ἐκκείσεται.

$$\alpha^{\sigma},\ \alpha^{\sigma-1}\beta,\ \alpha^{\sigma-2}\beta^2,\ \alpha^{\sigma-3}\beta^3 \ldots\ldots \alpha^0\beta^{\sigma}.$$

Οἱ δ' ἀριθμοὶ δι' ὧν τὰ γινόμενα ταῦτα πολλαπλασιάζεται, ἐκ τοῦ αὐτοῦ σ, οὕτως ἂν συσταῖεν, ὥστε κατὰ γένος τὴν κατὰ τὸ σ δύναμιν, τὴν ἀπὸ τῆς δυωνύμου ῥίζης $\alpha + \beta$, τουτέςι τὴν $(\alpha + \beta)^{\sigma}$, οὕτω παρίςασθαι· $\alpha^{\sigma} + \frac{\sigma}{1}\alpha^{\sigma-1}\beta + \frac{\sigma\cdot(\sigma-1)}{1\cdot 2}\alpha^{\sigma-2}\beta^{2} + \frac{\sigma\cdot(\sigma-1)\cdot(\sigma-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^{\sigma-3}\beta^{3} + \frac{\sigma\cdot(\sigma-)\cdot(\sigma-2)\cdot(\sigma-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\alpha^{\sigma-4}\beta^{4} +$ κ.ξ.

Καὶ τῆς δὲ δὴ τῆς προόδου τοσοίδε παραληφθήσονται ὅροι, ὁπόσοι κατὰ τὴν ταχθεῖσαν τιμὴν τῷ γράμματι σ, παραχθῆναι δυνήσονται.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐὰν τεθῇ $\sigma = 1$, δῆλον ὅτι $(\alpha + \beta)^{1}$ τῷ κατὰ γένος τύπῳ ὑπενεχθήσεται. Ἔςαι γὰρ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $\alpha^{\sigma} = \alpha$, καὶ $\frac{\sigma}{1}\alpha^{\sigma-1}\beta = \alpha^{0}\beta = \beta$. Ἀλλὰ $\frac{\sigma(\sigma-1)}{1\cdot 2}\alpha^{\sigma-2}\beta^{2}$, διὰ τὸ $\sigma - 1 = 0$, οἴχεται εἰς τὸ μηδὲν, ὥσπερ καὶ οἱ ὅροι οἱ ἑξῆς ἀπὸ τοῦδε πάντες, παρὰ τὸ ἅπασι τὸ $\sigma - 1 = 0$ ἐμφιλοχωρεῖν. Ὡσαύτως ἐὰν τεθῇ $\sigma = 2$, γίνεται $\alpha^{\sigma} = \alpha^{2}$, καὶ $\frac{\sigma}{1}\alpha^{\sigma-1}\beta = 2\alpha\beta$· καὶ $\frac{\sigma\cdot\sigma-1}{1\cdot 2}\alpha^{\sigma-2}\beta^{2} = \frac{2\cdot 1}{1\cdot 2}\alpha^{0}\beta^{2} = \beta^{2}$· τῶν δ' ἀπὸ τοῦδε ἐφεξῆς ὅρων, τῇ τοῦ παράγοντος $\sigma - 2 = 0$ παρεμπλώσει, εἰς τὸ μηδὲν οἰχομένων, ἔςαι δήπου $(\alpha + \beta)^{2} = \alpha^{2} + 2\alpha\beta + \beta^{2}$. Φημὶ οὖν ὡς ἐὰν ὁ κατὰ τὸ σ γράμμα, ὁπόσου δήποτε ἐκληφθὲν, ἀληθεύῃ τύπος, ἀληθεύσει δήπου καὶ τοῦ τῆς δυνάμεως ἐπισήμου μονάδι προσαυξημένου $\sigma + 1$.

Ἐὰν γὰρ θῶμεν,

$$(\alpha+\beta)^{\sigma} = a\alpha^{\sigma} + b\alpha^{\sigma-1}\beta + c\alpha^{\sigma-2}\beta^{2} + d\alpha^{\sigma-3}\beta^{3} + \text{κ.ξ.}$$

ληφθέν-

ληφθέντων

$$a = 1$$

$$b = \frac{\sigma}{1}$$

$$c = \frac{\sigma \cdot (\sigma - 1)}{1 \cdot 2}$$

$$d = \frac{\sigma \cdot (\sigma - 1) \cdot (\sigma - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$ καὶ ἑξῆς,

τῷ διὰ τοῦ $\alpha + \beta$ πολλαπλασιασμῷ παραχθήσεται·

$$(\alpha+\beta)^{\sigma+1} = a\alpha^{\sigma+1} + b\alpha^{\sigma}\beta + c\alpha^{\sigma-1}\beta^{2} + d\alpha^{\sigma-2}\beta^{3} + \text{κ.ξ.}$$
$$+ a\alpha^{\sigma}\beta + b\alpha^{\sigma-1}\beta^{2} + c\alpha^{\sigma-2}\beta^{3}$$

ἐν ᾧ δὴ στίχῳ τὸ a τῇ μονάδι 1, ὡσαύτως ἰσοδυναμεῖ, ὡς καὶ τῷ ἀνωτέρῳ. Ἀλλὰ γὰρ $b + a$ ὁ συνεργὸς τοῦ δευτέρου τῶν ὅρων $= \sigma + 1$. Ὁ δὲ τοῦ τρίτου $c + b = \frac{\sigma(\sigma - 1)}{1 \cdot 2} + \frac{\sigma}{1}$, ὃς καὶ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἀναχθεὶς ὄνομα 2, γράφοιτ' ἂν καὶ οὕτω $\frac{\sigma(\sigma-1) + 2\sigma}{1 \cdot 2}$, καὶ οὕτω $\frac{(\sigma - 1 + 2) \cdot \sigma}{1 \cdot 2} = \frac{(\sigma + 1) \cdot \sigma}{1 \cdot 2}$.

Ὁ δὲ τοῦ τετάρτου ὅρου συνεργὸς $d+c$, ἐπὶ τὸ αὐτὸ ὄνομα ἀνηγμένος ἐστὶ $\frac{\sigma \cdot (\sigma-1) \cdot (\sigma-2) + 3\sigma(\sigma-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. ὃς δὴ καὶ οὕτως ἂν γράφοιτο $\frac{(\sigma-2+3)\sigma(\sigma-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{(\sigma+1)\sigma(\sigma-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

Ὅθεν ῥᾴδιον συνιδεῖν, ὡς ὁ τοῦ πέμπτου ὅρου συνεργὸς, ἔσται $\frac{(\sigma+1)\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$. ὁ δὲ τοῦ ἕκτου, $\frac{(\sigma+1)\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)(\sigma-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἐὰν

Ἐὰν οὖν τεθῇ $\pi = \sigma + 1$, ὥστε εἶναι $\sigma = \pi - 1$ ἀντεισαχθέντες ἀντὶ τοῦ σ τοῦ $\pi - 1$ ἐπὶ τῶν εὑρεθέντων, ἐπιφέρεται $b + a = \pi$

$$c + b = \frac{\pi(\pi - 1)}{1 \cdot 2}$$

$$d + c = \frac{\pi(\pi - 1)(\pi - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Διὸ καὶ γίνεται·

$$\overline{\alpha + \beta}^{\pi} = \alpha^{\pi} + \frac{\pi}{1}\alpha^{\pi-1}\beta + \frac{\pi\cdot(\pi-1)}{1 \cdot 2}\alpha^{\pi-2}\beta^2 + \frac{\pi\cdot(\pi-1)(\pi-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^{\pi-3}\beta^3,$$ κξ. Ἐπειδὴ τοίνυν ἡ πρόοδος αὕτη παραπλησιωτάτη ἐστὶ τῇ προληφθείσῃ, ἐν ᾗ ἀντὶ τοῦ π, τὸ σ εἰσενήνεκτο, ἑπόμενόν ἐστιν, εἰ ἀληθῶς δι' ἐκείνης ἡ $(\alpha + \beta)^{\sigma}$ παρέστη δύναμις, τὸ γράμμα σ ὁποσουδήποτε τιμηθέν, ἀληθῶς οὐδὲν ἧττον καὶ διὰ ταύτης τῆς ἀδελφὰ ἐκείνῃ χωρούσης ἡ δύναμις παραστήσεται, ἧσπερ ἐπίσημον τὸ $\sigma + 1$. Τουτέστιν ἡ $(\alpha + \beta)^{\sigma+1}$, εἰ μόνον ἁπανταχοῦ ἀντὶ τοῦ σ, τὸ $\sigma + 1$ ἀντεισενεχθείη.

Ἐντεῦθεν δὲ ἐκ τοῦ ἀκολούθου ἀληθεύσει ὁ τύπος, καὶ ἡλικονοῦν ἀριθμὸν καταφατικόν τε καὶ ὁλοχερῆ τοῦ σ ἐπισημαίνοντος. Εἰ γὰρ ἀληθεύει, ἐὰν ᾖ $\sigma = 1$, ἀληθεύσει δήπου καὶ ἐὰν $\sigma = 2$, ὡς καὶ ἄλλως ἰδόντες ἔφθημεν· καὶ ἐὰν $\sigma = 3$· καὶ ὡσαύτως ἑξῆς ἐὰν $\sigma = 4$, καὶ ἐὰν $\sigma = 5$· καὶ οὕτως ἐπ' ἄπειρον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 689. Ἕπεται δ' ἐκ τῶν ἤδη ἀποδεδειγμένων, ὅτι ἀληθεύων ὁ τύπος ἡλικονοῦν ἀριθμὸν τοῦ σ ἐπισημαίνοντος, εἴτε ὁλοχερῆ, εἴτε κλασματώδη, καταφατικόν, ἢ ἀποφατικόν, ὅς ἂν ᾖ κ, ἀληθεύσει πάντη, καὶ ἐὰν τεθῇ τὸ $\sigma = 1 + \kappa$, ἢ γοῦν

$\sigma = 2$

$\sigma = 2 + \kappa$, ἢ $\sigma = 3 + \kappa$, καὶ ὅτως ἐφεξῆς. Συνελόντι γοῦν, ἀληθεύσει ἡλικοσοῦν ἂν καὶ εἴη ὁ ὁλοχερὴς ἀριθμὸς ὁ τῷ κ προστιθέμενος.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 690. Μάλιστα μὲν οὖν ἐκ τοῦ καθόλου τύπου, οἱασδηποτοῦν δυωνύμου ῥίζης, ἧς ἂν τοὐπίσημον διδῶτο, τὴν δύναμιν συγκροτῆσαι ῥάδιόν ἐστι. Τῆς γὰρ ἑβδόμης φέρε προβαλλομένης δυνάμεως, ἔσται $\sigma = 7$· καὶ $(\alpha + \beta)^\sigma = (\alpha + \beta)^7 = \alpha^7 + \frac{7}{1}\alpha^6\beta$

$$+ \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2}\alpha^5\beta^2 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}\alpha^4\beta^3 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\alpha^3\beta^4$$

$$+ \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\alpha^2\beta^5 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\alpha\beta^6$$

$$+ \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}\beta^7.$$

Ἀλλ᾽ ἐπέκεινα χωρεῖν οὐκ ἔξεστι, τοῦ ἐφεξῆς ὅρου, εἰ ζητηθείη, $= 0$ προκύπτοντος. Τοιγαροῦν τῶν συνεργῶν κατὰ τὸ δέον ἐπαναχθέντων, ἔσται δὴ ἡ ζητουμένη δύναμις $\alpha^7 + 7\alpha^6\beta + 21\alpha^5\beta^2 + 35\alpha^4\beta^3 + 35\alpha^3\beta^4 + 21\alpha^2\beta^5 + 7\alpha\beta^6 + \beta^7$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 691. Ἐὰν δὲ ἡ ῥίζα μὴ ᾖ $\alpha + \beta$, ἀλλὰ $\alpha - \beta$, κατὰ τὸν αὐτὸν ὡς ἀνωτέρω τύπον τῆς δυνάμεως διαμορφουμένης τοὺς μὲν ὅρους τοὺς τὰς ἀξίας τοῦ ἀποφατικοῦ ὀνόματος $-\beta$, ἀρτιάριθμα ἔχοντας τὰ ἐπίσημα 0, 2, 4, 6, κξ. καταφατικῶς διὰ τοῦ + ἐπιχαρακτέον, τοὺς δὲ περιττάριθμα 1, 3, 5, κξ. ἀποφατικῶς διὰ τοῦ −· οὐ γὰρ ἂν τὰ τῶν οὕτω γινομένων ὅρων σημεῖα, διὰ τῶν συνεργῶν τραπείη, ὡς τούτων ἁπάντων ἐνταῦθα ὄντων καταφατικῶν. Ἐὰν δὲ ἡ ῥίζα τύχῃ οὖσα $-\alpha + \beta$, ἢ $-\alpha - \beta$, τὸ αὐτὸ παρατετηρηκόσιν ἐπὶ τῶν κατὰ τὰ ὀνόματα ἀξιῶν, οὐδὲν δυσχερὲς τὰ σημεῖα τοῖς ὅροις ἐπιχαρτοσειν κατάλληλα. Εὔδηλον δὲ καὶ τῶν δυνάμεων αἷς ἀρτιάριθμα τὰ ἐπίσημα, μηδεμίαν εἶναι διαφορὰν, ὅπως ποτ᾽ ἂν τὰ τῆς ῥίζης ἔχοι, εἴθ᾽ οὕτως $\alpha + \beta$, εἴτε καὶ οὕτως $-\alpha - \beta$. Καὶ οὐδέτι μᾶλλον, οὐδὲ τὰς ἀπὸ $\alpha - \beta$, καὶ $- \alpha + \beta$ ὁμοταγεῖς διακρίνεσθαι. Ἀλλὰ γὰρ τὰς ἀπὸ δυωνύμου ῥίζης περισσαρίθμους τὰ ἐπίσημα, θατέρου τῶν τῆς ῥίζης ἀμειφθέντος σημείων, ἢ ἑκατέρου, ἐπάναγκες ἀεὶ κατὰ τὰ σημεῖα καὶ ταύτας ἀμείβεσθαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

§. 692. Τοῦ τοίνυν τύπου τῆς ἀφ᾽ οἱασοῦν δυωνύμου ῥίζης καταφανοῦς ὄντος δυνάμεως, καὶ ἡ ἀπὸ ῥίζης τριωνύμου ὁμοταγὴς δύναμις διατυπωθήσεται, καὶ ἡ ἀπὸ τετρωνύμου, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς ἔτι μᾶλλον συνθέτου.

Ἔστω δὴ ῥίζα $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$, κξ. ἧς διατυπῶσαι δεῖ τὸ τετράγωνον. Ἐὰν οὖν ἐκ διαδοχῆς ληφθῇ α, $\alpha + \beta$, $\alpha + \beta + \gamma$, ὡς πρῶτον ὄνομα, τὸ δ᾽ ἐφεπόμενον γράμμα ὡς δεύτερον· ἢ καὶ μᾶλλον ἐπιτέμνουσιν, ἐὰν τεθῇ $\alpha = \mathrm{A}$, $\alpha + \beta = \mathrm{B}$, $\alpha + \beta + \gamma = \Gamma$, $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \Delta$ κξ, τὸ τετράγωνον ἔσται,

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^2 &+ 2\mathrm{A}\beta + \beta^2 \\ &+ 2\mathrm{B}\gamma + \gamma^2 \\ &+ 2\Gamma\delta + \delta^2 \\ &+ 2\Delta\varepsilon + \varepsilon^2, \end{aligned}$$

καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἐὰν καὶ πλείω τύχῃ τὰ ὀνόματα.

Ὁ δέ τοι κύβος ὁ ἀπὸ τῆς αὐτῆς ῥίζης οὕτως ἀποδοθήσεται,

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^3 &+ 3\mathrm{A}^2\beta + 3\mathrm{A}\beta^2 + \beta^3 \\ &+ 3\mathrm{B}^2\gamma + 3\mathrm{B}\gamma^2 + \gamma^3 \\ &+ 3\Gamma^2\delta + 3\Gamma\delta^2 + \delta^3 \\ &+ 3\Delta^2\varepsilon + 3\Delta\varepsilon^2 + \varepsilon^3 \end{aligned}$$

Τὸ

Τὸ δὲ διτετράγωνον οὕτως,

$$\begin{aligned} A^4 + 4A^3\beta + 6A^2\beta^2 + 4A\beta^3 + \beta^4 \\ + 4B^3\gamma + 6B^2\gamma^2 + 4B\gamma^3 + \gamma^4 \\ + 4\Gamma^3\delta + 6\Gamma^2\delta^2 + 4\Gamma\delta^3 + \delta^4 \\ + 4\Delta^3\varepsilon + 6\Delta^2\varepsilon^2 + 4\Delta\varepsilon^3 + \varepsilon^4. \end{aligned}$$

Καὶ τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον διαμορφωθήσονται καὶ αἱ δυνάμεις αἱ τούτων ἔτι καθυπέρτεραι. Σημεῖα δὲ ἁπανταχοῦ ἐπιτεθείσεται, τὰ ἐκ τῶν σημείων τῶν τῆς ῥίζης ὀνομάτων διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ προκύπτοντα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ·

§. 693. Τὴν κατὰ δύο, ἢ πλείω ὀνόματα ἐξελέσθαι ῥίζαν, ἐκ μὲν τοῦ δοθέντος τετραγώνου τὴν τετραγωνικὴν, ἐκ δὲ τοῦ κύβου τὴν κυβικὴν, ἐκ δὲ τοῦ διτετραγώνου τὴν διτετραγωνικὴν, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

ΛΥΣΙΣ·

§. 694. Ὁποία ποτ' ἂν ᾖ, ἡ ἀπὸ ῥίζης ὀνομάτων πλειόνων διδομένη δύναμις, οἷον ἥδε ἡ τετραγωνικὴ $\Delta = 16\beta^4 + 16\beta^3\alpha\chi + 4\alpha^2\chi^2 + 16\beta^2\chi^2 + 8\alpha\chi^3 + 4\chi^4$, κατὰ τὰ ἐπίσημα τῶν ἀξιῶν ἀεὶ διατετάχθω τοῦ γράμματος, τοῦ ἐν αὐτῇ ἐμφιλοχωροῦντος συχνότερον· οὕτως ὥστε, ἤτοι τὰς τοῦ εἰρημένου γράμματος καθυπερτέρας ἀξίας ἐν τάξει ἡγεῖσθαι, ἕπεσθαι δὲ τὰς ταπεινοτέρας, ἢ γοῦν ἀνάπαλιν τὰς μὲν ἐλάσσονας ἡγεῖσθαι, τὰς δὲ μείζονας ἐν τάξει ἕπεσθαι. Εἰ δὲ καὶ πλείω τύχοι τὴν ἀξίαν ἰσοστάσια γράμματα, διατιθέσθω καὶ ταῦτα, ὅσαγε τῷ πρώτῳ παρείκοι, κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Εἶτα·

§. 695. Εἰ τὴν ῥίζαν ἐξελέσθαι δέοι τὴν τετραγωνικὴν, ληφθέντος ἀντὶ πρώτου ἐκείνης ὀνόματος τοῦ Α, ὅπερ ἂν τετραγωνισθὲν τῷ πρώτῳ ὅρῳ τῶν κατὰ τὸ δοθὲν τετράγωνον ἴσον εἴη, ὑφαιρεθήτω μὲν ΑΑ ἀπὸ τοῦ δοθέντος τετραγώνου Δ, διαιρεθήτω δὲ διὰ τοῦ 2Α τὸ μετὰ τὴν ὑφαίρεσιν ὑπολειφθὲν $\Delta - AA$· τὸ γὰρ ταύτηγε ἐκπροϊὸν πηλίκον, θάτερον τῶν ὀνομάτων ἔσται τῆς ῥίζης, ὃ λεγέσθω Β. Τοῦ γοῦν Β οὕτως εὑρεθέντος, γινέσθω $(A + B)^2$, καὶ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐκείνου δοθέντος τετραγώνου Δ ὑφαιρείσθω· ἐὰν γὰρ μηδὲν ὑπολειφθῇ μετὰ τὴν ὑφαίρεσιν· τουτέστιν ἐὰν καταληφθῇ $\Delta - (A + B)^2 = 0$, φανερὸν αὐτόθεν τὴν $A + B$, τὴν ῥίζαν εἶναι τὴν ζητουμένην· ὡς ἔτι περιλειφθείη τὸ $\Delta - (A + B)^2$, οἱ πρῶτοι τῶν ἐν αὐτῷ ἁπάντων διὰ $2(A + B)$ αὖθις διαιρεθήτωσαν ὅροι, καὶ τὸ ἀπ᾽ ἐντεῦθεν πηλίκον, ὅπερ εἰρήσεται Γ, εἰς τρίτον ὄνομα τῶν τῆς ῥίζης ἀποτιθέσθω. Ἤδη δὲ καὶ $(A + B + \Gamma)^2$ τὸ ἀπὸ τῆς εἰς τόδε εὑρεθείσης ῥίζης τετράγωνον, ἀπὸ τοῦ κατ᾽ ἀρχὰς δοθέντος ἐκείνου τετραγώνου τοῦ Δ, ὑφαιρείσθω, καὶ ἐὰν ᾖ $\Delta - (A + B + \Gamma)^2 = 0$, ἔσται $A + B + \Gamma$ ἡ ῥίζα· εἰ δέ τι λοιπὸν, ὡσαύτως καὶ προσωτέρω τὰ τῆς πράξεως χωρείτω, ἀεὶ μὲν τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ διπλοῦ τῶν εὑρεθέντων τῆς ῥίζης ὀνομάτων γινομένης, ἀεὶ δὲ καὶ τῆς ἐκείνων αὐτῶν τετραγωνισθέντων ἀπὸ τοῦ προτεθέντος τοῦ κατ᾽ ἀρχὰς τετραγώνου ὑφαιρέσεως εἰς τέλος, ἕως οὗ μηδὲν τέως περιῇ τὸ ὑπολειπόμενον.

§. 696. Ἐὰν δὲ ὁ Δ κύβος παρῇ, καὶ τούτου ἡ κυβικὴ ῥίζα ᾖ ζητουμένη, ληφθήτω Α ἴσον τῇ κυβικῇ ῥίζῃ τοῦ πρωτίστου τῶν ὅρων τῶν ἐπὶ τοῦ κύβου τοῦ προκειμένου, κατάγε τὰ εἰρημένα καὶ τούτου ἤδη προδιαταχθέντος. Καὶ ὑφαιρεθήτω δὴ ἀπὸ τοῦ Δ ὁ ἀπὸ Α κύβος· καὶ τοῦ λοιποῦ $\Delta - A^3$ ὁ πρώτως ἁπάντων ὅρος, διαιρεθήτω διὰ $3A^2$· τὸ γάρτοι πηλίκον, ὃ λέγω Β, τῶν τῆς ῥίζης ἔσται ὀνομάτων τὸ δεύτερον. Γινέσθω τοίνυν $\Delta - (A + B)^3$· τοῦτο δὲ

ἐὰν

ἐὰν ᾖ $= 0$, δῆλον ὡς ἡ $A + B$ ἡ ῥίζα ἣν ἡ ζητουμένη· ἢν δέ τοι λείποιτο περιὸν τὸ $\Delta - (A + B)^3$, διαιρείσθωσαν οἱ πρῶτοι ἐν αὐτῷ ἀπαντῶντες ὅροι διὰ $3(A + B)^2$, καὶ τὸ πηλίκον, ὅπερ εἰρήσθω Γ, ἔσται τῶν ἐπὶ τῆς ῥίζης ὀνομάτων τὸ τρίτον. Γινέσθω δ' αὖθις $\Delta - (A + B + \Gamma)^3$, καὶ καθόλου τὰ τῆς πράξεως χωρείτω, ὡς ἐπὶ τῆς εὑρέσεως τῆς ῥίζης τῆς τετραγωνικῆς· εἰμὴ παρ' ὅσον ἐνταῦθα διαιρεῖν μὲν δέον διὰ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου, τοῦ ἀπὸ τῶν εὑρεθέντων τῆς ῥίζης ὀνομάτων συνισταμένου, ὑφαιρεῖν δὲ ἀπὸ τοῦ κατ' ἀρχὰς δοθέντος κύβου, τὸν κύβον τὸν ἀπὸ τῶν αὐτῶν.

§. 697. Ἐὰν δὲ Δ ᾖ διτετράγωνον, ζητῆται δὲ τούτου ῥίζα ἡ διτετραγωνική, ληφθήτω μὲν A τῇ τηλικαύτῃ ῥίζῃ τοῦ πρωτίστου τῶν ὅρων ἴσον, τοῦ δοθέντος διτετραγώνου ἢ δέον προδιαταχθέντος· καὶ ὑφαιρείσθω $\Delta - A^4$· καὶ ὁ τοῦ λοιποῦ τοῦδε πρῶτος ἀπαντῶν ὅρος διὰ $4A^3$ διαιρείσθω· τὸ δὲ πηλίκον, ὅπερ αὖθις εἰρήσεται B, εἰς δεύτερον ὄνομα τῶν ἐπὶ τῆς ῥίζης ἀποτιθέσθω. Ἤδη δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ δοθέντος διτετραγώνου Δ, ὑφαιρείσθω $(A + \beta)^4$, καὶ τοῦ λοιποῦ $\Delta - (A + B)^4$, ἔτι τὸ περιὸν, οἱ πρῶτοι ὅροι διὰ $4(A + B)^3$ διαιρείσθων, εἰς τὴν τοῦ τρίτου τῶν ὀνομάτων τῆς ῥίζης Γ, γένεσιν· λαμβανέσθω δὲ δὴ καὶ $\Delta - (A + B + \Gamma)^4$· καὶ τὰ λοιπὰ ὡς ἐξ ἀρχῆς περαινέσθω.

§. 698. Ἐὰν δὲ Δ δύναμις προκέηται, ἡ πέμπτη, ἀφ' ἧς ἂν δέοι καὶ πέμπτην ἐξελέσθαι ῥίζαν τινὰ πολυώνυμον, ληπτέον ἀντὶ A τὴν ὁμοταγῆ ῥίζαν τοῦ πρώτου τῶν ὅρων τῆς κατὰ τὸ Δ δυνάμεως. Εἶτ' ἐφεξῆς ὑφαιρετέον A^5, καὶ $(A + B)^5$, καὶ $(A + B + \Gamma)^5$ κ. ἑξ. τὸ δὲ λοιπὸν κατὰ τὸν ἐκτεθέντα τρόπον διαιρετέον διὰ $5A^4$, καὶ $5(A + B)^4$, καὶ $5(A + B + \Gamma)^4$, ὡς ἂν τῶν ὀνομάτων τῆς ῥίζης ἀνακύπτῃ ἀεὶ τὸ ἑπόμενον.

§. 699. Καὶ ἐν γένει ἐὰν Δ ἡ ἀπὸ ῥίζης πολυωνύμου δύναμις ἐπὶ τὸν κατὰ τὸ σ τύχῃ ἐξηρμένη βαθμὸν, τῶν λοιπῶν ἁπάντων τημημάτων, ὑφαιρεθήσεται μὲν ἐκ διαδοχῆς Λ^{σ}, $(\Lambda+B)^{\sigma}$, $(\Lambda+B+\Gamma)^{\sigma}$, τῶν δὲ ὑπολειπομένων οἱ πρώτως ἀεὶ προκείμενοι ὅροι διαιρεθήσονται διὰ $\sigma\Lambda^{\sigma-1}$, $\sigma(\Lambda+B)^{\sigma-1}$, $\sigma(\Lambda+B+\Gamma)^{\sigma-1}$, ἄχρις οὗ ἀπαντῆσαι γένοιτο τὴν πρᾶξιν προϊοῦσαν τῷ μηδενί.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ὡς μὲν οὖν τὸ τῆς ῥίζης ἑπόμενον ὄνομα διὰ τῆς ἐπιταχθείσης διαιρέσεως ὑπεξάγεται, ἐξ αὐτῆς τῆς τῶν δυνάμεων συστάσεως (§. 688) ῥᾴδιον συνιδεῖν, τὰ δὲ λοιπὰ καθ' αὑτὰ δῆλα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Α.

§. 700. Ἐὰν τοῦ προτεθέντος (§. 694.) τετραγώνου $16\beta^4 + 16\beta^2\alpha\chi + 4\alpha^2\chi^2 + 16\beta^2\chi^2 + 8\alpha\chi^3 + 4\chi^4 = \Delta$· ἡ ῥίζα ζητῆται, ἔσται $\Lambda = 4\beta^2$, καὶ $2\Lambda = 8\beta^2$· ὡς εἴγε διὰ τούτου διαιρεθείη τὸ $16\beta^2\alpha\chi$, ὃς ὁ πρῶτος ἐστὶ τῶν ὅρων τοῦ λοιποῦ $\Delta - \Lambda^2$, προκύψει $2\alpha\chi = B$· τοιγαροῦν $\Lambda + B = 4\beta^2 + 2\alpha\chi$· καὶ $(\Lambda+B)^2 = 16\beta^4 + 16\beta^2\alpha\chi + 4\alpha^2\chi^2$· καὶ $2(\Lambda+B) = 8\beta^2 + 4\alpha\chi$. Τοῦ γοῦν λοιποῦ $\Delta - (\Lambda+B)^2$ πρῶτοι ἀπαντῶσιν ὅροι $16\beta^2\chi^2 + 8\alpha\chi^3$· ὧν διὰ τοῦ $2(\Lambda+B)$ διαιρεθέντων, προκύψει $2\chi^2 = \Gamma$. Ἀλλὰ μὴν $\Delta - (\Lambda+B+\Gamma)^2 = 0$. Ἄρα $4\beta^2 + 2\alpha\chi + 2\chi^2$, ἡ ῥίζα ἐστὶν ἡ ζητουμένη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Β.

§. 701. Προκείσθω τετράγωνον

$$\gamma\gamma - 2\gamma\beta + \beta\beta + 4\gamma\alpha - 4\beta\alpha + 4\alpha\alpha = \Delta.$$

Ἔσται δὲ $\Lambda = \gamma$, καὶ $2\Lambda = 2\gamma$· τοῦ δὲ τετραγώνου ΛΛ ὑφαιρεθέντος, ἐὰν ὁ προσεχῶς ἑπόμενος ὅρος διὰ

διὰ 2γ διαιρεθῇ, προκύψει $-\beta = B$· τοιγαρῶν $A + B = \gamma - \beta$· καὶ $(A + B)^2 = \gamma^2 - 2\gamma\beta + \beta^2$· καὶ τότε ὁμοίως ὑφαιρεθέντος, οἱ τῶν λοιπῶν ὅρων ἐγγὺς ἀκολυθῦντες $4\gamma\alpha - 4\beta\alpha$, ἰὼ διαιρεθῶσι διὰ $2\gamma - 2\beta$, παρέξυσι $2\alpha = \Gamma$. Ἄρα $A + B + \Gamma = \gamma - \beta + 2\alpha$.

Καὶ ἐπειδὴ $\Delta - (A + B + \Gamma)^2 = 0$, ἔσαι $\gamma - \beta + 2\alpha$ ἡ ῥίζα ἡ ζητυμένη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Γ.

§. 702. Ἀλλ' ὑποκείσθω δὴ τὶω ῥίζαν εὑρεῖν τῦ τετραγώνυ·

$$81 + 108\chi - 24\chi^3 + 4\chi^4 = \Delta.$$

Ἔσαι $A = 9$, καὶ $B = 6\chi$· καὶ ἐὰν ὖν τὸ ἀπὸ τῶνδε τετράγωνον $81 + 108\chi + 36\chi^2$ ὑφαιρεθῇ ἀπὸ τῦ δοθέντος, τῶν λοιπῶν ὅρων οἱ πρῶτοι ἔσονται $-36\chi^2 - 24\chi^3$· οἱ δὲ διαιρεθέντες διὰ $18 + 12\chi$, δώσυσι $-2\chi^2$. Καὶ ἐςιν $(9 + 6\chi - 2\chi^2)^2 = \Delta$. Ἄρα κτ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Δ.

§. 703. Ἤδη δὲ προτεθείσθω καὶ τὶω ἀπὸ τῦ κύβυ

$$8\alpha^3 - 36\alpha^2\beta + 54\alpha\beta^2 - 27\beta^3 + 12\alpha^2\gamma - 36\alpha\beta\gamma + 27\beta^2\gamma + 6\alpha\gamma^2 - 9\beta\gamma^2 + \gamma^3 = \Delta.$$

ῥίζαν ἐξελέσθαι τὶω κυβικὶω. Ἔσαι ὖν $A = 2\alpha$, καὶ $3A^2 = 12\alpha^2$. Ἐὰν δὲ ὁ κύβος A^3 ἀπὸ τῦ προτεθέντος κύβυ ὑφαιρεθῇ, προσεχὴς ἑξῆς ὅρος ἀπαντήσει ὁ $-36\alpha^2\beta$, ὃ διὰ $3A^2$ διαιρεθέντος, πηλίκον τὸ $-3\beta = B$. Καὶ δὴ $A + B = 2\alpha - 3\beta$. Τύτε δὲ ὁ κύβος ὑφαιρεθεὶς ἀπὸ τῦ προτεθέντος, καταλείψει $12\alpha^2\gamma - 36\alpha\beta\gamma + 27\beta^2\gamma + 6\alpha\gamma^2 - 9\beta\gamma^2 + \gamma^3$· ὃ ἐὰν οἱ πρῶτοι τῶν ὅρων διαιρεθῶσι διὰ $3(A + B)^2 = 3(4\alpha^2 - 12\alpha\beta + 9\beta^2)$ πηλίκον προελεύσεται τὸ $\gamma = \Gamma$. Καὶ ἔσαι $(2\alpha - 3\beta + \gamma)^3 = \Delta$· ὥστε ἡ ῥίζα ἡ κυβικὴ ἤδη εὕρηται ἡ ζητουμένη.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 704. Οὕτω μὲν δὴ αἱ ῥίζαι ὑπεξάγονται, ἐξ ὁποσωνοῦν ἂν ὦσιν ὀνομάτων συγκείμεναι, ἀπὸ τῶν δυνάμεων τῶν τελείων. Ἐπειδὴ δὲ τοῦ ἐπισήμου τῆς δυνάμεως ἀρτιαρίθμου τυγχάνοντος, ἀεὶ δυνατὸν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἔχειν διττὴν (§. 691.) παρὰ τὴν ἤδη εὑρεθεῖσαν, καὶ ἡ ἑτέρα τῇ αὐτῇ ἂν μεθόδῳ ληφθείη, ἀποφατικῆς μεταληφθείσης τῆς ῥίζης τοῦ πρώτου ὅρου τῆς κατὰ τὸ Δ δυνάμεως. (οἷον ἐπὶ τοῦ Β΄. τῶν προτεθέντων παραδειγμάτων τεθείσης τῆς $A = -\gamma$)· κἀντεῦθεν ἐφεξῆς τῆς πράξεως περανθείσης κατὰ τὴν ταχθεῖσαν μέθοδον. Ἀλλὰ γὰρ πολλῷ ἂν εὐπετέστερον εἴη, τὰ σημεῖα πάντα τῆς εὑρεθείσης ῥίζης ἀμείβειν, οὕτω γὰρ ἐπὶ τοῦ εἰρημένου παραδείγματος γένοιτ᾽ ἂν ἡ ἑτέρα τῶν ῥιζῶν $-\gamma + \beta - 2\alpha$· καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως.

Ῥᾴδιον δὲ συνιδεῖν, ὡς οὐκ ἐπὶ πάσης, ὅπως ἂν ἔτυχε δηλουμένης ποσότητος, τὴν καθ᾽ οἱανδήποτε τάξιν ἡμῖν ἐπιταχθεῖσαν ῥίζαν, κατὰ τὸν εἰρημένον τρόπον οἷόντε λαβεῖν. Αὐτίκα καὶ γὰρ τὴν ἀπὸ $\alpha^2 + \beta^2$ τετραγωνικὴν εὐκρινῶς τε καὶ ἄνευ τῆς τῶν ῥιζικῶν καλουμένων σημείων παρεμπλώσεως, ἀποδοῦναι ἀμήχανον. Καὶ εἰσὶ δὲ κατὰ ταύτην καὶ ἄλλαι ἀριθμοῦ ἐπέκεινα παντὸς, οὕτως ἀναπόδοτοι.

§. 706. Οὐμὴν ἀλλ᾽ ὅπως ἂν καὶ προκέοιτο δηλουμένη τις ποσότης οἷον ἡ Α, ἐὰν μονὰς ληφθῇ αὐτῇ τῇ Α ὁμογενὴς, ἀείτις μεταξὺ τῆς μονάδος καὶ τῆς εἰρημένης ποσότητος Α ἐμφιλοχωρήσειεν ἂν μέση ἀνάλογον. Ἀμέλειτοι ἐὰν ὦσιν 1 καὶ Α ἐν γραμμαῖς διδόμεναι, ῥᾷστα ἡ μέση (§. 452.) ἐξευρεθήσεται. Εὑρεθεῖεν δ᾽ ἂν καὶ μέσαι δύο ἀνάλογον μεταξὺ

ξὺ

ξὺ τῶν αὐτῶν 1 καὶ Α, (εἰ καὶ μὴ διὰ τῆς στοιχειώδους Γεωμετρίας τοῦτο ἐνδέχεται)· καὶ τρεῖς δὲ, καὶ ὁποσαοῦν. Εἰ γὰρ ληφθείη α ὁποίατισοῦν, συσταίη δέ τις πρόοδος γεωμετρικὴ, οἷον

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \alpha^5,\ \alpha^6,\ \kappa\xi.$$

τεθείη δὲ $A = \alpha^2$, γένοιτ' ἂν μεταξὺ τῶν 1 καὶ Α μέση ἀνάλογος ἡ α· τεθείσης δὲ $A = \alpha^3$, ἔσται α ἡ πρώτη τῶν δύο μέσων ἀναλόγων α καὶ α^2 μεταξὺ 1 καὶ Α. Ἐὰν δὲ τεθῇ $A = \alpha^4$, ἔσται α ἡ πρώτη τῶν τριῶν μέσων ἀνάλογον α, α^2, α^3 μεταξὺ 1 καὶ Α· καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Δῆλον δὲ, ὡς ἥτις ποτ' ἂν ᾖ ἡ Α, ἀεὶ τῇ κατὰ τὸ μέγεθος προσαυξήσει, ἢ ἀπομειώσει τῆς προσληφθείσης α, εἰς ἐκεῖνο τέως πάρεστιν ἐφικέσθαι, ὥστε γενέσθαι $A = \alpha^2$, ἢ $A = \alpha^3$, ἢ $A = \alpha^4$, ἢ $A = \alpha^5$, καὶ ἐν γένει $A = \alpha^\sigma$.

§. 707. Ἐξ ὧν οὖν εἴδομεν, ἐὰν $A = \alpha^\sigma$, ἐν οἷς ἂν σημαίνοι $\sqrt[\sigma]{A}$, ἀεὶ ἔσται α (§. 654.). Οὐκοῦν $\sqrt[\sigma]{A}$ ἀεί τινα ποσότητα ἀληθῆ καὶ πραγματιώδη ἡμῖν διασημανεῖ, εἴτι ποσὸν ἁπλῶς ληφθὲν, ἢ ἐν καταφάσει διὰ τοῦ Α παριστάνοιτο, ἡλίκος δ' ἂν ὁ ἀριθμὸς σ τεθείη τὴν δύναμιν.

§. 708. Τοῦ δέ τοι Α καταφατικὴν ὑποδηλοῦντος ποσότητα, καὶ τοῦ σ ἀριθμόν τινα τῶν ἀρτίων ὑποσημαίνοντος ἡ τοῦ τύπου $\sqrt[\sigma]{A}$ σημασία, οὐχ ὅπως διὰ τοῦ καταφατικοῦ α, ἀλλὰ καὶ δι' αὐτοῦ τούτου ἀποφατικῶς ἐκληφθέντος $-\alpha$, ἀείποτε ἕξει παρίστασθαι. Τοῦτο δὲ αὐτόθεν φανερὸν, ὅτι ἐπὶ τῆς γεωμετρικῆς προόδου, ἐφ' ἧς ὁ μὲν πρῶτος τῶν ὅρων 1, ὁ δὲ μετὰ τοῦτον $-\alpha$, ἅπασαι αἱ κατὰ τὰ ἀρτιάριθμα ἐπίσημα δυνάμεις, καταφατικαὶ οὐδὲν ἧττον προκύπτουσι. Γίνεται γὰρ ἡ πρόοδος,

$$1, -\alpha, \alpha^2, -\alpha^3, \alpha^4, -\alpha^5, \alpha^6, -\alpha^7, \alpha^8, \kappa\xi.$$

ταύτητοι καὶ ὁ τύπος $\sqrt[\sigma]{A}$ ἥπερ ὑπετέθη, ἀδιαφορήσει δήπε, εἰς τὸ εἴτε καταφατικῶς διὰ + α, εἴτε καὶ ἀποφατικῶς διὰ − α παρίςαθαι.

§. 709. Ἀλλ' ἐὰν τἐπίσημον σ περιτΊάριθμον ᾖ, ὁ τύπος $\sqrt[\sigma]{A}$ ἐτ' ἂν ἀποφατικὴν ποσότητα παραςήσειε τε̃ Α καταφάσκοντος, ἔτε δὴ καταφατικὴν ποτε τε̃ Α ἀποφάσκοντος· τε̃ γὰρ α ἐν μὲν καταφάσει τεθέντος, ἅπασαι αἱ τὰ ἐπίσημα περιτΊάριθμοι δυνάμεις καταφήσεσιν· ἐν ἀποφάσει δὲ, ἀποφήσεσιν, ἥπε σαφῶς ἐκ τῶν προτεθεισῶν προόδων πάρεςι συνορᾶν. Καίτοι καὶ ἔτω διὰ τε̃ $\sqrt[\sigma]{A}$ ποσότης ἐδὲν ἥκιςα δηλωθήσεται ἀληθὴς καὶ πραγματιώδης, κἂν ἀποφάσκον τὸ Α ᾖ.

§. 710. Ἀλλὰ γὰρ τε̃ μὲν Α ἀποφατικόντι σημαίνοντος, τε̃ δὲ σ ἀρτιαρίθμε ὄντος, οἷον 2, 4, 6, κξ. ἐκ ἄντις δοθείη ποσότης, ἡ τῇ δηλώσει $\sqrt[\sigma]{A}$ συμφώνως βαίνεσα. Εἴτε γὰρ ἐκείνη καταφάσκεσα εἴη, εἴτ' ἐν ἀποφάσκεσα, ἀείποτε τῶν ἐν ἀρτιαρίθμοις τοῖς ἐπισήμοις δυνάμεων αἱ σημασίαι, ὧν μίατις εἶναι ὑπετίθετο καὶ ἡ τε̃ Α, εἰσὶ θετικαί. Ταύτητοι ἐὰν $\sqrt[\sigma]{-A}$ ὑποδηλε̃ν τὸ α τεθῇ, τετὶ τὸ α ἔτε θετικὸν ἔςαι, ἔτ' ἂρ ἀποφατικὸν, πάντῃ δὲ πάντως ἀδύνατον.

§. 711. Ἐὰν ἐπὶ τῆς ῥίζης $\sqrt[\sigma]{A}$ τεθῇ $\sigma = 4$, καὶ $A = \alpha^4$, ἔςαι δὴ τῆς α^4 ποσότητος ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα διτΊή· ἀμέλειτοι ἡ μὲν + αα, ἡ δὲ − αα· ὧν ἀφ' ἑκατέρας, ἐὰν ἡ τετραγωνικὴ αὖθις ῥίζα ὑφαιρεθῇ, προκύψει τὸ ἐν γένει ὑπὸ $\sqrt[4]{\alpha^4}$ δηλέμενον. Καὶ εἰσὶ μὲν ἐν τε̃ τετραγώνε + αα, αἱ δισσαὶ ῥίζαι αὗται + α, καὶ − α· τε̃ δ' ἀποφατικε̃ − αα, ἀληθεῖς μὲν καὶ πραγματιώδεις ῥίζαι τὸ

παρά-

παράπαν οὐκ εἰσὶν, αἱ δὲ ἀδυνάτως ἔχουσαι οὕτως ἂν ἐπισημανθεῖεν· ἡ μὲν $+\sqrt{-\alpha\alpha}$, ἡ δὲ $-\sqrt{-\alpha\alpha}$.

Τὰς τοίνυν τέτταρας τάσδε ποσότητας, ἡ $\sqrt[4]{A}$ ἐξίσου δυνήσεται παραδηλοῦν· τῶν τε τεττάρων τούτων $+\alpha$, $-\alpha$, $+\sqrt{-\alpha\alpha}$, $-\sqrt{-\alpha\alpha}$ ἑκάστη τῆς α^4 ποσότητος ῥίζα ἂν τετάρτη ῥηθείη, καθ' ἣν δήπου σημασίαν καὶ α τὸ θετικὸν καὶ πραγματιῶδες, αὐτῆς ἐκείνης ῥίζα ἡ τετάρτη καλεῖται. Εὔδηλον γὰρ ὡς κἀκείνων ἑκάστη, ἐπὶ τὴν τετάρτην ἀρθεῖσα δύναμιν, α^4 ἀποδώσει, ἤτοι A. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον χωροῦντας, καὶ πρὸς $\sigma = 8$, ὀκταπλῶς ἐστὶ συναγαγεῖν ἐκλιμωμένην τὴν $\sqrt[8]{A}$· ὡς μηδὲν ἄτοπον εἶναι ἐντεῦθεν ὑπολαβεῖν, καὶ διὰ τῆς $\sqrt[3]{A}$, καὶ τῆς $\sqrt[5]{A}$, καὶ τῶν ἄλλων ὅσαι τοιαῦται πλείους τὰς ῥίζας τῆς ποσότητος A ὑποσημαίνεσθαι, τὰς μὲν δυνατῶς ἐχούσας, τὰς δὲ καὶ ἀδυνάτως· καταφατικὰς, ἢ ἀποφατικάς· κἂν ἄλλως ταύτας ἀνακαλύψαι οὐχ οὕτω ῥᾴδιον.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 712. Λογικὴ ποσότης Ἀλγεβραϊκῶς εἰρήσεται, ἡ κατάγε τὰς προσληφθείσας ἐπωνυμίας, τῶν ῥιζικῶν ἄνευ σημείων, ἢ δυνάμεων εἰς τὰ ἐπίσημα κλασματικὰ, παρίστασθαι ἔχουσα. Ἄλογος δὲ ἡ κατ' αὐτὰς τὰς ἐπωνυμίας, ἄλλως προβάλλεσθαι μὴ δυναμένη, εἰ μὴ δι' ἐπισήμων κλασματωδῶν, ἤτινων σημείων ἄλλων ἰσοδυναμούντων τοῖς ἐπισήμοις τοῖς κλασματώδεσι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 713. Αἱ τοίνυν λογικαὶ ποσότητες οὕτως ἔχουσι τύπου· $\alpha^2 + 2\alpha\beta$· ἢ $\alpha^3 - \frac{2}{3}\alpha^2\beta + \frac{1}{4}\beta^3$· ἢ $\alpha^4 - 2\alpha^{\mu}\beta^{\sigma} - 8\alpha^{\mu}\beta^{\sigma}\gamma^{\tau}$, τῶν μ, σ, τ ἀριθμοὺς οὑστινασοῦν ὁλοχερεῖς καταφατικοὺς, ἢ ἀποφατικοὺς

τικοὺς ὑποσημαινόντων. Ἀποκρουςέον γὰρ ἀπὸ τῶν ἐπισήμων τὰ κλάσματα· αἱ γὰρ ταῦτα ἐπιφέρουσαι δυνάμεις ταῖς ῥιζικαῖς ποσότησιν ἴσα δύνανται· οἷον $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$. Καὶ μὲν οὖν ἡ $\sqrt{\alpha^2}$ λογικὴ ποσότης ἐςὶν, ὡς ταὐτὸ σημαίνουσα τῷ α. Καθὰ δὴ καὶ $\sqrt{(\alpha\beta - 2\alpha\beta + \beta\beta)}$, καὶ $\sqrt[3]{\beta^6}$, καὶ ὅσαι τοιαῦται. Ἀλλ᾽ ἡ $\sqrt{\alpha^2\beta}$, $\sqrt[3]{\alpha^3\beta}$, καὶ αἱ παραπλήσιαι εἰσὶν ἄλογοι. Οὐμὴν ἀλλ᾽ ἐὰν τὸ ἐπὶ τῆς $\sqrt{\alpha\alpha\beta}$ διὰ τοῦ β δηλούμενον, ἐπονομασθῇ γγ, ἔςαι $\sqrt{\alpha\alpha\beta} = \sqrt{\alpha\alpha\gamma\gamma}$, ἧς μία τῶν τιμῶν καὶ ἡ αγ· καὶ τότε δὴ λογικὴ ὑπάρξει ἡ δήλωσις. Τοὐναντίον δὲ ἐὰν ἐπὶ τοῦ λογικῶς ἐκκειμένου τύπου $\alpha\alpha + 2\alpha\beta$, μετονομασθῇ $\beta = \sqrt{\alpha\gamma}$, ἡ αὐτὴ ποσότης οὕτως $\alpha\alpha + 2\alpha\sqrt{\alpha\gamma}$ δηλουμένη, ἄλογος ῥηθήσεται· ὥςε ἡ ἀλογία ἐκ τῶν προσληφθεισῶν ἐπωνυμιῶν ὅλως ἤρτηται.

§. 714. Οὐ κατὰ τὴν αὐτὴν δὲ ἔννοιαν ἐκδεκτέον ἡμῖν τὰς φωνὰς ἐνταῦθα, ᾗ καὶ τοῖς παλαιοτέροις ἐξείληπτο. Ἐκεῖνοι μὲν γὰρ ποσότητας δύο **συμμέτρους** ἀλλήλαις ἐκάλουν, ὧν ἔςι κοινόν τι μέτρον λαβεῖν, ὥντε κατὰ τὸ ἀκόλουθον ἡ ἑτέρα πρὸς τὴν ἑτέραν, ὡς ἀριθμὸς ἂν ἔχοι ὡρισμένος ὁλοχερὴς, πρὸς ἀριθμὸν ὡρισμένον ὁλοχερῆ. **Ἀσυμμέτρους** δ᾽ ἔφασαν, ὧν μέτρον κοινὸν οὐδὲν ἐςὶ προσευρεῖν· ὥντε ὁ λόγος ἐν ἀριθμοῖς ὡρισμένοις ὁλοχερέσιν οὐκ ἂν παραςαίη. Οὕτω γραμμὰς συμμέτρους ἄντις εἴποι, καὶ τετράγωνα σύμμετρα, καὶ ποσότητας ὅσας ἄλλας. Ἄλογον δὲ οἱ παλαιοὶ γραμμὴν προσεῖπον τὴν μὴ μόνον γραμμῇ ἑτέρα τῇ ἀντὶ μονάδος ληφθείσῃ ἀσύμμετρον, ἀλλ᾽ ἀφ᾽ ἧς καὶ τὸ τετράγωνον ἀσυμμέτρως ἔχει, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἀντὶ μονάδος ληφθείσης τετράγωνον. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ γὰρ οὐκ αὐτὰ ἡμῖν ἐπὶ τοῦ παρόντος τὰ ποσὰ θεωρεῖται,

ρεῖται, ἀλλὰ τῶν ποσῶν μόνα τὰ εἴδη, ταύτῃ καὶ τῶν τοιῶνδε σημασιῶν ἀποκλίνειν θέμις. Οὐδὲ γὰρ τὰ ἀλγεβραϊκῶς ἄλογα, καθόλου τε καὶ ἁπλῶς θεωρούμενα, ποσὰ ἄτ]α ὑποδηλοῦν πεφύκασιν ἐν οἱαδήποτε ὑποθέσει γεωμετρικῶς, ἢ ἀριθμητικῶς τῇ μονάδι ὄντα ἀσύμμετρα· οὐδὲ μὲν οὖν ταύτηγε σύμμετρα τοὐναντίον τὰ λογικά. Καὶ γὰρ $\sqrt{a}$ καθόλου μὲν ἄλογον ἐστὶν, ἐὰν δὲ τὸ a σημαίνῃ 1, ἢ 4, ἢ 9, ἢ ὁντινοῦν ἕτερον ἀριθμὸν τετράγωνον, δῆλον ὡς τὸ $\sqrt{a}$ τηνικαῦτα 1, ἢ 2, ἢ 3, καὶ συνελόντι φανεῖ ἀριθμόν τινα τῇ μονάδι σύμμετρον σημανεῖ. Τοὐναντίον δὲ τὸ a ἀλγεβραϊκῶς ἐστὶ λογικόν. Ἀλλ᾽ ἐὰν εἰς δήλωσιν ἥκῃ $\sqrt{2}$, ἢ $\sqrt{3}$, ἢ $\sqrt[3]{9}$, ἔσται δὴ τὸ a τῇ μονάδι ἀσύμμετρον.

§. 715. Τὸ ἰδίως ἄλογον, ἀεί τι ποσὸν ἐστὶ κυρίως καὶ ἀληθῶς, καὶ τῶν ἥκιστα ἀδυνάτων. Διὸ τὸ ἀδύνατον, κἂν εἰ καθ᾽ ὁμοιότητα τοῦ ἀλόγου προβάλλοιτο, οἷον τὸ $\sqrt{-a}$ οὐκ ἂν ἄλογον κυρίως ἐπονομάζοιτο. Ὑπὸ δὲ τῷ ἐπωνύμῳ τῶν Ῥιζικῶν, καὶ ταῦτα πιπ]έτω τὰ οὕτως ἀδύνατα.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 716. Οἱασδηποτοῦν ποσότητος Α, δυνατῶς τε ἅμα καὶ καταφατικῶς ἔχειν ὑποτιθεμένης, ἡ τετετραγωνικὴ, ἢ κυβικὴ, ἢ τάξεως ἑτέρας ἡστινοσοῦν ἡ ῥίζα, τῆς διὰ τοῦ ἐπισήμου σ γνωριζομένης, Πρωτεύουσα μὲν εἰρήσεται ἡ δυνατῶς ὡσαύτως καὶ καταφατικῶς ἔχουσα, εἴτε λογικὴ εἴη, εἴτ᾽ ἄλογος. Δευτερεύουσα δὲ τῶν τῆς αὐτῆς ποσότητος Α ῥιζῶν ἡ τυχοῦσα ἄλλη.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 717. Πρωτεύουσα τοιγαροῦν τοῦ ἀριθμοῦ 64, τετραγωνικὴ ῥίζα ἐστὶ + 8· δευτερεύουσα δὲ − 8·

ἑκα-

ἑκατέρα δὲ δυνατή. Τοῦ δ' αὐτοῦ ἀριθμοῦ κυβικὴ μὲν ῥίζα πρωτεύουσα ἐστὶ + 4· τῶν δέτοι δευτερευουσῶν οὐδεμία τυγχάνει ἔχουσα δυνατῶς. Ὡσαύτως ἡ τοῦ αὐτοῦ ἐκείνου ἕκτη ῥίζα πρωτεύουσα ἐστὶ + 2, τῶν δὲ ἐν ταῖς ἑκτοταγέσι δευτερευουσῶν μία καὶ ἡ − 2· τοῦγε μὴν ἀριθμοῦ 16, ῥίζης τεταρτοταγοῦς πρωτευούσης τῆς + 2, εἴη μὲν ἂν καὶ δευτερεύουσα δυνατὴ ἡ − 2· εἴη δ' ἂν καὶ τῶν ἥκιστα δυνατῶν παρὰ ταύτην, καταφατικὴ μὲν + $\sqrt{-4}$, ἀποφατικὴ δὲ ἡ − $\sqrt{-4}$. Οὕτω δὲ δὴ καὶ τῆς ἐν καταφάσει μονάδος + 1 ῥίζα τυγχάνει πρωτεύουσα παντοταγὴς ἡ + 1.

Ἀριθμοῦ δὲ ἀποφατικοῦ, οἷον τοῦ − 64, ῥίζα πρωτεύουσα οὐδεμία, κἂν ἄρτιον εἴη, κἂν περιττὸν τῆς κατὰ τὴν ῥίζαν τάξεως τὸ ἐπίσημον. Ἀλλ' εἰ γὰρ περιττὸν, ἡ δευτερεύουσα − 4 οὐκ ἀδύνατος· μόνῳ τῷ σημείῳ διενηνοχεῖα τῆς + 4 ῥίζης τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 64, ληφθέντος καταφατικῶς. Ὥστε ἐπιδήλου οὔσης τῆς τοῦ 64 ἀριθμοῦ κυβικῆς ῥίζης, μηδὲ τὴν ὁμοταγῆ λανθάνειν τοῦ αὐτοῦ ἐν ἀποφάσει δυνατῶς ἔχουσαν. Κρατεῖ δὲ κἀπὶ τῶν λοιπῶν τῶν παραπλησίων ὁ αὐτὸς λόγος.

§. 718. Ἀτενῶς δ' ἐνταῦθα τὸν νοῦν ἐπιστητέον, ὡς ἡ $\sqrt[\bullet]{A}$ κατ' ἔννοιαν γράφεσθαι ἔχει διττήν· τῇ μὲν, εἰς δήλωσιν μόνης ἰδίως τῆς πρωτευούσης ῥίζης, τῆς ἐν τῇ δυνάμει ἧς σ τοὐπίσημον· τῇ δὲ, εἰς δήλωσιν γενικωτέραν καὶ ἀορισταίνουσαν, ὥστε οἱανδήποτε διὰ τοῦ $\sqrt[\bullet]{A}$ καθόλου ῥίζαν ὑποσημαίνεσθαι τῶν κατὰ τὴν ἐπισημανθεῖσαν τάξιν, εἴτε τὴν πρωτεύουσαν αὐτὴν, εἴτε καὶ τῶν δευτερευουσῶν τὴν τυχοῦσαν. Τὸ δὲ διττὸν τῆς κατὰ τὸν εἰρημένον τύπον δηλώσεως οὐχ οἷόντε διακρίνειν, εἰμὴ ποθεν ἄλλοθεν εἰδέναι παρείη, πότερον ἐπὶ παντὸς τοῦ προκειμένου ἐκδεκτέον ἐστίν.

§. 719.

§. 719. Ἐπὶ μὲν οὖν τοῦ παρόντος παρὰ τὰς πρωτευούσας τῶν ῥιζῶν, περὶ μόνων τῶν δευτερευουσῶν ἔσαι λόγος, ὅσαι οὕτως ὑπὸ τῷ $\overset{\circ}{\sqrt{}}A$ περιέχονται, ὡς ἐπὶ τὸ πρωτεύειν μεθίσασθαι τῶν κατὰ τὴν Α ποσότητα σημείων ἀμειβομένων, καθ' ὁποίανδήποτ' ἂν τοῦτο ὑπόθεσιν γίγνοιτο. Αἱ γὰρ λοιπαὶ οὔτ' ἂν διὰ τῶν εἰς τόδε παραδοθέντων σαφῶς ἀναπτυχθεῖεν, καὶ οὐδεμιᾶς, ὅ,τι μὴ κατὰ τὴν λεπτοτέραν ἀνάλυσιν, γένοιντο χρήσεως. Τῶν δὲ δὴ ὑποθέσεων καθ' ἃς τὰ τῆς ποσότητος Α σημεῖα ἀμείβεται, πρόχειρος αὕτη· ἐὰν ἀμέλειτοι ᾖ $A = (-\alpha)^3$, ἢ $A = (-\alpha)^5$, ἤτι τοιοῦτον· τουτέστιν ἐὰν Α ὁποιαδήποτε τύχῃ δύναμις, περιττάριθμου μὲν ἐπισήμου, ποσότητος δὲ ἀποφατικῆς τίθεται $-\alpha = \gamma$. Ἐντεῦθεν γὰρ δῆλον ὅτι ἀπὸ $A = (-\alpha)^3$, γίνεται $A = \gamma^3$. κτ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 720. Ἐκ δὲ δὴ τῶν εἰρημένων ἐπιφέρεται, ὅτι τῆς σημασίας ἐπὶ μόνας ἰδίως τὰς πρωτευούσας τῶν ῥιζῶν προσδιωρισμένης, ἐὰν ᾖ $\alpha = \beta$, ἔσαι καὶ $\overset{\circ}{\sqrt{}}\alpha = \overset{\circ}{\sqrt{}}\beta$· καὶ $\overset{\sigma}{\sqrt{}}\alpha^{\mu} = \overset{\sigma\tau}{\sqrt{}}\alpha^{\mu\tau}$· αὐτ' οὖν $\alpha^{\mu:\sigma} = \alpha^{\mu\tau:\sigma\tau}$ κἀντεῦθεν καὶ $\overset{\mu}{\sqrt{}}\alpha^{\mu\varsigma} = \alpha^{\mu}$. Ἀτὰρ δὴ πρὸς σημασίαν τῆς ἀορίστου δηλώσεως, τῆς παρὰ τὴν πρωτεύουσαν καὶ τὰς δευτερευούσας ἁπάσας ῥίζας περιλαμβανούσης, πῇ μὲν εὐλαβῶς προσαρμοστέον, πῇ δὲ καὶ οὐδὲ τοῦ ἀληθοῦς ἐχόμενα ἡγητέον. Οὕτω γὰρ καίτοι $4 = 4$, ὅμως οὐκ ἀδιαφόρως ᾗπερ ἔτυχε θετέον $\sqrt{4} = \sqrt{4}$. Ἐὰν γὰρ ἐκ τῆς ἐπὶ $\sqrt{4}$ διττῆς σημασίας, ἐπὶ μὲν θατέρου τῶν τεθέντων ληφθῇ $+2$, ἐπὶ δὲ θατέρου -2, ἕψεται δὴ εἶναι $+2 = -2$· ὅπερ ἄτοπον. Καὶ ἐὰν κατὰ τὴν αὐτὴν καθόλου σημασίαν τεθῇ $\overset{2}{\sqrt{}}\alpha^2 = \alpha$, μία μόνη τετραγωνικὴ παρασημανθήσεται ῥίζα τοῦ αα τετραγώνου, ὁπότε $+\alpha$, καὶ $-\alpha$ δύο εἰσίν. Ὡσαύτως καὶ ἐὰν $\sqrt[4]{\alpha^2}$, τῇ τῶν ἐπισήμων διὰ 2 διαιρέσει, ἀντὶ $\sqrt{\alpha}$ ἐκληφθῇ, ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐν τῷ $\sqrt[4]{\alpha^2}$ ῥιζῶν $+\sqrt{\alpha}$, $-\sqrt{\alpha}$, $+\sqrt{-\alpha}$, $-\sqrt{-\alpha}$, αἱ δύο ἔσχατοι ἐκπεσοῦνται, ὡς ἅτε μὴ τῇ κατὰ γένος δηλώσει τῆς $\sqrt{\alpha}$ περιεχόμεναι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 721. Ἐὰν ἐπὶ τῶν $\sqrt[\sigma]{\alpha} = \sqrt[\sigma]{\beta}$, ἀντὶ μὲν τοῦ α τεθῇ $-\gamma$, ἀντὶ δὲ τοῦ β τεθῇ $-\varepsilon$, ἡ αὐτὴ ἰσότης ἐκκείσεται καὶ διὰ τῶν $\sqrt[\sigma]{-\gamma} = \sqrt[\sigma]{-\varepsilon}$, ἐκ τῆς $-\gamma = -\varepsilon$ παραπλησίως ἑπομένη, καθάπερ οὖν καὶ ἡ $\sqrt[\sigma]{\alpha} = \sqrt[\sigma]{\beta}$ ἐκ τῆς $\alpha = \beta$ ἕπεται. Οὕτω δέ τοι καὶ $\sqrt[\sigma]{(-\gamma)^{\mu}} = \sqrt[\sigma\tau]{(-\gamma)^{\mu\tau}}$, καὶ $\sqrt[\sigma]{(-\gamma)^{\mu\sigma}} = (-\gamma)^{\mu}$. Αἱ μὲν οὖν ῥίζαι ἃς ἐνταῦθα τιθέαμεν πρωτεύουσαι γίνονται, τῶν κατὰ τὰς ποσότητας $-\gamma$ καὶ $-\varepsilon$ σημείων ἀμειβομένων· ἤ, ὃ ταυτόν ἐστιν, ἐὰν ἀντὶ μὲν $-\gamma$, ἀντικαταστῇ α, ἀντὶ δὲ $-\varepsilon$, ἀντικαταστῇ β. Ἃ τοίνυν περὶ τῶν πρωτευουσῶν ῥιζῶν ἡμῖν τεθεώρηται, καὶ περὶ τῶν δευτερευουσῶν, ἃς μόνας ἐνταῦθα ἐπιθεωροῦμεν, αὐτὰ δὴ ταῦτα παραπλησίως ἀληθεύσει, εἰ μόνον αἱ τοιαίδε ῥίζαι οὕτω διασημαίνοιντο, ὡς ἐνταῦθα διασεσήμανται· μηδ' ἀντὶ $(-\gamma)^{\mu}$ τὸ προκύπτον τιθοῖτο· τὸ ἀπὸ τῆς ἀποφατικῆς $(-\gamma)$ ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ μ ἐπίσημον δύναμιν πράγματι ἐξαρθείσης. Τοῦτο γὰρ ἂν καὶ εἰς ἀπάτην ἡμᾶς παρακρούσειε τοῦ κατὰ τὸ μ ἀριθμοῦ ἀρτίου τυγχάνοντος· τηνικαῦτα γὰρ ἡ δύναμις καταφάσκουσα, ἔσται ἡ αὐτὴ τῇ $(+\gamma)^{\mu}$ (§. 691.). Καὶ εἴπερ ἄρα τεθείη $(-\gamma)^{\mu} = (+\gamma)^{\mu}$, τῇ τῶν ῥιζῶν ὑπεξαγωγῇ ἔσται $-\gamma = +\gamma$· ὅπερ ἄτοπον.

ΠΟΡΙΣ-

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ·

§. 722. Ὡσαύτως καὶ τοῦ μὲν ἀπὸ τῆς ῥίζης $\sqrt[\circ]{}\alpha$ τετραγώνου ὄντος $\sqrt[\circ]{}\alpha^2$, τοῦ δὲ κύβου $\sqrt[3]{}\alpha^3$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἔσαι δὴ καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς $\sqrt[\circ]{}(-\gamma)$ τετράγωνον $\sqrt[\circ]{}(-\gamma)^2$· ὁ δέτοι κύβος $\sqrt[\circ]{}(-\gamma)^3$· καὶ ἐν γένει ἡ κατὰ τὸ μ ἐπίσημον δύναμις, αὕτη $\sqrt[\circ]{}(-\gamma)^\mu$. Τὰ δ' αὐτὰ καὶ οὕτως ἂν γράφοιτο, ὡς ἀντὶ μὲν $\sqrt[\circ]{}(-\gamma)$, κεῖσθαι $(-\gamma)^{1:\circ}$· ἀντὶ δὲ $\sqrt[3]{}(-\gamma)^2$ τίθεσθαι ἐν ἰσότητι $(-\gamma)^{2:3}$· καὶ ἐν γένει $\sqrt[\circ]{}(-\gamma)^\mu = (-\gamma)^{\mu:\circ}$ (§. 662.). Καὶ τόνδε ἄρα τὸν τρόπον τῶν ῥιζῶν διατυπουμένων, ὁσαδήποτε περὶ τοῦ τύπου $\alpha^{\mu:\circ}$ προαπεδείχθη, ταῦτα δὴ καὶ τῷ $(-\gamma)^{\mu:\circ}$ προσαποδοθήσεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

§. 723. Οὕτω δὴ τετράγωνον ἐξευρίσκεται ἀπὸ ῥίζης $\sqrt{}-\gamma$, τόδε $\sqrt{}(-\gamma)^2$ $(-\gamma)^{2:2} = (-\gamma)^1 = -\gamma$. Καὶ ἀπὸ τῆς αὐτῆς δὲ $\sqrt{}-\gamma$ καὶ κύβος ὅδε $\sqrt{}(-\gamma)^3 = (-\gamma)^{3:2}$· ἡ δὲ τετάρτη δύναμις $\sqrt{}(-\gamma)^4 = (-\gamma)^{4:2} = (-\gamma)^2$. Ἡ δὲ δύναμις αὕτη $(-\gamma)^2 = \gamma^2$. Ἀφικομένους δὲ πρὸς τὸ ζητούμενον, ὡς οἷόν τε ἁπλούστατα αὐτὸ παριστάνειν, οὐδὲν τὸ ἀπαγορεῦον. Καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν δὲ τὸ πρᾶγμα ἐπίσης ῥᾴδιον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ·

§. 724. Ῥίζαν τὴν πρωτεύουσαν, ὁποίαποτ' ἂν ᾖ, ἁπλουστέραν, εἴπερ οἷόν τε, ἀποδιδόναι, τῆς ἀλογίας ἐν μέρει γοῦν ἀποσκυβαλιζομένης.

ΠΡΟΔΙΑΣΚΕΥΗ.

§. 725. Ὡς ἀνωτέρω δεδήλωται (§. 663.)

$$\sqrt[\sigma]{\frac{\beta^\rho \delta^\tau}{\gamma^\nu}} = \frac{\sqrt[\sigma]{\beta^\rho} \times \sqrt[\sigma]{\delta^\tau}}{\sqrt[\sigma]{\gamma^\nu}}$$

Ἐὰν ἄρα τύχῃ ὂν $\rho = \sigma$, ᾖ δὲ καὶ ἡ β ποσότης καταφατική, ἔσαι $\sqrt[\sigma]{\beta^\rho} = \sqrt[\sigma]{\beta^\sigma} = \beta$ (§. 720.): καὶ $\sqrt[\sigma]{\frac{\beta^\rho \delta^\tau}{\gamma^\nu}} = \beta \sqrt[\sigma]{\frac{\delta^\tau}{\gamma^\nu}}$

Ἐὰν δὲ ᾖ $\nu = \sigma$, ᾖ δὲ καὶ γ^ν ποσότης καταφατική, ἔσαι $\sqrt[\sigma]{\gamma^\nu} = \sqrt[\sigma]{\gamma^\sigma} = \gamma$· κἀντεῦθεν $\sqrt[\sigma]{\frac{\beta^\rho \delta^\tau}{\gamma^\nu}} =$

$$\frac{\sqrt[\sigma]{\beta^\rho \delta^\tau}}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \sqrt[\sigma]{\beta^\rho \delta^\tau}.$$

Καὶ ἐν γένει ἄρα ὁ πρὸ τῦ ῥιζικῦ σημείυ πολλαπλασιαςὴς, ὁ αὐτὸ δηλονότι τὸ ῥιζικὸν πολλαπλασιάζων, ἰσοδυναμεῖ τῇ καθ᾽ ἑαυτὸν δυνάμει, τῇ τῶ μὲν ῥιζικῷ ἐπισήμῳ σ ὁμοβαθμίῳ, τὴν δὲ ὑπ᾽ αὐτὸ τελῦσαν ποσότητα ἐπιπολλαπλασιαζύσῃ· ταυτὸ δὲ καὶ περὶ τῆς διαιρέσεως ῥητέον. Εἰ μήτις ἕλοιτο τὴν διὰ γ^ν διαίρεσιν πολλαπλασιασμὸν ἀποκαλεῖν τὸν διὰ τῦ $\frac{1}{\gamma^\nu}$ κλάσματος.

ΛΥΣΙΣ.

§. 726. Ἐνθάντοι ἐὰν ἀπὸ τῦ ἀριθμῦ, ἢ τῆς ὁπωσδήποτε ἐκφερομένης ἄλλως ποσότητος, καὶ ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν τελύσης, ἀντὶ τῶν παραγόντων, εἴτε ὁλοχερές, εἴτε δὴ καὶ κλασματῶδες, ἐν μέρει ἀποληφθῇ, ὁμοβαθμίυ τυγχάνον τῇ ῥίζῃ δυνάμεως, ἡ ὁμοταγὴς ῥίζα τῦ τηλικύτυ παράγοντος, ὀρθῶς

ἀεὶ-ἀείποτε καὶ κατὰ σκοπὸν, πρόγε τοῦ ῥιζικοῦ σημείου, οἷάτις παράγων ταχθήσεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

§. 727. Οὕτως $\sqrt{\alpha\alpha\beta\gamma}$, γίνεται $\alpha\sqrt{\beta\gamma}$· καὶ $\sqrt{48} = \sqrt{4\cdot 12} = 2\sqrt{12}$. Εἰ μὴ ὅτι ἐπεὶ παρὰ ταῦτα $\sqrt{48} = \sqrt{16\cdot 3}$, ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς καὶ εἰς τόνδε $4\sqrt{3}$ μεθαρμοσθήσεται.

Ἀλλὰ καὶ $\sqrt{48\alpha\alpha\beta\gamma}$ ἁπλούστερον οὕτω γραφήσεται $4\alpha\sqrt{3\beta\gamma}$, ἐκ τοῦ $16\alpha\alpha$ παράγοντος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ὑπεξαγομένης· ἢ γοῦν καὶ $2\alpha\sqrt{12\beta\gamma}$, ἐκ τοῦ $4\alpha\alpha$ ὁμοίως ὑπεξαχθείσης ἐνταῦθα τῆς ῥίζης τῆς τετραγωνικῆς.

Καὶ τὸ $\sqrt{27\alpha^3\beta^2\gamma}$ ἰσοδύναμον τῷ $3\alpha\beta\sqrt{3\alpha\gamma}$· ἔστι γὰρ $9\alpha^2\beta^2$ τῆς ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν τελούσης ποσότητος παράγων τετραγωνικός.

Καὶ μὲν δὴ καὶ $\sqrt{\frac{7}{25}}$, ἄμεινον ἂν οὕτως $\frac{1}{5}\sqrt{7}$ ἐξενεχθείη. Καὶ $\sqrt{\frac{28}{45}}$ οὕτως $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{5}}$· ὅτι $\frac{4}{9}\times\frac{7}{5} = \frac{28}{45}$.

Ὡσαύτως καὶ $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8\cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$· καὶ γὰρ 8 ἐστὶν ὁ κύβος ὁ ἀπὸ ῥίζης 2. Ὁμοίως δὲ καὶ $\sqrt[3]{\frac{5}{27}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{5}$· καὶ $\alpha\sqrt[3]{\beta^3\gamma} = \alpha\beta\sqrt[3]{\gamma}$.

Τὸ δ' αὐτὸ κρατεῖ καὶ ἐπὶ τῶν μᾶλλον συνθέτων· ἔστι γὰρ $\sqrt{\frac{\alpha^3\beta - 4\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3}{\gamma\gamma}} = \frac{\alpha - 2\beta}{\gamma}\sqrt{\alpha\beta}$· ὅτι $\alpha^3\beta - 4\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 = \alpha\beta\,(\alpha - 2\beta)^2$.

Παραπλησίως δὲ $\sqrt{\frac{\alpha^2\beta^2\mu^2 + 4\alpha^2\gamma\mu^3}{\pi^2\zeta^2}} = \frac{\alpha\mu}{\pi\zeta}\sqrt{(\beta^2 + 4\gamma\mu)}$.

Οὐκ ἄλλως δὲ καὶ ἐκ $\sqrt[4]{\frac{\alpha^3}{\chi}} = \sqrt[4]{\frac{\alpha^4}{\alpha\chi}}$, γίνεται $\alpha\sqrt[4]{\frac{1}{\alpha\chi}}$· ἢ γοῦν ἐκ $\sqrt[4]{\alpha^3\chi} = \sqrt[4]{\frac{\alpha^4\chi}{\alpha}}$, γίνεται $\alpha\sqrt[4]{\frac{\chi}{\alpha}}$.

Καὶ ἐκ $\sqrt[6]{\alpha^7\chi^5}$ γίνεται $\alpha\sqrt[6]{\alpha\chi^5}$· ἢ ὅτι $\sqrt[6]{\alpha^7\chi^5} = \sqrt[6]{\frac{\alpha^7\chi^6}{\chi}}$, τὸ αὐτὸ ῥιζικὸν καὶ ὧδε $\alpha\chi\sqrt[6]{\frac{\alpha}{\chi}}$ προτεθείσεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 728. Ἐὰν ἢ $\delta^\tau = -\varepsilon$, ἔσαι, εἴπερ ἐπὶ τῶν εὑρεθέντων τύπων $-\varepsilon$ ἀντὶ δ^τ γράφοιτο, $\sqrt[\sigma]{-\frac{\beta^\varrho\varepsilon}{\gamma^\nu}} = \beta\sqrt[\sigma]{-\frac{\varepsilon}{\gamma^\nu}}$ καὶ $\sqrt[\sigma]{-\frac{\beta^\varrho\varepsilon}{\gamma^\sigma}} = \frac{1}{\gamma}\sqrt[\sigma]{-\beta^\varrho\varepsilon}$. Ὅθεν φανερὸν τὸν αὐτὸν κανόνα κρατεῖν κἀπὶ τῶν παρὰ τὰς πρωτεύουσας ῥιζῶν ἐκείνων, ἃς ἐνταῦθα διασκεπτόμεθα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

§. 729. Οὕτως $\sqrt{-\alpha^3\beta^2\gamma} = \alpha\beta\sqrt{-\alpha\gamma}$· Καὶ $\sqrt{-\frac{\alpha^2\beta}{\gamma^2}} = \frac{\alpha}{\gamma}\sqrt{-\beta}$. Καὶ ἐν γένει $\sqrt{-\alpha} = \sqrt{\alpha}\times\sqrt{-1}$ τὸ γὰρ $-\alpha$, ἀναλύοιτ' ἂν εἰς $+\alpha$ καὶ -1 ὡς εἰς παράγοντας. Ὑποτίθεται δὲ τὸ $\sqrt{\alpha}$ μόνην τὴν πρωτεύουσαν ῥίζαν ὑποδηλοῦν.

Παραπλησίως δὲ καὶ ἐκ $-\sqrt{-\alpha}$, γενήσεται $\sqrt{\alpha}\times-\sqrt{-1} = -\sqrt{\alpha}\,.\,\sqrt{-1}$.

Ὡσαύτως καὶ $\sqrt[3]{-\alpha^3} = \alpha\sqrt[3]{-1} = \alpha\times-1 = -\alpha$· καὶ $\sqrt[4]{-\alpha^4} = \alpha\sqrt[4]{-1}$, καὶ ὅσα τοιουτότροπα.

Τὸ δέτοι ῥιζικὸν $\sqrt{(-1)^3}$, τοῦ κύβου $(-1)^3$ εἰς τοὺς δύο παράγοντας $(-1)^2$ καὶ -1 ἀναλυθέντες, οὕτως ἐκδηλωθήσεται $\sqrt{(-1)^2 \cdot -1}$· ἢ καὶ οὕτως $\sqrt{(-1)^2}\sqrt{-1}$. Ἐπειδὴ δὲ $\sqrt{(-1)^2} = -1$, ἔσαι καὶ $\sqrt{(-1)^3} = -1 \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$· κἀντεῦθεν $\alpha\sqrt{(-1)^3} = -\alpha\sqrt{-1}$· καὶ $-\alpha\sqrt{(-1)^3} = \alpha\sqrt{-1}$· τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον μετιτέον, καὶ ὅσα τούτοις ἐοίκασιν.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Β.

§. 730. Δῆλον δὲ ὅτι καὶ ἀντιςρόφως γένοιτ' ἂν, ὥςε ἀντὶ $\alpha\sqrt{\beta}$ γράφεσθαι $\sqrt{\alpha^2\beta}$· ἢ ἀντὶ $\frac{\alpha}{\gamma}\sqrt{\beta}$ τίθεσθαι $\sqrt{\frac{\alpha^2\beta}{\gamma\gamma}}$. Καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὡσαύτως.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 731. Καὶ ἄλλα δὲ πρὸς τούτοις ἐκ τοῦ τεθέντος συνάγεται θεωρήματος· οἷον ὅτι $\sqrt[4]{\alpha^3\beta} = \sqrt{\alpha} \times \sqrt[4]{\alpha\beta}$· διὰ τὸ εἶναι $\sqrt[4]{\alpha\alpha} = \sqrt{\alpha}$· καὶ τὰ παραπλήσια. Ἀλλὰ γὰρ τούτων τῆς εἰδικωτέρας διασκέψεως οὐ προσδεήσεται, ὁ τὸ θεώρημα συνιεὶς ἐξ οὗ αὐτὰ ἐπιφέρεται.

§. 732. Τῇ δὲ δὴ τοιαύτῃ τῶν ῥιζικῶν ἀναγωγῇ, πολλάκις καὶ τῶν ἄλλως δοξάντων ἂν διαφέρειν ἀναφαίνεται ἡ ταυτότης, δι' ἣν ῥιζικὰ δύο ὧν τὸ ἄθροισμα ζητεῖται, ἢ γοῦν ἡ διαφορὰ, κατὰ τὰ εἰρημένα (§. 628.) εἰς ἓν συνελθεῖν δυνήσεται· οἷον δὴ ταῦτα $\sqrt{48}$ καὶ $\sqrt{75}$ ἀναχθέντα γίνεται $4\sqrt{3}$ καὶ $5\sqrt{3}$· διὸ $\sqrt{48} + \sqrt{75} = 9\sqrt{3}$. Καὶ $\sqrt{75} - \sqrt{48} = \sqrt{3}$. Οὕτως ἐπειδὴ τοῦ $\sqrt{\frac{16}{27}}$, ἑκατέρων τῶν ἐπὶ τοῦ κλάσματος ὅρων διὰ τριῶν πολλαπλασιασθέντων γίνεται $\sqrt{\frac{16 \cdot 3}{81}}$, ἔσαι $\sqrt{\frac{16}{27}} = \frac{4}{9}\sqrt{3}$· κἀντεῦθεν $\sqrt{75} + \sqrt{\frac{16}{27}} = (5 + \frac{4}{9})\sqrt{3} = \frac{49}{9}\sqrt{3}$·

 καὶ

καὶ δὴ καὶ $\sqrt{48} - \sqrt{\frac{16}{27}} = (4 - \frac{4}{9})\sqrt{3} = \frac{32}{9}\sqrt{3}$. Ἤδη δὲ ἐπεὶ καὶ $4\sqrt{-18}$ ἀνάγεται εἰς τὸ $12\sqrt{-2}$· καὶ $\sqrt{-2\alpha^2}$ ἐςὶν $= \alpha\sqrt{-2}$· ἔςαι δὴ καὶ τὸ ἐκ τέτων ἄθροισμα $(12 + \alpha)\sqrt{-2}$, ὅ,τι δ᾽ ἂν καὶ σημαίνει τὸ α.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 733. Ῥιζικὰ δύο τῶν ἐνταῦθα ὑπὸ σκέψιν ἡμῖν γινομένων, ἑτεροταγῆ, ἐπὶ τὴν αὐτὴν τάξιν ἀνάγειν.

ΛΥΣΙΣ.

§. 734. Ἐὰν ὦσι διδόμεναι ῥίζαι πρωτεύεσαι ἑτεροταγεῖς αἵδε $\sqrt[\sigma]{\alpha^\mu}$ καὶ $\sqrt[\nu]{\beta^\tau}$, πολλαπλασιασθέντων ἀμφοτέρων τῶν ἐπισήμων σ καὶ μ, διὰ τῦ κατὰ τὴν ἑτέραν ῥίζαν ἐπισήμυ ν· καὶ ταύτης ὁμοίως ἀμφοτέρων ν καὶ τ διὰ τῦ κατὰ τὴν πρώτην ἐπισήμυ σ, ὁμοταγεῖς αἱ ῥίζαι προκύψυσι $\sqrt[\sigma\nu]{\alpha^{\mu\nu}}$ καὶ $\sqrt[\sigma\nu]{\beta^{\sigma\tau}}$, ὡς τὸ αὐτὸ σν ἐπίσημον ἔχυσαι· τὸ δ᾽ αὐτὸ συμβαίνει καὶ ἐὰν τεθέντος $-\gamma$ ἀντὶ α καὶ $-\varepsilon$ ἀντὶ β, εἶτα ἐκ τῶν ῥιζῶν $\sqrt[\sigma]{(-\gamma^\mu)}$ καὶ $\sqrt[\nu]{(-\varepsilon)^\tau}$ γενῶνται αὗται $\sqrt[\sigma\nu]{(-\gamma)^{\mu\nu}}$ καὶ $\sqrt[\sigma\nu]{(-\varepsilon)^{\sigma\tau}}$. Φημὶ ὖν τὰς ὕτως ἀναφυομένας ῥίζας, τὴν μὲν πρώτην τῇ πρώτῃ, τὴν δὲ δευτέραν τῇ δευτέρᾳ, ἴσας εἶναι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Καὶ γὰρ δὴ $\sqrt[\sigma\nu]{\alpha^{\mu\nu}} = \sqrt[\sigma]{\alpha^\mu}$· καὶ $\sqrt[\sigma\nu]{\beta^{\sigma\tau}} = \sqrt[\nu]{\beta^\tau}$ (§. 720.)· καὶ $\sqrt[\sigma\nu]{(-\gamma)^{\mu\nu}} = \sqrt[\sigma]{(-\gamma)^\mu}$· παραπλησίως δὲ καὶ $\sqrt[\sigma\nu]{(-\varepsilon)^{\sigma\tau}} = \sqrt[\nu]{(-\varepsilon)^\tau}$ (§. 721.).

ΣΧΟ-

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 735. Εἴτις διαιρέτης τοῖς οὕτως εὑρεθεῖσι τρισὶν ἐπισήμοις σν, μν, στ, κοινὸς ἐγχωρεῖ, πάντες οἵδε οἱ ἀριθμοὶ ἀπομειωθήσονται δι' ἐκείνου διαιρεθέντες, τῆς τῶν τάξεων οὐδέν τι ἧττον διασωζομένης ἰσότητος.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 736. Οὕτως οὖν ἐπὶ τὴν αὐτὴν τάξιν τῶν ῥιζῶν ἀναγομένων, ἡ ἑτέρα διὰ τῆς ἑτέρας πολλαπλασιασθήσεται, ἢ διαιρεθήσεται, κατὰ τὸν ἐν §. 725. ἐπαναληφθέντα κανόνα. Καὶ ἐὰν μὲν αἱ ῥίζαι ὦσι πρωτεύουσαι, οὐδεμιᾶς προδιασκευῆς δεήσει· ἢν δὲ μή, ῥᾷστα διανυσθήσεται τὸ προκείμενον, ἐὰν ἀντὶ $\sqrt[\sigma]{(-\gamma)^{\mu}}$ γράφηται $\sqrt[\sigma]{\gamma^{\mu}} \times \sqrt[\sigma]{(-1)^{\mu}}$. Ἐπειδὴ γὰρ $-\gamma = +\gamma \times -1$, ἔσται καὶ $(-\gamma)^{\mu} = \gamma^{\mu} \times (-1)^{\mu}$· καὶ $\sqrt[\sigma]{(-\gamma)^{\mu}} = \sqrt[\sigma]{\gamma^{\mu}} \cdot \sqrt[\sigma]{(-1)^{\mu}}$; κατὰ τὸν κανόνα τὸν αὐτόν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

§. 737. Οἷον $\sqrt{\alpha\chi} \times \sqrt[3]{\alpha^2\chi} = \sqrt[6]{\alpha^3\chi^3} \times \sqrt[6]{\alpha^4\chi^2} = \sqrt[6]{\alpha^7\chi^5}$. Καὶ ἐὰν τὸ (:) διαίρεσιν ὑποσημαίνῃ $\sqrt{\alpha\chi} : \sqrt[3]{\alpha^2\chi}$, $= \sqrt[6]{\frac{\chi}{\alpha}}$.

Ὡσαύτως δὲ $\sqrt{\alpha} \times \sqrt[4]{\alpha\chi} = \sqrt[4]{\alpha^2} \times \sqrt[4]{\alpha\chi} = \sqrt[4]{\alpha^3\chi}$· καὶ $\sqrt{\alpha} : \sqrt[4]{\alpha\chi} = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\chi}}$.

Καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον $\sqrt{6} \times \sqrt[4]{\tfrac{5}{6}}$ συςαλήσεται εἰς τὰ $\sqrt[4]{36} \times \sqrt[4]{\tfrac{5}{6}} = \sqrt[4]{30}$.

'Αλλ' ἐὰν $\sqrt{-\alpha}$ πολλαπλασιάσαι δέῃ, ἢ διελεῖν διὰ $\sqrt{\beta}$, ληφθὲν (§ 729.) ἀντ' ἐκείνου $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{-1}$, ἔσαι δὴ τὸ μὲν παραγόμενον $\sqrt{\alpha\beta} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{-\alpha\beta}$, τὸ δὲ πηλίκον $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}$.

Καὶ ἐὰν $\sqrt{-\alpha}$ πολλαπλασιάσαι δέῃ διὰ $\sqrt{-\beta}$, ληφθέντων ἀντὶ τούτων, τῶν $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{-1}$ καὶ $\sqrt{\beta} \cdot \sqrt{-1}$, ἔσαι παραγόμενον $\sqrt{\alpha\beta} \times -1 = -\sqrt{\alpha\beta}$. Καὶ γὰρ $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = (-1)^{2:2} = -1$. Δέον δὲ διελεῖν τὸ πρῶτον διὰ τοῦ δευτέρου, πηλίκον προελεύσεται τὸ $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \times +1 = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$· ὅτι $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = +1$.

Καὶ ἐὰν $\alpha\sqrt{-\gamma}$ πολλαπλασιάσαι δέῃ διὰ $\beta\sqrt{-\varepsilon}$ ἀντὶ τούτων ληφθέντων $\alpha\sqrt{\gamma}\sqrt{-1}$ καὶ $\beta\sqrt{\varepsilon}\sqrt{-1}$, γινόμενον προκύψει $\alpha\beta\sqrt{\gamma\varepsilon} \times -1 = -\alpha\beta\sqrt{\gamma\varepsilon}$. Δέον δὲ τῶνδε τῶν ῥιζικῶν τὸ πρῶτον διελεῖν διὰ τοῦ δευτέρου, ἔσαι πηλίκον $\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\frac{\gamma}{\varepsilon}}$. Καὶ γὰρ κἀνταῦθα $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = 1$.

Ἐν γένει δὲ ἐὰν δέῃ πολλαπλασιάσαι $\alpha\sqrt[\sigma]{-\gamma}$ διὰ $\beta\sqrt[\sigma]{-\varepsilon}$, ληφθέντων ἀντὶ τῶνδε τῶν $\alpha\sqrt[\sigma]{\gamma}\sqrt[\sigma]{-1}$ καὶ $\beta\sqrt[\sigma]{\varepsilon}\sqrt[\sigma]{-1}$, γινόμενον παραχθήσεται $\alpha\beta\sqrt[\sigma]{\gamma\varepsilon}\sqrt[\sigma]{(-1)^2}$. Ἐὰν δὲ τὸ πρῶτον διελεῖν δέῃ διὰ τοῦ δευτέρου τὸ πηλίκον ἔσαι $\frac{\alpha}{\beta}\sqrt[\sigma]{\frac{\gamma}{\varepsilon}}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α.

§ 738. Τούτων κατανοουμένων, οἱ ἐκ διαφόρων ὅρων συγκείμενοι τύποι, τῶν μὲν ῥιζικῶν, τῶν δὲ ἀῤῥίζων, δι' ὁποιωνοῦν ἄλλων πολλαπλασιασθήσονται, ἢ διαιρεθήσονται κατὰ τὰ ἐν γένει περὶ πολλαπλασιασσιασμοῦτε καὶ διαιρέσεως ὁροθετηθέντα. Ὅτι δὲ τὰ δι' ἀλλήλων πολλαπλασιαστέα, ἢ διαιρετέα ῥιζικὰ μᾶλλον δ'ἐπιχείρητα ἅπαντα, εἰ πρότερον ἀλλήλοις ὁμοταγῆ καθιςῶτο, μὴ καὶ περιτὸν ᾖ παραινεῖν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

§. 739. Ἐὰν $\alpha + \beta\sqrt{\alpha}$ πολλαπλασιάσαι δέῃ διὰ $\beta - \sqrt{\alpha}$, ἔςαι δὴ τὸ τοῦ ὑπολογισμοῦ σχῆμα τοιόνδε·

$$\begin{array}{l} \alpha + \beta\sqrt{\alpha} \\ \beta - \sqrt{\alpha} \\ \hline \alpha\beta + \beta\beta\sqrt{\alpha} \\ \qquad - \alpha\sqrt{\alpha} - \alpha\beta \\ \hline \end{array}$$

τὸ ἄρα γινόμενον $(\beta\beta - \alpha)\sqrt{\alpha}$

Ἐὰν $\alpha + \beta\sqrt{-\alpha}$, πολλαπλασιάσαι δέῃ διὰ $\beta - \sqrt{-\alpha}$ ἔςαι τὸ σχῆμα τοιοῦτον·

$$\begin{array}{l} \alpha + \beta\sqrt{-\alpha} \\ \beta - \sqrt{-\alpha} \\ \hline \alpha\beta + \beta\beta\sqrt{-\alpha} \\ \qquad - \alpha\sqrt{-\alpha} + \alpha\beta \\ \hline \end{array}$$

τὸ δὲ παραγόμενον $2\alpha\beta + (\beta\beta - \alpha)\sqrt{-\alpha}$.

Εἰ δὲ προκέοιτο πολλαπλασιάσαι $\alpha + \beta\sqrt{\alpha}$ διὰ $\alpha - \beta\sqrt{-\alpha}$, τὸ σχῆμα ἔςαι·

$$\begin{array}{l} \alpha + \beta\sqrt{\alpha} \\ \alpha - \beta\sqrt{-\alpha} \\ \hline \alpha\alpha + \alpha\beta\sqrt{\alpha} \\ \qquad - \alpha\beta\sqrt{-\alpha} - \beta\beta\sqrt{-\alpha\alpha} \\ \hline \end{array}$$

ὅθεν γίνεται $\alpha\alpha + \alpha\beta\sqrt{\alpha} - \alpha\beta\sqrt{-\alpha} - \beta\beta\sqrt{-\alpha\alpha}$
Ἔςι δὲ ἀντὶ τοῦ ἐσχάτου ὅρου γράφειν $-\alpha\beta^2\sqrt{-1}$.

Εἰ δὲ τὸ $\alpha + \sqrt{-\beta\beta}$, διὰ τοῦ $\alpha - \sqrt{-\beta\beta}$, ὧδε τὸ σχῆμα ἕξει·

$$\begin{array}{r} \alpha + \sqrt{-\beta\beta} \\ \alpha - \sqrt{-\beta\beta} \\ \hline \alpha\alpha + \alpha\sqrt{-\beta\beta} \qquad\qquad \\ - \alpha\sqrt{-\beta\beta} + \beta\beta \\ \hline \end{array}$$

ὅθεν τὸ γινόμενον $\alpha\alpha + \beta\beta$. Δῆλον δὲ ὅτι τὸ σημεῖον τοῦ ἐσχάτου τῶν ὅρων εὐλόγως κεῖται οὕτω τεθέν. Ἐὰν γὰρ ἀντὶ τοῦ $\sqrt{-\beta\beta}$ γράφηται $1 \times \sqrt{-\beta\beta}$ τὸ $+ 1 \times \sqrt{-\beta\beta}$ διὰ τοῦ $- 1 \times \sqrt{-\beta\beta}$ πολλαπλασιασθὲν δώσει $- 1 \times - \beta\beta = \beta\beta$.

Ἀλλ' ἐὰν δέῃ διελεῖν $\alpha\alpha + \beta\beta$ διὰ $\alpha + \sqrt{-\beta\beta}$ τὸ σχῆμα τοιοῦτον ἔσται.

$$\begin{array}{l|l|l} \alpha + \sqrt{-\beta\beta} & \quad \alpha\alpha + \beta\beta & \alpha - \sqrt{-\beta\beta} \\ & - \alpha\alpha - \alpha\sqrt{-\beta\beta} & \\ & + \alpha\sqrt{-\beta\beta} - \beta\beta & \end{array}$$

Καὶ τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ τὰ τούτοις παραπλήσια πραγματευτέον, ἅπερ οὐδεμίαν οἴσει δυσχέρειαν, τοῖς τὰς ἐκτεθείσας ἀρχὰς καλῶς κατέχουσι.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.

§. 740. Ἐὰν ὁ τοῦ ἐφεξῆς τύπου

$$\tfrac{1}{2}\alpha \times (-1 + \sqrt{-3})$$

κύβος ζητούμενος ᾖ, ἐπειδὴ ὁ τοῦ πρώτου παράγοντος κύβος ἐστὶν $\tfrac{1}{8}\alpha^3$, ὁ τοῦ ἑτέρου ὧδε γενήσεται.

$$\begin{array}{l} -1+\sqrt{-3} \\ -1+\sqrt{-3} \quad \text{πολλαπλασίασον} \\ \hline +1-\sqrt{-3} \\ \quad -\sqrt{-3}-3 \\ \hline \end{array}$$

Καὶ ἔςαι τετράγωνον $-2-2\sqrt{-3}$

$$\begin{array}{l} -1+\sqrt{-3} \quad \text{πολλαπλασίασον} \\ \hline +2+2\sqrt{-3} \\ \quad -2\sqrt{-3}+6 \\ \hline \end{array}$$

Ὁ δὲ Κύβος $+8$

Οὗ διὰ τοῦ $\frac{1}{8}\alpha^3$ πολλαπλασιασθέντος, προκύψει ὁ ζητούμενος $=\alpha^3$. Ὁ δ' αὐτὸς γίνεται καὶ ἀπὸ τοῦ τύπου $\frac{1}{2}\alpha\times(-1-\sqrt{-3})$ παραπλησίῳ τῷ ὑπολογισμῷ, ὃν καὶ ἐκ τοῦ προκειμένου ῥᾴδιον συντελέσαι τὰ τῶν ῥιζῶν σημεῖα εἰς τἀναντία ἀμείψαντας.

§. 741. Δῆλον οὖν ὅτι παρὰ τὴν πρωτεύουσαν κυβικὴν ῥίζαν ποσότητος οἱασοῦν α^3, ἥτις ἐςὶν α, καὶ δύο ἄλλαι τῆς αὐτῆς ῥίζαι κυβικαὶ δευτερεύουσαι εἰσίν, ἡ μὲν $\frac{1}{2}\alpha(-1+\sqrt{-3})$, ἡ δὲ $\frac{1}{2}\alpha(-1-\sqrt{-3})$ ἀφ' ὧν καὶ ἀσωμάτως ἐχουσῶν, (εἴτις κατὰ τὸ δέον αὐτὰς μετίοι), ὁ κύβος α^3, οὐδὲν ἧττον ἢ ἀπὸ τῆς α προελεύσεται. Παραπλησίως δὲ ὑπολογιζομένοις ἀποδείκνυται, καὶ τοῦ αὐτοῦ κύβου ἀποφατικῶς ληφθέντος, τρεῖς εἶναι τὰς ῥίζας τὰς κυβικὰς τάσδε $-\alpha$, καὶ $\frac{1}{2}\alpha(1+\sqrt{-3})$ καὶ $\frac{1}{2}\alpha(1-\sqrt{-3})$. Ἔνθεντοι ἐὰν τεθῇ $\alpha=1$, ἔσονται τῆς καταφατικῆς μονάδος ἐπιφερόμεναι ῥίζαι κυβικαί, 1, καὶ $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, καὶ $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$· ὧν ἐὰν τὰ σημεῖα διαμειφθῇ κατὰ τὸ ἀντίςροφον, γενήσονται τῆς ἀποφατικῆς μονάδος ῥίζαι κυβικαὶ αὗται, -1,

καὶ

καὶ $\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$, καὶ $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$· ὅθεν δὴ καὶ τὰ ἀνωτέρω (§. 711.)· ῥηθέντα κάλλιστα ἀναπτύσσονται.

ΣΧΟΛΙΟΝ Γ.

§. 742. Τῶν ἐνταῦθα ἐκτεθέντων ἡ χρῆσις, ἡ πρὸς τὴν ἀναγωγὴν τῶν πρωτευουσῶν ῥιζῶν προὐργιαιτάτη ἐστί, καθ' ἣν, εἴτινες τούτων παρεῖεν, ἐν δεκαδικοῖς ἀριθμοῖς ἐκκείμεναι, ὡς οἷόν τε ἀκριβέστατα, πλεῖσται ἔπειτα ἄλλαι προσευρίσκεσθαι μετρίῳ τῷ πόνῳ δυνήσονται. Οὕτως ἐὰν ἐν ἀριθμοῖς δεκαδικοῖς ᾖ δοθεῖσα $\sqrt{2}$, προχειρότατα εὑρεθήσεται καὶ ἡ $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$· καὶ ἡ $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$· καὶ ἡ $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Ἐὰν δὲ οὕτω δεδομέναι ὦσιν ἀμφότεραι αἱ ῥίζαι $\sqrt{2}$ καὶ $\sqrt{3}$, πρόχειρος ἔσται καὶ ἡ $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$· καὶ ἡ $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Τοὐναντίον δὲ τῶν $\sqrt{6}$ καὶ $\sqrt{2}$ δεδομένων, δοθήσεται καὶ ἡ $\sqrt{3} = \sqrt{\frac{6}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$. Καὶ ἐπὶ τῶν παραπλησίων ὡσαύτως.

§. 743. Λοιπὸν οὖν ἐστὶ τὴν μέθοδον ἤδη ἀποδεῖξαι ὅπως ἀπὸ τοῦ διωνύμου $\alpha + \beta$ τοῦ εἰς δύναμιν ἡλικηνοῦν προηγμένου, τὴν ῥίζαν ὡς οἷόν τ' ἀκριβέστατα ἐστὶν ἀνευρίσκειν τήν, καθ' ὃν ἄντις βαθμὸν ἡμῖν ἐπιτάξειε. Τοῦτο τοιγαροῦν, καίπερ λίαν ἄλλως δυσχερὲς δοκοῦν, τελεσθήσεται μέντοι, καθὰ καὶ τὰ λοιπὰ ὅσα τοιαῦτα, διὰ τοῦ στίχου (§. 688.) τοῦ εἰς ἔξαρσιν τῶν τοιῶνδε διωνύμων ὑπουργοῦντος καθ' ὁποιανοῦν δύναμιν, τὴν εἴτε καταφατικόν, εἴτ' οὖν καὶ ἀποφατικὸν τοὐπίσημον ἔχουσαν. Ἦν δὲ ἄρα ὁ στίχος, ὃν τῇ $(\alpha + \beta)^{\sigma}$ δυνάμει τῇ ὁλοσχερῶς τε καὶ καταφατικῶς διὰ τοῦ σ ἐπισημαινομένῃ ἴσον εἶναι κατείδομεν, ὁ ἑξῆς·

$$\alpha^{\sigma} + \frac{\sigma}{1}\alpha^{\sigma-1}\beta + \frac{\sigma \cdot \sigma - 1}{1 \cdot 2}\alpha^{\sigma-2}\beta^{2} + \frac{\sigma \cdot \sigma - 1 \cdot \sigma - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}\alpha^{\sigma-3}\beta^{3} + \kappa\xi.$$

ὃς καὶ ὧδε γράφεσθαι δύναται (§. 659.).

$$\alpha^{\sigma} + \frac{\sigma}{1} \cdot \frac{\alpha^{\sigma}\beta}{\alpha} + \frac{\sigma \cdot \sigma - 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\alpha^{\sigma}\beta^{2}}{\alpha^{2}} + \frac{\sigma \cdot \sigma - 1 \cdot \sigma - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\alpha^{\sigma}\beta^{3}}{\alpha^{3}} + \kappa\xi.$$

ὗ γινομένε ὁ παράγων α^{σ} πᾶσι τοῖς ἐν τῷ ςίχῳ ὅροις κοινός ἐςί. Δυνατὸν ἂν καὶ τῦδε τῦ παράγοντος α^{σ} ἐν μέρει ἀποτεθέντος, τὸν αὐτὸν ςίχον καὶ ὕτω παρίςασθαι·

$$\alpha^{\sigma}\left(1 + \frac{\sigma}{1} \cdot \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\sigma \cdot \sigma - 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta^{2}}{\alpha^{2}} + \frac{\sigma \cdot \sigma - 1 \cdot \sigma - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\beta^{3}}{\alpha^{3}} + \kappa\xi.\right)$$

Ἔνθεντοι ἐὰν συντόμως ῥηθῇ,

$$\Sigma = \left(1 + \frac{\sigma}{1} \cdot \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\sigma \cdot \sigma - 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta^{2}}{\alpha^{2}} + \frac{\sigma \cdot \sigma - 1 \cdot \sigma - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\beta^{3}}{\alpha^{3}} + \kappa\xi.\right)$$

τυτέςιν ἐὰν τὸ Σ, ἅπαντας τὺς ἐν τῷ ςίχῳ ὅρυς, οἷς συνημμένως ἴσον τίθεται, σημαίνειν ὑποτεθῇ, ὁ κανὼν τῦ τὸ δυώνυμον $\alpha + \beta$, ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ σ δύναμιν ἐξαίρεσθαι, ὕτω κατ᾽ ἐπιτομὴν διασημανθήσεται·

$$(\alpha + \beta)^{\sigma} = \alpha^{\sigma}\Sigma$$

Ὁ τοίνυν κανὼν, πάντῃ πάντως ἐπὶ τῦ σ ὁλοκερῶς τε καὶ καταφατικῶς ὑποκειμένε ἀληθεύων, ἀληθὴς ὑδὲν ἧττον ἔςαι καὶ ὁλόκερῆ μὲν ἀριθμὸν, ἀπο-

ἀποφατικὸν δὲ ὅμως τῦ σ ὑποσημαίνοντος. Καὶ μεν δὴ καὶ κλασματώδη ὁποιῦν καταφάσκοντα, ἢ ἀποφάσκοντα, κατ' ἐννοιάνγεμλω τιὼ ὑπότισι προσδιοριςμῷ σεσωφαλμένω· εἰ δήπε εἰ καὶ μὴ μετ' ἀκριβείας ἁπάσης τὸ $(\alpha+\beta)^{\tau}$ παρίςαθαι ἐνδιδῦσι, τὸ μέντοι ὅτι ἔγγιςα τῦ πράγματος γίνεθαι ξυγχωρῦσι, καὶ τοσῷδε δὴ τῦ ἀκριβῦς ἐγγυτέρω, ὅσω αὐτις μᾶλλον διαπονεῖν ἐθελήσειε. Σημειωτέον δὲ ὅτι τὸ δυώνυμον $(\alpha+\beta)$ εἰς δύναμιν ἧς τὸ ἐπίσημον κλασματῶδες $\frac{\tau}{\varrho}$ ἐξᾶραι, ἐδὲν ἄλλ' ἐςιν ἢ τῦτε ἐπὶ τιὼ κατὰ τὸ τ δύναμιν ἐξαρθέντος, τιὼ κατὰ τὸ ρ ῥίζαν ὑπεξελέθαι.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 744. Τῆς ἐγγὺς ἀνωτέρω τεθείσης σημασίας τοῖς γράμμασι σωζομένης, ἔςαι $(\alpha+\beta)^{\sigma} = \alpha^{\sigma}\Sigma$, κἂν ὁ ἀριθμὸς σ ὁλοχερὴς ἐν ἀποφάσει ᾖ, κἂν ἐν καταφάσει, ἢ ἀποφάσει, ἀλλὰ κεκλασμένος.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω (§. 688.) ἕπεται, ὅτι τῦ ςίχε ὃν τὸ $\alpha^{\sigma}\Sigma$ ὑποσημαίνει, διὰ $\alpha+\beta$ πολλαπλασιαθέντος, ςίχος τις καινὸς ἀναφύεται, μηδὲν τῦ πρώτε διαφέρων, ἢ ὅσον τῦ $\mu = \sigma + 1$ ὑποτιθεμένε, ἀντὶ τῦ σ ἐπὶ τέτε πανταχῦ τὸ μ παρεισάγεται. Καὶ δυνατὸν ἄρα ἅπαντα τὸν ἕτως ἔχοντα ςίχον $\alpha^{\mu}\Sigma$, ὡς γεγονότι ἐπιθεωρεῖν ὑπὸ τε $(\alpha+\beta)$ καὶ τῦ ςίχε $\alpha^{\sigma}\Sigma$, ἐν ᾧ $\sigma = \mu - 1$· ὅθεν ἕπεται, ὁποῖον ποτ' ἂν ἀριθμὸν σημαίνοι τὸ μ ἢ τὸ σ, εἰ μόνον εἴη $\sigma = \mu - 1$, ἢ $\mu = \sigma + 1$, τὸ δεῖν ἔσεθαι.

$$\frac{\alpha^{\mu}\Sigma}{\alpha+\beta} = \alpha^{\sigma}\Sigma$$

Ἐπα-

Ἐπειδὴ τοίνυν (ἀριθμὸν τοῦ μ ὁλοχερῆ ἐν καταφάσει ὑποσημαίνοντος) ἐστὶν $(\alpha+\beta)^\mu = \alpha^\mu\Sigma$ (§. 688.) ἔσται δὴ καὶ ἑκατέρου διὰ $\alpha+\beta$ διαιρεθέντος,

$$\frac{(\alpha+\beta)^\mu}{(\alpha+\beta)} = \frac{\alpha^\mu\Sigma}{\alpha+\beta}$$

ἢ $$\frac{(\alpha+\beta)^\mu}{(\alpha+\beta)} = \alpha^\sigma\Sigma, \text{ πρὸς } \sigma = \mu - 1$$

ὅθεν, $$\frac{(\alpha+\beta)^\mu}{(\alpha+\beta)^2} = \alpha^\sigma\Sigma, \text{ πρὸς } \sigma = \mu - 2$$

καὶ $$\frac{(\alpha+\beta)^\mu}{(\alpha+\beta)^3} = \alpha^\sigma\Sigma, \text{ πρὸς } \sigma = \mu - 3$$

Καὶ ἐν γένει. $$\frac{(\alpha+\beta)^\mu}{(\alpha+\beta)^s} = \alpha^\sigma\Sigma, \text{ πρὸς } \sigma = \mu - s$$

ὁποῖον ποτ' ἂν ἀριθμὸν σημαίνοι τὸ s. Ἔστι δὲ,

$$\frac{(\alpha+\beta)^\mu}{(\alpha+\beta)^s} = (\alpha+\beta)^{\mu-s}.$$

Ἀρ' οὖν καὶ πρὸς $\sigma = \mu - s$, ἔσται $(\alpha+\beta)^\sigma = \alpha^\sigma\Sigma$· καὶ δυνήσεται ὧδε τὸ σ, καὶ οἱονδήποτε ἀριθμὸν ὁλοχερῆ τε καὶ ἐν ἀποφάσει διασημαίνειν· ἡλίκον γὰρ ἂν καὶ εἴη τὸ μ, διά γε τοῦ s ἀριθμὸς δηλοῦται τῶν ὁλοχερῶν ἕκαστος. Καὶ δῆλον ἄρα τὸ Πρῶτον.

Ἤδη μὲν οὖν, ἐὰν ἀντὶ τοῦ ἀποφατικοῦ τοῦδε σ, γραφῇ $-\upsilon$, ὥστε γενέσθαι $(\alpha+\beta)^\sigma = (\alpha+\beta)^{-\upsilon}$, φανερὸν ὡς τὸ $(\alpha+\beta)^\sigma$, καὶ διὰ τοῦ $\dfrac{1}{(\alpha+\beta)^\upsilon}$ παραστήσεται, ἔνθα τὸ ἐπίσημον υ θετικόν ἐστι. Νοείσθω δῆτα τὸ υ διαφέρον εἶναι μεγέθει· καὶ ἔσται $\dfrac{1}{(\alpha+\beta)^\upsilon}$ τοσούτῳ μᾶλλον ἐλαττούμενον, ὅσῳ τὸ υ μεῖζον ὑποτίθεται ὄν· ὥστε καὶ τοῦδε δυνάμεως τοῦ

ἀριθ-

ἀριθμȣ̃ προσεπαυξȣμένȣ, τὸ $\frac{1}{(\alpha+\beta)^{\upsilon}}$ εἰς τὸ μηδὲν τέως ἀποίχεσθαι. Ἐπεί τε ἄρα ἐν γένει, ἐὰν ἀριθμῷ μεγέθει διαφέροντι, οἷον τῷ υ, προςεθῇ κλασματικὸς ἀληθὴς ἐστισȣ̃ν, οἷον ὁ $\frac{\tau}{\varrho}$, τὸ ὑπὸ τȣ̃ προσαυξηθέντος ȣ̃τως ἀριθμȣ̃ συνιςάμενον, μόλις ἂν, πρὸς τὸν ἀριθμὸν τὸν ὡς πρὶν ἀναυξῆ τελȣ̃ντα, διαφοράν τινα τιθοῖτο ἀπενεγκάμενον. (Αὐτὸ δὲ τȣ̃το ἀληθὲς ϗ̓ ἐὰν τὸ κλάσμα $\frac{\tau}{\varrho}$ ἀπὸ τȣ̃ τηλικέτȣ ἀριθμȣ̃ ἀφαιρεθῇ)· διὰ δὴ τȣ̃το, εἴτε $\upsilon + \frac{\tau}{\varrho}$ τεθείη, εἴτ' ȣ̃ν καὶ $\upsilon - \frac{\tau}{\varrho}$ ἀντὶ τȣ̃ υ, τοσῶδε ἧττον τὸ $\frac{1}{(\alpha+\beta)}$ τραπήσεται, ὅσωπερ ἂν τȣ̃το ἔλαττον ᾖ. Καὶ ἔςαι ἄρα $(\alpha+\beta)^{\sigma} = \alpha^{\sigma}\Sigma$ καὶ ταύτῃ τῇ ὑποθέσει, καθ' ἣν τὸ $\sigma = -\upsilon + \frac{\tau}{\varrho}$, ἢ $= -\upsilon - \frac{\tau}{\varrho}$ τίθεται· εἰ τȣ̃το μόνον μεγέθει διαφέρων ὡς εἴρηται ὁ ὁλοχερὴς ἀριθμὸς υ νοοῖτο. Ἀλλ' ὅτι γὰρ ἐὰν ἡ ἰσότης $(\alpha+\beta)^{\sigma} = \alpha^{\sigma}\Sigma$ ἀληθεύῃ, καὶ καθ' ἡλικίανȣ̃ν σημασίαν τȣ̃ σ γράμματος ἀληθεύσει, καὶ μονάδι ταύτην προσαυξηθεῖσαν (§. 688.)· ἀληθὴς ὡσαύτως ἔσεται, καὶ ἐὰν τεθῇ $\sigma = -\upsilon + 1 + \frac{\tau}{\varrho}$, ἢ $\sigma = -\upsilon + 1 - \frac{\tau}{\varrho}$· ἐκ τȣ̃ ἀκολȣ́θȣ δὲ καὶ ἐὰν τεθῇ $\sigma = -\upsilon + 2 + \frac{\tau}{\varrho}$, ἢ $\sigma = -\upsilon + 2 - \frac{\tau}{\varrho}$, καὶ ȣ̃τως ἐφεξῆς κατὰ τὸ διηνεκές· τȣτέςι, καὶ ἣν καθόλȣ τεθῇ

σ =

$\sigma = -\upsilon + s + \frac{\tau}{\varrho}$, ἢ $\sigma = -\upsilon + s - \frac{\tau}{\varrho}$, ἡλίκον ἂν ἀριθμὸν σημαίνοι τὸ s. Ἀλλαμὴν $s - \upsilon$ πάντα ἀριθμὸν ὁλοχερῆ ὑφ' ἑαυτὸ ποιεῖται καταφάσκοντα, ἢ ἀποφάσκοντα, καὶ προσέτι δὴ καὶ αὐτὸ τὸ μηδενικὸν ο. Οἷόν τε δ' ἑπομένως καὶ $-\upsilon + s + \frac{\tau}{\varrho}$, ἢ $-\upsilon + s - \frac{\tau}{\varrho}$, πάντα ἀριθμὸν σημαίνειν κλασματώδη, ἀληθῆ ἢ νόθον, καταφάσκοντα ἢ ἀποφάσκοντα. Ἔςαι ἄρα $(\alpha + \beta)^\sigma = \alpha^\sigma \Sigma$, καὶ ἐν ᾧ τὸ σ ἀριθμὸν ἡλικονῦν κεκλασμένον δηλῦν ὑποτίθεται. Ὅπερ ἰῶ τὸ Δεύτερον.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 745. Γινωσκομένης ἄρα τῆς ἀπὸ ῥίζης α, δυνάμεως α^σ, τῆς κατὰ πᾶν τὸ δοθὲν ἐπίσημον σ, εἴπερ εὑρεθῆναι δυνατὸν τὸ Σ πρὸς τὸ αὐτὸ σ, διὰ πολλαπλασιασμῦ ἐντεῦθεν συςήσεται ὁ $\alpha^\sigma \Sigma$ τύπος, ὁ τῇ κατὰ τὸ αὐτὸ ἐπίσημον σ δυνάμει ἴσος, τῇ ἀπὸ τῦ διωνύμυ $\alpha \pm \beta$, ὅπερ συγκροτεῖται τῆς α ῥίζης δι' ἡλικησῦν ποσότητος β ἐπαυξομένης, ἢ μειυμένης. Τεθείη γὰρ ἂν τὸ β καὶ ἀποφατικὸς· ῦ γενομένυ ἀντ' $\alpha + \beta$ κείσεται $\alpha - \beta$. Ἀλλὰ γὰρ τὸ Σ διὰ τῦ ςίχυ

$$1 + \frac{\sigma}{1} \cdot \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\sigma \cdot \sigma - 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\sigma \cdot \sigma - 1 \cdot \sigma - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\beta^3}{\alpha^3} + \text{κξ.}$$

ὧπερ ἴσον τίθεται, ἐντελῶς ῦκ ἂν παραςαίη, ἀποφατικῦ, ἢ κλασματώδυς τῦ σ συγχάνοντος· ἑκατέρως γὰρ ὁ ςίχος ἀπέραντος. ςήσεται δὲ ὐδαμῦ. Ἐπειδὴ γὰρ ἡ τελευτὴ τῶ ςίχω, ἐκ τῦ τινὰ τῶν παραγόντων τῶν ἐν ἑνίτινι τῶν ἐπ' αὐτῶ ὅρων, ἀποίχεσθαι εἰς τὸ μηδὲν (ὁ γὰρ τοιόσδε παράγων, ὡς

 ἄρα

ἄρα πᾶσι τοῖς ἑξῆς ἐφεπομένοις ὅροις τῦ σίχυ ἐνεπιχωρῶν, ἐξ ἀνάγκης καὶ τύτων ἕκασον εἰς τὸ μηδὲν μεταποιήσει)· ἵνα δὴ ὁ σίχος περανθείη ἀνάγκη πᾶσα τὸν παράγοντα εἶναι, ἤτοι $\sigma - 1 = 0$, ἢ $\sigma - 2 = 0$, ἢ $\sigma - 3 = 0$, ἤτι παραπλήσιον. Οὐκ ἔσαι δὲ εἰμὴ τύχοι ἢ $\sigma = 1$, ἢ $\sigma = 2$, ἢ $\sigma = 3$· καὶ σιωπελόντα εἰμὴ σ ἀριθμὸς εἴη καταφάσκων καὶ ὁλοχερής.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 746. Λοιπὸν ὖν, ἔνθα σ ἀριθμός ἐσὶν ἀποφάσκων, ἢ κλασματώδης, τὸ Σ κατὰ τὸ ὡς ἔγγισα πειρᾶσθαι θηρᾶν. ἔσιν ὖς τῶν ἐπὶ τῦ σίχυ τῶ πρώτω ἐφεπομένων ὅρων, εἰς ἐν συγκεφαλαιῦντας· τύτων δὴ ὅσω μείζων ὁ λαμβανόμενος ἀριθμὸς, τοσύτω καὶ τὸ Σ δοθήσεται ἀκριβέσερον, ἐπειδὰν οἱ παραλειφθέντες ὅροι τῶν ἐν τῷ σίχω τῇ πρὸς τὺς προσληφθέντας παραθέσει βραχεῖς τινες ὅσον ἄλις εἰσίν. Ἄλλως καὶ γὰρ τοσῶδε μεῖζον τὸ διάπτωμα ἔσαι, ὅσω τῶν παραλειφθέντων ὅρων τὸ κεφάλαιον, μεγεθύνεται· προϊὸν δὲ, ὡς καὶ ὑπὲρ τὸ ἐκ τῶν προσληφθέντων γίνεσθαι, καὶ ἀνύποισον. Ἤρτηται δὲ τὸ μέγεθος ἑκάσυ τῶν ἐπὶ τῦ σίχυ ὅρων πρῶτον μὲν ἐκ τῦ μεγέθυς τῦ ἐπισήμυ σ, ὃ δοθὲν ἤδη, τροπὴν ὐδεμίαν πείσεται τὸ παράπαν· ἔπειτα δὲ καὶ ἐκ τῦ μεγέθυς τῦ λόγυ $\alpha : \beta$· ὅσω γὰρ μείζων ὅδε, τοσύτω ἔλαττον ἔσαι τὸ $\frac{\beta}{\alpha}$, καὶ ἔλαττον ἔτι τὸ $\frac{\beta^2}{\alpha^2}$, καὶ πολλῷ ἔτι ἔλαττον τὸ $\frac{\beta^3}{\alpha^3}$, καὶ ὕτως ἐφεξῆς· ὥσε τῦ $\frac{\beta}{\alpha}$ βραχέος πάνυ τυγχάνοντος, τὺς ἐν τῷ σίχῳ ὅρυς ὅτι τάχισα ἐξ ἀνάγκης διὰ τῶν παραγόντων $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\beta^2}{\alpha^2}$, $\frac{\beta^3}{\alpha^3}$, ὑπομειῦσθαι καὶ διαφθίνεσθαι.

ΣΧΟ-

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 747. Καὶ εἰ τοίνυν παρ' ἡμῖν ἐςὶ, τὸν α : β λόγον, ληπτέον ὡς μέγιςον. Ἐπιτρέπεται δὲ ἡ μεταξὺ πλείςων λόγων τοῦ δοκοῦντος αἵρεσις ἐπὶ πολλῶν προβλημάτων, ἃ ὑπὸ τὸ καθόλου τόδε θεώρημα περιείληπται· ἐξ ὧν τὸ συνεχέςατα ἁπάντων ἐπιλυθὲν, ἀποχρήσει, ὥςε καὶ τῆς τῶν λοιπῶν ἐπιλύσεως κανόνα οἷον τοῦτον προκεῖσθαι καὶ γνώμονα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 748. Ἀριθμοῦ δοθέντος παντὸς, τὴν καθ' ἡλικηνοῦν τάξιν ῥίζαν, διὰ τοῦ δυωνυμικοῦ τύπου παραςῆσαι, ἐν, ὅσῳ ἄντις βούλοιτο, ἐλαχίςῳ τῷ διαπτώματι.

ΛΥΣΙΣ.

§. 749. Λυθήτω δὴ ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς Α, οὗπερ ἡ κατὰ τὴν τάξιν σ ῥίζα ζητεῖται, εἰς μέρη δύο· ὧν τὸ μὲν πρῶτον α, ἔςω ἡ κατὰ τὴν σ τάξιν δύναμις ἀριθμοῦ τινος ὃς ἂν, ἐν ὑπεροχῇ καίτοι τινὶ, ἢ ἐλλείψει, ὅτι ἔγγιςα ὅμως τοῦ Α γίγνοιτο· τὸ δὲ δεύτερον β ἔςω = Α − α, ὃ καὶ ἀποφατικὸν ἔςαι, τοῦ α μεγέθει τὸ Α ὑπερβάλλοντος. Τὰς οὖν δυνάμεις τῶνδε τῶν γραμμάτων, ἀντὶ τοῦ α'Σ, ἀνεπτυγμένως τεθέντος (§. 743.) ἀντικατάςησον ἐπὶ τὴν τῶν ὅρων συγκρότησιν χωρῶν, εἰς ὃ πολλοςὸς ὁ ἔσχατος προκύψειε τῇ βραχύτητι, ὡς ἔχειν καὶ ἀδεῶς ἀλογεῖσθαι διὰ σμικρότητα· οἱ γὰρ δὴ πρὸ τοῦδε τεταγμένοι ὅροι εἰς ἓν ἀθροισθέντες δώσουσι τὸ ζητούμενον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

§. 750. Ἐπὶ ῥίζῃ τῇ τετραγωνικῇ ἐςὶ σ = $\frac{1}{2}$. Ἐὰν ἄρα ἡ κατὰ τήνδε τὴν τάξιν ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 50 ᾖ ζητουμένη, ἐκείνου εἰς μέρη δύο διαλυθέντος, ὧν ἂν τὸ πρῶτον τετράγωνον ᾖ, τȣ̃ προτεθέντος 50 βραχύτι διάλοιπος, ἔσαι $50 = 49 + 1$· τεθέντων ȣ̃ν τȣ̃ μὲν $\alpha = 49$, τȣ̃ δὲ $\beta = 1$, ἔσαι $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{49}$· καὶ $\alpha^{1:2} = \sqrt{49} = 7$. Ὡς εἴγε καὶ αἱ τῶν γραμμάτων σ καὶ $\frac{\beta}{\alpha}$ σημασίαι εἰς τὸν σίχον

$$1 + \frac{\sigma}{1} \cdot \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\sigma \cdot \sigma - 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \kappa\xi.$$

εἰσενεχθεῖεν, εὑρεθήσεται τὸ Σ, ἐκ τῶν προτερδόντων ἐπὶ τȣ̃ σίχȣ ὅρων, κατ' ἀριθμὸν τὸν προσήκοντα παραληφθέντων, τȣ̃ ἀκριβῶς ὅσον ἄλις γινόμενον $= 1{,}01015254$· τȣ́τȣ γὰρ διὰ 7 πολλαπλασιαθέντος προκύψει $\sqrt{50} = 7{,}0710678$, ὡς ἔγγισα.

Ζητȣμένης δὲ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τȣ̃ ἀριθμȣ̃ 90, ἐξέσαι λαβεῖν τὸ $\alpha = 100$, ὡς εἶναι τὸ $\beta = -10$, τὸ δὲ $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-10}{100} = -\frac{1}{10}$, ὃ δήπȣ κλάσμα καίτοι μὴ πάνυ βραχὺ τυγχάνον, τάγεμὴν τȣ̃ ὑπολογισμȣ̃ ἐπὶ τὸ ῥᾶσον ἀνακαλεῖ, καθ' ὃν ἐὰν εὑρεθῇ Σ, γενήσεται $\sqrt{90} = 10\Sigma$. Ἔσι γὰρ ἐνταῦθα $\alpha^{1:2} = 10$.

Ζητȣμένης δὲ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τȣ̃ ἀριθμȣ̃ 2, ἐκ ἂν ἀριθμὸς ἄλλος ληφθείη ἀντὶ τȣ̃ α μείζων ἢ 1, ὥσε γένοιτ' ἂν καὶ $\beta = 1$, καὶ $\frac{\beta}{\alpha} = 1$, ἀφ' ȣ̃ καὶ τὸν γινόμενον σίχον, ὅτι βραδίσα τȣ̀ς ὅρȣς ἀπομειωθησόμενον ῥάδιον προϊδεῖν· ληφθήσεται τοίνυν $\alpha = 1{,}96$. ὅδε γὰρ ὁ ἀριθμὸς τῆς 1, 4 ῥίζης ὁ τετράγωνος ἐσί. Καὶ ἔσαι $\beta = 2 - \alpha = 0{,}04$· καὶ $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{0{,}04}{1{,}96} = \frac{0{,}01}{0{,}49} = 0{,}020408$, ἔγγισα· ὃς γὰρ ἂν τȣ́σδε τȣ̀ς ἀριθμȣ̀ς κατὰ τὸ δέον μετιὼν εὕροι τὸ Σ, ἕξει $\sqrt{2} = 1{,}4 \times \Sigma$.

§. 751.

§. 751. Ὑπὲρ δὲ τῆς κυβικῆς ῥίζης ἐςὶ $\sigma = \frac{1}{3}$. Ἐὰν οὖν ἡ κυβικὴ ῥίζα ᾖ ζητουμένη τοῦ ἀριθμοῦ 500, ληφθήσεται $\alpha = 512$, ὁ κύβος ὁ ἀπὸ ῥίζης 8, ὥςε γενέσθαι $\beta = -12$, καὶ $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-12}{512} = \frac{-3}{128}$, ὃ δὴ κλάσμα, ἅλις ἔχει βραχύτητος. Καὶ κατα ταῦτα δήτις λήψεται $\sigma = \frac{1}{3}$, καὶ $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-3}{128}$, καὶ εὑρὼν τὸ Σ, ἕξει $\sqrt[3]{500} = 8\Sigma$.

ΣΧΟΛΙΟΝ ΚΑΘΟΛΟΥ.

§. 752. Τῆς Καθόλου τῆς δὲ Λογιςικῆς, ἣν καὶ Γραμματικὸν Ὑπολογισμὸν, καὶ Ἀλγόριθμον Εἰδικὸν, ἢ Συμβολικὸν εἰώθασιν ἀποκαλεῖν, ἥ,τε μονονουχὶ τὰ Στοιχεῖα πάντα ἐν τοῖς εἰς τόδε ἡμῖν ἐκτεθεῖσιν ἐμπεριείληπται, οὐκ ἂν ἔχοι τις εἰπεῖν ὅση ἡ συντέλεια ἐςὶ καὶ ἡ χρῆσις· οὐ μόνον δὲ ἐν ταῖς τῶν προβλημάτων Ἀναλύσεσιν, ἀλλὰ καὶ κατ' αὐτὰς οὐδὲν ἧττον τὰς Συνθέσεις, ἔνθα τίποτε ἄρα τὸ ἐκ δοθέντων τινῶν, ὧδε ἢ ὧδε συνημμένων, ζήτουμεν ἐπιφερόμενον. Ἀμέλειτοι γὰρ ἐὰν $\alpha + \beta$ ἐπὶ $\alpha + \beta$. πολλαπλασιασθῇ, οἷον ποτὲ τὸ ἐντεῦθεν ἔσαι τετράγωνον, $\alpha\alpha + 2\alpha\beta + \beta\beta$, ὁποῖα δ' ἄττα τὰ μέρη ἐξ ὧν αὐτὸ συγκροτεῖται, αὐτίκα μάλα πάρεςι συνορᾶν. Ἐὰν δὲ $\alpha - \beta$ διὰ $\alpha - \beta$, ὡς οὕτως ἂν ἔχον προκύψειεν $\alpha\alpha - 2\alpha\beta + \beta\beta$. Ἐὰν δὲ $\alpha + \beta$ διὰ $\alpha - \beta$, ὅτι $\alpha\alpha - \beta\beta$ ἔσεται τὸ γινόμενον· ὅπερ οὐδὲν ἀλλ' ἡ τῶν ἀπὸ α καὶ β τετραγώνων ἐςὶν ἡ διαφορά. Καὶ ἄλλα δ' ἐπὶ τούτοις Θεωρήματα συχνὰ ἅπαντα, ἃ προχείρως οὕτω, κἂν διὰ ψιλοῦ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διασαφοῖτο καὶ ἀναπτύσσοιτο. Ἐν οἷς καὶ τὰ πλεῖςα φέρεται τῶν ἐν τῷ Β'. τῶν παρ' ΕΥΚΛΕΙΔΗ Στοιχείων, καθὰ δήπου τοῖς τὰ Ἀλγεβραϊκὰ μετιοῦσιν ἐςὶ κατάδηλον.

ΤΜΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

ΠΕΡΙ ΚΑΤΑΜΕΤΡΗΣΕΩΣ ΤΩΝ ΕΚΤΑΣΙΝ ΕΧΟΝΤΩΝ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 753.

Σχῆμα ἐπίπεδον εὐθύγραμμον καταμετρῆσαι.

ΛΥΣΙΣ.

Σχ. 153. §. 754. Ἐπειδὴ μέτρον τοῦ ἐπιπέδου σχήματος, οἱονδηποτοῦν ἄλλο σχῆμα ἐπίπεδον δύναται εἶναι, ληφθήτω τετράγωνον τὸ ΑΒ, οὗ ἡ πλευρὰ ΑΓ ἓν ἀντὶ τῶν μέτρων εἴη, ὧν ἐπὶ τῇ καταμετρήσει τῶν γραμμῶν προσεκύρωσε τῇ συνηθείᾳ ἡ χρῆσις. Καὶ τῆς δὲ δὴ τῆς πλευρᾶς εἰς δέκα ἴσα διαμερισθείσης, ἐὰν ᾖ ἓν τῶν μορίων ἡ ΑΔ, ἔσται ΑΕ τὸ τοῦ τετραγώνου ΑΒ δεκατημόριον· τόδε τοι τετράγωνον ΑΖ τοῦ δεκατημορίου δεκατημόριον· τουτέστι, τοῦ ΑΒ τετραγώνου τὸ ἑκατοστημόριον. Ἀλλὰ καὶ τῆς ΑΔ πλευρᾶς, εἰς δέκα ὡσαύτως διαμερισθείσης ἴσα, παραπλησίως καὶ τοῦ ΑΖ τετραγώνου τὸ μέρος τὸ δέκατον, καὶ τοῦ δεκάτου τὸ δέκατον, ἤτοι τὸ ἑκατοστὸν παραχθήσεται· ἔσται δὲ δὴ τὸ τοῦ ΑΖ δεκατημόριον τοῦ ΑΒ χιλιοστημόριον. Καὶ οὕτως οὖν κατὰ τὸν αὐτὸν χωροῦσι τρόπον, καὶ τὸ μυριοστὸν, ἤτοι δεκάκις χιλιοστὸν, καὶ τὸ ἑκατοντάκις, ἢ χιλιάκις χιλιοστὸν τοῦ τετραγώνου ΑΒ παραχθήσονται.

755. Ἔνθεν τοι ἐν ἀριθμῷ τῷ κειμένῳ 75, 3279· ἐὰν ἡ μονὰς τὸ τετράγωνον τὸ ἀντὶ μέτρου ληφθὲν, οἱ πρὸ τῆς τῶν ἁπλῶν μονάδων ὑποδιαστολῆς χαρακτῆρες, τῶν τηλίκων τετραγώνων 75 ὑποδηλώσουσιν· ὁ δὲ μετὰ τὴν διαστολὴν εὐθὺς ἑπόμενος χαρακτὴρ, 3 ὀρθογώνια ΑΕ δείξει, ἢ 30 τετράγωνα ΑΖ· ὁ δ' ἐφεξῆς χαρακτὴρ, 2 ἔτι τῶν αὐτῶν τετραγώνων ἐπισυνάψει, ὥστε εἶναι ἄχρι τοῦδε τὰ πάντα τετράγωνα ΑΖ, τὸν ἀριθμὸν 32. Οἱ δὲ τέως μετὰ τούτους ἐκκείμενοι χαρακτῆρες, μόρια ὑποσημανοῦσι τὰ ἀπὸ τοῦ ΑΖ τετραγώνου ὡσαύτως ἀποτεμνόμενα, ὃν τρόπον καὶ τὰ ΑΕ, καὶ ΑΖ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ἀποτέτμηται.

§. 756. Ἤδη μὲν οὖν ἐὰν τὸ οὕτω διαιρεθὲν τετράγωνον, καὶ ἀντὶ μέτρου ὑποτεθὲν, ἀμέσως ἔχῃ τῷ καταμετρητέῳ σχήματι ἐφαρμόζεσθαι, ῥᾷστα ὁ τοῦ τετραγώνου πρὸς αὐτὸ τὸ σχῆμα ἀνακαλυφθήσεσθαι λόγος, καὶ κατ' ἀκρίβειαν ἀποχρῶσαν, κἂν τὸ σχῆμα ᾖ καμπυλόγραμμον. Οἷον κείσθω δὴ Σχῆμα τὸ Ζ, ὃ διὰ τοῦ τετραγώνου ΜΝ δέοι καταμετρῆσαι. Σχ. 154
Συλλαβὼν οὖν τις ἀριθμῷ τὰ τετράγωνα μόρια τοῦ μέτρου ΜΝ, τὰ δὲ λοιπὰ συντιθεὶς, ὡς καὶ αὐτὰ συστῆσαι τετράγωνα, δῆλον ὡς εὑρήσει τὸ σχῆμα, ἐκ 35 τοῦ τετραγώνου ΜΝ ἑκατοστημορίων, ὡς ἔγγιστα συγκροτούμενον.

§. 757. Ἀλλὰ γὰρ τὰ πολλὰ μακρῷ εὐπετέστερον ἐστὶ, τὸν τοῦ καταμετρητέου σχήματος λόγον πρὸς τὸ ἀντὶ μέτρου διδόμενον τετράγωνον, ἢ τὸν ἀριθμὸν δι' οὗ τὸ σχῆμα δηλοῦται, ἐκ τοῦ τετραγώνου ἐκείνου τοῦ ἀντὶ μονάδος ληφθέντος, διὰ τῶν λόγων τῶν τοῦ σχήματος πλευρῶν, ἐν ἀριθμοῖς παρισταμένων, ὑποσυνάπτειν· ὃ κατὰ τοὺς τρόπους γίνεται τοὺς ἑξῆς ὑποτιθεμένους.

§. 758. Ἔστω ΑΒΓ ὀρθογώνιον, οὗ τὸ μέτρον Σχ. 155
πρόκειται λαβεῖν. Καὶ ἔστω ἀριθμὸς υ, δι' οὗ δηλοῦ-

ται ἡ πλευρὰ ΑΒ ἐκ μονάδος τῆς κατὰ τὸ ΜΛ· καὶ β ἀριθμὸς, δι' ὃ δηλοῦται ἡ πλευρὰ ΒΓ, ἐκ μονάδος τῆς αὐτῆς. Ἔσαι δὲ ὁ λόγος ΑΓ : ΜΝ = υβ : 1 (§. 476.), τὸ δὲ ΑΓ, ἐκ τῆς τετραγωνικῆς μονάδος ΜΝ, ὑποκείσεται διὰ τοῦ γινομένου υβ.

§ 759. Μᾶλλον δὲ καθόλου, ἐὰν ᾖ β, παραλληλογράμμου τινὸς ἡ βάσις, οὗ ὕψος τὸ υ. τὸ παραλληλόγραμμον προκείσεται διὰ τοῦ υβ § 459.)

§ 760. Τοῦ δὲ τριγώνου ἐὰν ὡσαύτως ἡ μὲν βάσις ᾖ β, τὸ δὲ ὕψος υ, αὐτὸ δὴ τὸ τρίγωνον ὑποδηλωθήσεται διὰ $\frac{1}{2}υβ = \frac{1}{2}υ \times β = \frac{1}{2}β \times υ$ (§. 459).

Σχ. 156. § 761. Τετραπλεύρου δὲ ὁτινοσοῦν ΑΒΓΔ, τῇ διαγωνίῳ εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΓ διαιρεθέντος, ἐὰν ἡ ΑΓ ἀντὶ κοινῆς τῶν τριγώνων βάσεως β τεθῇ, ὕψος δὲ τοῦ μὲν ᾖ υ, τοῦ δὲ η, ἔσαι ΑΒΓΔ $= \frac{1}{2}υβ + \frac{1}{2}ηβ = β(\frac{1}{2}υ + \frac{1}{2}η) = \frac{1}{2}β(υ + η)$.

Σχ. 157. § 762. Ἐὰν δὲ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ ΑΒ, ΓΔ ὦσι παράλληλοι, ληφθεισῶν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὡς βάσεων, ἔσαι τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΓΒΔ, ὕψωμα τὸ αὐτὸ· ὅπερ αὖθις υ ῥηθὲν, καὶ τῆς μὲν ΑΒ, τεθείσης b, τῆς δὲ ΓΔ, β· ἔσαι ΑΒΓΔ $= \frac{1}{2}υ(β + b) = υ(\frac{1}{2}β + \frac{1}{2}b)$.

§. 763. Ἔνθεντοι καὶ τὰ λοιπὰ τῶν ἐπιπέδων εὐθυγράμμων σχήματα δι' ἀριθμῶν ἐκτεθείσεται, εἰς τρίγωνα ἀναλυόμενα, ἢ τετράπλευρα, καὶ τοῦ κεφαλαίου ληφθέντος τῶν ἀριθμῶν, οἷς τὰ τρίγωνα ταῦτα, ἢ τετράπλευρα παρίσαται.

§. 764. Σχήματος δὲ παντὸς κανονικοῦ τῆς περιμέτρου π ὑποτεθείσης, καὶ τῆς ἀποσάσεως ἣν ἡ πλευρὰ ἀπέχει τοῦ κατὰ τὸν κύκλον κέντρου, ἐν ᾧ ἔχει ἐγγράφεσθαι, δ· ἔσαι ὁ ἀριθμὸς ὁ τὸ σχῆμα παρισὰς $\frac{1}{2}$ πδ. (§. 467.).

ΠΟΡΙΣ-

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 765. Κἀντεῦθεν ἐὰν τὸ ν παραλληλόγραμμον παρισᾷ, ὃ βάσις β, ἔσαι τὸ ἐκείνȣ ὕψος $υ = \frac{ν}{β}$. ὃ δὲ τὸ ὕψος υ, ἔσαι ἡ αὐτȣ̃ βάσις $β = \frac{ν}{υ}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 766. Τὸ δὲ τρίγωνον ὃ βάσις μὲν β, ὕψος δὲ υ, παρισάμενον διὰ τȣ̃ ν, ἔσαι $\frac{1}{2}υ = \frac{ν}{β}$, καὶ $\frac{1}{2}β = \frac{ν}{υ}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 767. Καὶ ὁποῖον δ᾽ ἂν ᾖ τὸ διὰ τȣ̃ ἀριθμȣ̃ ν προκείμενον σχῆμα, ἔσαι ἡ τȣ̃ τετραγώνȣ πλευρὰ, ᾧ τὸ σχῆμα ἐξισȣ̃ται, $\sqrt{ν}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 768. Παντὸς ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ τῶν δύο πλευρῶν ἐν ἀριθμοῖς ἐκδηλεμένων, τὸν ἀριθμὸν προσευρεῖν τὸν τὴν τρίτην τῶν πλευρῶν ἐκδηλώσοντα.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπὶ τȣ̃ ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ ΑΒΓ, τῆς μὲν ΑΒ Σχ. 158. πλευρᾶς δι᾽ ἀριθμȣ̃ τȣ̃ υ παρισαμένης, τῆς δὲ ΓΒ διὰ τȣ̃ β, τῆς δὲ μεγίσης ΑΓ διὰ τȣ̃ ϑ, ἔσαι $ϑϑ = υυ + ββ$. Ἔνθεντοι $υυ = ϑϑ - ββ$. Καὶ $ββ = ϑϑ - υυ$. Ἄρα $ϑ = \sqrt{(υυ + ββ)}$· καὶ $υ = \sqrt{(ϑϑ - ββ)}$· καὶ $β = \sqrt{(ϑϑ - υυ)}$. (§. 483.).

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

Σχ. 159. §. 769. Ἔνθα τοι δοθείσης τῆς κατὰ τὸν κύκλον ἡμιδιαμέτρου ΑΓ, καὶ ὑποτεινούσης ὁποιασοῦν τῆς ΑΒ, εὑρεθήσεται ἡ ὑποτείνουσα ΑΔ τοῦ τόξου, ὃ τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας ΑΔΒ ἐστὶν, ἣν ὑποτείνει ἡ ΑΒ. Ἀχθείσης γὰρ τῆς ΓΔ, ἐπειδὴ τὰ ΑΕΓ, ΑΕΔ τρίγωνα ἐστὶν ὀρθογώνια, ἐὰν ἡ ΑΓ = α, καὶ ΓΕ = γ, καὶ ΑΕ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης = η, καὶ ΔΕ = π, ἔσται $\gamma = \sqrt{(\alpha\alpha - \eta\eta)}$. Δίδοται δὲ ἡ γ, ὅτι καὶ αἱ α καὶ η εἰσὶ διδόμεναι. Κἀντεῦθεν δίδοται καὶ π, ἅτε δὴ = $\alpha - \gamma$. Κἀντεῦθεν τέως καὶ ΑΔ = $\sqrt{(\pi\pi + \eta\eta)}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 770. Ἐὰν ἡ ΑΒ πλευράτινος κανονικοῦ σχήματος, ἔσται ΑΔ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ, τοῦ δὶς τοσαύτας τὰς πλευρὰς ἔχοντος, ὃ ἂν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἐγγραφείη. Ἡ δὲ πλευρὰ αὕτη τῇ τοιᾶδε ἂν εὑρεθείη μεθόδῳ, ἢ καὶ μικρῷ ἐπιτομωτέρα, ἐὰν γένηται ΑΔ = $\sqrt{2\alpha\pi}$. Ἡ γὰρ ΑΔ μέση ἀνάλογος ἐστὶ, μεταξὺ ΔΕ = π, καὶ τῆς διαμέτρου ΔΖ = 2α. (§. 452.).

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 771. Ἐὰν πανταχοῦ τεθῇ $\alpha = 1$, εὑρεθήσεται

Εἰς μὲν καταγραφὴν Ἑξαγώνου.

$\eta = 0,\ 5$, καὶ $\pi = 0,\ 1339745962$.

Εἰς καταγραφὴν Δωδεκαγώνου.

$\eta = 0,\ 2588190451$, καὶ $\pi = 0,\ 0340741737$.

Εἰς καταγραφὴν ΚΔ$^{\text{γώνου}}$.

$\eta = 0,\ 1305261922$, καὶ $\pi = 0,\ 0085551886$.

Εἰς καταγραφὴν ΜΗ$^{\text{γώνου}}$.

$\eta = 0,\ 0654031292$, καὶ $\pi = 0,\ 0021410768$.

Εἰς

Εἰς καταγραφὴν ϥ ϛ^γώνῳ.

$\eta = 0,0327190828$, καὶ $\pi = 0,0005354125$.

Ἐξέσαι δὲ τῷ βελομένῳ καὶ περαιτέρω τὸ ἔργον προαγαγεῖν.

ΛΗΜΜΑ.

§. 772. Ἐπὶ τῇ ὀρθογωνίῳ ΑΒΓΔ, τῇ μήκει ΒΓ, ὑπὲρ τὸ πλάτος ΑΒ, πολὺ διαφέροντος, κέντρῳ τῷ μεσαιτάτῳ τῆς ΒΓ πλευρᾶς σημείῳ Ζ, τόξα γεγράφθω τὰ ΗΓ, ΘΒ. Ἀχθείσης τε εὐθείας τῆς ΗΙ παραλλήλου τῇ πλευρᾷ ΔΓ, καὶ συςάντος ἐπὶ τοῦδε τοῦ ὀρθογωνίου, παραλληλεπιπέδου ἐν γωνίαις ὀρθαῖς κατὰ βάθος τὸ τυχὸν ΔΕ, διήχθω διὰ τῆς ΗΙ ἐπίπεδον, τέμνον αὐτὸ τομῇ παραλλήλῳ τῇ πλευρᾷ ΓΕ. Διήχθω δὲ καὶ διὰ τοῦ τόξου ΗΓ, ἐπιφάνεια κυλίνδρου ὀρθοῦ, οὗ ἡ βάσις ἐπὶ ΘΒΓΗ, τὸ κέντρον ἔχουσα κατὰ τὸ Ζ. Λέγω δὴ, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς δε τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἀποτεμνόμενον ςερεὸν ΚΗΓΕ, ἧττον ἔσαι ἢ τριτημόριον τοῦ παραλληλεπιπέδου ΙΕ. Καὶ εἰ τὸ εἰρημένον ςερεὸν ΚΗΓΕ, τριτημορίῳ τοῦ παραλληλεπιπέδου ΙΕ ἴσον τεθείη, φημὶ δὴ τὸ διάπτωμα τοσοῦτον ἔλαττον ἔσεσθαι, ὅσῳ, τῶν λοιπῶν ὡσαύτως ἐχόντων, ἐλάσσων ἡ ΓΔ· οὕτω δήπου, ὡς τῇ ΓΔ ἀποιχομένῃ, καὶ τὸ διάπτωμα συναποίχεσθαι. Σχ. 160.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπὶ τοῦ ΑΕ ἐπιπέδου προεκβληθέντος, συνεςάσθω ὀρθογώνιον τὸ ΛΜ, τῷ ὀρθογωνίῳ ΗΕ ὁμοιόν τε καὶ ἴσον. Συνεςῶς δὲ, βάσις τῇ πυραμίδι ΛΜΝ γινέ-

γινέσθω, ὕψος ἐχέτω τὸ ΜΝ = ΔΓ. Τετμήσθω δὲ τό, τε παραλληλεπίπεδον ΒΕ, καὶ ἡ πυραμὶς ΛΜΝ, δι' ἐπιπέδου τοῦ ΟΠΦ, ΡΣΤ, παραλλήλου τῷ ἐφ' ᾧ αἱ βάσεις ΑΕ, ΛΜ· ὡς τὴν μὲν ΥΦ, τὴν τομὴν εἶναι τοῦ στερεοῦ ΚΗΓΕ, τὴν δὲ ΡΤ, τῆς πυραμίδος. Καὶ ἔσται οὖν $ΓΔ^2 = ΔΘ \times ΔΗ$. Καὶ $ΓΠ^2 = ΠΧ \times ΠΥ$ (§. 441.). Ἔνθεν τοι $ΓΔ^2 : ΓΠ^2 = ΔΘ \times ΔΗ : ΠΧ \times ΠΥ$. Ἐπειδὴ δὲ $ΔΕ = ΠΦ$, κἀντεῦθεν $ΔΗ : ΠΥ$, ὡς ὀρθογώνιον ΗΕ, πρὸς ὀρθογώνιον ΥΦ· ἔσται ὁμοίως $ΓΔ^2 : ΓΠ^2 = ΔΘ \times ΗΕ : ΠΧ \times ΥΦ$. Ὅθεν διὰ τὸ τὴν $ΓΔ = ΝΜ$, καὶ τὴν $ΓΠ = ΝΤ$, καὶ τὸ $ΗΕ = ΛΜ$, ἔσται $ΝΜ^2 : ΝΤ^2 = ΔΘ \times ΛΜ : ΠΧ \times ΥΦ$. Κατὰ φύσιν δὲ τὴν τῆς πυραμίδος ἐστὶ $ΝΜ^2 : ΝΤ^2 = ΛΜ : ΡΤ$ (§. 562.). Ἔστιν ἄρα $ΛΜ : ΡΤ = ΔΘ \times ΛΜ : ΠΧ \times ΥΦ$. Καὶ εἴπερ ἄρα ὁ δεύτερος λόγος τῷ προτέρῳ ἀνάπαλιν ληφθέντι συντεθείη, ἔσται $1 : 1 = ΡΤ \times ΔΘ \times ΛΜ : ΠΧ \times ΥΦ \times ΛΜ$ (§. 180.) $= ΡΤ \times ΔΘ : ΠΧ \times ΥΦ$ (§. 181.)· τουτέστι $ΡΤ \times ΔΘ = ΠΧ \times ΥΦ$. Ἐξ οὗ δὴ ἕπεται $ΔΘ : ΠΧ = ΥΦ : ΡΤ$ (§. 187). Ἐπειδὴ τοίνυν ΔΘ ἐλάσσων τῆς ΠΧ, ἔσται καὶ ἡ τομὴ ΥΦ, ἐλάσσων τῆς τομῆς ΡΤ. Διαφορᾷ γε μὴν τοσούτον ἐλάσσονι, ὅσῳ ἐλάσσων, πρὸς διάμετρον τὴν αὐτὴν ΒΓ, γίνεται ἡ ΓΔ· ταύτης γὰρ ἐπισήμως ἀπομειωθείσης, ἅπασαι αἱ ΔΘ, ΠΧ, ὅσον οὐχὶ καὶ ἴσαι τέως τῇ διαμέτρῳ ΒΓ ἀποκαθίστανται. Κἀντεῦθεν οὖν ἕπεται καὶ τὸ στερεὸν ΚΗΓΕ τῷ αὐτῷ λόγῳ τῆς πυραμίδος ΛΜΝ ἔλαττον ἔσεσθαι (§. 523.). Ἀλλὰ μὴν ἡ ΛΜΝ πυραμὶς τριτημόριον ἐστὶ τοῦ πρίσματος ΙΕ (§. 567.). Ἄρ' οὖν καὶ τὸ στερεὸν ΚΗΓΕ, τριτημορίου ἔσται τοῦ στερεοῦ ΙΕ, κατὰ τὰ ἐκτεθέντα, ἐλαττονούμενον.

ΘΕΩ-

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 773. Τὸ τȢ̃ κύκλȢ τμῆμα αγηα, μεῖζόν ἐϛὶ δυοῖν τριτημορίων τȢ̃ ὀρθογωνίȢ αβδη, Ȣ̃ ἡ μὲν βάσις αη, ἡ τȢ̃ τμήματος ἐϛὶν ὑποτείνȢσα, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῷ μέρει ιγ τῆς ἡμιδιαμέτρȢ, τῆς ἐπὶ τὴν ὑποτείνȢσαν καθέτȢ· ὑπεροχῇ γε μὴν τοσȢ̃τον ἐλάσσονι, ὅσῳ ἔλαττον τȢ̃ ἰδίȢ κύκλȢ ἐϛὶ τὸ ἀπότμημα· καὶ τέωςγε δὴ καὶ ἀποιχομένη, ἀποιχομένȢ πρὸς τὸν κύκλον τȢ̃ τμήματος. Σχ. 161.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔϛω τὸ μέρος τȢ̃ σχήματος γδηι, ταυτὸ τῷ ἐπὶ τȢ̃ ἀνωτέρω Λήμματος ΓΔΗΙ. Ἐπειδὴ τοίνυν, ἐὰν ΗΓΔ καὶ ΙΔ ἀντὶ βάσεων ληφθῶσι, τὰ ϛερεὰ ΚΗΓΕ, καὶ ΙΕ, τȢ̃ πρισματικȢ̃ καθίϛαται γένȢς, καὶ κοινὸν ἔχει ὕψος τὸ ΔΕ, ἔϛαι τὸ ϛερεὸν ΚΗΓΕ πρὸς τὸ ϛερεὸν ΙΕ, ὡς ἡ βάσις ΗΓΔ, πρὸς τὴν βάσιν ΙΔ (§. 543.). Ἐπεὶ δὲ τὸ ΚΗΓΕ, μικρῷ ἔλαττον ἢ τριτημόριον ἐϛὶ τȢ̃ ϛερεȢ̃ ΙΕ, ἔϛαι καὶ τὸ ΗΓΔ μικρῷ ἔλαττον, ἢ τὸ τριτημόριον τȢ̃ ὀρθογωνίȢ ΙΔ. Ἐκ δὲ τȢ̃ ἀκολȢ́θȢ τὸ ΗΙΓ, δυοῖν τȢ̃ αὐτȢ̃ ὀρθογωνίȢ τριτημορίων μικρῷ μεῖζον ἐϛί. Καὶ τὸ ἐκείνȢ ἄρα διπλȢ̃ν, τȢτέϛι τὸ τμῆμα αγηα, τὰ δύο τριτημόρια τȢ̃ ὀρθογωνίȢ αβδη, τὸν αὐτὸν τρόπον ὑπερέξει· καὶ τὰ λοιπά.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 774. Ἐντεῦθεν καὶ ἡ τῆς τῶν τμημάτων καταμετρήσεως ὑποσυνάγεται μέθοδος, Ȣ̓ μάλ᾽ ἀκριβὴς αὕτη, τῷ δ᾽ ἀληθεῖ προσεγγίζȢσα. Ἐὰν γὰρ μείζονι μέρος τȢ̃ ἰδίȢ κύκλȢ τὸ τμῆμα ᾖ, οἷον τὸ ΑΒΓΔ, ἀποληφθέντων ἀπ᾽ αὐτȢ̃ τμημάτων ἐλασσόνων Σχ. 162.

σόνων τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, καὶ τέτων ἐν μέρει ὑπολογισθέντων, καὶ τῷ εὐθυγράμμῳ ΑΒΓΔ προστεθέντων, τὸ ΑΒΓΔ τμῆμα, ἄνδ ἐπισήμε διαπτώματος, ὅσον ἀποδοθήσεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

Σχ. 163. §. 775. Ἔςω ΑΒΓ τομεὺς τῦ κύκλυ, ἐν γωνία ὅσον ἄλις βραχεία ληφθεὶς, καὶ ΑΒ ὑποτείνυσα τὴν κατ' αὐτὸν περιφέρειαν· ἐπὶ δὲ τῆς ὑποτεινύσης ἀπὸ τῦ κέντρυ κάθετος ἔςγ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν προεκβαλλομένη, ἡ ΓΕ. Λεγέσθω δὲ ἡ ΔΒ = ΔΑ, η. Καὶ ΓΔ ἔςω γ, καὶ ΔΕ, π· ἡ δὲ ἀκτὶς ΑΓ ἔςω = α. Ἔςαι τοίνυν τὸ ὀρθογώνιον, ὗ πλευραὶ ΑΒ, ΔΕ = $2\eta\pi$. Κἀντεῦθεν τῦ μικρῦ διαπτώματος ἀλογυμένυ, τὸ ΑΕΒ τμῆμα = $\frac{2}{3}$ · $2\eta\pi = \frac{4\eta\pi}{3}$· τὸ δὲ τρίγωνον ΑΓΒ = $\eta\gamma$. Ὁ ἄρα τομεὺς = $\frac{4\eta\pi}{3} + \eta\gamma = \eta\,(\frac{4}{3}\pi + \gamma)$. Ἀλλὰ μὴν $\frac{4}{3}\pi + \gamma$· ἤτοι $\frac{1}{3}\pi + \pi + \gamma = \frac{1}{3}\pi + \alpha$, καὶ γὰρ $\pi + \gamma = \alpha$· ὁ ἄρα τομεὺς ὅτι ἔγγιςα ἔςαι $= \eta\,(\frac{1}{3}\pi + \alpha)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 776. Διὰ τῦ τετραγώνυ τῆς ἡμιδιαμέτρυ τὸν κύκλον καταμετρῆσαι· τυτέςι τὸν τῦ κύκλυ λόγον πρὸς τὸ ρηθὲν τετράγωνον, δι' ἀριθμῶν ὡς ἔγγιςα ἀληθευόντων προθέσθαι.

ΛΥΣΙΣ.

Τῦ κύκλυ εἰς ἀνενήκοντα ἑξ τομεῖς ἀλλήλοις ἴσυς διαιρεθέντος, ἑξ ὧν εἷς εἴη ὁ ΑΓΒ, ἔςαι ἡ ΑΒ πλευρὰ τῦ κανονικῦ χήματος, ὅπερ ἂν τῷ κύκλῳ ἐγγράφοιτο, πλευρὰς ἔχον δηλονότι ἑξ ἐπὶ ἐνενήκοντα.

κοντα. Ἐνθαῦτοι τῆς ἡμιδιαμέτρου $\alpha = 1$ τεθείσης, ἔσται, $\eta = 0, 0327190828$, καὶ $\pi = 0, 00053541$ (§. 771.). Τοιγαροῦν $\frac{1}{3}\pi = 0, 00017847$. Καὶ $\frac{1}{3}\pi + \alpha = 1, 00017847$. Τὸ ἄρα $\eta\ (\frac{1}{3}\pi + \alpha)$ ὃ τὸν τομέα ἡμῖν παραστήσει, εὑρεθήσεται ὑπολογισμῷ τοιῷδε·

0, 0327190828	
1, 00017847	
22	90335796
130	8763312
2617	526624
22903	35796
32719	0828
327190828	000
τὸ παραγόμενον, 0, 0327249221	5 . . . ἔσται

ἴσον τῷ τομεῖ.

Καὶ τούτου ἄρα τοῦ ἀριθμοῦ ἐννενηκοντάκις ἑξάκις ληφθέντος (ὃ προχείρως τελεῖται ἀπὸ τοῦ ἑκατονταπλοῦ : 3, 27249221, ἀφαιρεθέντος τοῦ τετραπλοῦ : 0, 13089968.) παράγεται ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς 3, 141592, ὃς ἐστὶ πρὸς τὴν 1, ὡς ὁ κύκλος πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἀκτῖνος. Ὁ δὲ λόγος οὗτος ἰσχυρότερον μὲν ἀποδοθήσεται, ὅσῳ ἂν εἰς τομεῖς ὁ κύκλος διατέμνοιτο πλείονας· ὁλοσχερέστερον δὲ, ὅσῳ ἂν εἰς ἐλάσσονας.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Α.

§. 777. Ὅτι τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου, τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου ἐστὶ τετραπλάσιον, ἔσται ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον, ὡς 3, 141592 : 4, ἤτοι ὡς 0, 785398 : 1.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 778. Ὅτι δὲ ὁ κύκλος ἴσος ἐςὶν ὀρθογωνίῳ, ἧ βάσις μὲν ἡ τῆ κύκλε ἡμιπεριφέρεια, ὕψος δὲ ἡ τῆ κύκλε αὐτῆ ἡμιδιάμετρος (§. 469.), ἔςαι ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρε τετράγωνον, ὡς ἡ ἡμιπεριφέρεια πρὸς τὴν ἡμιδιάμετρον (§. 473.), ἤ ὡς ἡ ὅλη περιφέρεια πρὸς τὴν ὅλην διάμετρον· τοιγαρῆν καὶ ὁ εὑρεθεὶς λόγος 3, 141592 : 1, τῷ λόγῳ τῆς τῆ κύκλε περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον ὅτι ἐγγυτάτω ἐςίν. Ἐγγυτέρω δ' ἔτι τῷ λόγῳ ἐκείνῳ γενήσεται ὅδε : 3, 14159265358979323846 : 1. Καὶ δύνανται δὲ ἔτι καὶ τῆτε λόγοι ἀκριβέςεροι εὑρεθῆναι, τῆ διαπλώματος ἐφ' ἡλικίωῆν βραχύτητα καταςελλομένε.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 779. Τὰ μέτρα, ἃ κατὰ τὲς κύκλες, καὶ τὰς τῶν κυλίνδρων ἐπιφανείας, καὶ τῶν κώνων τῶν ὀρθῶν, καὶ δὴ καὶ τὰς τῶν σφαιρῶν, ἐκ τῆ λόγε τῆς τῆ κύκλε διαμέτρε πρὸς τὴν αὐτῆ περιφέρειαν ἐξῆπται, ἀποδιδόναι.

ΛΥΣΙΣ.

§. 780. Ἔςω λόγος τῆς διαμέτρε πρὸς τὴν τῆ κύκλε περιφέρειαν, ὃν ἀπεδώκαμεν, ἢ ἄλλος ὅσον ἄλις τῷ ἀληθεῖ προσπελάζων, d : p. διάμετρος δὲ τῆ κύκλε δοθεῖσα ἡ δ, καὶ ἔςαι τῆ αὐτῆ κύκλε ἡ περιφέρεια, $= \frac{p}{d} \cdot \delta$, (§. 431.).

§. 781. Ἐνθεῦτοι καὶ μέρος τῆς περιφερείας πηλικονῆν δι' ἀριθμῶν δηλωθήσεται, ἧ ὁ λόγος πρὸς τὴν ὅλην περιφέρειαν δεδομένος ἂν εἴη. Ἔςω γὰρ ὁ λόγος ὅδε τῆ τόξε πρὸς τὴν περιφέρειαν 1 : A, τῆ τῦ A, ἀριθμὸν ἐνταῦθα δηλῦντος ὁποσονῦν, εἴθ' ὁλοχερῆ, εἴτε καὶ κλασματίαν. Ἔσαι δὲ ἄρα τὸ τόξον $= \frac{p}{Ad} \cdot \delta$.

§. 782. Δοθείσης δὲ τῆς περιφερείας κύκλυ παντὸς $= \pi$, ἔσαι τῦ αὐτῦ κύκλυ διάμετρος $= \frac{d}{p} \cdot \pi$.

§. 783. Ἀλλ' ὁ κύκλος αὐτὸς διὰ τῆς δοθείσης διαμέτρυ ὑποσωυαφθήσεται τῷδε τῷ τύπῳ $\frac{p}{d} \cdot \delta \times \frac{\delta}{4} = \frac{p\delta\delta}{4d}$ (§. 469.) ὃς τῦ τὸν κύκλον ἐκ τῆς διαμέτρυ αὐτῦ ὑπολογίζεσθαι διαφέρυς μεθόδυς περιωνίωοχεν.

§. 784. Τῆς δὲ δὴ περιφερείας δοθείσης, αὐτὸς ὁ κύκλος ἐξευρεθήσεται, πολλαπλασιαζομένης τῆς περιφερείας π, διὰ τῦ τεταρτημορίυ τῆς διαμέτρυ, τῆς ἐξ ἐκείνης ἐπαχθείσης $\frac{d}{4p} \cdot \pi$· τὸ γὰρ παραγόμενον $\frac{d}{4p} \cdot \pi\pi$, ἀποδώσει τὸν κύκλον.

§. 785. Ὁ δέτοι τομεὺς, ὗ τὸ τόξον ἐσὶ πρὸς τὴν ὅλην περιφέρειαν ὡς 1 : A, καὶ ὗτινος καὶ ἡ ἀκτὶς δεδομένη ἐσὶν $\alpha = \frac{1}{2}\delta$, ἔσαι $\frac{p}{Ad} \cdot \frac{\delta\delta}{4} = \frac{p}{Ad} \cdot \alpha\alpha$· ὅτι $\frac{\delta\delta}{4} = \alpha\alpha$.

§. 786. Ἐὰν ᾖ τὸ τῦ κύκλυ μέγεθος δεδομένον διὰ τῦ ἀριθμῦ ε, ἔσι $\frac{p}{4d} \cdot \delta\delta = \varepsilon$ (§. 782.),

εἶθαἄθεντοι $\delta\delta = \frac{4de}{p}$. Εὑρίσκεται δὲ τὸ δ, τῆς ἐκ $\frac{4de}{p}$ τετραγωνικῆς ῥίζης ὑπεξανεχθείσης, $\delta = \sqrt{\frac{4de}{p}}$.

§. 787. Ἐὰν ᾖ δ τῦ κυλίνδρυ διάμετρος, καὶ υ ὕψος αὐτῦ, ἔσαι ἡ τῦ κυλίνδρυ ἐπιφάνεια $= \frac{p}{d} \cdot \delta\upsilon$. (§. 585.).

§. 788. Ἐὰν δὲ ἡ τῆς βάσεως περιφέρεια ἀμέσως δοθῇ, ᾖ δὲ $= \pi$, ἔσαι ἡ τῦ κυλίνδρυ ἐπιφάνεια $= \pi\upsilon$.

§. 789. Τῦ δὲ ὀρθῦ κώνυ, ἐὰν ᾖ δ μὲν ἡ τῆς βάσεως διάμετρος, λ δὲ ἡ πλευρὰ αὐτῦ, ἔσαι ἡ ἐπιφάνεια, $= \frac{p}{2d} \cdot \delta\lambda$ (§. 587.).

§. 790. Ἀλλ' ἐὰν ἡ τῆς βάσεως περιφέρεια ἀμέσως ᾖ δεδομένη π, ἔσαι ἡ ἐπιφάνεια $\frac{\pi\lambda}{2}$.

§. 791. Ἐν γένει δὲ, ἐὰν τῦ ὀρθῦ κώνυ, εἴτε ὁλόκληρος ὄντος εἴη, εἴτε δὴ καὶ κολοβὸς, ἡ πλευρὰ λ δίχα τμηθῇ, διὰ δὲ τῦ σημείυ τῆς τομῆς, ἐπὶ τῆς τῦ κώνυ ἐπιφανείας περιφέρεια νοῆται καταγεγραμμένη, ἧς τὸ ἐπίπεδον τῇ βάσει τῦ κώνυ παράλληλον ᾖ, τεθῇ δὲ τῆσδε τῆς περιφερείας εἶναι διάμετρος ἡ δ. Ἔσαι ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια $= \frac{p}{d} \cdot \delta\lambda$. (§. 588.).

§. 792. Ἐντεῦθεν τὰ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν μέρη τὰ ἐν δυσὶ πλευραῖς ἐναπολαμβανόμενα, καὶ τὰ τῶν κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν, τὰ ἐν δυσὶν ἐπὶ τῆς τῦ κυλίνδρυ ἐπιφανείας ἀναγεγραμμέναις εὐθείαις, παραλλήλοις τῷ ἄξονι, ῥᾷστα εὑρεθήσεται, τῦ τῶν τόξων

τόξων οἷς περατῦνται λόγυ δοθέντος, πρὸς τὴν ὅλην περιφέρειαν.

§. 793. Τῆς δὲ σφαίρας ἧς ἡ διάμετρος δ, ἡ ἐπιφάνεια ἔσαι $\frac{p}{d} \cdot \delta\delta$ (§. 594.).

§. 794. Ἐὰν δὲ τῆς σφαίρας τμῆμα ἀποτμηθῇ, ὅ τὸ ὕψος ἦ υ, ὑποσημαίνοντος κἀνταῦθα τῦ δ τὴν τῆς σφαίρας διάμετρον, ἔσαι ἡ κυρτὴ τῦ τμήματος ἐπιφάνεια $= \frac{p}{d} \cdot \delta\upsilon$. Ὁ δ᾽ αὐτὸς τύπος καὶ μέρος παρίσησι σφαιρικῆς ἐπιφανείας, τὸ μεταξὺ δυοῖν κύκλων παραλλήλων ἐναπειλημμένον, ὧν τὰ κέντρα διέχει διασήματι τῷ υ (§. 593.).

§. 795. Ἐντεῦθεν δὲ καὶ τὰ μέρη τῶνδε τῶν ἐπιφανειῶν, ὧν ὁ πρὸς τὴν ὁλοχερῆ ἐπιφάνειαν δίδοται λόγος, ὀ χαλεπῶς δι᾽ ὑπολογισμῦ θηράσιμα γίνεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 796. Ἅπαν σερεὸν, ὅπερ ἂν ἐκ τῦ Σχ. 164.
γένυς εἴη τῶν ὑπὸ σκέψιν τῇ Γεωμετρίᾳ γεγενημένων, καταμετρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

§. 797. Ἐπειδὴ τῦ σερεῦ μέτρον, ἅπαν σερεὸν ἄλλο δύναται εἶναι, ἅτε δὴ ἐκ τύτυ καταμετρεῖσθαι ἔχοντος, ἐὰν ὁπωσῦν ὁ τῦ σερεῦ λόγος πρὸς τὸ μέτρον ἀνακαλυφθῇ, ληφθήτω κύβος ΕΔ ὗ ἡ πλευρὰ ΑΒ = ΑΓ = ΑΔ, ἴση ᾖ γραμμικῷ τινι μέτρῳ, ὧν ἡ χρῆσις ἐν τῇ συνηθείᾳ ἐσὶ τῆς ὖν πλευρᾶς ΑΒ εἰς δέκα μέρη ἀλλήλοις ἴσα διαιρεθείσης, ὧν ἂν τὸ πρῶτον εἴη ΑΕ, ἐὰν διὰ τῦ Ζ ἐπίπεδον τεθῇ, τῷ ἐπιπέδῳ ΓΔ παράλληλον, ἀποτμηθήσεται

θήσεται ἀπὸ τοῦ κύβου, τὸ ΓΖΔ, δεκατημόριον ὑπάρχον αὐτοῦ. Ἐὰν δὲ καὶ ἡ ΑΓ πλευρὰ, εἰς δέκα ἴσα ὡσαύτως διαιρεθῇ, ὧν ἂν τὸ πρῶτον ᾖ ΑΗ, διατμηθῇ δὲ τὸ στερεὸν ΓΖΔ κατὰ τὸ σημεῖον Η, δι' ἐπιπέδου παραλλήλου τῷ ἐπιπέδῳ ΔΒ, ἀποτμηθήσεται τὸ πρίσμα ΗΖΔ, ὃ δεκατημόριον ἐστὶ τοῦ ΓΖΔ, τοῦ δὲ κύβου ἑκατοστημόριον τὸ αὐτό. Τέως δὲ ἐὰν ἡ ΑΔ πλευρὰ, εἰς δέκα ἴσα καὶ αὕτη διαιρεθῇ, ὧν ἂν τὸ πρῶτον ᾖ ΛΘ, τεθῇ δὲ καὶ διὰ τοῦ Θ σημείου ἐπίπεδον, παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ ΓΒ, ἀποτμηθήσεται ὁ κύβος ΗΖΘ, ὃς τὸ δεκατημόριον ἐστὶ τοῦ στερεοῦ ΗΖΕ, τοῦ δὲ ΓΖΔ τὸ ἑκατοστημόριον, τοῦ δὲ κύβου ΕΔ τὸ χιλιοστημόριον τὸ αὐτό. Καὶ τοίνυν καὶ τοῦ κύβου ΗΖΘ τὸν αὐτὸν τρόπον διαμερισθέντος, καὶ τὸ ἐπ' αὐτῷ ὁμοίως δέκατον, ἑκατοστὸν, χιλιοστὸν, προσενεχθήσεται, ὧν τὸ μὲν τοῦ κύβου ΕΔ μυριοστὸν, ἤτοι δεκάκις χιλιοστὸν ἔσται· τὸ δὲ, δεκάκις μυριοστὸν, ἤτοι ἑκατοντάκις χιλιοστόν· τὸ δὲ χιλιάκις χιλιοστόν. Ἀλλὰ καὶ τὸ ἔσχατον τῶνδε τῶν μορίων τελευταῖον ὡσαύτως ἔχοι ἂν διαμερισθῆναι, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἐπέκεινα τέρματος.

§. 798. Ἔνθεν τοι ἐὰν ἐπὶ ἀριθμοῦ οὑτινοσοῦν, ἐξ ὁλοκλήρων τε, καὶ κλασμάτων δεκαδικῶν συγκειμένου, ὡς ἐπὶ τοῦ 27, 5324, οἱ πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς τῶν ἁπλῶν μονάδων χαρακτῆρες, τοὺς κύβους ὑποσημαίνωσι, τοὺς ἀντὶ μονάδος ληφθέντας, οἷον τὸν ΕΔ, πηλίκα δὴ τὰ μέρη, τὰ ὑπὸ τῶν μετὰ τὴν διαστολὴν ἀριθμῶν δηλούμενα συνιδεῖν εὐπετές. Ἐὰν γὰρ οἱ ἀπὸ τῆς διαστολῆς εὐθὺς ληφθῶσιν ἑπόμενοι χαρακτῆρες, οἷον 532, ὁ μὲν 5, προβαλεῖται σώματα πέντε, ἡλίκον τὸ ΓΖΔ· ὁ δὲ 3, πρίσματα τρία, ἡλίκον τὸ ΗΖΔ· ὁ δὲ 2, κύβους δύο, ἡλίκος ὁ ΗΖΘ. Διερμηνευθείη δ' ἂν ἡ δύναμις τῶνδε τῶν τριῶν χαρακτήρων 532 καὶ οὕτως, ὥστε σημαίνειν τοσούτους κύβους ΗΖΘ, ἤτοι τοσαῦτα χιλιο-

στὰ

ςὰ τȣ̃ κύβȣ ΕΔ τȣ̃ ἀντὶ μονάδος ληφθέντος. Παραπλησίως δὲ, καὶ οἱ τρεῖς ἐφεξῆς ἑπόμενοι χαρακτῆρες, πληρȣμένων ὄπη παρεῖκοι τῶν κενῶν τόπων τῇ παρενθέσει τῶν μηδενικῶν, ὡς ἐνταῦθα 400, δυνήσονται τȣ̀ς κύβȣς ὑποδηλȣ̃ν, ὧν ἕκαςος τὸ χιλιοςημόριον ἐςὶ τȣ̃ ΗΖΘ κυβίσκȣ, καὶ ȣ̔́τως ἐφεξῆς· ὁ δ᾽ ἔχατος ὅδε τȣ̃ τῶν μορίων ὑπολογισμȣ̃ τρόπος, καὶ συνηθέςερος, ὡς προχειρότερος.

§. 799. Κατὰ ταῦτα γȣ̃ν τȣ̃ κοίλȣ μέτρȣ τῶν ςερεῶν κατασκευαςθέντος, ἅπαν ςερεὸν οἱȣδήποτε σχήματος, τῷδε τῷ τρόπῳ καταμετρηθήσεται. Ἐντιθέσθω δὴ τὸ ςερεὸν ἐν ὁποιῳδήποτε σκεύει· ἐπικεχείσθω δὲ αὐτῷ ὑγρȣ̃ τοσȣ̃τον, ὡς ἅπαν ὑποβρύχιον καταδῦναι. Σημειȣ́σθω δ᾽ ἔνθα τῆς ἐπιφανείας ἐξαίρεται τȣ̃ ςερεȣ̃ τὸ ἀνώτατον. Ἐξενεχθήτω δ᾽ ἔπειτα τὸ ςερεὸν τȣ̃ ὑγρȣ̃ μένοντος, ἐπὶ δὲ τȣ́τῳ, ἐξ ὑγρȣ̃ τȣ̃ πρότερον ἤδη μεμετρημένȣ, τοσȣ̃τον ἐπιχεθὲν, ὡς ἐπ᾽ ἐκεῖνο τὴν ἐπιφάνειαν τȣ̃ νάματος ἀρθῆναι, ἐφ᾽ ὃ τȣ̃ ςερεȣ̃ ὑποβρυχίȣ τὸ πρὶν καταδῦντος ἦρτο, ἔςαι δὴ ἡ τȣ̃ ςερεȣ̃ ἔκτασις, ἴση τῇ τȣ̃ ὑγρȣ̃ ἐκτάσει, τȣ̃, μετὰ τὸ ἐξενεχθῆναι αὐτὸ, τῷ προσιόντι ὑγρῷ ἐπικεχυμένȣ· τȣ́τȣ δὲ τὸ μέτρον ἤδη δεδομένον ἐςί.

§. 800. Διὰ δὲ τῶν μέτρων εὐθειῶν τινῶν, ἃς παρὰ τοῖς ςερεοῖς, ἃ δέοι καταμετρῆσαι, λαβεῖν ἐςὶ, καὶ δὴ καὶ τῶν κατὰ τὰς ἐπιφανείας μέτρων, ἅπερ ἐντεῦθεν συνάγεται, καὶ τὰ τῶν ςερεῶν μέτρα ἐπαχθήσεται τὸν ἐφεξῆς τρόπον.

§. 801· Προκείσθω δὴ πρίσματος τὸ μέτρον λαβεῖν, ȣ̔ ἡ μὲν βάσις, ἐν τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ γραμμικȣ̃ μέτρȣ, οἱ ἀριθμȣ̃ παριςάνοιτο τȣ̃ β, τὸ δ᾽ ὕψος ἐκ τȣ̃ αὐτȣ̃ γραμμικȣ̃ μέτρȣ, υ. Ἔςαι δὲ β : 1, ὡς ἡ τȣ̃ πρίσματος βάσις, πρὸς τὴν τȣ̃ κύβȣ τȣ̃ ἀντὶ μέτρȣ ληφθέντος· καὶ υ : 1, ὡς τὸ τȣ̃ πρίσματος ὕψος, πρὸς τὸ τȣ̃ αὐτȣ̃ κύβȣ. Ἄρα

 (§. 544.)

(§. 544.) υβ : 1, ὡς τὸ πρίσμα πρὸς τὸν κύβον. Τοιγαρȣ̃ν καὶ πᾶν πρίσμα διὰ τȣ̃ ἀριθμȣ̃ υβ ἐκδηλωθήσεται.

§. 802. Ἡ δέτοι βάσις διὰ τῶν γραμμικῶν μέτρων, ἐνίτῳ τῶν ποικίλων ὑποσυναφθήσεται τρόπων, τῶν ἀνωτέρω ὑποτεθέντων· ȣ̓δεμία γὰρ ἐν τȣ́τοις λείπεται περαιτέρω δυσχέρεια. Ἐὰν ἡ βάσις κύκλος ᾖ ὁ περὶ τὴν διάμετρον δ, τὸ δὲ ςερεὸν κύλινδρος, ἔςαι δὴ $β = \frac{p}{4d} \cdot δδ$. Ἔνθαντοι ἐὰν ᾖ κἀνταῦθα ὕψος τὸ υ, ὁ κύλινδρος ἡμῖν διὰ τȣ̃ ἀριθμȣ̃ $\frac{p}{4d} \cdot δδυ$ προκείσεται.

§. 803. Καὶ τῆς πυραμίδος δὲ, ἐὰν ἡ μὲν βάσις ᾖ β, τὸ δ᾽ ὕψος υ, τὸ ςερεὸν διὰ τȣ̃ ἀριθμȣ̃ $\frac{υβ}{3}$ δηλωθήσεται (§. 567.).

§. 804. Ἐπὶ δὲ τȣ̃ κώνȣ ἐὰν ᾖ τὸ ὕψος υ, ἡ δὲ τῆς βάσεως διάμετρος δ, ἔςαι ἡ βάσις $\frac{p}{4d} \cdot δδ$, κἀντεῦθεν ὁ κῶνος διὰ τȣ̃ ἀριθμȣ̃ $\frac{p}{4d} \cdot δδ \cdot \frac{υ}{3}$, ἤτοι $\frac{pδδυ}{12d}$, τυπωθήσεται.

§. 805. Ἐὰν τὸ τȣ̃ κώνȣ ὕψος, τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως ἴσον ᾖ· τȣτέςιν ἐὰν ᾖ $υ = δ$, ἔςαι ὁ κῶνος $= \frac{p}{12d} \cdot δδδ$. Ἐπεὶ δὲ τȣ́τȣ τὸ διπλȣ̃ν τῇ σφαίρᾳ τῇ ἀπὸ τῆς αὐτῆς διαμέτρȣ συνεξισȣ̃ται (§. 582.). Ἔςαι ἡ σφαίρα $\frac{p}{6d} \cdot δδδ$.

§. 806.

806. Τὸ δ' ἡμισφαίριον ἧ διάμετρος ἡ αὐτὴ, διὰ τῆ αὐτῆ ἀριθμῆ $\frac{p}{12d} \cdot \delta\delta\delta$ ἐκκείσεται, δι' ἧ καὶ ὁ κῶνος ὁ αὐτῷ ἴσος,

§. 807. Ἐπεὶ δὲ ὁ τομεὺς ὁ κυλίνδρε, ἢ κώνε, ἢ ἡμισφαιρίε, ἢ σφαίρας, ἐςὶ πρὸς τὸ αὐτῆ ὅλον, κατὰ λόγον 1 : Α, καὶ τῆ τομέως τὸ μέτρον δοθήσεται, τῆ τὸ ὅλον ςερεὸν παριςῶντος ἀριθμῆ, διὰ τῆ Α διαιρεμένε.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

§. 808. Ἐντεῦθεν καὶ ἡ τῆ κύβε εὑρεθήσεται πλευρὰ, τῆ τῷ δοθέντι ςερεῷ γ, ἢ πλείοσι ςερεοῖς τοῖς ἅμα συναποτελῆσι τὸ γ, ἴση. Ἔςω γὰρ δὴ ἡ τῆ κύβε πλευρὰ α, καὶ ἔςαι $\alpha\alpha\alpha = \gamma$· ὅθεν $\alpha = \sqrt[3]{\gamma}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

§. 809. Ἡ δέτοι σφαῖρα, ἡ τῷ ςερεῷ γ, ἢ πλείοσιν ἅμα ςερεοῖς τοῖς συναποτελῆσι τὸ γ, ἴση ἐξευρεθήσεται, ἐὰν αὐτῆς διάμετρος ὑποτεθῇ $= \delta$. Ἔςαι γὰρ ἡ σφαῖρα $= \frac{p}{6d} \cdot \delta\delta\delta$· κἀντεῦθεν $\frac{p}{6d} \cdot \delta\delta\delta = \gamma$, καὶ $\delta\delta\delta = \frac{6d\gamma}{p}$. καὶ $\delta = \sqrt[3]{\frac{6d\gamma}{p}}$. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ τὰ παραπλησίως περὶ κυλίνδρων καὶ κώνων ζητέμενα ἐπιλυθήσεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 810. Ἐὰν ἡ τῆ πρίσματος βάσις, ὅπερ ἴσον τῷ ςερεῷ γ, ἦ β, ἔςαι τὸ τῆ πρίσματος

ὕψος

ὕψος $= \frac{\gamma}{\beta}$. Καὶ τοῦ ὕψους δοθέντος τοῦ πρίσματος, τοῦ τῷ στερεῷ γ ἴσου, οἷον δὴ τοῦ υ, ἡ βάσις ἔσται $\beta = \frac{\gamma}{\upsilon}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

811. Ὁ δὲ κύλινδρος, οὗ ὕψος τὸ υ, ἐὰν ᾖ τῷ στερεῷ γ ἴσος, ἔσται $\frac{p}{4d} \cdot \delta\delta\upsilon = \gamma$. Ἔνθεν τοι $\delta\delta = \frac{4d\gamma}{p\upsilon}$. καὶ $\delta = \sqrt{\frac{4d\gamma}{p\upsilon}}$. Καὶ περὶ τοῦ κώνου δὲ τὸ ζήτημα τῆς αὐτῆς ἐπιλύσεως τυχὸν, δώσει $\delta = \sqrt{\frac{12d\gamma}{p\upsilon}}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 812. Τὴν γωνίαν καταμετρεῖν.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐπεὶ γωνίας μέτρον γωνία ἐστὶν ἡ ὀρθὴ, ταύτης εἰς μέρη ὁσαδηποτοῦν ἰσάλληλα διαιρεθείσης, ἡ ὑποκειμένη γωνία δι' ὀρθῆς, καὶ τῶν τηλικούτων μορίων τῆς ὀρθῆς καταμετρεῖσθαι δυνήσεται. Διαιρεῖται δὲ ἡ γωνία, διαιρουμένου τοῦ κατ' αὐτὴν τόξου· τουτέστι, τῆς ἐν ταῖς πλευραῖς αὐτῆς ἐναπειλημμένης περιφερείας τοῦ κύκλου, τοῦ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ὡς ἀπὸ κέντρου, ἐν ὁσωδήποτε διαστήματι καταγραφομένου. (§. 358.).

Κοινῇ δ' ἐν χρήσει ἁπανταχοῦ, ἡ τοῦ τεταρτημορίου, ἡ τῆς ὀρθῆς γωνίας διαίρεσις, εἰς μέρη 90. ἐξ ὧν ἡ μὲν ἡμιπεριφέρεια 180 περιέξει, ἡ δὲ ὅλη 360.

360. τὰ δὲ τηλικαῦτα τῆς περιφερείας μόρια **Μοῖραι** καλοῦνται. Εἴωθε δὲ ἡ μοῖρα εἰς 60 **λεπτὰ πρῶτα** ὑποδιαιρεῖσθαι· καὶ τούτων ἕκαστον αὖ εἰς 60 **δεύτερα**· καὶ τὸ δεύτερον εἰς 60 **τρίτα**· καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Δοθέντος δὲ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μοιρῶν, καὶ τῶν λεπτῶν, καὶ τῶν δευτέρων, τῶν ἐν τῷ τόξῳ τῆς γωνίας, δοθήσεται καὶ ὁ ταύτης πρὸς τὴν ὀρθὴν λόγος, καὶ ὁ πρὸς δύο, ἢ πρὸς τέσσαρας ὀρθάς· καὶ ἑπομένως καὶ αὐτὴ ἡ γωνία. (§. 455.).

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 813. Ἀπαιτεῖ ἄρα ἡ τῆς γωνίας καταμέτρησις, τὴν τοῦ τόξου διαίρεσιν, εἰς τὰς μοίρας τὰς ἐπ᾽ αὐτῷ, καὶ τὰ ἑξηκοστημόρια. Καὶ εἰ δοθέντος τοῦ τῆς γωνίας μέτρου, ταύτην ἀποδοῦναι δέοι, τῆς αὐτῆς τοῦ τόξου διαιρέσεως χρεία. Τήν γε μὴν ἐπίπονον ἐργασίαν ταύτην παρελθεῖν δυνήσεται, ὅτῳ ἂν ἐν χερσὶ παρείη περιφέρεια, ἢ μέρος περιφερείας, ἐπὶ προσφυοῦς ὕλης καταγεγραμμένης, καὶ εἰς μοίρας, καὶ τὰ τῶν μοιρῶν μόρια κατατετμημένης, ἧς ἅμα τὸ κέντρον εἴη ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὀργάνου ἐπισημειωθέν. Τοῦ γὰρ κέντρου τοῦδε ἐπὶ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας οὕτως ἐπιτιθεμένου, ὥστε τὸ τὰς καταδιαιρέσεις φέρον τόξον, ἐντὸς τῶν τῆς γωνίας σκελῶν ἐναπολαμβάνεσθαι, αὐτίκα δή, τὰ οἷσπερ ἡ γωνία καταμετρεῖται, τοῦ τόξου μόρια καταφαίνεται ὅσα. Ὡς ἂν δέ, οἱ κατασημειοῦντες ἀριθμοὶ τὰς μοίρας, καὶ τῶν λεπτῶν τὰ πρῶτα, καὶ τὰ δεύτερα, καὶ τὰ τρίτα, μηδαμῶς συγχέοιντο, οὕτως εἰώθασι καταγράφεσθαι 57°, $03'$, $21''$, $34'''$, τοῦ μὲν $^{\circ}$, τὰς μοίρας ὑποδηλοῦντος· τοῦ δὲ ′, τῶν λεπτῶν τὰ πρῶτα· τοῦ δὲ ″, τὰ δεύτερα· κ.ξ.

§. 814. Τοῦ δὲ τῆς γωνίας μέτρου δοθέντος, καὶ τὸ τῆς ὑπεροχῆς, ἢ ἐλλείψεως πρὸς τὴν ὀρθὴν συγάμα δοθήσεται. Ἡ γὰρ τοῦ τῆς γωνίας μέτρου ἀπὸ μοιρῶν 90, ἢ ἀνάπαλιν τῶν 90 μοιρῶν ἡ ἀπὸ τοῦ μέτρου ἀφαίρεσις, ἥπερ ἂν ὀξεῖα τύχοι ἡ γωνία, ἢ ἀμβλεῖα, τὴν διαφορὰν ἐλέγξει, ἣν καὶ Παραπλήρωμα τῆς γωνίας καλεῖν εἰώθασι.

§. 815. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον, καὶ ἡ τῆς γωνίας διαφορὰ πρὸς ὀρθὰς δύο ἀποδοθήσεται, ἀντὶ 90, μοιρῶν 180 εἰλημμένων. Ἀντιδιαστέλλοντες δὲ τῆς ἀνωτέρω τήνδε τὴν διαφορὰν Ἀναπλήρωμα καλοῦσιν.

ΤΜΗΜΑ ΤΡΙΤΟΝ.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ΕΠΙΠΕΔΟΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 816.

Εἀν ἐπὶ κύκλȣ περιφερείας, ἧς διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, τόξον ληφθῇ ὁποῖον δήποτε ἀρχόμενον μὲν ἀπὸ τȣ̃ Α, ἐπὶ δὲ τὸ Δ ἐκπερατȣ́μενον· ἀπὸ δὲ τȣ̃δε τȣ̃ κατὰ τὸ τόξον πέρατος Δ, κάθετος ἐπὶ τῆς διαμέτρȣ ἀχθῇ ἡ ΔΕ, αὐτη δὴ ἡ ΔΕ Ἡμίτονον καλεῖται τȣ̃ αὐτȣ̃ τόξȣ ΑΔ, καὶ τῆς γωνίας ὡσαύτως, τῆς ὑπὸ τȣ̃ τόξȣ καταμετρȣμένης. Σχ. 165.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 817. Ὁποιονȣ̃ν σημεῖον Α, εἰς ἀρχὴν ἔχει τεθεῖναι, τῆς περὶ κέντρον τὸ Γ, διαστήματι τῷ ΓΑ καταγραφομένης περιφερείας. Τȣ̃ γὰρ ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ἐσχάτȣ σημείȣ, ἀπὸ Α διὰ Δ, Ζ, Β, Η περιαγομένȣ, ἡ περιφέρεια διεξοδεύεται. Ἐὰν ȣ̃ν στῇ ἐνταῦθα ἡ τȣ̃ σημείȣ κίνησις κατὰ τὸ Δ, πρὸ τȣ̃ τὴν ὅλην περιφέρειαν καταγράφειν, γίνεται τὸ Δ πέρας τȣ̃ τόξȣ ΑΔ, τȣ̃ τῆς περιφερείας ἐλάσσονος. Δύναται δὲ ἡ τȣ̃ σημείȣ κίνησις, παρὰ τὸ σημεῖον Δ τέως στῆναι, καὶ μετὰ τὸ τὴν ὅλην περιφέρειαν ἐκπεριελθεῖν· καὶ δὴ, καὶ μετὰ τὸ καὶ δὶς, καὶ τρὶς, καὶ πολλάκις τὴν περίοδον ἐκπερᾶναι· ȣ̃ κειμένȣ παρὰ τῷ Δ, τόξα ἀριθμȣ̃ παντὸς ἐπέκεινα περατȣ̃νται· οἷον τὸ ΑΔΒΑΔ, τὸ ΑΔΒΑΔΒΑΔ, καὶ ȣ̃τως ἐφεξῆς, οἷς ἅπασιν ἡ αὐτὴ ἀρχὴ Α ἐστίν. Ἑκάστȣ δὲ τῶν εἰρημένων τόξων, ἡ αὐτὴ ΔΕ ἡμίτονον ἐστίν· ȣ̓ γὰρ μόνȣ τȣ̃ ΑΔ, τȣ̃ πάν-

πάντων ἐλαχίςϐ. Ἀμέλειτοι ἐὰν α, τόδε τὸ ἐλάχιςον τῶν παρὰ τὸ Δ ἐκπερατϐμένων σημαίνῃ τόξον, π δὲ τὴν ὅλην περιφέρειαν, ἔςαι ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ΔΕ. τὸ ἡμίτονον ἑκάςϐ τῶν τόξων τῶνδε, α, π + α, 2π + α, 3π + α, 4π + α, καὶ ὅτως ἐπ' ἄπειρον. Τὰ μὲν ὖν τόξα ταῦτα, τὰ τῆς ἡμιπεριφερείας μείζονα, καίτοι διασκέψεως ἐπὶ τϐ παρόντος μηδαμῶς τυγχάνοντα, τὴν γεμὴν τῶν ἡμιτόνων καθόλϐ ἄνοιαν παρεχόμενα, πρϐργϐ ἀντι ποτὲ ἡμῖν ἐσόμενον ἐοίκασι προϋποτιθέναι. Σημειῶσαι δὲ, ὡς ἡ γωνία, ἧς τὸ μέτρον μεῖζον τῆς ἡμιπεριφερείας ἐςὶ, δυεῖν ὀρθῶν μείζων ἐςίν.

§. 818. Ἀχθείσης τῆς ΖΗ διὰ τϐ κέντρϐ Γ, ὡς ἐπὶ τῆς ΑΒ διαμέτρϐ πρὸς ὀρθὰς ἐφίςαθαι, ἡ περιφέρεια εἰς τέτλαρα τεταρτημόρια διατέμνεται· ὧν τὸ μὲν πρῶτον ΑΖ, τὸ δὲ δεύτερον ΖΒ, τὸ δὲ τρίτον ΒΗ, τὸ δὲ τέταρτον ΗΑ. Ἐπὶ τϐτων ὖντινος πάντως, τὸ πέρας παντὸς προσληφθέντος τόξϐ, οἷον τὸ Δ, πίπτειν ἐπάναγκες, εἰμὴ ἐπ' αὐτῶν πίπτοι τῶν ἀρχικωτέρων σημείων Α, Ζ, Β, Η, τινός· (ἅπερ ἐξέςω ὀνομάζειν Στηρίγματα). Πίπτον τοίνυν τὸ Δ κατ' ἀρχὰς τῆς περιφερείας Α, εἰς τὸ μηδὲν οἰχήσεται τὸ τόξον, ὃ σημαίνει τὸ α· τῶν δὲ λοιπῶν ἕκαςον π + α, 2π + α, 3π + α, κτξ. ἤτοι ὁλοχερὴς ἡ περιφέρεια ἔςαι, ἢ τῆς περιφερείας τὸ πολλαπλϐν· τό, τε ἡμίτονον ὁτϐοσϐν τῶν τηλικῶνδε τόξων ἐν σημείῳ συςαλήσεται, ὃ μέγεθος ὐδέν. Ἀφιςαμένϐ δὲ τϐ Δ ἀπὸ τϐ Α πρὸς τὸ Ζ, γεννᾶται ὁποσονϐν τὸ α, καὶ ἅμα καὶ τὸ ἡμίτονον αὐτϐ· τϐ δὲ βραχυτάτϐ τϐδε τόξϐ, ἡλίκον κατ' ἀρχὰς εἶναι εἰκὸς τῆς κινήσεως, καὶ τὸ ἡμίτονον σμικρὸν ἐςὶ, μόγιςτι τϐ τόξϐ ὑπελαττϐμενον, ὃ καὶ τοσῶδε ἧττον ἀντιδιαςέλλεται, ὅσωγε τϐ Α ἧττον τὸ Δ ἀφέςηκεν. Αὔξοντι δὲ τὸ ἀπ' ἐντεῦθεν τῷ τόξῳ συναύξει καὶ τὸ ἡμίτονον, εἰς ὃ τὸ Δ τῷ Ζ συμπέσοι, ἔνθα θαι τῷ ΑΖ τεταρτημορίῳ τὸ ΑΔ συνεξισοῦται, καὶ ἡ μὲν γωνία ὑπὸ ΑΓΖ ὀρθὴ, τὸ δ' ἡμίτονον ἴσον τῇ ἀκτῖνι ΖΓ καθίσαται. Ἀπὸ δὲ τοῦ στηρίγματος Ζ ἐὰν ἐφεξῆς τὸ τόξον ἐπαύξῃ, καὶ τούτου τὸ πέρας ἐπὶ θάτερον τῶν τεταρτημορίων ΖΒ γένηται, ἡ μὲν γωνία ἡ ὑπὸ τοῦ τόξου καταμετρουμένη, καὶ νῦν ὁμοίως ἐπαύξει, τό γε μὴν ἡμίτονον ἀπομειοῦται, καὶ τοσῷδε ἔλαττον καθίσαται, ὅσῳ δὴ μᾶλλον τὸ τοῦ τόξου πέρας πρὸς τὸ Β πελάζον γίνεται. Τὸ δὲ Δ πίπτον ἐπὶ τὸ Β, τουτέστι τὸ α τόξον δυσὶ περιφερείας τεταρτημορίοις συνεξισούμενον, αὖθις οἴχεται τὸ ἡμίτονον, εἰ μὴ καὶ πρὶν ὅλως ᾤχετο, μέρει τινὶ τῆς περιφερείας παρὰ τῷ Β συγκεχυμένον.

§. 819. Ἀλλὰ γὰρ τὰ ἡμίτονα, ἅπερ ἄχρι τοῦδε διεσκεψάμεθα, τῶν ἐλασσόνων ἡμιπεριφερείας τόξων, δι' ὧν αἱ ἐλάττονες δυεῖν ὀρθῶν γωνίαι καταμετροῦνται, ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῆς διαμέτρου ΑΒ πίπτοντα μέρη, ἅπαντα ἀντὶ θετικῶν ἔχουσιν ἐκλαμβάνεσθαι, καὶ τῶν ἡμιτόνων οὕτως ἀντιδιαστέλλεσθαι, ἃ ἐπὶ θάτερα τῆς διαμέτρου κείμενα, τῇ πρὸς ἐκεῖνα παραθέσει ἀποφατικὰ γίνεται.

§. 820. Ἀμέλει τοι ἐὰν τὸ πέρας τοῦ τόξου ἐπὶ τοῦ τρίτου τεταρτημορίου ΒΗ, ἀπὸ τοῦ στηρίγματος Β πρός γε τὸ Η ἀποχωρῇ, τὰ ἡμίτονα τῇ αὐτῇ τάξει προσεπαυξήσουσιν, ᾗπερ ἐπὶ τοῦ πρώτου τῶν τεταρτημορίων κατείδομεν αὔξοντα. Τοῦ δὲ τόξου ΑΖΒΗ τεταρτημορίοις τρισὶ συνεξισωθέντος, τὸ ἡμίτονον αὖθις, ἴσον τῇ ἀκτῖνι ΗΓ καταστήσεται. Ἀπὸ δὲ τοῦ στηρίγματος Η τοῦ τόξου προαγομένου, τοσῷδε μᾶλλον τὸ ἡμίτονον ἐκμειοῦται, ὅσῳ τὸ τοῦ τόξου πέρας ἐγγίον τοῦ Α σημείου γίνεται. Ἔνθα γεγονὸς, τὸ ἡμίτονον αὖθις εἰς τὸ μηδὲν τραπήσεται. Πίπτει δὲ πάντα ταῦτα τὰ ἡμίτονα τῶν τόξων, τῶν ἀπὸ τοῦ δευτέρου ἕως ἐπὶ τὸ τέταρτον τῶν τεταρτημορίων ἐκπερατουμένων (ὡς ἐπὶ τοῦ πρὸ ὀφθαλμῶν σχήματος).

τος)· ἔνερθε τῆς διαμέτρου ΑΒ, τουτέστιν ἐπὶ τὰ ἀντίθετα τῶν μερῶν ἐφ᾽ ἃ κείμενα ἦν τὰ τῶν τόξων, τῶν ὑπὲρ τὴν ἡμιπεριφέρειαν μὴ γινομένων. Ῥάδιον δὲ αὐτὰ ταῦτα τὰ εἰρημένα, κἀπὶ τὰ τόξα τὰ τῆς ὁλοσχεροῦς περιφερείας μείζονα, ἢ καὶ περιφερειῶν μιᾶς πλειόνων, μετενεγκεῖν.

§. 821. Ἀλλ᾽ ἐν μέρει τὰ τηλικάδε τόξα ἐάσαντες, τὰ τὴν περιφέρειαν ὑπερβάλλοντα, ἐπὶ παντὸς ἡμιτόνου θετικοῦ, δισσὰ τόξα ἐπιθεωροῦμεν, οἷον τὸ μὲν ΑΔ, τὸ δὲ ΑΖΘ, ὧν τὰ πέρατα Δ, καὶ Θ, ἐπ᾽ οὐχὶ ταυτὸ πίπτει τεταρτημόριον, ἀλλὰ τὸ μὲν ἐπὶ τοῦ πρώτου ΑΖ, τὸ δ᾽ ἐπὶ τοῦ δευτέρου ΖΒ. Ἐὰν γὰρ ληφθῇ ΖΘ = ΖΔ, ἢ ΒΘ = ΑΔ, ἡ διὰ τοῦ Θ δήπου εὐθεῖα, ἐπὶ τῆς ΑΒ διαμέτρου ἀγομένη κάθετος, ἢ τὸ ἡμίτονον ἐστὶ τοῦ τόξου ΑΖΘ, ἴση γίνεται τῇ ἐπὶ τῆς αὐτῆς διαμέτρου καθέτῳ ΔΕ, ἢ τοῦ τόξου ΑΔ τὸ ἡμίτονον ἐστίν. Ἔσται ἄρα τὸ αὐτὸ θετικὸν ἡμίτονον δυοῖν τόξων, ὧν τὸ μεῖζον ΑΘ, τὸ τεταρτημόριον ὑπερβάλλει τῷ τόξῳ ΖΘ = ΖΔ, ᾧ τὸ ἔλαττον ΑΔ τοῦ τεταρτημορίου ἐλλείπει· ὅπερ οὕτως ἔχοντος, τὸ τῶν τόξων ἄθροισμα ΑΔ + ΑΘ, τουτέστιν ΑΖ + ΖΔ, καὶ ΑΖ − ΖΔ, ἐστὶ 2ΑΖ, ἴσον τεταρτημορίοις δυσί. Τῶν δὲ μεγέθει διαφερουσῶν γωνιῶν, ὧν τὸ αὐτὸ θετικὸν ἡμίτονον, καὶ τὸ πρὸς τὴν ὀρθὴν παραπλήρωμα τὸ αὐτὸ ἔσται· τῶν αὐτῶν δὲ γωνιῶν ἡ ἑτέρα τῆς ἑτέρας, τὸ πρὸς τὰς δύο ὀρθὰς ἐστὶν ἀναπλήρωμα.

§. 822. Τὸν αὐτὸν δὲ συνάγεται τρόπον, καὶ δυοῖν τόξων, ὧν οὐδέτερον ὑπὲρ τὴν ὅλην περιφέρειαν γίνεται, ἐὰν ᾖ τὸ αὐτὸ ἀποφατικὸν ἡμίτονον, τοσῷδε τὸ ἔλαττον ἐλλείπειν τῶν τριῶν τεταρτημορίων ΑΖΒΗ, ὅσῳ τὸ μεῖζον ὑπερβάλλει αὐτά. Ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν τηλικούτων τόξων ἓξ τεταρτημόρια συναποτελεῖν· τουτέστι τῶν τριῶν τὸ διπλάσιον.

ΠΟΡΙΣ-

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 823. Τὸ τῆς ἡμιπεριφερείας ἡμίτονον, καὶ τὸ τῆς περιφερείας δὲ τῆς ὁλοχερῦς, καὶ ἐν γένει τόξυ παντὸς, τῦ ἀναφυομένυ πολλαπλασιασμῷ τῆς ἡμιπεριφερείας δι' ἀριθμῦ ὁλοχερῦς, μέγεθος ὐδὲν ἔχον ἐςί. Τὸ δὲ τῦ τεταρτημορίυ ἡμίτονον ἴσον τῇ ἀκτῖνι· καὶ ἐὰν αὕτη ῥηθῇ α, ἔςαι τὸ τῶν τριῶν τεταρτημορίων ἡμίτονον, ἤτοι τὸ μοιρῶν 270 = − α. Εἰσὶ δὲ παρὰ ταῦτα καὶ ἕτερα ὑπὲρ ἀριθμὸν τόξα, ὧν τὸ ἡμίτονον ἤτοι + α, ἢ − α. Ἐὰν ὖν ληφθῇ τὸ ΑΔ τόξον μοιρῶν φέρε 50, τὸ τύτυ ἡμίτονον ὐδέντι ἧττον καὶ τῷ αὐτῦ ἀναπληρώματι, τῷ μοιρῶν ὄντι 130, ἀνῆκον ἔςαι, καὶ πολλοῖς δὲ καὶ ἄλλοις τόξοις, ἅπερ ἐπὶ τῦ παρόντος ὐ πρόκειται θεωρεῖν. Τῦ δέτοι τόξυ τῦ λίαν βραχυτάτυ, καθάπερ δὴ καὶ τῦ τῆς ἡμιπεριφερείας, ἢ τῆς ὅλης περιφερείας μόλις διαφέροντος, τὸ ἡμίτονον μονονυχὶ ἴσον ἐςὶ περιφερείας μέρει, σὺν ᾧ συνιζάνειν ἔοικε, καὶ συγχεῖσθαι, καὶ τοσῷδε μᾶλλον καὶ ἀκριβέςερον, ὅσῳ τὸ τηλίκον ἡμίτονον ἔλαττον.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 284. Συνημίτονον τῦ παρὰ τὸ Δ ἐκπερατυμένυ τόξυ, ὗ ἀρχὴ ἀπὸ Α, καὶ τῆς γωνίας, ἧς τόδε τὸ τόξον μέτρον ἐςὶ, λέγεται τὸ μέρος τῆς διαμέτρυ ΓΕ, τὸ ἀπό τε τῦ κέντρυ Γ, καὶ τῦ ἡμιτόνυ ΔΕ ἀπολαμβανόμενον· τὸ δὲ τῆς διαμέτρυ ΑΕ μέρος, τὸ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῦ τόξυ Α, καὶ τῦ ἡμιτόνυ ΔΕ τῦ αὐτῦ τόξυ ΑΔ, Ἡμίτονον καλεῖται **πλάγιον**, ἢ **Παρημίτονον**.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 825. Τὸ συνημίτονον ΓΕ, ἐπίσης τῷ ἡμιτόνῳ ΔΕ, ἅπασιν ἐςὶν ἀνῆκον τοῖς τόξοις, ὧν ἡ μὲν ἀρχὴ κατὰ τὸ Α, τὸ δὲ πέρας κατὰ τὸ Δ. Ἐπεὶ

δὲ

δὲ τουτωνὶ τῶν τόξων τὸ ἐλάχιστον ΑΔ, τεταρτημορίου ἔλαττον ἐστὶ, τὸ τούτου συνημίτονον, ἅμα τὸ αὐτὸ τοῦ τόξου ΔΖ ἡμίτονον ἔσται, τοῦ ἀποτε τοῦ κατὰ τὸ πρότερον τόξον πέρατος, καὶ τῆς διαμέτρου ΖΗ ἐναπολαμβανομένου· ὅπερ αὐτόθεν φανερὸν, ἐάν τις ἀπὸ τοῦ σημείου Δ, ἐπὶ τὴν διάμετρον ΖΗ κάθετον ἀγάγῃ τὴν Δε. Ἔστι δὲ τὸ ΔΖ τοῦ ΑΔ τόξου τοῦ ἐλαχίστου τῶν ὧν τὸ ΓΕ συνημίτονον ἐστὶ, παραπλήρωμα εἰς τεταρτημόριον. Ἔσται ἄρα τὸ τοῦ ΑΔ τόξου συνημίτονον, τοῦ ἐλάττονος τεταρτημορίου, καὶ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τόξου τοῦ αὐτοῦ. Σημείωσαι δὲ, ὡς ἀντὶ τῶν τόξων, ἔθος τὰ πολλὰ κἀνταῦθα τὰς γωνίας ὀνομάζειν, τὰς ὑπὸ τῶν τηλικούτων τόξων καταμετρουμένας.

§. 826. Ἐὰν οὖν καὶ ἤδη, τῆς ἀκτῖνος περὶ τὸ Γ περιαγομένης, περιφέρεια νοηθῇ καταγραφομένη, τοῦ ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος πέρατος (ἀπ' ἀρχῆς ληφθείσης τῆς κατὰ τὸ Α) διὰ Ζ καὶ Β καὶ Η κατὰ μικρὸν ἐπὶ τὸ Α πάλιν χωροῦντος, εὔδηλον δὴ κατ' ἀρχὰς μὲν τῆσδε τῆς κινήσεως, ἔνθα τὸ ἔσχατον τοῦ οὕτως ἀνακύψοντος τόξου, συμπίπτει τῷ Α, ὅτι τὸ μὲν Ε ὡσαύτως τῷ Α συνιζάνει, τὸ δὲ συνημίτονον τῇ ἀκτῖνι ΓΑ συνεξισοῦται. Εἶτα πηλίκου τινος ἀνακύψαντος τόξου τοῦ ΑΔ, τῇ τοῦ Ε ἀπὸ τοῦ Α ἀπαναχωρήσει, γίνεται μὲν τὸ συνημίτονον ΓΕ τῆς ἀκτῖνος ΓΑ ἔλαττον, ἀλλὰ τοῦ τόξου βραχυτέρου ἔτι τυγχάνοντος ἡ διαφορὰ οὐ πάνυ ἐπίσημος· ὑπεκμειοῦται δ' ἐκεῖνο τὸ συνημίτονον, τοῦ Δ σημείου διὰ τοῦ τεταρτημορίου ΑΖ, πρὸς τὸ Ζ προαγομένου, καὶ διϊόντως ὑποφθίνει, εἰς ὃ τοῦ κατὰ τὸ τόξον πέρατος τῷ Ζ συνιζηκότος κατὰ σημεῖον συστῇ, οὗ μέγεθος οὐθέν· ὡς εἶναι λοιπὸν ο τὸ τοῦ τεταρτημορίου συνημίτονον, ἢ τῆς ὀρθῆς γωνίας τῆς ὑπὸ τοῦ τεταρτημορίου καταμετρουμένης. Τὸ δ' ἀπεντεῦθεν τοῦ τόξου, τῷ τοῦ ἐν αὐτῷ πέρατος, ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ ἐφεξῆς

τεταρ-

τεταρτημόριον ΖΒ μεταβάσειτε καὶ προόδῳ, ἐπαύξοντος, καὶ τὸ συνημίτονον αὐτὸ ἐπὶ τῆς ΓΒ ἀκτῖνος, ἧς ἡ θέσις τῇ προτέρᾳ ΓΑ ἀντίθετος μεταστήσεται, ἐπαύξειν αὖθις ἀρχόμενον, καὶ δὴ καὶ αὖξον, τῆς ἀπὸ τῆς ἀκτῖνος ΓΒ διαφορᾶς αὐτῷ ἐκμειουμένης τε καὶ ὑποφθινούσης, εἰς ὃ τοῦ ἐν τῷ τόξῳ πέρατος ἐπὶ τὸ Β ἀφικομένου, καὶ τοῦ τόξου αὐτοῦ εἰς μέγεθος τεταρτημορίων δυοῖν ΑΖΒ ἤδη κεχωρηκότος, τῇ ἀκτῖνι ἐξισωθείη, τῆς διαφορᾶς τέλεον ἐκλελοιπυίας.

§. 827. Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὡς ἐὰν τὸ τοῦ τόξου, ὃ ἔλαττον ἂν ᾖ τεταρτημορίου, συνημίτονον θετικῶς ἐκληφθῇ, τὸ τοῦ μείζονος ἢ κατὰ τεταρτημόριον, ἀποφατικὸν ἔσται. Καὶ ταύτῃ δὲ καὶ τῆς ὀξείας γωνίας ἡ ἀμβλεῖα ἀντιδιασταλήσεται. Ἐὰν γὰρ τὸ κατ' ἐκείνην συνημίτονον οὕτως + ἐπισημειωθῇ, τὸ κατὰ ταύτην σημειωτέον οὕτω −. Μόνης δὲ ἀπολύτως τῆς ποσότητος ἐπὶ τῶν τόξων θεωρουμένης, ὧν τὰ πρὸς τὸ τεταρτημόριον παραπληρώματα ἴσα ἐστὶ, καὶ τὰ συνημίτονα αὐτοῖς ἴσα εἶναι πρόδηλον. πλὴν ἀλλὰ τοῦ τῶν δὲ τῶν τόξων ἐλάσσονος συνημίτονον ἔχοντος + σ, τὸ μεῖζον ἕξει − σ· τοιαῦτα δὲ τὰ τόξα ΑΔ, καὶ ΑΖΘ.

§. 828. Ἐὰν τὸ τοῦ τόξου πέρας, ὑπερβὰν τὸ στήριγμα Β, περαιτέρω χωρῇ πρὸς τὸ Η, τὰ συνημίτονα τῷ αὐτῷ λόγῳ ὑπομειωθήσεται, ᾧ ἐπὶ τοῦ ἡγησαμένου τεταρτημορίου ΖΒ προσηύξανε. Καὶ ἔστι δὲ καὶ ταῦτα πάντα ἀποφατικά. Τοῦ δὲ τόξου ΑΖΒΗ, τοῦ τρισὶ τεταρτημορίοις ἐξισουμένου, συνημίτονον οὐδέν· ὑπὲρ δὲ τὸ τηλικοῦτον μέγεθος γινομένου τοῦ τόξου, καὶ τοῦ κατ' αὐτὸ πέρατος ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Α προβαίνοντος, τὰ συνημίτονα αὖθις θετικὰ ἔσται, καὶ ὡσαύτως ἐπὶ τὸ μεῖζον χωρήσει, ὡς ἐπὶ τοῦ πρώτου τεταρτημορίου ΑΖ ἐχώρει ἐπὶ τὸ ἔλαττον· τέρμα δὲ τῆς τούτων αὐξήσεως τὸ σημεῖον

Α, ȣ̓, τȣ̃ κατὰ τὸ τόξον πέρατος γινομένȣ, τετέ-
ςι, τῆς ὅλης ἤδη πληρωθείσης περιφερείας, τῇ
αἰῶνι αὖθις συνεξισωθήσεται τὸ συνημίτονον. Ἐκ
δὲ τȣ́των πρόχειρον καὶ τὰ συνημίτονα ἐπικρίνειν
τῶν τόξων, τῶν γινομένων ὑπὲρ τὴν περιφέρειαν·
τȣ́των γὰρ ἐντὸς τȣ̃ πρώτȣ τεταρτημορίȣ ΑΖ ἢ
ἐντὸς τȣ̃ ἐσχάτȣ ΗΑ ἐκπερατȣμένων, τὰ συνημίτο-
να θετικά. Ἐντὸς δὲ τȣ̃ δευτέρȣ ΖΒ, ἢ τȣ̃ τρίτȣ
ΒΗ, ἀποφατικά. Ἔςι δὲ παρὰ τὰ ὑπὲρ ἀριθ-
μὸν τόξα, τὰ ἐν τῷ πρώτῳ τεταρτημορίῳ ΑΖ πε-
ρατȣ́μενα, καὶ ἐν τῷ τετάρτῳ ΗΑ ὁμοίως ὑπὲρ
ἀριθμὸν ἄλλα, ὧν συνημίτονον ἐςὶ τὸ αὐτὸ, καὶ τȣ̃-
το θετικόν. Παραπλησίως δὲ παρὰ τὰ ἀριθμὸν
ὑπερπαίοντα τόξα, τὰ ἐν τῷ δευτέρῳ τεταρτημο-
ρίῳ ΖΒ ἐκτερματιζόμενα, καὶ ἐν τῷ τρίτῳ ΒΗ
ὁμοίως ἀριθμȣ̃ ἐπέκεινα, ὧν συνημίτονον τὸ αὐτὸ,
ἀλλὰ τȣ̃το ἀποφατικόν. Τοῖς δὲ δὴ τῶν ἡμιτόνων
πλαγίοις, ἤτοι τοῖς παρημιτόνοις, ὧν ἄλλως τὰ κυ-
ριώτερα τῶν παρεπομένων ȣ̓ χαλεπὸν συνιδεῖν, ἐπὶ
τȣ̃ παρόντος ȣ̓ προσχρησόμεθα.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

Σχ. 166. §. 829. Ἐὰν κύκλȣ περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ,
ἀπὸ κέντρȣ τȣ̃ Γ καταγεγραμμένȣ, πρὸς τῷ Α
ἅπτηται εὐθεῖα πέρας ȣ̓κ ἔχȣσα, ληφθέντος δὲ ἐπὶ
τῆς τȣ̃ κύκλȣ περιφερείας τȣ̃ τυχόντος σημείȣ Δ,
ἀχθῇ ἡ ΓΔ, καὶ προσαχθῇ, εἰς ὃ ἂν τὴν ἁπτομένην
τέμοι κατὰ τὸ Ε, εἰρήσεται ἡ ΑΕ Ἐφαπτομένη·
παντὸς τόξȣ ΑΔ, ἀπὸ μὲν τȣ̃ Α ἀρχομένȣ, ἐπὶ
δὲ τῆς ΓΕ περατȣμένȣ· ἢ καὶ τῆς γωνίας ἐφαπτομένη
ἣν τὸ αὐτὸ τόξον καταμετρεῖ, τῆς ὑπὸ ΑΓΔ. Ἡ
δὲ ΓΕ, ἡ ἀπὸ τȣ̃ κέντρȣ ἐπὶ τὴν ΕΑ εὐθεῖαν δια-
τείνȣσα, ἡ τῆς ὑπὸ ΑΓΔ γωνίας, καὶ δὴ καὶ τȣ̃
ΑΔ τόξȣ, Τέμνȣσα ἐςί.

ΣΧΟ-

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 830. Ἡ αὐτὴ ΑΕ ἀναρίθμων ὑπάρχει ἐφαπτομένη τόξων, ὧν ἐλάχιστον τὸ ΑΔ, τὸ καταμετροῦν τὴν ὑπὸ ΑΓΔ. Οὐκ ἀσυντελὲς δὲ τὸ καὶ τούτοις τὸν νοῦν ἐν γένει ἐπιστῆσαι, κἂν μηδεμίαν ἡμῖν πρὸς τὸ παρὸν, τὰ ὑπερβάλλοντα τὴν ἡμιπεριφέρειαν τόξα, τὴν χρῆσιν παρέχοιτο.

§. 831. Πρὶν ἢ τὸ τῆς διαμέτρου πέρας Δ, οὗ τῇ περιαγωγῇ ἡ περιφέρεια καταγράφεται, ἀπὸ τῆς πρὸς τῷ Α ἀρχῆς ἀπαναχωρήσῃ, ἡ ἐφαπτομένη μηδὲν ἐστίν. Ἀποστὰν δέ τι μικρὸν, καὶ βραχὺ ἡλίκον ὅσον τόξον καταγράψαν, ἅμα καὶ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τηλίκου τόξου προάγεται, βραχεῖα μέντοι τὴν ἀρχὴν ὡς εἰκὸς, καὶ τοσῷδε ἧττον τοῦ τόξου ἔχουσα διαστέλλεσθαι, ὅσῳ αὐτὸ ἔλαττον ἐστί. Περαιτέρω δὲ τῇ περιαγωγῇ τοῦ Δ προβαίνοντος, συναύξει δὴ τῷ τόξῳ καὶ ἡ ἐφαπτομένη, καὶ πρὸς τόξον τὸ ΑΔ, ὃ ἂν ᾖ = 45°, ἤτοι πρὸς ἡμίσειαν ὀρθῆς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΑΓΔ, ἴση τῇ ἀκτῖνι ΑΓ καθίσταται. Τὸ δ' οὖν ἀπεντεῦθεν τοῦ Δ πρὸς τὸ Ζ χωροῦντος, γίνεται ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἀκτῖνος μείζων, καὶ σφόδρα ἐπαύξει, ἐξ οὗ καὶ μέγεθος τέως προσλαμβάνει (ἀεί τι μεῖζον καὶ μεῖζον) παντὶ τῷ δοθέντι συνεξισούμενον. Τελευταῖον δὲ τοῦ Δ συνιόντος τῷ Ζ, ἡ ἐφαπτομένη οὐδαμῇ περατοῦται· οὐ γὰρ ἡ ΓΔ, συνιζήσασα ἤδη τῇ ΖΓ, τῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ διαμέτρου καθέτῳ, ἀπαντῆσαι δυνήσεται τῇ εὐθείᾳ ΑΕ, τῇ ἐπὶ τῆς αὐτῆς καὶ ταύτῃ διαμέτρου πρὸς ὀρθὰς ἐφεστώσῃ, ὁπόσον ἂν ἑκατέρα καὶ προαχθείη. Ἔστιν ἄρα τοῦ τεταρτημορίου, ἤτοι τῆς ὀρθῆς γωνίας ἡ ἐφαπτομένη ἀπειρομεγέθης, ὅτι οὐδὲν ἐστὶ τῷ ὄντι σημεῖον Ε, ὃ ἂν αὐτὴν περατώσειεν· οὐδ' ἂν δοθείη ποτέ τι μέγεθος, ὑπὲρ ἂν ἡ τοῦ τεταρτημορίου, ἢ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἡ ἐφαπτομένη, μὴ μείζων γένοιτο.

§. 832. Αὗται δὲ δὴ αἱ ἐφαπτόμεναι, ὧν τὰ τόξα τεταρτημορίε ἐλάσσονα, πᾶσαι τῆς διαμέτρε ὕπερθεν πίπτεσιν, εὐθεῖαί τοι, κατὰ τὰ ληφθέντα, καὶ θετικαὶ τακτέαι εἰσί· προοδεύοντος δὲ τε κατὰ τὸ τόξον πέρατος ἀπὸ τε Ζ ἐπὶ τὸ Β, ἡ τέμνεσα, ἤτοι ἡ ἀκτὶς ἡ προσεκβληθεῖσα, τῇ εὐθείᾳ ΕΛ τῇ τε κύκλε κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένῃ, αὖθις ἀπαντᾶ, ἀλλ᾽ ἔνερθε τῆς διαμέτρε ΑΒ. Περατέσθω γὰρ δὴ τὸ τόξον κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐφαπτομένη ἔσαι ἡ ΑΛ, μεγέθει μὲν πεπερασμένη, δυνάμει δὲ ἀποφατική· ὃ, καὶ ἐπὶ ὁτινοσὲν σημείε, τῶν ἐπὶ τε ΖΒ τεταρτημορίε, τὸ τόξον ἐκπερατεντος, κρατήσει. Ἀλλὰ γὰρ ἐὰν τὸ τόξον, μικρὸν ὅσον τε τεταρτημορίε ἐπέκεινα γένηται· τετέσιν ἐὰν μὴ πάνυτι τὸ Θ τε Ζ ἀποχωρήσῃ, μεγάλη τις ἡ ἐφαπτομένη ἔσαι, καὶ ὑποφθίνει γε τε τόξε αὔξοντος, ὥσε, ἐν ᾧ ἂν εἰς μέγεθος δυοῖν τεταρτημορίων τετο ἐφίκοιτο, τε Θ τῷ Β συμπίπτοντος, καὶ αὐτὴν αὖθις ὅλως ἀφανίζεσθαι.

§. 833. Ἐὰν γένηται ΖΘ = ΖΔ· τετέσιν, ἐὰν δύο τόξα ληφθῇ ΑΔ, καὶ ΑΘ, ὧν θάτερον τὸ ΑΔ, τοσέτῳ τε τεταρτημορίε ἔλλειπον ᾖ, ὅσῳ θάτερον αὐτε ὑπερέχει, γίνεται καὶ ΒΘ = ΑΔ, κἀντεῦθεν καὶ ΑΚ = ΑΔ, καὶ ἔσαι ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΛ = ΑΓΕ, καὶ ἑπομένως ΑΛ = ΑΕ· τετέσιν αἱ ἐφαπτόμεναι δυοῖν τόξων, ἅπερ ἅμα τὴν ἡμιπεριφέρειαν ἀναπληροῖ, ἢ δυεῖν γωνιῶν, ὧν ἡ ἑτέρα τῆς ἑτέρας ἀναπλήρωμα ἐσὶν εἰς δύο ὀρθὰς, ἀπολύτως ληφθεῖσαι, ἐξισωθήσονται. Διοίσεσι δὲ, ἧπερ, τῆς τε ἐλάσσονος ἢ κατὰ τεταρτημόριον τόξε θετικῶς νοεμένης, ἡ τε μείζονος μὲν ἢ κατὰ τεταρτημόριον, ἐλάσσονος δὲ ἢ κατὰ δύο, ἀποφατικὴ ἔσαι· τῷ δ᾽ αὐτῷ τέτῳ τεκμηρίῳ καὶ ἡ ὀξεῖα γωνία τῆς ἀμβλείας διακριθήσεται.

§. 834. Εἰ δὲ δόξει καὶ τὰ τῆς ἡμιπεριφερείας μείζονα διασκέψασθαι τόξα, τοῦ σημείου ἐπὶ τὸ τρίτον τῶν τεταρτημορίων ΒΗ, κατὰ μικρὸν ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Η προαγομένου, εὔδηλον ὡς αἱ ἐφαπτόμεναι, αἱ τοῖς μὴ τὰ τρία τεταρτημόρια ὑπερβάλλουσι τόξοις ἀνήκουσαι, τῇ αὐτῇ προόδῳ προσαύξουσι, καθάπερ καὶ αἱ ἐπὶ τοῦ πρώτου τῶν τεταρτημορίων, καὶ εἰσὶν αἱ πᾶσαι θετικαὶ ὡσαύτως· οἷον ἐὰν γένηται ΒΙ = ΑΔ, ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου ΑΖΒΙ, ὅλως ἡ αὐτὴ ἔσαι τῇ ἐφαπτομένῃ τοῦ τόξου ΑΔ. Ἡ δὲ τοῦ ΑΖΒΗ τόξου τοῦ τοῖς τρισὶ τεταρτημορίοις ἐξισουμένου ἐφαπτομένη, οὐδέντι ἧττον ἀπειρομεγέθης ἐςὶν, ἢ, ἡ τοῦ τεταρτημορίου ΑΖ. Ὑπὲρ δὲ τὸ ςήριγμα τὸ κατὰ τὸ Η, ἐὰν τὸ ἐπὶ τοῦ τόξου ἔχατον ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Α προβαῖνον γένηται ἐν τῷ τετάρτῳ τῶν τεταρτημορίων ΗΑ, αἱ ἐφαπτόμεναι αὖθις ἀποφατικαὶ ἔσονται, καὶ ὑποφθίνουσι τῇ αὐτῇ προόδῳ, ᾗ ὑποφθίνουσαι ἐτύγχανον καὶ αἱ τῶν τόξων, τῶν ἐν τῷ δευτέρῳ τεταρτημορίῳ ΖΒ περατουμένων, ἄχρις οὗ καὶ τοῦδε δὴ τοῦ τεταρτημορίου πληρωθέντος, ἐν σημείῳ τέως ἡ ἐφαπτομένη συςαλείη, ἔνθα ἡ τῶν τεττάρων τεταρτημορίων, παραπλησίως τῇ τῶν δυεῖν ἐφαπτομένῃ, ἀπολήγει εἰς τὸ μηδέν.

§. 835. Τὰ δ' ἀνήκοντα ταῖς τεμνούσαις ἐντεῦθεν ῥᾶςα ἐπισυνάγεται. Αὔξουσι γὰρ τῶν ἐφαπτομένων αὐξουσῶν, καὶ μειουμένων μειοῦνται· καὶ συμπροβαίνουσι προβαινούσαις ἐπὶ τὸ ἄπειρον· τῆς γεμίω ἐφαπτομένης εἰς τὸ μηδὲν ἀπολη γούσης, ἡ τέμνουσα ἴση τῇ ἀκτῖνι καθίςαται, ἧς ἐλάσσων εἶναι οὔποτε δύναται, οὐδὲ φύσιν ἔχει, ἅτε δὴ πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ μεγίςη τυγχάνουσα, οὗ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ἡ ἀκτὶς, καὶ ἡ ἐφαπτομένη.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 836. Ἐὰν εὐθεῖα πέρας μὴ ἔχουσα ἡ ΜΝ κύκλου ἐφάπτηται κατὰ τὸ Ζ, τὸ τοῦ τεταρτημορίου

ΑΖ πέρας ὂν τὸ ἔσχατον, ἡ δὲ, ἐκ τοῦ ἀκολούθου ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην ΕΛ κάθετος, τὸ ἐπ' αὐτῆς μέρος ΖΜ τὸ μεταξὺ τοῦ σημείου Ζ, καὶ τῆς ἀκτῖνος ΓΔ ἀπολαμβανόμενον προσαχθείσης, λέγεται Συνεφαπτομένη τοῦ τόξου ΑΔ, καὶ τῆς γωνίας ὑπὸ ΑΓΔ· οὐ μόνον δὲ, ἀλλὰ καὶ οὑτινοσοῦν ἑτέρου τόξου, τοῦ κατὰ τὸ Α μὲν ἀρχομένου, ὑπὸ δὲ τῆς ΓΔ τεμνούσης περατουμένου, καὶ δὴ, καὶ τῆς ὑπὸ τοῦ τηλικούτου τόξου καταμετρουμένης γωνίας. Ἡ δὲ ΓΜ εὐθεῖα, ἡ ἀπολαμβανομένη μεταξὺ τοῦ κέντρου, καὶ εὐθείας τῆς ΜΝ, τοῦ αὐτοῦ τόξου, ἢ τῆς γωνίας Συνδιατέμνουσα καλεῖται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 837. Κἂν ἐκ τοῦ σχήματος δῆλον τὴν συνεφαπτομένην τοῦ τόξου ΑΔ, ἥτις ἐστὶ ΖΜ, ἐφαπτομένην ἅμα τοῦ ΖΔ τόξου εἶναι τὴν αὐτήν. Καὶ τοίνυν τοῦ τόξου τοῦδε ΖΔ, πρὸς ἐκεῖνο τὸ ΑΔ εἰς τεταρτημόριον ὄντος παραπληρώματος, ἡ τοῦ τόξου συνεφαπτομένη τοῦ τεταρτημορίου ἐλάσσονος, ἡ αὐτὴ ἅμα ἐφαπτομένη ἔσται, τοῦ εἰς τεταρτημόριον ἐκείνου παραπληρώματος. Καὶ ἡ τῆς γωνίας συνεφαπτομένη, ἐφαπτομένη τοῦ παραπληρώματος τῆς αὐτῆς. Ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας 30°, συνεφαπτομένη τῆς 60°, ἧς ἐκείνη τὸ παραπλήρωμα.

§. 838. Ὁ δέ τοι τρόπος ὃν αἱ συνεφαπτόμεναι αὔξουσί τε καὶ φθίνουσι, τοῦ τόξου ἀπὸ τοῦ μηδενὸς ἑξῆς προϊόντος, ἐκ τῶν εἰρημένων ῥᾷστα κατανοεῖται. Ἐὰν τὸ τόξον ΑΔ ἀμέγεθες ᾖ, ἡ συνεφαπτομένη ἔσται ἀπειρομεγέθης. Συμπίπτει γὰρ τηνικαῦτα ἡ τέμνουσα τῇ ΓΑ, ἥτις προεκβληθεῖσα προεκβληθείσῃ τῇ ΖΜ οὐδαμῇ ἀπαντήσει, ὥστε τεμεῖν. Τοῦ δὲ ἐπὶ τοῦ τόξου πέρατος Δ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς Α ἀφισταμένου, κατὰ λόγον τῆς πρὸς τὸ Ζ ἐγγύτητος, ἐλάσσων ἡ ΖΜ συνεφαπτομένη καθίσταται· τῇ δὲ

ἀκτῖ-

ἀκτῖνι ἐξισοῦται τοῦ Δ σημείου τὸ μεσαιτάτῳ τοῦ τεταρτημορίου ἐπέχοντος, καὶ τῆς ὑπὸ ΑΓΔ ἡμισείας ὀρθῆς γινομένης. Ἐντεῦθεν δὲ ἐφεξῆς τοῦ τόξου προσαύξοντος, ἡ συνεφαπτομένη ὑπομειοῦται, ἕως οὗ τέλεον ἐκλίποι, τοῦ μὲν τόξου τεταρτημορικοῦ γεγονότος, τῆς δὲ γωνίας ὀρθῆς. Ἐὰν οὖν τὸ ἀπὸ τοῦδε, ἐπὶ τὸ μεῖζον ἔτι προΐῃ τὸ τόξον, συνεφαπτομένη τις αὖθις ἀνακύψει, ἐπὶ θάτερα τῆς ΖΗ πίπτουσα διαμέτρου, τῶν πρὸς ἃ αἱ τῶν τεταρτημορίου ἐλασσόνων τόξων συνεφαπτόμεναι πίπτουσι, τὰ ἀντίθετα. Εἰσὶ δὲ αὗται αἱ συνεφαπτόμεναι τῶν τόξων, τῶν μειζόνων μὲν τεταρτημορίου, ἐλασσόνων δὲ ἡμιπεριφερείας ἀποφατικαὶ ῥητέαι, ἵν᾽ αἱ τῶν ἐλασσόνων τεταρτημορίου τεθῶσιν εἶναι θετικαί. Αὔξει γοῦν ἡ ἀποφατικὴ αὕτη συνεφαπτομένη διηνεκῶς, τοῦ κατὰ τὸ τόξον πέρατος διὰ τοῦ ΖΒ τεταρτημορίου, ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Β ἀπιόντος. Ἐὰν οὖν τὸ τόξον ΖΘ, ἴσον ληφθῇ τῷ ΖΔ, ἔσται δὴ καὶ ἡ ἐκείνου συνεφαπτομένη ΖΝ, τῇ τούτου ΖΜ ἴση· ὡς τὰς συνεφαπτομένας δυεῖν τόξων ΛΔ, ΑΘ, ὧν ἐκεῖνο τοσῷδε τοῦ τεταρτημορίου ἐλλείπει, ὅσῳ τοῦτο ὑπερέχει, μηδαμῶς μεγέθει ἀλλήλων ἀντιδιαστέλλεσθαι, μόνοις δὲ τοῖς σημείοις, οἷς τὰ κατὰ θέσιν τῶν κατ᾽ ἀπόφασιν διακρίνεται· τὰ δέτοι τόξα $ΑΔ = ΑΖ - ΖΔ$, καὶ $ΑΘ = ΑΖ + ΖΘ$, ἅμα ληφθέντα, παρέχεται τὸ ἄθροισμα $ΑΔ + ΑΘ = 2 ΑΖ$, τὸ δυσὶ τεταρτημορίοις συνεξισούμενον. Ἔνθεντοι καὶ αἱ γωνίαι, αἷς αἱ αὐταὶ συνεφαπτόμεναι προσανήκουσιν, ἀθροισθεῖσαι, τὸ κεφάλαιον τὸ ἐκ δυεῖν ὀρθῶν ἀποδώσουσιν. Ἐν γένει δὲ κἂν τῷδε τῷ τεταρτημορίῳ ἡ τοῦ ΖΘ τόξου, ἡ τῆς ὑπὸ ΖΓΘ γωνίας ἐφαπτομένη, τῆς ἀντὶ παραπληρώματος οὔσης τῇ ὑπὸ ΑΓΘ, ἡ αὐτὴ καὶ τοῦ τόξου ΑΖΘ, ἡ τῆς ὑπὸ ΑΓΘ γωνίας συνεφαπτομένη ἐστίν.

§. 839. Ἐν ᾧ δ᾽ ἂν τὸ τοῦ τόξου πέρας, τῷ Β σημείῳ, ὅτι ἔγγιστα γένοιτο, ἡ συνεφαπτομένη καθ' ὑπερβολὴν μεγεθύνεται, ἐν δὲ τόξῳ τῷ δυσὶ τεταρτημορίοις ἴσῳ, ἀπειρομεγέθης καθίσαται· εἶτ' οὖν, παντὸς ὅπερ ἂν δοθείη, μεγέθους μείζων· τοῦ δὲ στηρίγματος Β ἐπέκεινα, ἐὰν τὸ τόξον ἐπὶ τὸ μεῖζον προβαίνῃ, προεληλυθότος τοῦ κατ' αὐτὸ πέρατος, ἐπὶ τοῦ τρίτου τῶν τεταρτημορίων ΒΗ, ἡ συνεφαπτομένη αὖθις ὅροντε λαμβάνει καὶ θέσιν, καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον ὑπομειουμένη πρόεισιν, ὃν ἐν τῷ πρώτῳ ὑπεμειοῦτο τεταρτημορίῳ τῷ ΑΖ· οἷον ἐὰν ληφθῇ ΒΙ = ΑΔ, ἡ συνεφαπτομένη τοῦ τόξου ΑΖΒΙ, ἡ αὐτὴ ὅλως γίνεται τῇ ΖΜ, τοῦ τόξου ΑΔ. Ἀλλὰ τοῦ ΑΖΒΗ τόξου, τοῦ τρισὶ τεταρτημορίοις ἐξισουμένου, συνεφαπτομένη οὐδεμία ἐστίν. Ἐὰν δὲ τῷδε τῷ τόξῳ, τόξον ἕτερον προσεπιγένηται τὸ τυχὸν ΗΚ, ἀνακύψει αὖθις συνεφαπτομένη ἡ ΖΝ ἀποφατική, ἢ δή, τοῦ ΗΚ τόξου ἐν τῷ τετάρτῳ τούτῳ τεταρτημορίῳ διηνεκῶς αὔξοντος, αὔξει, ὥσπερ οὖν καὶ αἱ συνεφαπτόμεναι τῶν τόξων ηὔξανον τῶν ἐπὶ τοῦ δευτέρου τεταρτημορίου περατουμένων· τελευταῖον δὲ καὶ τοῦ κατὰ τὸ τόξον τέρματος τῇ ἀρχῇ τοῦ αὐτοῦ Α συμπίπτοντος, ἀπειρομεγέθης αὖθις καθίσαται.

Τὰ δὲ περὶ τῆς συνδιατεμνούσης, ἤτοι τῆς τεμνούσης τοῦ παραπληρώματος τοῦ δοθέντος τόξου, ἢ τῆς γωνίας, ῥηθῆναι δυνάμενα, τοῖς εἰρημένοις ὄντα παραπλήσια, εὐχερῶς ἕκαστος συνόψεται, καὶ μάλιστα τοῖς ἐν (§. 835.) παρατηρηθεῖσι τὸν νοῦν ἐπιστήσας.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΓΕΝΙΚΟΝ.

§. 840. Ἅπαντα καθόλου τὰ ἡμίτονα, εἴτε ἐφαπτόμεναι, καὶ αἱ τέμνουσαι πᾶσαι, ἐκ τοῦ αὐτοῦ κυκλικοῦ τεταρτημορίου Α Ζ ληφθῆναι ἔχουσιν. Ἐὰν γὰρ τόξον πηλικονοῦν, ἐπὶ τοῦδε τοῦ τεταρτημορίου ληφθὲν, τόξου τινὸς ἑτέρου τεταρτημορίου ἐλάσσονος, τὸ παραπλήρωμα εἶναι νοηθῇ, οἷον τῦ Α, ἔσαι τὸ ἡμίτονον ἐκείνου τῦ τόξου, συνημίτονον τούτου τῦ Α, τὸ αὐτό. Καὶ ἡ ἐκείνου ἐφαπτομένη, τῦδε τῦ Α συνεφαπτομένη. Καὶ ἡ ἐκείνου τέμνουσα, τῦ αὐτῦ τούτου Α συνδιατέμνουσα. Οὕτω τὸ 10 μοιρῶν ἡμίτονον, ἐσὶ μοιρῶν 80 συνημίτονον. Καὶ τὸ ἡμίτονον 20 μοιρῶν, συνημίτονον μοιρῶν 70, καὶ τὰ ἄλλα ὡσαύτως. Τῶν δέ τοι τόξων, τῶν παρὰ τῷ Α ἀρχομένων, καὶ ἐπὶ τὰ Ζ, Β, Η προαγομένων, τοῖς ἐν ἀποσάσεσιν ἴσαις ἀπὸ τῶν σηριγμάτων Ζ, ἢ Η, ἐκπερατεμένοις, τὰ αὐτὰ ὅλως ἡμίτονα ἐσί· τὰ δὲ συνημίτονα, αἵτε ἐφαπτόμεναι τούτων καὶ συνεφαπτόμεναι, μεγέθει μὲν οὐδαμῶς ἀπολύτω, θέσει δὲ, ἣν τὰ σημεῖα +, − ἐλέγχει, διηνωόχασιν. Ἀλλὰ καὶ τῶν τόξων τῶν ἀπ' ἀρχῆς τῆς αὐτῆς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐκτρεχόντων, τοῖς ἐπίσης ἀφεσῶσιν ἀφ' ἑκατέρου τῶν σηριγμάτων Α, ἢ Β, τὰ αὐτὰ μὲν ὅλως συνημίτονα ἐσὶ, τὰ δὲ ἡμίτονα, αἵτε ἐφαπτόμεναι, καὶ αἱ συνεφαπτόμεναι, μεγέθει μὲν ἀπολύτω κἀνταῦθα ἴσαι, ἐπὶ δὲ τὰ ἀντίθετα τῆς διαμέτρου ΑΒ πίπτουσαι, εἰσὶ καὶ ἀντιθέτοις σημείοις διαγνωριζόμεναι.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ.

§. 841. Συντομίας τε χάριν καὶ σαφηνείας, ἡ μὲν γωνία, ἢ τὸ τόξον δι' ἑνὸς, ἢ πλειόνων γραμμάτων Α, Β σημειούσθω, τὸ δὲ τῆς μὲν εἰς ὀρθὴν, τῦ δὲ εἰς τεταρτημόριον παραπλήρωμα, τὸ καθ' ὑπεροχὴν, ἢ κατ' ἔλλειψιν, διὰ τῦ Π ἐκείνοις προσεπιχαρασσομένου δηλούσθω, οὕτω· ΠΑ, ἢ ΠΒ. Καὶ τὸ μὲν ἡμίτονον διὰ τῦ Ἡμ. διατυπούσθω, τὸ δὲ συνημίτονον διὰ τῦ Συνημ. ἥτε ἐφαπτομένη διὰ τῦ Ἐφ. καὶ ἡ συνεφαπτομένη διὰ τῦ Συνεφ. ἃ τοῖς δηλωτικοῖς τῶν γωνιῶν, ἢ τῶν τόξων, ἢ τῶν παραπληρωμάτων αὐτῶν γράμμασι δέον προσεπιγράφειν,

 τόνδε

τὸν δὲ τὸν τρόπον· Ἡμι. Α, Συνημ. Α, Ἐφ. Β, Ἡμ.πΒ, Ἐφ.πΒ. Ὅθεν ἕπεται ὅτι, Ἡμ.πΑ, ταυτὸ σημαίνει τῷ Συνημ. Α, (§. 825.). Καὶ Ἐφ. πΑ, ταυτὸ τῷ Συνεφ. Α, (§. 837.) Καὶ τῆς ἀκτῖνος δὲ, ἤτοι τῆς ἡμιδιαμέτρε σύμβολον ἔςαι τὸ ακ, ἢ Ακ. Δια δὲ τῶ Τ σημανθήσεται τὸ τεταρτημόριον, τὸ ἀπὸ ἡμιδιαμέτρε ακ, ἢ Ακ, καταγεγραμμένον. Ταῖς μέντοι τεμνέσαις, καὶ τοῖς παρημιτόνοις ἐνταῦθα ἐ προσχρησόμεθα.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 842. Τῶν αὐτῶν γωνιῶν, τὰ ἡμίτονα, καὶ τὰ συνημίτονα, καὶ τὰ παρημίτονα, αἵτε ἐφαπτόμεναι, καὶ αἱ συνεφαπτόμεναι, αἵτε τέμνεσαι ἢ αἱ συνδιατέμνεσαι, ἐὰν πρὸς διαφόρες ἀναφέρωνται ἀκτῖνας, ἔσονται ὡς αἱ ἀκτῖνες.

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 167. Τῆς δοθείσης γωνίας Γ, ἐν ἀκτῖσιν ΑΓ = ΒΓ, καὶ αΓ = βΓ, κείσθω μέτρα καταγεγραμμένα τὰ ΑΒ, αβ. Ἡμίτονα δὲ, πρὸς τὰς τεθείσας ἀκτῖνας τὴν ἀναφορὰν ἔχοντα, τὰ ΒΔ, βδ. Συνημίτονα δὲ, τὰ ΔΓ, δΓ. Παρημίτονα δὲ, τὰ ΑΔ, αδ. Ἐφαπτόμεναι δὲ ΕΑ, εα. Τέμνεσαι δὲ ΕΓ, εΓ. Ἐπειδὴ τοίνυν αἱ εὐθεῖαι ΕΑ, ΒΔ, εα, βδ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς ΑΓ κάθετοι ἔσαι, παράλληλοι πᾶσαι εἰσὶν, ἔςαι $B\Gamma : \beta\Gamma = B\Delta : \beta\delta = \Delta\Gamma : \delta\Gamma$. Ἀλλὰ καὶ $B\Gamma : \beta\Gamma = A\Gamma : \alpha\Gamma$. Ἄρα καὶ $B\Gamma : \beta\Gamma = A\Gamma - \Delta\Gamma : \alpha\Gamma - \delta\Gamma = A\Delta : \alpha\delta$. Καὶ παρὰ ταῦτα $A\Gamma : \alpha\Gamma = AE : \alpha\varepsilon = E\Gamma : \varepsilon\Gamma$. Περὶ δὲ τῶν συνεφαπτομένων καὶ συνδιατεμνεσῶν, ταυτὸ δῆλον ἐντεῦθεν, ὅτι ἐφαπτόμεναι αἱ αὐταὶ εἰσὶ καὶ τέμνεσαι τῶ παραπληρώματος τῆς αὐτῆς γωνίας, Γ, τῆς δεδομένης.

ΠΟΡΙΣ-

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 843. Κἀντεῦθεν καὶ πρὸς γωνίαν τὴν αὐτὴν Γ, ὁ λόγος ὁ τῆς ἀκτῖνος πρὸς τὸ ἡμίτονον, πρὸς τὴν ἐφαπτομένην, πρὸς τὰ λοιπὰ, εἰς ταὐτὸ ἥκει, ὁποσηοῦν ἂν ἡ ἀκτὶς ληφθείη. Δυνατὸν δὲ τόνδε τὸν λόγον, καθ' ἡντιναοῦν γωνίαν, ὥσπερ διὰ γραμμῶν εὐθειῶν, οὕτωσὶ καὶ δι' ἀριθμῶν, ὅσον ἂν ἐθέλοιτις, ἀκριβῶς ἐχόντων παριστάνεσθαι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 844. Οἱ δὲ λόγοι οὗτοι, κατὰ πάσας τὰς ἐν μοίραις τε, καὶ λεπτοῖς πρώτοις καταμετρουμένας γωνίας, δι' ἀριθμῶν παριστάμενοι, τὸ Κανόνιον συναποτελοῦσι τῶν Ἡμιτόνων, καὶ Ἐφαπτομένων, καὶ Τεμνουσῶν. Ἐν ᾧ τῆς Ἀκτῖνος ἀντὶ μονάδος ληφθείσης, καὶ εἰς μέρη 10000000 διαιρεθείσης, τῶντε μοιρῶν, καὶ τῶν πρώτων λεπτῶν ἐν τάξει ἐκκειμένων, ἀντιστοίχως παράκεινται οἱ τῶν τηλικούτων μορίων ἀριθμοὶ, ἐξ ὧν, τῶν τοσῶνδε τόξων, ἢ γωνιῶν συγκροτοῦνται τὰ ἡμίτονα, καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι. Προσετέθησαν δὲ οἱ τῶν εἰρημένων ἀριθμῶν λογάριθμοι, οὓς ἄλλως ἐπὶ τῶν λογαριθμικῶν ἔδει Πινάκων ἀναζητεῖν χρονοτριβοῦντας, εἰς ἐπιβοήθημα τοῦ ὑπολογισμοῦ. Τοῖς δὲ τῶν λογαρίθμων τούτων χαρακτηριστικοῖς τοιάδε τις τροπὴ εἰσενήνεκται, ὥστε τῷ λογαρίθμῳ τῆς ἀκτῖνος, ἢ ἐστὶ 10, ἀριθμὸν ἀντιστοιχεῖν 10. 000. 000. 000. Καὶ εἰς τοσαῦτα ἄρα μέρη ἡ ἀκτὶς ἐνταῦθα διῃρημένη νοεῖται. Τῶν γεμὴν τοιούτων λογαρίθμων, παρὰ τὸ χαρακτηριστικὸν, ἑπτὰ μόνοι οἱ πρῶτοι τῶν χαρακτήρων γράφονται, οἳ δήπου ἀποχρῶντες εἰσίν.

§. 845. Αὐτοὶ δὲ τῷ Πίνακι τῶν λογαρίθμων, ὃν πρὸς τῷ τέλει τοῦ βιβλιαρίου ὑποσυνάπτομεν, καὶ τὸ τῶν ἡμιτόνων, καὶ ἐφαπτομένων Ἀβάκιον προσέθεσεθέμεθα, ἀλλοίως γε μλὼ, καὶ ἐχ ὡς ἔθος ἐπὶ τῷ μείζονος Κανόνος. τὰ ἐν αὐτῷ διαιτήσαντες, λίαν δὲ ἐπιτεμόντες. Ἡ μὲν ἐν ἀκτὶς ἡμῖν εἰς χίλια μόνα διαιρεῖται μόρια· Τὰ δ' ἡμίτονα, ἅτια ταῖς μοίραις ἀνήκει, καὶ τοῖς λεπτοῖς τοῖς κατὰ τλὼ στήλην ἀριθμουμένοις, ᾗ ἐπιγέγραπται Ἡμίτ. εἰσὶν οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἐν τῇ πρώτῃ τῶν στηλῶν ἀντίστοιχοι, οἷστισιν ὁμοστοίχως, κατὰ τλὼ δευτέραν στήλλω ἀντιπαράκειται οἱ τῶν αὐτῶν ἡμιτόνων λογάριθμοι. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον, αἵτε ἐφαπτόμεναι, καὶ οἱ τούτων λογάριθμοι, ἀντιστοιχοῦσι ταῖς μοίραις καὶ τοῖς λεπτοῖς, τοῖς ἐν τῇ στήλῃ, ᾗ ἐπιγραφὴ Ἐφαπ. Ἀλλ' αἱ ἐφαπτόμεναι αὗται, ὑπὲρ τλὼ 45 μοίραν ἐ γίνονται. Οὐδὲ γὰρ χρεία τῶν ὑπὲρ τλὼ ἀκτῖνα ἐφαπτομένων, ὡς ἔξον, ἐκ τῆς ἐφεξῆς στήλης, ἧς ἐπιγραφὴ Συνεφαπ., τῇ αὐτῇ εὐχρεία, τὰς τῶν ὑπὲρ τὰς 45 μοίρας γωνιῶν συνεφαπτομένας λαμβάνειν. Καὶ γὰρ καὶ τῶν ἐπὶ τῆσδε τῆς στήλης ἀριθμῷ ἑκάστῳ ὁ ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς ἐπὶ τῆς πρώτης τῆς ἐπιγεγραμμένης Ἀριθ. συνεφαπτομένη ἐστὶ τῆς γωνίας τῆς τῷ ἀριθμῷ ἐκείνῳ ἐκδηλουμένης· ὁ δὲ τῆς δευτέρας στήλης ἀριθμὸς ὁ ὁμόστοιχος, ὁ τῆς συνεφαπτομένης ἐστὶ λογάριθμος.

§. 846. Εἰς μὲν ἐν τὸν ἐπ' ἀκριβείας τῆς ἐνδεχομένης ὑπολογισμὸν, τὸν ὅτως ἐπιτετμημένον Πίνακα ἀποχρήσειν, πολλοῦγε καὶ δεῖ. Ἀλλὰ γὰρ ἔνθα μετρίως τινὸς ἐμφιλοχωροῦντος διαπτώματος ἀμελεῖν ἐξέσαι, πολὺ τῷ ἄλλως ἀλυσιτελὲς ἂν ἐσόμενε πόνε, διὰ τῷ τοιοῦδε ὑφαιρεθήσεται Πίνακος. Μυρία γὰρ ὅσα ὑπολογισμοῖς καθυποπίπτει, τὰ δι' αὐτῷ ἀκριβῶς ἅλις δυνάμενα ἐκπεραίνεσθαι, παρατηρουμένων μάλιστα τῶν ἃ, μικρὸν ὕστερον περὶ τῆς αὐτῷ ὑποτεθήσεται χρήσεως.

ΘΕΩ-

ΘΕΩΡΗΜΑ·

§. 847. Ἐπὶ τῦ ὀρθογωνίυ τριγώνυ ΑΒΓ, Σχ. 168.
ὁποτερασῦν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, οἷον τῆς Β ληφθείσης, ἔςιν ἡ τῶν πλευρῶν μεγίςη ΑΒ, πρὸς τὴν ἀπεναντίον τῇ ῥηθείσῃ γωνίᾳ πλευρὰν ΑΓ, ὡς Ἀκ. πρὸς Ἡμ. Β. Ἡ δὲ πλευρὰ ΓΒ, ἡ τῇ γωνίᾳ προσκειμένη, πρὸς τὴν ἀπεναντίον ΑΓ, ὡς Ἀκ., πρὸς Ἐφαπτ. Β.

ΔΕΙΞΙΣ·

Ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῶν τὴν γωνίαν περιεχυσῶν πλευρῶν ἀκτῖνος πηλικησῦν ληφθείσης ΔΒ = ΕΒ, τό,τε τῆς γωνίας μέτρον καταγραφῇ ΔΕ, καὶ τὸ ἡμίτονον αὐτῦ ΔΗ, καὶ ἡ ἐφαπτομένη ΕΖ, φανερὸν ὅτι ΑΒ : ΑΓ = ΔΒ : ΔΗ = Ἀκ. : Ἡμ. Β. Καὶ παραπλησίως ΓΒ : ΑΓ = ΕΒ : ΕΖ = Ἀκ. : Ἐφ. Β.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α·

§. 848. Ἐπεὶ δ' αὐτὸ τῦτο καὶ περὶ τῆς γωνίας Α κρατεῖ, ἣ τῆς Β παραπλήρωμα ἐςὶν, ἤτοι πΒ· ἔςαι ΑΒ : ΒΓ = Ἀκ. : Ἡμ. πΒ. Καὶ ΑΓ : ΓΒ = Ἀκ. : Ἐφ. πΒ· ἤτοι ΑΒ : ΒΓ = Ἀκ. : Συνημ. Β. Καὶ ΑΓ : ΓΒ = Ἀκ : Συνεφ. Β.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β·

§. 849. Τῶν Ἀναλογιῶν ΑΓ : ΓΒ = Ἀκ : Συνεφ. Β, καὶ ΓΒ : ΑΓ = Ἀκ : Ἐφ. Β, ἀλλήλαις παραβαλλομένων, εὔδηλον ὡς ἐφ' οἱασῦν γωνίας Β, ἔςιν Ἐφ. Β : Ἀκ. = Ἀκ : Συνεφ. Β. Ὅθεν ἐπειδὴ καὶ κατ' ἄλλην ἡντιναῦν γωνίαν τὴν Δ, ἔςιν Ἐφ. Δ : Ἀκ. = Ἀκ : Συνεφ. Δ, ἔςαι ἐν γένει, Ἐφ. Δ : Ἐφ. Β = Συνεφ. Β : Συνεφ. Δ.

Ἀμέλει-

Ἀμέλειτοι πανταχοῦ ἡ ἀκτὶς, μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης, καὶ τῆς συνεφαπτομένης τῆς αὐτῆς γωνίας, ἡ μέση ἀνάλογος ἐστίν. Αἱ δὲ ἐφαπτόμεναι δυοῖν πηλικωνοῦν τόξων, ταῖς αὐτῶν τούτων συνεφαπτομέναις ἀντιπεπόνθασιν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

§. 850. Ἐξ αὐτοῦ δὲ τοῦ σχήματος καταφαίνεται, ὅτι καὶ ΕΒ : ΕΖ = ΒΗ : ΗΔ· τουτέστιν Ἀκ : Ἐφ. Β = Συνημ. Β : Ἡμ. Β. Κἀντεῦθεν Ἀκ × Ἡμ. Β = Ἐφ. Β × Συνημ. Β. Ἐπειδὴ δὲ τόδε κρατεῖ κἀπὶ τῆς γωνίας Α, ἥτις ἐστὶ π Β, ἔσται ὁμοίως Ἀκ : Ἐφ. π Β = Συνημ. π Β : Ἡμίτ. π Β· τουτέστιν Ἀκ : Συνεφ. Β = Ἡμίτ. Β : Συνημ. Β. Καὶ Ἀκ × Συνημ. Β = Συνεφ. Β × Ἡμ. Β.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ.

Σχ. 169. 107. §. 851. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας Α, κάθετος ἀχθῇ ἡ ΑΔ, ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, εἰ δέοι προεκβληθείσης, ἔσται ΑΔ : Ἀκ = ΔΒ : Ἐφ. ΔΑΒ. Καὶ ΑΔ : Ἀκ = ΔΓ : Ἐφ. ΔΑΓ. Κἀντεῦθεν ΔΒ : ΔΓ = Ἐφ. ΔΑΒ : Ἐφ. ΔΑΓ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ε.

§. 852. Ἐὰν δὲ ἐπὶ τῶν ἀναλογιῶν τούτων καθ' ἃς εὐθεῖά τις διὰ τριῶν ἄλλων προσδιορίζεται, παρὰ τὸ ἀπόλυτον τῆς ποσότητος, καὶ τὰ σημεῖα ἅμα ἐν λόγῳ τιθῆται, τὰ ἐν ταῖς τρισὶ, δι' ὧν ἡ τετάρτη ἐπιφέρεται, τῆς ἀκτῖνος ἀεὶ διὰ τοῦ + προσσημειουμένης, καὶ τῆς τετάρτης ὁμοίως τὸ κατάλληλον προκύπτει σημεῖον, κατὰ τὴν τεθεῖσαν ἀρχὴν (§. 652.) ληφθέν· ὅθεν γίνεται φανερὸν ἐν τίνι τεταρτημορίῳ ἐκπερατοῦται τὸ τόξον, ᾧ τὸ εὑρε-

εὑρεθὰν ἡμίτονον, ἢ συνημίτονον ἐςὶν ἐπανῆκον, ἢ ἡ ἐφαπτομένη, ἢ ἡ συνεφαπτομένη. Οὕτως ἐὰν ἐπὶ τῆς ἀναλογία (§. 849.) Ἐφ. Δ : Ἐφ. Β = Συνεφ. Β : Συνεφ. Δ, ἡ μὲν Ἐφ. Δ θετικὴ ἦ, ἡ δὲ Ἐφ. Β ἀποφατικὴ, διὰ τὸ καὶ τὴν Συνεφ. Β ὡσαύτως ἀποφατικὴν εἶναι, προκύπτει Συνεφ. Δ καταφατικὴ, κατὰ τὸν κανόνα· ὁπότε φανερὸν καὶ ἀποφατικὴν τὴν τοιάδε συνεφαπτομένην εἶναι μὴ δύνασθαι, ἀεὶ τῆς συνεφαπτομένης τὸ αὐτὸ φερούσης σημεῖον, ὃ τῇ τοῦ αὐτοῦ τόξου ἐφαπτομένῃ προσκείμενον ἐςίν. Ἐὰν δὲ ἐπὶ τῆς ἀναλογίας (§. 850.) Συνημ. Β : Ἡμ. Β = Ἀκ : Ἐφ. Β, τεθῇ τὸ μὲν Ἡμ. Β εἶναι καταφατικὸν. τὸ δὲ Συνημ. Β ἀποφατικὸν, ὃ τεκμήριον ἐςὶ τὴν γωνίαν Β ἀμβλεῖαν εἶναι, προκύψει δὴ ἡ Ἐφ. Β. ἀποφατική· οἷάπερ τῷ ὄντι, πᾶσα πάσης ἀμβλείας ἡ ἐφαπτομένη ἐςί. Καὶ ἔςιν ἄρα τὰ ἐνταῦθα ἡμῖν, περὶ τῶν τεταρτημορίου ἐλασσόνων ἀποδεδειγμένα τόξων, δι' ὧν ἡ τῶν ὀξειῶν καταμέτρησις, καθόλου ἀληθεύοντα, οὐ μόνον τῆς ποσότητος ἀπολύτως θεωρουμένης, ἀλλὰ καὶ τῶν σημείων ἐν λόγῳ γινομένων, καὶ τῆς δι' αὐτῶν ὑποδεικνυμένης θέσεως.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 853. Ἐὰν Α καὶ Β τόξα δύο σημαίνῃ κύκλου τοῦ αὐτοῦ, τῆς ἡμιπεριφερείας ἐλάσσονα· ἢ τὰς ὑπὸ τῶν τηλικούτων τόξων καταμετρουμένας γωνίας· ἡ Ἐφ. ($\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$B) σημαίνῃ τὴν ἐφαπτομένην τοῦ ἐκ τούτων ἡμιαθροίσματος, καὶ Ἐφ. ($\frac{1}{2}$A − $\frac{1}{2}$B) τὴν τῆς τῶν αὐτῶν τούτων τόξων, ἢ γωνιῶν ἡμιδιαφορᾶς· ὧν ἂν ἐφαπτομένων ἐνταῦθα μόνον τὸ μέγεθος θεωροῖτο. Ἔςαι δὴ Ἐφ.

($\frac{1}{2}$A

$(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B) : \text{Ἐφ.}(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B) = (\text{Ἡμ.}\,A+\text{Ἡμ.}\,B) : (\text{Ἡμ.}\,A-\text{Ἡμ.}\,B)$.

ΔΕΙΞΙΣ.

Τὸ τῶν Α, Β ἡμιάθροισμα, ὡς ἐκ τοῦ ὑποτεθέντος, ἀεὶ δυεῖν τεταρτημορίων ἔλαττόν ἐστι· τεταρτημορίου δὲ ἤτοι ἔλαττον, ἢ μεῖζον.

Σχ. 171. Πρῶτον οὖν ἐὰν ἔλαττον ᾖ, ἐν κύκλῳ τῷ περὶ τὸ Γ γεγραμμένῳ, γενέσθω $\Delta E = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$· καὶ $EZ = EH = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B$· καὶ ἀχθήτω ΕΓ ἀκτίς· καὶ ἐπεζεύχθω ΖΗ, ἥτις παρὰ μὲν τῷ Θ δίχα τμηθήσεται, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΓ κάθετος ἔσται (§. 359.). Ἀχθήτω δὲ καὶ ἡ ΖΓ ἀκτίς· ἥ,τε ΖΗ προσαχθήτω, εἰς ὃ ἂν τῇ ΓΔ διαμέτρῳ προεκβεβλημένῃ προσπέσοι κατὰ τὸ Ι. Ἔσται τοίνυν (§. 851.) $\Theta I : \Theta Z$ ἢ $\Theta H = \text{Ἐφ.}\, I\Gamma\Theta : \text{Ἐφ.}\, \Theta\Gamma Z = \text{Ἐφ.}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : \text{Ἐφ.}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$. Ἀλλὰ μὴν τὸ τόξον $\Delta H = \Delta E - EH = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = B$· κἀντεῦθεν $HM = \text{Ἡμ.}\,B$· καὶ $\Delta Z = \Delta E + EZ = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B = A$· καὶ μὲν δὴ καὶ $ZN = \text{Ἡμ.}\,A$. Ἄρα $ZK = \text{Ἡμ.}\,A - \text{Ἡμ.}\,B$. Ἐπειδὴ δὲ $HZ : H\Theta = 2 : 1 = ZK : \Theta\Lambda$· ἔσται $\Theta\Lambda = \frac{1}{2}\text{Ἡμ.}\,A - \frac{1}{2}\text{Ἡμ.}\,B$· καὶ $\Theta O = \Theta\Lambda + HM = \frac{1}{2}\text{Ἡμ.}\,A - \frac{1}{2}\text{Ἡμ.}\,B + \text{Ἡμ.}\,B = \frac{1}{2}\text{Ἡμ.}\,A + \frac{1}{2}\text{Ἡμ.}\,B$. Ἐπεὶ δὲ καὶ $I\Theta : \Theta H = \Theta O : \Theta\Lambda$· ἔσται δήπου καὶ $\text{Ἐφ.}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : \text{Ἐφ.}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) = (\frac{1}{2}\text{Ἡμ.}\,A + \frac{1}{2}\text{Ἡμ.}\,B) : (\frac{1}{2}\text{Ἡμ.}\,A - \frac{1}{2}\text{Ἡμ.}\,B) = (\text{Ἡμ.}\,A + \text{Ἡμ.}\,B) : (\text{Ἡμ.}\,A - \text{Ἡμ.}\,B)$.

Δεύτερον δέ, ἐὰν τὸ τῶν τόξων ἡμιάθροισμα τεταρτημορίου μεῖζον ᾖ, κείσθω δὴ τούτων τὸ μεῖζον Β, τὸ δ' ἔλαττον Α· καὶ γινέσθω $\Delta E = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A$· καὶ ΕΖ, ἢ $EH = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A$. Καὶ ἔσται δὴ καὶ ἤδη, $I\Theta : \Theta Z$ ἢ $\Theta H = \text{Ἐφ.}(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A) : \text{Ἐφ.}(\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$. Ἡ γὰρ ἐφαπτομένη τῆς ὑπὸ ΔΓΕ, τῇ ἐφαπτομένῃ τοῦ ἐκείνης ἀναπληρώματος, ἤτοι τῆς

τῆς ὑπὸ ΕΓδ, ἀπολύτως θεωρουμένη ἴση ἐςὶ (§. 833.). Τὰ γὰρ σημεῖα, ἢ τὰ τῆς θέσεως, ἃ διὰ τῶν σημείων ἐλέγχεται, ἐνταῦθα ἀλογεῖται. Ἀλλαμὴν $\delta H = \delta E + EH = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A = B$· καὶ $HM = \text{Ἡμ.}\,B$· καὶ μὲν οὖν καὶ $\delta Z = \delta E - EZ = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A = A$· καὶ $ZN = \text{Ἡμ.}\,A$. Ἔςι δὲ δὴ καὶ $\Theta O = \frac{1}{2}\text{Ἡμ.}\,A + \frac{1}{2}\text{Ἡμ.}\,B$· καὶ $\Theta\Lambda = \frac{1}{2}\text{Ἡμ.}\,A - \frac{1}{2}\text{Ἡμ.}\,B$· τοιγαροῦν $\Theta O : \Theta\Lambda = (\text{Ἡμ.}\,A + \text{Ἡμ.}\,B) : (\text{Ἡμ.}\,A - \text{Ἡμ.}\,B)$. Ἀλλ' ἦν γὰρ, ὡς ἀνωτέρω, $I\Theta : \Theta H = \Theta O : \Theta\Lambda$. Ἆρα κἀπὶ τῆς δευτέρας τῆσδε ὑποθέσεως, $\text{Ἐφ.}\,(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A) : \text{Ἐφ.}\,(\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A) = (\text{Ἡμ.}\,A + \text{Ἡμ.}\,B) : (\text{Ἡμ.}\,A - \text{Ἡμ.}\,B)$.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 854. Ἐὰν ἀντὶ τῶν τόξων Α, Β τὰ αὐτῶν ληφθῇ παραπληρώματα πA, πB· ὧν τὸ μὲν ᾖ μεῖζον, τοῦτο δ' ἔλαττον· ἔςαι ὡσαύτως, $\text{Ἐφ.}\,(\frac{1}{2}\pi A + \frac{1}{2}\pi B) : \text{Ἐφ.}\,(\frac{1}{2}\pi A - \frac{1}{2}\pi B) = (\text{Ἡμ.}\,\pi A + \text{Ἡμ.}\,\pi B) : (\text{Ἡμ.}\,\pi A - \text{Ἡμ.}\,\pi B) = (\text{Σωημ.}\,A + \text{Σωημ.}\,B) : (\text{Σωημ.}\,A - \text{Σωημ.}\,B)$. Ἔςι δὲ (ἑκατέρου τῶν τόξων Α καὶ Β τεταρτημορίου τοῦ Τ ἐλαττονουμένου) $A = T - \pi A$, καὶ $B = T - \pi B$· οὐκοῦν ἐὰν ἀπὸ τῶν ἴσων τὰ ἴσα ἀφαιρεθῇ, $B - A = \pi A - \pi B$. Διὸ καὶ τὰ ἡμίση τούτων τῶν τόξων ἴσα ἔςαι, καὶ $\text{Ἐφ.}\,(\frac{1}{2}\pi A - \frac{1}{2}\pi B) = \text{Ἐφ.}\,(\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$. Ἐὰν δὲ τὰ αὐτὰ τόξα ἐπαθροισθῇ, προκύψει $B + A = 2T - \pi B - \pi A$· κἀντεῦθεν $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A = T - (\frac{1}{2}\pi B + \frac{1}{2}\pi A)$. Καὶ ἔςιν ἄρα $\frac{1}{2}\pi B + \frac{1}{2}\pi A$ τὸ παραπλήρωμα τοῦ ἡμιαθροίσματος $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A$· τοῦτο γὰρ λοιπὸν, ἐὰν ἐκεῖνο ἀπὸ τοῦ τεταρτημορίου ἀφαιρεθῇ. Ἔνθεντοι $\text{Ἐφ.}\,(\frac{1}{2}\pi B + \frac{1}{2}\pi A) = \text{Σωεφ.}\,(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A)$. Καὶ $\text{Σωεφ.}\,(\frac{1}{2}\pi B + \frac{1}{2}\pi A) = \text{Ἐφ.}\,(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A)$.

Ὡς ἅπερ ἑκάτερον ᾖ τῶν τόξων τεταρτημορίου μεῖζον, τὸ αὐτὸ ὡσαύτως δειχθήσεται, διὰ τὸ εἶναι τηλικαῦτα $Α = Τ + πΑ$, καὶ $Β = Τ + πΒ$. Ἐὰν δὲ τὸ μὲν Β, τεταρτημορίου μεῖζον ᾖ, τὸ δὲ Α ἔλαττον· τουτέστιν ἐὰν ᾖ $Α = Τ - πΑ$, καὶ $Β = Τ + πΒ$, τῇ τῶν προτέρων ἀφαιρέσει ἀπὸ τῶν ὑστέρων, ἔσται $Β - Α = πΒ + πΑ$· ὅθεν γίνεται $\frac{1}{2}Β - \frac{1}{2}Α = \frac{1}{2}πΒ + \frac{1}{2}πΑ$· ἤτε Ἐφ. $(\frac{1}{2}πΒ + \frac{1}{2}πΑ) =$ Ἐφ. $(\frac{1}{2}Β - \frac{1}{2}Α)$. Ἐὰν δὲ τὰ αὐτὰ τόξα ἀλλήλοις ἐπαθροισθῇ, προκύψει $Β + Α = 2Τ - πΑ + πΒ$· κἀντεῦθεν $\frac{1}{2}Β + \frac{1}{2}Α = Τ - (\frac{1}{2}πΑ - \frac{1}{2}πΒ)$. Ἐξ οὗ φανερὸν, ὡς ἐνταῦθα τῶν τόξων $\frac{1}{2}Β + \frac{1}{2}Α$, καὶ $\frac{1}{2}πΑ - \frac{1}{2}πΒ$, τὸ δεύτερον τοῦ προτέρου παραπλήρωμα ἐστίν· ὑπολείπεται γὰρ ἐκεῖνο, ἐὰν τοῦτο ἀπὸ τοῦ τεταρτημορίου ἀφαιρεθῇ. Καὶ ἔστιν οὕτως Ἐφ. $(\frac{1}{2}πΑ - \frac{1}{2}πΒ) =$ Συνεφ. $(\frac{1}{2}Α + \frac{1}{2}Β)$ καὶ Συνεφ. $(\frac{1}{2}πΑ - \frac{1}{2}πΒ) =$ Ἐφ. $(\frac{1}{2}Α + \frac{1}{2}Β)$. Καὶ ταῦτα ἄρα ἐὰν ἐπὶ τῆς καθόλου ἀναλογίας (§. 854.) Ἐφ. $(\frac{1}{2}πΑ + \frac{1}{2}πΒ)$: Ἐφ. $(\frac{1}{2}πΑ - \frac{1}{2}πΒ)$ = (Συνημ. Α + Συνημ. Β.) : (Συνημ. Α — Συνημ. Β), ἐν ἰδίοις τόποις τεθῇ, γίνεται ἐν ὑποθέσει μὲν τοῦ τῶν τόξων ἑκάτερον Α, Β τεταρτημορίου ἐλαττοῦσθαι, ἢ πλεονάζειν·

Συνεφ. $(\frac{1}{2}Β + \frac{1}{2}Α)$: Ἐφ. $(\frac{1}{2}Β - \frac{1}{2}Α)$ = (Συνημ. Α + Συνημ. Β) : (Συνημ. Α — Συνημ. Β).

Ἐν ὑποθέσει δὲ, τοῦ τὸ μὲν μεῖζον τῶν τόξων Β, ὑπερέχειν τεταρτημορίου πλεονάζον, τὸ δ' ἔλαττον Α, τεταρτημορίου ἐλλείπειν.

Ἐφ. $(\frac{1}{2}Β - \frac{1}{2}Α)$: Συνεφ. $(\frac{1}{2}Β + \frac{1}{2}Α)$ = (Συνημ. Α + Συνημ. Β) : (Συνημ. Α — Συνημ. Β).

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ. 172. 173. §. 855. Ἐπὶ παντὸς τριγώνου ΑΒΓ, δύο ἀεὶ αἱ τυχοῦσαι πλευραὶ ΑΓ, ΒΓ, εἰσὶν

ὡς

ὡς τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν ἃς ὑποτείνουσι, πρὸς τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα ἀναφερόμενα· τουτέστιν, ὡς ΑΓ : ΓΒ = Ἡμ. Β : Ἡμ. Α.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἀπὸ γὰρ τοῦ Γ σημείου εὐθείας καταχθείσης τῆς ΓΔ, καθέτου τῇ πλευρᾷ ΑΒ, τῇ, δεῆσαν, προεκβεβλημένῃ, ἔσται· ΑΓ : ΓΔ = Ἀκ : Ἡμ. Α· καὶ ΓΒ : ΓΔ = Ἀκ. Ἡμ. Β. (§. 847.). Ἄρα καὶ ΑΓ : ΓΒ = Ἡμ. Β : Ἡμ. Α. (§. 185.).

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 856. Ἕπεται δὲ ἐντεῦθεν ΓΑ + ΓΒ : ΓΑ − ΓΒ = (Ἡμ. Β + Ἡμ. Α) : (Ἡμ. Β − Ἡμ. Α.) (§. 171.). Ἐπεὶ δὲ ἄρα (Ἡμ. Β + Ἡμ. Α) : (Ἡμ. Β − Ἡμ. Α) = Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Β + $\frac{1}{2}$Α) : Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Β − $\frac{1}{2}$Α). Ἔσται ὁμοίως ἐπὶ παντὸς εὐθυγράμμου ἐπιπέδου τριγώνου, ΓΑ + ΓΒ : ΓΑ − ΓΒ = Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Β + $\frac{1}{2}$Α) : Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Β − $\frac{1}{2}$Α).

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 857. Ἐκ τῶνδε τῶν Θεωρημάτων (§. 847. 855. 856.) τὰ εὐθύγραμμα τῶν τριγώνων δι' ὑπολογισμοῦ ἐπιλύεται· τουτέστι, δοθέντων ἐπὶ παντὸς τριγώνου, τῶν, δι' ὧν τὰ λοιπὰ προσδιορίζεται, εἴτε γωνίαι ὦσιν, εἴτε πλευραὶ, διὰ τῶν ἐν τῷ Κανονίῳ ἡμιτόνων, καὶ ἐφαπτομένων λήπτὰ γίνεται τὰ δι' ἐκείνων διοριζόμενα. Δῆλον δὲ, διὰ μόνων τῶν τοῦ τριγώνου γωνιῶν τὸν μὲν λόγον τῶν πλευρῶν δίδοσθαι, τὰς δὲ πλευρὰς αὐτὰς οὔ· ὧν γὰρ αἱ γωνίαι ἴσαι, ὅμοια μὲν τὰ τρίγωνα, ὡς ἐν πλευραῖς ἀνάλογον οὔσαις περιεχόμενα, τό γε μὴν τῶν ἐπ' αὐτοῖς πλευρῶν μέγεθος, πηλικονοῦν ὅσον εἶναι ἐνδέχεται.

Δύο δὲ τῶν ἐν τῷ τριγώνῳ τῷ εὐθυγράμμῳ μόναι γωνίαι οὔποτ' ἂν δοθεῖεν, μὴ καὶ τῆς τρίτης ἐξ

 αὐτῶν

αὐτῶν ἀεὶ ἐπιφερομένης (§. 302.). Ἐὰν ἄρα αἱ δεδομέναι τύχωσι γωνίαι τριγώνου παντὸς, καὶ παρὰ ταύτας, καὶ μία τις τῶν πλευρῶν, ἀεί τοι ἡ πλευρὰ αὐτὴ, πρός γε τὰς δοθείσας γωνίας, ὡσαύτως ἔχουσα θέσεως ἐστί· καὶ διὰ ταύτης δὲ καὶ τῶν γωνιῶν, αἱ λοιπαὶ πλευραὶ τοῦ τριγώνου προσδιορίζονται (§. 320.).

Ἐὰν δὲ μία μόνη τῶν ἐν τῷ τριγώνῳ γωνιῶν ᾖ δεδομένη, δύο παρὰ ταῦτα πλευρῶν χρεία, εἰς τὴν τοῦ τριγώνου κατασκευήν· ὧν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν περιεχουσῶν, πάντη καὶ τὰ λοιπὰ προσεπιδιορίζεται, εἴτε δύο γωνίαι φημὶ αἱ λειπόμεναι, καὶ ἡ πλευρὰ ἡ τρίτη (§. 316.).

Ἀλλ᾽ εἴπερ αἱ δοθεῖσαι πλευραὶ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν οὐδαμῶς περιέχουσι, καὶ ἡ τρίτη μὲν ὁμοίως πλευρὰ κἀνταῦθα, διὰ τῆς ἀπεναντίον αὐτῇ γωνίας διορισθήσεται, οὐκ ἀεὶ γεμὴν ἡ γωνία αὐτὴ διὰ τῶνδε τῶν δεδομένων τὸν διορισμὸν ἕξει. Ἐπίσται γὰρ δηλονότι ἐν γωνίᾳ τῇ δοθείσῃ, καὶ δυσὶ πλευραῖς, ὧν τὴν ἑτέραν δέοι τῆς γωνίας κεῖσθαι ἀπεναντίον, δισσὰ τρίγωνα πολλάκις κατασκευάσαι, ὧν ἐν θατέρῳ ἡ γωνία, ἡ ἀπεναντίον τῆς λοιπῆς πλευρᾶς κεισομένη, ἀμβλεῖα εἴη, ἐν θατέρῳ δ᾽ ὀξεῖα, καὶ τῆς προτέρας ἀναπλήρωμα (§. 347.). Διὸ καὶ ἑκατέρα διὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμιτόνου δοθήσεται. Κατὰ δὲ τὸ διττὸν τῆς τηλικαύτης γωνίας, καὶ ἡ τρίτη γωνία, ἣν ὑποτενεῖ ἡ ζητουμένη πλευρὰ διπλῆ τις ἀναφύσεται.

Τελευταῖον δὲ, ἐὰν μηδεμία ᾖ δεδομένη τοῦ τριγώνου γωνία, ἀλλ᾽ αἱ ἐπ᾽ αὐτῷ πλευραὶ πᾶσαι, αἱ γωνίαι ἀείποτε πάντη διορισθήσονται (§. 323.).

§. 858. Ἃ τοίνυν ἡ Γεωμετρία, ἐκ τῶν παρὰ τοῖς τριγώνοις διδομένων, διὰ τῆς τοῦ σχήματος κατασκευῆς ἀνευρίσκει, αὐτὰ ταῦτα ἡ μέθοδος τοῦ

ἀριθ-

ἀριθμητικῶς τὰ τρίγωνα ἀναλύειν, διὰ τȣ̃ ὑπολογισμȣ̃ ἀνακαλύπτει. Λέγεται δὲ αὕτη Τριγωνομετρία Ἐπίπεδος, διὰ τὸ εἶναι καὶ Τριγωνομετρίαν ἄλλην Σφαιρικὴν, τὴν περὶ τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας καταγραφόμενα ὡσαύτως καταγινομένην. Ἐφ' ἑκατέρας δὲ ὡς διδόμενα πάντως ὑποτίθεται τὰ δυνατά· τὶς γὰρ ἂν, τριγώνȣ φέρε, ȣ̔ αἱ δύο ἅμα πλευραὶ τῆς τρίτης εἰσὶν ἐλάσσονες, τὰς γωνίας λαβεῖν ἀξιώσειεν, ὁπότε τὸ τοιόνδε τρίγωνον πάντῃ ἀδύνατον;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 859. Ἐπὶ παντὸς τριγώνȣ ἐπιπέδȣ εὐθυγράμμȣ, ἐὰν τρία τινὰ δοθῇ, ἐξ ὧν τὰ λοιπὰ διορίζεται, τὰ λοιπὰ ταῦτα, εἴτε γωνίαι εἶεν, εἴτε δὴ πλευραὶ, εἴτε δὲ, καὶ πλευραί τε καὶ γωνίαι ἀναμὶξ, ἢ προσδιορίζεται, διὰ τȣ̃ Κανονίȣ τῶν ἡμιτόνων, καὶ τῶν ἐφαπτομένων, ἐξ ὑπολογισμȣ̃ ἀποδιδόναι.

ΛΥΣΙΣ.

Α΄.

§. 860. Ἐὰν ὦσιν αἱ τρεῖς τȣ̃ ΑΒΓ τριγώνȣ γωνίαι διδόμεναι, ἐκποριθέντων ἀπὸ τȣ̃ Πίνακος, τῶν ἡμιτόνων τῶν γωνιῶν Α καὶ Γ, δοθήσεται ὁ λόγος τῆς πλευρᾶς ΒΓ, πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ. Καὶ γὰρ ΒΓ : ΑΒ = Ἡμ. Α : Ἡμ. Γ. (§. 855.). Ἐὰν δὲ καὶ τὸ ἡμίτονον τῆς Γωνίας Β ἐκ τȣ̃ Πίνακος ληφθῇ, ὁ λόγος τῆς ΑΒ, ἢ τῆς ΒΓ, πρὸς τὴν ΑΓ πλευρὰν, τὸν αὐτὸν τρόπον δοθήσεται. Σχ. 174.

Β΄.

§. 861. Ἐὰν δύο γωνίαι ὦσι διδόμεναι Α καὶ Γ, δοθήσεται καὶ ἡ τρίτη Β. Ἐὰν δὲ παρὰ ταῦτα,

καὶ

καὶ τις τῶν πλευρῶν ΑΒ διδομένη ᾖ, εὑρεθήσεται ἡ μὲν πλευρὰ ΒΓ, οὕτως· Ἡμ. Γ : Ἡμ. Α = ΑΒ : ΒΓ· ἡ δὲ πλευρὰ ΑΓ, οὕτως· Ἡμ. Γ : Ἡμ. Β = ΑΒ : ΑΓ.

Γ'.

§. 862. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, μόνη ἡ ὀρθὴ γωνία Β δεδομένη ᾖ, μετὰ τῶν αὐτὴν περιεχουσῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, εὑρεθήσεται ἡ γωνία Γ, οὕτως· ΒΓ : ΑΒ = Ἀκ : Ἐφ. Γ (§. 735.)· ἢ οὕτως· ΑΒ : ΒΓ = Ἀκ : Συνεφ. Γ, (§. 736.). Ταύτης δὲ τῆς γωνίας Γ εὑρεθείσης, δοθήσεται δὴ καὶ ἡ Α, ἣ τῆς Γ εἰς ὀρθὴν ἐστὶ παραπλήρωμα. Κἀντεῦθεν καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ προσευρεθήσεται, διὰ τῆς Β'. τῶν ἐπιλύσεων.

Δ'.

§. 863. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ λοξογωνίου τριγώνου, ἡ κατὰ τὸ Γ γωνία δοθῇ, μετὰ τῶν αὐτὴν περιεχουσῶν δύο πλευρῶν ΑΓ, ΒΓ, δοθήσεται ἅμα, καὶ τῶν λοιπῶν δύο γωνιῶν τὸ ἄθροισμα Α + Β, καὶ τούτου τὸ ἥμισυ· $\frac{1}{2}$Α + $\frac{1}{2}$Β. Καὶ ἐὰν ἄρα γένηται ΑΓ + ΒΓ : ΑΓ − ΒΓ = Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Β + $\frac{1}{2}$Α) : Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Β − $\frac{1}{2}$Α) (§. 856.), ἐξευρεθήσεται $\frac{1}{2}$Β − $\frac{1}{2}$Α, ἡ τῶν ζητουμένων γωνιῶν ἡμιδιαφορά· ὅθεν συνάγεται τὴν μὲν τούτων μείζονα Β εἶναι = ($\frac{1}{2}$Β + $\frac{1}{2}$Α) + ($\frac{1}{2}$Β − $\frac{1}{2}$Α), τὴν δὲ ἐλάσσονα Α = ($\frac{1}{2}$Β + $\frac{1}{2}$Α) − ($\frac{1}{2}$Β − $\frac{1}{2}$Α)· οὕτω δὲ τῶν γωνιῶν δοθεισῶν, καὶ ἡ λοιπὴ πλευρὰ ΑΒ, διὰ τῆς Β'. τῶν ἐπιλύσεων ἐξιχνευθήσεται.

Ε'.

§. 864. Ἐὰν αὖθις μία μόνη τῶν ἐν τῷ τριγώνῳ γωνιῶν ἡ Γ, δεδομένη ᾖ, μετὰ καὶ δύο πλευρῶν (ἀλλὰ μὴ τῶν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν περιεχουσῶν) ΑΒ, ΑΓ, ζητηθήσεται ἡ γωνία Β, οὕτως· ΑΒ : ΑΓ = Ἡμ. Γ : Ἡμ. Β. Δοθέντος γὰρ τοῦ Ἡμ. Β, δοθή-

δοθήσεται καὶ ἡ γωνία Β, εἰ μόνον μὴ ἀγνοοῖτο πότερον ὀξεῖα, ἢ ἀμβλεῖα αὐτη ἐςί· ταυτη δὲ τῆς Β ευρεθείσης, δοθήσεται καὶ ἡ Α. Κἀντεῦθεν αὖθις, καὶ αἱ λοιπαὶ τῶν πλευρῶν ληφθήσονται διὰ τῆς Β'. τῶν ἐπιλύσεων.

Ϛ'.

§. 865. Ἐὰν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, αἱ πλευραὶ ὦσι διδόμεναι, καταχθείσης τῆς ΑΔ καθέτου τῇ βάσει, δοθήσεται ἡ ΒΔ ταύτης ἡμίσεια. Ἔνθαπερ ἐπὶ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΔ, αἱ γωνίαι εὑρεθήσονται διὰ τῆς Ε. τῶν ἐπιλύσεων. Τούτων δ' ἡτισοῦν ληφθεῖσα, τὰς λοιπὰς ἐπὶ τοῦ ἰσοσκελοῦς εὐθὺς ἤλεγξεν. Σχ. 175.

Ζ'.

§. 866. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ σκαληνοῦ ΑΒΓ αἱ πλευραὶ πᾶσαι ὦσι διδόμεναι, κέντρῳ μὲν τῷ Α, τῷ κατὰ τὴν γωνίαν ἣν ἡ μεγίςη τῶν πλευρῶν ΒΓ ὑποτείνει, διαςήματι δὲ τῷ ΑΓ, τῆς ἐλαχίςης τῶν πλευρῶν, γεγράφθω κύκλου περιφέρεια, καὶ προσεκβληθείσης τῆς ΒΑ ἐπὶ τὸ Ε, ἔςαι ΒΕ = ΒΑ + ΑΓ, καὶ ΒΖ = ΒΑ − ΑΓ. Διὸ καὶ ἄμφω ΒΕ, καὶ ΒΖ δεδομέναι ἔσονται. Ἐπεὶ τοίνυν ΒΓ : ΒΕ = ΒΖ : ΒΔ (§. 339.), διὰ τῆσδε τῆς ἀναλογίας εὑρεθήσεται ἡ ΒΔ. Κἀντεῦθεν ΔΓ = ΒΓ − ΒΔ. Ἐπιζευχθείσης οὖν τῆς ΑΔ, ἐπὶ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΔΓ, ἅπασαι δοθήσονται αἱ πλευραί. Ἐντεῦθεν δὲ, καὶ αἱ γωνίαι, διὰ τῆς Ϛ'. ἐπιλύσεως. Τούτων μία ἡ Γ· τοιγαροῦν καὶ αἱ λοιπαὶ ἐν τῷ ΑΒΓ οὖσαι γωνίαι, διαφόροις τρόποις, ῥαδίως προσευρεθήσονται. Σχ. 176.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 867. Ἐν γένει πάσας τὰς τοῦ τριγώνου γωνίας προγιγνωσκομένας εἶναι δεῖ, πρὶν ἢ τούτων ἔχειν τὰς πλευρὰς ἀνιχνεύεσθαι. Ἐν δὲ ταῖς διὰ τῶν δοθεισῶν ἀναλογιῶν εὑρισκομέναις πλευραῖς, ἀμφιβολίας ἐκτὸς τὸ πρᾶγμα, κἂν αὗται διὰ τῶν ἡμιτόνων προσδιορίζοιντο καὶ τῶν ἐφαπτομένων, αἱ ταῖς ὀξείαις ἐπίσης καὶ ταῖς ἀμβλείαις τῶν γωνιῶν εἰσὶ προσανήκουσαι· ὃ γὰρ αἱ γωνίαι αὐταὶ τὸν ὑπολογισμὸν εἰσίασι· τέ, τε διὰ γωνιῶν διαφερουσῶν, τὸν αὐτὸν προσδιορίζεσθαι τρόπον, οὐδὲν τῷ τῶν ἡμιτόνων τε καὶ ἐφαπτομένων διορισμῷ προσλυμαίνεται.

§. 868. Δοθείσης ἀλλ' οὖν τῆς γωνίας, διὰ τοῦ κατ' αὐτὴν ἡμιτόνου, ἢ τῆς ἐφαπτομένης, ἀεὶ δήπου λειπόμενον ἐστὶ ζητεῖν, πότερόνποτε ἀμβλεῖα, ἢ ὀξεῖα ἡ τηλικαύτη γωνία καθέστηκεν; (§. 823. 833.). Ἀλλ' ἐπὶ μὲν τῆς Γ. ἐπιλύσεως, πρόχειρος ἡ ἀπάντησις, ἐπεὶ περὶ τῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἐνταῦθα λόγος γωνιῶν, αἱ ἀείποτε ὀξεῖαι εἰσίν. Ἐν δὲ τῇ Δ'. ἐπιλύσει, τῶν ζητουμένων γωνιῶν τῆς μείζονος Β, δυεῖν ὀρθῶν ἐλάττονος οὔσης, πολλῷ δὴ μᾶλλον ἡ Β − Α δυεῖν ὀρθῶν ἐλαττωθήσεται, κἀντεῦθεν καὶ ἡ ταύτης ἡμίσεια $\frac{1}{2}$Β − $\frac{1}{2}$Α, ὀρθῆς ἐλάσσων, τουτέστιν ὀξεῖα, ἔσται· ὥστε οὐδ' ἐν τούτοις ἀμφισβήτησις ὑπολείπεται.

Σχ. 174. §. 869. Ἐν δὲ τῇ Ε'. τῶν ἐπιλύσεων, καθ' ἣν ἡ γωνία διὰ τοῦ ἡμιτόνου αὐτῆς δίδοται, ἀμφισβητεῖν ἀεὶ λείπεται περὶ τῆς ὀξύτητος ἢ ἀμβλύτητος τῆς γωνίας, εἰμὴ διὰ τῶν ἐπὶ τοῦ τριγώνου γνωρίμων ὑποθέσεων τὰ τῆς ἀμφιβολίας ἐκ μέσου γίγνοιτο. Αἱ δ' ὑποθέσεις εἰσὶ, τὴν ΑΓ πλευρὰν, ἢ τὴν Β γωνίαν ὑποτείνει, μείζονα εἶναι τῆς ΑΒ τῆς προσκειμένης αὐτῇ· ἣν γὰρ τοῦτο ᾖ, ἡ γωνία, ἧς ἡ ζήτησις ὑποτίθεται Γ, ἀείποτε ὀξεῖα ἔσται. Τῆς γάρτοι κατὰ τὸ Β ἐξ ἀνάγκης ἐλάσσων οὔσα, οὔτ' ἄρ' ὀρθὴ, οὔτ' ἀμβλεῖα γένοιτο, τῆς Β ὀξείας καθεστώσης. Ὀρθῆς δὲ οὔσης τῆς Β, ἢ ἀμβλείας, καὶ τὴν Γ ὀξεῖαν εἶναι δεῖν, οὐδὲν ἧττον φανερόν. Ἀλλ' ἐὰν ἡ Γ ᾖ δεδομένη, ἤτε ΑΓ πλευρὰ μείζων τῆς ΑΒ, οὐδὲν κωλύσει τοῦ μὴ τὴν Β γωνίαν, ἤτοι ὀξεῖαν εἶναι,

εἶναι, ἢ ὀρθὴν, ἢ ἀμβλεῖαν. Κἀνταύτῃ ἄρα τῇ ὑποθέσει, εἰ μὴ ὀρθὴ ὄσα ἡ κατὰ τὸ Β εὑρεθεῖη γωνία, πότερον ἄρα α ὀξεῖα, ἢ ἀμβλεῖα ἐςί; μετέωρει μένομεν τὴν διάνοιαν ἐπέχοντες.

§. 870. Ἐν δὲ τῇ Ϛʹ. τέως καὶ τῇ Ζʹ. τῶν ἐπιλύσεων, αἱ Β καὶ Γ γωνίαι ἀεὶ ὀξεῖαι εἰσὶ, μόνης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ, ἅτε δὴ πασῶν μεγίςης, ὀρθῆς, ἢ ἀμβλείας εἶναι ἐνδεχομένης· ὡς γὰρ ἂν αἱ Β καὶ Γ ἐπιγνωσθῶσιν, ὐδὲν ἀπορεῖν περὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ λειφθήσεται.

§. 871. Ὅ,τι δ' ἀνήκει τῷ ὑπολογισμῷ, ὐδὲν ἐξ αὐτῦ δυχερὲς, τοῖς μὴ μείζονα, παρ' ἣν οἱ Πίνακες, ἤπερ ἔχυσιν ἐπιχορηγεῖν οἷοιτε εἰσὶ, τὴν ἀκρίβειαν ἀπαιτῦσι. Δυνατὸν δὲ καὶ ἐμπαραβύειν τὺς Πίνακας, καὶ ἡμίτονα, ἢ ἡμιτόνων λογαρίθμυς, γωνίαις ταῖς ἐπὶ ταῖς μοίραις καὶ τοῖς πρώτοις λεπτοῖς, καὶ δεύτερα περιεχύσαις ἀντιςοιχῦντας εὑρίσκειν, καὶ ἐκ τῶν Πινάκων ὐδέντι ἧττον, ὅσοι πρὸς λεπτὰ μόνον τὰ πρῶτα, ἤτοι ἕκαςα, ἢ ἀνὰ δύο, ἢ κατὰ τρία, ἢ πέντε, ἢ δέκα, καταγεγραμμένοι εἰσίν. Ὁ δὲ δὴ τρόπος, ᾗ τῦτο διαπεραίνεται, πρὸς τῷ τέλει ὑποτεθείσεται, ἔνθα περὶ τῆς τῶν Πινάκων πραγματευσόμεθα χρήσεως. Ἀμέλειτοι αἱ τῶν γωνιῶν, ἢ τῶν τόξων διαφοραὶ, εἰσὶν αἱ διαφοραὶ τῶν ἡμιτόνων αὐτῶν, τοσύτῳ ἀκριβέςερον, ὅσῳ αἱ διαφοραὶ ἐλάσσονες. Τὸ δ' αὐτὸ καὶ περὶ τῶν ἐφαπτομένων, καὶ δὴ καὶ περὶ τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν ἐφαπτομένων, ἀληθεύει ῥηθέν. Τοιγαρῦν ἐὰν ᾖ α μὲν ἐλάσσων γωνία, Α δὲ μείζων, διαφορὰ δὲ ἡ ἐν αὐταῖς βραχεῖά τις, καὶ ἡλίκη τινῶν μόνων λεπτῶν· ᾗ δὲ τύτων μεταξὺ γωνία ἡ a, γινέσθω, $(A - \alpha) : (a - \alpha) = ($Ἡμ. $A -$ Ἡμ. $\alpha) :$ Ἡμ. $a -$ Ἡμ. $\alpha)$. Καὶ δοθήσεται διὰ ταύτης τῆς ἀναλογίας τὸ Ἡμ. a, ἐὰν ᾖ διδομένη a· ἤτε γωνία a, διδομένυ τῦ Ἡμ. a. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον χωρεῖν ἐξέςαι, καὶ τοῖς λοιποῖς παραπλησίοις ἐμπαραβύσμασιν.

§. 872. Ἀλλὰ γὰρ ἐπὶ τȣ̃, ἐν τέλει τȣ̃ πονηματίȣ, προςεθέντος ἡμῖν κατ᾽ ἐπιτομὴν Πίνακος, ȣ̓ πολλή τις ἡ ἐκ τῆς χρήσεως τῆς ῥηθείσης μεθόδȣ συντέλεια. Συντελεῖ μὲν γάρ τι καὶ ἐπὶ αὐτȣ̃, ȣ̓δὲν δὲ τοσȣ̃τον, ὅσον ἐν τῷ τοῖς πληρεςέροις ἐντυγχάνειν πίναξιν· ȣ̓ γὰρ οἱ τῶν λεπτῶν ἀριθμοὶ, οἱ τοῖς τὰ ἡμίτονα, ἢ τὰς ἐφαπτομένας παριςάνȣσιν ἀριθμοῖς ἀντιπαρακείμενοι, ȣ̓δ᾽ αὐτῶν οἱ λογάριθμοι, πάντη ἀκριβεῖς εἰσὶν, ȣ̓δὲ τὰς τῶν γωνιῶν, ἢ τῶν τόξων διαφορὰς, τῶν τοῖς ἡμιτόνοις ἐκείνοις, ἢ ταῖς ἐφαπτομέναις ἀντιςοιχȣ́ντων, ἐπὶ λεπτȣ̃ προβαλλόμενοι· τῶν δὲ δὴ Πινάκων τῶν ἐπ᾽ ἀκριβείᾳ ἐν τοῖς μάλιςα διαφερόντων εὐχρηςότατοι εἰσὶν, ȣ̔̃ς ἐν Ἀγγλίᾳ ἐκδιδομένȣς ἴσμεν, ἐπιγραφὴν φέροντας.

Sherwin's Mathematical Tables.

§. 873. Ἐν δὲ τῷ κατ᾽ Ἐπιτομὴν ἐκκειμένῳ ἐκείνῳ Πίνακι, ȣ̓δ᾽ αἱ τῶν 45 μοίρας ὑπερβαινόντων τόξων ἐφαπτόμεναι προσετέθησαν, μόναι δὲ αἱ συνεφαπτόμεναι αὐτῶν· αἱ δὲ ἀνάπαλιν συνεφαπτόμεναι, ἐπὶ τῶν 45 μοιρῶν ἐλαττȣμένων ȣ̓ κεῖνται· τῆς γάρτοι χρείας ἀπαιτȣ́σης, καθάπερ ἐκ τȣ̃ λογαρίθμȣ τῆς ἐφαπτομένης τὸν τῆς συνεφαπτομένης λογάριθμον, ȣ̔́τως ἀνάπαλιν ἐκ τȣ̃ τῆς συνεφαπτομένης τὸν τῆς ἐφαπτομένης πορίσασθαι ῥᾴδιον. Ἐπειδὴ γὰρ (ἡλίκον δ᾽ ἂν ᾖ τὸ ὑπὸ Α δηλȣ́μενον τόξον) Ἐφ. Α : Ἀκ. = Ἀκ : Συνεφ. Α (§. 849.) ἔςαι καὶ ἐν γένει, λογ. Ἐφ. Α − λογ. Ἀκ = λογ. Ἀκ − λογ. Συνεφ. Α. (§. 239.) κἀντεῦθεν λογ. Ἐφ. Α = 2 λογ. Ἀκ − λογ. Συνεφ. Α. καὶ λογ. Συνεφ. Α = 2 λογ. Ἀκ − λογ. Ἐφ. Α. Ἰςέον δὲ ὡς ἐπὶ τȣ̃

τȣ̃-

τοιᾶδε πίνακος τίθεται ὁ λογ. Ἀκ. = 3, 00000, διὸ 2 λογ. Ἀκ = 6, 00000. Καὶ ἀπὸ τᾶδε ἄρα τᾶ ἀριθμᾶ τὸν λογάριθμον τῆς συνεφαπτομένης παντὸς τόξα ἀφαιρετέον, ἐπειδὰν ὁ τῆς ἐφαπτομένης ζητῆται τᾶ αὐτᾶ τόξα λογάριθμος· ἢ τὸν τῆς ἐφαπτομένης ἀνάπαλιν, ζητᾶμένα τᾶ τῆς συνεφαπτομένης· τὰ πολλὰ δὲ τὰς ἐφαπτομένας ἢ συνεφαπτομένας, ἃς ὁ Πίναξ ἃ περιέχει, ἐκκλίνειν οἷόντε, ἀντὶ τᾶ λόγα τῶν ἐφαπτομένων, τᾶ τῶν συνεφαπτομένων ἀνάπαλιν λαμβανομένα, ἢ καὶ ἐκείνα, ἀντὶ τάτα (§. 849.). Ἀλλὰ γὰρ διὰ τῶν ὑποσυναπτομένων ἐφεξῆς παραδειγμάτων, ὅσατε λοιπὰ, καὶ τὰ δὴ εἰρημένα ταῦτα διαλευκανθήσεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Α.

§. 874. Ἔϛω (§. 860.) γωνία Α = 61°, 15′· Σχ. 174. καὶ γωνία Β = 94°, 20′, ἧς ἀναπλήρωμα 85°, 40′· ἐξ ὧν ἡ Γ = 24°, 25′· καὶ ἔϛαι δὴ ἐκ τᾶ κατ' ἐπιτομὴν Πίνακος, ἐγγύϛα Ἡμ. Α = 877, καὶ Ἡμ. Β = 997, καὶ Ἡμ. Γ = 413. Οὐκᾶν ΑΒ : ΑΓ = Ἡμ. Γ : Ἡμ. Β = 413 : 997. Καὶ ΑΒ : ΒΓ = Ἡμ. Γ : Ἡμ. Α = 413 : 877. Καὶ ΑΓ : ΒΓ = Ἡμ. Β : Ἡμ. Α = 997 : 877.

Ἐκ δὲ τᾶ πληρεϛέρα τῶν ἡμιόνων Κανονίᾳ, ἐπειδὴ Ἡμ. Α = 8767268. Καὶ Ἡμ. Β = 9971413. Καὶ Ἡμ. Γ = 4133693, διὰ τῶνδε τῶν ἀριθμῶν, οἱ λόγοι τῶν εἰρημένων πλευρῶν ἀκριβέϛερον παρίϛανται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Β.

§. 875. Ἔϛωσαν (§. 861.) γωνίαι, ὡς αἱ πρόσθεν ληφθεῖσαι Α = 61°, 15′, Β = 94°, 20′· κἀντεῦθεν καὶ Γ = 24°, 25′. Ἡ δὲ πλευρὰ ΒΓ ἔϛω = 587, 036· εὑρεθήσεται ἂν ἐκ τᾶ ἐπιτετμημένα Πίνακος ἡ πλευρὰ ΑΒ τόνδε τὸν τρόπον.

λογ.

λογ. Ἡμ. Α = 2, 94300
λογ. Ἡμ. Γ = 2, 61595 } Πρόσθ. } Ἀφαίρ.
λογ. ΒΓ = 2, 76864

5, 38459

λογ. ΑΒ = 2, 44159

Ἔστιν ἄρα ἡ ΑΒ πλευρὰ = 276, + .

Ἡ δὲ πλευρὰ ΑΓ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐξιχνευθήσεται, ἐν ὑπολογισμῷ τοιῷδε.

λογ. Ἡμ. Α = 2, 94300
λογ. Ἡμ. Β = 2, 99869 } Πρόσθ. } Ἀφαίρ.
λογ. ΒΓ = 2, 76864

5, 76733

λογ. ΑΓ = 2, 82433

Ἔστιν ἄρα ἡ πλευρὰ ΑΓ = 667, + .

Ἐκ δὲ τοῦ πληρεστέρου Πίνακος εὑρεθήσεται ὁ μετρὸν ἀκριβέστερον.

λογ. Ἡμ. Α = 9, 9428643
λογ. Ἡμ. Γ = 9, 6163382 } }
λογ. ΒΓ = 2, 7686647

12, 3850029

λογ. ΑΒ = 2, 4421386

Ἔσται ἄρα ἡ πλευρὰ ΑΒ = 276, 783.

Ἐκ τῶν αὐτῶν τούτων δοθέντων, τῇ τῶν ἀκριβεστέρων λογαρίθμων χρήσει, καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ εὑρεθήσεται, ἐν ὑπολογισμῷ τοιῷδε.

λογ. Ἡμ. Α = 9, 9428643
λογ. Ἡμ. Β = 9, 9987567
λογ. ΒΓ = 2, 7686647

12, 7674214

λογ. ΑΓ = 2, 8245571

ὅθεν ἡ πλευρὰ ΑΓ = 667, 663.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Γ.

§. 876. Ἐὰν (§. 862.) ἡ Β γωνία ὀρθὴ ᾖ, καὶ ΒΓ = 327, καὶ ΒΑ = 241, διὰ τοῦ παρ' ἡμῖν ἐπιτόμου Πίνακος τῶν ἐφαπτομένων, εὑρεθήσεται ἡ Γ γωνία, τῷδε τῷ τρόπῳ.

λογ. ΒΓ = 2, 51455
λογ. ΑΒ = 2, 38202
λογ. Ἀκ = 3, 00000

5, 38202

λογ. Ἐφ. Γ = 2, 86747

Καὶ ἔστιν ἄρα ἡ γωνία Γ = 36°, 24'. Ἑπομένως δὲ ἡ Α = 53°, 36'. Τῶν δὲ τοῦ τριγώνου γωνιῶν οὕτω δεδομένων εὑρεθήσεται καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ. (§. 862.).

Ἐκ δὲ δὴ τῶν πληρεστέρων Κανονίων·

λογ. ΒΓ = 2, 5145478
λογ. ΑΒ = 2, 3820170
λογ. Ἀκ = 10, 0000000

12, 3820170

λογ. Ἐφ. Γ = 9, 8674692

ὅπερ ἀντιστοιχεῖ γωνίᾳ μικρῷ μείζων ἢ 36°, 23'.

ΠΑΡΑ-

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Δ.

§. 877. Ἔϛω (§. 863.) γωνία $B = 94°, 20'$, αἱ δὲ περιέχουσαι τὴν γωνίαν πλευραὶ, ἡ μὲν $AB = 276, 783$· ἡ δὲ $B\Gamma = 587, 036$. Καὶ ἔϛαι τὸ τῶν γωνιῶν ἄθροισμα $A + \Gamma = 180° - B = 85°, 40'$. Ἔνθεν τοι $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\Gamma = 42°, 50'$, καὶ $B\Gamma + AB = 863, 819$. Καὶ $B\Gamma - AB = 310, 253$. Ὅθεν αἱ λοιπαὶ γωνίαι διὰ τοῦ ἐπιτετμημένου Πίνακος εὑρεθήσονται οὕτω.

$$\begin{array}{ll}
\text{λογ. } 864 & = 2,\ 93651 \\
\text{λογ. } 310 & = 2,\ 49136 \\
\text{λογ. Ἐφ. } (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\Gamma) & = 2,\ 96708 \\
\hline
 & \quad 5,\ 45844 \\
\hline
\text{λογ. Ἐφ. } (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\Gamma) & = 2,\ 52193.
\end{array}$$

Ἔϛιν ἄρα ἡ γωνία ἡ τῇ εὑρεθείσῃ ἐφαπτομένῃ $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\Gamma$ ἀνήκουσα $= 18°, 25'$· ἣν δὲ $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\Gamma = 42°, 50'$. Ἄρα $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\Gamma) + (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\Gamma) = A = 61°, 15'$. Καὶ $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\Gamma) - (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\Gamma) = \Gamma = 24°, 25'$.

Ἐκ δὲ τοῦ διεξοδικωτέρου Πίνακος,

$$\begin{array}{ll}
\text{Ἔϛι λογ. } B\Gamma + AB & = 2,\ 9364227 \\
\text{λογ. } B\Gamma - AB & = 2,\ 4917160 \\
\text{λογ. Ἐφ. } (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\Gamma) & = 9,\ 9671225 \\
\hline
 & \quad 12,\ 4588385 \\
\hline
\text{λογ. Ἐφ. } (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\Gamma) & = 9,\ 5224158
\end{array}$$

Ἔϛιν ἄρα $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\Gamma$, βραχύτι ἐλάσσων ἢ $18°, 25'$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ε.

§. 878. Δεδόσθωσαν (§. 864.) αἱ πλευραὶ ΒΓ = 587, 036, καὶ ΑΒ = 276, 783, καὶ δὴ καὶ ἡ γωνία Α = 61°, 15′, καὶ ζητείσθω ἡ γωνία Γ.

Ἔσται δὲ λογ. ΒΓ = 2, 7686647
λογ. ΑΒ = 2, 4421386
λογ. Ἡμ. Α = 9, 9428643

12, 3850029

λογ. Ἡμ. Γ = 9, 6163382

ὥπερ ἀντιστοιχεῖ γωνία ὀξεῖα 24°, 25′· οὐ γὰρ ἡ ἀμβλεῖα 155°, 35′, ᾗ τὸ αὐτὸ εὑρεθὲν ἡμίτονον προσανήκει, ἐνταῦθα χώραν ἔχει, τὸ γὰρ ἐκ ταύτης, καὶ τῆς δοθείσης Α, τῶν γωνιῶν ἄθροισμα, δυεῖν ὀρθῶν μεῖζον ἐστίν.

§. 879. Ἐὰν δὲ τῶν αὐτῶν δεδομένων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ, γωνίας δὲ τῆς Γ = 24°, 25′, ζητῆται ἡ γωνία Α,

Ἔστι λογ. ΑΒ = 2, 4421386
λογ. ΒΓ = 2, 7686647
λογ. Ἡμ. Γ = 9, 6163382

12, 3850029

λογ. Ἡμ. Α = 9, 9428643

Ἐπεὶ δὲ τῷ λογαρίθμῳ τῷδε ἀντιστοιχοῦσι γωνίαι, ἡ μὲν 61°, 15′, ἡ δὲ 118°, 45′, ὧν ἑκατέρα τῇ γωνίᾳ Γ = 24°, 25′ προστεθεῖσα, ἄθροισμα παρέχεται δυεῖν ὀρθῶν ἔλαττον, ἐπίσης ἄμφω καὶ πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ ζητήματος συντελοῦσι· δεῖ μέντοι, ποτέρα ἐπὶ τῆς κειμένης ὑποθέσεως χώραν ἔχει, ἀλλαχόθεν προσδιορίσασθαι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ϛ'.

Σχ. 175. §. 880. Ἔϛω (§. 865.) ἐπὶ τȣ̃ ἰσοσκελȣ̃ς τριγώνȣ ΑΒΓ, πλȣρὰ ΑΓ = 837, καὶ ΒΓ = 1426· κἀντεῦθεν ΔΓ = $\frac{1}{2}$ΒΓ = 713. Ἔϛαι δὲ ΑΓ : ΔΓ = Ἀκ : Ἡμ. ΔΑΓ. Εὑρεθήσεται δὲ διὰ τȣ̃ ἐν ἐπιτομῇ Πίνακος,

$$\left.\begin{array}{l} \lambda o\gamma.\ A\Gamma = 2,\ 92272 \\ \left.\begin{array}{l}\lambda o\gamma.\ \Delta\Gamma = 2,\ 853091 \\ \lambda o\gamma.\ \text{Ἀκ} = 3,\ 00000\end{array}\right\} \\ \hline \qquad 5,\ 85309 \end{array}\right\}$$

λογ. Ἡμ. ΔΑΓ = 2, 93037

Ἔϛιν ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία = 58°, 26'· κἀντεῦθεν Γ = Ο − ΔΑΓ = 31°, 34'.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ζ.

Σχ. 176. §. 881. Ἔϛω (§. 866.) ἐπὶ τȣ̃ σκαλιʹȣ̃ τριγώνȣ ΑΒΓ, πλȣρὰ μεγίϛη ἡ ΒΓ = 973· ἡ δὲ ΑΒ = 721· ἡ δὲ ΑΓ = 380· καὶ ἔϛαι ΒΖ = ΑΒ − ΑΓ = 341· ΒΕ = ΑΒ + ΑΓ = 1101. Ἔνθαντοι 973 : 1101 = 341 : ΒΔ. Καὶ ΒΔ = $\frac{1101 \times 341}{973}$ = 385, 8· ὃ καὶ διὰ τῶν λογαρίθμων παραπλησίως ἂν εὑρεθείη. Ἐκ τȣ́των ȣ̃ν εὑρίσκεται ΔΓ = ΒΓ − ΒΔ = 587, 2· καὶ $\frac{1}{2}$ΔΓ = 293, 6· ἣ δὴ, τῆς βάσεως ȣ̃σα ἡμίσεια, μετὰ τȣ̃ σκέλȣς ΑΓ, τὸ ἥμισυ τῆς ὑπὸ ΔΑΓ γωνίας παρέξεται. Κἀντεῦθεν ȣ̃ν καὶ τὸ ταύτης παραπλήρωμα Γ, δῆλον ἔϛαι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Η.

§. 882. Ἐὰν (§. 871.) τό, τε ἡμίτονον εὑρεῖν δέῃ, καὶ τὸν τȣ̃ ἡμιτόνȣ λογάριθμον τȣ̃ κατὰ τόξον, ἢ γωνίαν 33°, 57', 19", ληφθήσεται ἐκ τȣ̃ Κανο-

Κανονίȣ τὸ ἡμίτονον τὸ προσῆκον τῇ γωνίᾳ 33°, 57′, τόδε 5584692. καὶ τȣ́τȣ ἡ διαφορὰ ἡ ἀπὸ τȣ̃ ἡμιτόνȣ τῆς ἐγγὺς μείζονος γωνίας 33°, 58′, ἥτις διαφορὰ ἐςὶ 2413. Ἐπειδὴ δὲ ἡ τῶνδε τῶν τόξων ἢ γωνιῶν διαφορὰ, οἷς τὰ τοιάδε προσανήκει ἡμίτονα, ἐν αἰ κεῖται λεπτῷ, τῷ εἰς δεύτερα ἀναλυομένῳ 60· ἡ δὲ τῆς δοθείσης γωνίας διαφορὰ, ἀπὸ τῆς τῶν ἐν τῷ Πίνακι ἐλάσσονος γωνίας, 33°, 57′, ἐςὶ 19″, ἔςαι,

$$60'' : 19'' = 2413 : \pi.$$

τὸ δὲ π, ἡ ζητȣμένη ἔςαι τῶν ἡμιτόνων διαφορὰ, ἥτις τῷ ἡμιτόνῳ 5584692 προςεθεῖσα, δώσει 5585456, εἰς ἡμίτονον τῆς γωνίας 33°, 58′, 19″.

Ἐὰν δὲ ζητῆται ὁ τȣ̃ ἡμιτόνȣ τῆς αὐτῆς γωνίας λογάριθμος, ληφθήτω ἐκ τȣ̃ Κανονίȣ λογ. Ἡμ. 33°, 57′ = 9, 7469992, καὶ τȣ̃δε τȣ̃ λογαρίθμȣ, ἡ ἀπὸ τȣ̃ ἐγγὺς ἐχομένως διαφορὰ 1876· καὶ γενέσθω δὴ κἀνταῦθα·

$$60^{\circ} : 19'' = 1876 : \pi.$$

Ἔςαι δὲ $\pi = 594$ ἡ ζητȣμένη τῶν λογαρίθμων διαφορὰ, ἥτις τῷ λογαρίθμῳ τȣ̃ ἡμιτόνȣ τῆς γωνίας 33°, 57′ προςεθεῖσα, δίδωσι λογ. Ἡμ. 33°, 57′, 19″· τόνδε 9, 7470586.

§. 883. Ἐπὶ τȣ̃ Γ′. Παραδειγ. (§. 876.), εὑρηται λογ. ἘΦ. Γ = 9, 8674692, καὶ τῷδε ἀντιςοιχȣ̃σα γωνία Γ = 36°, 23′ +. Ἐὰν ȣ̃ν καὶ τὰ δεύτεράτις λαβεῖν ἐθέλῃ, λήψεται ἐκ τȣ̃ Πίνακος λογ. ἘΦ. 36°, 23′, τὸν τȣ̃ εὑρεθέντος ἐγγὺς ἐλάσσονα, ὅς ἐςὶ 9, 8673583· τȣ́τȣ δὲ ἡ διαφορὰ ἀπὸ τȣ̃ ἐν τῷ Πίνακι ἐγγὺς ἑπομένȣ, ἐςὶ 2645. Ἡ δὲ τȣ̃ αὐτȣ̃ διαφορὰ ἀπὸ τȣ̃ λογαρίθμȣ τȣ̃ εὑρεθέντος 1109. Ἔνθεντοι,

$$2645 : 1109 = 60'' : \pi.$$

Ἔστι δὲ π = 25″ ἡ ζητουμένη τῶν γωνιῶν διαφορά, ἥτις ἄρα ᾗ δέον προστεθεῖσα, δίδωσι Γ = 36°, 23′, 25″.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Θ.

Σχ. 174. §. 884. Ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ Παραδείγ. Γ′. πρὸς γωνίαν ὀρθὴν τὴν Β, διὰ τοῦ κατ' ἐπιτομὴν Πίνακος, εὕρηται γωνία ἡ Γ μοιρῶν 45 ἐλάσσων. Ζητουμένης δὲ τῆς Α, ὁ ὑπολογισμὸς ἂν εἴη τοιόσδε.

λογ. ΑΒ = 2, 38202
λογ. ΒΓ = 2, 51455
λογ. Ἀκ = 3, 00000

5, 51455

λογ. ἘΦ. Α = 3, 13253

ὅγεμὴν λογάριθμος οὗτος, ἐν τῷ κατ' ἐπιτομὴν ἐκείνῳ Πίνακι μὴ παρών, τὴν γωνίαν ἀμέσως οὐ χορηγεῖ· τοιγαροῦν ὑφαιρείσθω ἀπὸ 6, 00000, καὶ ὑπολειφθήσεται λογ. ΣυνεΦ. Α = 2, 86747. ὥπερ ἀντιστοιχεῖ = 53°, 36′.

§. 885. Ἔστω ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου γωνία Γ = 24°, 25′. Ἔσται δὲ Α + Β = 180° − Γ = 155°, 35′. Ἔνθεν τοι ½ Α + ½ Β = 77°, 48′. Ἔστω οὖν ΑΓ = 2430, καὶ ΒΓ = 758· ἔσται δὲ ΑΓ + ΒΓ = 3188· καὶ ΑΓ − ΒΓ = 1672. Εἰ τοίνυν ἐκ τούτων δεήσει τὰς λοιπὰς γωνίας τοῦ τριγώνου προσευρεῖν, τοῦ λογαρίθμου χρεία τῆς ἐφαπτομένης, πρὸς γωνίαν 77°, 48′, ἡλίκος οὐκ ἔνεστιν ἐν τῷ ἐπιτετμημένῳ Πίνακι. Καὶ ληπτέον ἄρα τὸν λογάριθμον τῆς κατὰ τὴν γωνίαν 77°, 48′, συνεφαπτομένης, ὅς ἐστιν, 2, 33445· καὶ ἀφαιρετέον τοῦτον ἀπὸ 6, 00000, λοιπὸς γὰρ ἔσται λογ. ἘΦ. 77°, 48′ = 3, 66555. δι' οὗ ὁ ὑπολογισμὸς ἔσται,

λογ.

λογ. (ΑΓ + ΒΓ) = 3, 50352
λογ (ΑΓ − ΒΓ) = 3, 22324
λογ. Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Β + $\frac{1}{2}$Α) = 3, 66555

6, 88879

λογ. Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Β − $\frac{1}{2}$Α) = 3, 38527

Ἀλλ' οὐδέν τι μᾶλλον οὐδ' ὁ λογάριθμος οὗτος ἔνεςιν ἐν τῷ Πίνακι. Ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ 6, 00000, καταλείψει λογ. Συνεφ. ($\frac{1}{2}$Β − $\frac{1}{2}$Α) = 2, 61473, ὅπερ ἀντιςοιχεῖ $\frac{1}{2}$Β − $\frac{1}{2}$Α = 67°, 30′. Ἡ δὲ τῇ $\frac{1}{2}$Β + $\frac{1}{2}$Α = 77°, 48′ προςεθεῖσα, δίδωσι Β = 145°, 24′· ταύτης δ' ἀφαιρεθεῖσα, ὑπολείπει Α = 10°, 12′.

§. 886. Ἐπειδὴ δὲ ὁ τῶν ἐφαπτομένων λόγος, τῷ τῶν συνεφαπτομένων ἀντιπέπονθεν, ὁ αὐτὸς ὑπολογισμὸς μικρὸν ἂν ἔχοι βραχυλογηθῆναι.

λογ. (ΑΓ − ΒΓ) = 3, 22324
λογ. (ΑΓ + ΒΓ) = 3, 50352
λογ. Συνεφ. ($\frac{1}{2}$Β + $\frac{1}{2}$Α) = 2, 33445

5, 83797

λογ. Συνεφ. ($\frac{1}{2}$Β − $\frac{1}{2}$Α) = 2, 61473

Ἔςι δ' ὁ αὐτὸς τῷ μικρὸν ἀνωτέρω εὑρεθέντι, δίδωσί τε γωνίαν τὴν αὐτήν.

ΤΜΗΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ
ΣΦΑΙΡΙΚΗ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 887.

Σχ. 177. Ἐὰν τριῶν, ἢ πλειόνων γωνιῶν, ἐν διαφόροις ἐπιπέδοις κειμένων, συμπίπτωσιν αἱ κορυφαὶ, καὶ δύο τῶν πλευρῶν ἑκάσαι, τὸ περιεχόμενον διάςημα Γωνία Στερεὰ καλεῖται, ἧς πλευραὶ μὲν αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ αὐτὴν περιέχουσαι, γωνίαι δὲ αἱ τῶν ἐπιπέδων κλίσεις, ἐν οἷς γεγράφαται αἱ γωνίαι, πρὸς τὰ συνεχόμενα. Οἷον τῆς ςερεᾶς γωνίας ΑΒΓΔ, πλευραὶ μὲν ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΔΓΒ· τῶν δὲ γωνιῶν ἡ μὲν πρώτη Β, ἐςὶν ἡ τοῦ ἐπιπέδου ΑΓΒ ἐπὶ τὸ ΔΓΒ, κλίσις· ἡ δὲ δευτέρα Δ, ἡ τοῦ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΔΓΒ· ἡ δὲ τρίτη Α, ἡ τοῦ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΑΓΒ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 888. Ὁ τῶν πλευρῶν ἀριθμὸς ἐπὶ τῆς ςερεᾶς γωνίας, καὶ ὑπὲρ τὴν τριάδα πηλικοσοῦν γένοιτο ἄν. Αἱ δ' οὖν πλευραὶ ὅπως δὴ καὶ περάτων τυγχάνουσιν ἔχουσαι· μᾶλλον, δὲ εἴπερ ὅλως περατούμεναι εἰσὶν, ὡς αἱ ἐπὶ τοῦ σχήματος ΑΒ, ΑΔ, ΒΔ, διαφέρει οὐδέν. Περατουμένων δὲ κύκλων τόξοις τῶν τῇ αὐτῇ μὲν ἡμιδιαμέτρῳ, κέντρῳ δὲ τῷ Γ καταγραφομένων, αὐτὰ τὰ τόξα τῶν πλευρῶν τὰ μέτρα ἐςὶ, τὰ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας πίπτοντα, τῆς περὶ κέντρον τὸ Γ σχηματογραφουμένης σφαίρας, καὶ τῶν περιφερειῶν μέρη τῶν κατ' αὐτὴν τριῶν μεγίςων κύκλων γινόμενα. Ἐπεὶ δὲ ἐν γένει γωνία πᾶσα,

οἷον

οἷον ἡ Β, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δυεῖν εὐθειῶν περιεχομένῃ, ὧν ἡ μὲν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΓΒ, ἡ δὲ ἐν τῷ ΒΓΔ, ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΒ, πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ ἐφεστήκασι κάθετοι (§. 512.), δυνατὸν αὐτὸ τὸ Β, τὸ σημεῖον εἶναι, καὶ τότε δὴ ἡ μὲν εὐθεῖα, ἡ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ τομέως ΑΓΒ, ἐπὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου ΓΒ κάθετος, τοῦ ΑΒ τόξου πρὸς τῷ Β ἐφάψεται. Ἡ δὲ εὐθεῖα, ἡ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΔΓΒ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς ΓΒ κάθετος, ἐφάψεται τοῦ τόξου ΔΒ, πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ τῷ Β (§. 372.). Τοιγαροῦν καθόλου, ἡ τῆς στερεᾶς γωνίας γωνία, γωνία τῇ ὑπὸ τῶν οὕτως ἐφαπτομένων συνισταμένῃ, ἴση ἐστίν.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

§. 889. Τρίγωνον Σφαιρικὸν ΑΒΔ, ἐστὶ μέρος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, τὸ τρισὶ τῶν ἐπὶ τῆς σφαίρας μεγίστων κύκλων ἐκπερατούμενον τόξοις ΑΒ, ΒΔ, ΔΑ. Πλευραὶ δὲ ταύτης, αὐτὰ τὰ τόξα ΑΒ, ΒΔ, ΔΑ. Γωνίαι δὲ, αἱ πρὸς αὐτοῖς τοῖς σημείοις Α, Β, Δ, ὑπὸ τῶν εὐθειῶν περιεχόμεναι τῶν ἐφαπτομένων τῶν τόξων.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 890. Ἐὰν ἀπὸ τῶν κορυφῶν Α, Β, Δ, τῶν τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου γωνιῶν, ἐπὶ τὸ τῆς σφαίρας κέντρον Γ εὐθεῖαι καταχθῶσιν ΑΓ, ΒΓ, ΔΓ, γωνία στερεὰ προκύψει ΑΒΓΔ τρίπλευρος, ἧς αἱ μὲν γωνίαι αἱ αὐταὶ εἰσὶ ταῖς τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου γωνίαις Α, Β, Γ, αἱ δὲ πλευραὶ, αἱ γωνίαι εἰσὶ τῶν τομέων ΑΓΒ, ΒΓΔ, ΔΓΑ, αἱ ὑπὸ τῶν τόξων ΑΒ, ΒΔ, ΔΑ καταμετρούμεναι· ταύτητοι ἐὰν αἵ τε πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου, διά τε τῶν μοιρῶν, καὶ τῶν ἐν αὐταῖς λεπτῶν ἐκφέρωνται, οἱ αὐτοὶ ἀριθμοὶ κἀπὶ τὰς πλευρὰς, καὶ τὰς γωνίας τοῦ στερεοῦ, ἐπίσης ἀνάγεσθαι ἔξεστιν· οὐδέτις ἔσται, τῶν δὲ μόνων τῶν μέτρων θεωρουμένων, μεταξὺ τȣ͂ ςερεȣ͂ τριπλεύρȣ τριγώνȣ, καὶ τȣ͂ τριγώνȣ τȣ͂ σφαιρικȣ͂, ὅλως διαφορά. Εὐληπτοτέρα δὲ χεδὸν ἡ τῆς τȣ͂ ςερεȣ͂ τριπλεύρȣ γωνίας διάσκεψις, ἢ ἡ τȣ͂ τριγώνȣ τȣ͂ σφαιρικȣ͂· ȣ δὴ χάριν τὰ περὶ τῶν σφαιρικῶν αἰρησόμενα τριγώνων, ἐκ τῶν ςερεῶν τὰ πολλὰ γωνιῶν μεταλαμβάνειν ἔςαι εὐπετέςερον.

§. 891. Πῶς δὲ κατὰ γένος, τῆς τε τȣ͂ ςερεȣ͂ τριπλεύρȣ γωνίας, καὶ τῆς τȣ͂ σφαιρικȣ͂ τριγώνȣ, κατασκευὴν, ȣ῞τως οἷόντε ἐννοεῖν. Τομεὺς κύκλȣ ὁποιοσȣ͂ν ὁ ΔΓΒ ἀντὶ βάσεως ὑποτίθεται. Ἀπὸ δὲ τȣ͂ κέντρȣ Γ, εὐθεῖατις ἡ ΓΑ, ἐν μετεώρῳ ὁπωσȣ͂ν ἄγεται, ȣ῞τω δηλαδὴ, ὡς ἐκτὸς τȣ͂ κατὰ τὸν τομέα ΔΓΒ ἐπιπέδȣ γίνεσθαι ἀγομένην· εἶτα κέντρῳ δὴ τῷ Γ, ἐπὶ τȣ͂ ἐπιπέδȣ ΑΓΔ, τόξον καταγράφεται τὸ ΑΔ, τὸν ΑΓΔ τομέα διαπερατȣ͂ν· τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον κἀπὶ τȣ͂ ἐπιπέδȣ ΑΓΒ, ὁ τομεὺς ΑΓΒ διαπερατȣ͂ται. Ὁ δέτοι τομεὺς ΒΓΔ ὁ ἀντὶ βάσεως λαμβανόμενος, ἤτοι μείζων ἂν εἴη ἡμικυκλίȣ, ἢ ἐλάσσων.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 892. Ἐπὶ παντὸς σφαιρικȣ͂ τριγώνȣ, ἐὰν ἡ πλευρὰ τῆς τȣ͂ κύκλȣ ἡμιπεριφερείας ἐλάσσων ᾖ, καὶ ἡ ἀπεναντίον αὐτῇ γωνία δυεῖν ὀρθῶν ἐλάσσων ἔςαι. Μείζων δ᾽ ἂν εἴη, ὑπὲρ τὴν ἡμιπεριφέρειαν τῆς πλευρᾶς μεγεθυνομένης.

ΔΕΙΞΙΣ.

Σχ. 178. Ἔςω τȣ͂ περὶ τὸ Γ γεγραμμένȣ κύκλȣ ΑΒΔ, διάμετρος ἡ ΑΒ· κατηγμένης δὲ τῆς ΕΓ, τῆς ἐπὶ τȣ͂ κατὰ τὸν κύκλον ἐπιπέδȣ, ἤτοι πρὸς κάθετον ἱσαμένης, ἢ πλαγίως, κείσθω διὰ ΑΒ, καὶ ΕΓ ἡμικύκλιον, ἐν τῇ αὐτῇ διαμέτρῳ τὸ ΑΕΒ. Καὶ τοίνυν ἀντὶ βάσεως ληφθέντος τȣ͂ τομέως ΑΓΔ, ἐλασἐλάσσονος ἢ κατὰ τὸ ἡμικύκλιον ΑΔΒ, καὶ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΕΔ πληρωθέντος, δῆλον ὅτι ἡ ὑπὸ ΑΕΔ γωνία, ἡ ἀπεναντίον τῇ πλευρᾷ ΑΔ, δυεῖν ὀρθῶν ἐλάσσων ἔσται· ὅτι ΑΕΔ + ΔΕΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' ἐὰν τομεὺς ἡμικυκλίου μείζων ληφθῇ ἀντὶ βάσεως, ὁ ΑΒΔΓ, οὗ, τῶν λοιπῶν κατὰ χώραν μενόντων, ἀντὶ τῆς πλευρᾶς ΑΔ, πλευρὰ καθίσταται ἡ ΑΒΔ, τῆς ἡμιπεριφερείας μείζων, γωνία γίνεται ἀπεναντίον τῆσδε τῆς πλευρᾶς, ἡ ἐξωτέρα ΑΕΔ· τουτέστιν, ἡ τῆς προτέρας ΑΕΔ, τὸ εἰς τέτταρας ὀρθὰς, οὖσα παραπλήρωμα, ἥτις δήπου καὶ ὀρθῶν δύο μείζων ἐστίν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 893. Ἐκ τοῦ αὐτοῦ Σχήματος φανερὸν, ὅτι οἱασδήποτε πλευρᾶς τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου προαχθείσης· οἷον τῆς ΑΕ, κατὰ τὴν ΕΒ· τῷ τριγώνῳ ΑΔΕ, προσεχὲς ἕτερον ἐπαναφυήσεται τὸ ΕΒΔ, οὗ ἡ μὲν Β γωνία ἴση ἔσται τῇ ἐν τῷ προτέρῳ Α, αἱ δὲ πρὸς τοῖς Ε καὶ Δ σημείοις γωνίαι, παραπληρώματα εἰσὶ τῶν ἐν ἐκείνῳ γωνιῶν (τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ) τῶν πρὸς τοῖς αὐτοῖς Ε καὶ Δ. Τοῖς δ' αὐτοῖς τούτοις τριγώνοις, ἡ μὲν ΕΔ πλευρὰ κοινὴ ἐστί· τῶν δὲ λοιπῶν ἡ μὲν ΒΔ ἀναπλήρωμα τυγχάνει τῆς πλευρας ΑΔ, ἡ δὲ ΕΒ τῆς ΕΑ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 894. Τὰ σφαιρικὰ τῶν τριγώνων, ὧν μία τις τῶν πλευρῶν, τῆς ἡμιπεριφερείας μείζων ἐστὶν, ἐν μέρει εἴωθεν ἀποτίθεσθαι· τοῦ γὰρ ΕΑΔΓ δοθέντος, τοῦ ἐκείνων τινὶ πρὸς τῷ κέντρῳ ἀπεναντίον κειμένου, καὶ τὸ τοιουτῶδες ἀεὶ τρίγωνον δίδοται. Τῶν ἄρα ὑπὸ σκέψιν εἰωθότων γίνεσθαι σφαιρικῶν τριγώνων, οὐδέτις πλευρὰ τὴν ἡμιπεριφέρειαν, οὐδέτις γωνία τὰς δύο ὀρθὰς ἐστὶν ὑπερβάλλουσα.

§. 895. Ἀλλ᾽ ἡ γωνία Α ἢ Β, ἰῶ τὸ ΑΕΒ ἐπίπεδον, μετὰ τῦ ἀντὶ βάσεως ληφθέντος ΑΒΔ ἐπιπέδυ ἀπολαμβάνει, ἤτοι ὀρθὴ ἐςὶν, ἢ πλαγία· καὶ εἰ μὲν ὀρθὴ, τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον Ὀρθογώνιον λέγεται, ἥτε πλευρὰ ΕΔ, ἡ ἀπεναντίον αὐτῆς, Ὑποτείνυσα· τῶν δὲ λοιπῶν πλευρῶν, ἡ μὲν Βάσις, ἡ δὲ Κάθετος καλεῖται. Εἰ δ᾽ ὖν ἅπασαι πλάγιαι ὦσιν αἱ γωνίαι, τὸ τρίγωνον ἀκύει Πλαγιογώνιον, ἢ Λοξογώνιον.

§. 896. Ἐνταῦθα συντομίας χάριν, ἐπὶ τῦ σφαιρικῦ ὀρθογωνίυ τριγώνυ, ἡ μὲν Βάσις δηλωθήσεται διὰ Β, ἢ β· ἡ δὲ Κάθετος Κ, ἢ κ· ἡ δ᾽ ὑποτείνυσα Υ, ἢ υ. Καὶ τῶν γωνιῶν δὲ ἡ μὲν ὀρθὴ σημειωθήσεται Ο, ἢ ο· ἡ δὲ μεταξὺ τῆς τε βάσεως καὶ τῆς ὑποτεινύσης, ἡ ἀπεναντίον τῇ καθέτῳ, Μ, ἢ μ· ἰῶ δ᾽ ἂν ἡ ὑποτείνυσα μετὰ τῆς καθέτυ περιέχοι, Ν, ἢ ν.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ. 179. §. 897. Ἐπὶ παντὸς σφαιρικῦ ὀρθογωνίυ τριγώνυ ΝΟΜ, ἐὰν ἡ γωνία Μ, ὀρθῆς ἢ ἐλάσσων, ἢ ἴση, ἢ μείζων, καὶ ἡ πλευρὰ Κ, ἡ ἀπεναντίον αὐτῆς, ἤτοι τεταρτημορίυ ἐλάττων, ἢ τεταρτημορίῳ ἴση, ἢ τεταρτημορίυ μείζων ἔςαι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπὶ ΓΜ, δι᾽ ἧς τὸ τῆς ὑποτεινύσης ἐπίπεδον, τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον διατέμνει, ἀνήχθω ἐπίπεδον τὸ ΜΓΔ, ἐπὶ τῦ τῆς βάσεως ἐπιπέδυ πρὸς ὀρθὰς ἐφεξῶς. Ἐπειδὴ ὖν καὶ τὸ Κ ἐπίπεδον, ἐπὶ τῦ αὐτῦ ἐπιπέδυ Β πρὸς ὀρθὰς ἐφέςηκεν, ἔςαι καὶ ἡ ΔΓ, ἡ κοινὴ τῶν ἐπιπέδων τομὴ, ἐπὶ τῦ αὐτῦ ἐπιπέδυ Β κάθετος (§. 517.) καὶ ΔΟ, ἢ Δο τεταρτηταρτημόριον. Ἔνθαντοι ἡ πλευρὰ ΝΟ ἤτοι τεταρτημορίου ἐλάσσων, ἢ τεταρτημορίῳ ἴση, ἢ τεταρτημορίου μείζων, ἤγε ἡ Υ πρὸς τάδε, ἢ τάδε τοῦ ΔΓΜ ἐπιπέδου πίπτουσα εἴη, ἢ αὐτῷ τούτῳ τῷ ἐπιπέδῳ συμπίπτουσα· τουτέστιν, ἤπερ ἡ Γωνία Μ, ἤτοι ἐλάσσων εἴη τῆς ὀρθῆς γωνίας ΔΜΟ, ἢ ταύτῃ ἴση, ἢ αὐτῆς μείζων.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 898. Ληφθείσης δὲ τῆς Κ ἀντὶ βάσεως, γίνεται Β κάθετος. Ἄρα καὶ ἡ Ν γωνία, ὁμοειδὴς ἔσαι τῇ πλευρᾷ τῇ ἀπεναντίον· τουτέστιν ὀξεῖα μὲν, τῆς Β τεταρτημορίου ἐλαττουμένης· ὀρθὴ δὲ, τεταρτημορικῆς οὔσης· ἀμβλεῖα δὲ, ὑπὲρ τὸ τεταρτημόριον τῆς Β μεγεθυνομένης. Εὔδηλον γὰρ, ὥσπερ ἐκ τῆς γωνίας τὸ τῆς πλευρᾶς εἶδος, οὕτως ἀνάπαλιν ἐκ τῆς πλευρᾶς τὸ εἶδος συνάγεσθαι τὸ τῆς γωνίας.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

§. 899. Ἐπὶ παντὸς τριγώνου σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου, ἐὰν τῶν πλευρῶν ἑκατέρα Β καὶ Κ τεταρτημορίου ἐλάσσων ἢ μείζων ᾖ, ἡ ὑποτείνουσα τεταρτημορίου ἐλάσσων ἔσαι. Ἐὰν δὲ τῶν πλευρῶν ἡ μὲν ἑτέρα Β, ἡ Κ ἐλάσσων ᾖ τεταρτημορίου, ἡ ἑτέρα δὲ μείζων, ἡ ὑποτείνουσα ἔσαι τεταρτημορίου μείζων. Ἐὰν δὲ τέως ἐκείνων ἡ ἑτέρα τεταρτημόριον ᾖ, καὶ ἡ ὑποτείνουσα τεταρτημόριον ἔσαι.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΟΜο ἐν ᾧ λαμβάνεται ἡ βάσις, ἐφ᾽ οὗτε ΟΛο πρὸς ὀρθὰς ἐφίσαται, ἀχθήτω ΜΓ ἐπὶ τῆς διαμέτρου οΟ πλαγιάζουσα· ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ δὲ καὶ ἐπίπεδον τὸ ΔΛΕ πρὸς ὀρθὰς σαθήτω, Σχ. 180.

 τέμνον

τέμνον τὸ ΟΛο κατὰ τὴν ΑΓ. Ἔσονται οὖν ΑΓΟ, ΑΓο ὀρθαὶ (§. 517.)· καὶ τὰ ΑΟ, Αο τεταρτημόρια. Πᾶσα δὲ γωνία ἣν ἂν ἡ ΓΜ μετὰ τῆς εὐθείας τῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΔΑΕ διὰ τοῦ Γ ἠγμένης, περιέχοι, ὀρθὴ ἔσαι (§. 506.). Ἄρα καὶ ΗΓΜ γωνία ἔσαι ὀρθὴ, καὶ ηΓΜ· καὶ ἡ μὲν ΝΓΜ ὀρθῆς ἐλάσσων, ἡ δὲ νΓΜ ὀρθῆς μείζων. Διὸ ἐπὶ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΝΟΜ, οὗ αἱ πλευραὶ Β καὶ Κ τεταρτημορίου ἐλάσσονες εἰσὶν, ἡ ὑποτείνουσα ΝΜ, τεταρτημορίου τοῦ ΗΜ ἐλάσσων ἔσαι, παραπλησίως, ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΝοΜ, οὗ πλευραὶ Νο, οΜ, τουτέσι Κ, Β τεταρτημορίου μείζονες εἰσίν. Ἐπὶ δὲ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου νΟΜ, ἐν ᾧ νΟ, ἤτοι Κ μείζων ἢ κατὰ τεταρτημόριον ἐσὶν, ΜΟ δὲ, ἤτοι Β, ἐλάσσων, ἡ ὑποτείνουσα Μν, τοῦ τεταρτημορίου Μη μείζων ἐσὶν, ὡς καὶ τῷ σφαιρικῷ τριγώνῳ νΜο, ἐν ᾧ οΜ, ἤτοι Β, τεταρτημορίου μείζων ἐσὶ· νο δὲ, ἤτοι Κ, τεταρτημορίου ἐλάσσων· τελευταῖον ἐὰν Κ γένηται ἡ ΑΟ, ἡ μὲν τῆς ὑποτεινούσης γωνία ΑΓΜ, ὀρθὴ ἔσαι, αὐτὴ δὲ ἡ ὑποτείνουσα τεταρτημόριον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

§. 900. Ἐντεῦθεν ἀμοιβαδὸν ἕπεται, ὡς ἐὰν ἡ ὑποτείνουσα τοῦ σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ὀξεῖα ᾖ, ἑκατέρα τῶν πλευρῶν Κ καὶ Β, ἤτοι μείζων ἔσαι ἐξ ἀνάγκης τεταρτημορίου, ἢ ἐλάσσων. Ἐὰν δὲ ἡ ὑποτείνουσα ἀμβλεῖα ᾖ, ἐκείνων ἡ ἑτέρα τοῦ τεταρτημορίου μείζων ἔσαι, ἡ ἑτέρα δὲ ἐλάσσων. Ἐὰν δὲ ἡ ὑποτείνουσα τεταρτημόριον ᾖ, ἤτοι Κ, ἢ Β τεταρτημορίῳ ἐξισωθήσεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 901. Ἐντεῦθεν εἴδη δύο σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου τεθεῖναι δύναται, τὸ μὲν, οὗ ἡ ὑποτείνουσα τεταρτημορίου ἐλαττοῦται, τὸ δὲ, οὗ πλεονάζει· τὸ γὰρ τρίτον εἶδος, ὃ τῶν εἰρημένων ἂν μεταξὺ ταχθείη,

θείη, ἧ δηλονότι τεταρτημορίῳ ἡ ὑποτείνουσα ἴση, ἐφ' ἑκάτερον ἂν ἴσῳ δικαιώματι ἀναχθείη τῶν ἀνωτέρω δυεῖν, ἧπερ ἡ ὀρθὴ γωνία μεγίστη μὲν εἶναι ὀξειῶν ἁπασῶν ὑποτίθεται, ἁπασῶν δ' ἀμβλειῶν ἐλαχίστη.

§. 902. Ἐὰν οὖν ἡ ὑποτείνουσα τεταρτημορίου ἐλάσσων ᾖ, τὸ τρίγωνον, ἤτοι ΝΜΟ ἔσται, οὗ αἱ μὲν πλευραὶ Κ καὶ Β τεταρτημορίου ἐλάσσονες, αἱ δὲ γωνίαι Μ, καὶ Ν ὀξεῖαι· ἢ ΝΜο, ὂ τῷ πρὸ τοῦ προσεχὲς ἐστὶν ἐφεξῆς. Ἐὰν δὲ ἡ ὑποτείνουσα τεταρτημορίου μείζων ᾖ, τὸ τρίγωνον ἔσται, ἤτοι ὡς τὸ νΜΟ, ἢ κατὰ τὸ νΜο. Τῷ γοῦν προτέρῳ νΜΟ, ἐπὶ τὰ ἀντίθετα τοῦ ἐπιπέδου οΛΟ, ἔστι τρίγωνον ἐφεξῆς, οὗ ἡ ὑποτείνουσα τῆς ὑποτεινούσης Μν ἀναπλήρωμα ἐστὶ, καὶ τεταρτημορίου ἑπομένως ἐλάσσων· ἡ δὲ βάσις ἀναπλήρωμα τῆς βάσεως Μο, διὸ καὶ τεταρτημορίου ὡσαύτως ἐλάσσων. Οὔσης δὲ ἄρα καὶ τῆς ον τεταρτημορίου ἐλάσσονος, ἅπασαι αἱ ἐν ἐκείνῳ τῷ τριγώνῳ πλευραὶ τεταρτημορίου ἐλάσσονες εἰσίν· αἵτε γωνίαι, παρὰ τὴν ἐν αὐτῷ ὀρθὴν, ὀξεῖαι. Τοῦ δ' αὐτοῦ γοῦν, καὶ θατέρῳ τῷ νΜο προσεχὲς ἔσται, τρίγωνον ἕτερον ὑπεναντίον τῆς βάσεως ΜΓΟ· οὗ δηλονότι ἡ μὲν ὑποτείνουσα, ἀναπλήρωμα ἐστὶ τῆς ὑποτεινούσης νΜ, ἡ δὲ κάθετος ἀναπλήρωμα τῆς καθέτου νΟ. Παντὶ ἄρα σφαιρικῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, οὗ αἱ πλευραὶ Β, Κ οὐκ εἰσὶ τεταρτημορίου ἐλάσσονες, οὐδ' αἱ γωνίαι Μ καὶ Ν ὀξεῖαι, προσεχὲς τι ἕτερον τρίγωνον ἔσται, ὃ τὰ εἰρημένα (τῶν πλευρῶν καὶ γωνιῶν πάθη) παρoπηδεῖ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 903. Ἐπὶ τοῦ σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου (ὃ αἱ πλευραὶ πᾶσαι τεταρτημορίου ἐλάσσονες εἰσὶ, καὶ αἱ γωνίαι ἑπομένως, παρὰ τὴν ὀρθὴν, ὀξεῖαι)· δεδομένων, παρὰ ρα τὴν ὀρθήν, τῶν δύο ἤτοι πλευρῶν, ἢ γωνιῶν, ἢ πλευρᾶς καὶ γωνίας, εὑρεῖν τὰ λοιπά.

ΛΥΣΙΣ.

Σχ. 181. Ληφθείσης, ἀντὶ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου, στερεᾶς γωνίας τριπλεύρου τῆς ΝΓΜΟ, κατὰ τὴν ΟΜ, ἥτις ἂν ἐφεστήκοι κάθετος τῇ εὐθείᾳ ΜΓ, ἀχθήτω ἐπίπεδον τὸ ΝΟΜ, τῇ βάσει ΟΓΜ κάθετον. Ἐπειδὴ οὖν καὶ τὸ ΝΟΓ ἐπίπεδον ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὀρθόν ἐστιν, ἔσται καὶ ΝΟ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ΟΓΜ, καὶ δὴ καὶ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΟΓ, ΟΜ κάθετος (§. 517.). Ἀλλὰ καὶ ΜΓ ἡ ἐπὶ τοῦ ΟΜΓ ἐπιπέδου, τοῦ ἐπὶ τὸ ΝΟΜ πρὸς ὀρθὰς ἐφεστῶτος, τῇ κοινῇ τῶν ἐπιπέδων τομῇ ΟΜ κάθετος οὖσα, οὐδέντι ἧττον καὶ ἐπιπέδῳ τῷ ΝΟΜ, καὶ τῇ ἐπ' αὐτῷ εὐθείᾳ ΝΜ κάθετος ἔσται (§. 514.). Ἔνθαυτοι τὰ τρίγωνα ΝΟΓ, ΟΓΜ, ΝΓΜ, ΝΟΜ, πάντα ὀρθογώνια ἔσται. Ἡ δὲ Μ γωνία τοῦ ἐπιπέδου τριγώνου ΝΜΟ, ἡ αὐτὴ ἔσται τῇ γωνίᾳ Μ τῆς στερεᾶς τριπλεύρου γωνίας (§. 512.).

Τούτων οὖν τῶν τριγώνων κατ' ἐπίπεδον ἀναπτυχθέντων, ἀναφύεται τὸ 182 Σχῆμα τόνδε τὸν τρόπον. Μενέτω κατὰ χώραν τὸ τρίγωνον ΝΟΓ, τὸ δὲ ΟΓΜ περὶ τὴν πλευρὰν ΟΓ περιαχθήτω, ὥστε κατὰ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον τῷ ΝΟΓ συνδιεκτανθῆναι. Ἐπὶ δὲ τὸ αὐτό, καὶ τὸ ΝΜΓ, περὶ τὴν ΜΓ περιαχθέν, τοῖς εἰρημένοις συνεπιπεδούσθω. Ἐπειδὴ τοίνυν ἡ ΜΓ, ἐφ' ἑκατέραν τῶν εὐθειῶν ΜΟ, ΜΝ πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκε, τῶν ὀρθῶν ἤδη γωνιῶν ΟΜΓ, ΝΜΓ τῶν πρὸς τῇ αὐτῇ ΜΓ, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένων, ἡ ΟΜ τῇ ΜΝ κείσεται ἐπ' εὐθείας· τελευταῖον δὲ καὶ τὸ ΝΟΜ, περὶ τὴν ΝΟ περιαχθέν, κατὰ τὸ αὐτὸ τοῖς λοιποῖς ἐπίπεδον καθεστάσθω· ἅμα δὲ τούτου γενομένου, καὶ

ἡ ΜΟ,

ἡ ΜΟ, ἡ ἐπὶ τὴν ΝΟ κάθετος, τῇ ἐπὶ τὴν αὐτὴν ΝΟ καθέτῳ ΓΟ κείσεται ἐπ' εὐθείας. Τοίνυν τῶν ἐπὶ τοῦ οὕτως ἀνακύπτοντος ἐπιπέδου Σχήματος σημείων, τοῖς ὁμοίοις γράμμασι, τοῖς κατὰ τὴν στερεὰν γωνίαν ἐπιχαραχθεῖσιν αὐτοῖς, διασημαινομένων, αἱ ἐφεξῆς ἀναλογίαι ἐκ τῶνδε τῶν τριγώνων συνάγονται.

Ἐκ μὲν τῶν τριγώνων ΟΓΜ, ΝΓΜ, συνάγεται·

ΜΝ : ΜΟ = Ἐφ. Υ : Ἐφ. Β. (§. 851.).

Ἐκ δὲ τοῦ τριγώνου ΝΟΜ ἐστιν,

ΜΝ : ΜΟ = Ἀκ : Συνημ. Μ.

Α'. Τοιγαροῦν, Ἀκ : Συνημ. Μ = Ἐφ. Υ : Ἐφ. Β.

ἢ γοῦν Ἀκ : Συνημ. Μ = Συνεφ. Β : Συνεφ. Υ. (§. 849.)

Ἐπεὶ δὲ τὰ ἐπώνυμα Μ καὶ Ν ἀμείβεσθαι δύναται, τῆς μὲν Β ἀντὶ Κ τεθείσης, τῆς δὲ Κ ἀνάπαλιν ἀντὶ Β, μενούσης δὲ τῆς Υ, ἔσται ὁμοίως·

Ἀκ : Συνημ. Ν = Συνεφ. Κ : Συνεφ. Υ.

Ἀλλὰ γὰρ ἐὰν ἡ δὶς ἐπὶ τοῦ 182 Σχήματος ἀπαντῶσα εὐθεῖα ΝΓ, ἀντὶ ἀκτῖνος ληφθῇ, ἐκ τῶν τριγώνων ΝΜΓ, ΝΟΓ γίνεται,

ΝΜ : ΝΟ = Ἡμ. Υ : Ἡμ. Κ.

Ἐκ δὲ τοῦ τριγώνου ΝΟΜ συνάγεται,

ΝΜ : ΝΟ = Ἀκ : Ἡμ. Μ.

Β'. Ἄρα Ἀκ : Ἡμ. Μ = Ἡμ. Υ : Ἡμ. Κ.

Καὶ τῇ ἀμοιβῇ τῶν ἐπωνύμων Μ, Ν, Β, Κ

Ἀκ : Ἡμ. Ν = Ἡμ. Υ : Ἡμ. Β.

Αὖθις, ἐὰν ἡ ΟΓ εἰς ἀκτῖνα τεθῇ, ἐκ τῶν τριγώνων ΟΓΜ, ΝΓΟ, ἐπιφέρεται,

ΟΜ : ΟΝ = Ἡμ. Β : Ἐφ. Κ.

Ἐκ

Ἐκ δὲ τοῦ ΝΟΜ τριγώνου ἐστὶν,

ΟΜ : ΟΝ = Ἀκ : Ἐφ. Μ.

Γ'. Ἄρα Ἀκ : Ἐφ. Μ = Ἡμ. Β : Ἐφ. Κ.
ἤτοι, Ἀκ : Ἡμ. Β = Ἐφ. Μ : Ἐφ. Κ.
ἢ, Ἀκ : Ἡμ. Β = Συνεφ. Κ : Συνεφ. Μ.

Καὶ τῇ ἀμοιβῇ τῶν ἐπωνυμιῶν,

Ἀκ : Ἡμ. Κ = Συνεφ. Β : Συνεφ. Ν.

Ἤδη μὲν οὖν ἐκ τῆς Β'. Ἀναλογίας, καθ' ἑκατέραν ἐπωνυμίαν,

Ἀκ : Ἡμ. Υ = Ἡμ. Μ : Ἡμ. Κ,

Καὶ Ἀκ : Ἡμ. Υ = Ἡμ. Ν : Ἡμ. Β,

Ἑπομένως ἄρα, Ἡμ. Β : Ἡμ. Ν = Ἡμ. Κ : Ἡμ. Μ.

Ἐκ δὲ δὴ τῆς ἀναλογίας ταύτης καὶ τῶν Γ'. εὑρεθεισῶν,

Ἀκ : Ἡμ. Β = Συνεφ. Κ : Συνεφ. Μ.

Συνθέσει συνάγεται·

Ἀκ : Ἡμ. Ν = Ἡμ. Κ × Συνεφ. Κ : Ἡμ. Μ × Συνεφ. Μ.

Ἐπειδὴ δὲ ἐν γένει Ἀκ × Συνημ. Α = Ἡμ. Α × Συνεφ. Α (§. 850.), ἔσται ὁμοίως, ἐὰν ἀντὶ Ἡμ. Κ × Συνεφ. Κ, τεθῇ Ἀκ × Συνημ. Κ. Καὶ ἀντὶ Ἡμ. Μ × Συνεφ. Μ, τεθῇ Ἀκ × Συνημ. Μ,

Δ'. Ἀκ : Ἡμ. Ν = Συνημ. Κ : Συνημ. Μ.

Καὶ ἀμειβομένων τῶν ἐπωνυμιῶν,

Ἀκ : Ἡμ. Μ = Συνημ. Β : Συνημ. Ν.

Ἀλλὰ γὰρ ἐκ μὲν τῆς Γ'. Ἀναλογίας, ἐστὶν

Συνεφ. Μ : Συνεφ. Κ = Ἡμ. Β : Ἀκ.

Ἐκ δὲ τῆς Ἀναλογίας τῆς Β΄.

Ἡμ. Μ : Ἡμ. Κ = Ἀκ : Ἡμ. Υ,

Ἄρα ἐν συνθέσει, ἔςαι,

Ἡμ. Μ × Συνεφ. Μ : Ἡμ. Κ × Συνεφ. Κ = Ἡμ. Β : Ἡμ. Υ.

Ὅθεν ἐὰν ἀντὶ Ἡμ. Μ × Συνεφ. Μ, τεθῇ Ἀκ × Συνημ. Μ, καὶ Ἀκ × Συνημ. Κ, ἀντὶ Ἡμ. Κ × Συνεφ. Κ (§. 850.), γίνεται·

Συνημ. Μ : Συνημ. Κ = Ἡμ. Β : Ἡμ. Υ.

Ἡ δὲ δὴ Α΄. Ἀναλογία φέρει,

Ἀκ : Συνημ. Μ = Συνεφ. Β : Συνεφ. Υ.

Ὅθεν αὖθις ἐν συνθέσει γίνεται·

Ἀκ : Συνημ. Κ = Ἡμ. Β × Συνεφ. Β : Ἡμ. Υ × Συνεφ. Υ.

Καὶ τῆς αὐτῆς, ὡς πρὸ μικροῦ γενομένης ἀντικαταςάσεως,

Ε΄. Ἔςαι Ἀκ : Συνημ. Κ = Συνημ. Β : Συνημ. Υ.

Τελευταῖον ἐν συνθέσει τῶν λόγων τῶν ἐπὶ τῆς Α΄. Ἀναλογίας,

Ἀκ : Συνημ. Μ = Συνεφ. Β : Συνεφ. Υ,

τῇ μετὰ τῶν λόγων τῆς Ἀναλογίας τῆς Β΄.

Ἡμ. Μ : Ἡμ. Κ = Ἀκ : Ἡμ. Υ,

Καὶ ἐπὶ τῆς Γ΄. Ἀναλογίας ἀμειβομένων τῶν ὀνομάτων,

Ἡμ. Κ : Ἀκ = Συνεφ. Ν : Συνεφ. Β,

γίνεται, Ἡμ. Μ : Συνημ. Μ. = Ἀκ × Συνεφ. Ν : Ἡμ. Υ × Συνεφ. Υ.

Ἀλλαμὴν Ἡμ. Μ : Συνημ. Μ = Ἀκ : Συνεφ. Μ, καὶ Ἡμ : Υ × Συνεφ. Υ = Ἀκ × Συνημ. Υ,

Τούτων

Τούτων ἄρα ἀντὶ ἐκείνων ἀντικαταστάντων, γίνεται,

ϛʹ. Ἀκ : Σιωεφ. Μ = Σιωεφ. Ν : Συνημ. Υ.

Αἱ ἄρα ἐξ Ἀναλογίαι αἱ οὕτως εὑρεθεῖσαι, καὶ ἐπὶ ταύταις αἱ ἐξ αὐτῶν κατ' ἀμοιβὴν ὀνόματος τῶν Β, Κ, Μ, Ν γινόμεναι ἄλλαι τέτταρες, εἰσὶν αἱ ἑξῆς·

Αʹ. Ἀκ : Σιωημ. Μ = Σιωεφ. Β : Σιωεφ. Υ.
Βʹ. Ἀκ : Ἡμ. Υ = Ἡμ. Μ : Ἡμ. Κ.
Γʹ. Ἀκ : Ἡμ. Β = Σιωεφ. Κ : Σιωεφ. Μ.
Δʹ. Ἀκ : Ἡμ. Ν = Σιωημ. Κ : Σιωημ. Μ.
Εʹ. Ἀκ : Σιωημ. Β = Σιωημ. Κ : Σιωημ. Υ.
ϛʹ. Ἀκ : Σιωεφ. Μ = Σιωεφ. Ν : Σιωημ. Υ.

Ζʹ. Ἀκ : Σιωημ. Ν = Σιωεφ. Κ : Σιωεφ. Υ.
Ηʹ. Ἀκ : Ἡμ. Υ = Ἡμ. Ν : Ἡμ. Β.
Θʹ. Ἀκ : Ἡμ. Κ = Συνεφ. Β : Συνεφ. Ν.
Ιʹ. Ἀκ : Ἡμ. Μ = Σιωημ. Β : Σιωημ. Ν.

Ἔνθα ἀντὶ τοῦ λόγου τῶν συνεφαπτομένων, ὅπη παρείκοι ἀντικαθιστᾶν οἷόντε τὸν λόγον τῶν ἐφαπτομένων ἀντιπεπονθότως. Ἐπεὶ δὲ αἱ Ἀναλογίαι αὗται, ἁπάσας ἐμπεριειλήφασι τὰς συζυγίας, τῶν ὅσαπερ ἐν τῷ σφαιρικῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ἤτοι ὡς δεδομένα, ἢ ὡς ζητούμενα ἀπαντήσειεν. Ἔστι δ' ἁπανταχοῦ, τῶν ἐν ἑκάστῃ Ἀναλογίᾳ ὅρος εἷς ἡ ἀκτίς· ἐκ δὲ δὴ τριῶν ὅρων, οὐκ ἔστιν ὅτε ὁ τέταρτος ἀνάλογον οὐ προσευρίσκεται· Πάντως δὴ διὰ τῶν τοιούτων Ἀναλογιῶν, ἐὰν παρὰ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, δύο τῶν λοιπῶν ὁποιαδήποτε τῶν ἐπὶ τοῦ σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου δοθῇ τριγώνου, εἴτε αἱ δύο τῶν πλευρῶν, εἴτε καὶ τῶν γωνιῶν αἱ δύο, ἢ τέως καὶ πλευρὰ καὶ γωνία, δοθήσεται καὶ τ' ἄλλα. Α", διὰ τὸ τὰς μὲν πλευρὰς τεταρτημορίου ἐλάσσονας τίθεσθαι, τὰς δὲ γωνίας

γωνίας ὀξείας, εἴτε διὰ τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν ἐφαπτομένων διδῶτο, εἴτ' οὖν καὶ διὰ τῶν συνημιτόνων, ἢ συνεφαπτομένων, πάντη διοριθήσεται.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 904. Ὅτι δὲ αἱ δέκα εὑρεθεῖσαι Ἀναλογίαι, πρὸς ἐπίλυσιν ἁπάντων τῶν περὶ τὰ σφαιρικὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ζητεῖσθαι δυναμένων, ἔχουσιν ἀποχρώντως, εἰ μόνον μήτε τῶν πλευρῶν τις ὑπερέχουσα εἴη τὸ τεταρτημόριον, μήτε τῶν γωνιῶν τὴν ὀρθὴν, οὕτως ἂν ἀποδειχθείη. Ἔνεισι δὴ τῷ σφαιρικῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, παρὰ τὴν ὀρθὴν γωνίαν τὰ πέντε ταῦτα, Μ, Ν, Κ, Β, Υ. Ἀμέλει τοι δύο μὲν γωνίαι, τρεῖς δὲ πλευραί· τῶν δὲ, συντρία, τοῖς δὲ μόνοις τοῖς δέκα τρόποις συμβαίνουσι· ΜΝΚ, ΜΝΒ, ΜΝΥ, ΜΚΒ, ΜΚΥ, ΜΒΥ, ΝΚΒ, ΝΚΥ, ΝΒΥ, ΚΒΥ. Ἀλλὰ τούτων γὰρ τῶν συζυγιῶν ἑκάστη, ἐπὶ μιᾶς τινος τῶν δέκα Ἀναλογιῶν, εὑρεθείη. Καὶ ἔστιν ἄρα, ἐὰν δύο δοθῇ, τῶν ἐν τοῖς πέντε γράμμασι Μ, Ν, Κ, Β. Υ σημαινομένων, διά τινος τῶν Ἀναλογιῶν ἐκείνων, ἀεὶ τὸ τρίτον λαμβάνειν, διὰ τὸ τὸν τέταρτον εἶναι ἁπανταχοῦ, ὅρον τὸν αὐτὸν Ἀκ, ἀεὶ ἐν ὑποθέσει διδόμενον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 905. Ἐπὶ τοῦ σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐφ' οὗ τινὲς μὲν τῶν πλευρῶν τεταρτημορίου μείζονές εἰσι, τινὲς δὲ τῶν γωνιῶν ὀρθῆς μείζονες, δυεῖν τινων δοθεισῶν, εἴτε πλευρῶν, εἴτε καὶ γωνιῶν, εἴτε δὴ πλευρᾶς καὶ γωνίας, εὑρεῖν τὰ λοιπά.

ΛΥΣΙΣ.

Ἀναλυέσθω ἀντὶ τοῦ προτεθέντος τριγώνου, τὸ ἐκείνῳ προσεχὲς (§. 902.), οὗ πᾶσαι μὲν αἱ πλευραὶ τεταρτημορίου ἐλάσσονες, πᾶσαι δ' αἱ γωνίαι, παρὰ τὴν ἐν αὐτῷ ὀρθὴν, ὀξεῖαι. Ἐπειδὴ γὰρ τοῦ τοιοῦδε τριγώνου, αἱ μὲν πλευραὶ ἀναπληρώματα εἰσὶ τῶν πλευρῶν τοῦ προτεθέντος, αἱ δὲ γωνίαι τῶν γωνιῶν, ἐπάναγκες καὶ τῶν αὐτῶν εὐμοιρεῖν ἡμιτόνων, καὶ ἐφαπτομένων τῶν αὐτῶν· ὥστε τούτων διδομένων, καὶ τὰ ἡμίτονα, ἢ τὰς ἐφαπτομένας δίδοσθαι τῶν γωνιῶν καὶ πλευρῶν, τῶν ἐπὶ τοῦ τριγώνου τοῦ εἰς ἐπίλυσιν προτεθέντος. Ἀλλὰ γὰρ τῶνδε τῶν πλευρῶν, ποτὲ μὲν τεταρτημορίου πλεοναζουσῶν, ποτὲ δ᾽ ἐλαττουμένων· καὶ τῶν γωνιῶν ὡσαύτως ἄλλοτε μειζόνων, ἄλλοτε δ᾽ ἐλασσόνων ἢ κατ᾽ ὀρθὴν γινομένων, ποτέρῳ ἄρα τῶν εἰδῶν ἂν εἴη προσανῆκον, τὸ ζητούμενον ἐπὶ παντὸς τοῦ προκειμένου, ἐκ τῶν δοθέντων διοριζέσθω, ἢ τὰ Θεωρήματα ἐδίδαξε φθάσαντα (§. 897. 899.).

Η, ὅτι τὰ συνημίτονα καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν τεταρτημορίου μειζόνων τόξων, ἢ τῶν τὴν ὀρθὴν ὑπερβαλλουσῶν γωνιῶν κατ᾽ ἀπόφασιν εἰσὶν, (§. 827. 832. 838.) ἐπειδὰν τὰ συνημίτονα καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν ἐλαττουμένων τεταρτημορίου τόξων, καὶ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν κατὰ θέσιν ληφθῶσι, διακρινέσθωσαν δὴ τὰ συνημίτονα, καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, ἀπὸ τῶν κατὰ τὰς ἀμβλείας, διὰ τῶν σημείων + καὶ −, καὶ ἐπαγέσθω κατὰ τοὺς ὑποτεθέντας ὅρους (§. 652.) τὸ σημεῖον τοῦ ζητουμένου· ὅπερ ἐὰν μὲν ᾖ +, ἔσται τὸ ζητούμενον τεταρτημορίου, ἢ ὀρθῆς ἔλαττον· ἐὰν δὲ −, ἔσται μεῖζον. Ἀλλὰ γὰρ τὸ θετικὸν ἡμίτονον, ὃ τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ ἐπίσης ἐστὶ προσανῆκον, ὥσπερ καὶ τῇ ὀξείᾳ, τῇ ὑπὲρ τὴν διάμετρον ἐφεξῆς ἐκείνῃ κειμένῃ, τὴν ζητουμένην πλευρὰν, ἢ γωνίαν, ἐν ἀμφιβόλῳ ἐᾷ, εἰ μὴ διὰ τοῦ Θεωρήματος (§. 877.) προσδιορισθείη.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α.

§. 906. Ἀκριβοῦσι δὲ πάντα καλῶς, ἐπ᾽ ἐκείνων μόνων φανερὸν ἐστὶ τὸ ζητούμενον ἀμφιρρεπὲς προκύπτον, ἐφ᾽ ὧν δεδομένα τυγχάνει Μ καὶ Κ· ἤ, ὅπερ εἰς ταυτὸν ἥκει, Ν καὶ Β. Ἐν γὰρ δὴ τέτοις ἔτω διὰ τῦ ἡμιτόνε τὸ ζητηθὲν ἀποδίδοται, ὥςε ἄδηλον ἔτι μένειν, πότερον ἄρα ἡ Ν, ἡ Μ γωνία ὀξεῖα, ἢ μή; πότερον δὲ ἡ πλευρὰ Β, ἡ Κ τεταρτημορίε μείζων, ἢ ἐλάσσων ἐςίν; ὡς ἐκ τῆς τῶν Ἀναλογιῶν ἐςὶ σαφὲς διασκέψεως, δι᾽ ὧν τὰ τοιάδε τρίγωνα ἀναλύεται (§. 903.). Καίτοι γὰρ κατὰ τὴν ἐν ταῖς Ἀναλογίαις ἐκείναις Β΄. παρὰ τὴν διὰ Μ καὶ Κ παριςαμένην Υ, ἔτι καὶ ἡ Κ, καὶ ἡ Μ παραςῆναι δύναται, ἐμὴν ἀλλ᾽ εἰ κατ᾽ ἐκείνην ἡ Κ ζητοῖτο, ἐν τοῖς δοθεῖσιν ἂν εἴη ἡ Μ· καὶ ἀνάπαλιν τῆς Μ ζητεμένης, δοθήσεται ἡ Κ. Εἰσὶ γὰρ αἵδε ἀείποτε, ἡ Μ λέγω καὶ ἡ Κ, τῆς αὐτῆς καταςάσεως· τετέςιν ἤτοι ἄμφω 90° μείζονες, ἢ ἄμφω ἐλάσσονες, ἢ τέως 90° ἴσαι (§. 897.), ὡς μηδεμίαν δήπε ἐπὶ τέτων ἀμφιβολίαν τῦ λοιπῦ περιεῖναι. Ἀλλὰ καὶ ἡ Η΄. τῶν Ἀναλογιῶν, ἐφ᾽ ἧς τὰ εἰρημένα κρατεῖ, ἐδὲν πλέον ἢ τοῖς ὀνόμασι, τῆς Β΄. διενήνοχεν.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β.

§. 907. Ὁ δὲ τῆς περιέσης ἀμφιβολίας λόγος, Σχ. 183. διδομένων τῶν Μ καὶ Κ, ἢ τῶν Ν καὶ Β, ἐν τέτῳ κεῖται, ὅτι ἐξ ἐκείνων δεδομένων, δύο ἀεὶ τρίγωνα κατασκευάζεσθαι ἔχεσιν. Ἐὰν γὰρ μεταξὺ τῶν ἡμικυκλίων ΜΟμ, ΜΝμ, τῶν κατὰ τὰ Μ καὶ μ σημεῖα ἀμοιβαδὸν τεμνομένων, τομεὺς τεθῇ ὁ ΝΓΟ, ἐπὶ τῦ ΜΟμ ἐπιπέδε πρὸς ὀρθὰς ἐφεςηκὼς, ἔςαι ἐπὶ τῦ σφαιρικῦ ὀρθογωνίε τριγώνε ΜΝΟ ἡ κατὰ τὸ Μ γωνία, ἴση τῇ κατὰ τὸ μ, τε τριγώνε ΝΟμ, τε ἐκείνῳ ὄντος ἐφεξῆς· καὶ ΝΟ, ἤτοι Κ ἐπ᾽ ἀμφοῖν κοινή. Ἔνθεντοι καὶ τῶνδε, (δηλ. τῶν Μ καὶ Κ) δεδομένων, ἐδεὶς τε λοιπε λόγος δι᾽ ὃν αὖτις τὸ ζητηθὲν (Υ, ἢ Β, ἢ Ν) θατέρῳ μᾶλλον, ἢ θατέρῳ τῶν τριγώνων προσάψειε.

ΣΧΟΛΙΟΝ Γ.

§. 908. Τ᾽ ἄλλα δὲ ἐκ τῶν προτεθεισῶν Ἀναλογιῶν, τὴν, ὁτιῦν ἂν εἴη τὸ προτεθὲν, προσφυῶς ἐπιλυομένlω, ῥᾴδιον ἐςὶ πρὸ τῶν ἄλλων αἱρεῖσθαι. Οἷον ἔςω διδόμενα Μ καὶ Β, ζητείσθω δὲ Ν, καὶ ἔςαι κατὰ τlὼ Ι΄. τῶν Ἀναλογιῶν, ἐν ᾗ τὰ γράμματα ταῦτα ἅπαντα,

$$\text{Ἀκ} : \text{Ἡμ.}\,M = \text{Συνημ.}\,B : \text{Συνημ.}\,N.$$

Ἀλλὰ γὰρ ἐκ Μ καὶ Ν δοθέντων, ζητείσθω Κ, ἅπερ ἐπὶ τῆς Δ΄. ἐμφέρεται Ἀναλογίας. Δῆλον δὲ, ὅτι ληπτέον ἐναλλάξ.

$$\text{Ἡμ.}\,N : \text{Συνημ.}\,M = \text{Ἀκ} : \text{Συνημ.}\,K.$$

Καὶ ἔτω καὶ τοῖς λοιποῖς.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Σχ. 184. 185. §. 909. Ἐὰν ἐπὶ τῦ σφαιρικῦ λοξογωνίȣ τριγώνȣ, ΜΠμ, ἀφ᾽ ὁποιασῦν τῶν γωνιῶν Π, ἐπὶ τῦ κατὰ τlὼ ἀπεναντίον πλευρὰν Μμ ἐπιπέδȣ, πρὸς ὀρθὰς καταχθῆ πλευρὰ ἡ ΠΟ, αὕτη δὴ ἐντὸς μὲν τῆς Π γωνίας πεσεῖται, τῶν Μ καὶ μ γωνιῶν ἀμφοτέρων ὀξυνομένων, ἢ ἀμβλυνομένων· ἐκτὸς δὲ, ἐὰν τȣτων ἡ ἑτέρα μὲν ὀξεῖα ᾖ, ἡ ἑτέρα δὲ ἀμβλεῖα.

ΔΕΙΞΙΣ.

Ἡ πλευρὰ ΠΟ, τὸ λοξογώνιον τρίγωνον εἰς δύο ὀρθογώνια διατειχίζει ΠΜΟ, καὶ ΠμΟ, ἐφ᾽ ὧν ἑκατέρȣ ΠΟ ἐςὶν ἡ πλευρὰ Κ. Ἐὰν ἦν τῆς Κ ταύτης, ἤτοι τῆς ΠΟ, εἴσω τῆς γωνίας Π πιπτȣσης, ἡ μὲν κατὰ τὸ Μ γωνία ὀξεῖα τεθῇ, ἡ δὲ κατὰ τὸ μ ἀμβλεῖα, ἔςαι δὴ ἡ Κ τεταρτημορίȣ μὲν ἐλάσσων διὰ τὸ πρῶτον, τεταρτημορίȣ δὲ μείζων διὰ τὸ δεύτερον (§. 897.)· ὅπερ ἀδύνατον. Ἐὰν δὲ ἡ Κ, ἐκτὸς ᾖ πίπτȣσα τῆς γωνίας Π, τεθῶσι δὲ, ἥ τε Μ, καὶ ἡ μ, τȣτέςιν αἱ ὑπὸ ΠΜμ καὶ ΠμΜ ἀμφω ὀξεῖαι, ἔςαι ἡ ὑπὸ ΠμΟ ἀμβλεῖα. Καὶ αὖθις ἡ Κ πλευρὰ, ἅμα ἡ αὐτὴ καὶ μείζων τεταρτημορίȣ, καὶ ἐλάσσων. Τὰ δ᾽ αὐτὰ συναχθήσεται, καὶ τῶν

τῶν Μ, καὶ ΠμΜ γωνιῶν ἀμφοτέρων ἀμβλυνέσθαι ὑποτιθεμένων.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 910. Ἐπεὶ τοίνυν τὰ σφαιρικὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΠΟΜ, ΠΟμ, οἷς συντελεῖται τὸ πλαγιογώνιον ΠΜμ, συνάπτειν μὲν δέον, τῆς ΠΟ ἐντὸς τῆς κατὰ Π γωνίας πιπτούσης, ἀφαιρεῖν δ' ἀπ' ἀλλήλων, πιπτούσης ἐκτός· ἐκ τῶν δεδομένων γωνιῶν Μ καὶ μ, συμβαλεῖν ἔξεσται, πότερον τούτων ἐπὶ παντὸς τοῦ προκειμένου χώραν κεκλήρωται. Σημαινέσθωσαν οὖν ἐπὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΠΟΜ, αἵτε πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι ὡς πρότερον διὰ τῶν γραμμάτων Υ, Β, Κ, Μ, Ν, ἐπὶ δὲ θατέρου ΠΟμ, ἡ κάθετος ΠΟ ἧς μετὰ τοῦ προτέρου ἔλαχε κοινῆς, ὡσαύτως δηλούσθω διὰ τοῦ Κ, αἱ δὲ λοιπαὶ πλευραί τε καὶ γωνίαι, αἱ ὁμοίως κείμεναι, διὰ τῶν υ, β, μ, ν ὀνομαζέσθωσαν. Καὶ ἔσται δὴ κατὰ μὲν τὴν πρώτην ὑπόθεσιν, καθ' ἣν αἱ Μ καὶ μ γωνίαι ἐπίσης ἤτοι ὀξύνονται, ἢ ἀμβλύνονται, ἡ μὲν γωνία $\Pi = N + \nu$, ἡ δὲ πλευρὰ $M\mu = B + \beta$. Κατὰ δὲ τὴν δευτέραν, καθ' ἣν ἡ μὲν τῶν γωνιῶν, ἤτοι Μ, ἢ μ ὀξεῖα ἐστὶν, ἡ δὲ ἀμβλεῖα, ἔσται μὲν $\Pi = N - \nu$, ἔσται δὲ $M\mu = B - \beta$. Καὶ ἐὰν ἄρα ἡ κατὰ τὸ Π γωνία, ἐν ἀμφιβόλῳ τῷ σημείῳ δηλωθῇ ὧδε $N \mp \nu$, καὶ ἡ Μμ πλευρὰ ὧδε, $B \mp \beta$, πότε δὴ τῷ σημείῳ + χρηστέον, καὶ πότε τῷ − ἐκ τῆς τοιᾶσδε τῶν γωνιῶν Μ καὶ μ καταστάσεως, ῥᾷστα καταφαίνεται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 911. Τοὺς Κανόνας ἀποδοῦναι, δι' ὧν ἐπὶ τοῦ σφαιρικοῦ λοξογωνίου τριγώνου, τριῶν τινων διδομένων, εἴτε πλευραὶ αὗται ὦσιν, εἴτε γωνίαι, εἴτ' οὖν ἀναμὶξ πλευραί τε καὶ γωνίαι, τὰ λοιπὰ ἔχοιεν ἐξευρίσκεσθαι.

ΛΥΣΙΣ.

Τῆς πλευρᾶς ΠΟ, ἀπὸ μιᾶς τινος τῶν τοῦ τριγώνου γωνιῶν, ἐπὶ τὴν ἀπεναντίον πλευρὰν (εἰ δέοι προεκβληθεῖσαν) πρὸς ὀρθὰς κατηγμένης, ἑκατέρῳ τῶν ἐντεῦθεν ἀναφυομένων ὀρθογωνίων τριγώνων ἐφαρμοζέσθωσαν αἱ εὑρεθεῖσαι (§. 903.) Ἀναλογίαι.

Ἔσται δὲ ἐκ μὲν τῆς Β΄. τῶν Ἀναλογιῶν,

Ἀκ : Ἡμ. Υ = Ἡμ. Μ : Ἡμ. Κ.

καὶ Ἀκ : Ἡμ. υ = Ἡμ. μ : Ἡμ. Κ.

Α΄. Ἄρα Ἡμ. Υ : Ἡμ. υ = Ἡμ. μ : Ἡμ. Μ.

Ἀλλὰ γὰρ ἐκ τῆς Γ΄. Ἀναλογίας,

Ἀκ : Ἡμ. Β = Συνεφ. Κ : Συνεφ. Μ.

Καὶ Ἀκ ; Ἡμ. β = Συνεφ. Κ : Συνεφ. μ.

Β΄. Ἄρα Ἡμ. Β : Ἡμ. β = Συνεφ. Μ : Συνεφ. μ.

Εἶτα ἐκ τῆς Δ΄. Ἀναλογίας,

Ἀκ : Ἡμ. Ν = Συνημ. Κ : Συνημ. Μ.

Καὶ Ἀκ : Ἡμ. ν = Συνημ. Κ : Συνημ. μ.

Γ΄. Ἄρα Ἡμ. Ν : Ἡμ. ν = Συνημ. Μ : Συνημ. μ.

Κἀντεῦθεν δέ,

(Ἡμ. Ν + Ἡμ. ν) : (Ἡμ. Ν − Ἡμ. ν) = (Συνημ. Μ + Συνημ. μ) : (Συνημ. Μ − Συνημ. μ)

Ἀλλὰ μὴν (§. 853.) (Συνημ. Ν + Συνημ. ν) : (Συνημ. Ν − Συνημ. ν) = Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Ν + $\frac{1}{2}$ν) : Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Ν − $\frac{1}{2}$ν).

Καὶ (§. 854.) (Συνημ. Μ + Συνημ. μ) : (Συνημ. Μ. − Συνημ. μ) = Ἐφ. ($\frac{1}{2}$πΜ + $\frac{1}{2}$πμ) : Ἐφ. ($\frac{1}{2}$πΜ − $\frac{1}{2}$πμ)

Δ΄. Ἄρα Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Ν + $\frac{1}{2}$ν) : Ἐφ. ($\frac{1}{2}$Ν − $\frac{1}{2}$ν) = Ἐφ. ($\frac{1}{2}$πΜ + $\frac{1}{2}$πμ) : Ἐφ. ($\frac{1}{2}$πΜ − $\frac{1}{2}$πμ).

Παρὰ ταῦτα ἐκ τῆς Ε΄. Ἀναλογίας,

Ἀκ : Συνημ. Κ = Συνημ. Β : Συνημ. Υ.

Καὶ

Καὶ Ἀκ : Συνημ. K = Συνημ. β : Συνημ. υ.

Ε'. Ἄρα Συνημ. Β : Συνημ. β = Συνημ. Υ : Συνημ. υ.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς δε τῆς Ἀναλογίας τὰ σωνημίτονα σημέιοις διαγνωριθῇ, οἷς τὰ τεταρτημορίȣ ἐλάσσονα τόξα, τῶν τεταρτημορίȣ μειζόνων ἀντιδιαςέλλεται (§. 852.), εὔδηλον ὅτι ἑκατέρȣ τῶν τόξων Β, β, τεταρτημορίȣ ἐλατλȣμένων, ἢ πλεοναζόντων, καὶ τὰ τόξα ἑκάτερα Υ καὶ υ, ἤτοι ἐλάσσονα τεταρτημορίȣ ἔςαι, ἢ μείζονα· τȣ̓ναντίον δὲ ἐὰν τῶν Β καὶ β τόξων, τὸ μεν μεῖζον, τεταρτημορίȣ μεῖζον ᾖ, τὸ δ᾽ ἔλατλον, ἔλατλον· καὶ τῶν τόξων Υ καὶ υ, τὸ μεν τεταρτημορίȣ μεῖζον ἔςαι, τὸ δ᾽ ἔλατλον. Οὐδὲ γὰρ ἐνδέχεται τὰ σημεῖα τῶν ὅρων Συνημ. Υ, Συνημ. υ, ἀντικείμενα εἶναι ἀλλήλοις, ἐὰν τὰ τῶν Συνημ. Β, καὶ Συνημ. β, ταὐτὰ ᾖ, καὶ ἀνάπαλιν. Ἐπεὶ τοίαρȣ̃ν ἐκ τῆς αὐτῆς Ἀναλογίας ἕπεται.

(Συνημ. β + Συνημ. Β) : (Συνημ. β − Συνημ. Β) = (Συνημ. υ + Συνημ. Υ) : (Συνημ. υ − Συνημ. Υ).

Ἔςι δὲ (§. 854.) ἐν ὑποθέσει τȣ̃ ἑκάτερον τῶν τόξων Β, β τεταρτημορίȣ ἤτοι ἔλατλον εἶναι, ἢ μεῖζον,

(Σωνημ. β + Σωνημ. Β) : (Σωνημ. β − Σωνημ. Β) = ΣωεΦ. ($\frac{1}{2}$Β + $\frac{1}{2}$β) : ἘΦ. ($\frac{1}{2}$Β − $\frac{1}{2}$β).

Καὶ (Συνημ. υ + Συνημ. Υ) : (Συνημ. υ − Συνημ. Υ) = ΣυνεΦ. ($\frac{1}{2}$Υ + $\frac{1}{2}$υ) : ἘΦ. ($\frac{1}{2}$Υ − $\frac{1}{2}$υ.).

Ἄρα ἐν τῇδε τῇ ὑποθέσει,

ΣωεΦ. ($\frac{1}{2}$Β + $\frac{1}{2}$β) : ἘΦ. ($\frac{1}{2}$Β − $\frac{1}{2}$β) = ΣωεΦ. ($\frac{1}{2}$Υ + $\frac{1}{2}$υ) : ἘΦ. ($\frac{1}{2}$Υ − $\frac{1}{2}$υ.).

Κατὰ δὲ τὴν ὑπόθεσιν καθ᾽ ἣν θάτερον μεν τῶν τόξων Β ἢ β τεταρτημορίȣ μεῖζον, θάτερον δ᾽ ἔλατλον, ἐπεὶ (§. 854.).

$$(\text{Συνημ.}\,\beta + \text{Συνημ.}\,B) : (\text{Συνημ.}\,\beta - \text{Συνημ.}\,B) = \text{Ἐφ.}\,(\tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}\beta) : \text{Συνεφ.}\,(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}\beta),$$

Καὶ $(\text{Συνημ.}\,\upsilon + \text{Συνημ.}\,\Upsilon) : (\text{Συνημ.}\,\upsilon - \text{Συνημ.}\,\Upsilon) = \text{Ἐφ.}\,(\tfrac{1}{2}\Upsilon - \tfrac{1}{2}\upsilon) : \text{Συνεφ.}\,(\tfrac{1}{2}\Upsilon + \tfrac{1}{2}\upsilon).$

Ἔσαι κατὰ τήνδε τὴν ὑπόθεσιν,

$$\text{Ἐφ.}\,(\tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}\beta) : \text{Συνεφ.}\,(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}\beta) = \text{Ἐφ.}\,(\tfrac{1}{2}\Upsilon - \tfrac{1}{2}\upsilon) : \text{Συνεφ.}\,(\tfrac{1}{2}\Upsilon + \tfrac{1}{2}\upsilon).$$

Ἥτις Ἀναλογία οὐδὲν πλέον ἢ τῇ τάξει τῶν ὅρων διαφέρουσα τῆς ἀνωτέρω, ἔσαι καθόλου. Γράφοιτο δ᾽ ἂν ἡ αὐτὴ καὶ οὕτω.

$$(\text{Συνεφ.}\,(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}\beta) : \text{Συνεφ.}\,(\tfrac{1}{2}\Upsilon + \tfrac{1}{2}\upsilon) = \text{Ἐφ.}\,(\tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}\beta) : \text{Ἐφ.}\,(\tfrac{1}{2}\Upsilon - \tfrac{1}{2}\upsilon).$$

Ὅθεν ἐὰν ἀντὶ τῶν συνεφαπτομένων ληφθῶσιν αἱ ἐφαπτόμεναι, ἀνακύψει,

Ϛʹ. $\text{Ἐφ.}\,(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}\beta) : \text{Ἐφ.}\,(\tfrac{1}{2}\Upsilon + \tfrac{1}{2}\upsilon) = \text{Ἐφ.}\,(\tfrac{1}{2}\Upsilon - \tfrac{1}{2}\upsilon) : \text{Ἐφ.}\,(\tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}\beta).$

Τελευταῖον δὲ ἐκ τῆς Ζ. τῶν Ἀναλογιῶν,

$$\text{Ἀκ} : \text{Συνημ.}\,N = \text{Συνεφ.}\,K : \text{Συνεφ.}\,\Upsilon,$$

Καὶ $\text{Ἀκ} : \text{Συνημ.}\,\nu = \text{Συνεφ.}\,K : \text{Συνεφ.}\,\upsilon.$

Ζʹ. Ἄρα $\text{Συνημ.}\,N : \text{Συνημ.}\,\nu = \text{Συνεφ.}\,\Upsilon : \text{Συνεφ.}\,\upsilon.$

Τὰς δὲ δὴ ἑπτὰ ταυτασὶ Ἀναλογίας τῶν σκοπουμένων, τὸ ἀποχρῶν χορηγεῖν, αὐτίκα ἔσαι καταδηλον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

§. 912. Δοθέντων, ἐπὶ τοῦ σφαιρικοῦ λοξογωνίου τριγώνου, ἐκ παντὸς τοῦ τῶν πλευρῶν τε καὶ γωνιῶν ἀριθμοῦ, τριῶν τινων ὁποιωνοῦν, εὑρεῖν τὰ λοιπά.

ΛΥΣΙΣ.

ΛΥΣΙΣ.

Ἐὰν τὸ ζητούμενον, εἴτε πλευρὰ τοῦτο, ἢ γωνία, ῥηθῇ Ζ· τὸ δὲ τοῦ ζητουμένου ἀπεναντίον Ε· τὰ δ' ἑκατέρωθεν τῷ ζητουμένῳ προσκείμενα Ξ, ξ· τὰ δ' ἑκατέρωθεν τῷ ἀπεναντίον Κ, κ· ἐπὶ θάτερα μὲν τῶν ἐλασσόνων ταττομένων γραμμάτων, τῶν δὲ μειζόνων ἐπὶ θάτερα· ὡς ἔνθεν μὲν προσεχῆ ἀλλήλοις κεῖσθαι τὰ Κ, Ξ, ἔνθεν δὲ τὰ κ, ξ· πέντε ἀνακύψει γράμματα Ξ, ξ, Κ, κ, Ε, ὧν τὰ τρία ἐφ' οἱασοῦν ὑποθέσεως τὰ διδόμενα διασημανεῖ, τοῦ ζητουμένου πανταχοῦ διὰ τοῦ Ζ δηλουμένου. Ἐκ δὲ δὴ τῶν πέντε τουτωνὶ γραμμάτων, σωτρια συζευχθῆναι δύναται κατὰ τρόπους δέκα τοὺς ἐφεξῆς.

1) ΞξΚ, 2) Ξξκ, 3) ΞξΕ, 4) ΞΚκ, 5) ΞΚΕ,
6) ΞκΕ, 7) ξΚκ, 8) ξΚΕ, 9) ξκΕ, 10) ΚκΕ.

Ἀλλὰ γὰρ τὰ Ξ, ξ συνάμα τοῖς Κ, κ ἀντικαθιστάμενα, τρόπους τοσόντι διαφέροντας οὐ χορηγεῖ· οὐδὲν γὰρ διοίσει ἐφ' ἃ μέρη πρῶτον ταῦτα γραφήσεται, εἰ μόνον τὸ λοιπὸν τῆς τάξεως διασώζοιτο. Τοιγαροῦν ἡ μὲν πρώτη τῶν συζυγιῶν συμπίπτει τῇ δευτέρᾳ· ἡ δὲ τετάρτη τῇ ἑβδόμῃ· ἡ δὲ πέμπτη τῇ ἐννάτῃ· ἡ δὲ ἕκτη τῇ ὀγδόῃ. Καὶ ὑπολειφθήσονται μόναι ἕξ, αἱ τὰς διαφερούσας κυρίως ὑποθέσεις διασημαίνουσαι, αἵδε

Α΄. ΞξΚ, ἢ ξΞκ.	Β΄. ΞξΕ, ἢ ξΞΕ.
Γ΄. ΞΚκ, ἢ ξκΚ.	Δ΄. ΞΚΕ, ἢ ξκΕ.
Ε΄. ΞκΕ, ἢ ξΚΕ.	Ϛ΄. ΚκΕ, ἢ κΚΕ.

Αἳ δήπου, ἐπεὶ τὸ ζητούμενον ἤτοι πλευρὰ ἐστὶν, ἢ γωνία, δυωκαίδεκα τὰ πάντα προτιθέασιν, οὕτως ἐπιλυτέα ζητήματα.

Ἐὰν Α. ζητουμένη μὲν ᾖ ἡ πλευρὰ, διδομένη δὲ ἡ Ε γωνία, ἡ τῇ πλευρᾷ ἐκείνῃ Ζ ἀπεναντίον, κείσθω ἐπὶ θατέρου τῶν 186, 187 Σχημάτων, Ζ μὲν εἶναι τὴν Υ, Ε δὲ τὴν Μ. Ἐὰν δὲ ἡ Ε μὴ ᾖ διδομένη, κείσθω Ζ δὴ εἶναι τὴν Β ∓ β, ὥστε Ε γίνεσθαι τὴν Ν ∓ ν· ἑκατέρωσε γὰρ ἐὰν μεταξὺ τῶν διδομένων ἀπαντᾷ Κ, ἡ πλευρὰ ἡ κατὰ θάτερον μέρος τῇ γωνίᾳ Ε προσκειμένη, (εἴτε καὶ τῆς κ ὁμοίως διδομένης, εἴτε καὶ μὴ)· κείσθω τὴν Κ αὐτὴν εἶναι τὴν Υ.

Ἐὰν δὲ Β΄. ζητῆται ἡ γωνία, δεδομένη δὲ ἡ πλευρὰ Ε ἡ ἐκείνῃ ἀπεναντίον, κείσθω δὴ ζητουμένην μὲν εἶναι τὴν μ, εἶναι δὲ πλευρὰν Ε τὴν Υ. Ἐὰν δὲ ἡ Ε μὴ ᾖ διδομένη, κείσθω ζητουμένη ἡ γωνία Ν ∓ ν, ἧς ἀπεναντίον πλευρὰ Β ∓ β. Ἑκατέρωσε γὰρ ἐὰν μεταξὺ τῶν διδομένων ἀπαντᾷ γωνία Κ, ἡ κατὰ θάτερον μέρος τῇ πλευρᾷ Ε προσκειμένη, (εἴτε καὶ τῆς κ ὡσαύτως διδομένης, εἴτε καὶ μὴ)· κείσθω τὴν Κ ταύτην εἶναι τὴν Μ. Τῶν δὲ ἐν γενομένων, εὐπετές, τὸ παρὰ ταῦτα μεταξὺ τῶν δοθέντων ἀπαντῶν, διὰ τοῦ γράμματος αὐτοῦ, ἢ τῶν γραμμάτων καταλλήλως ἐπονομάζειν.

Τοιγαροῦν τὰ γράμματα δι' ὧν ἐκεῖνα διασημαίνεται, ἃ ἐπὶ τοῦ τριγώνου διδόμενα ἐστὶ, ζητῶν εὑρήσεις μεταξὺ τῶν διδομένων τῶν ἐπὶ τοῦ ἐκτεθέντος Πίνακος, * ἐν μὲν τῷ μέρει αὐτοῦ τῷ πρώτῳ τῆς πλευρᾶς ζητουμένης, ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ, τῆς γωνίας. Εὑρὼν δὲ, κατὰ τὰς ἐν τῷ αὐτῷ Ἀναλογίας, τὰς ὁμοστοίχως τοῖς εἰρημένοις γράμμασιν ἐκκειμένας, τὸν ὑπολογισμὸν διαπερανεῖς, ἐξαμείβων τὰ πολλὰ τοὺς ἐν ταῖς Ἀναλογίαις λόγους, καὶ ἀντὶ τοῦ τῶν συνεφαπτομένων, τὸν τῶν ἐφαπτομένων λόγον ἀντιπεπονθότως εἰσάγων, εἴτι ποτὲ τοῦ ὑπολογισμοῦ ἐντεῦθεν ἀναφαίνοιτο κοπανδάριον.

* Ὅρα τὸν Πίνακα.

ΔΕΙΞΙΣ.

Φανερὸν γὰρ ἐκ τῶν κατὰ τὴν πρώτην στήλην γραμμάτων, ἃ τὰς ὑποθέσεις ἁπάσας παρίστησιν, ὅτι ἅπαντα τὰ κατὰ τὰς ἀνακυψάσας Συζυγίας ζητήματα, οὕτως ἔχουσιν ἐπιλύεσθαι.

ΠΑΡΑ-

Πίν. Α'. **ΖΗΤΕΙΤΑΙ Ἡ ΠΛΕΥΡΑ.**

Ὑποθ.	Διδόμενα.	Ζητέμ.	Ἀναλογία Προτέρα.	Ἀναλογία Δευτέρα.
Ξ κ Ε ξ Κ Ε	μ, Υ, Μ.	υ	Ἡμ. μ : Ἡμ. Μ = Ἡμ. Υ : Ἡμ. υ.	
Κ κ Ε κ Κ Ε	Υ, Β ∓ β, Μ.	υ	Συνημ. Μ : Ἀκ = Συνεφ. Υ : Συνεφ. Β.	Συνημ. Β : Συνημ. β = Συνημ. Υ : Συνημ. υ.
Ξ Κ Ε ξ κ Ε	Ν ∓ ν, Υ, Μ.	υ	Συνεφ. Μ : Ἀκ = Συνημ. Υ : Συνεφ. Ν.	Συνημ. Ν : Συνημ. ν = Συνεφ. Υ : Συνεφ. υ.
Ξ ξ Ε ξ Ξ Ε	Ν ∓ ν, μ, Μ.	υ	Ἐφ. (½πΜ + ½πμ) : Ἐφ. (½πΜ − ½πμ) = Ἐφ. (½Ν + ½ν) : Ἐφ. (½Ν − ½ν).	Ἀκ : Συνεφ. μ = Συνεφ. ν : Συνημ. υ.
Ξ Κ κ ξ κ Κ	Μ, Υ, υ.	Β ∓ β	Συνημ. Μ. : Ἀκ = Συνεφ. Υ : Συνεφ. Β.	Συνημ. Υ : Συνημ. υ = Συνημ. Β : Συνημ. β.
Ξ ξ Κ ξ Ξ κ	Μ, μ, Υ.	Β ∓ β	Συνημ. Μ. : Ἀκ = Συνεφ. Υ : Συνεφ. Β.	Συνεφ. Μ : Συνεφ. μ = Ἡμ. Β : Ἡμ. β

Πίν. Β'. **ΖΗΤΕΙΤΑΙ Ἡ ΓΩΝΙΑ.**

Ὑποθ.	Διδόμενα.	Ζητέμ.	Ἀναλογία Προτέρα.	Ἀναλογία Δευτέρα.
Ξ κ Ε ξ Κ Ε	υ, Μ, Υ.	μ	Ἡμ. υ : Ἡμ. Υ = Ἡμ. Μ : Ἡμ. μ.	
Κ κ Ε κ Κ Ε	Μ, Ν ∓ ν, Υ.	μ	Συνεφ. Μ : Ἀκ = Συνημ. Υ : Συνεφ. Ν.	Ἡμ. Ν : Ἡμ. ν = Συνημ. Μ : Συνημ. μ.
Ξ Κ Ε ξ κ Ε	Β ∓ β, Μ, Υ.	μ	Συνημ. Μ : Ἀκ = Συνεφ. Υ : Συνεφ. Β.	Ἡμ. Β : Ἡμ. β = Συνεφ. Μ : Συνεφ. μ.
Ξ ξ Ε ξ Ξ Ε	Β ∓ β, υ, Υ.	μ	Ἐφ. (½Β + ½β) : Ἐφ. (½Υ + ½υ) = Ἐφ. (½Υ − ½υ) : Ἐφ. (½Β − ½β)	Συνεφ. β : Συνεφ. υ = Ἀκ : Συνημ. μ.
Ξ ξ Κ ξ Ξ Κ	Υ, υ, Μ.	Ν ∓ ν	Συνεφ. Μ : Ἀκ = Συνημ. Υ : Συνεφ. Ν.	Συνεφ. Υ : Συνεφ. υ = Συνημ. Ν : Συνημ. ν,
Ξ Κ κ ξ κ Κ	Υ, Μ, μ.	Ν ∓ ν	Συνεφ. Μ : Ἀκ = Συνημ. Υ : Συνεφ. Ν.	Συνημ. Μ : Συνημ. μ = Ἡμ. Ν : Ἡμ. ν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Α.

§. 913. Ζητεῖται δὴ ἡ πλευρά· δίδονται δὲ ξ Κ Ε. Ἐπειδὴ τοίνυν, ἐν τοῖς δοθεῖσι τούτοις ἐστὶ τὸ Ε, λεγέσθω μὲν ἡ ζητουμένη πλευρὰ υ, ἡ δ' ἀπεναντίον αὐτῆς γωνία Μ. Καὶ ὡς ὁμοίως ἔνεισι τοῖς δοθεῖσι Κ καὶ ξ, τιθέσθω τὸ Κ εἶναι Υ, καὶ ἔσαι ξ = μ· τοιγαροῦν τῶν γραμμάτων μ, Υ, Μ ἐπὶ τοῦ πρώτου μέρους τοῦ Πίνακος, πρώτων ἐν τοῖς διδομένοις ἀπαντώντων, ἡ κατὰ τὸν αὐτὸν ἐκκειμένη στίχον Ἀναλογία, Ἡμ. μ : Ἡμ. Μ = Ἡμ. Υ : Ἡμ. υ, τὸ κατὰ τὴν προκειμένην ὑπόθεσιν ζητούμενον ἐπιλύσεται. Εὑρεθήσεται δὲ, ἐκ τοῦ ἡμιτόνου υ, ἡ πλευρὰ υ ἡ ζητουμένη, εἰ μόνον φανερὸν, πότερον μείζων αὕτη τεταρτημορίου ἐστὶν, ἢ ἐλάσσων;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Β.

§. 914. Ζητεῖται καὶ ἤδη ἡ πλευρὰ, δίδονται δὲ Ξ Κ Ε. Ἐπεὶ δὲ ἐν τοῖς διδομένοις ἐστὶ τὸ Ε, ζητούμενον μὲν ἔσαι υ, τὸ δὲ Ε ῥηθήσεται Μ, καὶ τὸ Κ ῥηθήσεται Υ· ὅθεν δῆλον ὡς τὸ Ξ ἔσεται Ν ∓ ν. Ἀλλὰ γὰρ ταῦτα ἅπαντα τὰ ὀνόματα Ν ∓ ν, Υ, Μ, εἰς διδόμενα ἐπὶ τοῦ πρώτου μέρους τοῦ Πίνακος ἐν στίχῳ τρίτῳ. Ἄρα εὑρεθήσεται τὸ ζητούμενον υ, τῆς ἀντιστοίχου ἐκείνοις προσληφθείσης Ἀναλογίας,

Συνεφ. Μ : Ἀκ = Συνημ. Υ : Συνεφ. Ν.

Δύναται δ' ἡ Ἀναλογία καὶ εἰς τὴν ἑξῆς ἀμειφθῆναι·

Ἀκ : Ἐφ. Μ = Συνημ. Υ : Συνεφ. Ν.

ἥτις ἐπιτομωτερόντως ἀπαιτεῖ τὸν ὑπολογισμόν. Δι' ἑκατέρας μὲν οὖν ἡ γωνία Ν ὅλως προσδιορίζεται. Δίδοται δὲ καὶ ἡ Ν ∓ ν, διὸ δὴ τῶν γωνιῶν Ν καὶ Ν ∓ ν, τῆς ἐλάσσονος ἀπὸ τῆς μείζονος ἀφαιρεθείσης, ἀείποτε ὑπολειφθήσεται ἡ ν. Καὶ τῆς ν οὕτως εὑρεθείσης ἐφεξῆς ἐξιχνευθήσεται ἡ πλευρὰ υ, διὰ τῆς ἐν τῷ αὐτῷ στίχῳ δευτέρας Ἀναλογίας ταύτης·

Συνημ.

$$\Sigma\upsilon\nu\eta\mu.\,N : \Sigma\upsilon\nu\eta\mu.\,\nu = \Sigma\upsilon\nu\epsilon\varphi.\,\Upsilon : \Sigma\upsilon\nu\epsilon\varphi.\,\upsilon.$$

ἢ ἀντικαθισαμένης τῆς δε·

$$\Sigma\upsilon\nu\eta\mu.\,\nu : \Sigma\upsilon\nu\eta\mu.\,N = \text{'}E\varphi.\,\Upsilon : \text{'}E\varphi.\,\upsilon.$$

Δι' ἧς ὡσαύτως ἡ υ πληρέστατα διορίζεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Γ.

§. 915. Ζητεῖται ἡ γωνία, δοθέντων τῶν Ξ ξ Ε; ἡ δὲ, ἐστὶ μ· καὶ Ε διασημαίνει τὴν Υ· τὰ δὲ παρὰ ταῦτα διδόμενα ἐστὶ $B \mp \beta$, υ· οὐ γὰρ ἐν τοῖς διδομένοις ἀπαντᾶ τὸ Κ· τὰ γοῦν $B \mp \beta$, υ, Υ, κεῖται ἐν τῷ δευτέρῳ μέρει τοῦ Πίνακος, στίχῳ τετάρτῳ. Ἀντιστοιχεῖ δ' αὐτοῖς Ἀναλογία ἥδε· $\text{'}E\varphi.\,(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}\beta) : \text{'}E\varphi.\,(\tfrac{1}{2}\Upsilon + \tfrac{1}{2}\upsilon) = \text{'}E\varphi.\,(\tfrac{1}{2}\Upsilon - \tfrac{1}{2}\upsilon) : \text{'}E\varphi.\,(\tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}\beta)$. Καίπερ οὖν ἀγνοεῖται, πότερον ἡ πλευρὰ, ἡ παρὰ τὰς Υ καὶ υ δεδομένας, $B + \beta$, ἢ $B - \beta$ οὖσα ἐστί· δῆλον ἀλλ' οὖν ἐκ τῆς φύσεως τῆς ἀναλογίας, ὡς ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν μέσων ὅρων γινόμενον, διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἡμίσεως τῆς τρίτης δὲ πλευρᾶς, ἀνακύψει μὲν $\text{'}E\varphi.\,(\tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}\beta)$, $B + \beta$ οὔσης ἐκείνης, ἀνακύψει δὲ $\text{'}E\varphi.\,(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}\beta)$, οὔσης $B - \beta$. Καὶ ἔξεσται ἄρα τὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ κατὰ τὸ σύνηθες διαπεραίνειν, μηθὲν ὅλως τῆς ἀπαντώσης ἀμφιβολίας ἐπιστρεφομένους. Ἀεὶ γὰρ καὶ $\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}\beta$ ληφθήσεται, καὶ $\tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}\beta$, ὧν τὸ μὲν κεφάλαιον ἐστὶ Β, ἡ δὲ διαφορὰ β. Δοθείσης δὲ τῆς β, ἡ γωνία μ εὑρεθήσεται, διὰ τῆς κατὰ τὴν προκειμένην ὑπόθεσιν δευτέρας Ἀναλογίας.

$$\Sigma\upsilon\nu\epsilon\varphi.\,\beta : \Sigma\upsilon\nu\epsilon\varphi.\,\upsilon = \text{'}A\kappa : \Sigma\upsilon\nu\eta\mu.\,\mu.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Δ.

§. 916. Ἐὰν δὲ ἡ πλευρὰ ζητῆται διὰ τῶν τριῶν γωνιῶν δοθεισῶν, φανερὸν αὐτόθεν ὅτι δεδομέναι ἔσονται αἱ $N \mp \nu$, μ, Μ, ἐν αἷς ἐπειδήπερ ἐξ ἀνάγκης ἀριθμεῖται καὶ ἡ γωνία· ἡ ἀπεναντίον

οὖσα

ἴσα τῇ ζητεμένη πλευρᾷ, ἔσαι υ ἡ ζητεμένη. Ἐκ γεν τε εἴδες τῶν γωνιῶν Μ καὶ μ ἀναφαίνεται, ὅπως σημειωτέον ἂν εἴη τὴν τρίτην τῶν γωνιῶν, πότερον N + ν, ἢ N − ν. Ἐὰν γὰρ Μ καὶ μ ὡσαύτως ὀξεῖαι ὦσιν, ἢ ἀμβλεῖαι ὡσαύτως, ἔσαι ἡ γωνία ἡ τρίτη N + ν· ἰὼ δὲ τέτων ἡ μὲν ὀξεῖα, ἡ δὲ ἀμβλεῖα, ἡ τρίτη γωνία ἔσαι N − ν (§. 910.)· ὁπότερον δ' ἂν εἴη, διὰ τῆς ἀντισοιχέσης τοῖς δὲ τοῖς γράμμασιν Ἀναλογίας, τῆς ἐν σίχῳ τετάρτῳ τε πρώτε μέρες τε Πίνακος ἀντιπαρακειμένης, δοθήσεται μὲν $\frac{1}{2}$N − $\frac{1}{2}$ν πρὸς $\frac{1}{2}$N + $\frac{1}{2}$ν, δοθήσεται δὲ $\frac{1}{2}$N + $\frac{1}{2}$ν πρὸς $\frac{1}{2}$N − $\frac{1}{2}$ν. Εἰ μόνον ἡ Ἀναλογία, ὅπη παρέικοι, καταλλήλως ἀντισρέφοιτο. Ἐπειδὴ δὲ τέτων ἡ διαφορὰ ἐσὶ ν, ἥτις ἐν τοῖς δεδομένοις ἀνάγεται, διὰ τῆς δευτέρας ὁμοσοίχε Ἀναλογίας

Ἀκ : Σιωεφ. μ = Σιωεφ. ν : Σιωημ. υ.

εὑρεθήσεται ἡ υ, ἥτις ἐσὶν ἡ πλευρὰ ἡ ζητεμένη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ε.

§. 917. Δίδοται μὲν ΞΚκ, ζητεῖται δὲ ἡ γωνία. Ἐπεὶ δ' ἐν τοῖς διδομένοις ἐκ ἔσιν Ε, ἔσαι ἡ γωνία ἡ ζητεμένη N ∓ ν. Καὶ Ξ μὲν ἔσαι Υ, Κ δὲ ἑπομένως Μ, καὶ κ = μ. Ἐπέχει δὲ ἡ τριάδι τῶν γραμμάτων τάξις Υ, Μ, μ, τὸν τε δευτέρε Πίνακος τελευταῖον τόπον. Ἔσαι δὲ ἄρα

Συνεφ. Μ : Ἀκ, ἢ Ἀκ : Ἐφ. Μ = Συνημ. Υ : Συνεφ. N. δι' ἧς Ἀναλογίας εὑρεθήσεται ἡ γωνία N. Καὶ ληφθεῖσαι τοίνυν ἐκ τε τῶν Λογαρίθμων Κανονίε δύναται ἡ γωνία N. Ἐντεῦθεν δ' ἐν δοθήσεται καὶ τὸ Ἡμίτ. ν, διὰ τῆς ἑτέρας ὁμοσοίχε Ἀναλογίας·

Σιωημ. Μ : Σιωημ. μ = Ἡμ. N : Ἡμ. ν.

ἔτως ἀλλ' ἐν ὥσε μὴ ἔχειν διακριθῆναι πότερον ἡ κατὰ τὸ ν γωνία ὀξεῖα ἐσὶν, ἢ ἀμβλεῖα; Ἐὰν ἐν

ἡ πεἡ περὶ ταύτην ἀμφιβολία ἐκ ποδῶν ἔχῃ γενέσθαι, ἐκ τῶν ἤδη δεδομένων N καὶ ν, ἡ ζητουμένη N ∓ ν, ῥᾶστα συστήσεται. Ἐπειδὴ γὰρ M καὶ μ δεδόμεναι εἰσὶ, δῆλον πότερον Z = N + ν, ἢ γοῦν Z = N − ν (§. 910.). Ἐν οἷς δ᾽ ἂν ἄλλως τὰ κείμενα ἔχοι, ὡσαύτως δέον χωρεῖν, περιεσκεμμένως ἀεὶ τοῖς προεκτεθεῖσι Θεωρήμασι τὸν νοῦν προσέχοντας.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

§. 918. Οὐ γὰρ ἀεὶ τὰ διὰ τῶν ἐκτεθέντων κανόνων ζητούμενα, πάντῃ πάντως διωρισμένα προκύπτει, τὰ πολλὰ δ᾽ ἐν ἀμφιβόλῳ μένει, πότερον ἡ μὲν πλευρὰ μείζων ἢ ἐλάσσων τεταρτημορίου, ἡ δὲ γωνία ὀξεῖα, ἢ ἀμβλεῖα καθέστηκε; τὸ δὲ οὐ κατ᾽ ἔλλειψιν τῶν κανόνων συμβαίνει, ἀλλ᾽ ὅτι διὰ τῶν αὐτῶν πολλάκις διδομένων, δισσὰ τρίγωνα σφαιρικὰ πλαγιογώνια προσδιορίζεσθαι πέφυκεν· ἐν οἷς, τὰ ἐξηρτημένα τῶν δοθέντων διαφορᾶς οὐ πάμπαν ἀπήλλακται, καθάπερ καὶ ἐπὶ τῶν ὀρθογωνίων τῶν σφαιρικῶν (§. 907.) αὐτὸ τοῦτο κατείδομεν.

Σχ. 188. §. 919. Ἵνα δὲ ὁ λόγος τοῦ τοιούτου εὐδηλότερος εἴη, νόει δήμοι ἐπίπεδον ἡμικυκλίου τὸ ΑΝΒ, ἐπὶ ἐπιπέδου ἡμικυκλίου τοῦ ΑΔΒ πλαγίως ἱστάμενον· τὸ δ᾽ ἐπίπεδον τοῦ τμήματος ΝΓΟ, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΔΒ πρὸς ὀρθὰς ἐφεστώς, καὶ τὸ ἡμικύκλιον ΑΝΒ, εἰς ἀνίσους τομεῖς ΑΓΝ, ΝΓΒ, διατέμνον. Ποίει δὲ ΟΓΔ = ΟΓΕ· ἀπὸ δὲ εὐθειῶν τῶν ΓΔ, ΓΕ, τομέας θὲς τοὺς ΔΓΝ, ΕΓΝ, ὧν τὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔσεσθαι ἐκ τούτου φανερὸν, ὅτι ἑκάτερος τὸν αὐτὸν τρόπον ὑπό τε τῆς ὀρθῆς γωνίας Ο, καὶ τῶν πλευρῶν ΝΓΟ, καὶ ΟΓΔ, ΟΓΕ διορίζονται· οὐδὲν δὲ δυσχερὲς, καὶ τὰς πρὸς τῷ Δ καὶ Ε γωνίας ἀλλήλαις ἴσας ἐσομένας συνθεωρῆσαι ΝΔΟ = ΝΕΟ, καὶ ΝΔΑ = ΝΕΒ· τῷδε γὰρ τῷ τρόπῳ, συμφανὲς ὅτι δύο παραχθήσεται τρίγωνα σφαιρικὰ πλαγιογώγιογώνια ΝΔΑ, ΝΕΒ, ἐν οἷς ἴσαι μὲν ἀλλήλαις αἱ γωνίαι Α καὶ Β, ἴσαι δ' ἀλλήλαις καὶ αἱ ἀπ' ἐναντίον ταῖς γωνίαις ταύταις πλευραὶ ΝΔ, ΝΕ· καθάπερ οὖν καὶ αἱ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΝΔΑ, ΝΕΒ. Οὐμὴν ἀλλὰ τῶν πλευρῶν αἱ λοιπαὶ ΝΑ, ΝΒ, καὶ ΑΔ, ΒΕ, αἵτε ὑπὸ ΔΝΑ, καὶ ὑπὸ ΕΝΒ γωνίαι, μεγέθει ἀλλήλων εἰσὶ διαφέρουσαι. Ἀλλὰ καὶ τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα ΝΕΑ, ΝΔΒ τῆς αὐτῆς καταστάσεως εἰσὶν, ἡμῖν δὲ τὰ πρῶτα ἐκεῖνα ἀποχρήσει.

§. 920. Ἐντεῦθεν οὖν Α΄. ἕπεται, ὅτι διὰ δυεῖν γωνιῶν δοθεισῶν, ἢ ὁπωσοῦν ληφθεισῶν τῶν Α, καὶ ΑΔΝ, καὶ δὴ καὶ τῆς ἑτέρας τῶν εἰρημένων γωνιῶν προσκειμένης πλευρᾶς ΔΝ, τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ἥκιστα διορίζεται. Ἐκ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐκείνων οὐχ ὅπως τὸ ΝΑΔ, ἀλλὰ δὴ καὶ τὸ ΝΕΒ, οὕτως ἔχει κατασκευασθῆναι, ὡς τὰ τρίγωνα διαφέρειν ἀλλήλων ἐν τοῖς λοιποῖς ἅπασιν.

§. 921. Ἐκ τῶν αὐτῶν δὲ Β΄. ἐπιφέρεται, ὡς οὐδὲ διὰ δυεῖν πλευρῶν δοθεισῶν ΝΑ καὶ ΝΔ, καὶ γωνίας τῆς μὴ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης, οἷον τῆς Α, τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον διορίζεται. Ἐκ μὲν γὰρ τῶν αὐτῶν συνίσταται καὶ τὸ τρίγωνον ΝΑΕ, ὡς τῆς μὲν ΝΕ=ΝΔ, τῶν δὲ λοιπῶν, ἐν αὐτοῖς ΝΑ, καὶ Α, τῶν αὐτῶν διδομένων. Ἀλλὰ γὰρ, ἡ μὲν ΑΕ πλευρὰ, τὴν ΑΔ πλευρὰν, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΝΕ γωνία, τὴν ὑπὸ ΑΝΔ γωνίαν ὑπερβάλλει. Ἡ δὲ ὑπὸ ΝΕΟ = ΝΔΟ, τῆς ὑπὸ ΝΔΑ ἐστὶν ἀναπλήρωμα.

§. 922. Ἐκ μὲν οὖν τοῦ Α΄. ἕπεται, ὡς ὁσάκις ἐκ δυεῖν δοθεισῶν γωνιῶν, καὶ πλευρᾶς τῆς τούτων μεταξὺ μὴ ἀπολαμβανομένης, τὰ λοιπὰ ζητεῖται· ἤτοι ὁσάκις διδόμενα ἐστὶ Μ, καὶ μ, καὶ Υ ἐν ἀμφιβόλοις ἀεὶ τὸ πρᾶγμα κείσεται. Ἡ δὲ ἀμφιβολία, κατάτε τὴν πρώτην καὶ τὴν ἕκτην τῶν, ἐν αἷς ἡ πλευρὰ ζητεῖται ὑποθέσεων, καὶ κατὰ τὴν

ἕκτην

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΧΡΗΣΕΩΣ ΤΩΝ ΚΑΝΟΝΙΩΝ.

§. 925.

Ἐπὶ τῦ Κανονίυ, κατὰ πλευρὰν ἑκάςυ τῶν λογαρίθμων τῆς ὑπερτάτης τάξεως (ἧς δηλονότι 100 μείζονες οἱ ἀριθμοὶ, ἐλάσσονες δὲ 1000) ἀντιπαραγέγραπται ἡ τῦ ἀντισοιχῦντος λογαρίθμυ ἀπὸ τῦ προσεχῶς ἑπομένυ διαφορά· τῦτο δὲ ὐ μικρὸν τὴν τῦ Κανονίυ χρῆσιν προάγει, τῦ ἄλλως ἐν ἀριθμοῖς συνεςαλμένυ χιλιάδος ἐπέκεινα μὴ προβαίνυσιν. Ἀμέλειτοι γὰρ τὰ τῆς διαφορᾶς μένει, κἂν ὁ ἀριθμὸς, ᾧ προσανήκει ὁ λογάριθμος, δεκάκις, ἑκατοντάκις, χιλιάκις ἐπαύξοιτο, ἢ ἐκμειῶτο· τῷ γὰρ πολλαπλασιασμῷ, ἢ τῇ διαιρέσει ταύτῃ μόνον τὸ χαρακτηριςικὸν τῦ λογαρίθμυ ἀμείβεται, τὸ δὲ λοιπὸν αὐτῦ, ὃ διὰ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων ἐκφέρεται, ὔτ' αὔξησιν ὅλως ἐπιδέχεται, ὔτε μείωσιν (§. 234.).

§. 926. Συνίδοι δ' ἄντις, ταῖς τῶν λογαρίθμων διαφοραῖς ἀτενέςερον τὸν νῦν ἐπιςήσας, ὅτι τῶν ἀριθμῶν ὀλίγαις τισὶ μονάσιν ἐπηυξημένων, αἱ διαφοραὶ ὑπομειῦνται· κατὰ βραχὺ γεμὴν καὶ ἠρέμα· ὥςε καίτοι κατὰ τὺς λογαρίθμυς τῶν ἐκ τῦ σύνεγγυς τοῖς 100 παρεπομένων ἀριθμῶν, ἡ τηλικαύτη τῶν διαφορῶν ὑπομείωσις μάλιςα ἐπίσημος ὖσα, ἡ τῶν λογαρίθμων μέντοι διαφορὰ τῶν ἐπανηκόντων τοῖς ἀριθμοῖς 101, καὶ 102, μόλις μείζων τῆς διαφορᾶς ἀναφαίνεται τῶν λογαρίθμων, οἵτινες τοῖς

Ee ἀριθ-

ἀριθμοῖς 102, καὶ 103, ἀντιςοιχῦντες εἰσίν. Ἐν γὰρ τοῖς μειζοτέροις λογαρίθμοις, ἡ ὑπομείωσις ἤδε τῶν διαφορῶν τηλίκη, ὡς, πλείοσι τὴν αὐτὴν ἐν τάξει ἑφεπομένοις προσήκειν, ἥπερ ἡμῖν ἐνταῦθα σημειωτέα ἐγένετο.

§. 927. Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὡς ἐὰν ἀριθμοὶ ληφθῶσιν, ὧν ἡ διαφορὰ μὴ ἡ μονὰς, ἀλλὰ 2, ἡλίκοι 101 καὶ 103, ἡ τῶν κατ᾽ αὐτὲς λογαρίθμων διαφορὰ διπλῆ ἔςαι τῆς διαφορᾶς, καθ᾽ ἣν ὁ τȣ̃ ἀριθμȣ̃ 103 λογάριθμος, τὸν τȣ̃ ἐγγὺς ἐλάσσονος 102 ὑπερβάλλει, ἡ καθ᾽ ἣν ȣ̃τος, τὸν τȣ̃ 101, ἐν διαπτώματι ȣ̓ πάνυτι ἐπισήμῳ. Καὶ ἐὰν ἡ τῶν ἀριθμῶν διαφορὰ ᾖ 3, ἡ τῶν λογαρίθμων διαφορὰ ἔςαι τριπλῆ, τῆς τῶν ἀνηκόντων τοῖς ἀριθμοῖς τοῖς ἀμέσως ἑπομένοις, ἐν διαπτώματι ȣ̓ πολλῷ μείζονι· καὶ ȣ̃τως ἑφεξῆς. Καὶ δυοῖν ἄρα τινῶν ἀριθμῶν ληφθέντων, ὧν μετρίατις εἴη ἡ διαφορὰ, καὶ δυοῖν ἑτέρων βραχύτι τῶν προτέρων διαφερόντων, ὧν ἂν ἑπομένως ἡ διαφορὰ βραχεῖατις ἂν εἴη, καὶ τȣ́των, οἷόντε δὴ ἐπιφέρειν ἀείποτε, ὅτι ὡς ἡ τȣ̃ πρώτȣ τῶν ἀριθμῶν ζεύγȣς διαφορὰ, πρὸς τὴν διαφορὰν τȣ̃ δευτέρȣ ζεύγȣς, ȣ̃τως ἡ τῶν λογαρίθμων διαφορὰ τῶν προσανηκόντων τῷ ζεύγει τῷ πρώτῳ, πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν λογαρίθμων τῶν ἀντιςοιχȣ́ντων τῷ ζεύγει τῷ δευτέρῳ. Καὶ ἐμφιλοχωρεῖ μὲν γάρ τι διάπτωμα ἐπὶ τῆς δε τῆς ἀναλογίας, τοσȣ́τῳ γε μὴν ἔλαττον τȣ̃το, ὅσῳ μείζονες μὲν οἱ ἀριθμοὶ εἰσὶν, ἐλάσσονες δὲ αἱ τȣ́των διαφοραί. Διὸ καὶ ἐν χρήσει ἡ τοιάδε ἔςαι Ἀναλογία, εἴςτε τὴν ἀριθμȣ̃ εὕρεσιν, τȣ̃ τῷ δοθέντι λογαρίθμῳ ἀντιςοιχȣ̃ντος, ὃς ἂν ἐν τῷ Πίνακι συντομίας χάριν μὴ ἐπ᾽ ἀκριβὲς περιέχοιτο, εἴςτε τὴν τȣ̃ λογαρίθμȣ ἀπόδοσιν, τȣ̃ τῷ ἀριθμῷ, τῷ μὴ ἐν τῷ Κανονίῳ κειμένῳ, προσεπανήκοντος.

§. 928.

§. 928. Ἔσω τȣ̃ μὲν ἀριθμȣ̃ α λογαριθμος λ,

τȣ̃ δὲ ἀριθμȣ̃ A λογάριθμος Λ,

τȣ̃ δὲ ἀριθμȣ̃ $\alpha + \vartheta$, λογάριθμος, $\lambda + \delta$.

Ἐὰν ȣ̃ν ὁ μὲν A μείζων ᾖ τȣ̃ α, ὁ δὲ $\alpha + \vartheta$ μείζων τȣ̃ A, διαφορᾷ ἑκατέρωσε ἡλίκῃ βραχείᾳ, ἔσαι δὴ καὶ Λ λογάριθμος μείζων τȣ̃ λ, καὶ $\lambda + \delta$ μείζων τȣ̃ Λ, ὑπεροχῇ ὡσαύτως σμικρᾷ ὅσῃ. Καὶ διαφορὰ δὲ ἡ μὲν τȣ̃ πρώτȣ ἀριθμȣ̃ ἀπὸ τȣ̃ δευτέρȣ ἔσαι $A - \alpha$, ἡ δὲ τȣ̃ πρώτȣ ἀπὸ τȣ̃ τρίτȣ, ϑ. Καὶ πάλιν ἡ μὲν τȣ̃ πρώτȣ λογαρίθμȣ διαφορὰ ἀπὸ τȣ̃ δευτέρȣ, ἔσαι $\Lambda - \lambda$, ἡ δὲ τȣ̃ πρώτȣ ἀπὸ τȣ̃ τρίτȣ, ἔσαι δ. Δωήσεται δὲ διὰ τȣ́των ἡ μικρὸν ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσα Ἀναλογία, ȣ̃τω προτεθῆναι·

$$\vartheta : (A - \alpha) = \delta : (\Lambda - \lambda).$$

Ὅθεν γίνεται, $A - \alpha = \frac{\Lambda - \lambda}{\delta} \cdot \vartheta$.

Καὶ $A = \frac{\Lambda - \lambda}{\delta} \cdot \vartheta + \alpha$.

Ὡσαύτως δὲ $\Lambda - \lambda = \frac{A - \alpha}{\vartheta} \cdot \delta$.

Καὶ $\Lambda = \frac{A - \alpha}{\vartheta} \cdot \delta + \lambda$.

Καὶ ȣ̃τοι ȣ̃ν ἡμῖν ἐφ' οἱασȣ̃ν ὑποθέσεως εἰς ὑπολογισμὸν προκείσονται τύποι· ὁ μὲν, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ζητȣ́μενος ᾖ, ὃς ἂν τῷ δοθέντι λογαρίθμῳ ἀντισοιχοίη· ὁ δὲ, ἐὰν ὁ λογάριθμος, τȣ̃ ἀριθμȣ̃ διδομένȣ.

§. 929. Ἐὰν ᾖ $\vartheta = 1$· τȣτέσιν ἐὰν ἀριθμοὶ δύο α, καὶ $\alpha + \vartheta$, ὧν ἐσὶ μεταξὺ γινόμενος ὁ A, μονάδι διαφέρωσιν, ἔσαι·

$$Α = \frac{Λ - λ}{δ} + α,$$

$$\text{Καὶ} \quad Λ = (Α - α)\, δ + λ.$$

Δυνατὸν δὲ ὅτως ἀεὶ τὸ ζητέμενον ἀποκαθιςᾶν, ὡς διὰ τῶνδε τῶν τῦ ὑπολογισμῦ τύπων, οἳ μικρὸν ἁπλέςεροι τῶν προτέρων εἰσὶν, ἔχειν ἐπιλυέσθαι.

§. 930. Προκείσθω γὰρ δὴ πρῶτον εἰς εὕρεσιν ἀριθμὸς, ὁ ἀντιςοιχῶν τῷ λογαρίθμῳ 2, 46460, χαρακτηριςικὸν μὲν ἔχοντι τὸ τῆς ὑπερτάτης τῶν ἐπὶ τῦ Πίνακος τάξεων, οὔγε μὴν τῷ Πίνακι μηδαμῶς ἐκκειμένῳ. Ἐὰν ὖν ὁ λογάριθμος ὅτος ῥηθῇ Λ, ἔςαι δὴ ὁ ζητέμενος ἀριθμὸς Α. Οὐκῦν ὡς ἂν εὑρεθῆναι ἔχοι ὁ Α, ληφθήτω ἀπὸ τῦ Πίνακος, ὁ ἐγγὺς ἐλάσσων λογάριθμος τῦ προτεθέντος Λ, ὅς ἐςὶ, 2, 46389, καὶ λεγέσθω ὅτος ὁ λογάριθμος λ, ὥςε εἶναι α = 291, τὸν ἀριθμὸν τὸν ἐπὶ τῦ Πίνακος τῷ λ ἀντιπαρακείμενον· ληφθήτω δὲ καὶ 149, ἡ τῷ αὐτῷ λογαρίθμῳ προσγεγραμμένη διαφορὰ, ἧς ἡ δύναμις κυρίως αὕτη 0, 00149· ὁ γὰρ ἀριθμὸς ὅτος τῷ λογαρίθμῳ λ προσεθεὶς, λογάριθμον δίδωσι τὸν προσεχῶς μείζονα, ᾧ ἀντιςοιχεῖ ἀριθμὸς $α + 1 = 292$. Ἔςι τοίνυν $Λ - λ = 0,\ 00071$. Ἐπειδὴ δὲ $0,\ 00149 = δ$, ἔςαι $\frac{Λ - λ}{δ} = \frac{0,\ 00071}{0,\ 00149} = \frac{71}{149}$, ὅθεν δῆλον μηδὲν χρῆναι ταῖς τῶν μηδενικῶν σημείων προσέχειν δυνάμεσιν, εἴτε ἐκ τῦ Πίνακος λαμβάνοιτο ἡ δ, εἴτε καὶ δι' ἀφαιρέσεως τῦ λ ἀπὸ τῦ Λ, ζητοῖτο $Λ - λ$· δεῖν δὲ τὰς τηλικαύτας τῶν λογαρίθμων διαφορὰς δ, καὶ $Λ - λ$, ὡς εἰ καὶ ἀριθμῦς ὁλοσχερεῖς ἐτύγχανον διασημαίνεσαι, ὅτω μεταχειρίζεσθαι. Δίδωσι γῦν $Λ - λ = 71$, ἐὰν διὰ $δ = 149$ διαιρεθῇ, δεκαδικὸν κλάσμα 0, 476. Τῷ δὲ ἰῷ

προσε-

προςεθείη $\alpha = 291$ προκύπτει $A = 291, 476$. Ἔςιν ἓν ὁ ὑπολογισμὸς τοιᾶτος·

$$\lambda = 2,\ 46389\text{· κὴ } \delta = 149\text{· κὴ } \alpha = 291$$

$$\Lambda = 2,\ 46460 \qquad \frac{\Lambda - \lambda}{\delta} = \ldots\ 0,\ 476$$

$$\Lambda - \lambda = 71 \qquad A = 291,\ 476$$

§. 931. Ἐὰν δὲ δεύτερον εὑρεῖν προκέηται ἀριθμὸν ἀντιςοιχᾶντα τῷ λογαρίθμῳ 4, 46460, ἢ τῷδε $-$ 1, 46460 ἓ τὸ χαρακτηριςικὸν δηλονότι μεῖζον, ἢ ἔλατῖον τᾶ χαρακτηριςικᾶ τῆς ὑπερτάτης τῶν ἐπὶ τᾶ Πίνακος τάξεως· ἀνθυποτεθέντος τᾶ χαρακτηριςικᾶ 2, ὃς ἐν τῇ ὑπερτάτῃ κεῖται ῥηθείσῃ τάξει τῶν ἐν τῷ Πίνακι, ἢ καὶ τῆς ἐν μόνοις τοῖς χαρακτηριςικοῖς χωρᾶσης διαφορᾶς ἀμελᾶμένης, διαπερανθήσεται ὁ ὑπολογισμὸς τὸν αὐτὸν τρόπον· Ἐπειδὴ γὰρ τὰ αὐτὰ ἀπαραλλάκτως εἰσὶ (§. 238.) τῶν ἀριθμητικῶν εἴδη συμβόλων, ὧν οἱ λογάριθμοι μόνοις τοῖς χαρακτηριςικοῖς διαφέρᾶσιν, εὑρεθέντων τῶν τᾶ ἀριθμᾶ A εἰδῶν, ᾧ ἀντιςοιχεῖ ὁ λογάριθμος 2, 46460, ἓδεν δυχερές ἐςὶ καὶ τὸν εὑρεθέντα ἀριθμὸν, κατὰ πηλικονᾶν χαρακτηριςικὸν ἕτερον μετασκευάσαι. Οὕτως ἐπειδὴ τῷ $\Lambda = 2, 46460$, ἐγγὺς προσήκων εὕρηται $A = 291, 476$, τῷ ἀριθμῷ τῷ ἀντιςοιχᾶντι τῷ λογαρίθμῳ 4, 46460, χαρακτῆρες μὲν εἴδεσιν ἔσονται οἱ αὐτοὶ, τῇ δὲ ὑποδιαςολῇ τῶν ἁπλῶν μονάδων μόνον διοίσᾶσι· 29147, 6. Οὐδὲν δὲ δυχερέςερον, καὶ τὸν ἀριθμὸν ἐπισημειῶσαι τὸν τῷ λογαρίθμῳ $-$ 1, 46460 ἀντιπαρακεισόμενον. Ἔςαι γὰρ ὧδε· 0, 291476.

§. 932. Ζητᾶμένᾶ δὲ ἀνάπαλιν τᾶ λογαρίθμᾶ, τᾶ ἀριθμῷ δοθέντι προσήκοντος 596, 3, τῷ ἐντὸς μὲν τῶν ὅρων τῆς ὑπερτάτης τῶν ἐν τῷ Πίνακι τάξεως ὄντι, διὰ δὲ τὸ κλάσμα τὸ προσκείμενον ἐπὶ τοῦ Πίνακος μὴ κειμένου, εὑρήσεται δὴ ὁ ἀριθμὸς οὗτος Α, ὁ προτεθείς· ὅ,τε τούτῳ ἀντιστοιχῶν λογάριθμος διὰ τοῦ Λ διασημανθήσεται. Ἀπὸ δὲ τοῦ Πίνακος ὁ λογάριθμος ληφθήσεται, ὁ τῷ ἐγγὺς ἐλάσσονι τοῦ προτεθέντος ἀριθμῷ 596, προσήκων, ὃν δὴ παρίστησι τὸ α. Ἔστι δὲ οὗτος ὁ $\lambda = 2, 77525$· ληφθήσεται δὲ καὶ ἡ αὐτῷ τούτῳ προσγεγραμμένη διαφορά· $\delta = 73$, ἢ μᾶλλον $0, 00073$. Ἀντιστοιχεῖ δὲ τῷ λογαρίθμῳ $\lambda + \delta$ ἀριθμὸς $597 = \alpha + 1$. Ἔσται ἄρα $(A - \alpha)\, \delta = 0, 3 \times 0, 00073 = 0, 000219$, διὰ τὸ εἶναι $(A - \alpha) = 0, 3$. Κἀντεῦθεν $\Lambda = (A - \alpha)\, \delta + \lambda = 0, 000219 + 2, 77525 = 2, 77547$ ὅτι ἔγγιστα.

Δυνατὸν δὲ κἀνταῦθα τὴν διαφορὰν, ἣν ὁ Πίναξ παρίστησιν, ὡς εἰ ὁλοσχερεῖς ἐδήλουν ἀριθμοὺς οἱ ἐν αὐτῇ χαρακτῆρες, οὕτως ἐκλαβέσθαι, καὶ τὸν ὑπολογισμὸν διεκπεράναι κατὰ τὸ ἑφεξῆς σχῆμα.

$$\begin{array}{llll}
\alpha = 596. & \delta = 73. & \lambda = & 2, 77525. \\
A = 596, 3. & (A - \alpha)\, \delta = & \ldots\ldots & 21, 9. \\
\hline
A - \alpha = \quad 0, 3. & & \Lambda = & 2, 77547
\end{array}$$

§. 933. Εὑρεθέντος οὕτω τοῦ λογαρίθμου τοῦ κατὰ τὸν ἀριθμὸν 696, 3, τὸν μὴ τῆς ἀνωτάτω τάξεως ὑπερπίπτοντα, ῥᾶστα καὶ ὁ λογάριθμος ἀποδοθήσεται τοῦ ἀριθμοῦ 5963 τοῦ ἐν τοῖς αὐτοῖς χαρακτῆρσι δυνάμει τοῦ προτέρου διαφέροντος. Μόνου γὰρ τοῦ χαρακτηριστικοῦ ἀμειφθέντος, ὁ λογάριθμος ὅδε γενήσεται 3, 77547. Οὐκ ἄλλως δὲ καὶ τοῦ ἀριθμοῦ 5, 963, ὁ λογάριθμος σημειωθήσεται 0. 77547· καὶ τοῦ 58630, λογάριθμος 4, 77547. Ὅθεν ἀνάπαλιν συνάγεται, ὡς εἰ τὸν λογάριθμον ἐξευρεῖν δέοι τῶν ἀριθμῶν τινος 5, 963, ἢ 59, 63, ἢ 5963, ἢ 59630, τῶν τοὺς ὅρους τῆς ὑπερτάτης τάξεως ὑπερπιπτόντων, οὐδὲν ἄλλο, ἢ τὸν τοῦ 596, 3

τοῦ

τȣ̃ ἐπὶ τοῖς αὐτοῖς χαρακτῆρσιν εἴσω πίπ]οντος δεήσει λαβεῖν, τὸ δὲ τȣ̃ τηλικȣ́τȣ λογαρίθμȣ χαρακτηριςικὸν τῷ προτεθέντι ἀριθμῷ προσεφαρμόσαι. Ἐὰν δὲ τȣ̃ δοθέντος ἀριθμȣ̃ πλείȣς ὦσιν οἱ χαρακτῆρες, οἷον ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ᾖ 596372, ἥτις παραπλήσιος, ταυτὸ ποιητέον· ζητητέον δηλονότι τὸν λογάριθμον τȣ̃ ἀριθμȣ̃ 596, 372 τȣ̃ ἐπὶ τοῖς αὐτοῖς τȣ́τοις χαρακτῆρσι τὴν ὑπερτάτην τάξιν μὴ ὑπερβάλλοντος· τȣ́τȣ γὰρ γενομένȣ, προκύψει Λ − α = 0, 372· τὰ δὲ λοιπὰ τȣ̃ ὑπολογισμȣ̃ τὸν αὐτὸν τρόπον διαπερανθήσεται.

§. 934. Τὰ μέντοι ἔτως εὑρισκόμενα, ȣ̓ πάντη πάντως ἀκριβολογεῖται, τȣ̃ δ᾽ ἀληθȣ̃ς ἐγγὺς γίνεται· ταύτητοι καὶ ἐπὶ τῶν ὑπολογισμῶν, λεπτολογεῖν παραιτητέον, τὰ ἔξω πτοίας ἀπάτης γινόμενα. Καὶ τȣ̃ ἀριθμȣ̃, ὃν ἔφημεν Λ, ζητȣμένȣ ἄλις ἕξει ἐπὶ τῇ τȣ́τȣ εὑρέσει, εἰ τοῖς χαρακτῆρσι τȣ̃ α, χαρακτῆρες ἔτι δύο προσεπιγένοιντο· οἱ γὰρ λοιποὶ, ȣ̔̀ς τῇ προαγωγῇ τῆς διαιρέσεως δέον προκύπτειν, τὰ πολλὰ ψευ̃δοι. Ἀλλὰ καὶ τȣ̀ς λογαρίθμȣς περιττὸν διὰ πλειόνων ἐθέλειν παριςᾶν χαρακτήρων, ἢ ὅσοι τοῖς λογαρίθμοις ἔνεισι τȣ̃ Πίνακος ᾧ προσχρώμεθα. Ἅπαντες γὰρ οἱ διὰ τῶν Πινάκων παρισάμενοι λογάριθμοι, τῶν ἀληθῶν ἐλλείποντες εἰσὶ, τοῖς χαρακτῆρσιν ἐκείνοις, ὅσοι ἐν ταῖς τῶν ῥιζῶν ἐξαγωγαῖς, δι᾽ ὧν ὁ εὑρεθεὶς λογάριθμος νοεῖσθαι δύναται (§. 232.), κατὰ τὸ τέλος παρημέληνται. Πέρατος δ᾽ ἐπέκεινα ὁ τῶν τοιȣ́των χαρακτήρων ἀείποτε ἀριθμὸς, εἰ καὶ τὸ μονάδος μόριον ὃ παριςῶσι πολλοςὸν ἐςὶ, καὶ τοσȣ́τῳ ἔλαττον, ὅσῳ πλείȣς οἱ χαρακτῆρες οἱ ἐν τῷ λογαρίθμῳ προσλαμβανόμενοι· τοιγαρȣ̃ν ȣ̓κ ἂν ἀκριβεῖς εἶναι ταχθεῖεν οἱ χαρακτῆρες, οἱ τῷ λογαρίθμῳ προσεπιγιγνόμενοι, ὡς δι᾽ ὑπολογισμȣ̃ ἐπὶ κολοβοῖς καὶ τȣ́τοις τοῖς λογαρίθμοις βαίνοντος.

§. 935. Τὰ δ᾽ ἄλλα ἡ ἐνταῦθα ἐκτεθεῖσα τῶν διαφορῶν χρῆσις, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁποιωνδήποτε Πινάκων χώραν ἔχει, εἰ μόνον, ὃ περὶ διαφορῶν ἡμῖν τῶν λογαρίθμων παρατετήρηται (§. 926.), καὶ ὡς βάθρον τῆς προκειμένης πραγματείας ὑποβέβληται, καὶ παρ᾽ ἐκείνοις κρατοίη· τοῦτο δὲ μονονουχὶ καθόλου ἐστί. Καὶ ἔξεσται ἄρα τῇ τοιᾷδε ἀνευρίσκειν μεθόδῳ, καὶ γωνίαν ἡμιτόνῳ ἀπαντῶσαν, καὶ λογαρίθμῳ ἀντιστοιχοῦν ἡμίτονον, τῷ ἐν τῷ Κανονίῳ μὴ ἐκκειμένῳ· καὶ ἡμίτονον δὲ, ἢ ἡμιτόνου λογάριθμον, τῇ προτεθείσῃ γωνίᾳ προσήκοντα, ἐν δὲ τῷ Πίνακι χώραν οὐκ ἔχοντα· καὶ τὰ τοιαῦτα, περὶ ὧν καὶ ἀνωτέρω (§. 871.) διείληπται.

Τ Ε Λ Ο Σ.

ΠΙΝΑΞ

ΤΩΝ

ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

ΤΩΝ

ΗΜΙΤΟΝΩΝ

ΚΑΙ ΤΩΝ

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ

ΚΑΤ'ΕΠΙΤΟΜΗΝ.

Ἀριθμ.	Λογάριθμ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
1	0, 00000	0°, 04	0°, 04	89°, 56
2	0, 30103	07	07	53
3	0, 47712	10	10	50
4	0, 60206	14	14	46
5	0, 69897	17	17	43
6	0, 77815	21	21	39
7	0, 84510	24	24	36
8	0, 90309	28	28	32
9	0, 95424	31	31	29
10	1, 00000	35	35	25
11	1, 04139	38	38	22
12	1, 07918	41	41	19
13	1, 11394	45	45	15
14	1, 14613	48	48	12
15	1, 17609	52	52	08
16	1, 20412	55	55	05
17	1, 23045	59	59	01
18	1, 25527	1°, 02	1°, 02	88°, 58
19	1, 27875	05	05	55
20	1, 30103	09	09	51
21	1, 32222	12	12	48
22	1, 34242	16	16	44
23	1, 36173	19	19	41
24	1, 38021	23	23	37
25	1, 39794	26	26	34
Ἀριθμ.	Λογάριθμ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθμ.	Λογάριθμ.	Ἡμιτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
26	1, 41497	1°, 30	1°, 30	88°, 30
27	1, 43136	33	33	27
28	1, 44716	36	36	24
29	1, 46240	40	40	20
30	1, 47712	43	43	17
31	1, 49136	47	47	13
32	1, 50515	50	50	10
33	1, 51851	54	54	06
34	1, 53148	57	57	03
35	1, 54407	2°, 01	2°, 10	87°, 59
36	1, 55630	04	04	56
37	1, 56820	07	07	53
38	1, 57978	11	11	49
39	1, 59106	14	14	46
40	1, 60206	18	18	42
41	1, 61278	21	21	39
42	1, 62325	24	24	36
43	1, 63347	28	28	32
44	1, 64345	31	31	29
45	1, 65321	35	35	25
46	1, 66276	38	38	22
47	1, 67210	42	42	18
48	1, 68124	45	45	15
49	1, 69020	48	48	12
50	1, 69897	52	52	08
Ἀριθμ.	Λογάριθμ.	Ἡμιτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθμ.	Λογάριθμ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
51	1, 70757	56	56	04
52	1, 71600	59	59	01
53	1, 72428	3°, 02	3°, 02	86°, 58
54	1, 73239	06	06	54
55	1, 74036	09	09	51
56	1, 74819	13	12	48
57	1, 75587	16	16	44
58	1, 76343	20	19	41
59	1, 77085	23	23	37
60	1, 77815	27	26	34
61	1, 78533	30	30	30
62	1, 79239	33	33	27
63	1, 79934	36	36	24
64	1, 80618	40	40	20
65	1, 81291	44	43	17
66	1, 81954	47	47	13
67	1, 82607	51	50	10
68	1, 83251	54	54	06
69	1, 83885	58	57	03
70	1, 84510	4°, 01	4°, 00	00
71	1, 85126	04	04	85°, 56
72	1, 85733	08	07	53
73	1, 86332	11	11	49
74	1, 86923	15	14	46
75	1, 87506	18	18	42
Ἀριθμ.	Λογάριθμ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθμ.	Λογάριθμ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
76	1, 88081	4°, 22	4°, 21	85°, 39
77	1, 88649	25	24	36
78	1, 89209	29	28	32
79	1, 89763	32	31	29
80	1, 90309	35	35	25
81	1, 90848	39	38	22
82	1, 91381	42	41	19
83	1, 91908	46	45	15
84	1, 92428	49	48	12
85	1, 92942	53	52	08
86	1, 93450	56	55	05
87	1, 93952	5°, 00	58	02
88	1, 94448	03	5°, 02	84°, 58
89	1, 94939	07	05	55
90	1, 95424	10	09	51
91	1, 95904	13	12	48
92	1, 96379	17	16	44
93	1, 96848	20	19	41
94	1, 97313	24	22	38
95	1, 97772	27	26	34
96	1, 98227	31	29	31
97	1, 98677	34	33	27
98	1, 99123	38	36	24
99	1, 99563	41	39	21
100	2, 00000	45	43	17
Ἀριθμ.	Λογάριθμ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
101	2, 00432	428	5°, 48	5°, 46	84°, 14
102	2, 00860	424	51	50	10
103	2, 01284	419	55	53	07
104	2, 01703	416	58	56	04
105	2, 02119	412	6°, 02	6°, 00	00
106	2, 02531	407	05	03	83°, 57
107	2, 02938	404	09	07	53
108	2, 03342	401	12	10	50
109	2, 03743	396	16	13	47
110	2, 04139	393	19	17	43
111	2, 04532	390	23	20	40
112	2, 04922	386	26	24	36
113	2, 05308	382	29	27	33
114	2, 05690	380	33	30	30
115	2, 06070	376	36	34	26
116	2, 06446	373	40	37	23
117	2, 06819	369	43	41	19
118	2, 07188	367	47	44	16
119	2, 07555	363	50	47	13
120	2, 07918	360	54	51	09
121	2, 08278	358	57	54	06
122	2, 08636	354	7°, 01	58	02
123	2, 08990	352	04	7°, 01	82°, 59
124	2, 09342	349	08	04	56
125	2, 09691	346	11	08	52
Ἀριθ.	Λογαριθ.	Διαφ.	Ἡμιτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
126	2, 10037	343	7°, 14	7°, 11	82°, 49
127	2, 10380	341	18	15	45
128	2, 10721	338	21	18	42
129	2, 11059	335	25	21	39
130	2, 11394	333	28	25	35
131	2, 11727	330	32	28	32
132	2, 12057	328	35	31	29
133	2, 12385	325	39	35	25
134	2, 12710	323	42	38	22
135	2, 13033	321	46	41	19
136	2, 13354	318	49	45	15
137	2, 13672	316	53	48	12
138	2, 13988	313	56	52	08
139	2, 14301	312	8°, 00	55	05
140	2, 14613	309	03	58	02
141	2, 15922	307	07	8°, 02	81°, 58
142	2, 15229	305	10	05	55
143	2, 15534	303	13	08	52
144	2, 15836	301	17	12	48
145	2, 16137	298	21	15	45
146	2, 16435	297	24	19	41
147	2, 16732	294	27	22	38
148	2, 17026	293	31	25	35
149	2, 17319	290	34	29	31
150	2, 17609	289	38	32	28
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
151	2, 17898	286	8°, 41	8°, 35	81°, 25
152	2, 18184	285	45	39	21
153	2, 18469	283	48	42	18
154	2, 18752	281	52	45	15
155	2, 19033	279	55	49	11
156	2, 19312	278	59	53	07
157	2, 19590	276	9°, 02	56	04
158	2, 19866	274	06	59	01
159	2, 20140	272	09	9°, 02	80°, 58
160	2, 20412	271	13	06	54
161	2, 20683	269	16	09	51
162	2, 20951	267	20	13	47
163	2, 21219	266	23	16	44
164	2, 21484	264	27	19	41
165	2, 21748	263	30	22	38
166	2, 22011	261	34	26	34
167	2, 22272	259	37	29	31
168	2, 22531	258	40	32	28
169	2, 22789	256	44	36	24
170	2, 23045	255	48	39	21
171	2, 23300	253	51	42	18
172	2, 23553	252	54	46	14
173	2, 23805	250	58	49	11
174	2, 24055	249	10°, 01	52	08
175	2, 24304	247	05	56	04
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
176	2, 24551	246	10°, 09	59	01
177	2, 24797	244	12	10°, 02	79°, 58
178	2, 25042	243	15	06	54
179	2, 25285	242	19	09	51
180	2, 25527	241	22	12	48
181	2, 25768	239	26	16	44
182	2, 26007	238	29	19	41
187	2, 26245	236	33	22	38
184	2, 26482	235	36	26	34
185	2, 26717	234	40	29	31
186	2, 26951	233	43	32	28
187	2, 27184	231	47	36	24
188	2, 27416	230	50	39	21
189	2, 27646	229	54	42	18
190	2, 27875	228	57	46	14
191	2, 28103	227	11°, 01	49	11
192	2, 28330	226	04	52	08
193	2, 28556	224	08	56	04
194	2, 28780	223	12	59	01
195	2, 29003	222	15	11°, 02	78°, 58
196	2, 29226	221	18	06	54
197	2, 29447	220	22	09	51
198	2, 29666	219	25	12	48
199	2, 29885	218	29	15	45
200	2, 30103	217	32	19	41
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
201	2, 30320	215	11°, 36	11°, 22	78°, 38
202	2, 30535	214	39	25	35
203	2, 30750	213	43	29	31
204	2, 30963	212	46	32	28
205	2, 31175	211	50	35	25
206	2, 31387	210	53	39	21
207	2, 31597	209	57	42	18
208	2, 31806	208	12°, 01	45	15
209	2, 32015	207	04	48	12
210	2, 32222	206	08	52	08
211	2, 32428	205	11	55	05
212	2, 32633	204	15	58	02
213	2, 32838	203	18	12°, 02	77°, 58
214	2, 33041	202	22	05	55
215	2, 33244	201	25	08	52
216	2, 33445	201	29	12	48
217	2, 33646	200	32	15	45
218	2, 33846	199	36	18	42
219	2, 34044	198	39	21	39
210	2, 34242	197	43	25	35
221	2, 34439	196	46	28	32
222	2, 34635	195	50	31	29
223	2, 34830	194	53	34	26
224	2, 35025	193	57	38	22
225	2, 35218	193	13°, 00	41	19
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
226	2, 35411	191	13°, 04	12°, 44	77°, 16
227	2, 35602	191	07	48	12
228	2, 35793	190	11	51	09
229	2, 35983	190	15	54	06
230	2, 36173	189	18	57	03
231	2, 36361	188	22	13°, 01	76°, 59
232	2, 36549	187	25	04	56
233	2, 36736	186	29	07	53
234	2, 36922	185	32	10	50
235	2, 37107	184	36	14	46
236	2, 87291	184	39	17	43
237	2, 37475	183	43	20	40
238	2, 37658	182	46	23	37
239	2, 37840	181	50	27	33
240	2, 38021	181	53	30	30
241	2, 38202	180	57	33	27
242	2, 38381	179	14°, 01	36	24
243	2, 38561	178	04	40	20
244	2, 38739	178	08	43	17
245	2, 38917	177	11	46	14
246	2, 39093	176	15	49	11
247	2, 39270	176	18	53	07
248	2, 39445	175	22	56	04
249	2, 39620	174	25	59	01
250	2, 39794	173	29	14°, 02	75°, 58
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
251	2, 39967	173	14°, 32	14°, 06	75°, 54
252	2, 40140	172	36	09	51
253	2, 40312	171	40	12	48
254	2, 40483	171	43	15	45
255	2, 40654	170	47	19	41
256	2, 40824	169	50	22	38
257	2, 40993	169	54	25	35
258	2, 41162	168	58	28	32
259	2, 41330	167	15°, 01	31	29
260	2, 41497	167	04	35	25
261	2, 41664	166	08	38	22
262	2, 41830	166	12	41	19
263	2, 41996	165	15	44	16
264	2, 42160	165	19	47	13
265	2, 42325	164	22	51	09
266	2, 42488	163	26	54	06
267	2, 42651	162	29	57	03
268	2, 42813	162	33	15°, 01	74°, 59
269	2, 42975	161	36	04	56
270	2, 43136	161	40	07	53
271	2, 43297	160	44	10	50
272	2, 43457	160	47	13	47
273	2, 43616	159	51	16	44
274	2, 43775	158	54	20	40
275	2, 43933	158	58	23	37
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
276	2, 44091	157	16°, 02	15°, 26	74°, 34
277	2, 44248	156	05	29	31
278	2, 44404		09	32	28
279	2, 44560	155	12	36	24
280	2, 44716		16	39	21
281	2, 44871	154	19	42	18
282	2, 45025		23	45	15
283	2, 45179	153	27	48	12
284	2, 45332		30	52	08
285	2, 45484	152	34	55	05
286	2, 45637		37	58	02
287	2, 45788	151	41	16°, 01	73°, 59
288	2, 45939		44	04	56
289	2, 46090	150	48	07	53
290	2, 46240		52	11	49
291	2, 46389	149	55	14	46
292	2, 46538		59	17	43
293	2, 46687	148	17°, 02	20	40
294	2, 46835		06	23	37
295	2, 46982	147	10	26	34
296	2, 47129		13	30	30
297	2, 47276	146	17	33	27
298	2, 47422	145	20	36	24
299	2, 47567		24	39	21
300	2, 47712	144	28	42	18
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
301	2, 47857	144	17°, 32	16°, 45	73°, 15
302	2, 48001	143	35	48	12
303	2, 48144		38	52	08
304	2, 48287		42	55	05
305	2, 48430	142	46	58	02
306	2, 48572		49	17°, 01	72°, 59
307	2, 48714	141	53	04	56
308	2, 48855		56	07	53
309	2, 48996	140	18°, 00	11	49
310	2, 49136		04	14	46
311	2, 49276	139	07	17	43
312	2, 49415		11	20	40
313	2, 49554		15	23	37
314	2, 49693	138	18	26	34
315	2, 49831		22	29	31
316	2, 49969	137	25	32	28
317	2, 50106		29	36	24
318	2, 50243	136	33	39	21
319	2, 50379		36	42	18
320	2, 50515	135	40	45	15
321	2, 50650		44	48	12
322	2, 50786		47	51	09
323	2, 50920	134	51	54	06
324	2, 51054		54	57	03
325	2, 51188	133	58	18°, 00	00
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
326	2, 51322	133	19°, 02	18°, 04	71°, 56
327	2, 51455	132	05	07	53
328	2, 51587		09	10	50
329	2, 51720		13	13	47
330	2, 51851	131	16	16	44
331	2, 51983		02	19	41
332	2, 52114	130	24	22	38
333	2, 52244		27	25	35
334	2, 52375		31	28	32
335	2, 52504	129	35	31	29
336	2, 52634		39	35	25
337	2, 52763	128	42	38	22
338	2, 52891		45	41	19
339	1, 53020		49	44	16
340	2, 53148	127	53	47	13
341	2, 53275		57	50	10
342	2, 53403		20°, 00	53	07
343	2, 53529		04	56	04
344	2, 53656	126	08	59	01
345	2, 53782		11	19°, 02	70°, 58
346	2, 53908	125	15	05	55
347	2, 54033		19	08	52
348	2, 54158		22	11	49
349	2, 54283	124	26	15	45
350	2, 54407		29	18	42
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ	Λογάριθ.	Διαφ	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
351	2, 54531	123	20°, 33	19°, 21	70°, 39
352	2, 54654		37	24	36
353	2, 54777		40	27	33
354	2, 54900		44	30	30
355	2, 55023	122	48	33	27
356	2, 55145		52	36	24
357	2, 55267	121	55	39	21
358	2, 55388		59	42	18
359	2, 55509		21°, 03	45	15
360	2, 55630		06	48	12
361	2, 55751	120	10	51	09
362	2, 55871		14	54	06
363	2, 55991		18	57	03
364	2, 56110	119	21	20°, 00	00
365	2, 56229		25	03	69°, 57
366	2, 56348		28	06	54
367	2, 56467	118	32	09	51
368	2, 56585		36	12	48
369	2, 56702		40	16	44
370	2, 56820	117	43	19	41
371	2, 56937		47	22	38
372	2, 57054		51	25	35
373	2, 57171	116	54	28	32
374	2, 57287		58	31	29
375	2, 57403		22°, 02	34	26
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
376	2, 57519	115	22°, 05	20°, 37	69°, 23
377	2, 57634		09	40	20
378	2, 57749		13	43	17
379	2, 57864	114	17	46	14
380	2, 57978		20	49	11
381	2, 58092		24	52	08
382	2, 58206	113	28	55	05
383	2, 58320		31	58	02
384	3, 58433		35	21°, 01	68°, 59
385	2, 58546		39	04	56
386	2, 58659	112	43	07	53
387	2, 58771		47	10	50
388	2, 58883		50	13	47
389	2, 58995	111	54	16	44
390	2, 59106		58	19	41
391	2, 59218		23°, 01	22	38
392	2, 59329		05	25	35
393	2, 59439	110	09	27	33
394	2, 59550		12	30	30
395	2, 59660		16	33	27
396	2, 59769		20	36	24
397	2, 59879	109	24	39	21
398	2, 59988		27	42	18
399	2, 60097		31	45	15
400	2, 60206	108	35	48	12
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

401

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
401	2, 60314	108	23°, 39	21°, 51	68°, 09
402	2, 60423		42	55	05
403	2, 60530		46	57	03
404	2, 60638	107	50	22°, 00	00
405	2, 60745		54	03	67°, 57
406	2, 60853		57	06	54
407	2, 60959		24°, 01	09	51
408	2, 61066	106	05	12	48
409	2, 61172		09	15	45
410	2, 61278		13	18	42
411	2, 61384		16	[illegible]1	39
412	2, 61490	105	20	24	36
413	2, 61595		24	27	33
414	2, 61700		28	30	30
415	2, 61805		31	32	28
416	2, 61909	104	35	35	25
417	2, 62014		39	38	22
418	2, 62118		43	41	19
419	2, 62221		47	44	16
420	2, 62325	103	51	47	13
421	2, 62428		54	50	10
422	2, 62531		58	53	07
423	2, 62634		25°, 02	56	04
424	2, 62737	102	05	59	01
425	2, 62839		09	23°, 01	66°, 59
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
426	2, 62941	102	25°, 13	23°, 05	66°, 55
427	2, 63043		17	08	52
428	2, 63144		21	10	50
429	2, 63246	101	25	13	47
430	2, 63347		29	16	44
431	2, 63448		32	19	41
432	2, 63548		36	22	38
433	2, 63649	100	40	25	35
434	2, 63749		44	28	32
435	2, 63849		47	31	29
436	2, 6[illegible]949		51	34	26
437	2, 64048	99	55	37	23
438	2, 64147		59	39	21
439	2, 64246		26°, 03	42	18
440	2, 64345		06	45	15
441	2, 64444	98	10	48	12
442	2, 64542		14	51	09
443	2, 64640		18	54	06
444	2, 64738		22	57	03
445	2, 64836	97	26	24°, 00	00
446	2, 64933		29	02	65°, 58
447	2, 65031		33	05	55
448	2, 65128		37	08	52
449	2, 65225	96	41	11	49
450	2, 65321		45	14	46
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
451	2, 65418	96	26°, 49	24°, 17	65°, 43
452	2, 65514		53	20	40
453	2, 65610		56	22	38
454	2, 65706		27°, 00	25	35
455	2, 65801	95	04	28	32
456	2, 65896		08	31	29
457	2, 65992		12	34	26
458	2, 66086		16	37	23
459	2, 66181		20	40	20
460	2, 66276	94	23	42	18
461	2, 66370		27	45	15
462	2, 66464		31	48	12
463	2, 66558		35	51	09
464	2, 66652		39	54	06
465	2, 66745	93	43	56	04
466	2, 66839		47	59	01
467	2, 66932		51	25°, 02	64°, 58
468	2, 67025		54	05	55
469	2, 67117		58	08	52
470	2, 67210	92	28°, 02	11	49
471	2, 67302		06	13	47
472	2, 67394		10	16	44
473	2, 67486		14	19	41
474	2, 67578		18	22	38
475	2, 67669	91	22	25	35
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
476	2, 67761	91	28°, 26	25°, 27	64°, 33
477	2, 67852		30	30	30
478	2, 67943		34	33	27
479	2, 68033		37	36	24
480	2, 68124	90	41	39	21
481	2, 68214		45	42	18
482	2, 68305		49	44	16
483	2, 68395		53	47	13
484	2, 68484		57	50	10
485	2, 68574		29°, 01	53	07
486	2, 68664	89	05	55	05
487	2, 68753		09	58	02
488	2, 68842		13	26°, 01	63°, 59
489	2, 68931		17	04	56
490	2, 69020		21	07	53
491	2, 69108	88	25	09	51
492	2, 69196		29	12	48
493	2, 69285		33	15	45
494	2, 69373		36	18	42
495	2, 69460		40	20	40
496	2, 69548		44	23	37
497	2, 69636	87	48	26	34
498	2, 69723		52	29	31
499	2, 69810		56	31	29
500	2, 69897		30°, 00	34	26
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
501	2, 69984	86	30°, 04	26°, 37	63°, 23
502	2, 70070		08	40	20
503	2, 70157		12	42	18
504	2, 70243		16	45	15
505	2, 70329		20	48	12
506	2, 70415		24	51	09
507	2, 70501	85	28	53	07
508	2, 70586		32	56	04
509	2, 70672		36	59	01
510	2, 70757		40	27°, 02	62°, 58
511	2, 70842		44	04	56
512	2, 70927		48	07	53
513	2, 71012	84	52	10	50
514	2, 71096		56	12	48
515	2, 71181		31°, 00	15	45
516	2, 71265		04	18	42
517	2, 71349		08	21	39
518	2, 71433		12	23	37
519	2, 71517	83	16	26	34
520	2, 71600		20	29	31
521	2, 71684		24	31	29
522	2, 71767		28	34	26
523	2, 71850		32	37	23
524	2, 71933		36	40	20
525	2, 72016		40	42	18
Ἀριθ.	Λογαριθ.	Διαφ.	Ἡμιτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
526	2, 72099	82	31°, 44	27°, 45	62°, 15
527	2, 72181		48	48	12
528	2, 72263		53	50	10
529	2, 72346		57	53	07
530	2, 72428		32°, 01	56	04
531	2, 72509		05	58	02
532	2, 72591		09	28°, 01	61°, 59
533	2, 72673		13	04	56
534	2, 72754	81	17	06	54
535	2, 72835		21	09	51
536	2, 72916		25	12	48
537	2, 72997		29	14	46
538	2, 73078		33	17	43
539	2, 73159		37	20	40
540	2, 73239	80	41	22	38
541	2, 73320		45	25	35
542	2, 73400		50	28	32
543	2, 73480		54	30	30
544	2, 73560		58	33	27
545	2, 73640	79	33°, 02	36	24
546	2, 73719		06	38	22
547	2, 73799		10	41	19
548	2, 73878		14	44	16
549	2, 73957		18	46	14
550	2, 74036		22	49	11
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
551	2, 74115		33°, 26	28°, 52	61°, 08
552	2, 74194	78	31	54	06
553	2, 74272		35	57	03
554	2, 74351		39	59	01
555	2, 74429		43	29°, 02	60°, 58
556	2, 74507		47	05	55
557	2, 74585		51	07	53
558	2, 74663		55	10	50
559	2, 74741		34°, 00	13	47
560	2, 74819	77	04	15	45
561	2, 74896		08	18	42
562	2, 74974		12	20	40
563	2, 75051		16	23	37
564	2, 75128		20	26	34
565	2, 75205		24	28	3[illegible]
566	2, 75282		29	31	29
567	2, 75358		33	33	27
568	2, 75435	76	37	36	24
569	2, 75511		41	39	21
570	2, 75587		45	41	19
571	2, 75664		49	44	16
572	2, 75740		54	46	14
573	2, 75815		58	49	11
574	2, 75891		35°, 02	52	08
575	2, 75967		06	54	06
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
576	2, 76042	75	35°, 10	57	03
577	2, 76118		15	59	01
578	2, 76193		19	30°, 02	59°, 58
579	2, 76268		23	04	56
580	2, 76343		27	07	53
581	2, 76418		32	10	50
582	2, 76492		36	12	48
583	2, 76567	74	40	15	45
584	2, 76641		44	17	43
585	2, 76716		48	20	40
586	2, 76790		53	22	38
587	2, 76864		57	25	35
588	2, 76938		36°, 01	28	32
589	2, 77011		05	30	30
590	2, 77085		10	33	27
591	2, 77159	73	14	35	25
592	2, 77232		18	38	22
593	2, 77305		23	40	20
594	2, 77379		27	43	17
595	2, 77452		31	45	15
596	2, 77525		35	48	12
597	2, 77597		40	50	10
598	2, 77670		44	53	07
599	2, 77743		48	56	04
600	2, 77815		52	58	02
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
601	2, 77887	72	57	31°, 01	58°, 59
602	2, 77960		37°, 01	03	57
603	2, 78032		05	06	54
604	2, 78104		10	08	52
605	2, 78175		14	11	49
606	2, 78247		18	13	47
607	2, 78319		23	16	44
608	2, 78390		27	18	42
609	2, 78462	71	32	21	39
610	2, 78533		36	23	37
611	2, 78604		40	26	34
612	2, 78675		44	28	32
613	2, 78746		49	31	29
614	2, 78817		53	33	27
615	2, 78887		58	36	24
616	2, 78958		38°, 02	38	22
617	2, 79028		06	41	19
618	2, 79099	70	11	43	17
619	2, 79169		15	46	14
620	2, 79239		19	48	12
621	2, 79309		24	51	09
622	2, 79379		28	53	07
623	2, 79449		33	56	04
624	2, 79518		37	58	02
625	2, 79588		41	32°, 01	57°, 59
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
626	2, 79657	69	38°, 46	32°, 03	57°, 57
627	2, 79727		50	05	55
628	2, 79796		55	08	52
629	2, 79865		59	10	50
630	2, 79934		39°, 03	13	47
631	2, 80003		08	15	45
632	2, 80072		12	18	42
633	2, 80140		17	20	40
634	2, 80209	68	21	23	37
635	2, 80277		26	25	35
636	2, 80346		30	28	32
637	2, 80414		34	30	30
638	2, 80482		39	33	27
639	2, 80550		43	35	25
640	2, 80618		48	37	23
641	2, 80686		52	40	20
642	2, 80753		57	42	18
643	2, 80821		40°, 01	45	15
644	2, 80889	67	06	47	13
645	2, 80956		10	50	10
646	2, 81023		15	52	08
647	2, 81090		19	54	06
648	2, 81157		24	57	03
649	2, 81224		28	59	01
650	2, 81291		33	33°, 02	56°, 58
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
651	2, 81358		40°, 37	33°, 04	56°, 56
652	2, 81425		42	06	54
653	2, 81491		46	09	51
654	2, 81558		51	11	49
655	2, 81624	66	55	14	46
656	2, 81690		41°, 00	16	44
657	2, 81756		05	18	42
658	2, 81823		09	21	39
659	2, 81888		14	23	37
660	2, 81954		18	26	34
661	2, 82020		23	28	32
662	2, 82086		28	30	30
663	2, 82151		32	33	27
664	2, 82217		37	35	25
665	2, 82282	65	41	38	22
666	2, 82347		46	40	20
667	2, 82413		51	42	18
668	2, 82478		55	45	15
669	2, 82543		42°, 00	47	13
670	2, 82607		05	50	10
671	2, 82672		09	52	08
672	2, 82737		14	54	06
673	2, 82801		18	57	03
674	2, 82866		23	59	01
675	2, 82930	64	27	34°, 01	55°, 59
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
676	2, 82995	64	42°, 32	34°, 04	55°, 56
677	2, 83059		37	06	54
678	2, 83123		41	08	52
679	2, 83187		46	11	49
680	2, 83251		51	13	47
681	2, 83315		56	16	44
682	2, 83378		43°, 00	18	42
683	2, 83442		05	20	40
684	2, 83506		09	23	37
685	2, 83569	63	14	25	35
686	2, 83632		19	27	33
687	2, 83696		24	30	30
688	2, 83759		29	32	28
689	2, 83822		33	34	26
690	2, 83885		38	37	23
691	2, 83948		43	39	21
692	2, 84011		48	41	19
693	2, 84073		52	43	17
694	2, 84136		57	46	14
695	2, 84198		44°, 02	48	12
696	2, 84261	62	07	50	10
697	2, 84323		11	53	07
698	2, 84385		16	55	05
699	2, 84448		21	57	03
700	2, 84510		26	35°, 00	00
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
701	2, 84572	62	44°, 31	35°, 02	54°, 58
702	2, 84634		36	04	56
703	2, 84695		41	07	53
704	2, 84757		45	09	51
705	2, 84819		50	11	49
706	2, 84880		55	14	46
707	2, 84942	61	45°, 00	16	44
708	2, 85003		04	18	42
709	2, 85065		09	20	40
710	2, 85126		14	23	37
711	2, 85187		19	25	35
712	2, 85248		24	27	33
713	2, 85309		29	30	30
714	2, 85370		34	32	28
715	2, 85431		39	34	26
716	2, 85491		44	36	24
717	2, 85552		49	39	21
718	2, 85612		54	41	19
719	2, 85673	60	59	43	17
720	2, 85733		46°, 04	45	15
721	2, 85793		09	48	12
722	2, 85854		14	50	10
723	2, 85914		19	52	08
724	2, 85974		24	54	06
725	2, 86034		29	57	03
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
726	2,86094	60	46°, 34	59	01
727	2,86153		39	36°, 01	53°, 59
728	2,86213		44	03	57
729	2,86273		49	06	54
730	2,86332		54	08	52
731	2,86392		59	10	50
732	2,86451	59	47°, 04	12	48
733	2,86510		09	15	45
734	2,86570		14	17	43
735	2,86629		19	19	41
736	2,86688		24	21	39
737	2,86747		29	24	36
738	2,86806		34	26	34
739	2,86864		39	28	32
740	2,86923		44	30	30
741	2,86982		49	32	28
742	2,87040		55	35	25
743	2,87099	58	48°, 00	37	23
744	2,87157		05	39	21
745	2,87216		10	41	19
746	2,87274		15	43	17
747	2,87332		20	46	14
748	2,87390		26	48	12
749	2,87448		31	50	10
750	2,87506		36	52	08
Ἀριθ	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ	Λογάριθ.	Διαφ	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
751	2, 87564	58	48°, 41	36°, 54	53°, 06
752	2, 87622		46	57	03
753	2, 87679		51	59	01
754	2, 87737	57	57	37°, 01	52°, 59
755	2, 87795		49°, 02	03	57
756	2, 87852		07	05	55
757	2, 87910		13	08	52
758	2, 87967		18	10	50
759	2, 88024		23	12	48
760	2, 88081		28	14	46
761	2, 88138		34	16	44
762	2, 88195		39	19	41
763	2, 88252		44	21	39
764	2, 88309		49	23	37
765	2, 88366		55	25	35
766	2, 88423		50°, 00	27	33
767	2, 88479		06	29	31
768	2, 88536		11	32	28
769	2, 88593	56	16	34	26
770	2, 88649		22	36	24
771	2, 88705		27	38	22
772	2, 88762		33	40	20
773	2, 88818		38	42	18
774	2, 88874		43	44	16
775	2, 88930		49	47	13
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
776	2, 88986	56	54	37°, 49	52°, 11
777	2, 89042		51°, 00	51	09
778	2, 89098		05	53	07
779	2, 89154		11	55	05
780	2, 89209		16	57	03
781	2, 89265		22	59	01
782	2, 89321		27	38°, 02	51°, 58
783	2, 89376		33	04	56
784	2, 89432	55	38	06	54
785	2, 89487		44	08	52
786	2, 89542		49	10	50
787	2, 89597		55	12	48
788	2, 89653		52°, 00	14	46
789	2, 89708		06	17	43
790	2, 89763		12	19	41
791	2, 89818		17	21	39
792	2, 89872		23	23	37
793	2, 89927		29	25	35
794	2, 89982		34	27	33
795	2, 90037		40	29	31
796	2, 90091		45	31	29
797	2, 90146	54	51	33	27
798	2, 90200		57	36	24
799	2, 90255		53°, 03	38	22
800	2, 90309		08	40	20
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
801	2, 90363	54	53°, 14	38°, 42	51°, 18
802	2, 90417		19	44	16
803	2, 90471		25	46	14
804	2, 90526		31	48	12
805	2, 90580		37	50	10
806	2, 90633		42	52	08
807	2, 90687		48	54	06
808	2, 90741		54	56	04
809	2, 90795		54°, 00	58	02
810	2, 90848		06	39°, 01	50°, 59
811	2, 90902		12	03	57
812	2, 90956	53	18	05	55
813	2, 91009		24	07	53
814	2, 91062		29	09	51
815	2, 91116		35	11	49
816	2, 91169		41	13	47
817	2, 91222		47	15	45
818	2, 91275		53	17	43
819	2, 91328		59	19	41
820	2, 91381		55°, 05	21	39
821	2, 91434		11	23	37
822	2, 91487		17	25	35
823	2, 91540		23	27	33
824	2, 91593		29	29	31
825	2, 91645		35	31	29
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
826	2, 91698	52	55°, 42	39°, 34	50°, 26
827	2, 91750		48	36	24
828	2, 91803		54	38	22
829	2, 91855		56°, 00	40	20
830	2, 91908		06	42	18
831	2, 91960		12	44	16
832	2, 92012		19	46	14
833	2, 92064		25	48	12
834	2, 92117		31	50	10
835	2, 92169		37	52	08
836	2, 92221		43	54	06
837	2, 92272		50	56	04
838	2, 92324		56	58	02
839	2, 92376		57°, 03	40°, 00	00
840	2, 92428		09	02	49°, 58
841	2, 92480		15	04	56
842	2, 92531		21	06	54
843	2, 92583		28	08	52
844	2, 92634		34	10	50
845	2, 92686	51	40	12	48
846	2, 92737		47	14	46
847	2, 92788		54	16	44
848	2, 92839		58°, 00	18	42
849	2, 92891		06	20	40
850	2, 92942		13	22	38
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
851	2, 92993	51	58°, 19	40°, 24	49°, 36
852	2, 93044		26	26	34
853	2, 93095		33	28	32
854	2, 93146		39	30	30
855	2, 93197		46	32	28
856	2, 93247		52	34	26
857	2, 93298		59	36	24
858	2, 93349		59°, 06	38	22
859	2, 93399		13	40	20
860	2, 93450		19	42	18
861	2, 93500		26	44	16
862	2, 93551	50	33	46	14
863	2, 93601		39	48	12
864	2, 93651		46	50	10
865	2, 93702		53	52	08
866	2, 93752		60°, 00	54	06
867	2, 93802		07	56	04
868	2, 93852		14	58	02
869	2, 93902		21	41°, 00	00
870	2, 93952		28	02	48°, 58
871	2, 94002		35	03	57
872	2, 94052		42	05	55
873	2, 94101		49	07	53
874	2, 94151		56	09	51
875	2, 94201		61°, 03	11	49
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
876	2, 94250	50	61°, 10	41°, 13	48°, 47
877	2, 94300		17	15	45
878	2, 94349		24	17	43
879	2, 94399		31	19	41
880	2, 94448		39	21	39
881	2, 94498	49	46	23	37
882	2, 94547		53	25	35
883	2, 94596		62°, 00	27	33
884	2, 94645		08	29	31
885	2, 94694		15	31	29
886	2, 94743		23	33	27
887	2, 94792		30	35	25
888	2, 94841		37	36	24
889	2, 94890		45	38	22
890	2, 94939		53	40	20
891	2, 94988		63°, 00	42	18
892	2, 95036		08	44	16
893	2, 95085		15	46	14
894	2, 95134	48	23	48	12
895	2, 95182		31	50	10
896	2, 95231		38	52	08
897	2, 95279		46	54	06
898	2, 95328		54	56	04
899	2, 95376		64°, 02	57	03
900	2, 95424		10	59	01
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Σιωεφ.
901	2, 95472	48	64°, 18	42°, 01	47°, 59
902	2, 95521		25	03	57
903	2, 95569		33	05	55
904	2, 95617		41	07	53
905	2, 95665		49	09	51
906	2, 95713		58	11	49
907	2, 95761		65°, 06	13	47
908	2, 95808		14	14	46
909	2, 95856		22	16	44
910	2, 95904		30	18	42
911	2, 95952		39	20	40
912	2, 95999		47	22	38
913	2, 96047	47	56	24	36
914	2, 96095		66°, 04	26	34
915	2, 96142		12	28	32
916	2, 96189		21	29	31
917	2, 96237		30	31	29
918	2, 96284		38	33	27
919	2, 96331		47	35	25
920	2, 96379		56	37	23
921	2, 96426		67°, 04	39	21
922	2, 96473		13	41	19
923	2, 96520		22	43	17
924	2, 96567		31	44	16
925	2, 96614		40	46	14
Ἀριθ.	Λογαριθ.	Διαφ.	Ἡμιτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
926	2, 96661	47	49	42°, 48	47°, 12
927	2, 96708		58	50	10
928	2, 96755		68°, 07	52	08
929	2, 96801		17	54	06
930	2, 96848		26	55	05
931	2, 96895		36	57	03
932	2, 96941		45	59	01
933	2, 96988		55	43°, 01	46°, 59
934	2, 97035		69°, 05	03	57
935	2, 97081		14	05	55
936	2, 97128	46	24	06	54
937	2, 97174		33	08	52
938	2, 97220		43	10	50
939	2, 97266		53	12	48
940	2, 97313		70°, 03	14	46
941	2, 97359		13	16	44
942	2, 97405		23	17	43
943	2, 97451		34	19	41
944	2, 97497		44	21	39
945	2, 97543		55	23	37
946	2, 97589		71°, 05	25	35
947	2, 97635		16	26	34
948	2, 97681		27	28	32
949	2, 97727		37	30	30
950	2, 97772		48	32	28
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
951	2, 97818		59	43°, 34	46°, 26
952	2, 97864		72°, 11	36	24
953	2, 97909		22	37	23
954	2, 97955	45	33	39	21
955	2, 98000		45	41	19
956	2, 98046		56	43	17
957	2, 98091		73°, 08	45	15
958	2, 98136		20	46	14
959	2, 98182		32	48	12
960	2, 98227		45	50	10
961	2, 98272		57	52	08
962	2, 98317		74°, 09	53	07
963	2, 98363		22	55	05
964	2, 98408		35	57	03
965	2, 98453		48	59	01
966	2, 98498		75°, 01	44°, 01	45°, 59
967	2, 98543		14	02	58
968	2, 98587		28	04	56
969	2, 98632		42	06	54
970	2, 98677		56	08	52
971	2, 98722		76°, 10	09	51
972	2, 98767		25	11	49
973	2, 98811		39	13	47
974	2, 98856	44	54	15	45
975	2, 98900		77°, 10	16	43
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.
976	2, 98945	44	77°, 25	44°, 18	45°, 42
977	2, 98989		41	20	40
978	2, 99034		58	22	38
979	2, 99078		78°, 14	24	36
980	2, 99123		31	25	35
981	2, 99167		49	27	33
982	2, 99211		79°, 07	29	31
983	2, 99255		25	31	29
984	2, 99299		44	32	28
985	2, 99344		80°, 04	34	26
986	2, 99388		24	36	24
987	2, 99432		45	38	22
988	2, 99476		81°, 07	39	21
989	2, 99520		30	41	19
990	2, 99563		53	43	17
991	2, 99607		82°, 18	44	16
992	2, 99651		45	46	14
993	2, 99695	43	83°, 13	48	12
994	2, 99739		43	50	10
995	2, 99782		84°, 16	51	09
996	2, 99826		52	53	07
997	2, 99869		85°, 34	55	05
938	2, 99913		86°, 23	57	03
999	2, 99956		87°, 27	58	02
1000	3, 00000		90°, 00	45°, 00	00
Ἀριθ.	Λογάριθ.	Διαφ.	Ἡμίτ.	Ἐφαπτ.	Συνεφ.

ΠΑΡΑΠΟΜΠΑΙ

Ἐπὶ τὰ κατ' Εὐκλείδην Στοιχεῖα· ὅσα ἐπὶ τῆς παρούσης Πραγματείας ἐνεργείᾳ ἅπαντα, ἢ δυνάμει περιεχόμενα.

Ἐκ τοῦ Α'. τῶν Στοιχείων.

Πρότασ.	Α	§. 324.
	Β	§. 292.
	Γ	§. αὐτ.
	Δ	§. 316.
	Ε	§. 317.
	Ϛ	§. 321.
	Ζ	Ἔστι λημματικὴ εἰς δεῖξιν τῆς ἐφεξῆς παρὰ τῷ Στοιχειωτῇ προσληφθεῖσα, ἡμῖν δὲ περιττή.
	Η	§. 323.
	Θ	§. 333.
	Ι	§. 337.
	ΙΑ	§. 334.
	ΙΒ	§. 339.
	ΙΓ	§. 269.
	ΙΔ	§. 270.
	ΙΕ	§. 278.
	Πόρισ.	§. 275.
	ΙϚ	§. 261. 306.
	ΙΖ	§. 301. εὐπόριστος.
	ΙΗ	§. 340.
	ΙΘ	§. 340. ἕπεται.

Πρότασ. Κ	———	§. 289. Ἔϛι δὲ οἷον ἀξίωμα, παρὰ τῷ Ἀρχιμήδει.
ΚΑ	———	§. Λημματική, καὶ ἐδὲν ἡμῖν συμβάλλεται· ῥάϛη δὲ ἄλλως ἀποδειχθῆναι.
ΚΒ	———	§. 324.
ΚΓ	———	§. 327.
ΚΔ	———	§. } Λημματικαὶ εἰς δεῖξιν τῆς ἐφεξῆς συντελῦσαι.
ΚΕ	———	§. }
Κϛ	———	§. 320.
ΚΖ	———	§. 280.
ΚΗ	———	§. 279. 281.
ΚΘ	———	§. 282. 283. 284.
Λ	———	§. 285.
ΛΑ	———	§. 327. 279. ἐκ τύτων γὰρ ῥᾶϛα συνάπτεται.
ΛΒ	———	§. 301. 306.
ΛΓ	———	§. 400.
ΛΔ	———	§. 312. 400. τὸ δὲ ὑπὸ τῆς διαγωνίυ δίχα τέμνεσθαι τὸ παραλληλόγραμμον ἐξ αὐτῆς τῆς κατασκευῆς δῆλον.
ΛΕ	———	§. } 459.
Λϛ	———	§. }
ΛΖ	———	§. }
ΛΗ	———	§. }
ΛΘ	———	§. } 482.
Μ	———	§. }
ΜΑ	———	§. 459.
ΜΒ	———	§. 463.
ΜΓ	———	§. Παρελείφθη ὡς μηδὲν ἡμῖν συντελῦσα, κἂν ἄλλως διὰ τῶν ἐν §. 312, καὶ 400, εὐαπόδεικτος.

ΜΔ

Πρότασ. ΜΔ —— §. 460. 463. ῥᾷστα ἐπιφέρεται.

ΜΕ —— §. 465. 466.

Μϛ —— §. 332.

ΜΖ —— §. 483.

ΜΗ —— §. Ἔστιν ἡ ἀντίστροφος· ὡς δὲ μὴ πάνυ τι χρειώδης παρῴφθη.

Ἐκ τοῦ Β΄. τῶν Στοιχείων.

Ἁπλῶς μὲν γεωμετρικευομένοις, ἀπαραιτήτως τὰς ἐν τῷ Β΄. τῷδε Βιβλίῳ προτάσεις θεωρητέον. Διὰ γὰρ τούτων αἱ τῶν εὐθειῶν παρίστανται δυνάμεις· τουτέστιν ὅπως τὰ ἀπὸ εὐθειῶν, ἢ ὑπὸ εὐθειῶν, ὅλων τε καὶ τῶν κατ᾽ αὐτὰς μερῶν, συνεστῶτα τετράγωνά τε καὶ ὀρθογώνια, πρὸς ἄλληλα ἔχει παντοίως παραβαλλόμενα· ὁ δ᾽ Ἀναλύτωρ αὐτομάτως τοῖς τοιούτοις τὰ πολλὰ περιπίπτει, τὰς τῆς Καθόλου Λογιστικῆς μεθόδους (ὅρα §. 752.) ἐν χρήσει ποιούμενος· οὐδὲν γὰρ ἔργον διὰ τοῦ γραμματικοῦ ὑπολογισμοῦ, ταῦτα ἀποδεικνύειν. Καίτοι καὶ διὰ τῆς κοινοτέρας Ἀριθμητικῆς, ῥᾴδιον τὰς πλείους τῶν τοιῶνδε προτάσεων μετιόντας, ἀληθευούσας εὑρεῖν. ἀριθμῶν δηλαδὴ ἀντὶ τῶν εὐθειῶν ὑποβαλλομένων· οἷον·

Πρότασ. Α —— (§. 56.)

$$\begin{array}{rcl} 10 & = & (5 + 3 + 2) \\ 4 & & 4 \\ \hline 40 & = & \left.\begin{array}{r} 20 \\ 12 \\ 8 \end{array}\right\} = 40 \end{array}$$

Β —— (§. 56.)

$$\begin{array}{rcl} 8 & = & (5 + 3) \\ 8 & & 8 \\ \hline 64 & = & \left.\begin{array}{r} 40 \\ 24 \end{array}\right\} = 64. \end{array}$$

Πρότασ. Γ —— (§. 56.) $8 = (5 + 3)$ ἔσαι

$$8\times5 = (5\times3) + (5\times5).$$
$$40 = 15 + 25 = 40$$

Δ —— (§. 136.) $34 = (30 + 4)$, ἔσαι

$$\begin{array}{r} 34 \\ \hline 1156 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 30\times30 = 9 \\ 60\times4 = 24 \\ 4\times4 = 16 \\ \hline 1156 \end{array}$$

Ε —— (§. 56.) $10 = (5+5) = (7+3)$

Διαφορᾶς ἴσης $7 - 5 = 2$, ἔσαι

$$(7\times3 + 2\times2) = (5\times5).$$
$$21 + 4 = 25.$$

ς —— $8 = (4 + 4)$. Ἐὰν οὖν προστεθῇ 2, ἔσαι τὸ ὑπὸ τοῦ συνόλου 10, καὶ τοῦ προστεθέντος 2, σὺν τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισ. 4, τετραγ. (4×4), ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἅμα καὶ τοῦ προστεθέντος, ὡς ἀφ' ἑνὸς, τετραγώνῳ. (6×6).

$$\left.\begin{array}{r} 10\times2 = 20 \\ 4\times4 = 16 \end{array}\right\} = (6\times6)$$
$$36 = 36$$

Ζ —— $9 = 5 + 4$, ἔσαι,

$$(9\times9)+(5\times5) = 2(9\times5)+(4\times4)$$
$$81 + 25 = 90 + 16,$$
$$106 = 106$$

Η —

Πρότασ. Η —— $10=(5+5)$ ἐὰν προστεθῇ 6, ἔσαι

$$\left.\begin{array}{r} 5\times(5+6)\cdot 4=220 \\ 6\times 6 \;=\; 36 \end{array}\right\} = 16\times 16$$

$$256 = 256$$

Θ —— $6=(3+3)=(4+2)$, ἔσαι

$$\left.\begin{array}{r} (4\times 4)=16 \\ (2\times 2)=4 \end{array}\right\} = 2\cdot\left\{\begin{array}{r} (3\times 3)=9 \\ (1\times 1)=1 \end{array}\right\}$$

$$20 = 20$$

Ι —— $12=(6+6)$ ἐὰν προστεθῇ 5, ἔσαι

$$\left.\begin{array}{r} (12+5)\times(12+5)=289 \\ 5\times 5 \;=\; 25 \end{array}\right\} =$$

$$314$$

$$\left.\begin{array}{r} (6\times 6)\ 2 = 72 \\ (11\times 11)\ 2 = 242 \end{array}\right\} =$$

$$314$$

ΙΑ —— §. 446.
ΙΒ ——
ΙΓ ——
ΙΔ —— §. 452. 465. 466. 479.

Ἐκ τοῦ Γ'. τῶν Στοιχείων.

Πρότασ. Α —— §. 361.
Β —— §. 366.
Γ —— §. 359.
Δ —— Ἐστι πρότασις ἀποφατική.
Ε —— Αὐτόθεν δήλη.
Ϛ —— Ὡσαύτως.
Ζ ——
Η —— } Ἡμῖν ἀσυντελεῖς.

Πρότασ. Θ	——	§. 362. 363.
Ι	——	§. 363.
ΙΑ	——	ἡμῖν περιτταί.
ΙΒ	——	
ΙΓ	——	
ΙΔ	——	§. 365.
ΙΕ	——	§. 367.
ΙϚ	——	§. 372.
ΙΖ	——	§. 382.
ΙΗ	——	§. 374.
ΙΘ	——	§. 374.
Κ	——	§. 376.
ΚΑ	——	§. 377.
ΚΒ	——	§. ἡμῖν ἀσύμβολοι.
ΚΓ	——	§.
ΚΔ	——	§.
ΚΕ	——	§. 364.
ΚϚ	——	§. 357.
ΚΖ	——	§. Αὐτ.
ΚΗ	——	§. 369.
ΚΘ	——	§.
Λ	——	§. 360.
ΛΑ	——	§. 378. 379.
ΛΒ	——	§. 380.
ΛΓ	——	§. Εὐχερῶς ἐπιλύεται, καὶ οὐ πάνυ πολλῆς χρήσεως ἐστίν.
ΛΔ	——	§. Ὁμοίως καὶ αὕτη· ἕπονται δὲ ἐκ τῆς ΛΒ —— §. 380.
ΛΕ	——	§. 439.
ΛϚ	——	§. 441.
ΛΖ	——	§. Ἔστιν ἡ ἀντίστροφος, καὶ οὐ πάνυτι χρειώδης.

Ἐκ

Ἐκ τȣ̃ Δ'. τῶν Στοιχείων.

Πρόταcσ.	Α	———	Εὐεπίλυτος.
	Β	———	§. 385. 386.
	Γ	———	§. 396.
	Δ	———	§. 394.
	Ε	———	§. 362. 392.
	Ϛ	———	§. 356.
	Ζ	———	§. 396.
	Η	———	§. 394. 395.
	Θ	———	§. 392.
	Ι	———	§. Ἐν τοῖς Ἀναλυτικοῖς.
	ΙΑ	———	Ὅρα ἐν τῷ Σχολίῳ. §. 385. 386.
	ΙΒ	———	§. 396.
	ΙΓ	———	§. 394.
	ΙΔ	———	§. 392.
	ΙΕ	———	§. 385. 393.
	ΙϚ	———	§. 385.

Ἐκ τȣ̃ Ε'. τῶν Στοιχείων.

Πρόταcσ.	Α	———	§. 173.
	Β	———	§. 172.
	Γ	———	§. 183.
	Δ	———	§. 184.
	Ε	———	§. 173.
	Ϛ	———	§. 172.
	Ζ	———	§. 159.
	Η	———	§. 157.
	Θ	———	§. Ἀξιωματική ἐστι.
	Ι	———	Καὶ αὗται καθ' αὑτὰς δῆλαι.
	ΙΑ	———	
	ΙΒ	———	§. 174.

Πρότασ.	ΙΓ	Καθ' αὑτὴν δήλη.
	ΙΔ	§. 165.
	ΙΕ	§. 164.
	Ιϛ	§. 165.
	ΙΖ	§. 171.
	ΙΗ	§. 171.
	ΙΘ	§. 173.
	Κ	Εἰσὶ λημμάτια.
	ΚΑ	
	ΚΒ	§. 182.
	ΚΓ	§. 182. 185.
	ΚΔ	§. 172.
	ΚΕ	μικρὰ συμβάλλεται.

Ἐκ τοῦ ϛ'. τῶν Στοιχείων.

Πρότασ.	Α	§. 473.
	Β	§. 406. 407.
	Γ	§. ῥᾷστα ἐκ τῆς ἀναλύσεως ἐπιφέρεται.
	Δ	§. 416.
	Ε	§. 420.
	ϛ	§. 419.
	Ζ	§. 421. 425.
	Η	§. 453.
	Πόρισ.	§. 452.
	Θ	§. 401.
	Ι	§. 412.
	ΙΑ	§. 409.
	ΙΒ	§. 408.
	ΙΓ	§. 452.
	ΙΔ	§. 478.
	ΙΕ	§.
	Ιϛ	§. 478. 481.

Πρότασ.	ΙΖ	§. 479. 187.
	ΙΗ	§. 424.
	ΙΘ	§. 486.
	Κ	§. 432. 487.
	ΚΑ	§. Καθ' αὑτὴν δήλη.
	ΚΒ	§. 191. 192.
	ΚΓ	§. 475.
	ΚΔ	§. Εὐαπόδεικτος.
	ΚΕ	§. 496.
	Κϛ	§. Ἥκιστα χρειώδης.
	ΚΖ	
	ΚΗ	
	ΚΘ	
	Λ	§. 446.
	ΛΑ	§. 493.
	ΛΒ	§. Λημματική, καὶ αὐτόθεν δήλη.
	ΛΓ	§. 454.
	Πόρ.	§. 470.

Ἐκ τοῦ Ζ'. τῶν Στοιχείων.

Πρότασ.	Α	§. 110 — 113.
	Β	§. 114.
	Γ	§. Ἕπεται ἐκ τοῦ ἀνωτέρω.
	Δ	§. Αὐτοφανές.
	Ε	§. 173.
	ϛ	§. 173.
	Ζ	§. 173.
	Η	§. 173.
	Θ	§. 165.
	Ι	§. Αὐτ.
	ΙΑ	§. 173.
	ΙΒ	§. 173.

ΙΓ —

Πρότασ. ΙΓ	§. 165.	
ΙΔ	§. 182.	
ΙΕ	§. 165.	
ΙϚ	§. 98.	
ΙΖ	§. 164.	
ΙΗ	§. 164. 98.	
ΙΘ	§. 175. 186. 187.	
Κ	§. 193.	
ΚΑ	§. 107. 163.	
ΚΒ	§. 182.	
ΚΓ	§.	116. 163.
ΚΔ	§.	
ΚΕ	§. Ἐξ αὐτοῦ τοῦ ὁρισμοῦ δῆλον.	
ΚϚ	§.	122 — 125.
ΚΖ	§.	
ΚΗ	§.	
ΚΘ	§.	
Λ	Οὐ κεῖται.	
ΛΑ	§. 118.	
ΛΒ	§. 122 — 125.	
ΛΓ	§.	121.
ΛΔ	§.	
ΛΕ	§. 114. 163.	
ΛϚ	§. Παρώφθη.	
ΛΖ	§. 123.	
ΛΗ	§. Παρελείφθη.	
ΛΘ	§. 48.	
Μ	Ἡ τῇ ἀνωτέρᾳ ἀντίστροφος. Ἀλλὰ κοινή.	
ΜΑ	Οὐ κεῖται μὲν, ἐκ δὲ τοῦ §. 122. προχείρως συνάγεται.	

Ἐκ τȣ̃ Η΄. τῶν Στοιχείων.

Πρότασ. Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ϛ
Ζ, Η, Θ, Ι — Οὐδεὶς περὶ τȣ́των λόγος.
ΙΑ ——— §. } 190 - 192.
ΙΒ ——— §. }
ΙΓ ——— §. 189.
ΙΔ ——— } Ἐπιφέρονται ἐκ τȣ̃ §. 141.
ΙΕ ——— }
ΙϚ ——— } Ὡσαύτως.
ΙΖ ——— }
ΙΗ, ΙΘ, Κ, ΚΑ, } Οὐ κεῖνται.
ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, ΚΕ, }
ΚϚ ——— §. } 191.
ΚΖ ——— §. }

Ἐκ τȣ̃ Θ΄. τῶν Στοιχείων.

Πρότασ. Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ϛ, Ζ, Η, Θ, Ι, ΙΑ,
ΙΒ, ΙΓ —— Τȣ́των τὰ πλεῖστα διὰ τȣ̃ Γραμματικȣ̃ ὑπολογισμȣ̃ ῥᾷστα συνάγεται.
ΙΔ ——— §. 122. καὶ τὰ ἐντεῦθεν πορίσματα.
ΙΕ ——— §. - - - - - -
ΙϚ ——— § } 107. 108.
ΙΖ ——— §. }
ΙΗ, ΙΘ, Κ, κτ. Ἄχρι τέλȣς τȣ̃ βιβλίȣ, ἐπὶ τῆς πραγματείας τῆσδε χώρας ȣ̓κ ἔτυχε.

Ἐκ

Ἐκ τοῦ Ι'. τῶν Στοιχείων.

Ἐκ τοῦ ΙΑ'. τῶν Στοιχείων.

Πρότασ. Α	———	§. 253.
Β	———	§. 501.
Γ	———	§. 502.
Δ	———	§. 507.
Ε	———	§. Ἀντίστροφος.
ϛ	———	§. 516.
Ζ	———	§. 272. 500.
Η	———	§. 515.
Θ	———	§. 505.
Ι	———	§. 510.
ΙΑ	———	§. } Οὐ πάνυ Γεωμετρικαί.
ΙΒ	———	§. }
ΙΓ	———	§. 508.
ΙΔ	———	§. 519.
ΙΕ	———	§. 521.
Ιϛ	———	§. 520.
ΙΖ	———	§. 522.
ΙΗ	———	§. 514.
ΙΘ	———	§. 517.
Κ	———	} Παρώφθησαν.
ΚΑ	———	}
ΚΒ	———	§. 891.
ΚΓ	———	§. Ἐκ τῆς ἡγεμένης συνάγεται.
ΚΔ	———	§. . . . .

ΚΕ –

Πρότασ. ΚΕ	———	§. 543.
ΚϚ	———	. . . . .
ΚΖ	———	. . . . .
ΚΗ	———	§. 543.
ΚΘ	———	§. 538.
Λ	———	§. 538.
ΛΑ	———	§. 540.
ΛΒ	———	§. 543.
ΛΓ	———	§. 546. 550.
ΛΔ	———	§. 553. 554.
ΛΕ	———	§. . . . . .
ΛϚ	———	§. . . . . .
ΛΖ	———	§. 552.
ΛΗ	———	§. 514.
ΛΘ	———	§. . . . . .
Μ	———	§. . . . . .

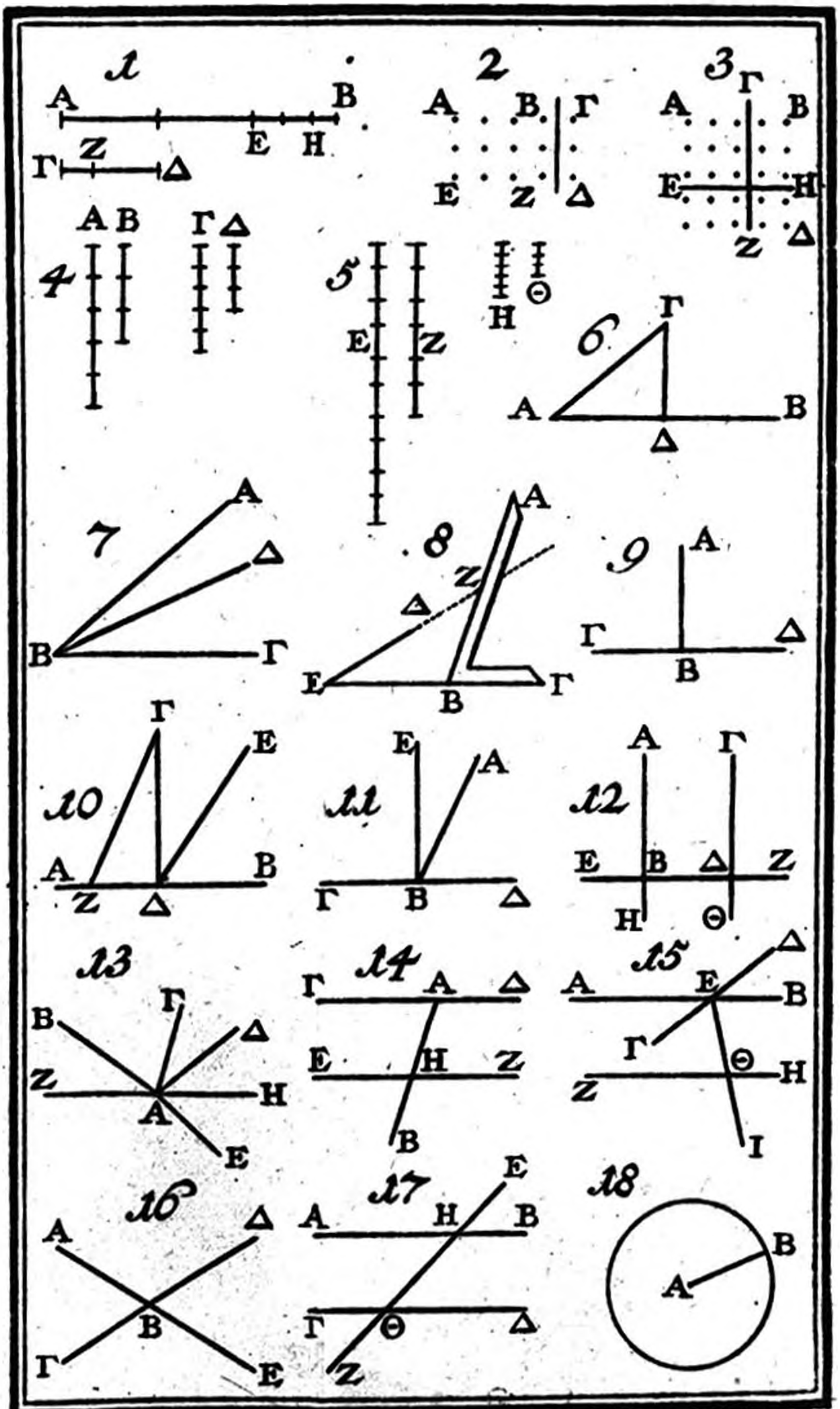
Ἐκ τȣ̃ ΙΒʹ. τῶν Στοιχείων.

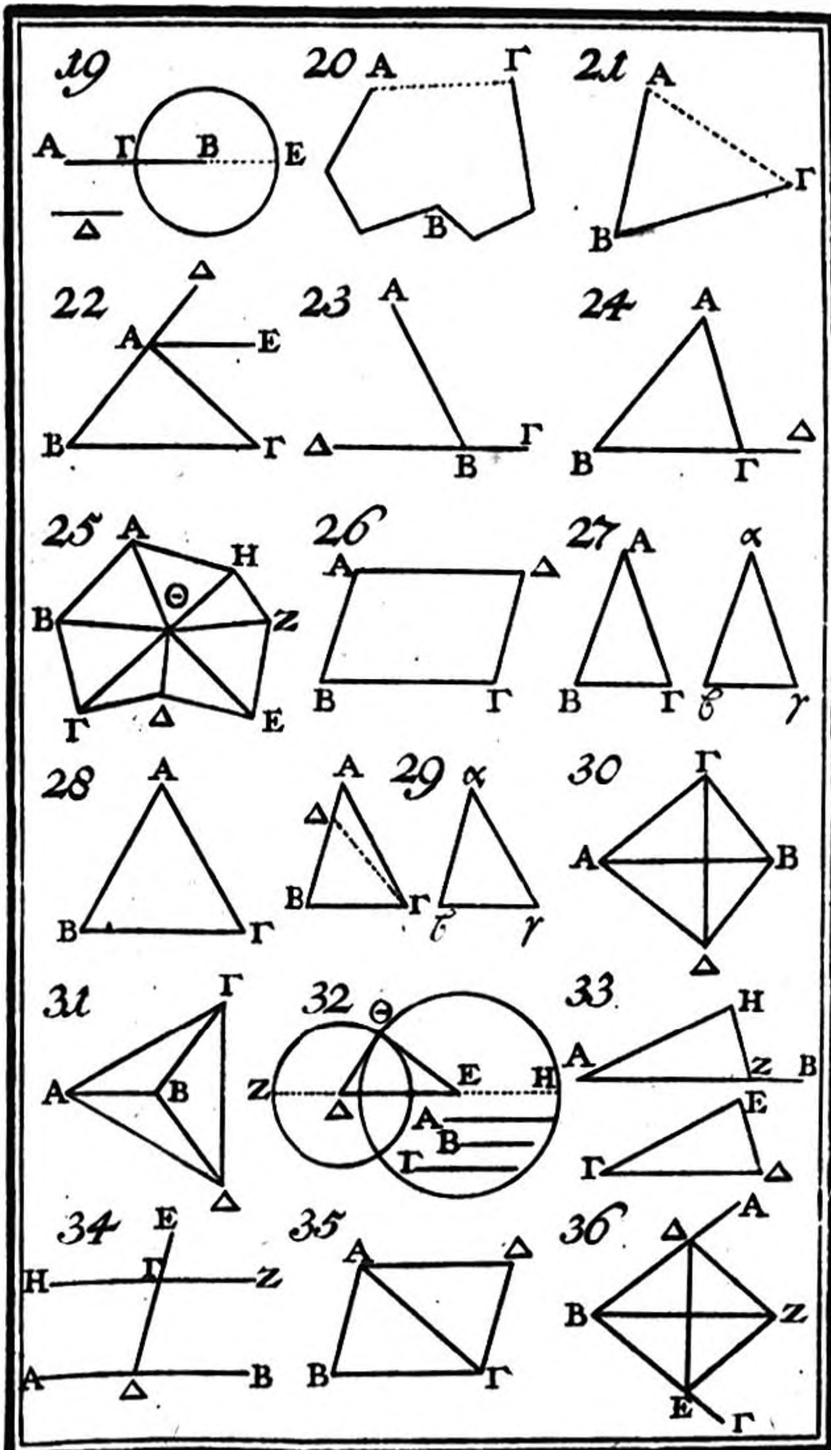
Πρότασ. Α	———	§. 489.
Β	———	§. 490.
Γ	———	§. . . . . .
Δ	———	§. . . . . .
Ε	———	§. 568. 569.
Ϛ	———	§. 568. 569.
Ζ	———	§. 567.
Η	———	§ 550.
Θ	———	§. 553. 554.
Ι	———	§. 567.
ΙΑ	———	§. 543. 568.

Πρότασ. ΙΒ	—— §. 551. 569.	
ΙΓ	—— §. 542. 522.	
ΙΔ	—— §. 542. 569.	
ΙΕ	—— §. 553. 554. 569.	
ΙϚ	—— §.	Εἰσὶ λήμματα.
ΙΖ	—— §.	
ΙΗ	—— §. 583.	

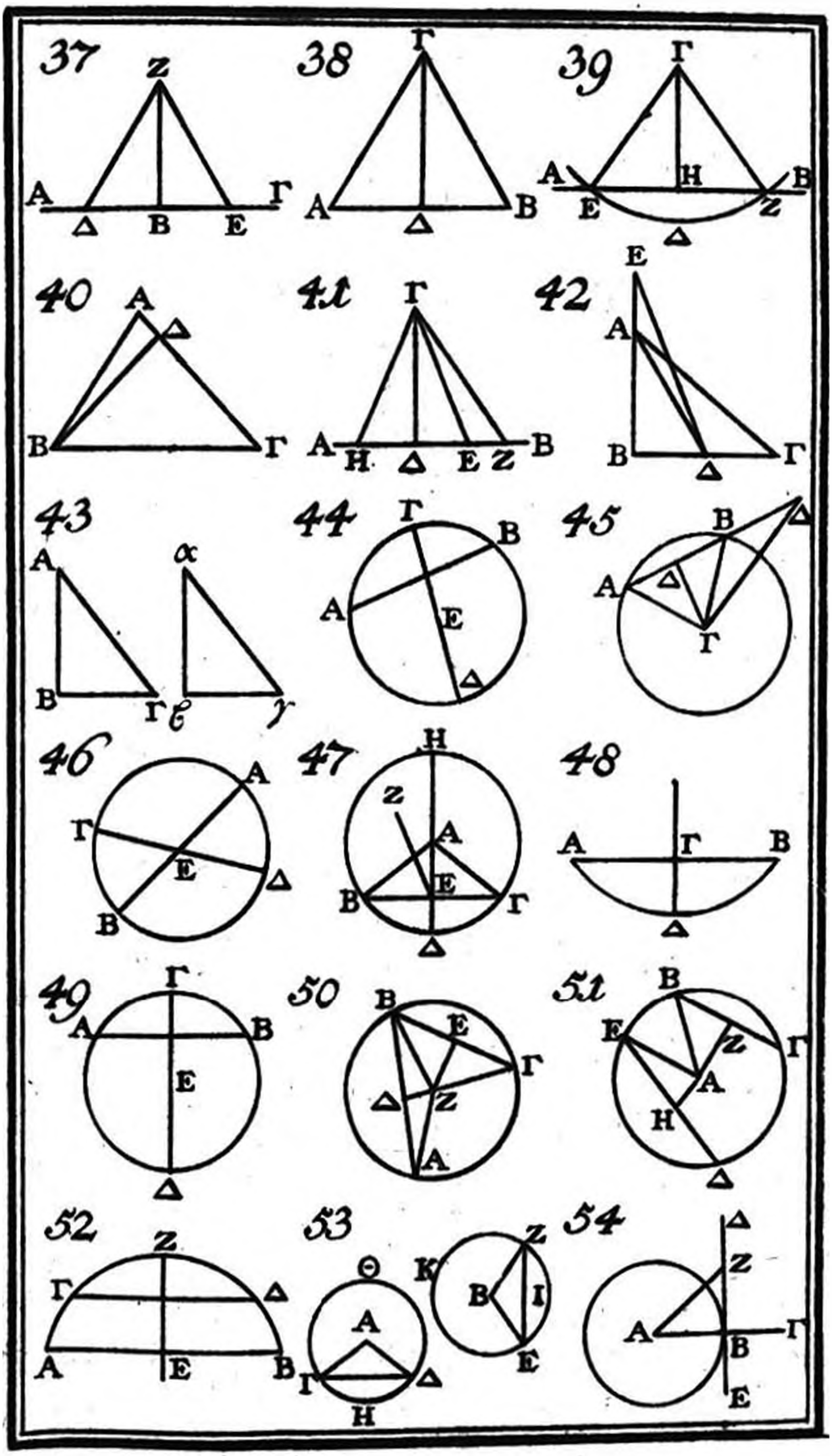
ΤΕΛΟΣ.

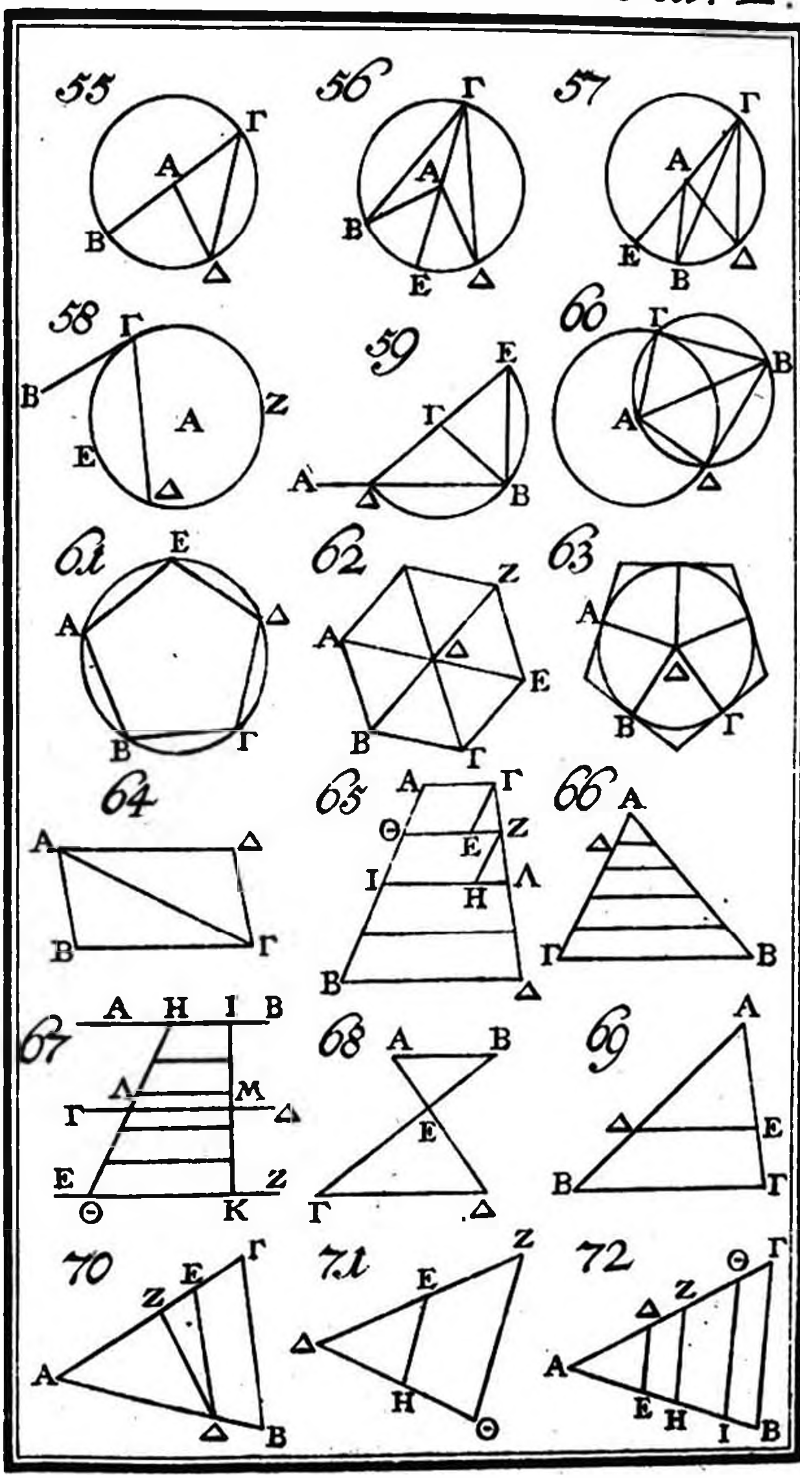
Πίν. α'.

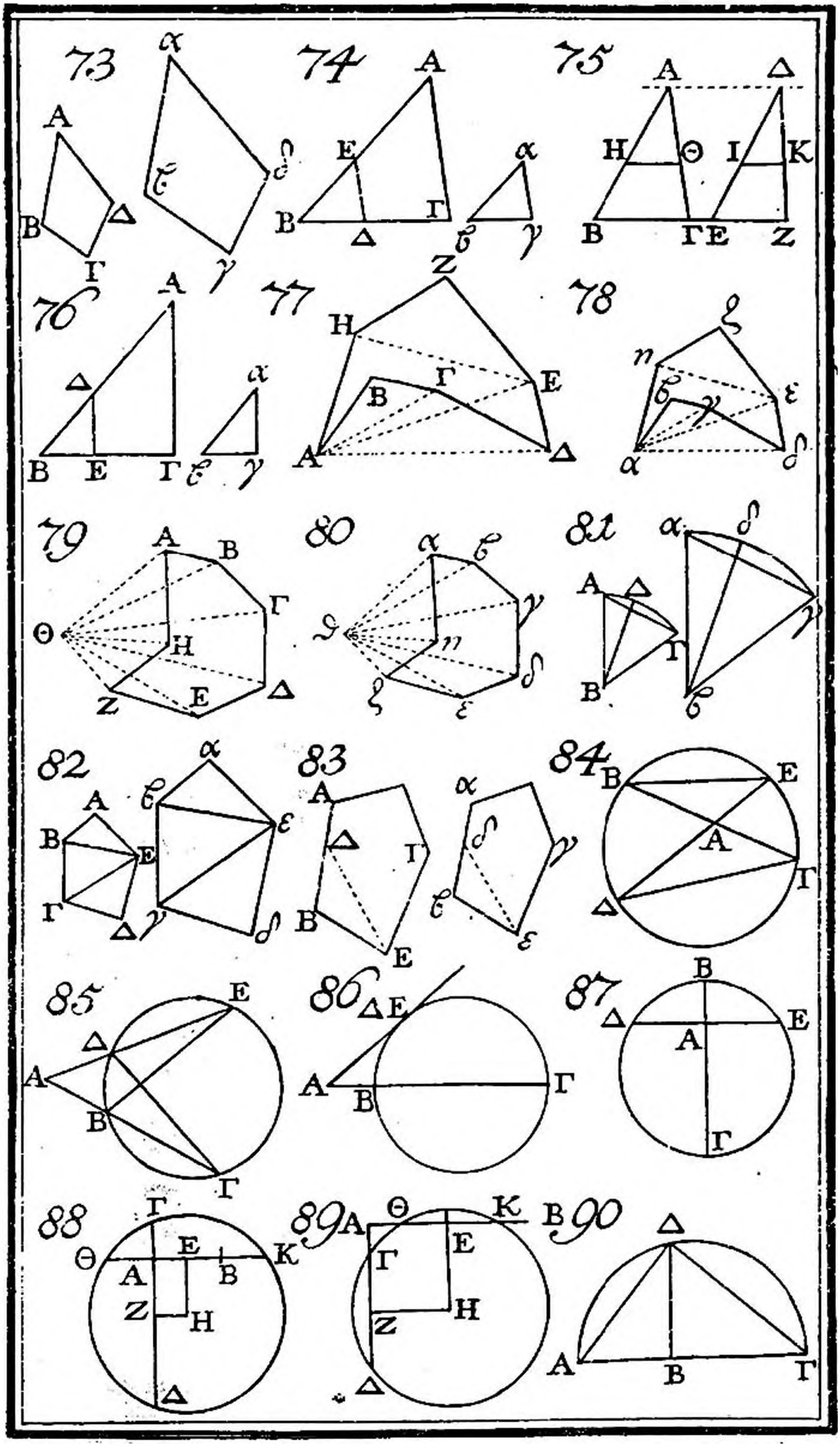



19
Α Γ Β Ε
Δ
20 Α Γ
Β
21 Α
Γ
Β
22 Δ
Α Ε
Β Γ
23 Α
Δ Γ
Β
24 Α
Δ
Β Γ
25 Α
Η
Θ
Β Ζ
Γ Δ Ε
26
Α Δ
Β Γ
27 Α α
Β Γ β γ
28 Α
Β Γ
Α 29 α
Δ
Β Γ
β γ
30 Γ
Α Β
Δ
31 Γ
Α Β
Δ
32 Θ
Ζ Ε Η
Δ Α
Β
Γ
33 Η
Α Ζ Β
Ε
Γ Δ
34 Ε
Η Γ Ζ
Α Δ Β
35
Α Δ
Β Γ
36 Α
Δ
Β Ζ
Ε Γ

Πιν. Γ'

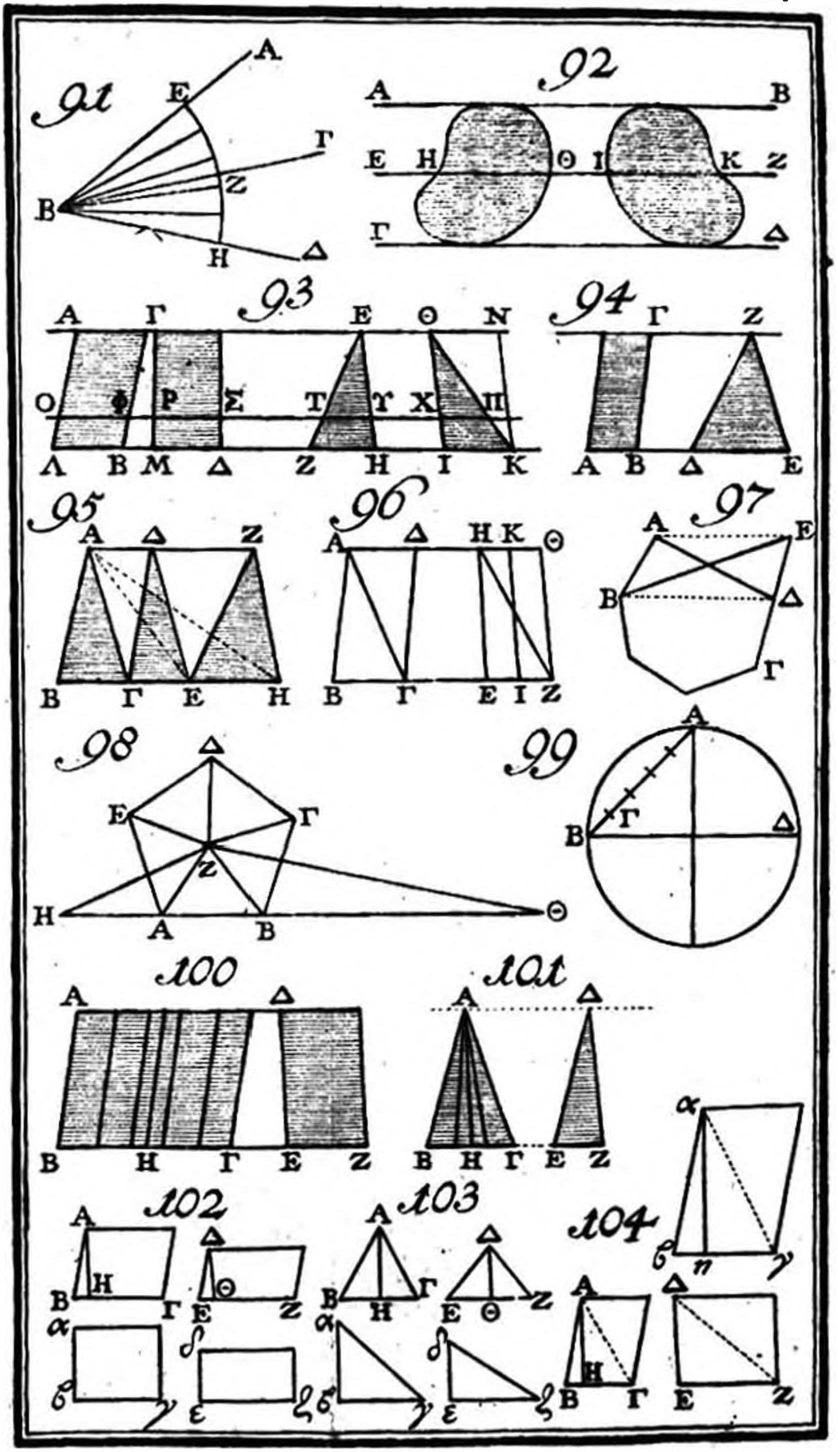

37 Ζ Α Γ Δ Β Ε
38 Γ Α Β Δ
39 Γ Α Η Β Ε Ζ Δ
40 Α Δ Β Γ
41 Γ Α Β Η Δ Ε Ζ
42 Ε Α Β Δ Γ
43 Α Β Γ α β γ
44 Γ Β Α Ε Δ
45 Β Δ Α Δ Γ
46 Α Γ Ε Δ Β
47 Η Ζ Α Ε Β Γ Δ
48 Α Γ Β Δ
49 Γ Α Β Ε Δ
50 Β Ε Γ Δ Ζ Α
51 Β Ε Ζ Γ Α Η Δ
52 Ζ Γ Δ Α Ε Β
53 Θ Κ Ζ Β Ι Α Ε Γ Δ Η
54 Δ Ζ Α Γ Β Ε


55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72

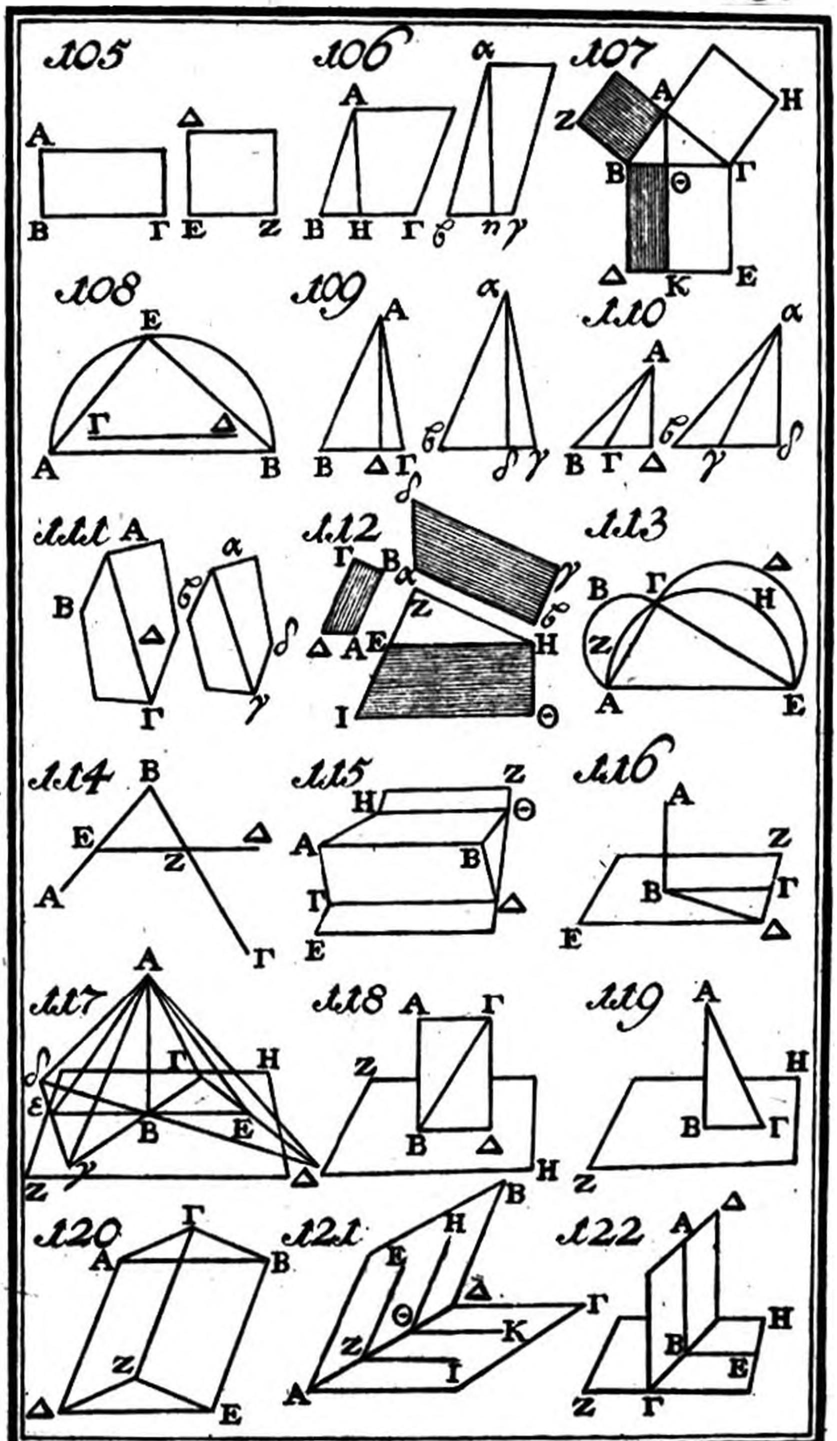


73 Α Β Γ Δ α β γ δ
74 Α Β Γ Δ Ε α β γ
75 Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Ι Κ
76 Α Β Γ Δ Ε α β γ
77 Α Β Γ Δ Ε Ζ Η
78 α β γ δ ε ζ η
79 Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ
80 α β γ δ ε ζ η θ
81 Α Β Γ Δ α β γ δ
82 Α Β Γ Δ Ε α β γ δ ε
83 Α Β Γ Δ Ε α β γ δ ε
84 Α Β Γ Δ Ε
85 Α Β Γ Δ Ε
86 Α Β Γ Δ Ε
87 Α Β Γ Δ Ε
88 Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Κ
89 Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Κ
90 Α Β Γ Δ

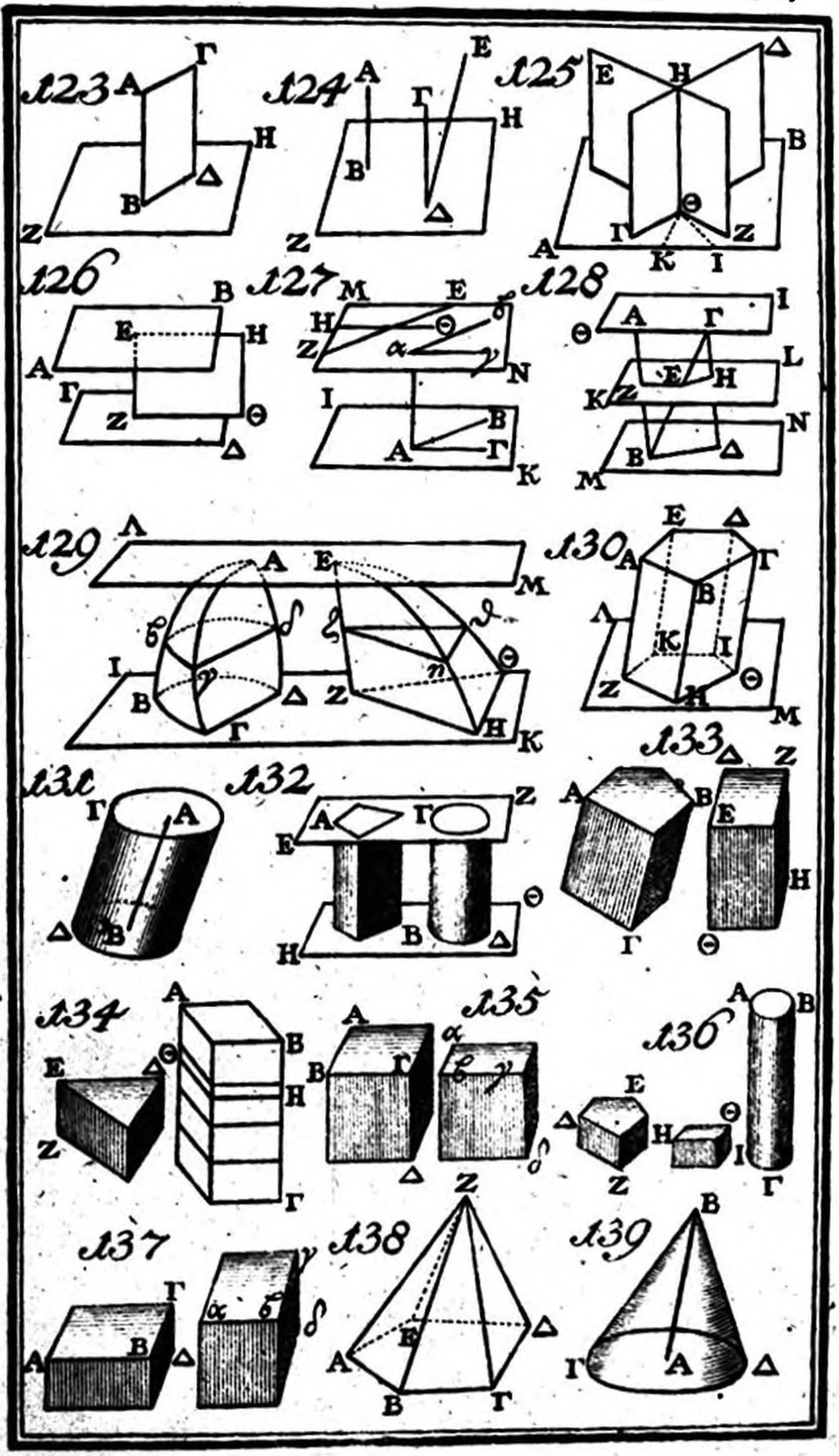
Πίν. Ϛ΄.


91
Α Ε Γ Β Ζ Η Δ
92
Α Β Ε Η Θ Ι Κ Ζ Γ Δ
93
Α Γ Ε Θ Ν Ο Φ Ρ Σ Τ Υ Χ Π Λ Β Μ Δ Ζ Η Ι Κ
94
Γ Ζ Α Β Δ Ε
95
Α Δ Ζ Β Γ Ε Η
96
Α Δ Η Κ Θ Β Γ Ε Ι Ζ
97
Α Ε Β Δ Γ
98
Δ Ε Γ Ζ Η Α Β Θ
99
Α Β Γ Δ
100
Α Δ Β Η Γ Ε Ζ
101
Α Δ Β Η Γ Ε Ζ
102
Α Β Η Γ Δ Ε Θ Ζ α β γ δ ε ζ
103
Α Β Η Γ Δ Ε Θ Ζ α β γ δ ε ζ
104
α β η γ Α Β Η Γ Δ Ε Ζ

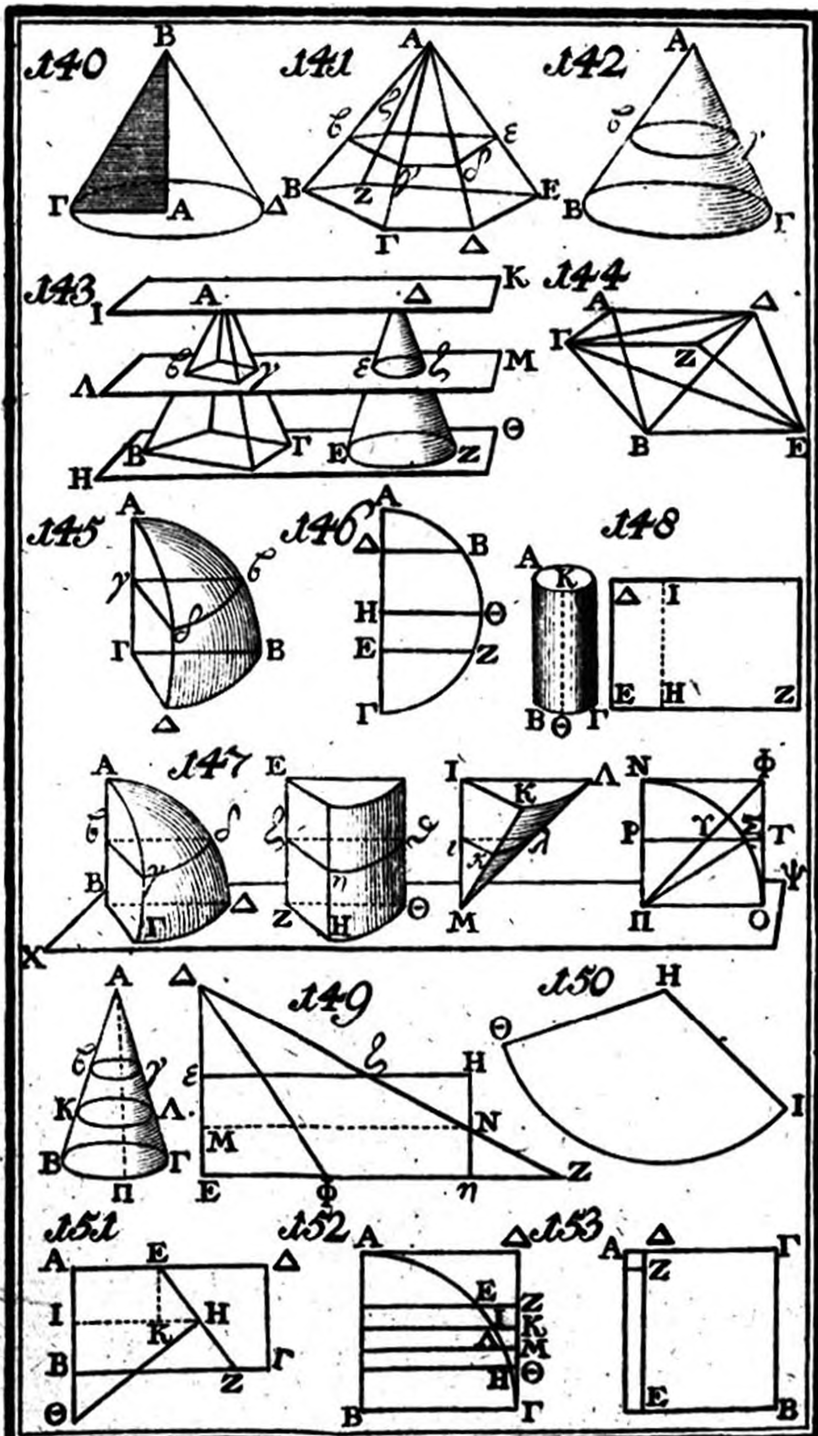
Πίν. Ζ΄.


105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122

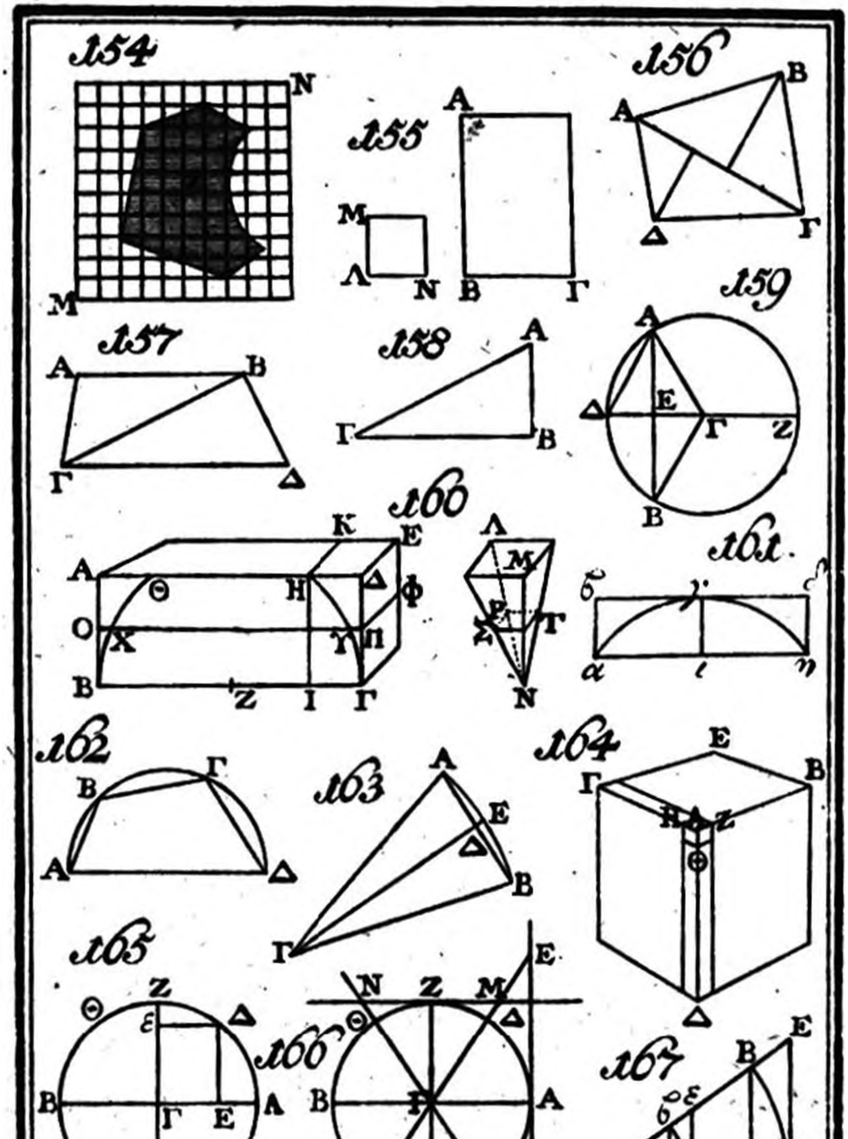
Πίν. Η'.


123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139

Πίν. Θ΄.

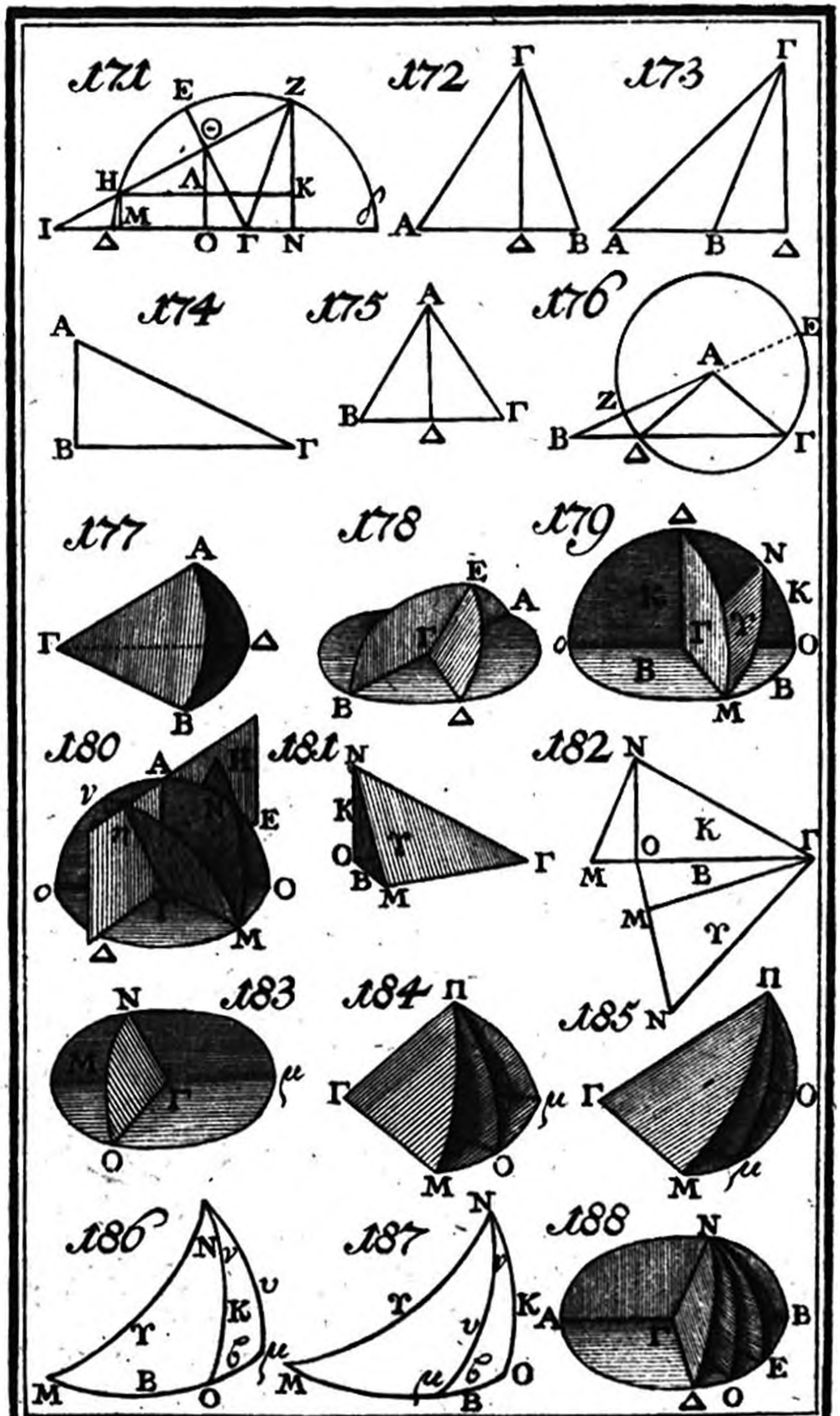


Πίν. Ι΄.



154 M N
155 A B Γ M Λ N
156 A B Γ Δ
157 A B Γ Δ
158 A B Γ
159 A B Γ Δ E Z
160 A B Γ Δ E Z H Θ I K O Π Υ Φ X Λ M N P Σ T
161 α β γ δ ι η
162 A B Γ Δ
163 A B Γ Δ E
164 B Γ Δ E Z H Θ
165 A B Γ E Z H Θ Δ ε
166 A B Γ Δ E Z H Θ I K Λ M N
167 A B Γ Δ E α β δ ε
168 A B Γ Δ E Z H
169 A B Γ Δ
170 A B Γ Δ

Πιν. ΙΑ'.



171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188