

Α. ΤΑΚΟΥΕΤΙΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΤΑ ΣΗΜΕΙΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΟΡΙΣΤΩΝΟΣ

ἑξελληνισθέντα μὲν ἐκ τῆς Λατινίδος φωνῆς ὑπὸ τῷ

ΠΑΝΙΕΡΩΤΑΤΟΥ ΑΡΧΙΕΠΙΣΚΟΠΟΥ

Κ Υ Ρ Ι Ο Υ

ΕΥΓΕΝΙΟΥ τῆ ΒΟΥΛΓΑΡΕΩΣ

Ἱεροδιακόνου ἐπὶ ὄντος, καὶ σχολαρχῆντος ἔντε Ἱωαννίνοις, καὶ ἐν τῇ
Ἀθωνιάδι Ἀκαδημίᾳ, καὶ ἐν Κωνσταντινουπόλει, πρὸς ἀκρόασιν
τῶν παρ' αὐτῷ μαθητιόντων.

Τὰ νῦν δὲ τύποις ἐκδοθέντα ὑπὸ τῆς Ἀυταδελοφότητος τῶν

Ζ. Ω. Σ. Ι. Μ. Α. Δ. Ω. Ν.

Α. καὶ Ν. καὶ Ζ. καὶ Μ.

ἐπὶ τῷ διανεμηθῆναι δωρεὰν τοῖς φιλεπιστήμοσιν Ἑλλήνων Νεανίσκας.



Ἐν Βιέννῃ τῆς Αὔστρίας.
ἐν τῇ Ἑλληνικῇ Τυπογραφίᾳ Γεωργίου Βενδότη.

1805.

Γεωμετρήσον εἰσίτω· ὅυ κωλύω.

Τῷ μὴ θέλοντι, συζυγώσω τὰς θυράς.

ΑΦΗΓΗΣΙΣ ΙΣΤΟΡΙΚΗ

Περὶ ἀρχῆς καὶ προόδου

τῶν Μαθηματικῶν Ἐπισημῶν.

Τὴν ἐκθεσιν τῶν σοιχείων τῶν Μαθηματικῶν ἀναβαλλομένῳ, πρῶτον ἂν ἔσεοδαι περὶ ἀρχῆς τε τέτων, καὶ τιμιότητος, βραχὺ ἄττα ἐδοξέ μοι προδιελθεῖν, ὥς ἂν γνωῖεν οἱ τῆς Μαθήσεως Θιασῶται, οἷά τιμι φέροντες σφᾶς αὐτὲς ἀφοσιώσονται ἐπισήμῃ, καὶ ἅμα διδάχθῃεν, οἱ ὧν ἂν τύχωσιν ἀφηρημένοι τὴν γυνῶσιν, τέτων προχειρότατα ποιεῖμενοι τὴν κατάγνωσιν, ἡλικίον τῶν Ἐξῆς τὸ ἀξίωμα, περὶ ὧν τὴν κτῆσιν, ὅσως δῆποτε ἐπὶ σοφίᾳ γνωριμωτάτες ὁ παλαιὸς ἠνεγκε χρόνος, ἀμύθητον ὅσῃ τὴν σπουδὴν κατεβάλλοντο. Ἐν χρήσει δέ μοι ἦκε τὴν προτεθεῖσαν ἀφήγησιν συγκομισομένῳ, τὰ ὑπὸ Πέτρῳ τῷ Ρ' ἅμα ἐν ὅλῳ τῷ τῶν Σχολῶν Α'. Βιβλίῳ, περὶ τῶν Μαθηματικῶν ἰσορηθέντα, ἅπερ ἐκ τῶν Πρόκλου, Λαερτίου, Οὐϊτρευίου, Γελλίου, Πολυβίου, Τζέτζου, καὶ ἄλλων, ἀκριβῶς ἔχ' ἡττου, ἢ δαφιλῶς ἐκεῖνος συγγράψας ἐξέδατο.

Πρώτῃ μὲν οὖν (εἰ χρὴ πιστεύειν Ἰωσήφῳ) τῶν ἐπισημῶν ἀνδρώποισι ὑπῆρξεν ἡ Μάθησις. Αὐτὸς γὰρ ἐν τῷ Α'. τῶν Ἀρχαιολογιῶν Κεφ. Γ', τὲς ἀπὸ Σήδε, φησὶ, τὴν τῶν ἑραλίων παρατηρήσαντας διακόσμησιν, καὶ ἀσέρων περιόδους, ἵνα μὴ τοῖς εἰσέπειτα τὰ εὐρημένα ἐξίτηλα γένηται, παγκόσμιόν τινα τῷ Ἀδὰμ προει-

ρηκότος τὸν ὄλεθρον, τὸν μὲν κατ' ἰχθύν πυρὸς, τὸν δὲ κατὰ πλῆθος, καὶ βίαν ὕδατος, σήλας δὲ ἰδρυσάμενης, τὴν μὲν ἐκ πλίνθου, τὴν δ' ἑτέραν ἐκ λίθων, ἀμφοτέραις ἐγγράψαι τὰ ἐνρημένα, ἵνα καὶ τῆς πλινθίνης ἀφανιοθείσης ὑπὸ τῆς ἐπομβρίας, ἡ λινθίνη μείνασα, παράχῃ μάθειν τοῖς ἀνθρώποις, τὰ ἐγγεγραμμένα δηλῆσα. Καὶ πλινθίνην δὲ ὑπ' αὐτῶν ἀνατεθῆναι, φησὶ, μένει δὲ ἄχρι τῆ δευρο κατὰ τὴν Συριάδα. Ταῦτα γὰρ ἡμῖν Ἰώσηπος, παρ' ᾧ καὶ ἡ τέτων πίσις μενέτω.

Μετὰ δὲ τὸν κατακλυσμὸν, Ἀσσυρίαι τε, καὶ Χαλδαίαις πρώτης ἀπάντων περὶ τὰ Μαθήματα ἐναχοληθῆναι, αὐτὸς τε Ἰώσηπος ἐστὶ παραδεδωκώς, καὶ Πλίνιος, καὶ Διόδωρος, καὶ Κικέρων. Ἐκ δὲ Χαλδαίων, καὶ Ἀσσυρίων, παρ' οἷς ἀνέφυσάν τε, καὶ θάλασιν ἤρξαντο, ἐνεπιδημῆσαι τοῖς Αἰγυπτίοις, ὑπὸ Ἀβραάμ μετενεχθείσας τὰς Ἑξεις. Οὗτος γὰρ Θεῶ κελεύοντι πειθαρχήσας, ἐξελθὼν τε τῆς γῆς αὐτῆς, καὶ τῆς συγγενείας, καὶ τὴν Χαναναίτιδα πρώτου παροικήσας, εἴτ' ἐντεύθεν εἰς Αἴγυπτον μεταναστέυσας, κατιδὼν τε τὰς Αἰγυπτίαις, Σοφίας τε ἡμέρῳ ἡττονας ὄντας, καὶ πρὸς παιδείαν Φύσεως ἔχοντας ἐν, ὡς αὐτὸς Ἰώσηπος μαρτυρεῖ Βιβλ. Α'. Κεφ. Θ'. Ἀριθμητικὴν τε, καὶ Ἀστρονομίαν, ἧς ἡγεῖσθαι τὴν Γεωμετρίαν ἐπάναγκες ἦν, αὐτοῖς ἐκοινώνησε, τῇ ἔδους ἐντυχὼν τοῖς λογιωτάτοις. Τὰς δ' Αἰγυπτίαις ἐπὶ πλείους τὸ εἶδος τῆτο τῆς Μαθηματικῆς παιδείας ἡκριβωκέναι εἶδος, καὶ ὑπὸ ἀρίστους πρώτους αὐτὰς εὐρετὰς, κατὰ Σχολῆς περιεσίαν μαρτυρημένους ἐν Α'. Μεταφ. Κεφ. Α'. „Ἐφεῖσθαι γὰρ ἐν Αἰγύπτῳ τοῖς „Ἐρεῦσι δημοσίᾳ περὶ τὰς τοιαύτας σχολάζειν τέχνας.

Τὸ δ' ἀπ' ἐντεύθεν, ἡ Μάθησις ἐξ Αἰγύπτου διαπλεύσασα, πρὸς τὰς ἀν' Ἑλλάδα Φιλοσόφους διαπεφοίτηκε. Θαλῆς τε γὰρ ὁ Μιλήσιος, ὃς ἔτει πρὸ Χριστοῦ φεδ. ἐτύγχανε γεγονώς, πρῶ-

τος Ἐλλήνων κατάρας εἰς Αἴγυπτον, ἐκεῖθεν ἐπὶ τὴν Ἑλλάδα τὴν Γεωμετρίαν μετακομίσαι ἰσόρηται, ὅς δὴ πρὸς τοῖς ἄλλοις, καὶ τῶν ἐν τῷ πρώτῳ τῶν σοιχείων τὴν Ε'. ἔνρηκῶς ἄδεται, καὶ τὴν ΙΕ', καὶ ΚΣ', καὶ τῶν ἐν τῷ Δ'. δὲ, Β', καὶ Γ', καὶ Δ', καὶ Ε', ἐφ' ἧ καὶ βέν δύσαι λέγεται, ὑπερηδείς τῷ ἐνρήματι. Οὗ δ' αὐτὸς καὶ τὰς Ἰσημερίας, καὶ τὰς Τροπὰς πρῶτος παρατηρεῖν ἤρξατο (1), πρῶτος τε Ἡλίου ἐκλειψιν προειρῆκει, ὥς Ἰππίας τε, καὶ Ἀριστοτέλης μνημονεύει· καὶ Σελήνης δὲ, ἣν, τῇ Τζέτζε μαρτυρεῖντος, Κύρῳ τῷ βασιλεῖ Περσῶν προηγόρευκεν. Ἐφ' οἷς καὶ τῶν Μαθημάτων ἐν Ἑλλησιν οὗτος πατὴρ, καὶ πρόξενος ἦκεσε.

Μετὰ δὲ Θάλητα, Πυθαγόρας ὁ Σάμιος, Φιλοσόφων ἐκεῖνος ὁ ἀρχαιότατος, διαφερόντως τὰ τῶν Μαθημάτων προήγαγέ τε, καὶ διεκάλουνεν, οὕτω μέντοι περὶ τὸ Ἀριθμητικὸν εἶδος σπυδάσας (2), ὥς ἐξ ἀριθμῶν καὶ πᾶσαν τὴν κατ' αὐτὸν τῇ φιλοσοφεῖν ιδέαν συζήσασθαι· οὕτω δέ τοι καὶ τὸ Γεωμετρικὸν ἀκριβώσας, ὥς πρῶτος, ἡ φησὶ Λαέρτιος, τὴν Γεωμετρίαν ἀποσπάσαι τῆς ὕλης, καὶ οἷον ἀποκαθάραι, κἀντὺθεν δαιμόνιον τι πτερυξάμενος, εἰς περινοίαν τῆς ΔΒ', καὶ ΜΔ', καὶ ΜΖ', καὶ ΜΗ', τῶν τῇ Α'. Βιβλίῳ Προτάσεων ἐξαρθῆναι, ὧν δὴ μάλιστα τῆς ΔΒ', καὶ ΜΖ'. γεραίρεται, ἐφ' ἧς τῇ ἐνρέσει ὑπεργαννύμενος, καὶ Ἐκατόμβην λέγεται δύσαι, ὥς παρὰ τῷ Λαερτίῳ μαρτυρεῖ Ἀπολλόδωρος. Τῇ δ' αὐτῇ καὶ ἡ τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν ἐκθεσις, ἐδέτω ἄλλῳ τῶν

(1) Αὐτὸς δὲ καὶ τῆς Ἀρκτε τῆς ἐλάσσονος εὐρετῆς λέγεται. Λαέρ. ἐν βίῳ· καὶ Θέων εἰς τὰ Ἀράτ. φαινόμε. Καὶ ὁ Παλ. Ομήρ. Σχολ. παρὰ Μεταγ. ἐν Σημειώσ. εἰς τὸν Λαέρτ.

(2) Γωάν. Μαλαλ. Χρονικ. Τόμ. Α'. Σελ. 201. Πυθαγόρας, φησὶν, ὁ Σάμιος Ἀριθμητικὴν συνεγράψατο. Εἰ καὶ μὴδὲν αὐτὸν συγγραφεῖναι φατέον μετὰ Πλετάρχε περὶ Τέχ. Ἀλέξ. καὶ Λυκ. περὶ τῆς ἐν τῷ ἀσπᾶσαι διαμαρτίας· καὶ Λαερτ. ἐν τῷ Προοίμ.· καὶ Πορφ. ἐν βίῳ Πυθαγ. καὶ ἄλλων, ἀλλὰ καὶ τὸ Ἀβάκιον αὐτῷ ἀπονέμεται.

Κανονικῶν ἐν σώμασι σχημάτων ἀνατίθεται τὸ πεντάριθμον. Καὶ Ἀερολογίαν δὲ, καὶ Μουσικὴν, αὐτὸς τε ἤσκει, καὶ ἑτέρος ἐδίδασκεν· οὐδὲ γὰρ ὅπως φύσεως ὀξύτητι διενεγκῶν, τὰ θυμασὰ ἐκεῖνα ἐξευρεῖν οἷος ἐγένετο, ἀλλὰ καὶ πρῶτος γυμνάσιον συγκροτῆσαι φέρεται, εἰς ὅπερ ἦν τῇ Νεολαίᾳ θαμίζεσι, τὰς καλίστας ταύτας, καὶ τιμιωτάτας τῶν τεχνῶν ἐκπαιδεύεσθαι.

Ἐπὶ δὲ τῷ Πυθαγόρᾳ καὶ Ἀναξαγόρᾳ ἐγένετο ὁ Κλαζο-
μένος, καὶ Οἰνοπίδης ὁ Χῖος, ὧν ὁ Πλάτων μέμνηται ἐν Ἐρρασις,
ἐνθα νεανίσκος εἰσάγει περὶ Ἀναξαγόρου, καὶ Οἰνοπίδου, ἐπὶ Κύκλων
καταγραφαῖς ἀλλήλοις προσδιαφιλονεικῶντας. Ἀριστοτέλης γὰρ καὶ
Γεωμετρικὴν ἀναφέρει πραγματείαν τῷ Ἀναξαγόρᾳ συγγραφεί-
σαν (1). Ὅ,τε Λαέρτιος καὶ περὶ Ἡλίου διέξεισιν, ὡς κατασκευά-
σειεν ἐκεῖνος τῆς Πελοποννήσου μείζονα εἶναι (ἀμέλειται ἐν σπαρ-
γάνοις ἔτει τῆς Ἀερονομικῆς θεωρίας ἐνείλιμμένης). Καὶ περὶ τῆς
Σελήνης, ὡς καὶ περὶ τῶν ἐν αὐτῇ οἰκητόρων, ἔσιν ἅττα φιλο-
σοφήσειεν. Οἰνοπίδῃ δὲ ὁ Πρόκλος τὴν τε IB', καὶ τὴν KΓ'. τῇ Α'.
Βιβλίῳ προσαναγράφει (2). Τέτων ἐξῆς γενέσθαι φέρονται Βρί-
σων τε, καὶ Ἀντιφῶν, καὶ Ἰπποκράτης ὁ Χῖος, οἱ τὸν Κύκλον τε-
τραγωνίσαι ἀποπειρασάμενοι, καὶ τέταγε ἕνεκα ὑπὸ Ἀριστοτέλους
ἐλεγχόμενοι ἅμα, καὶ κλειζόμενοι· ὧν Ἰπποκράτης τῇ εὐκλείᾳ
διήνεγκεν, ὁ ἐξ ἐμπόρου φιλόσοφος τε, καὶ Γεωμέτρης, ὃς παρὰ
τὸν τῇ Κύκλου τετραγωνισμόν, καὶ τῇ διπλασιασμῷ τῇ Κύβει πρῶ-
τος λέγεται πειραθῆναι, διὰ τῆς τῶν δυεῖν μέσων εὐρέσεως, ἣν
δήπε μέθοδον, ὡς ἐπίσημόν τε, καὶ διαφέρουσιν κοινῇ οἱ εἰσέπειτα
πάντες ἡσπάσαντο. Ὁ δ' αὐτὸς κἀντεῦθεν ἔμικρόν τινα καρπεται

(1) Πλάταρχος δὲ καὶ τετραγωνισμόν Κύκλου γράφει τὸν Ἀναξαγόραν ἐν εἰρητῇ
κατεχόμενον παρέδωκε (Βιβλ. περὶ Ἐξορ. Σελ. 607) διὰ τὸν Μύδρον.

(2) Οἰνοπίδης δὲ ἐστὶν ὁ καὶ τὸν Μηνίσκα τετραγωνισμόν ἐυρίων. Παρὰ Πρόκλ. εἰς
Βιβλ. Β'. τῶν εἰς Ἐὐκλ.

τὸν ἔπαινον, ὅτι πρῶτος (μαρτυρῶντος τῷ Πρόκλῳ) καὶ τὰ ὑπὸ τῶν ἄλλων ἐυρεθέντα εἰς ἓν συνειλοχῶς, καὶ διαταξάμενος, τὰ σοι-
χεῖα τῆς Μαθησεως συνεγράψατο.

Ὁ δὲ Δημόκριτος ἐδὲν ἦττον ἢ ἐν Φιλοσοφίᾳ, καὶ περὶ τὸ Μα-
θηματικὸν εἶδος θαυμάζεται, εἰ καὶ μηδὲν τῶν αὐτῶν, ὅτε Φυσικόν,
ὅτε Μαθηματικὸν σπέδασμα, εἰς ἡμᾶς ὁ χρόνος παρέπεμψε,
φθόνῳ (εἰσὶν οἱ φασίν) Ἀριστοτέλους, τῷ μόνῳ τὰ ἑαυτῶν ἐφιεμέ-
νε τοῖς πᾶσιν ἀναγινώσκεσθαι. Τὴν γεμὴν κατὰ Δημόκριτον φι-
λοσοφίαν Πέτρος ὁ Γασσένδος ἀρτίως ἀνεδείματο, βιβλὸν ἀμφι-
λαφεῖς σοφίας μετὴν συγγραφάμενος. Ἐπὶ τέτοις δὲ καὶ Θεόδω-
ρος ὁ Κυρηναῖος, καί τοι ἐδὲν ἐδὲ αὐτῶν τῶν Μαθηματικῶν ἐυρημά-
των περιὸν, ἐκ γὰρ τέτε μέγας τις γενέσθαι μνημονεύεται, ὅτι
Πλάτωνος κατηγήσασθαι ἔλαχε.

Ἀλλ' εἰς τὸν Πλάτωνα τέως ἡμᾶς φέρων ὁ λόγος κατήγαγεν,
ὃ μᾶλλον τὰς Μαθηματικὰς κατηγλαΐσεν ἔξεις, ὅς τις ἐδεῖς. Τό-
τε γὰρ τῆς Γεωμετρίας ἐκεῖνος χρήμα προδήκαις προήγαγε ταῖς
ἐπισημοτάταις, καὶ τὴν Ἀναλυτικὴν ἐξεῦρεν, ἀσφαλεσάτην ἔσαν
τῷ συλλογίζεσθαι, καὶ τὰ ζητούμενα εἰς φῶς ἄγειν μέθοδον· καὶ
τά γε φιλοσοφούμενα τοῖς ἀπὸ τῶν Μαθημάτων θαυμασιωτέροις
λόγοις συγκαταμίξας τε, καὶ διευκρινήσας, εἰς τ' αὐτὸ τὰς ἔξεις ἐν
τοῖς αὐτῶν βιβλίοις συνῆψε, καὶ συνηρμόσατο. Τὸ γὰρ τοι περιადό-
μενον ἐκεῖνο, μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω, πρὸ τῶν πυλῶνων τῆς
Ἀκαδημίας προγράψας, ἐκ ἀλοτρίας, ἐδ' ἀλυσιτελῆ, καὶ ἀπρόσ-
φορον τὴν Μαθηματικὴν τυγχάνουσιν, οἰκείαν δὲ, καὶ φίλην, καὶ ἑ-
μετρίαν τὴν συντέλειάν τε, καὶ τὸν κόσμον ἐκπρεπῆ παρεχομένην,
τῇ ὑγιεί, καὶ ἀσφαλεσέῃ Φιλοσοφίᾳ λαμπρῶς ἐδήλωσεν. Ἀλλὰ
γὰρ ὅσος τῆς Μαθηματικῆς παιδείας ὑπῆρξεν ἕτος θεραπευτῆς τε
καὶ ἐπαινέτης, τῷ τὰ ἐκείνη υπομνήματα μετιόντι συνιδεῖν ῥάδιον.

Ἐκ γυν τῆς τῷ Πλάτωνος Ἀκαδημίας ἐκ εὐαρίθμων ἐξεῖρη-
κόντων ἀνδρῶν, τριῶν ἐπὶ δέκα τῶν ἐκείνῃ γνωρίμων ὁ Πρόκλος μέ-
μνηται περὶ τὰ Μαθηματικὰ διαφερόντως ἐσπυδακότων. Καὶ γὰρ
καὶ Λεωδάμας ὁ Θάσιος, καὶ Ἀρχύτας ὁ Ταραντινός, καὶ Θεαίτητος
ὁ Ἀθηναῖος, ἐπὶ πλείστον τὴν Ἑξιν προήγαγον. Λεωδάμας μὲν
γὰρ, τὴν ἣν ὑπὸ Πλάτωνος παρειλήφει ἀνάλυσιν ἐπιμελῶς γυ-
μνάσας, δι' αὐτῆς πολλῶν ἐυρετῆς ὀφθῆναι ὑπὸ Λαερτίῃ γεραίρε-
ται. Τὸν δὲ Θεαίτητον, καὶ τὰ γε παρ' αὐτῷ εὑρημένα (ἐν οἷς τὰ τε
γραφέντα αὐτῷ σοιχεῖα θαυμάζεται, καὶ τὰ περὶ τῆς τῶν κανο-
νικῶν Σωμάτων ἐγγγραφῆς) κατέστησε περιώνυμον, ἔδεν ἥττον δὲ
καὶ οἱ παρὰ Πλάτωνος ἔπαινοι, τῷ καὶ τῶν διαλόγων ἓνα τῶν αὐ-
τῷ ἐκ' ὀνόματι τῷ ἐκείνῃ ἐπιγράψασθαι ἀξιώσαντος. Τῷ δὲ Ἀρ-
χύτῃ καὶ σοιχεῖα φέρεται γεγραμμένα· καὶ περὶ διπλασιασμῷ τῷ
Κύβει ἔργον παρ' Εὐτοκίῳ ἀναγινώσκεται. Κάκεινο δὲ τῷ Ἀνδρὶ
τείνει εἰς κλέος οὐ μέτριον, ὅτι πρῶτος τὰ Μαθηματικὰ ταῖς ἀν-
θρώπων χρήσεσι προσβιβάσας, καὶ περισερὰν ἐκ ξύλῃ ἱσταμένην
ἐτερατεύσατο, πολλῷ τῷ χρόνῳ τῷ Δαιδάλῳ ὕστερος γεγονώς,
δαιδάλειόν τι μηχανήμα. Ὁ δὲ Ἀρχύτας πρὸς τῇ Μαθηματικῇ
δεξιότητι, καὶ σρατηγικὴν ἐμπειρίαν ἐπιδεικνύμενος, ἐν ταῖς πατρίοις
μάχαις πεντάκις μὲν ἡγήσατο τῶν οἰκίων, πεντάκις δὲ καὶ τρο-
παῖον ἔσχε. Καὶ Νεοκλῆδης δέ τις φήμη διαρρέει, ὅτι τοσούτον ἀπὸ
τῶν εὑρημάτων, ὅσον ἀπὸ Λέοντος θαυμαζομένον, τῷ αὐτῷ διακέ-
σαντος. Οὗτος γὰρ καὶ σοιχεῖα τῆς ὅλης Μαθήσεως συγγράφαι
λέγεται, τελεωτέραν τε ἀναδείξαι τὴν Ἑξιν, καὶ τῇ χρήσει δεξιω-
τέραν, ὥς ἐν δίκῃ καὶ τοῖς ἐπισημοτέροις τῶν Στοιχειογράφων συγ-
καταλέγεσθαι.

Εὐδοξος δὲ ὁ Κυζιδιος, τ' ἄλλα μὲν τοῖς πρὸ αὐτῷ ἴσος, τὰ δὲ
Ἀριθμητικὰ καὶ πολλῷ κράσσων ἀναδαχθεὶς, καὶ (εἰ τῷ Σχολιασῇ
χρὴ πιστεύειν) ὅλον αὐτὸς τὸ πέμπτον Βιβλίον ἐκδεδωκώς, καὶ σοι-

χεῖρα συνέγραψε, γενικώτερα ἀποδός. Οὗ δ' αὐτὸς καὶ τὰς, αἷς ὁ
 Πλάτων ἐπεκεχαρήκει, Τομὰς ἐπήυξησε, καὶ τῶν Ἀστρονομικῶν
 ὑποθέσεων πρῶτος δημιουργὸς ἀνεφάνη, καὶ δὴ καὶ τὰς τῆς Γεωμε-
 τρίας πηγὰς, παραπλησίως τῷ Ἀρχύτῃ, ἅς ὀργανικάς τε, καὶ
 μηχανικάς τέχνας μετωχετεύσατο. Ἐπὶ τέτοις δὲ καὶ Ἀμύκλας
 ὁ Ἡρακλεώτης, Μέναιχμός τε, καὶ ὁ τέτε ὁμαίμων Δεινόςφρατος,
 Ἐλικίων τε ὁ Κυζικηνὸς, καὶ Θεῦδιος, καὶ Ἐρμότιμος ὁ Κολοφώνιος,
 Φίλιππος τε ὁ Μεδμαῖος, οἱ πάντες Πλατωνικοὶ, ἐπὶ τὸ κρεῖττον
 τυγχάνουσι τὴν Γεωμετρίαν προαγαγόντες, καὶ τελεώτερον. Μέ-
 ναιχμος μὲν γάρ, τὰς Κωνικάς ἐπινοήσας τομὰς, διὰ τέτων τὰς
 δύο ἐδιράσατο μέσας, ἣν δὴ πῦ εὗρεσιν πρὸ τῶν λοιπῶν εἶδετο ὁ
 Εὐτόκιος. Οὗ τε Θεῦδιος, καὶ ὁ Ἐρμότιμος, καθόλου τε μάλλον, καὶ
 ἀκριβέστερα τὰ σοιχεῖα ἀπέδωκαν. Καὶ ἔτσι μὲν δὴ ἐκ τῆς τῷ Πλά-
 τωνος Ἀκαδημίας οἱ πάντες εἰσιν, οἱ τὴν Μαθηματικὴν φιλοσο-
 φίαν, ὡς Πρόκλος φησὶ, καταρτίσαντες. Ἐφ' οἷς καὶ Ξενοκράτης, ὁ
 τῷ μὲν Πλάτωνος ὁμιλητῆς, τῷ δὲ Ἀριστοτέλους καθηγητῆς χρη-
 ματίσας, καὶ Ἀριστοτέλης αὐτὸς, ἡ μετρίαν τὴν ἀπὸ τῶν Μαθη-
 μάτων ἠνέγκαντο δόξαν. Ἐκείνη γένετο καὶ διακῆσαι τις ἐπιδυ-
 μήσας, ἐπεὶ Γεωμετρίας ἁμοῖρος ἐτύγχανεν ὦν, ἀπιδι, ἤκουσε,
 κώπην γὰρ Φιλοσοφίας ἡ κέκτηται.

Περὶ δὲ τῷ Ἀριστοτέλει τι αὖν καὶ εἴπομαι; Οὕτω τα ἐκεῖνη βιβλία
 τῶν Μαθηματικῶν τόπων εἰσὶν ἀνάπλεα, ὡς ὅλην ἐξ αὐτῶν πραγ-
 ματεῖαν τὸν Βλαγκάνον συνειλοχέναι. Δύο δὲ τῶν ἐκ τῆς ἐκεῖνης
 Σχολῆς μάλιχα δορυζέμενοι φέρονται, Εὐδημός τε, καὶ Θεόφρα-
 σος· ὧν ὁ μὲν, δύο περὶ ἀριθμῶν βιβλία συνέγραψε, τέτταρα
 δὲ περὶ Γεωμετρίας, ἓν δὲ περὶ ἀτόμων Γραμμῶν. Ἐκεῖνος δὲ
 μαθηματικὴν συνέταξεν Ἱστορίαν, ἐξ ἧς Πρόκλος τε, καὶ ἄλλοι, τὰ
 παρ' αὐτοῖς ἠράνισαντο. Ἀριστῶ δὲ, καὶ Ἰσιδώρῳ, καὶ Γ' ψικλεῖ,
 Γεωμετρῶν τὰ πρῶτα τελεῖσι, τὰς περὶ τῶν σερεῶν μάλιχα προ-

σοφείλομεν βίβλος. Ἐπὶ πᾶσι δὲ ὁ Εὐκλείδης, τὰ τοῖς ἄλλοις
ἔυρημένα εἰς ἓν ἀθροίσας, διατάξας, προσαυξήσας, ἀκριβέστερόν
τε ἀποδείξας, ἐκεῖνα ἡμῖν κατέλιπε τὰ σοιχεῖα, δι' ὧν ἀπαντα-
χῇ γῆς οἱ μαθητιῶντες σοιχειῖσθαι εἰώθασιν. Εὐκλείδῃ δὲ ἐν
ἔτι πρὸ Χριστοῦ σπδ'. τὸ ζῆν καταλύσαντι, ἐπεγένοντο μετὰ Ἐ-
κατονταετηρίδα σχεδόν, Ἐρastoθένης, καὶ Ἀρχιμήδης· ὧν Ἐρα-
τοθένης μὲν, πλὴν ὀλίγων, πάντα μικρὴ δεῖν ἀπώλετο τὰ συγ-
γράμματα, Ἀρχιμήδης δὲ πολλὰ μὲν ἠφάνισαι, πολλὰ δὲ καὶ σώ-
ζεται, ἐς δεῦρο περιφερόμενα.

Ἀρχιμήδην δὲ ἀπὸν, Κολοφῶνα οἶόν τινα τῆς ἐν ἀνθρώποις
λεπτονοίας, καὶ τῆς Μαθηματικῆς ἀπάσης παιδείας πέρας τε, καὶ
ἀκρότητα τυγχάνω διανοόμενος. Τότε τὰς πολλὰς θάυματος ἀ-
ξίας ἐυρέσας Πολύβιος τε, καὶ Πλέταρχος, καὶ Τζέτζης, καὶ ἄλλοι, τῇ
μνήμῃ παρέδωκαν. Ἐκείνῳ δὲ σύγχρονος ἦν καὶ Κόνων, γεωμέτρης
ὁ αὐτός, καὶ ἀστρονόμος, ἐφ' ᾧ προαποθανόντι, ἐν τοῖς περὶ τετρα-
γωνισμῷ τῆς Παραβολῆς Ἀρχιμήδους ἐπιπενθεῖ. Ἐξῆς δὲ μετὰ
Ἀρχιμήδην, καὶ Κόνωνα, χρόνῳ ἔτι πάντῃ πολλὰ παραρρέυσαντος, Ἀ-
πολλόνιος ἐγένετο ὁ Περγαῖος, ἕτερος ἕτος Γεωμετρῶν ὑπατος,
ὁ κατ' ὑπερβολὴν ἐπαίνει μέγας Γεωμέτρης ὑμνόμενος. Τότε
ἑπτὰ περίεσι βιβλία περὶ Κῶνων τομῶν, φρενὸς λεπτοτάτης ἀτοκυ-
ήματα. Τῷ δ' αὐτῷ καὶ τῶν Εὐκλαδεῶν τὸ ΙΔ'. καὶ ΙΕ'. προσανα-
γράφεται, τὰ ὑπὸ Γ' Φιλέας κατ' ἐπιτομὴν προβληθέντα. Ἰτ-
παρχος δὲ, καὶ Μενέλαος, περὶ Γ' ποτεινῶν τῶν ἐν τῷ Κύκλῳ, ὁ
μὲν ἕξ, ἐκεῖνος δὲ δυοκαίδεκα βιβλία πρῶτῳ συνεγράψατον, ἐφ'
οἷς καὶ χάριτος πολλῆς ἐτυχέτην, καὶ εὐκλείας διαφερέσεως, ὡς ἐπὶ
ὠφελεῖ τε, καὶ ἀναγκαίῳ εὐρήματι· τῷ δὲ Μενέλῳ καὶ περὶ Τριγώνων
σφαιρικῶν βιβλία τρία ἔτι περίεσι. Καὶ Θεοδοσίῃ δὲ τῷ Τριπολίτῃ
βιβλία ἰσάριθμα περὶ τῶν Σφαιρικῶν ἅπαντι ἐν χειρὶ περιφέρει-

ται. Καὶ ἔτσι μὲν ἐν, πλὴν Μενελάου, καὶ Ἰσιδώρου, καὶ Τ' Φικλέως, ἅπαντες πρὸ τῆ Κοσμοσωτηρίας ἔτες ἡχημακότες ἄσιν.

Εἴτα δὲ τῷ ἀπὸ τῆς Θεογονίας ἐβδομηκοσῷ, Κλαύδιος ὁ Πτολεμαῖος ἠνδρῆσεν, ὁ τῶν Ἀστρονομῶν ὑπατος, ἀνὴρ θαυμασιώτατος γεγονώς, καὶ τὴν Θνητῶν φύσιν (ἢ λέγεται) ὑπερηρμένος· οὐχ ὅπως περὶ τὴν Ἀστρονομίαν διενεγκὼν, ἀλλὰ καὶ τοῖς Γεωμετρικοῖς ὀφθαλμοῖς ἐμπειρότατος, οἷά πε πρὸς ἄλλοις πολλοῖς τῶν αὐτῷ συγγραφέντων, καὶ τὰ περὶ τῶν Ὑποστασεῶν ἐν ἑξ μὲν ὑπὸ Μενελάου βιβλίοις, ἐν δὲ δυοκαίδεκα ὑπὸ Ἰ' πάρχου ἐκπονηθέντα, ἐν μόνοις τέντε ἐκάνω κατ' ἐπιτομὴν ἐκδεδομένα τοῖς Θεωρήμασι. Καὶ Πλετάρχει δὲ τῆ περιωνύμῃ ἐν Φιλοσόφῳ Μαθηματικῇ ἅττα προβλήματα φέρεται. Τὰ δέ τοι Εὐτοκίῃ τῇ Ἀσκαλωνίτῃ, ἐξογιμὰτα συγγεγραμμένα ἄς τὰ Ἀρχιμήδους, καὶ τὰ Ἀπολλωνίου ὑπομνήματα, τίς ἀγνοεῖ; Εἰς αὐτῇ ἐν, καὶ τὰ Φίλωνος, καὶ Διοκλέως, καὶ Νικομήδους, καὶ Σπύρου, καὶ Ἡρώου, περὶ τῆ διπλασιασμῆ τῆ Κύβου, ὡς ἡμᾶς ἦκει καταλεγόμενα. Οἱ δὲ Ἡρώου καὶ τοῖς Μηχανικοῖς ἐδὲν ἦττον, ἢ τοῖς Γεωμετρικοῖς, φύσεως μεγέθη διέπρεψε, καὶ οὐ καὶ ἡ τῆ διπλασιασμῆ τῆ Κύβου ἐπίνοια, τῶν κατ' ἄλλους ἀπασῶν προκριτέα εἶναι τῷ Πάππῳ ἐν Γ' βιβλίῳ, Προτάσει Ζ' μεμαρτύρηται. Καὶ τὰ Κτησιβίου δὲ τῇ Ἀλεξανδρείῃ, ὧ καὶ τὸ τῶν Ἀντλιῶν χρεῖμα ὀφάλομεν, παρὰ τε Οὐιτρονίῳ, Πρόκλῳ, καὶ Πλινίῳ, καὶ Ἀθηναίῳ τῷ Δειπνοσοφιστῇ, πολλῶ λόγῳ κρίνεται ἀξια. Οὐδὲν ἦττον δὲ καὶ Γεμίνου παρὰ Μαθηματικοῖς ἀνδράσι τὸ κλέος· τηλικῶτες γὰρ ἀνεδάχθη καὶ ἔτος, οἷον ἐν πολλοῖς τῷ Πρόκλῳ καὶ αὐτῇ Εὐκλείδῃ πρότερον τίθεσθαι.

Οἱ δὲ Ἀλεξανδρεὺς Διόφαντος, τοῖστος τὰ Ἀριθμητικὰ ὥφθη, οἷοι κατὰ τὴν Γεωμετρίαν Ἀρχιμήδους, καὶ Ἀπολλωνίου, καὶ Εὐκλείδους ἄσι κλειζόμενοι. Ἀπάσης γὰρ ἐκάνος τῷ ὄντι τῆς Ἀριθμητι-

κῆς λεπτονοίας, κηθηγεμῶν οἷα γεραίρεται. Τέτε γὰρ δὴ ἐπίνοια καὶ ἡ θαυμαστὴ τέχνη, ἣν Ἀλγεβραν ὀνομάζεσιν, ἡ καὶ ἡμᾶς ὑπὸ Φραγγίσκου Βιέτα, καὶ Ρέναντε Καρτεσίε, καὶ ἄλλων μετ' ἐκείνων, καθολικώτερα καταστᾶσα, καὶ ἐπὶ πολὺ ἀκριβέας, καὶ τελειότητος προαχθεῖσα. Λοιποὶ δὲ ἐν τοῖς παλαιοῖς διὰ φήμης ἄγονται, Νικόμαχος ἐν Ἀριθμητικοῖς, καὶ Γεωμετρικοῖς, καὶ Μουσικοῖς διαβόητος, καὶ Σερένιος ἐν δυσὶ βιβλίοις, τοῖς περὶ Κυλίνδρου, καὶ Κώνε τομῶν, ἐν Γεωμέτραις γνωριμώτατος, καὶ Πρόκλος ἐπ' αὐτοῖς, καὶ Πάππος, καὶ Θέων. Ἡλικος γὰρ τὴν ἐν τοῖς Μαθημασι σοφίαν ὁ Πρόκλος, οἷτε εἰς τὰ Εὐκλείδου ὑπομνηματισμοὶ, καὶ τ' ἄλλα, ἅττα πάννυ σοφῶς συνέθετο, μαρτυρεῖ. Λύκιος δὲ ἕτος τὸ γένος ὢν, καὶ λόγοις τοῖς ἀπὸ Φιλοσοφίας, καὶ τῶν Μαθημάτων ἐνδιαπρέψας, καὶ ἔτα ἀπὸ Χριστοῦ υπέρ. τὸ ζῆν ἐκμετρήσας, διακριτέος τῆ ὁμωνύμου Πρόκλου, ὅς τις Ἀνακασίε ἐν τῇ Κωνσταντίνῃ τὰ αὐτοκρατορικὰ σκῆπτρα κατέχοντας, ἔτα Σωτηρίῳ τῷ φιδ'. Οὐιταλιανῷ τὴν Αὐτοκρατορίδα τῶν πόλεων πολιορκεῦντι, τῇ τῶν Ὀπτικῶν μεθοδεῖα κατόπτρων, τὸ ναυτικὸν κατενέπρησεν, ἡ διέξασιν ἰσορῶν ὁ Ζωνηράς, καὶ Ράμος ἐκ τέτε, καὶ Βαρόνιος ὕσερον. Ὁ δὲ Ράμος καὶ Θέων, τὸν ἦπε λόγος πολλὰ γενόμενον ἀξίον. Θαυμασίοις μετ' ὑπερβολῆς ἐγκωμίοις ἐξαίρετα, ἐκάνε εἶναι καὶ τὰ παρὰ πάντων εἰς τόδε τῷ Εὐκλείδῃ προσαναγεγραμμένα σοιχῶα διαταυόμενος. Ἀλλ' ἐπιακῶς ὁ Ράμος, πανταχῶ τῷ Εὐκλείδῃ ὢν ὁ πάννυτοι δίκαιος, ἄλλως δὲ ὑδὲ τῷ λόγῳ σεῖρῳ τὴν εἰκασίαν αὐτῆ προσερέδων, ἐνταῦθα ἐκ ἀκχερός. Τελευταῖον δὲ οὐρχγὸς οἶον τετάχθω ὁ Πάππος, ὁ χρόνῳ μὲν (ὡς ἄρα περὶ τὸ ὕ. ἀκμάσας ἀπὸ Θεογονίας) τῶν παλαιῶν μικρῶ δεῖν γενόμενος ὁ ἐρχατος, εὐκλέας δὲ περισίῃ, καὶ τῇ περὶ τὰς Μαθηματικὰς ἐπισήμας τελειότητι, ἐν τοῖς πρώτοις ἀριθμητέος, ὃν δὴ, ἡ τὰς Ὑψικλεῖς τε, καὶ Κτησιβίας, καὶ Διοφάντης τὸ πρὶν ἐνεγκαμένη τῷ Ἀλεξανδρέων πόλις, τὸ φορὸν τῶν μεγαλοφυῶα διαπρεψάντων

Ἀνδρῶν ἑδαφος, ἐπ' ἀγαθῷ μεγάλῳ τῆς μαθήσεως καὶ τῆτον ἐξήνεγκε. Συγγέγραπται δὲ τῷ Πάπῳ συλλογῶν Μαθηματικῶν βιβλία ὀκτὼ τελάχισον, ὧν δύο μὲν τὰ πρῶτα (ἂμὴ τῶν Βιβλιοθηκῶν παρέρριπταί πε, λανθάνοντα) τῷ χρόνῳ ἠφάνισαι· λοιπὰ δὲ τὰ ἐξ τοσούτων ἐς, καὶ τηλικέτων ἐκ παντὸς μονογενεῖ τῆς Μαθήσεως ἄδης καλλίσων τε, καὶ τιμιωτάτων ἑυρημάτων ἀνάμεσα, ὡς ἐν τοῖς πρώτοις τῶν σωζομένων παλαιῶν ὑπομνημάτων, κοινῇ ψήφῳ τάττεσθαι ἐναρίθμια.

Τὰ τοίνυν περὶ ἀρχῆς τε, καὶ προόδου τῆς Μαθηματικῆς ἕξεως, διὰ βραχέων ἔτις ὑμῖν ἰσορήσῃ, ἐξ ὧν τὰ κατὰ χρόνον, καὶ χρῆσιν, καὶ ἀξίαν πρεσβεῖα τῶν τοιούτων ἐπισημῶν λαμπρῶς ἀναφαίνεται. Καὶ μὲν δὴ τῶν τὰ πρῶτα ἐν Σοφίᾳ φερόντων οἱ αὐτοὶ, τὴν τε ἄλλην Φιλοσοφίαν ἀποκυήσαντες ὥφθησαν, καὶ τὴν Μαθηματικὴν ταύτην, ὡς ἐν ἐνὶ τοκετῷ ἀδελφὰς οἶονεὶ διδύμους, ἃς ἄτις ἀλλήλων διασπάσας πρὸς βίαν ἀπαγαγεῖν πειραθείη, καὶ χωρὶς εἴησαι, ἀπηνῶς ἕτος νῆ Δία κατὰ τῶν ἐκ φύσεως ἐχρηκότων τὴν ὁμογένεσιν ἐνεχθήσεται, καὶ ἀπανθρώπως. Τῆτο γὰρ ἐπὶ τῶν Διδύμων συμβαίνειν ἔωθε, τὸ θάτερον ἀρθέντος, ὑπεκλύεσθαι καὶ θάτερον, καὶ κατατήκεσθαι.

Π Ι Ν Α Ξ

Τ Ω Ν

ΕΜΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ.

	Σελ.		Σελ.
ΒΙΒΛΙΟΝ Α'. . .	1	ΜΕΡΟΣ Β'. . .	183
ΒΙΒΛΙΟΝ Β'. . .	65	ΜΕΡΟΣ Γ'. . .	189
ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'. . .	90	ΒΙΒΛΙΟΝ Δ'. . .	199
ΒΙΒΛΙΟΝ Δ'. . .	128	ΒΙΒΛΙΟΝ ΙΒ'. . .	261
ΒΙΒΛΙΟΝ Ε'. . .	157	ΒΙΒΛΙΟΝ ΙΒ'. . .	294
ΜΕΡΟΣ Α'. . .	162		



ΑΝΔΡΕΟΥ ΤΑΚΟΤΕΤΙΟΥ ΜΕΤΑ' ΣΗΜΕΙΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΟΥΪΣΤΩΝΟΣ.

Τῶν στοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

B I B Λ Ι Ο Ν Α'.

Επισήμης ἔργον, τὸ ἐξ ἐννοιῶν τινων ἀπλυσέρων, ἃς ἐνῆκεν ὁ Δημιουργὸς τῇ λογικῇ Φύσει, ἐπιφέρειν ὅ,τι μὴ πρότερον ἐγνώσο· κακῶτερον ἑτερον αὐ-
δης, ὥς βαθμῖδα ὡσανεὶ προῦφρηκέναι πρὸς τὴν ἐφομένην, αἰεὶ τὴν γνῶ-
σιν, ἣτις ἠγάσματο. Γένοιτο γὰρ ἂν τῷ τοιούτῳ λόγῳ ἀκριβῶς ἐχομένοις, ἀπὸ
τῶν ἐλαχίστων τε καὶ κατ' αὐτὰ πλατέντων τὸ γινώριμον, ἀλωτὰ τῇ γνώσει
βαδίως, καὶ αὐτὰ τὰ λίαν ἀφανῆ καὶ δυσκάτοπτα. Ταύτην δέ τοι τὴν Ἐπισήμῃαι
συνήδητε καὶ προσήκεσαν Μέθοδον, ὡς ἐκ ἀνηνύτως, αἷς ἡ περὶ τὸ Ποσὸν ὑπό-
κειται θεωρία, πρὸ τῶν ἄλλων ἡσπάσαντο εἰσηγήσεις, πάντες ἴσασιν, ὅσοι
τῆς κατ' αὐτὰς μελέτης καὶ ἀκροῖς δακτύλοις ἐγεύσαντο. Μαρτυρήσειε δ' ἂν
τῷ λεγομένῳ καὶ μόνη (μηδὲν ἐπιὸν ἤδη λέγειν περὶ τῶν ἄλλων εἰδῶν τῆς
Μαθήσεως) ἡ Γεωμετρία, ἀπὸ τῶν προδηλοτάτων ἐπ' αὐτὰ δὴ τὰ ἀδηλό-
τατα ἐν βραχέει ἀναφερομένη, καὶ ἐπὶ τὰ πάνυ ὑψηλάς τε καὶ ἀποπτα ἀπὸ τῶν
λίαν ταπεινῶν, αὐτίκα μάλα ἱσταμένη μετάρσιος. Προκαταβάλλονται γὰρ
ἐν αὐτῇ ἀπλῆσταί τινες, καὶ βῆσαι νοηθῆναι Ἀρχαί, αἷς λόγῳ μετέχων καὶ
νῦν, ὅδεῖς ἠδέως ἐκ ἂν συναινεσίεν. Εἰδ' ἐξῆς ὑποτίθεται ταύτη ἡδε συγ-
χωρεῖται ὅλως ὕδεν, ὅ,τι μὴ λογισμοῖς ἀπταλτοῖς ἀσφαλῶς εἴη ἐπιφερόμε-
νον. Καὶ ντεῦθεν τέως Θεωρήμασί τιςιν, οἷα τῶν μὲν αἰδιώσεώς τε, καὶ γνώσεως

ὅτι πορρωτάτω ἀφιδρυμένοις, παντὸς δὲ λόγου, καὶ θαύματος ὑπερηρμένοις, μετὰ τῷ ἀσφαλῆς καὶ ἀναμφιλέκτου τῆς πίστεως, τὸ πρὸς σαφήνειαν εἰλικρινέστε, καὶ διηκριβωμένον ἐπαυγάζει, ὥς ἔκ ἄντις ῥαδίως ἐλπίσαιεν.

Ἀρχῶν δὲ τῶν κατὰ τὴν Γεωμετρίαν Εἶδη τρία τὰ ἐφεξῆς. Ὅρισμοί, Αἰτήματα, Ἀξιώματα· ὧν οἱ μὲν, τῶν ἐν χρήσει παραληφθησομένων εἰσι φωνῶν ἀναπτύξεις· τὰ δὲ, οἷα περ οὐ χαλεπῶς ὑπὸ τῶν εὖ ἐχόντων τὰς φρένας ἀπαιτουμένων, διδόμενα· τὰ δὲ, ἅττα αὐτολαμπῇ καὶ καταφανῇ πεφυκότα, τῷ κατὰ Φύσιν λόγῳ ποδηγέτη παρεπομένοις, κοινῇ παίζουσι τε, καὶ σπυδαίωσι τοῖς πᾶσιν ἠξιώται. Αὐτῶν δὲ τῶν αἰ Α' ποδείξεις εἰσὶν ἐχόμεναι, αἷς γε τῶν ἐν τοῖς Μαθήμασιν ἀληθειῶν, ταῖς κατὰ τὰς λογισμὰς ἀνάγκαις διαπιστευμένων καὶ κρατυνομένων, καὶ ἁκῶν ὑπειδοῖσι πεισθεῖς, καὶ ὁ περιφανὴς τὸ θράσος καὶ τὴν ἀπόνοιαν. Καὶ τοίνυν πρῶτος ἠγεῖται ὁ περὶ Γραμμῶν λόγος, καὶ τῶν ποικίλων Γωνιῶν, αἷς, ἐφ' ἐν συνιῆσαι σημεῖον ἐκείναι, ἀποτελεῖσιν. Εἴτ' ἐν ὅκτῳ ταῖς πρώταις Προτάσεσι, τὰ περὶ τῶν ἐπιπέδων Τριγώνων πραγματεύεται, ἅματα καὶ τὴν τῶν ἐπιπέδων Γωνιῶν φύσιν προσεκτιδέμενος. Μεθ' αἷς, Γωνίας μὲν καὶ Γραμμάς διχοτομεῖν, Καθέτους δὲ καθιέναι τε, καὶ ἀφίεναι μεθοδεύει. Ἐξῆς δὲ τὰ λοιπὰ τῶν Τριγώνων πάθη, ναιμὴν καὶ τῶν Παραλλήλων Εὐθειῶν ἐρμηνεύει. Ἐπὶ τούτοις ὅσα περ τοῖς Τετραπλεύροις παρακολουθεῖν οἶδε, καὶ ἰδίᾳ τοῖς Παραλληλογράμμοις διασκέπτεται· καὶ δείκνυσί γε τίνι δῆποτε λόγῳ τὰ Πολύγωνα, καὶ ἀτακτοῖ τὸ σχῆμα, εἰς Ὀρθογώνια ἂν ἀναχθεῖεν, ἢ ἀπλῶς Παραλληλόγραμμα, ἢ καὶ Τρίγωνα, τὰ μᾶλλον ἐν τοῖς σχήμασι κανονιζόμενά τε, καὶ γνωριζόμενα. Τελευταῖον δὲ οὐραγεῖ τὸ Πυθαγόρου διαβεβωμένον Θεώρημα, καὶ τὸ ἐκείνου ἀνεπίστροφον.

Ὅ ρ ι σ μ ο ι.

- α. Σημεῖον ἐστὶ τὸ ἐν τῷ μεγέθει ἀδιαίρετον. ἦτοι τὸ μὴδὲ τῇ ἐπινοίᾳ διαιρεθῆναι δυνάμενον. Ἐστὶ δὲ πως παντὸς μεγέθους τὸ Σημεῖον ἀρχή, οἷα δὴ καὶ Μονὰς ἀριθμῶν.
- β. Γραμμὴ δὲ μέγεθος μόνον κατὰ μῆκος· μῆκος καὶ γὰρ ἀπλατές. Νοεῖται δὲ κατὰ Σημεῖον ῥοὴν ἀναφύεσθαι.
- γ. Γραμμῆς δὲ πέρατα Σημεῖα.
- κ. ι. δ. Εὐθεῖα Γραμμὴ ἐστὶν, ἥτις ἐξ ἴσας τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς Σημεῖοις κεῖται. Ἡ δὲ ὡς Ἀρχιμήδης ὥριζαι· Εὐθεῖα Γραμμὴ ἐστὶν, ἡ ἐλαχίστη τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσῶν, ἦτοι τῶν ἀπὸ τῶ αὐτῶ ἐπὶ τὸ αὐτὸ Σημεῖον ἀχθῆναι δυνάμενων.

Η" ὡς τῷ Πλάτῳ, ἥς τὰ ἄκρα συνεπισκιάζει τὰ μέσα, ἐποπτεύουσιν ἀμέλει πατέρω τῶν ἐπ' αὐτῆς εὐθύ προηγμένης περάτων. Εἰς δὲ πάντων ὁ νοῦς. Ἡς τὰ ἄκρα τοῖς μέσοις ἐπιπροσδεῖ.

Ὁ ὅργανον δὲ τὸ εἰς καταγραφὴν Εὐθείας δεξιῶς ἔχον, ἐστὶν ὁ Κανὼν, ὃν περὶ τῆς ἀσραβῆς, ἢ μὴ, τυγχάνοντα, ὅπως ἐπικρίνειν εἰδῶσιν. Ἀγεται μὲν κατὰ τὸν Κανόνα Γραμμὴ, καὶ παρ' αὐτὸν ἀντιστραφέντα τὰ πέρατα, ὥς τὸ δεξιτέρον κατὰ τὸ ἀριστερόν γενέσθαι, καὶ ἀνὰ πάλιν, δευτέρα αὖθις ἐπὶ τῆς πρώτης. Εἰ μὲν οὖν ἀκριβῶς ἐκείνη προσεφαρμόζεται, εὐθύς ὁ Κανὼν. Εὐθύ γε, καὶ ἂν τὸ μέσον ἀμφὸς τοῦ ἑκάστοις ἐπιπροσδεῖ. Πλάτ. Παρμενίδ.
εἰδ' οὖν, ἦκιστα δῆλον ὅτι. (1)

Ἐπιφάνεια δὲ ἐστὶ μέγεθος, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει· καὶ δυεῖν ἄρα πλετεῖ διαστάσεων. Νοεῖται δὲ Γραμμῆς ῥοῇ φύεσθαι.

Ἐπιφανείας δὲ πέρατα Γραμμαί.

Ἐπίπεδον, εἰτὴν ἐπίπεδος Ἐπιφανεία ἐστίν, ἣτις ἐξ ἴσων ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς Γραμμαῖς κεῖται. Η" ὡς ὁ Ἥρων, ἐπίπεδος Ἐπιφανεία ἐστίν, ἐφ' ἥς ἀπανταχῇ Εὐθεῖα ἔχει προσαρμοοῦνται. Φύεται γὰρ καὶ αὕτη ἐξ Εὐθείας ρυτίσης ἐπ' εὐθείας· ἄλλως γὰρ ἂν καταγραφείη, καὶ ἐξ Εὐθείας ρυτίσης μὴ ἐπίπεδος Ἐπιφάνεια. Η", ἐπίπεδος Ἐπιφανεία ἐστίν, ἥς τὰ ἄκρα συνεπισκιάζει τὰ μέσα, πατέρω δηλονότι τῶν ἐπ' αὐτῆς εὐθύ προηγμένης περάτων ἐποπτεύουσιν. Η" ἐπίπεδος Ἐπιφανεία ἐστίν ἢ ἐλαχίστη τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν. Εἰς δὲ καὶ τῶν ὁ νοῦς. 5. 2. α. 2.

Τῷ μὲν ἔν Σώματος ἐνταῦθα, ἥτοι τῷ Στερεῷ ὁ Εὐκλείδης τὸν ὅρισμόν ἐκ ἀπέδωκεν, ὅπως περὶ αὐτῷ ἐν τέτοις πραγματευσόμενος. Μήτις δὲ καὶ τῷ ἐφίοιτο, Σῶμα μέγεθος ἐστὶ κατὰ μῆκος, καὶ πλάτος, καὶ βάθος. Τρεῖς τοίνυν εἰσὶ διαστάσεις τῷ Σώματι, δύο δὲ τῇ Ἐπιφανείᾳ, μία δὲ τῇ Γραμμῇ. Τῷ δὲ Σημεῖω ἡδεμία.

Ἐπίπεδος Γωνία ἐστίν ἢ ἐν Ἐπιπέδῳ δύο Γραμμῶν ἀπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν Γραμμῶν κλίσις. α.

Γωνίαν ἄρα συναποτελεῖσιν αἱ δύο Γραμμαὶ βα, γα, ἀλλήλων μὲν ἀπτόμεναι κατὰ τὸ α, μηδαμῶς δὲ ἐπ' εὐθείας κείμεναι· ἥτοι μὴ μίαν Γραμμὴν συναποτελεῖσαι. α. 3.

Πλευραὶ δὲ, εἰτὴν σκέλη τῆς Γωνίας εἰσιν, αἱ συνισῶσαι τὴν Γωνίαν γραμμαί.

Κορυφή δὲ τῆς Γωνίας ἐστὶ τὸ Σημεῖον α, καὶ ὁ τὰ σκέλη ἀλλήλοισι συνίσσι.

(1) Ε"ν τῷ 17. Α'ξιόμ.

κ. 4.

Γωνία μία προκειμένη, ἐνὶ γράμματι κατὰ κορυφὴν κειμένη, πλείονων δὲ ἐφ' ἓν σημεῖον κειμένων ἐκάστη, τρισὶ γράμμασιν ἐπισημαίνεσθαι εἴωθεν, ὧν τὸ ἐν μέσῳ τὴν τῆς Γωνίας κορυφὴν ὑποδεικνύειν ἐτάχθη, καί τοις ἑξ ἑστέον τῆτο, ἐν μόνον τῆς Γωνίας τοῖς σκέλεσιν ἀποχρήσεις παρεγχείμενον. Οὕτως ἢ ὑπὸ τῶν Γραμμῶν βχ, γα περιεχομένη, ἢ τοῖς τρισὶ γράμμασι βαγ, εἰ τοῦν ἑ τῷ ἐνὶ μόνῳ α περισημαίνονται.

κ. 5. ια.

Γωνίαι ἴσαι, ἢ μᾶλλον ὁμοίαι εἰσιν, ὧν ἐπ' ἀλλήλαις τῶν Κορυφῶν ἐπιτιθεμένων, καὶ αἱ Πλευραὶ συνεφαρμόζονται. Πρὸς γεμὴν ἰσότητα Γωνιῶν, τὰς Πλευρὰς ἴσας εἶναι, ἤκιστα ἀπαιτεῖται.

ιβ.

Ἄνιστοι δὲ, ἤτοι ἀνόμοιοι, ὧν ἐὰν αἱ Κορυφαὶ ἀλλήλαις, καὶ Πλευρὰ τῇ Πλευρᾷ ὥτι προσημαίνονται, ἢ λοιπὴ τῆς λοιπῆς ἐξίσταται. Ἐκείνη δὲ μείζων, ἢς Πλευρὰ ἢ ἐκπίπτουσα. Ἀμφοῖν δὲ τῷ ὀρίσμῳ ταῖς εὐθυγράμμοις (ὅρα μοι ὁρ. ιγ.) Γωνίαις προσήκετον.

Ἀλλὰ καὶ αὐξομένων τῷ μήκει, ἢ μειωμένων τῶν σκελῶν, ἡ Γωνία ἀναυξής μένειτε καὶ ἀμείωτος.

Ἐπεὶ δὲ ἐν τῇ τῶν Γραμμῶν κλίσει Γωνίας ἡ φύσις κεῖται, ἡ δὲ τῶν Γραμμῶν κλίσις ποσὸν ἢ ἐστίν· οὐδ' ἡ Γωνία ἄρα ποσὸν τι ἔσται. Εἴη γὰρ ἂν ἄλλως καὶ ἡ Καμπυλότης, πρὸς ἣν ἐκείνη τοσούτω διενήνοχεν, ὅτῃ καὶ θραύσις κάμψεως. Ἰσας τοίνυν σὺν Εὐκλείδῃ καὶ τοῖς ἄλλοις Γεωμέτραις τὰς Γωνίας ἀποκαλῶντες, εἶδεν, ὅτι μὴ τὸ ὁμοιον, καὶ ἐμφερὲς τῆς τῶν Πλευρῶν κλίσεως πρὸς ἀλλήλας, καὶ τὸ ἀκριβὲς τῆς αὐτῶν τέτων προσημασίως ἐπ' ἀλλήλαις, τῇ τῆς ἰσότητος κλήσει ὑποσημαίνειν βολόμεθα. Ἀλλὰ περὶ τήν τε μετὰ τὴν ις'. Πρὸτ. τῇ Γ'. Βιβλ. ἐντύχοις ἂν πλείοσι.

Μή ποτε δ' ἄρα αὐξήσεώς τε καὶ μειώσεως δεκτικὴ ἦσιν, καὶ τὸ ποσὸν τῇ Γωνίᾳ παρέπεται; Εὐθεῖαι γὰρ δύο συνῆσθαι ἀλλήλαις ἐφ' ἓν σημεῖον, πῇ μὲν μείζονα, πῇ δ' ἐλάσσονα τὴν πρὸς ἀλλήλας ἔχουσαι νεῦσιν, αὐτόθεν καὶ μείζονα Γωνίαν συνιστᾶν πεφύκασιν, ἢ ἐλάσσονα. Ταύτητοι καὶ (ἐν ὀρίσμ. ιε. καὶ ις.) ἡ μὲν Ἀμβλεία μείζων τῆς Ὀρθῆς ὠρίζαι. Ὀξεῖα δὲ, ἡ Ὀρθῆς ἐλάττωσιν. Καὶ δῆλον ἄρα ἐκ τέτων ὅτι συμβαίνει τὸ ποσὸν τῇ Γωνίᾳ, καὶ ὁ καὶ ἴση πρὸς ἴσην ἀκείει, καὶ πρὸς ἄνιστον ἄνιστος. Τῷ δ' αὐτῷ λόγῳ καὶ ἡ Καμπυλότης τὸ ποσὸν εἰσὶν ἐπιδέχεσθαι. Πᾶσα γὰρ Γραμμὴ, καὶ Ἐπιφανεία πᾶσα, Γραμμῆς εὐθείας καὶ ἐπιπέδου Ἐπιφανείας κατὰ τὸ μᾶλλον, ἢ ἥττον ἀπέχουσα, μείζονος ἂν εἴη πρὸς ἀλλήν, ἢ γοῦν ἐλάσσονος τυχεῖσα τῆς κάμψεως.

κ. 6. 7. ιγ.

8 9. 10.

Γωνία Εὐθύγραμμος καλεῖται, ὅταν αἱ περιέχουσαι αὐτὴν Γραμμαὶ Εὐθεῖαι ὦσι. Καμπυλόγραμμος δὲ, ὅταν Καμπύλαι. Μικτὴ δὲ, τῆς μὲν Εὐθείας

ῥοις, τῆς δὲ Καμπύλης. (ὄρα τὰ ἐν τῷ μετὰ τὴν ις. τῷ γ. βιβλ. Πορίσματα.)

Ὅταν Εὐθεῖα γδ, ἐπ' Εὐθεῖαν αβ σταθεῖσα, ἐπὶ μηδέτερα κλίνη, καὶ ιδ. κ. 11. τὰς ἐφεξῆς Γωνίας ἴσας ἁλλήλαις ποιῇ (τὴν ὑπὸ αγγδ τῇ ὑπὸ βγγδ) ὁρθὴ ἐστὶν ἑκατέρω τῶν ἴσων Γωνιῶν, καὶ ἡ ἐφεσκηεῖα Εὐθεῖα γδ, Κλίσις καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέσκηε.

Καὶ ἄλλως, ὁρθὴ Γωνία (ἡ ὑπὸ βαγ) ἐστὶν, ἥ περ ἐτέρωθεν ἀναφύεται ἴση (ἡ ὑπὸ γαδ) τῆς ἐτέρας τῶν Πλευρῶν (βα) προηγμένης. κ. 12.

Δύο Κανόνες πρὸς ὁρθὴν Γωνίαν συνεσκηότες, τὸν Γνώμονα συναποτελῶσι, τὸ εἰς Πυθαγόραν εὐρετὴν, παρὰ Οὐίτρεϊα (1) Κεφ. β. βιβλ. 3., ἀναφερόμενον ὄργανον. Ἐστὶ δὲ τοσαύτη τῆς ὁρθῆς Γωνίας ἡ δύναμις, πρότε κατασκευὴν ἐν ἅπασιν, καὶ καταμέτρησιν, καὶ μόρφωσιν, καὶ σκηρῖμόν, ὡς μηδὲν μονονηχὶ ἐκείνης ἀνεῖν ἐν τοῖς τοιαύτοις παραινέσθαι. Τῷ δὲ δὴ Γνώμονος βάσανος ἡ ἐφεξῆς γινέσθω. Ἐπὶ τῆς τυχέσεως εἰς κατὰ τὸ τυχὸν σημεῖον α, καὶ τῷ Γνώμονος Πλευρὰ αβ, προσεφαρμοζέσθω τῇ Γραμμῇ αε, διὰ δὲ στατέρας τῶν τῷ Γνώμονος Πλευρῶν ἀγέσθω Εὐθεῖα ἡ αγ. Εἴτα ἀντισρεφομένη τῇ Γνώμονος πρὸς τὸ ζ, ἣν μὲν ἄμφω αὐτῇ αἱ Πλευραὶ ταῖς Εὐθείαις αγ, αζ ἐπ' ἀκριβὲς ἐφαρμόζοιντο, δεῖγμα τῆτο ἡμῖν εἶναι σαφὲς τῆς τότε εὐθύτητος. Ο' δὲ λόγος ἐξ αὐτῶ τῷ ιδ. ὀρίσμῳ εὐδής. κ. 14.

Ἀμβλεῖα Γωνία (βαγ) ἐστὶν, ἡ μείζων Ὀρθῆς (ζαγ). π. κ. 15.

Ὄξεϊα δὲ (λαι) ἡ ἐλάσσων Ὀρθῆς ζαι. ις. κ. 16.

Σχήμα ἐπίπεδον, ἐστὶν ἐπίπεδος Ἐπιφάνεια, ὑπὸ μιᾶς, ἢ πλειόνων Γραμμῶν πανταχόθεν περατωμένη. ιζ.

Κύκλος ἐστὶ Σχήμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς Γραμμῆς περιεχόμενον, ἡ καλεῖται Περιφέρεια, πρὸς ἣν ἀφ' ἐνὸς Σημεῖου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων (α) πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι Εὐθεῖαι, ἴσαι ἁλλήλαις εἰσὶ. ιη. κ. 17.

Κέντρον δὲ τῷ Κύκλῳ τὸ Σημεῖον (α) καλεῖται. ιθ.

Διάμετρος δὲ τῷ Κύκλῳ ἐστὶν Εὐθεῖα (ἡ βγ) διὰ τῷ Κέντρῳ ἡγμένη, καὶ περατωμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τῷ Κύκλῳ Περιφέρειας, ἣτις καὶ δίχα τέμνει τὸν Κύκλον· ὁπερ ἐκ τῆς ἀκριβῶς τῶν Ἡμικυκλίων ἐπ' ἁλλήλα ἐφαρμόσεως, ἐστὶν εὐδηλότατον. κ.

Ἡμιδιάμετρος (ἢν Ἀκτῖνα καλεῖσιν) ἐστὶν ἡ Εὐθεῖα (αζ) ἡ ἀπὸ τῷ Κέντρῳ ἐπὶ τὴν Περιφέρειαν ἡγμένη. κα.

κ. 18. κβ. Ἡ μικύκλιον δὲ ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα (βλγ) ὑπὸ τε Διαμέτρου (βγ) καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης, ὑπ' αὐτῆς, τῆς Κύκλου Περιφέρειας, τατέσι τῆς Ἡμιπεριφέρειας (βλγ).

Γεννᾶται δ' ὁ Κύκλος ὡδί. Εὐθεῖα (ἡ αβ), ἐὰν θάτερον (α) τῶν περάτων ἀκινήτῳσ περιαχθεῖη, ἡ μὲν τὸν Κύκλον ἀναφύσει, θάτερον δὲ τῶν ἐπ' αὐτῆς πέρας (β), τὴν Περιφέρειαν.

Ἀναφαίνεται δὲ καὶ ἐν αὐτῇ τῇ γενέσει, παντὸς θαύματος οὕτω ἀξία ἡ Κύκλου φύσις. Τὸ μὲν, ὅτι κινήσει τε καὶ ἡρεμίᾳ, τοῖς μυχόμενοις δὴ τέτοις συναπαρτίζεται, τῆς μὲν Γραμμῆς, ὡς εἴρηται, περιαγομένης, τῇ δὲ ἐτέρῃ τῶν ἐπ' αὐτῆς περάτων ἀτρεμῆντος. Τὸ δ' ὅτι ἅπαντα τὰ σημεῖα, τὰ ἐπὶ τῆς Γραμμῆς τῆς γεννώσης, κατὰ τὸ αὐτὸ τῇ χρόνῳ περιόδῳ ἀνίσως διαπεραίνοντα, ἐκ ἰσοταχῶς προβάλλει κινήμενα. Τὸ δ' ὅτι καὶ ἡ τὸν Κύκλον ὀρίζουσα Περιφέρεια, ἐκ τῶν ἐναντίων πως καὶ αὐτὴ δοκεῖ συγκροτεῖσθαι, καὶ ἄκρων ἄνευ μέσῃ λόγον ἔχόντων ἀμέλειτοι ἐκ κοίλου τε καὶ κυρτοῦ, ὧν μεσιτεύει τὸ εὐθεῖς, οἷά περ καὶ τὸ ἴσον μεταξὺ μείζονος καὶ ἐλάττονος. Ὅ δὲ καὶ μάλλον ἄν τις θαυμάσειεν· καὶ πλάττει παντὸς ἀμοιρόσης τῆς Γραμμῆς, ἥ ταῦτα δὴ ταναντία παρασυμβέβηκεν. Ἐπὶ τέτοις οὖν καὶ Ἀριστοτέλης λίαν θαυμάσας ἐγένητο. Ἀλλὰ γὰρ μακρῶς ταῦτα ὑπερπαλεῖ τῷ θαύματι, ἂν περὶ Κύκλου, ἐν τῇ συνάμα τοῖς Κυλινδρικοῖς καὶ Δακτυλιοειδέσι, τύποις ἡμῖν ἐκδοθείη κατὰ τὸ αχινβ. Φυσικῇ τε καὶ Μαθηματικῇ Διαλέξει, ἐπραγματευσάμεθα. Ἀ' δὲ καὶ μετιδὶ βεληθεῖς ἐν ἐκείνοις.

Τὴν Περιφέρειαν οἱ ἀπὸ τῶν Μαθημάτων, εἰς 360 (ἃς Μοίρας καλεῖσι) μερίζον εἰώδασι, διὰ τὸ ἐν ταῖς χρήσεσι πάντως τῇ Ἀριθμῷ περιδέξιον. Τὴν δὲ Ἡμιπεριφέρειαν εἰς 180. Τὸ δὲ Τεταρτημόριον εἰς 90.

αγ. Εὐθύγραμμα Σχήματά ἐστὶ τὰ ὑπὸ Εὐθειῶν περιεχόμενα.

αδ. Τρίγωνον, ἢ Τρίπλευρον, τὸ ὑπὸ τριῶν Εὐθειῶν περιεχόμενον. Πρὸς δ', ἂν τε καὶ τῶν λοιπῶν ἀπάντων εὐθυγράμμων Σχημάτων ἀπλῆστατον ὄν, ἐκείνηνα πέφυκεν ἀναλύεσθαι.

κ. 19. κε. Τρίγωνον Ἰσόπλευρον ἐστὶ τὸ τρεῖς ἴσας ἔχον Πλευράς.

κ. 20. κς. Ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνας.

κ. 21. κζ. Σκεληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσας ἔχον Πλευράς.

κ. 22. κη. Ὄρθογώνιον Τρίγωνον ἐστὶ τὸ ἔχον ὀρθὴν Γωνίαν.

κ. 23. κθ. Ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν Γωνίαν.

κ. 24. λ. Ὄξυγώνιον δὲ τὸ καὶ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον Γωνίας.

κ. 25. λα. Τῶν δὲ Τετραπλευρῶν Σχημάτων Ὄρθογώνιον ἐστὶ, τὸ καὶ τὰς τέτταρας

Γωνίας ἔχον ὀρθάς, καὶ ἐν τῷ ἀκολουθεῖν ἴσαι, καὶ ἴσαι ἔχη τὰς Πλευράς, καὶ τε καὶ μή. καλεῖται δὲ τὸ β'. καὶ Ἐτερόμηκες. Ἐξείνο δέ,

Τετράγωνον τὸ Ἰσόπλευρόν τε καὶ Ὀρθογώνιον, καὶ ταύτη δέ τοι καὶ Ἰσο. λβ. κ. 26. γώνιον. Ἀπαν οὖν Τετράγωνον ἐστὶν Ὀρθογώνιον, ἐμὴν δὲ ἀνάπαλιν.

Ρόμβος δέ, ὁ Ἰσόπλευρον μὲν, καὶ Ἰσογώνιον δέ. λγ.

Ρόμβοειδὲς δέ, τὸ τὰς ἀπεναντίον Πλευράς τε καὶ Γωνίας ἴσαι ἀλλήλαις καὶ. κ. 27. ἔχον, ὁ ἢ τε Ἰσόπλευρον ἐστὶν, ἢ τε Ἰσογώνιον.

Παραλληλόγραμμον δὲ ἐστὶν, ὃ περ αἱ ἀπεναντίον Πλευραὶ, (αβ, ζγ) καὶ λδ. κ. 28. (βζ, αγ) εἰσὶ παράλληλοι. Τί δὲ τὸ παραλλήλως εἶναι, ἐχόμενα ὀριοῦνται.

Ἀπαν οὖν Ὀρθογώνιον Ἐτερόμηκες καὶ Τετράγωνον, ἐστὶ Παραλληλόγραμμον, ἀνάπαλιν δὲ ὑδαμῶς. Οἰοῦνται δὲ καὶ Ρόμβοι, καὶ Ρόμβοειδῆ Παραλληλόγραμμα, ἀνάπαλιν δὲ ὑδαμῶς.

Παράλληλοι εἰσὶν Εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἔσαι, καὶ ἐκβαλ- λς. κ. 29. λόμεναι ἐπ' ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἴσοις ἀλλήλων αἰεὶ ἀπέχουσι διαστήμασι.

Τὰ δὲ ἴσα διαστήματα διὰ τῶν μεταξὺ Καθέτων λαμβάνονται. Ταύτητοι παστῶν τῶν ἐπὶ ἑτέραν αβ τῶν δύο Παραλλήλων, καθέτων πλ, ἴσων ἀλλήλαις ἢ ὧν, Παράλληλοι αἱ αβ, γζ Εὐθεῖαι εἰρήσονται. Εὐθείας οὖν τῆς λπ, ἐπ' Εὐθείαν τὴν αβ Καθέτε, δι' αὐτῆς αἰεὶ πρὸς Κάθετον ἀγομένης, τὸ πέρας λ, τὴν γζ Παράλληλον διαγράφεται. Οὕτωτοι καὶ αἱ Παράλληλοι τὴν γένεσιν ἴσχυσι.

Ἐν τέτοις ἀλλ' οὖν τὸν Στοιχειωτὴν, Παραλλήλους Εὐθείας ὀριστάμενον, „τὰς ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἔσας, καὶ ἐκβαλλομένας ἐπ' ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ „μέρη, ἐπὶ μηδέτερα δὲ συμπίπτουσαι ἀλλήλαις, αἰτιάσασθαι τυχὸν ἄντις ὡς ὀρισμὸν ἀποδεδωκότα ἐλλειπῶς ἔχοντα, τῇ τε Ὑπερβολῇ καὶ Κογχοειδεῖ πρὸς Εὐθείαν παραβαλλομέναις, καὶ δυσὶν ἴσαις Παραβολαῖς ταῖς περὶ τὸν αὐτὸν Ἀξῶνα, πρὸς ἀλλήλας, καὶ πλείοσιν ἄλλαις γραμμαῖς τὸν νοῦν προσέχων, αἰεὶ ἐπ' ἄπειρον μὲν προεκβαλλομένας, καὶ αἰεὶ ἔγγιον ἐπὶ, παντὸς ὁδοῦ, ἐλάσσονι διαστήματι γινομένας, ἢ τε συμπίπτειν ποτὲ ἀλλήλαις συμβαίνει, ἢ τε μὴν παραλλήλως εἶναι, παρὰ τὸ μηδὲ ἐπίσης ἀφίστασθαι. Αὐτὸ γὰρ τῷτο ὅδ' ἐπὶ τῶν Εὐθειῶν καθ' αὐτὸ γνωρίμον ἐστὶ, τὸ διεξάναι δι' ἴση, ἐπεὶ οὐ συνίασι. Γένοιτο γὰρ ἂν καὶ ταύτας τυχὸν, γίνεσθαι μὲν αἰεὶ καὶ αἰεὶ μᾶλλον ἔγγιες, συμπίπτειν δὲ ἐφ' ἑν ὑδαμῶς ὁδεποτε. Ὡς τε καὶ καλῶς τὴν τῆς παραλληλίας τῶν Γραμμῶν φύσιν, ὁ παρ' Εὐκλείδῃ ὀρισμὸς εἰσὶν ἀναπτύσσειν. Ἀλλὰ γὰρ ἑτεροὶ ὑποτυχῶν, αἰτίας ἂν τῆς περὶ ταῦτα ὁλῆς, τὸν

ἄνδρα ἀπήλλαξεν. Οὐδὲ γὰρ ἀνάγκη τὰς ἐν τοῖς Μαθήμασιν ὁρίσμεν, μὴ πραγματιώδεις ὄντας, ὀνοματώδεις δὲ μόνον, τὴν φύσιν τῷ ὀριζομένῳ ἐπ' ἀκριβὲς ἀναπτύσσαν. Ἐνθεν τοι καὶ Εὐκλείδης Εὐθείας προτεipὼν Παραλλήλους, τὰς ἐπ' ἀπειρον μὲν ἐφ' ἑκάτερα ἐμβαλλομένας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἐπὶ μηδέτερα δὲ συμπιπτάσας, ἐμμένων δὲ καὶ ἐφεξῆς αἰεὶ ταύτη γε τῇ σημασίᾳ τῶν Παραλλήλων, μᾶλλον δὲ, καὶ τὸ μόναις ταῖς Παραλλήλοις, καὶ ἐπίσης ἀλλήλων ἀφεσώσαι προσιδιάζον ἐν ταῖς Εὐθείαις, διὰ τῷ ὁρισμῷ παραδέμενος, καὶ πάνυτι δικαίαν τὴν δίκην, δῆλον ὅτι δικάζεται.

κ. 30. λζ. 31. Παραλληλογράμμη τε, καὶ παντὸς Τετραπλεύρου Διάμετρος, ἥτοι Διαγώνιος, ἐστὶν ἡ διὰ τῶν ἀπεναντίον Γωνιῶν ἡγμένη Εὐθεῖα (αβ)

λη. Τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων Εὐθειῶν περιεχόμενα, Πολύπλευρά τε ἐστὶ, καὶ Πολύγωνα.

κ. 32. λδ. Γωνία δὲ ἐκτὸς γωνίας Εὐθυγράμμη ἐστὶν, ἡ συνισαμένη, Πλευρᾷ ἔξω τῷ Σχήματος ἐμβαλλομένης. Τοιαῦται εἰσὶν αἱ ὑπὸ ζβγ, καὶ ηγα, καὶ ζαβ. Τούτων τοίνυν ἐκτὸς Γωνιῶν Σχήμα ἑκάστων δεκτικὸν ἂν εἴη, ὁπόσωι, καὶ ἐντὸς εὐμοιρεῖ καὶ Πλευρῶν.

Γραμμῇ, Γωνίᾳ, Σχήμα διχάζεσθαι, ἢ δίχα τέμνεσθαι λέγεται, εἴαν εἰς μέρη δύο ἴσα ἀλλήλοις, τῶν ἑκάστων ἢ διαιρέμενον. Παραπλησίως δὲ καὶ τριχάζεσθαι, ἢ τρίςα τέμνεσθαι λέγεται, τὸ εἰς τρία ἀλλήλοις ἴσα διανεμόμενον. Καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Α ἱ τ ῆ μ α τ α.

Αἴτημα ἐστὶν, ὅπερ, ὅτι βεβῆκεν ἔχει τελεῖσθαι, αὐτόθεν δῆλον τυγχάνει. Ἡ τήδω τοίνυν.

α. Ἀπὸ παντὸς Σημεῖος, ἐπὶ πᾶν Σημεῖον, εὐθεῖαν Γραμμὴν ἀγαγεῖν.

β. Καὶ πεπερασμένην Εὐθεῖαν, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν.

γ. Καὶ παντὶ Κέντρῳ καὶ Διαστήματι Κύκλον γράφεσθαι.

Α' ξ ι ὡ μ α τ α.

Α' ξίωμα ἐστὶν ἐννοία κοινὴ, κατὰ αὐτὴν τὸ γινώσκον ἔχουσα.

α. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. Καὶ τὸ βεβῆκεν τῶν ἴσων μετίζον, ἢ ἐλαττον, καὶ βεβῆκεν πάντως.

β. Καὶ εἴαν ἴσοις ἴσα προσεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

γ. Καὶ εἴαν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενα ἐστὶν ἴσα.

δ. Καὶ εἴαν ἀνίσαις ἴσα προσεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἀνίσαις.

Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπὰ ἐσιν ἄνισα.

Καὶ τὰ τῷ αὐτῷ, ἢ τῶν ἴσων ἡμίση, ἀλλήλοις ἐσιν ἴσα. Καὶ τὰ τῷ αὐτῷ, ἢ τῶν ἴσων διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐσιν. Καὶ τὰ τριπλάσια δὲ, καὶ τὰ τετραπλάσια ὡσαύτως. Οἰοίαις δὲ καὶ τῶν ἀνίσων τὰ ἡμίση, ἢ διπλάσια, ἢ τριπλάσια, ἢ κξ. ἄνισα ἐσιν.

Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἀλλήλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐσιν· ὅπερ ἐκ ὁρθῶς ὁ Κλάβιος ἀντιγράφειν παρεβιάσατο, ψευδὲς ὅν ὅτι καθόλου τὰ ἴσα ἐπ' ἀλλήλα ἐφαρμόζει. Τὰ γὰρ ἀνόμοια τῶν Μεγεθῶν, καὶ ἴσα ἢ, ἐκ εἰσὶν ἐφαρμόζοντα. Ἐὰν οὖν πρὸς τῷ ἴσῳ, ληφθῇ καὶ τὸ ὅμοιον, ἔξει δὴ χώραν τ' ἀντίστροφον· καὶ ὁ καὶ ἡμῖν κείδω τὸ ἐξῆς.

Εὐθεῖαι ἴσαι ἐπ' ἀλλήλας ἐφαρμόζουσι. Καὶ Γωνίαι εὐθύγραμμοι ὡσαύτως. Καὶ Κύκλοι δὲ ἴσοι ὄντες ἐπ' ἀλλήλας ἐφαρμόζουσι. Καὶ τῷ αὐτῷ, ἢ ἴσων Κύκλων Περιφέρειαι ἴσαι, ἦτοι τόξα, ἐπ' ἀλλήλας ἐφαρμόζουσι. Καὶ Τετραγωνα, ἢ ἕτερα ὁποιαδηποῦν Σχήματα, ὁμοιά τε καὶ ἴσα ὄντα, ἐπ' ἀλλήλας ἐφαρμόζουσι.

Καὶ τὸ ὅλον τῷ μέρει μείζον αὐτῷ ἐσιν· ἴσον δὲ ἅπασιν τοῖς αὐτῷ μέρεσιν ἅμα ληφθεῖσι.

Καὶ πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ Γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσιν.

Τὸ γεμὴν παρ' Εὐκλείδῃ ια'. τῶν Α'ξιωμαίων, ὅτι ἐὰν εἰς δύο Εὐθεῖας „(αβ, γζ) Εὐθεῖα ἐμπέπτωσα (ηι) τὰς ἐντός, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη Γωνίας „(ὕπὸ βλπ, ζπλ) δύο Ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐμβαλλόμεναι αἱ δύο αὗται „Εὐθεῖαι ἐπ' ἀπειρον συμπεσύνται ἀλλήλαις, ἐφ' ὧ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο Ὀρθῶν ἐλάσσονες Γωνίαι” ἐπεὶ μηδέν τι σαφέστερόν ἐστι τῷ δεικνυμένῳ τῷ αὐτῷ Εὐκλείδῃ ἐν Προτ. κξ', ὡς ἀμέλει, „ἐὰν αἱ (ὕπὸ βλπ, ζπλ) Γωνίαι δυσὶν „Ὀρθαῖς ὡσὶν ἴσαι, αἱ Εὐθεῖαι (αβ, γζ) εὐδὲ περὶ συμπεσύνται. Ταύτητοι τῆς τῶν Α'ξιωμαίων τάξεως σὺν Γεμίνῳ, καὶ Πρόκλῳ, καὶ τοῖς ἄλλοις τῶν Γεωμετρῶν, καὶ αὐτοὶ ἐκσυρίττομεν. Οὐδὲ γὰρ ἐδ' Α'ξίωμα τὸ τοῖστον, ἀλλὰ Θεώρημα ἀντικρὺς, ὅπερ ἡμῖν μετὰ τὴν λγ'. τῷ ἀνὰ χεῖρας Βιβλίῳ δειχθήσεται, τῷ λς'. εἰς τὸτο ὅρισμῳ ὑπεργήστοντος. Τότε δὲ τὰ ἐφεξῆς δύο ἀντισαγαγεῖν ἔδοξεν, οἷς ἐκ τῷ ὅρισμῳ τῆς Παραλλήλιας αὐτίκα μάλα τ' ἀληθεῖς ἐπιλάμπει. Ἐῶ τοίνυν Α'ξίωμα τὸ ἐπόμενον.

Τῶν Εὐθειῶν αἱ Παραλλήλοι κοινῇ χωρῶνται Καθέτω· ταυτέσιν ἢ πρὸς τὴν ἑτέραν τῶν Παραλλήλων Κάθετος, αὐτὸ τὸτο ἐστὶ καὶ πρὸς τὴν ἑτέραν.

Καὶ Κάθετοι δύο (λξ, πι), ἀπὸ τῶν Παραλλήλων μέρη ἴσα ἐκατέρως ἐκκτέρωθεν (τὰ λπ, ξι) ἐναπολαμβάνουσι.

Τὸ μὲν παρ' Εὐκλείδῃ ια'. Α'ξίωμα (καίτοι ἡ μικρὰ τείνον εἰς ἀπόδειξιν τῶν α' παρέπεται ταῖς Παραλλήλοις παθήματα, ἄλλως τε δὲ ἡ παντὶ τῷ προσέχοντι ἄλλῃ καταφανῶς ἔχον) εἰκὸς τὸν ὀρισμὸν ἀνωτέρω τῶν Παραλλήλων μετακινήσαντα, καὶ κείνῃ ἑτερον ἀντισυνεγκόντα, καὶ τῷ ἐντεῦθεν τὸν Συγγραφέα μετασκευάσασθαι, καὶ τὰ ἀνωτέρω δύο Α'ξιώματα, ἅτε δὴ τῷ κατ' αὐτὸν ὀρισμῷ τῶν Παραλλήλων μᾶλλον συγγενῇ, ἢ οἰκείᾳ τυγχάνοντα, ἀντικαταστήσαι.

17. Δύο Εὐθεῖαι χωρὶον ἢ περιέχουσι· τριῶν τετράχισιν εἰς τὸ αἰταισμένον.

18. Δυσὶν Εὐθεαῖς Τμήμα κοινὸν ἢ ἐστὶ καὶ πᾶσαι αἱ Εὐθεῖαι κατὰ Σημεῖον ὑπ' ἀλλήλων πεφύκασι τέμνεσθαι.

κ. 34. Οἷον τῇ αφ Εὐθείᾳ ἐμπεσῶσα ἡ ψδ, ἡ ἐκβληθεῖσα, ἔμμενεν κατὰ τὴν δα χωρήσει, ἀλλ' ἐπὶ τὸ ε, ὡς ἐκείνην τὴν αφ, κατὰ Σημεῖον μόνον τὸ δ διατέμνεται. Τῷ δὲ τ' Α'ξίωμα τῇ ἐννοίᾳ τῆς Εὐθείας προσέχουσιν, ἐστὶν ἐκδηλότερον· μᾶλλον δὲ, ἡ ἐξ αὐτῆς τῆ ὀρισμῆς τῆς Γραμμῆς, τῆς μήκους μόνῃ ἀπλατῆς ἥτις, σαφές ὅτι ἅπασαι αἱ Γραμμαὶ, καὶ τε Εὐθεῖαι τύχωσι, καὶ τε Καμπύλαι, καὶ συμμίγδην Εὐθεῖαι τε ἅμα ἡ Καμπύλαι, δι' ἀλλήλων ἴσαι, κατὰ γε Σημεῖον τὰς τομὰς ποιοῦμεναι ἔσονται.

Ἐπειδὴ δὲ εἰσὶν οἱ τῶν ἐπὶ λεπτότητι ἑαυτῆς μακαριζόντων, ἐν τῷ φιλοσοφεῖν περιττοὶ, δυνατὴν ἡγνῆται τὴν τῶν Γραμμῶν κατὰ τι μέρος ἑαυτῶν σύμμιξιν, ἔδοξε δὴ τούτοις χαρισσάμενος, εἰς τὸ μφανέστερον πειράσασθαι προσνεγκεῖν τὸ Α'ξίωμα.

κ. 35. Καὶ δὴ ἐχέτωσαν εἰ δυνατόν, Εὐθεῖαι δύο αφ, δψ Τμήμα κοινὸν τὸ αδ.

Καὶ ἄλλως ἢ Κέντρῳ τῷ δ γεγράφῳ Κύκλος, τέμνων τὰς Εὐθείας κατὰ β ἢ γ· ἢ Τόξον εἰλήφῳ τὸ βζ ἴσον τῷ βγ, ἢ νοείδῳ ἡγμένη ἡ Εὐθεῖα ζδ.

Αἱ τοίνυν Εὐθεῖαι γδ, ἢ ζδ τὴν αὐτὴν ὅλως ἔλαχον θέσιν πρὸς τὴν βδ. Α'λλὰ μὲν ἡ Εὐθεῖα γδ συνάμα τῇ βδ, κοινὸν λέγονται ἔχειν Τμήμα τὸ δα. Ἄρα ἡ Εὐθεῖα ζδ, κοινὸν ἔχει μετὰ τῆς βδ, τὸ Τμήμα δα. Καὶ ἐστὶν ἄρα ταῖς τρισὶν Εὐθεαῖς γδ, βδ, ζδ, κοινὸν Τμήμα τὸ δα.

Ληφθῆτω οὖν αὖτις Τόξον τὸ ζη, ἴσον τοῖς πρότερον βζ, ἢ γβ. καὶ νοείδῳ ἡγμένη Εὐθεῖα ηδ. Καὶ δῆλον αὖτις, ὡς αἱ Εὐθεῖαι βδ, ηδ, τὴν αὐτὴν ἔλαχον θέσιν πρὸς τὴν ζδ. Α'λλ' ἤδη δέδεικται τὴν βδ μετὰ τῆς ζδ, κοινὸν ἔχειν Τμήμα τὸ δδ. Κοινὸν ἄρα ἔσται ἡ ταῖς Εὐθεαῖς ηδ, ζδ, Τμήμα τὸ δα.

Οὐκὲν αἱ τέτταρες ἤδη Εὐθεῖαι γδ, βδ, ηδ, ζδ, Τμήμα κοινὸν ἔχουσι τὸ δα. Καὶ τὸν αὐτὸν ὅλως τρόπον, δι' ὅλης τῆς τῷ Κύκλῳ Περιφερείας, Τόξον ἴσα ὅρ. ξων ληφθέντων τοῖς πρότεροις ἴσων, ῥᾶδιον ἂν εἶη δεῖξαι, πάσας ἅμα τὰς

κυκλόθεν ἡγμέναις Εὐθείαις, Τμήμα ἐχέσας κοινὸν τὸ δα. Τηλικῶτον οὖν τὸ κ.) Τὸ ἄρα
 ἄτοπον ἐφεται, δισσᾶς, τεθέντος, Εὐθείας τὴν τε γδ, ἢ βδ, κοινῇ Τμήμα-
 ρων, ἴσον τῷ
 γω· τὸ δ-
 λον τῷ μέ-
 ρει. Ὁ περὶ
 δύνατον.
 (Α' ε. 2.)

Τῷ δὲ τεθέντι Ἀξιώματι, ἢ ἡ ἰσχύς πᾶσα τῇ κατὰ τὰ Σχολαστήρια τε-
 θρυλλημένη, ἐρείδεται λόγῳ, τῇ ἐκ Σημείων ὅλως ἀδιαιρέτῳ τε, ἢ ἀριθμῷ
 ὠρισμένων, μηδὲν ἔχειν τῶν Μεγεθῶν συγκεῖσθαι, ὥδι δεικνύντος. Συγκεῖσθαι
 εἰ δυνατόν, Μεγεθῆ ἐκ σημείων· περὶ δὲ τὸ αὐτὸ Κέντρον νοείδωσαν γεγραμ-
 μέναι, ὅποσαι σὺν δόξῃ, Κύκλων Περιφέρειαι· τεθείδω δὲ τὴν ἀπασῶν ἐξω-
 τάτην, ἥτοι τὴν μεγίστην, ἐκ δέκα μυριάδων Σημείων συνεσάναι, ἀφ' ὧν ἐκά-
 στα ἐπὶ τὸ κοινὸν Κέντρον ἡγμέναι νοείδωσαν Γραμμαὶ εὐθεῖαι.

κ. 36.

Ἐκ μὲν οὖν τῇ ἀναπτυχθέντος Ἀξιώματος, ἀσφαλές ὅτι ὅσα μὲν αἱ Εὐ-
 θεῖαι ἐκεῖναι συναμίνυνται, ἔδῃ πρὶν, ἢ πρὸς αὐτὸ τὸ Κέντρον ἀφικέσθαι,
 ἀλλήλαις συνίασιν. Ταύτητοι ἢ πᾶσαι τὰς ἐν μέσῳ Περιφερείας διήκουναι, ἐν
 ταύταις Σημεῖα, τοῖς ἐν τῇ ἐξωτάτῳ ἐπισημανῶσι πάντως ἰσάριθμα. Ὡς
 ἢ ἐξ ἰσαριθμῶν Σημείων ἀπαται αἱ ὁρόκεντροι Περιφέρειαι συγκεκριόμεναι,
 ἢ ἐκ τῇ ἀκολούθῃ, αἱ πᾶσαι ἀλλήλαις ἴσαι εἰσίν· οὕτω δὲ τοι, ὡς τὴν ἐπὶ
 τῇ ὑποκειμένη τοῦ Χάρτε καταγεγραμμένην, μηδέν τι τῆς τῇ Στερεώματος
 Περιφερείας τὸ μέγεθος ἀπολείπεσθαι. Καὶ ἄλλαις οὖν ἀριθμὸν μονοῦ ὑπερ-
 βεβηκέαις Ἀποδείξεσι τῆς τοιαύτης κατακλυζομένης ἀπάτης, μίαν δὲ ταύτην
 πρὸ τῶν πολλῶν ἐνταυθὶ παραδέσθαι ἡξίωσα, ἅτε δὴ πανταχῇ περιδομένην,
 ἢ ἐκ τῇ προτεθέντος Ἀξιώματος ἀμέσως ἐξηρητημένην.

Τῶν ἴσων Κύκλων αἱ Διάμετροι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Καὶ αἱ τῶν δὲ
 Ἡμιδιάμετροι, εἰτὼν αἱ Ἀκτῖνες, ὁμοίως. Καὶ εἰάν Κύκλων δύο αἱ Ἀκτῖνες, εἰ-
 τὼν αἱ Διάμετροι ἴσαι ὦσιν, οἱ Κύκλοι ἴσοι εἰσίν. Ταῦτα δὲ ἢ ἐπὶ Τετραγώνων
 Πλευραῖς τε ἢ Διαμέτροις, ἢ ὁποιωνῶν ἄλλων Σχημάτων ὁμοίων τε καὶ ἴσων
 ταῖς ὁμολογέσαις Πλευραῖς τε, ἢ Διαμέτροις (περὶ ὧν ἐν τῷ ια'. ὁρ. τῷ Ε'.
 Βιβλ., ἢ ὁρισμ. α'. τῷ ε'.) παραπλησίως κρατεῖ· ἢ ἀνάπαλιν.

Καὶ ἡ τῇ μείζονος δὲ Κύκλου Διάμετρος μείζων, ἢ ἡ τῇ ἐλάσσονος ἐλάσ-
 σων, ἢ ἀνάπαλιν. Ὡς αὐτῶς δὲ ἢ ἐπὶ Τετραγώνων Πλευραῖς τε ἢ Διαμέτροις,
 ἢ ὁποιωνῶν ἄλλων Σχημάτων ὁμολόγοις Πλευραῖς τε, ἢ Διαμέτροις τὰ αὐτὰ
 ἡξίωται· ἢ ἀνάπαλιν.

Τῶν Προτάσεων αἱ μὲν τι προβάλλουσι ποιητέον, ἢ καλῶνται Προβλή-
 ματα· αἱ δὲ μόνῃ τῇ θεωρίᾳ ἐφηρημέναι, ἢ Θεωρήματα ἐπιλέγονται.

Πραγματεύεται δὲ τετὶ τὸ πρῶτον Βιβλίον, τὰ περὶ τῶν πρωτίτων

τοῖς Τριγώνοις τε, ἔξ Παραλληλογράμμοις παρεπομένων παθῶν. Ἐν ᾧ ἔξ
Προτάσεσι ἐπισημότεραί εἰσιν αἱ ἐφεξῆς· ΛΕ. ΛΖ. ΜΑ. ΜΔ. ΜΕ. ΜΖ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Α.

„Ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας (αβ) πεπερασμένης, Τρίγωνον ἰσόπλευ-
ρον συστήσασθαι.

κ. 37.

Κέντρῳ μὲν τῷ α, Διαστήματι δὲ τῷ αβ (1) Κύκλος γεγράφθω ὁ ζγβ.
Καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ β, Διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ βα, Κύκλος γεγράφθω ὁ
αγλ. Καὶ ἀπὸ τῶ γ Σημεῖο, κατ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ Κύκλοι, ἐπεξεύχ-
σωσαν Εὐθεΐαι (2) αἱ γα, γβ.

Φημί δὴ τὸ συνεχὲς Τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον. Ἡ γὰρ αγ Εὐθεΐα,
ἴση (3) τῇ αβ· ἀλλὰ ἔξ ἡ βγ ἴση τῇ βα (4). Ἀρα αἱ αγ, βγ ἴσαι (5) ἀλ-
λήλαις εἰσίν. Αἱ τρεῖς ἄρα τῶ Τριγώνου Πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Τὸ ἄρα
αγβ Τρίγωνον καὶ (6) ἰσόπλευρόν ἐστι, ἔξ ἐπὶ τῆς δοθείσης πεπερασμένης
Εὐθείας συνέσταται τῆς αβ· Ὅπερ ἔδει ποιῆται.

Π ρ ό τ α σ ι ς Β.

„Πρὸς τῷ δοθέντι Σημεῖῳ (α), τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ (εζ) ἴσην Εὐθεΐαν
σύστησθαι.

κ. 38.

Εἰλήφθω δὴ τῷ Διαβήτῃ διάστημα τὸ εζ (7)· ἔξ μετήχθω ἀπὸ τῆ α ἐπὶ
τὸ δ. Καὶ ἔσαι πάντως ἡ ἀχθεΐσα (8) Εὐθεΐα αδ, ἴση τῇ δοθείσῃ (9) εζ.

Α λ λ ω ς.

κ. 39.

Ἐς τὸ μὲν δοθέν Σημεῖον τὸ α, ἡ δὲ δοθεῖσα Εὐθεΐα ἡ εζ, ἔξ ἐπε-
ξεύχθω ἀπὸ τῆ α Σημεῖο ἐπὶ τὸ ε (10) Εὐθεΐα ἡ αε. Καὶ συνεχίσθω ἐπ' αὐ-
τῆς Τρίγωνον ἰσόπλευρον (11) τὸ αβε. Καὶ ἐκβεβλήθωσαν ἐπ' εὐθείαις ταῖς
βα, βε (12) Εὐθεΐαι αἱ αλ, εδ. Καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ ε, Διαστήματι δὲ τῷ εζ (13),
Κύκλος γεγράφθω ὁ μνζ. Καὶ πάλιν (14) Κέντρῳ μὲν τῷ β, Διαστήματι δὲ τῷ
βν, Κύκλος γεγράφθω ὁ νξο.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ε Σημεῖον, Κέντρον ἐστὶ τῶ μζν Κύκλου, ἴση ἐστὶν (15) ἡ εζ
τῇ εν. Καὶ πάλιν ἐπεὶ τὸ β, Κέντρον ἐστὶ τῶ νξο Κύκλου (16), ἴση ἐστὶν ἡ βο

(1) Αἱτ. γ. (2) Αἱτ. α. (3) Ὅρ. ιη. (4) Ὅρ. ιη. (5) Α'ξ. α. (6) Ὅρ. κ.
(7) Αἱτ. γ. (8) Αἱτ. α. (9) Α'ξ. α. (10) Αἱτ. α. (11) α. Βιβ. α. (12) Αἱτ. β.
(13) Αἱτ. γ. (14) Αἱτ. γ. (15) Ὅρ. ιη. (16) Ὅρ. ιη.

τῇ βν. Α'λλ' ἀπ' αὐτῶν αἱ βα καὶ βε, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. (1) Λοιπὴ ἄρα ἡ αο, λοιπὴ τῇ εν (2) ἴση ἐστὶ. Εἰδείχθη δὲ καὶ ἡ εζ ἴση τῇ εν· καὶ ἡ αο ἄρα (3) ἴση τῇ εζ. Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι Σημείῳ τῷ α, τῇ δεθείσῃ Εὐθείᾳ τῇ εζ, ἴση Εὐθεῖα κεῖται ἡ αο. Ο. Ε. Π.

Π ρ ό τ α σ ι ς Γ.

„Δύο δοθεισῶν Εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος (αβ) τῇ ἐλάσσονι (γ)
„ ἴσην Εὐθεῖαν ἀφελθῖν.

Λαβὼν τῷ Διαβήτῃ (4) τὸ Διάστημα τῆς ἐλάσσονος γ, μετάξησον ἐπὶ τὴν μείζονα, ἀπὸ τῆ α ἐπὶ τὸ ε. κ. 40.

Η' Ο' υ τ ω.

Καίθω πρὸς τῷ α Σημείῳ, τῇ γ Εὐθείᾳ, ἡ αδ ἴση (5)· καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ α, Διαστήματι δὲ τῷ αδ (6), Κύκλος γεγράφθω ὁ δζε. Ἰσὴ οὖν ἡ αε τῇ αδ. (7) Α'λλὰ καὶ ἡ γ τῇ αδ (8) ἐστὶν ἴση. Ἀρα ἡ αε ἴση τῇ γ (9). Δύο ἄρα δεθεισῶν Εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος αβ, τῇ ἐλάσσονι γ ἴση ἀφήρηται ἡ αε. Ο. Ε. Π. κ. 41.

Π ρ ό τ α σ ι ς Δ.

„Εἰάν δύο Τρίγωνα (φ, ψ) τὰς δύο Πλευρὰς ταῖς δυσὶ Πλευραῖς ἴσας
„ ἔχῃ ἐκατέραν ἐκατέρᾳ (ἦτοι τὴν μὲν βα τῇ ζλ, τὴν δὲ γα τῇ ιλ) καὶ τὴν
„ Γωνίαν (α) τῇ Γωνίᾳ (λ) ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων Εὐθειῶν περιεχομέ-
„ νην· καὶ τὴν Βάσιν (βγ) τῇ Βάσει (ζι) ἴσην ἔξει, καὶ τὸ Τρίγωνον (φ) τῷ
„ Τρίγωνῳ (ψ) ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ Γωνίαι ταῖς λοιπαῖς Γωνίαις ἴσαι ἔ-
„ σονται ἐκατέρα ἐκατέρᾳ (ἦτοι ἡ μὲν β τῇ ζ, ἡ δὲ γ τῇ ι) ὑφ' αἱ αἱ ἴσαι
„ Πλευραὶ ὑποτείνεσι.

Ἐπιτιθεμένη γὰρ τῷ Τρίγωνῳ ψ ἐπὶ τῷ Τρίγωνῳ φ, αἱ Πλευραὶ λζ, λι ἀκριβῶς ἐφαρμόσασι ταῖς ἴσαις (10) Πλευραῖς αβ, αγ, ὅτως ὥστε τὰ τρία Σημεῖα τὰ, λ, ζ, ι ἐπιπεσεῖν ἐπὶ τοῖς τρισὶν α, β, γ. Ἀρα καὶ ἡ Βάσις ζι ὅλη, ἐπὶ Βάσει τῆς βγ ὅλης ἐπιπεσεῖται. Α'λλὰ καὶ αἱ Γωνίαι ζ, β, ὡσπύτως δὲ καὶ αἱ ι, γ· καὶ ὅλα τὰ Τρίγωνα ἐπ' ἀλλήλα ἐφαρμόσονται. Καὶ πάντα ἄρα ἴσα (11) ἔσται.

(1) Ἐκ Κατασκ. (2) Α'ξ. γ. (3) Α'ξ. α. (4) Α'τ. γ. (5) β. Βιβλ. α. (6) Α'τ. γ. (7) Ὑφ. ιη, (8) Ἐκ Κατασκ. (9) Α'ξ. α. (10) Α'ξ. η. (11) Α'ξ. ζ.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Παραπλησίω δὲ λόγῳ ἔ τὸ ἐφεξῆς Θεώρημα, ὃ παρὰ πόδας ἢ χρῆσις, ἐξίς ται δεῖξαι.

„Ἐάν δύο Τριγώνων (φ, ψ) αἱ Πλευραὶ βγ, καὶ ζι ἴσαι ὡσι, καὶ αἱ πρὸς ταύταις τὰς Πλευρὰς Γωνίαι (ἀμέλειτοι αἱ β ἔ γ, ταῖς ζ ἔ ι) ἴσαι ὡσιν, ἑκατέρα ἑκατέρα· ἔ τ' ἄλλα πάντα, ἔ αὐτὰ τὰ Τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἔσαι.

κ. 43.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ Γωνίαι β ἔ γ, ἴσαι εἰσι ταῖς Γωνίαις ζ ἔ ι, ἐάν τὴν Πλευρὰν ζι ἐπιθῆς, ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ Πλευρᾷ βγ, αὗται ἐπ' ἀλλήλας (1) ἐφαρμόσασιν. Οὕτω δὲ τοι διὰ τὴν ἰσότητα τῶν Γωνιῶν ζ, β, ἔ ι, γ, ἔ ἢ ζλ ἐπιπεσεῖται (2) ἐπὶ τὴν βα, ἔ ἢ ιλ ἐπὶ τὴν γα. Ἐπιπεσεῖται δὲ ἄρα ἔ τὸ Σημεῖον λ ἐπὶ τὸ Σημεῖον α, (ἐκπεσον γὰρ τῇ α, ἢ δ' αἱ πλευραὶ ζλ, ιλ ταῖς Πλευραῖς βα, γα ἐπικείσονται) καὶ ἀκριβῶς ἄρ' ὕτω τὰ πάντα ἐφαρμόζοντα, (3) ἴσα ἔσαι.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ε.

„Τῶν Ἰσοσκελῶν Τριγώνων αἱ πρὸς τὴν Βάσιν Γωνίαι (α, γ) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσι.

κ. 44.

Νοεῖσθω δὴ τὸ Τρίγωνον αβγ δις κοίμενον, τῇ γεμῇ δέσει ἀντετραμμένον ΓΒΑ. Ἐπεὶ τοίνυν ἐν τοῖς δυοῖν Τριγώνοις αβγ, ἔ ΓΒΑ, ἢ μὲν αβ Πλευρὰ ὑποτίθεται ἴση τῇ ΓΒ, ἢ δὲ γβ τῇ ΑΒ, ἔ ἢ Γωνία β τῇ Γωνίᾳ Β· καὶ ἢ πρὸς τὴν Βάσιν Γωνία α, τῇ Γωνίᾳ Γ, ἢτοι τῇ γ (ἢ αὐτὴ γὰρ ἐστίν) ἴση (4) ἐστίν. Ο. Ε. Δ.

Α' λ λ ω ς.

„Τῶν Ἰσοσκελῶν Τριγώνων αἱ πρὸς τὴν Βάσιν Γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσι, ἔ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων Εὐθειῶν, ἔ αἱ ὑπὸ τὴν Βάσιν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσι.

κ. 45.

Τῇ Ἰσοσκελεῖ αβγ προσεκβεβλήθωσαν ἐπ' εὐθείας τῶν αβ, αγ, αἱ βδ, γε. Καὶ εἰλήφθω ἐπὶ μὲν τῆς βδ τυχὸν Σημεῖον τὸ ζ, ἔ ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς μεζονος αε, τῇ ἐλάχιστοι αζ, ἴση ἢ αη (5), ἔ ἐπεζεύχθωσαν (6) αἱ ζγ, ηβ.

(1) Α' ε. κ. (2) Α' ε. κ. (3) Α' ε. ζ. (4) δ. Βιβ. α. (5) γ. Βιβ. α. (6) Α' στ. α.

Ἐπεὶ οὖν ἐσὶν ἡ μὲν αζ, ἴση τῇ αη (1), ἡ δὲ αβ, τῇ αγ (2), καὶ Γωνία δὲ κοινὴ ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπὸ ζαη· καὶ Βάσις ἄρα (3) ἡ ζγ, Βάσει τῇ βη ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ αζγ Τρίγωνον, τῷ αηβ Τριγώνῳ, καὶ ἡ ὑπὸ αγζ τῇ ὑπὸ αβη, καὶ ἡ ὑπὸ αζγ τῇ ὑπὸ αηβ. Ἀλλ' ἐστὶ δὴ καὶ λοιπὴ ἡ βζ, λοιπῇ τῇ γη (4) ἴση. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ζγ, ἴση τῇ βη, καὶ ἡ ὑπὸ βζγ τῇ ὑπὸ γνβ ἴση· καὶ τὰ λοιπὰ ἄρα τοῖς λοιποῖς (5) ἴσα ἔσται, ἥτε ὑπὸ βγζ τῇ ὑπὸ ηβγ ἴση ἔσται. Καὶ εἰδὼν ἄρα ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τῶν αγζ, καὶ αβη τῶν ἴσων δεδειγμένων, ἔσται καὶ λοιπὴ (6) ἡ ὑπὸ αγβ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ αβγ ἴση, αἱ πρὸς τὴν Βάσιν εἰσὶν. Ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ζβγ, καὶ ὑπὸ βγη (τῶν πάντων ἐν αὐτοῖς τοῖς Τριγώνοις ἴσων δειχθέντων) ἴσαι καὶ αὐταὶ ἀλλήλαις εἰσὶν, αἱ ὑπὸ τὴν Βάσιν εἰσὶ. Τῶν ἄρα κοσκελῶν Τριγώνων αἱ πρὸς τὴν Βάσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὴν Βάσιν κς. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α .

Ἀρ' οὖν τὸ Ἰσόπλευρον Τρίγωνον, ἐστὶ καὶ Ἰσογώνιον.

Π ρ ό τ α σ ι ς ς .

„Εἰ ἂν Τριγώνῳ (αβγ) αἱ δύο Γωνίαι (α καὶ γ) ἴσαι ἀλλήλαις ᾦσι, καὶ αἱ Πλευραὶ (αβ, βγ) αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας Γωνίας ὑποτείνεσθαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Νοεῖδω δις τὸ Τρίγωνον καίμενον, τῇ γεμῆν θέσει ἀντεσραμμένον, αβγ, ΓΒΛ. Τῆς οὖν Πλευρᾶς γα, ἐξισυμένης τῇ Πλευρᾷ ΓΑ, καὶ τῆς Γωνίας α τῇ Γ, καὶ τῆς γ τῇ Α, καὶ τὰ λοιπὰ πάντα ἴσα (7) ἔσται. Καὶ δὴ καὶ ἡ Πλευρὰ αβ τῇ Πλευρᾷ ΓΒ, ἥτοι τῇ γβ. (ἡ αὐτὴ γὰρ ἐστὶν) Ο. Ε. Δ.

κ. 46.

Α' λ λ ω ς .

Εἰ μὴ γὰρ, ἔσω ἑτέρα, οἷον ἡ αβ, μείζων τῆς αγ, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς αβ, τῇ ἐλάσσονι αγ, ἴση (8) ἡ βδ, καὶ ἐπεζεύχθω (9) ἡ δγ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ δβ τῇ αγ (10), δύο δὴ αἱ δβ, βγ, δυσὶ ταῖς αγ, γβ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρῃ, καὶ Γωνία ἡ ὑπὸ δβγ, τῇ ὑπὸ αγβ (11) ἐστὶν ἴση· Βάσις ἄρα ἡ δγ, Βάσει τῇ αβ (12) ἴση ἐστὶ· καὶ τὸ αγβ τῷ δβγ Τριγώνῳ ἴσον ἔσται, τῷ ἐλάσσονι τὸ μείζον· ὅπερ ἄτοπον. Ἀρα κτ.

κ 47.

(1) Κατασκ. (2) Ε'ξ ὑποδ. (3) δ. Βιβ. α. (4) Α'ξ. γ. (5) δ. Βιβ. α. (6) Α'ξ. γ. (7) Σχόλ. τῆς δ'. (8) γ. Βιβ. α. (9) Α'τ. α. (10) Ε'κ κατ. καὶ ὑποδ. (11) Ε'ξ ὑποδ. (12) δ. Βιβ. α.

Π ό ρ ι σ μ α .

Τὸ ἄρα Ἰσογώνιον Τρίγωνον, ἐστὶ καὶ Ἰσόπλευρον.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ζ.

„Επὶ τῆς αὐτῆς Εὐθείας (αβ) δυοὶ ταῖς αὐταῖς Εὐθείαις (αγ, γβ)
 „ἄλλαι δύο Εὐθεῖαι (αβ, δβ) ἴσαι ἑκατέρω ἑκατέρω καὶ συζαθῆσονται πρὸς
 „ἄλλω καὶ ἄλλω Σημεῖω (γ καὶ δ) ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη (τὰ κατὰ γ καὶ δ), τὰ
 „αὐτὰ πέρατα ἔχονται (α καὶ β) ταῖς ἐξ ἀρχῆς Εὐθείαις.

κ. 48.

Εἰ γὰρ, ἐπιζευχθείσης τῆς γδ (1) ἔσαι ἡ ὑπὸ αγδ, ἴση τῇ ὑπὸ (2)
 αδγ. Μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ αδγ, τῆς ὑπὸ δγβ. (3) Πολλῶ ἄρα ἡ ὑπὸ γδβ,
 μείζων τῆς ὑπὸ δγβ. Ἀλλὰ καὶ ἴση (4), ἴσων ὑποτιθεμένων τῶν βγ, βδ, ὅ-
 περ ἀδύνατον. Ἀρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς κτ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Η.

„Εὰν δύο Τρίγωνα (αβγ, δεζ) τὰς δύο Πλευρὰς, ταῖς δυοὶ Πλευραῖς
 „ἴσαι ἔχη (τὰς αβ, αγ ταῖς δε, δζ) ἑκατέραν ἑκατέρω, ἔχη δὲ καὶ τὴν
 „Βάσιν (βγ) τῇ Βάσει (εζ) ἴσην καὶ τὴν Γωνίαν τῇ Γωνίᾳ ἴσην ἔξει (τὴν ὑπὸ
 „βαγ, τῇ ὑπὸ εδζ) τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων Εὐθειῶν περιεχομένην.

κ. 49.

Εφαρμοσάσης γὰρ τῆς βγ ἐπὶ τὴν ἴσην (ς) εζ, καὶ αἱ αβ, αγ ἐφαρμό-
 σασιν ἐπὶ τὰς εδ, δζ. Εἰ μὴ γὰρ, συζαθῆσονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς Εὐθείας,
 δυοὶ ταῖς αὐταῖς Εὐθείαις, ἄλλαι δύο Εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρω ἑκατέρω, πρὸς
 ἄλλω καὶ ἄλλω Σημεῖω ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχονται, ὅπερ (6)
 ἀδύνατον. Εφαρμόσασιν ἄρα ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, ἐπὶ τὴν ὑπὸ εδζ ἐφαρμό-
 σαι, καὶ (7) ἴση αὐτῇ ἔσαι. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Θ.

„Τὴν δοδεῖται ἐνθύγραμμον Γωνίαν (βαγ) δίχα τεμεῖν.

κ. 50.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αβ τυχὸν Σημεῖον τὸ δ, καὶ ἀφηρήθω ἀπὸ τῆς αγ
 τῇ αδ (8) ἴση ἡ αε. Καὶ ἐπεζεύχθω (9) ἡ δε. Καὶ συνεκάθω ἐπὶ τῆς δε, Τρί-
 γωνον (10) Ἰσόπλευρον τὸ δζε καὶ ἐπεζεύχθω (11) ἡ δζ. Λέγω δὴ ὡς αὐ-
 τη τὴν ὑπὸ βαγ δίχα τεμεῖ.

(1) Αἴτ. α. (2) ε. Βιβ. α. (3) Αἴ. α. (4) ε. Βιβ. α. (5) Α'ξ η. (6) ζ. Βιβ. α.
 (7) Αἴ. ζ. (8) γ. Βιβ. α. (9) Αἴτ. α. (10) α. Βιβ. α. (11) Αἴτ. α.

Καὶ γὰρ $\delta\alpha$, δὲ ἴσαι ταῖς $\epsilon\alpha$, $\epsilon\zeta$ (1). ἡ δὲ Βάσις $\alpha\zeta$ κοινή· ἡ ἄρα ὑπὸ $\delta\alpha\zeta$ ἴση (2) τῇ ὑπὸ $\zeta\alpha\epsilon$. Δίχα ἄρα (3) τέτμηται ἡ ὑπὸ $\beta\alpha\gamma$. Ο. Ε. Π.

Π ό ρ ι σ μ α .

Ἐκ τούτου δῆλον πῶς ἂν εἰς 4, ἢ 8, ἢ 16, ἢ κξ. ἴσαι ἀλλήλαις ἡ δοθεῖσα Γωνία τέμνεσθαι ἔχοι· τῶν ἡμίσεων δηλονότι ἐφεξῆς ὑποδιχαζομένων.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Οὐδεὶς ἐδέπω ϵ νῦν οἷος ὥφθῃ μέθοδον ὑποθέσθαι, καθ' ἣν Κύκλωτε, ϵ Εὐθεία χρωμένοις, εἴη ἂν τὴν δοθεῖσαν Γωνίαν εἰς ἴσας ὅσασδηποτὲν ὑποτέμνειν. Ο' γομὴν Πάππος, ϵ ὁ Ἀρχιμήδης Γραμμάς τινας τῶν Καμπύλων, οἷον τὴν Τετραγωνίζησαν, ϵ τὴν Σπειροειδῇ, εἰς τῆτο συντελέσας εἰσήνεγκαν· ὧν ὁ πρῶτος ϵ Γωνίαν τετριχοτόμηκε Βιβλ. δ. Πρωτ. λα., τῇ Ὑπερβολῇ πεχορημένος, ὁ ϵ διὰ τῆς Παραβολῆς, ἡ ϵ διὰ τῆς Κογχοειδὸς διανύσαι βᾶδιον.

Μηχανικῶς δὲ εἰς ὅσασδηποτὲν ἴσαι τὴν δοθεῖσαν Γωνίαν τεμεῖς, εἰάν ἀπὸ τῆς κορυφῆς (α) τῆς Γωνίας, ὡς ἀπὸ Κέντρου, Κύκλῳ τόξον ὑπὸ τῶν τῆς Γωνίας σκελῶν ἐναπολαμβανόμενον καταγράψῃς, ϵ τῆτο εἰς ὅσα διηποτοῦν ἂν δόξῃ, μέρη ἀλλήλοις ἴσα διέλῃς· Οὕτω γὰρ ἂν αἱ ἀπὸ τοῦ Κέντρου α , διὰ τῶν κατὰ τὰς διαιρέσεις Σημείων ἐξιῶσαι Εὐθεῖαι, εἰς μέρη ἰσάριθμά τε καὶ ἰσάλλα, τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον Γωνίαν διαμερίττειαν.

κ. 51.

Π ρ ό τ α σ ι ς I.

„Τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν πεπερασμένην ($\alpha\beta$) δίχα τεμεῖν.

Συνεσάδω ἐπ' αὐτῆς ἰσοπλευρον Τρίγωνον (4) τὸ $\alpha\gamma\beta$. (ὕπεργήσεις δ' ἂν ἐδὲν ἦττον ϵ τὸ Ἰσοσκελές) δίχα τε ἡ πρὸς τῷ γ Γωνία τετμήσθω (5) τῇ Εὐθείᾳ $\gamma\delta$. Φημί δὴ ὡς τῇ αὐτῇ, ϵ ἡ $\alpha\beta$ κατὰ τὸ δ διχαδιήσεται.

κ. 52.

Ἰσων γὰρ ἐσῶν ἀλλήλαις τῶν $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$, κοινῆς δὲ τῆς $\gamma\delta$, ἴσης δὲ τῆς ὑπὸ $\alpha\gamma\delta$, τῇ ὑπὸ $\delta\gamma\beta$ (6), ϵ αἱ Βάσεις $\alpha\delta$, $\beta\delta$ ἴσαι (7) ἀλλήλαις ἔσονται. Δίχα ἄρα τέτμηται (8) ἡ δοθεῖσα $\alpha\beta$. Ο. Ε. Π.

Ἀρκέσει δὲ κατὰ τὰς Πράξεις, Κέντροις τοῖς α ϵ β , Κύκλῳ δύο καταγράψαι, τέμνοντας ἀλλήλους κατὰ ϵ , ϵ ζ , καὶ τὴν (9) $\epsilon\zeta$ ἐπιζευγνύναι.

κ. 53.

(1) Κατασ. (2) η. Βιβ. κ. (3) Ο'φ. μ. (4) α. Βιβ. κ. (5) δ. Βιβ. κ. (6) Ἐκ κατασ. (7) δ. Βιβ. κ. (8) Ο'φ. μ. (9) Α'τ. κ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΑ.

„Τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ (αβ) ἀπὸ τῆ πρὸς αὐτῇ δοθέντος Σημεῖου (γ), πρὸς ὁρθὰς Γωνίας εὐθεῖαν Γραμμὴν ἀγαγεῖν.

κ. 54.

Εὐλήφθω ἐπὶ τῆς αβ τυχόν Σημεῖον τὸ δ, ἐ κείῳ ἴση τῇ γδ ἢ γε (1), καὶ ἐπὶ τῆς δε Τρίγωνον ἰσόπλευρον συνεσάθω (2) τὸ δζε, ἐ ἐπεξεύχθω ἡ ζγ (3). Φημί δὴ ταύτην πρὸς ὁρθὰς ἦχθαι.

Γ'σαι γὰρ (4) ἡ μὲν δζ τῇ ζε, ἡ δὲ γδ τῇ γε, ἡ δὲ γζ κοινή. Α'ρ' ἔν (5) ἐ ἡ ὑπὸ δγζ, ἴση τῇ ὑπὸ ζγε· εἰσι δὲ ἐφεξῆς. Α'ρα (6) ὁρθὴ ἐσιν ἐκαστέρᾳ. Ο. Ε. Π.

Ε'πί ταῖς κατὰ ταύτην, ἐ τὴν ἐφεξῆς Πράξεσιν ἡ Γνώμων ἡμῖν ὑπεργήσῃ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΒ.

„Επὶ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν ἀπειρον (αβ), ἀπὸ τῆ δοθέντος Σημεῖου (γ) ἢ ὃ μὴ ἐσιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν Γραμμὴν ἀγαγεῖν.

κ. 55.

Κέντρῳ μὲν τῷ γ, Κύκλος γεγραφθῶ, τέμνων τὴν δοθεῖσαν κατὰ τὰ η ἐ Σημεῖα, ὃ ἐζη· καὶ δίχα τετμήθω ἡ εη κατὰ τὸ θ· (7) καὶ ἐπεξεύχθω (8) ἡ γθ· Φημί δὴ ταύτην εἶναι τὴν Ζητούμενην.

Ε'πιζευχθεῖσων γὰρ ἐ τῶν ηγ, εγ, ἴσων τε οὐσῶν (9), αἱ μὲν ηθ, ἐ εθ ἴσαι ἀλλήλαις (10) εἰσιν, ἡ δὲ γθ κοινή. Α'ρ' οὖν ἐ ἡ ὑπὸ ηθγ ἴση ἔσαι (11) τῇ ὑπὸ εθγ· ταύτη δέ τοι ἐ Ὅρθαί. (12) Καὶ Κάθετος ἄρα ἡ θγ, ἀπὸ τῆ δοθέντος Σημεῖου γ, κτ. Ο. Ε. Π.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΓ.

„Ὡς ἂν Εὐθεῖα (ἡ αβ) ἐπ' Εὐθεῖαν (τὴν γδ) σταθεῖσα, Γωνίας ποιῇ, ἥτοι δύο Ὅρθας, ἡ δυσὶν Ὅρθαῖς ἴσας ποιήσῃ.

κ. 56.

Εἰ μὲν γὰρ ἴση ἡ ὑπὸ γβα τῇ ὑπὸ αβδ, δύο Ὅρθαί (13) εἰσιν. Εἰ δ' ἔ, ἦχθω ἀπὸ τῆ β πρὸς ὁρθὰς (14) ἡ βε. Αἱ ἄρα ὑπὸ γβε, καὶ εβδ Ὅρθαί εἰσιν. Ε'πει οὖν ἡ ὑπὸ γβε ἴση δυσὶ ταῖς ὑπὸ γβα, ἐ ὑπὸ αβε (15)· κοινῇ προσδεύτης τῆς ὑπὸ εβδ, ἔσονται (16) αἱ δύο ὑπὸ γβε, ἐ ὑπὸ εβδ, ἴσαι ταῖς τρισὶν ὑπὸ γβα, αβε, εβδ. Πάλιν ἐπεὶ ἡ ὑπὸ δβα, δυσὶ ταῖς ὑπὸ δβε,

(1) γ. Βιβ. α. (2) α. Βιβ. α. (3) Αἰτ. α. (4) Ε'κ Κατ. (5) η. Βιβ. α. (6) Ὅρ. ιδ. (7) ι. Βιβ. α. (8) Αἰτ. α. (9) Ὅρ. ιη. (10) Ε'κ Κατ. (11) η. Βιβ. α. (12) Ὅρ. ιδ. (13) Ὅρ. ιδ. (14) ια. Βιβ. α. (15) Α'ξ. β. (16) Α'ξ. β.

εβα ἰση ἐςί (1)· κοινῇ προσεδείσθης τῆς ὑπὸ αβγ, ἔσονται αἱ ὑπὸ δβα, αβγ, τρισὶ ταῖς ὑπὸ δβε, εβα, αβγ ἴσαι. (2) Αἱ δύο ἄρα ὑπὸ δβα, αβγ, δυσὶ ταῖς ὑπὲ γβε, εβδ Ὁρθαῖς προδειχθεῖσαι, ἴσαι (3) εἰσίν. Ο. Ε. Δ.

Π ο ρ ῖ σ μ α τ α .

Ὡς εἴ γε Εὐθεῖαι πλείους μιᾶς, ἐπὶ τὴν αὐτὴν Εὐθεΐαν, κατὰ τὸ αὐτὸ Α'. Σημεῖον συζαδῶσι, παραπλησίως ἐπέσαι δεῖξαι, ὅτι Γωνίας ποιῶσι δυσὶν Ὁρθαῖς ἴσας.

Καὶ εἴαν Εὐθεῖαι δύο αβ, ε γδ, ἀλλήλας τέμνωσι κατὰ τὸ ε, Γωνίας Β'. ποιήσουσι τὰς πάσας τέτταρσιν Ὁρθαῖς ἴσας. Δῆλον δὲ ἐκ τῆς Προτάσεως.

Καὶ αἱ περὶ τὸ αὐτὸ δὲ Σημεῖον Γωνίαι, αἱ πᾶσαι τέτταρας Ὁρθὰς συγ- Γ'. κ. 57. κροτῶσιν· ὅπερ φανερόν ἐκ τῆ δευτέρου Πορίσματος.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΔ.

„Εἴαν πρὸς τινι Εὐθείᾳ (γδ) εἰ τῷ πρὸς αὐτῇ Σημεῖω (δ), δύο Εὐθεῖαι „(αδ, βδ) μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς Γωνίας (αδγ, βδγ) „δυσὶν Ὁρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ Εὐθεῖαι „(αδ, βδ).“

Εἰ μὴ γὰρ, ἔςωσαν ἐπ' εὐθείας, αἱ αδ, εδ· ἄρα (4) αἱ ὑπὸ αδγ, ε γδε δύο Ὁρθὰς συναποτελεῦσιν· Ὅπερ (5) ἄτοπον· ὑπετέθη γὰρ τὰς ὑπὸ αδγ, ε βδγ δυσὶν Ὁρθαῖς ἴσας εἶναι. κ. 58.

Π ο ρ ῖ σ μ α .

Ἐντεῦθεν ἐπὶ τῶν Κατοπτρικῶν δαίανται, τὴν τῷ Φωτὸς Ἀκτῖνα ἐν τῷ κ. 59. ἀνακλᾶσθαι, διὰ τῆς κατὰ τὴν ἀντανάκλασιν Γωνίας, ἥ περ ἰση ἐς αἰὶ ἡ Γωνία τῆς ἐπιπτώσεως, ὁδὸν φέρεσθαι ἀπασῶν τὴν συντομωτάτην. Τῶν γὰρ ὑπὸ βεδ, αεζ συνεξισημένων ἀλλήλαις, αἱ Εὐθεῖαι αε ε β ἅμα ληφθεῖσαι, Εὐθειῶν τῶν τυχεσῶν, οἷον τῶν αζ ε ζβ ἅμα ληφθεισῶν, εἰσὶν ἐλάσσονες. Ἀπὸ γὰρ τῷ Σημεῖω β, ἤχθω Κύβητος (6) ἡ βγ, ε γενέσθωσαν αἱ βδ, γδ ἴσαι (7) ἀλλήλαις· ἤχθωσαν δὲ ἐπιζευγνύμεναι (8) καὶ εγ, ζγ. Ἐπὶ μὲν οὖν τῶν Τριγώνων βεδ, ε γεδ, τῆς μὲν δε κοίτης ὅσης, τῶν δὲ βδ, ε δγ (9) ἴσων ἀλλήλας ὄσων, τῆς τε ὑπὸ βδε, τῇ ὑπὸ γδε (10) συνεξισα-

(1) Α'ξ. δ. (2) Α'ξ. β. (3) Α'ξ. α. (4) ιγ. Βιβ. α. (5) κα. εἰ. δ. Α'ξίω. (6) φ. Βιβ. α. (7) γ. Βιβ. α. (8) Α'τ. α. (9) Ε'κ. Κατ. (10) Ο'φ. ιδ.

μένης, καὶ τὰ λοιπὰ πάντα (1) ἴσα ἔσται. Ἐσται δὲ ἡ βε, ἴση τῇ γε, καὶ ἡ ὑπὸ βεδ, ἴση τῇ ὑπὸ δεγ. Ἐὰν οὖν ταῖς ἴσαις βε, γε, κοινῇ προσεδῇ ἡ εα, ἔσονται (2) αἱ βε καὶ εα ἅμα ληφθεῖται, ἴσαι ταῖς γε καὶ εα ἅμα ληφθεῖσαις. Ἐπεὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ βεδ, αεζ ἴσαι (3) ἀλλήλαις εἰσὶν, ἡ δὲ ὑπὸ βεδ φθάσα ἐδείχθη ἴση τῇ ὑπὸ δεγ· ἄρα (4) καὶ ἡ ὑπὸ αεζ, ἴση ἔσται τῇ ὑπὸ δεγ. Κοινῇ δὲ προσεδείσῃ τῆς ὑπὸ δεα, δύο αἱ ὑπὸ δεα καὶ δεγ, δυσὶ ταῖς ὑπὸ δεα καὶ αεζ (5), ἔσονται ἴσαι. Ἀλλὰ μὲν αἱ ὑπὸ δεα, καὶ αεζ δυσὶν (6) ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ δεγ καὶ δεα, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ. Καὶ ἐπομένως (διὰ ταύτην τὴν Πρότασιν) αἱ Εὐδείαι αε, εγ, ἐπ' εὐδείας ἔσονται ἀλλήλαις, τατέσι Εὐδείαν μίαν συνισῶσι τὴν γα, ἥτις ἴση ἐδείχθη δυσὶ ταῖς Εὐδείαις αε καὶ εβ ἅμα ληφθεῖσαις.

Ὅσαύτως ἐπὶ τῶν Τριγώνων βδζ, γδζ ῥάδιον δεῖξαι, ἴσας ἀλλήλαις εἶναι τὰς Εὐδείας βζ, καὶ γζ· καὶ προσεδείσῃ κοινῇ τῆς αζ, αἱ δύο βζ, αζ ἅμα, ἴσαι ἔσονται δυσὶ ταῖς γζ, αζ ἅμα. Ἀλλὰ μὲν ἡ γα, (ἥτοι αἱ δύο αε, εβ ἅμα) ἐλάσσων ἐστὶ τῶν αζ, καὶ γζ ἅμα (7) (ἥτοι τῶν αζ, ζβ ἅμα). Αἱ ἄρα Εὐδεῖαι αε, εβ, ἅμα ληφθεῖσαι, ἐλάσσονες εἰσι τῶν δύο Εὐδειῶν αζ, ζβ ἅμα ληφθεῖσων. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΕ.

„Ἐὰν δύο Εὐδεῖαι (αβ, δγ) τέμνωσιν ἀλλήλας (κατά τι Σημεῖον τὸ ε), καὶ τὰς κατὰ κορυφὴν (ε) Γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσι.

α. 60.

Τατέσι τὴν ὑπὸ αεγ τῇ ὑπὸ δεβ. καὶ τὴν ὑπὸ αεδ τῇ ὑπὸ βεγ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ αε ἐπ' Εὐδείαν τὴν δγ ἐφέσκηκεν, ἔσονται (8) αἱ ὑπὸ αεδ, καὶ αεγ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. Πάλιν ἐπεὶ ἡ εγ, ἐπ' Εὐδείαν τὴν αβ ἐφέσκηκεν, ἔσονται (9) αἱ ὑπὸ αεγ, καὶ βεγ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. Δύο ἄρα αἱ ὑπὸ αεδ, καὶ αεγ, δυσὶ ταῖς ὑπὸ βεγ, καὶ αεγ ἴσαι εἰσὶ. Καὶ ἀφαιρεθείσῃ κοινῇ τῆς ὑπὸ αεγ, ἔσται (10) ἡ ὑπὸ αεδ ἴση τῇ ὑπὸ βεγ. Ὀμοίως δὲ δεῖχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ αεγ ἴση οὕσα τῇ ὑπὸ βεδ. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α .

Ἐντεῦθεν οἱ τοῖς ἐλεφαντίνοις, καὶ διὰ τῶτο ἑλαστικοῖς Σφαιριδοῖς ἐν ταῖς Παιδιαῖς χρώμενοι, τὴν τῷ ἀντιπαίζοντος Σφαῖραν ἀντικρέουσαι παιδευέσθωσαν.

(1) δ. Βιβ. α. (2) Δ'ξ. β. (3) Κατ' ὑπόδ. (4) Δ'ξ. α. (5) Δ'ξ. β. (6) ιγ. Βιβ. α. (7) Ο'ε. δ. (8) ιγ. Βιβ. α. (9) Διὰ τὴν αὐτ. (10) Δ'ξ. γ.

Εἶς τῶν Σφαιριδίων ᾧ μὲν ἀποκρυσσεῖν τὸ β, ᾧ δὲ τὸ α. Πλευρὰ δὲ εὐθύγραμμος ἡ γδ. Εὐθεῖα δὲ ἡ βε πρὸς ὁρθὰς ἐφισταμένη (1) ἐπὶ τὴν γδ. Καὶ κείδω ἡ δε ἴση τῇ δβ (2), καὶ ἐπεξεύχθω (3) ἡ αε, τέμνουσα τὴν γδ κατὰ τὸ ζ· ἐπεξεύχθω δὲ καὶ ἡ βζ. Ἐὰν οὖν ἡ Σφαῖρα κατὰ τὴν Εὐθεΐαν αζε προσωθεῖν, ὡς ἂν προσβάλλῃ τῷ Σημεῖω ζ, ἀνακάμψασα ὡς τὸ β σπεύσεται. Ἐπὶ μὲν γάρ τῶν Τριγώνων βζδ, καὶ εζδ, ἡ μὲν ζδ Πλευρὰ κοινὴ, ἡ δὲ δβ, ἴση τῇ δε (4), ἥτε ὑπὸ βδζ, ἴση τῇ ὑπὸ εδζ (5). Τὰ ἄρα Τρίγωνα (6) ἴσα ἀλλήλοις· καὶ ἔσαι ἄρα ἡ ὑπὸ βζδ, ἴση τῇ ὑπὸ δζε. τοιγαρὶν καὶ (7) τῇ κατὰ κορυφὴν ὑπὸ αζγ ἴση. Ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ὑπὸ αζγ Γωνία ἐστὶν ἡ κατ' ἐπίπτωσιν, ἡ δὲ ὑπὸ βζδ Γωνία ἡ κατ' ἀντανάκλασιν, αἱ δὲ κατὰ τὰς προσβολὰς τῶν ἐλασικῶν Σωμάτων ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· εὐδὴλον ἄρα ὅτι τὴν Σφαῖραν α, ἐλασικὴν ὑποτιθεμένην, καὶ ἐπὶ τὸ ε διΐδυνομένην, μετὰ τὴν ἀντανάκλασιν ἡ ἀποκρυσσόμενη Σφαῖρα β ἐκδέχεται. Ο. Ε. Δ.

κ. 61.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ις.

„Παντὸς Τριγώνου (αβγ) μιᾶς τῶν Πλευρῶν (βγ) ἐκβληθείσης (ἐπὶ τὸ δ) ἡ ἐκτὸς Γωνία (ὑπὸ αγδ) ἐκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον (ὑπὸ γαβ, καὶ αβγ) μείζων ἐστὶ.

Τετμήθω ἡ αγ δίχα (8) κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ βε (9) ἐκβεβλήθω (10) κατὰ τὸ ζ, καὶ κείδω τῇ βε ἴση (11) ἡ εζ, καὶ ἐπεξεύχθω (12) ἡ ζγ, καὶ διήχθω ἡ αγ ἐπὶ τὸ η (13).

Ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν αε, ἴση τῇ εγ (14), ἡ δὲ βε, ἴση τῇ εζ (15), ἡ δὲ ὑπὸ αεβ, ἴση (16) τῇ κατὰ κορυφὴν ὑπὸ ζεγ, ἔσαι καὶ ἡ ὑπὸ εγζ (17) ἴση τῇ ὑπὸ εαβ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ αγδ μείζων (18) τῆς ὑπὸ εγζ. Ἀρα μείζων ἔσαι (19) καὶ τῆς ὑπὸ γαβ. Ἡ ἄρα ἐκτὸς (20) ἔσται ὑπὸ αγδ, μείζων τῆς ἐτέρας τῶν ἀπεναντίων, ἥτοι τῆς ὑπὸ γαβ.

Παραπλησίως καὶ τὴν βγ δίχα τεμών, δείξεις τὴν ὑπὸ βγη, ἥτοι τὴν ἴσην αὐτῇ (21) ὑπὸ αγδ, μείζονα καὶ τῆς ὑπὸ αβγ. Ἀρα κτ. Ο. Ε. Δ.

κ. 62.

Πόρισμα.
Ἐφ' ἐνὸς Σημεῖος πρὸς τὴν αὐτὴν Εὐθεΐαν, Εὐθείας ἀγωγῆς πλείονας δύο ἢ ἀδύνατον (Ις. καὶ Ε. Βιβλ. α.) ἴσας ἀλλήλαις.

(1) ιβ. Βιβλ. α. (2) γ. Βιβλ. α. (3) Αξ. α. (4) Ε'κ κατ. (5) Ε'κ κατ. (6) δ. Βιβλ. α. (7) ιι. Βιβλ. α. (8) ι. Βιβλ. α. (9) Αίτ. α. (10) Αίτ. β. (11) γ. Βιβλ. α. (12) Αίτ. α. (13) Αίτ. β. (14) Ε'κ κατ. (15) Ε'κ κατ. (16) ιι. Βιβλ. α. (17) δ. Βιβλ. α. (18) Αξ. δ. (19) Αξ. α. (20) Ορ. λδ. (21) ιι. Βιβλ. α.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΖ.

„Παντὸς Τριγώνου, αἱ δύο Γωνίαι, δύο Ὁρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντα μεταλαμβανόμεναι.

κ. 63.

Ἐκβεβλήθω ἡ βγ ἐπὶ τὸ δ. Καὶ ἐπεὶ Τριγώνου τῆ αβγ ἐκτὸς Γωνία ἡ ὑπὸ αγδ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς (1) καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ αβγ. Κοινὴ προσκείθω ἡ ὑπὸ αβγ, καὶ ἔσονται αἱ ὑπὸ αγδ, καὶ αβγ, μείζονες τῶν ὑπὸ αβγ, βγα. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ αγδ, αβγ, δυσὶν Ὁρθαῖς (2) ἴσαι εἰσὶν. Αἱ ἄρα ὑπὸ αβγ, βγα, δύο Ὁρθῶν ἐλάσσονες εἰσὶν. Ὀμοίως δὲ ὁποιαῖον δύο τῶν ἐπὶ τῇ Τριγώνου, πάντα μεταλαμβανόμεναι, ἴσαι δεικνυνται. Ἀρα κτ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΗ.

„Παντὸς Τριγώνου, ἡ μείζων Πλευρὰ (αγ) τὴν μείζονα Γωνίαν (β) ὑποτείνει, καὶ ἡ ἐλάττω (αβ) τὴν ἐλάττω (γ).

κ. 64.

Ἀπὸ τῆς μείζονος αγ, ἀπειλήθω (3) ἡ αδ ἴση τῇ ἐλάττω αβ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ (4) βδ· ἔσαι δὲ ἡ ὑπὸ αβδ, ἴση (5) τῇ ὑπὸ αδβ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ αδβ, μείζων (6) τῆς ὑπὸ αβγ. Ἀρα καὶ ἡ ὑπὸ αβδ (7) μείζων τῆς ὑπὸ αβγ. Πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ (ἥτοι ἡ β) μείζων τῆς ὑπὸ αβγ (ἥτοι τῆς γ).

Ἀ λ λ ω ς.

κ. 65.

Οὐ γὰρ ὅτε ἴσαι ἀλλήλαις, αἱ β, καὶ γ. (ἄλλως ἦν ἂν καὶ ἡ αβ (8) ἴση τῇ αγ) ὅπερ ἐστὶ κατὰ τῆς ὑποθέσεως. οὐδὲ μὲν οὖν ἡ β, ἐλάττω τῆς γ.

Πόρισμα. Ἐπεὶ ἄρα Σκαληνοῦ, αἱ τρεῖς Γωνίαι ἴσαι.

Εἰ γὰρ, κείθω ἡ ὑπὸ δγβ, ἴση τῇ β· καὶ ἔσαι ἡ βδ ἴση τῇ δγ (9). Καὶ καινὴ προσκεῖται τῆς δα, ἔσαι ἡ βα, ἴση δυσὶ ταῖς (10) γδ, δα. Ἀλλ' ἡ βα ἐλάττω (11) τῆς αγ. Ἀρα αἱ γδ, δα ἅμα λιφθεῖσαι ἐλάσσονές εἰσι τῆς (12) αγ. Ἀλλὰ τὰτο κατὰ τὴν ὁρίσιν φέρεται (13) τῆς Εὐθείας, ἥτις ἐστὶν ἡ ἐλαχίστη τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν. Οὐτ' ἄρα ἴση ἡ β τῇ γ, οὐδὲ μὲν οὖν ἐλάττω ἡ β τῆς γ. μείζων ἄρα. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΘ.

„Παντὸς Τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα Γωνίαν (β) ἡ μείζων Πλευρὰ (αγ) ὑποτείνει.

(1) ις. Βιβ. α. (2) ιγ. Βιβ. α. (3) γ. Βιβ. α. (4) Αἴτ. α. (5) ε. Βιβ. α. (6) ις. Βιβ. α. (7) Α'ξ. α. (8) ε. Βιβ. α. (9) ε. Βιβ. α. (10) Α'ξ. β. (11) Ε'ξ ὑποδ. (12) Α'ξ. α. (13) Ὁρ. δ.

Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἰση εἶναι ἡ $\alpha\gamma$ τῇ $\alpha\beta$, ἢ ἐλάσσων. Ἀλλ' εἰ τὸ πρῶτον, ἔσται (1) ἄρα καὶ ἡ β Γωνία ἰση τῇ γ , ὅπερ ἐκ ἔσι (2) Εἰ δὲ τὸ δεύτερον, ἐλάσσων ἄρα ἡ Γωνία (3) β τῆς γ , ὅπερ ἐκ ἔσι. (4) Εἴπερ ἡ δ ἰση, ἡ δ ἐλάσσων, ἔσιν ἄρα μείζων ἡ $\alpha\gamma$. κτ. Ο. Ε. Δ.

κ. 66.
Πόρισμα.
Καὶ μείζων
ἄρα ἐστὶ τῶν
ὁρθογωνίων,
ἢ ἀμβλυγωνίων
Τριγώνων, ἡ τὴν
ὀρθὴν, ἢ ἀμβλυ-
βλεπὴν Γωνίαν ὑποτείνουσα, καὶ τῶν λοιπῶν.

Π ρ ό τ α σ ι ς Κ.

„Παντὸς Τριγώνου αἱ δύο Πλευραὶ, τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἔστι δὲ τῷ Ἀρχιμήδει Ἀξίωμα ἄντικρυς, ὅτι ἐκ τῆ κατ' αὐτὸν ὁρισμῆ τῆς Εὐθείας (5) ἀμέσως ἐπιφέρεται. Δείξαι δ' ἂν αὐτὴν σὺν Εὐκλείδει οὕτω.

κ. 67.

Διήχθω ἡ $\beta\alpha$ ἐπὶ τὸ δ Σημεῖον, ὥστε ἰσην εἶναι τὴν $\alpha\delta$ τῇ $\alpha\gamma$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $\delta\gamma$. (6) Καὶ ἔσται ἡ ὑπὸ $\alpha\delta\gamma$ ἰση τῇ ὑπὸ (7) $\alpha\gamma\delta$. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ $\beta\gamma\delta$ μείζων (8) τῆς ὑπὸ $\alpha\gamma\delta$, ἄρα μείζων (9) καὶ τῆς ὑπὸ $\alpha\delta\gamma$ μείζων ἄρα (10) καὶ ἡ $\beta\delta$ Πλευρὰ τῆς $\beta\gamma$. Ἀλλ' ἡ $\beta\delta$, ἰση ταῖς $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$, (11) μείζονες ἄρα αἱ $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$, τῆς $\beta\gamma$. Οἴμοιως δεῖξομεν ὅτι καὶ αἱ $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, μείζονες εἰσι τῆς $\alpha\gamma$ · αἱ δὲ $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, τῆς $\alpha\beta$. Ἀρα κτ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα.
Παντὸς τετραπλευροῦ τῶν δύο προσεχῶς συνισσῶν Πλευρῶν, καὶ ἐλάσσων ἢ Διαγωνίου.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΑ.

„Εὰν Τριγώνου, ἐπὶ μιᾷς τῶν Πλευρῶν ($\beta\gamma$), ἀπὸ τῶν περάτων (τῶν $\alpha\beta$, $\beta\gamma$), δύο Εὐθεῖαι ($\beta\delta$, $\gamma\delta$) ἐντὸς συσφαῶσιν, αἱ συσφαεῖσθαι τῶν λοιπῶν τῶν Τριγώνου δύο Πλευρῶν (τῶν $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$) ἐλάσσονες μὲν ἔσονται, καὶ μείζονα δὲ Γωνίαν περιέξωσι (τὴν ὑπὸ $\beta\delta\gamma$, τῆς ὑπὸ $\beta\alpha\gamma$).

Διήχθω ἡ $\beta\delta$ ἐπὶ τὸ ε. Καὶ δὴ ἐπὶ τῇ $\alpha\beta$ Τριγώνου, αἱ $\alpha\beta$, καὶ $\alpha\epsilon$ (12) μείζονες εἰσι τῆς $\beta\epsilon$. Κοινῇ προσκείσθω ἡ $\epsilon\gamma$. Αἱ ἄρα $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$, τῶν $\beta\epsilon$, $\epsilon\gamma$ μείζονες εἰσὶ. Πάλιν ἐπὶ τῇ Τριγώνου $\gamma\epsilon\delta$, αἱ $\gamma\epsilon$, $\epsilon\delta$, μείζονες (13) τῆς $\gamma\delta$. Κοινῇ προσκείσθω ἡ $\delta\beta$, καὶ ἔσονται $\gamma\epsilon$, $\epsilon\beta$, μείζονες τῶν $\gamma\delta$, $\delta\beta$. Ἐκείνων δὲ μείζονες ἐδείχθησαν αἱ $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$. Αἱ ἄρα $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$ πολλῶ μείζονες ἔσονται τῶν $\gamma\delta$, $\delta\beta$. Ο. Η. τὸ Α'.

κ. 68.

Ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ $\beta\delta\gamma$ μείζων τῆς ὑπὸ $\delta\epsilon\gamma$ (14), ἡ δὲ ὑπὸ $\delta\epsilon\gamma$ μείζων

(1) ε. Βιβ. α. (2) Διὰ τὴν ὑπόδ. (3) Ιη. Βιβ. α. (4) Διὰ τὴν ὑπόδ. (5) Ὅρ. δ. (6) Αἴτ. α. (7) ε. Βιβ. α. (8) Α'ξ. β. (9) Α'ξ. α. (10) ιβ. Βιβ. α. (11) Α'ξ. β. (12) η. Βιβ. α. (13) η. Βιβ. α. (14) ις. Βιβ. α. (15) ις. Βιβ. α.

τῆς ὑπὸ βαε. (15) Ἀρα ἡ ὑπὸ βδγ πολλῶ μείζων τῆς ὑπὸ βαε, ἦτοι
τῆς ὑπὸ βαγ. Ο. Η. τὸ Β'.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΒ.

„Ἐκ τριῶν Εὐθειῶν (α, β, γ), ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι
„πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, Τρίγωνον συζητάται.

κ. 69.

Ἐκείθω τις Εὐθεῖα ἡ δε πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ δ, ἄπειρος δὲ
κατὰ τὸ ε· καὶ κείθω (1) τῇ μὲν α ἴση ἡ δζ, τῇ δὲ β ἴση ἡ ζη, τῇ δὲ γ
ἴση ἡ ηθ. Καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ ζ, Διασήμετι δὲ τῷ ζδ (2), Κύκλος γε-
γράφθω ὁ δηλ. Καὶ Κέντρῳ πάλιν τῷ η, Διασήμετι δὲ τῷ ηθ, Κύκλος
γεγράφθω ὁ κλθ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κζ, κη. Λέγω ὅτι ἐκ τριῶν Εὐ-
θειῶν τῶν ἰσῶν ταῖς α, β, γ Τρίγωνον συνέσκηκε τὸ κζη.

Ἡ γὰρ κζ ἴση (3) τῇ ζδ· ἴση ἄρα (4) τῇ α. Ἡ δὲ ηθ ἴση (5) τῇ
β· ἡ δὲ κη ἴση (6) τῇ ηθ· ἴση ἄρα (7) τῇ γ. Ἐκ τριῶν ἄρα, κτ. Ο. Ε. ΙΙ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΓ.

„Πρὸς τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ (αβ), καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ Σημείῳ (α), τῇ
„δοθείσῃ Γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ (δγε), ἴσην Γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

κ. 70.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῶν Πλευρῶν τῆς δοθείσης Γωνίας, τυχόντα Σημεῖα τὰ
δε, καὶ ἐπεζεύχθω Εὐθεῖα ἡ δε. (8) Καὶ ἐκ τριῶν Εὐθειῶν, ἰσῶν τρισὶ ταῖς
γδ, δε, γε, Τρίγωνον συνεσάδω (9) τὸ αζη, ὡς ε ἴσην εἶναι τὴν μὲν γδ
τῇ αζ, τὴν δὲ γε τῇ αη, καὶ ἔτι τὴν δε τῇ ζη. Τῶν τοίνυν τριῶν ταῖς τρι-
σὶ Πλευραῖς ἐπὶ τῶν Τριγώνων, ἑτέρας τῇ ἑτέρᾳ ἰσῶν ἑσῶν (10), εὐδη-
λον ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ζαη, ἴση (11) ἐστὶ τῇ ὑπὸ δγε. Ο. Ε. Π.

Π ό ρ ι σ μ α Α.

κ. 71.

Εντεῦθεν καὶ Γραμμὴν ἀπρόσβατον τὴν αβ, καταμετρεῖν ῥάδιον. Ἀπὸ
γὰρ τῶ τυχόντος Σημεῖο γ παρατετηρήθω Γωνία ἡ ὑπὸ αγβ, καὶ κατα-
μετρηθῇ τωσαν αἱ Εὐθεῖαι αγ, καὶ βγ. Ἐπὶ δὲ τῷ τυχόντος ἐπιπέδῳ, ὑπὲρ
ἐς αὐτὸ ἐπιβῆναι, πρὸς τῷ Σημείῳ ζ τῷ ἐπὶ τῆς ἀπείρου Εὐθείας εζ, συνε-
σάδω Γωνία ἴση (12) τῇ ὑπὸ αγβ ἡ ὑπὸ ἐζε· καὶ ληφθῇ τωσαν αἱ ζη,

(1) γ. Βιβ. α. (2) Αἴτ. γ. (3) Ο. ρ. η. (4) Αἴ. α. (5) Ἐκ Κατας. (6) Ο. ρ. η.
(7) Αἴ. α. (8) Αἴτ. α. (9) κβ. Βιβ. α. (10) Ἐκ κατ. (11) η. Βιβ. α. (12) κγ.
Βιβ. α.

κ' $\angle\theta$ (1) ἴσαι ταῖς $\gamma\alpha$, $\gamma\beta$, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ ἐπεζεύχθω (2) ἡ $\eta\delta$.
 Η' δὲ ἔσαι πάντως ἴση τῇ ἀπροσβάτῳ Εὐθείᾳ $\alpha\beta$.

Ἐπὶ γὰρ τῶν Τριγώνων $\alpha\gamma\beta$, $\eta\zeta\theta$, αἱ $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ Πλευραὶ ἴσαι (3)
 εἰς τὰς $\eta\zeta$, $\zeta\theta$, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ $\alpha\gamma\beta$, ἴση τῇ (4) ὑπὸ $\eta\zeta\theta$.
 ἔσαι ἄρα (5) κ' Βάσις ἡ $\alpha\beta$, ἴση Βάσει τῇ $\eta\delta$.

Π ό ρ ι σ μ α Β.

Η' ὡς τῷ Θάλητι μεμεθόδευται. Ἐ'σω Γραμμὴ ἀπρόσιτος ἡ $\alpha\delta$, ἐφ'
 ἣν πρὸς τῷ κατὰ τὸ πέρας αὐτῆς Σημείῳ α (6), ἤχθω Κάθετος ἡ $\alpha\gamma$, κ'
 εἰλήφθω Γωνία ἡ ὑπὸ $\alpha\gamma\delta$, κ' ταύτῃ ἐπὶ θάτερα τῆς Γραμμῆς $\alpha\gamma$, ἴση (7)
 συνεσάτῳ ἡ ὑπὸ $\alpha\gamma\beta$, κ' διήχθω ἡ $\alpha\beta$ (8) ἐπὶ τὸ β . κ' ἔσαι πάντως ἡ
 $\alpha\beta$ προσβάσιμος τῇ $\alpha\delta$ ἀπροσβάτῳ ἴση. Ἐπὶ γὰρ τῶν Τριγώνων $\alpha\beta\gamma$,
 $\alpha\delta\gamma$, ἡ μὲν $\alpha\gamma$ εἰς κοινὴν, αἱ δὲ ὑπὸ $\delta\alpha\gamma$, κ' $\beta\alpha\gamma$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν (9),
 ἦτε ὑπὸ $\delta\gamma\alpha$ ἴση τῇ ὑπὸ $\alpha\gamma\beta$ (10). Ἄρα κ' ἡ $\alpha\beta$ Πλευρὰ ἴση (11) τῇ $\alpha\delta$.

κ. 72.

Σ χ ό λ ι ο υ.

Χρηζομένους τοῖς Πρωτοπείροις, ἔδοξε τινα εἰς πράξιν ἢ μικρὸν συντε-
 λῆντα περὶ τῶν Γωνιῶν ὑποδέσθαι.

Γωνίας μέτρον ἐς, Κύκλῳ τῷ $\lambda\zeta\beta\lambda$, τῇ Κέντρῳ α , τῇ κορυφῇ τῆς Γω-
 νίας καταγεγραφομένη ἡ Περιφέρεια, φερ' εἰπεῖν $\beta\gamma$, ἡ ὑπὸ τῶν σκελῶν
 τῆς Γωνίας $\alpha\eta$, $\alpha\delta$ ἐναπολαμβανομένη· ὅπερ ἐκ τῆς ἐσχάτης τῆς ϵ' . Βιβλίου
 Προτάσεως ἔσαι κατάδηλον.

κ. 73.

Ὅπως αὖ τοῖνυν αἱ τῆς Περιφερείας $\beta\gamma$ μοῖραι, τοσάτων εἶναι μοιρῶν εἰ-
 ρήσεται κ' ἡ ὑπὸ $\delta\alpha\eta$ Γωνία. Ἐπεὶ δὲ τὴν ὀρθὴν Γωνίαν ὑπὸ $\beta\alpha\zeta$, τῆς ὅλης
 Περιφερείας καταμετρεῖ τὸ τεταρτημόριον $\beta\zeta$, τὸ μοῖρας τὰς πάσας 90 πε-
 ριέχειν ὑποτιθέμενον, ταύτητοι πᾶσα ὀρθὴ Γωνία μοιρῶν εἶναι λέγεται
 90. Ὀμοίως, ἐπεὶ τὰς δύο Ὀρθὰς τὴν τε ὑπὸ $\beta\alpha\zeta$, κ' τὴν ὑπὸ $\zeta\alpha\lambda$, κατα-
 μετρεῖ ἡ ἡμιπεριφέρεια $\beta\zeta\lambda$, ἡ εἰς 180 μοῖρας διατετμηθῆαι ὑποτιθεμένη.
 Ὀρθὰς δὲ τέσσαρας καταμετρεῖ ἡ ὅλη Περιφέρεια ἡ εἰς μοῖρας 360 διανεμο-
 μένη· διάτοι τῷτο αἱ μὲν δύο Ὀρθαὶ μοιρῶν εἶναι λέγονται 180, αἱ δὲ
 τέτταρες μοιρ. 360. Τῶτων ἔτω προσσημειωμένων πράξεις ἐπὶ Γωνιῶν
 συνίστανται αἱ ἐφεξῆς.

(1) γ. Βιβ. α. (2) Αἴτ. α. (3) Ε'κ κατ. (4) Ε'κ κατ. (5) δ. Βιβ. α. (6) ιθ.
 Βιβ. α. (7) κγ. Βιβ. α. (8) Αἴτ. β. (9) Α'ξ. ι. (10) Ε'κ κατ. (11) Σχ. δ. Βιβ. α.

κ. 74. Α. Πρὸς τῷ ἐπὶ τῆς δοθείσης βλ, δοθέντι Σημείῳ β, Γωνίαν συζητάσθαι ἴσην τῇ δοθείσῃ α. Κέντρῳ μὲν τῷ α (1) Περιφέρεια γεγράφω ἢ γζ. Κέντρῳ δὲ τῷ β, ἢ Διαστήματι ἴσῳ, Τόξον γεγράφω τὸ λψ, ἐξ ᾧ ἀφηρόδω τὸ λξ, ἴσον τῷ γζ, ἢ ἐπεξεύχθω (2) ἢ βξ. ἢ εἶσαι πάντως ἢ ὑπὸ λβξ, ἴση τῇ δοθείσῃ Γωνίᾳ τῇ κατὰ τὸ α.

κ. 75. Β'. Τῆς δοθείσης Γωνίας ὑπὸ ξοπ, ὅσαι εἰσὶν αἱ μοῖραι προσευρεῖν. Ἡμικυκλίᾳ κερατίνῃ διαφανῆς, εἰς 180 μοῖρας διηρημένῃ, κείδω τὸ μὲν Κέντρον ἐπὶ τὴν κορυφὴν τῆς Γωνίας ο, ἢ δὲ Ἡμιδιάμετρος ολ, ἐπὶ τὴν Πλευράν οπ. Τὸ δὲ Τόξον λμ, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς Γωνίας σκελῶν ἐναπολαμβανόμενον, δείξει πάντως ὅσων μοιρῶν ἢ δοθεῖσα Γωνία.

Γ'. Γωνίαν δοθείσας μοῖρας τὰς 42, συζητάσθαι περιέχουσιν. Ἡχθῶ Εὐθεῖα φπ, ἐφ' ἧς τῷ Σημείῳ ο ληφθέντι κείδω τὸ τῇ Ἡμικυκλίᾳ Κέντρον, ὥς τὴν Ἡμιδιάμετρον ολ ἐφαρμόσαι ἐπὶ τὴν οπ· ἀπὸ δὲ τῷ λ, ἀριθμηθῆτωσαν μοῖραι 42 ἄχρι τῷ μ. Ἡ γοῦν ἀπὸ τῷ ο διὰ τῷ μ ἀχθεῖται Εὐθεῖα, δώσει τὴν ὑπὸ μολ μοιρῶν 42.

Τύτων ἀπάντων ἢ δεῖξεις ἡρτῆται ἐκ τῆς ἐσχάτης Προτάσεως τῇ ς'. Βιβλ. α.

Π ό ρ ι σ μ α.

κ. 76. Δοθείσης τῆς ὑπὸ βαζ Γωνίας, δηλον ἐστὶ ἢ τὸ ἐκείνης πρὸς δύο Ὅρθὰς ἀναπλήρωμα (ἦτοι ἢ ὑπὸ γαζ). Οἶον ἐὰν ἡ Γωνία ἢ ἀπὸ βαζ μοιρῶν 70, εἶσαι πάντως ἢ ὑπὸ γαζ μοιρῶν 110. Οἱ γὰρ ἀριθμοὶ ἅμα προσληφθέντες, μοῖρας τὰς πάσας 180, τὸ δυοῖν ὀρθῶν Γωνιῶν μέτραν συναποτελεῖσι.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΔ.

„Εὰν δύο Τρίγωνα (τὰ αβγ, δεζ) τὰς δύο Πλευράς (τὰς αβ, αγ) „ταῖς δυοῖ Πλευραῖς (ταῖς δε, δζ) ἴσας ἔχῃ, ἐκατέραν ἐκατέρᾳ, τὴν δὲ „Γωνίαν (τὴν ὑπὸ βαγ) τῆς Γωνίας (ὑπὸ εδζ) μείζονα ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν „ἴσων Εὐθειῶν περιεχομένην, ἢ τὴν Βάσιν (βγ) τῆς Βασεως (εζ) μείζονα ἔξει.

κ. 77. Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἢ ὑπὸ βαγ τῆς ὑπὸ εδζ (3), συνεσάτω (4) τῇ ὑπὸ βαγ ἴση ἢ ὑπὸ εδη, ἢ κείδω (5) ἢ δὲ ἴση ὁποτέρᾳ τῶν αγ, δζ. Καὶ

(1) Διτ. γ. (2) Διτ. α. (3) Εξ ὑποθ. (4) κγ. ββ. α. (5) γ. Βιβ. α.

τοῖν ἡ Βάσις (1) βγ ἴση ἔσαι τῇ Βάσει εη. Ἀλλὰ γὰρ τὸ ζῆ ἐστὶν (2) ἴσοσκελές· ἄρα ἡ ὑπὸ δηζ, ἴση τῇ ὑπὸ δζη. (3) καὶ μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ δζη τῆς ὑπὸ (4) εηζ· πολλῶ δὲ μείζων ἡ ὑπὸ εζη τῆς ὑπὸ εηζ. Ἀρ' ἔν (5) ἡ Πλευρὰ εη μείζων τῆς εζ. Ἐστὶ δὲ εη ἴση (6) τῇ βγ· ἄρα ἡ βγ μείζων τῆς εζ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΕ.

„Ἐὰν δύο Τρίγωνα (αβγ, δεζ) τὰς δύο Πλευρὰς (αβ, αγ) ταῖς δυσὶ „Πλευραῖς (δε, δζ) ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ Βάσιν (βγ) τῆς „Βάσεως (εζ) μείζονα ἔχῃ· καὶ τὴν Γωνίαν (ὑπὸ βαγ) τῆς Γωνίας (ὑπὸ „εδζ) μείζονα ἔξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων Εὐθειῶν περιεχομένην.

Εἰ γὰρ μὴ, ἦτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ, ἢ ἐλάττω. Ἀλλ' εἰ μὲν ἐκεῖνο, ἔσαι δὴ (7) καὶ ἡ βγ, ἴση τῇ εζ (κατὰ τῆς ὑποθ.). Ἀλλ' ἕδεμὴν τῆτο· εἰ γὰρ ἐλάττω ἡ ὑπὸ βαγ τῆς ὑπὸ εδζ, ἔσαι καὶ ἡ Βάσις (8) βγ, ἐλάττω Βάσεως τῆς εζ (κατὰ τῆς ὑποθέσ.). Ἐὰν ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

κ. 78.

Π ρ ό τ α σ ι ς Κς.

„Ἐὰν δύο Τρίγωνα (αβγ, δεζ) τὰς δύο Γωνίας (τὰς ὑπὸ αβγ, καὶ „αγβ) ταῖς δυσὶ Γωνίαις (ταῖς ὑπὸ δεζ, καὶ δζε) ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκα- „τέρᾳ, καὶ μίαν Πλευρὰν μιᾷ Πλευρᾷ ἴσην ἔχῃ, ἦτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις „Γωνίαις (βγ, καὶ εζ), ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μιᾷ τῶν ἴσων Γωνιῶν, „(τὴν αβ τῇ δε, ἢ τὴν αγ τῇ δζ)· καὶ τὰς λοιπὰς Πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς „Πλευραῖς ἴσας ἔξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν Γωνίαν τῇ λοιπῇ „Γωνίᾳ (τὴν ὑπὸ βαγ τῇ ὑπὸ εδζ).

Κείδωσαν δὴ πρῶτον ἴσαι αἱ Πλευραὶ βγ, εζ αἱ πρὸς ταῖς ἴσαις Γω- νίαις, καὶ τὰ λοιπὰ πάντα ἴσα ἔσαι (9).

κ. 79.

Κείδω δεύτερον ἡ αβ ἴση τῇ δε, ἢ ἡ βγ μείζων τῆς εζ, καὶ ἀφαιρε- θήτω (10) ἀπὸ τῆς βγ μείζονος ἡ βθ, ἴση δὲ τῇ ἐλάττωσι, καὶ ἐπεζεύχ- θω ἡ αθ (11)· καὶ ἔστω ἐπὶ τῶν Τρίγωνων βαθ, καὶ εδζ, τῶν δύο Πλευ- ρῶν, καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης Γωνίας, ἴσων οὖσων ταῖς δυσὶν (ἑκα- τέρας ἑκατέρᾳ), καὶ τῇ ὑπὸ τούτων περιεχομένῃ Γωνίᾳ· ἔσαι καὶ ἡ ὑπὸ αθβ ἴση

(1) δ. Βιβ. α. (2) Ε' κ. κατ. (3) ε. Βιβ. α. (4) Α' ε. α. (5) εδ. Βιβ. α. (6) Ε' κ. κατ. (7) δ. Βιβ. α. (8) κδ. Βιβ. α. (9) Σχόλ. Πρ. δ. (10) γ. Βιβ. α. (11) Α' τ. α.

τῇ (1) ὑπὸ δζε. Α'λλ' ἡ ὑπὸ αγκβ ἰση (2) τῇ ὑπὸ δζε. Ἄρα ἡ ὑπὸ αγκβ (3) ἰση ἔσται τῇ ὑπὸ αδβ· ὅπερ ἀδύνατον (διὰ τὴν ις.).

Κεῖθω τρίτον $\delta\zeta = \alpha\gamma$. Ἐάν ἡ οὖν $\epsilon\zeta = \beta\gamma$ (διὰ τὸ α'.) καὶ τὰ λοιπὰ ἴσα ἔσται. Εἰδ' οὖν, ἅλλ' ἡ $\beta\gamma > \epsilon\zeta$, ληφθῆτω $\gamma\delta = \epsilon\zeta$, καὶ ὁμοίως ἐφοδεύσει τὰ τῆς ἀποδείξεως, ὡς ἐπὶ τῷ β'.

Ἐάν ἄρα δύο Τρίγωνα κτ. Ο. Ε. Δ.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Ἐδοξέτινα ἐνταῦθα περὶ τῆς ἐν τῷ Ἰσοσκελεῖ Τριγώνῳ παρενδεδῆσθαι Κἀδέτε, ὑφ' ἧς ἥτε Βάσις, καὶ ὑφ' ἣν ἐκείνη ὑποτείνει, ἡ Γωνία δίχα τέμνεσθαι πεφύκασιν. Ἐςω τοίνυν Ἰσοσκελεῖς Τρίγωνον τὸ αβγ, ὃ κορυφὴ μὲν α, Βάσις δὲ ἡ βγ, σκέλη δὲ ἴσα ἀλλήλοις τὰ αβ, αγ. Φημι δὴ·

κ. 80. Α.

Ἐάν ἀπὸ τῆς κατὰ τὴν κορυφὴν α Γωνίας, Κἀδέτος ἀχθῇ πρὸς τὴν Βάσιν ἡ αδ, δίχα τεμεῖ αὕτη τήν τε Βάσιν βγ, καὶ τὴν Γωνίαν ὑπὸ βαγ, ὑφ' ἣν ἡ Βάσις ὑποτείνει. Ἐπὶ γὰρ τῶν Τριγώνων αβδ, αγκδ, τῶν μὲν Πλευρῶν αβ, καὶ αγκ ἴσων (4) ἀλλήλαις ὡσὼν, τῆς δὲ αδ κοινῆς ἐκατέρω, τῶν τε Γωνιῶν ὑπὸ αβδ, καὶ ὑπὸ αγκδ (5) ἴσων ἀλλήλαις, καὶ τῶν ὑπὸ αδβ, καὶ αγκγ (6) ὁμοίως ἴσων ὡσὼν· καὶ τὰ λοιπὰ (7) πάντα ἴσα ἔσται. Ἄρα καὶ ἡ Πλευρὰ βδ, ἰση ἔσται τῇ γδ, καὶ ἡ ὑπὸ βαδ, ἰση τῇ ὑπὸ γαδ. Ἡ ἄρα Κἀδέτος αδ (8) ἐπὶ τῷ Ἰσοσκελεῖ, τήν τε Βάσιν βγ δίχα τέμνει, καὶ τὴν κατὰ τὴν κορυφὴν ὑπὸ βαγ Γωνίαν.

Β'. Ἐάν ἡ Εὐθεῖα αδ ἀπὸ τῆς κατὰ τὴν κορυφὴν Γωνίας ἀχθεῖσα, δίχα τέμνη τὴν Βάσιν· δίχα δὴ πε τεμεῖ καὶ τὴν κατὰ τὴν κορυφὴν Γωνίαν α, καὶ ἐπὶ τὴν Βάσιν πρὸς ὁρθὰς ἐπισησεται. Τῆς γὰρ Βάσεως βγ δίχα τμηθείσης

Τὸ δ' αὐτὸ καὶ κατὰ τὸ δ, τὰ δύο Τρίγωνα αβδ, καὶ αγκδ τὰς δύο Πλευρὰς ταῖς δυοῖ Πλευραῖς ἴσας ἔξει ἐκατέραν ἐκατέρω, καὶ τὴν Βάσιν τῇ Βάσει, καὶ ἔσται (9) ἄρα ἐπ' αὐτῶν, καὶ ἡ ὑπὸ βαδ ἰση τῇ ὑπὸ γαδ, καὶ ὑπὸ αδβ, καὶ αγκγ. Οὐκὲν ἡ μὲν κατὰ τὴν κορυφὴν α (10) δίχα ἔσται τετμημένη, ἡ δὲ αδ πρὸς ὁρθὰς (11) ἐπὶ τὴν Βάσιν ἐφελκεῖα.

Γ'. Ἐάν ἡ αδ τὴν κατὰ κορυφὴν Γωνίαν δίχα τέμνη, δίχα τε, καὶ πρὸς ὁρθὰς καὶ τὴν Βάσιν βγ τεμεῖ. Ἐπὶ γὰρ τῶν Τριγώνων βαδ, καὶ δαγ, αἱ βδ, καὶ

(1) δ. Βιβ. κ. (2) Εξ. ὑποτ. (3) Α'ξ. α. (4) Ὁρ. κς. (5) ε. Πιβ. α. (6) Ὁρ. ιθ. (7) κς. Βιβ. α. (8) Ὁρ. μ. (9) η Βιβ. α. (10) Ὁρ. μ. (11) Ὁρ. ιθ.

αγ, ἴσαι εἰσὶν (1), ἡ δὲ αδ κοινὴ, ἥτε ὑπὸ βαδ ἴση ἐστὶ τῇ (2) ὑπὸ γαδ. Ἀῖ αὖ Βάσεις βδ, εἰ γδ (3) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἥτε ὑπὸ αδβ ἴση τῇ ὑπὸ αδγ. Ἀῖ μὲν βγ Βάσεις (4) δίχα τέμνεται, ἡ δὲ αβ (5) πρὸς ὀρθὰς ἐπ' αὐτὴν ἐφέστηκε.

Εἰ ἐπὶ τῇ ἰσοσκελεῖ Τριγώνῳ αβγ ἀχθῇ Εὐθεῖα ἡ δε, ἡ τὴν Βάσιν βγ δίχα τε, εἰ πρὸς ὀρθὰς τέμνεται κατὰ τὸ δ, προαχθεῖσα αὕτη διὰ τῆς κορυφῆς τῆς Τριγώνου α διελύσεται. Εἰ γὰρ περὶ τὴν δε ὡς περὶ Ἀξονα τὸ ἀριστερὸν εδβ τῆς αβγ Τριγώνου περιαχθῇ, ὥς τε τῷ δεξιτέρῳ εδγ ἐπιπνεύσῃ, ἐφαρμόσασθαι μὲν αἱ ἴσαι ὀρθαὶ Γωνίαι αἱ πρὸς τῷ δ, ἐφαρμόσασθαι δὲ εἰ αἱ ἴσαι Πλευραὶ δβ, δγ, ἐφαρμόσασθαι δὲ εἰ αἱ ἴσαι Γωνίαι, αἱ κατὰ τὰ β εἰ γ ἐπ' ἀλλήλας (6). Καὶ συμπεσόνται ἄρα αἱ Πλευραὶ βα, γα, ὡσαύτως δὲ εἰ εἰλα τὰ Τρίγωνα βαδ, γαδ· ταύτητοι εἰ ἡ πλευρὰ δα, ταῖς Πλευραῖς βα, γα, κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον α συναντήσας, τατέσι διὰ τῆς κορυφῆς α τῆς Τριγώνου αβγ διελύσεται.

Α' Λ Λ ω ς.

Εἰ μὴ γὰρ, μὴ διερχέσθω ἡ δε προαχθεῖσα διὰ τῆς κορυφῆς α, διατεμνέτω δὲ δεξιτέραν τῶν Πλευρῶν, οἷον τὴν αβ, κατὰ τὸ ζ, εἰ ἐπεξεύχθω (7) ἡ ζγ. Ἐπὶ μὲν ἔν τῶν Τριγώνων βδδ, εἰ δδγ, ἡ μὲν βδ, ἴση τῇ γδ, ἡ δὲ δδ κοινὴ, ἥτε ὑπὸ βδδ, ἴση τῇ ὑπὸ γδδ (8). Ἀῖ εἰ (9) ἡ ὑπὸ δδδ, ἴση τῇ ὑπὸ δδγ. Ἀῖ ἡ ὑπὸ δδδ, ἴση τῇ ὑπὸ αγγ (10) τῇ ἰσοσκελεῖ πρὸς τὴν Βάσιν Γωνίαι εἶσαι. Ἀῖ ἡ ὑπὸ δδδ, ἴση τῇ ὑπὸ αγγ, τὸ μέρος τῷ δδδ, ὅπερ ἐκ εἶναι. (11) Ἀῖ ἐπ' αὐτῶν δὴ τῶν Τριγώνων, δείκνυται εἰ ἡ βδ, ἴση τῇ γδ· κοινῆς οὖν προσεδείσθης τῆς ζα, εἶσαι ἡ βα, ἴση δυοὶ ταῖς (12) γδ. ζα· ἡ δὲ βα ἴση τῇ γα (13). Ἀῖ αἱ γδ, ζα, αἱ δύο, ἴσαι τῇ μιᾷ γα, ἐπὶ τῇ Τριγώνῳ γζα, ὅπερ (14) ἐκ εἶναι. Οὐκ ἄρα διὰ τῆς ζ διελύσεται κτ.

Εἰ ἐπὶ Εὐθεῖα ἡ αδ, ἀπὸ τῆς τῆς Τριγώνου αβγ κορυφῆς α, ἐπὶ τὴν Βάσιν βγ πίπτει, ταύτην δίχα τε, εἰ πρὸς ὀρθὰς τέμνεται, ἰσοσκελεῖς εἶσαι τὸ Τρίγωνον. Ἐπὶ γὰρ τῶν Τριγώνων βαδ, γαδ, ἡ μὲν αδ κοινὴ, αἱ δὲ βδ, γδ ἴσαι ἀλλήλαις, εἰ αἱ ὑπὸ βδα, εἰ γδα (15) ἴσαι ἀλλήλαις. Ἀῖ εἰ βα ἴση (16) τῇ γα. Καὶ ἰσοσκελεῖς ἄρα (17) τὸ Τρίγωνον βαγ.

(1) Εἰ ὑπὸ δ. (2) Εἰ ὑπὸ γ. (3) δ. Βιβ. α. (4) Ὁρ. μ. (5) Ὁρ. ιδ. (6) Αἰ. η. (7) Αἰ. α. (8) Εἰ ὑπὸ δ. (9) δ. Βιβ. α. (10) Εἰ ὑπὸ δ. ε. Βιβ. α. (11) Αἰ. β. (12) Αἰ. β. (13) Εἰ ὑπὸ δ. (14) κ. Βιβ. α. (15) Εἰ ὑπὸ δ. (16) δ. Βιβ. α. (17) Ὁρ. κς.

Εὐθεΐα ἢ αδ, Τριγώνῃ τῷ αβγ, τὴν κατὰ τὸ α Γωνίαν δίχα τέμνῃσα, ἐπὶ τὴν ἀπεναντίον Πλευρὰν βγ, πρὸς ὁρθὰς ἐπιση, Ἰσοσκελὲς ἔσται τὸ Τρίγωνον. Ἐπὶ γὰρ τῶν Τριγώνων αβδ, αγδ, ἡ μὲν αδ κοινὴ, αἱ δὲ ὑπὸ βαδ, ε βδα, ἴσαι ταῖς ὑπὸ γαδ, ε γδα (1) ἑκατέρω ἑκατέρω. Ἄρα (2) ε βα, ἴση τῇ γα. Ἰσοσκελὲς ἄρα (3) τὸ Τρίγωνον.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΖ.

„Εὐθεΐα εἰς δύο Εὐθείας (αβ, γδ) Εὐθεΐα ἐμπέπτῃσα (ἢ ζε) τὰς ἐναλλὰς Γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ (ἦτοι τὴν ὑπὸ αεζ τῇ ὑπὸ εζδ, καὶ τὴν ὑπὸ γζε τῇ ὑπὸ ζεβ), Παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ Εὐθεΐαι.

κ. 82.

Ἐκ τῷ κατ' Εὐκλείδην ὁρισμῷ τῶν Παραλλήλων. Εἰ μὴ εἰσὶ Παραλλήλοι, ἐμβαλλόμεναι αἱ αβ, γδ συμπεσύνται, ἦτοι ἐπὶ τὰ βδ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ αγ. Ἐκβεβλήσθωσαν, ε συμπιπτεύωσαν κατὰ τὸ η· καὶ ἔσαι ἄρα τὸ εηζ Τρίγωνον. Τοιγαρὴν ἡ ὑπὸ αεζ ἐκτός (4), μείζων ἔσαι τῆς ὑπὸ εζη ἐντός. Ἀλλὰ (5) ε ἴση, ὅπερ ἐκ ἔστιν· οὐκ ἄρα συμπεσύνται. Καὶ Παραλλήλοι (6) ἄρα εἰσὶ.

κ. 83.

Ἐκ δὲ τῷ ἀντισεινεχθέντος τῶν Παραλλήλων ὁρισμῷ ὡδί. Ἀπὸ τῷ Σημεῖο ε, ἤχθω (7) πρὸς ὁρθὰς ἐπὶ τῆς γδ, ἢ εδ. Καὶ ἀπὸ τῷ ζ ὁμοίως, πρὸς ὁρθὰς ἐπὶ τῆς αβ, ἤχθω ἢ ζη. Ἐπὶ μὲν οὖν τῶν Τριγώνων ζηε, ε εδζ, ἡ μὲν ὑπὸ ηεζ ἴση τῇ ὑπὸ εδζ (8), ἥτε ὑπὸ ζηε, ἴση τῇ ὑπὸ εδζ (9). ἡ δὲ ζε ἰσχυρὰ κοινὴ. Ἄρα (10) ἢ ζη, ἴση τῇ εδ· εἰσὶ δὲ ἄμφω Κάθετοι ἐπὶ τῆς αβ· ἡ μὲν ζη ἐκ κατασκευῆς· ἡ δὲ δε, ὅτι τῇ ὑπὸ εδζ (ἐκ κατ.) Ὁρθῇ, ἴση ἢ ἐναλλάξ ὑπὸ δεβ (ἐξ ὑποθέσεως), ἴσαι ἄρα αἱ πρὸς τὴν αὐτὴν αβ Κάθετοι ζη, δε. Ἰσοίς ἄρα ἀπέχουσαι διαστήμασιν αἱ αβ, ε γδ (11) Παραλλήλοι εἰσὶ.

κ. 84.

Ἀλλὰ γὰρ ἔσωσαν αἱ λοιπαὶ ἐναλλάξ αἱ ὑπὸ βεζ, ε γζε ἴσαι ἀλλήλαις. Καὶ ἐπεὶ αἱ δύο ὑπὸ βεζ ε αεζ (12) δυτὶν Ὁρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ὁμοίως δὲ ε αἱ ὑπὸ γζε, ε εζδ δυτὶν Ὁρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ἰσοίς ἄρα ἔσονται (13) αἱ δύο ἄμα, ταῖς δυτὶν ἄμα. Ἀφαιρεθεῖσιν ἄρα τῶν ὑπὸ βεζ, ε γζε ἴσων (14) ὑσών, ἴσαι ἔσονται ε αἱ ὑπὸ αεζ, ε εδζ (15) ἀλλήλαις. Καὶ ὅτως ἐφοδεύσει ὡς ἀνωτέρω ἢ δεῖξαι.

(1) Ε' ἐ ὑποδ. (2) Σχόλ. δ. ε κς. Βιβ. α. (3) Ο' ρ. κς. (4) ις. Βιβ. α. (5) Ε' ἐ ὑποδ. (6) Ο' ρ. λς. Εὐκλείδ. (7) ιβ. Βιβ. α. (8) Ε' ἐ ὑποδ. (9) Ε' κ κατ. (10) κς. Βιβ. α. (11) Ο' ρ. λς. Τακιστί. (12) ιγ. Βιβ. α. (13) Α' ξ. ι. (14) Ε' ἐ ὑποδ. (15) Α' ξ. γ.

Η" εἰς οὕτως· ἐὰν αἱ Ἐναλλάξ λοιπαὶ ὑπὸ βεζ, εἰ γζ· ἴσαι ὥτι, τὰς αβ, εἰ γδ Παραλλήλως διὰ τῆ ἀντιστενεχθέντος ὀρίσμῃ δείξω. Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ἐμπιπτόσης εζ ἐπ' ἄπειρον ἐκατέρωθεν προηγμένης, ἐτέρωθεν τυχὸν Ση μείον τὸ ι, ἐτέρωθεν δὲ ἀφαιρεθῆτω (1) ἡ κζ ἴση τῇ ει. Καὶ ἀπὸ τῆ ι Ση μείν, ἐπὶ τῆς γδ δεῖσαν προεκβληθείσης, ἥχθω πρὸς Ὁρθὰς (2) ἡ ιδ· ὡσαύτως δὲ εἰ ἀπὸ τῆ κ Σημείν ἐπὶ τῆς αβ ἡ κα.

κ. 85.

Ἐπεὶ οὖν αἱ ὑπὸ βεζ, εἰ βει (3) δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἶσιν, αἴτε ὑπὸ εζγ, εἰ ὑπὸ γζκ ὡσαύτως, αἱ δύο ἅμα, ταῖς δυσὶν ἅμα (4) ἔσονται ἴσαι. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ βεζ, εἰ εζγ εἶσιν ἴσαι (5) ἀλλήλαις, ἀφαιρεθεῖσαι καταλείψουσιν τὰς ὑπὸ ιεβ, εἰ κζγ (6) ἀλλήλαις ἴσας. Ἐπὶ τοίνυν τῶν Τριγώνων εακ εἰ ζβι, ἡ μὲν ὑπὸ αεκ, ἴση τῇ ὑπὸ δζι, ἴσων δειχθεῖσιν τῶν κατὰ κορυφὴν αὐταῖς (7)· ἡ δὲ ὑπὸ καε, ἴση (8) τῇ ὑπὸ ιδζ, ἅμφω γὰρ ὀρθαί· ἡ δὲ εκ Πλευρὰ, ἴση τῇ ζι (κοινὴ γὰρ ἐκατέραις ἡ ζε), προτετέθη δὲ ἡ ει ἴση τῇ κζ (9). Ἀρα (10) εἰ ἡ ὑπὸ εακ, ἴση τῇ ζβι, ἡ τε κα Πλευρὰ ἴση τῇ ιδ. Παραπλησίως δὲ εἰ ἐπὶ τῶν Τριγώνων ιεβ, κζγ, ἴση δειχθήσεται ἡ ιβ, τῇ κγ. Καὶ ἀφαιρεθεῖσαι ἄρα (11) ἴσαι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ λοιπαὶ γα, δβ· ἀλλὰ εἰ Κἀθετοὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς αβ· ἡ μὲν γα ἐκ καταστ., ἡ δὲ δβ, ὅτι ἴση τῇ κατὰ τὸ δ (ἐκ κατ.) Ὁρθὴ ἡ ἐναλλάξ ὑπὸ δββ (εἰς ὑποθ.)· ἴται ἄρα αἱ πρὸς τὴν αὐτὴν αβ Κἀθετοὶ γα, δβ, καὶ ἴσοις τοίνυν ἀπέχουσαι τοῖς διασήμεσιν αἱ αβ, γδ εἰσὶ (12), εἰ Παραλλήλοι.

Ἐπὶ τῶν Τριγώνων ακε, διζ, (ιγ) βεζ + αεζ = γζε + εζε, εἰς = γζε, (εἰς ὑποθ.) αεκ = ιεζ. Καὶ καε = ιδζ ἐκ κατ.) εἰ ζι = εκ, καε (κε) εακ = ζιδ, εἰ κα = ιδ. Ἀλλ' ἐπὶ τῶν Τριγώνων κγζ εἰ βει, ἡ ὑπο γζκ ὡς ἴση τῇ ὑπὸ ιεβ, ὡς ἴσαι ταῖς κατὰ κορυφὴν δειχθείσαις ἴσαις (ιι) Καὶ γκζ = ειβ ὡς δεικνύται· εἰς = ει (εκ κατ.) ἄρα εἰ κγ = ιβ ὡς εἰς γα = βδ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΗ.

„Ἐὰν εἰς δύο Εὐθείας (αβ, γδ) Εὐθεῖα ἐμπέπτῃσα (ἡ εζ), τὴν ἐκτὸς ᾠγωνίαν (τὴν ὑπὸ εηβ) τῇ ἐντὸς εἰ ἀπεναντίον, εἰ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη (τῇ ὑπὸ ηδδ) ἴσην ποιῇ· ἡ τὰς ἐντὸς, εἰ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη (τὰς ὑπὸ βηθ, εἰ ηδδ) ἴσας δυσὶν ὀρθαῖς ποιῇ, Παραλλήλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ Εὐθεῖαι αβ, γδ.

Ἐπειδὴ γὰρ ἡ ὑπὸ εηβ, ἴση τῇ ὑπὸ (13) ηδδ, ἡ δὲ ὑπὸ εηβ (14) ἴση τῇ αηθ. Ἀρα αἱ (15) ὑπὸ αηθ, εἰ ηδδ ἴσαι· εἰσὶ δὲ ἐναλλάξ. Ἀρα (16) Παραλλήλος ἡ αβ πρὸς τὴν γδ.

κ. 86.

Πάλιν ἐπεὶ αἱ ὑπὸ βηθ εἰ ηδδ (17) δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Εἰσὶ δὲ εἰ

κ. 87.

(1) γ. Βιβ. α. (2) ιβ. Βιβ. α. (3) ιγ. Βιβ. α. (4) Α' ε. ι. (5) Ε' ε' ὑποθ. (6) Α' ε. γ. (7) ιι. Βιβ. α. (8) Α' ε. ι. (9) Α' ε. β. (10) κς. Βιβ. α. (11) Α' ε. γ. (12) λς. ὀρίσμ. Τακτικῶς. (13) Ε' ε' ὑποθ. (14) ισ. Βιβ. α. (15) Α' ε. α. (16) κζ. Βιβ. α. (17) Ε' ε' ὑποθ.

αὶ ὑπὸ αηθ, βηθ (1) δυσὶν ὁρθαῖς ἴσαι· αἱ δύο ἄρα ἅμα ληφθεῖσαι, ἴσαι εἰς ταῖς δυσὶν (2) ἅμα ληφθεῖσαις· κοινῇ ἀφηρέσθω ἡ ὑπὸ βηθ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αηθ (3) λοιπῇ τῇ ὑπὸ ηθδ ἴση ἔσαι. Εἰσὶ δὲ ἐναλλάξ. Ἀῖρα κτ.

Π ό ρ ι σ μ α .

Ἐκ μὲν οὖν τῶ Β'. μέρους, φανερόν ὅτι ἅπαν Ὁρθογώνιον ἐστὶ καὶ Παραλληλόγραμμον.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΘ.

„Ἡ εἰς τὰς Παραλλήλους Εὐθείας (αβ, γδ) Εὐθεῖα ἐμπίπτουσα (εζ) τὰς „τε ἐναλλάξ Γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ (τὴν ὑπὸ βηθ, τῇ ὑπὸ ηθγ, καὶ „τὴν ὑπὸ αηθ, τῇ ὑπὸ ηθδ), καὶ τὴν ἐκτὸς (ὑπὸ εηβ) τῇ ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον, „καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη (τῇ ὑπὸ ηθδ) ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ „μέρη (τὰς ὑπὸ βηθ, καὶ ηθδ) δυσὶν ὁρθαῖς ἴσας.

κ. 88.

Α'. Εἰ γὰρ μὴ, ἔσω μείζων φερέειπεν ἡ ὑπὸ αηθ, τῆς ὑπὸ ηθδ. Κοινῇ προσειλήφθω ἡ ὑπὸ βηθ, καὶ ἔσονται αἱ δύο, ὑπὸ αηθ, καὶ βηθ, μείζονες (4) τῶν δύο ὑπὸ βηθ, καὶ ηθδ. Ἀῖρα αἱ ὑπὸ βηθ, καὶ ηθδ, δυσὶν ὁρθῶν ἐλάσσονες εἰσὶ. Καὶ ἐκβαλλόμεναι ἄρα ἐπ' ἀπειρον κατὰ ταῦτα τὰ μέρη αἱ αβ, γδ συμπεσύνται, καὶ οὐδὲ Παράλληλοι (5) ἔσονται· ὅπερ ἐστὶ κατὰ τῆς ὑποθέσεως. Ἰση ἄρα ἡ ὑπὸ αηθ τῇ ὑπὸ ηθδ. Ο. Η. τὸ Α'.

Β'. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ αηθ, ἴση (6) τῇ ὑπὸ εηβ. Καὶ ἡ ὑπὸ εηβ ἄρα ἴση (7) τῇ ὑπὸ ηθδ. Ο. Η. τὸ Β'.

Γ'. Κοινῇ προσκείσθω ἡ ὑπὸ βηθ. Αἱ ἄρα ὑπὸ εηβ καὶ βηθ, ταῖς ὑπὸ βηθ καὶ ηθδ (8) ἴσαι εἰσὶν. Ἀλλ' ἐκείναι (9) δυσὶν ὁρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ἀῖρα καὶ αὗται. Ο. Η. τὸ Γ'.

Καὶ ὧδε μὲν Εὐκλείδης, κατὰ τὸν παρ' αὐτῷ τῶν Παραλλήλων ὅρισμόν, καὶ τὸ ια'. Ἀξιῶμα. Ὁ δὲ Ταχέστιος ὁ τὸν ὅρισμόν μετασκευάσας, καὶ τὸ Ἀξιῶμα ἐκσυρίξας

Α* λ λ ω ς .

κ. 89.

Α'. Ἀπὸ ξ καὶ λ, ἥχθωσαν Κάθετοι αἱ ξρ, καὶ λπ (10). Κάθετοι δὲ πάντως ἔσονται ἐπ' ἄμφω τὰς Παραλλήλους (11) αβ, καὶ γζ· καὶ δὴ, καὶ

(1) γγ. Βιβ. α. (2) Δ'ε. ι. (3) Δ'ε. γ. (4) Δ'ε. δ. (5) Δ'ε. ια. καὶ ὁρ. λς. (6) ια. Βιβ. α. (7) Δ'ε. α. (8) Δ'ε. β. (9) γγ. Βιβ. α. (10) ιβ. Βιβ. α. (11) Δ'ε. ια.

ἀλλήλαις (1) ἴσαι. Ἀλλὰ καὶ ἴσα ἀπὸ τῶν Παραλλήλων (2) ἐναπολήφονται μέρη, τὰ ρλ, πξ. Τὰ ἄρα Τρίγωνα φ, καὶ ψ, ἀμοιβαδὸν ἔσαι ἰσόπλευρα. Ἀρα καὶ (3) αἱ ὑπὸ ρλξ, πξλ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· αἱ δὲ εἰσιν ἐναλλάξ. Ἀρα. Ο. Η. τὸ Α'. Εὐδὴλον δὲ ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ ἐναλλάξ αἱ ὑπὸ βλξ, καὶ ὑπὸ λξγ, διὰ τὴν ΙΓ' τῷ Βιβλίῳ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Β'. Η' ὑπὸ ηλβ ἴση τῇ ὑπὸ (4) αλξ. Ἀλλ' αὕτη ἴση ἐδείχθη τῇ ὑπὸ λξζ. Ἀρα (5) ἡ ὑπὸ ηλβ, ἴση τῇ ὑπὸ λξζ, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, κτ. Ο. Η. τὸ Β'. Ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ ἐκτὸς ὑπὸ ηλρ, ἴση δειχθήσεται τῇ ὑπὸ λξγ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Γ'. Η' ὑπὸ αλξ ἴση (6) τῇ ὑπὸ ζξλ. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ζξλ, καὶ γξλ (7) δυτὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἀρα καὶ αἱ ὑπὸ αλξ, καὶ γξλ, δυτὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ο. Η. τὸ Γ'. Οὕτω δὲ δειχθήσονται καὶ αἱ ὑπὸ βλξ, ζξλ δυτὶν Ὀρθαῖς ἴσαι.

Π ό ρ ι σ μ α.

Εὐτεῦθεν τῷ Ἐρατοδένει ἐπόμενοι, τὴν τῆς γῆς Περίμετρον καταμετρεῖν παιδευόμεθα. Παρατηρητικῶς γὰρ ἐκεῖνος Συήνης τῆς κατ' Αἰγυπτὸν πόλεως, δέρας τρεπόμενον πρὸς Κάθετον ἐπηρτῆσαι τὸν ἥλιον, Γνώμονι δὲ χρῆσάμενος, καὶ ἀπὸ τῆς ἐν Αἰγύπτῳ Ἀλεξανδρείας, τῆς ὑπὸ τὸν αὐτὸν μόνον Μεσημβρινὸν τελέτης, μοίρας σχεδὸν ἑπτὰ σὺν πεμπτημορίῳ ἀπέχοντα τὸν Φωστῆρα κατειληφώς, τοσούτον ἀμέλειτο ἀπὸ τοῦ ἐπ' αὐτὴν κατὰ κορυφὴν Σημεῖον ἀποκλίνοντα· λαβὼν δὲ καὶ τὴν μεταξὺ τῶν πόλεων διάστασιν, σαδίων ὥσπερ 5000 τυγχάνουσιν, δυνάμει τῆς ἀνὰ χεῖρας Προτάσεως τὴν ὅλην τῆς γῆς Περίμετρον ἐδηράσατο λόγῳ τοιῷδε.

Ἐς α μὲν ἡ πόλις Συήνη, β δὲ ἡ Ἀλεξανδρεία, ἔνθα Γνώμων στήριζεται πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὸν Ὀρίζοντα ὁ βγ. Ἐς ωσαν δὲ καὶ αἱ δα, καὶ γη Ἀκτῖνες αἱ ἀφ' ἡλίου πρὸς γε τὴν αἰδοῦσιν ἀλλήλαις πρᾶκτα· ἡ δὲ δα ἀκτὶς ἐπὶ τὸν κατὰ τὴν Συήνην Ὀρίζοντα Κάθετος, διὰ τῷ ζ Κέντρῳ τῆς γῆς διῆσα· ἡ δὲ γη Ἀκτὶς ἐπὶ τὸν κατὰ τὴν Ἀλεξανδρείαν Ὀρίζοντα πλαγιάζεσα, διὰ τῆς κορυφῆς τῷ Γνώμονος διήκονσα, καὶ μετ' αὐτῇ Γωνίαν τὴν ὑπὸ ηγζ, μοιρῶν δηλονότι $7\frac{1}{2}$ συνισῶσα· ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ηγζ, ἴση ἐστὶ τῇ ἐναλλάξ (8) ὑπὸ αζβ, ἥς μέτρον τὸ Τόξον αβ, τὸ μοιρῶν ὄν $7\frac{1}{2}$, τὴν τῆς γῆς Περίμετρον τοιαύτην τιγὶ ἀναλογίᾳ ἐξεύρατο. Ὡς ἔχουσι μοῖραι $7\frac{1}{2}$, πρὸς σαδίας 5000, οὕτως

Πόρισμα.

Παντὸς Πα-
ραλληλο-
γραμμοῦ, αἱ
δύο Γωνίαι
αἱ ἐπὶ τὰ αὐ-
τὰ μέρη πάν-
τη μεταλαμ-
βανόμεναι,
δυτὶν Ὀρθαῖς
ἴσαι εἰσίν.
Καὶ αἱ τέτ-
ταρες ὀρθαῖς
τέττασιν.

κ. 90.

(1) Ὁρ. λς. (2) Α'ξ. ιβ. (3) η. Βιβ. α. (4) ιι. Βιβ. α. (5) Α'ξ. α. (6) Διὰ μέ-
ρος Α'. (7) ιγ. Βιβ. α. (8) κθ. Βιβ. α.

ὅλος ὁ Κύκλος μοιρῶν ὦν 360, ἔχει πρὸς 250000. Τοσέτων ἄρα σαδίων τὴν ὅλην τῆς γῆς Περίμετρον ὀρίσειον. Ο. Η. Ε.

Π ρ ό τ α σ ι ς Λ.

„Αἱ τῇ αὐτῇ Εὐθείᾳ (εζ) Παράλληλοι (αβ, γδ), καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ Πα-
ράλληλοι.

κ. 91.

Ἐμπίπτειτω εἰς αὐτὰς Εὐθεῖα ηκ, καὶ ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ αηθ τῇ (1) ὑπὸ ηθζ· καὶ αὕτη δὲ (2) ἴση τῇ ὑπὸ θιζ. Ἀρα (3) καὶ ἡ ὑπὸ αηκ, ἴση τῇ ὑπὸ ηκδ. Ἀρα αἱ Εὐθεῖαι αβ, καὶ γδ (4) ἀλλήλαις εἰσὶ Παράλληλοι.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΑ.

„Διὰ τῆ δοθέντος Σημεῖο (α) τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ (βγ) παράλληλον
εὐθεῖαν Γραμμὴν ἀγαγεῖν (τὴν εζ).

κ. 92.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς βγ τυχὸν Σημεῖον τὸ δ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ αδ (5), καὶ συνεχάτω πρὸς τῷ α Σημεῖον τῆς δα τῇ ὑπὸ αδγ ἴση (6) ἡ ὑπὸ δαε, καὶ ἐκβεβλήθω ἐπ' εὐθείας τῆς αε, Εὐθεῖα ἡ αζ. Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο Εὐθείας τὰς βγ, εζ, ἐμπεσῶσα ἡ αδ, τὰς ἐναλλάξ Γωνίας, τὰς ὑπὸ εαδ, αδγ ἴσας ἀλλήλαις πεποιήκε, παράλληλος ἄρα (7) ἡ εζ τῇ βγ. Ο. Ε. Π.

κ. 93.

Εἰς δὲ Πρᾶξιν ἀρκέσει ἀχθείσης τῆς αδ, Τόξον γράψαι τὸ ιπ, καὶ Κέντρον μὲν τῷ α, Διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ, τὸ Τόξον ξφ. Ἐὰν γὰρ ἀπὸ τέττα ἀφαιρεθῇ τὸ ξβ ἴσον τῷ ιπ, ἡ διὰ τῷ α καὶ β Εὐθεῖα ἔσται ἡ ζητούμενη Παράλληλος.

Ἡ δεῖξις ἡρτῆται ἐκ τῆς ΚΘ'. τῇ Γ'. Βιβλίῳ.

Α' λ λ ω ς.

κ. 94.

Κέντρον τῷ τυχόντι ο Κύκλος γεγράφθω, δῖων μὲν τῇ Περιφερείᾳ διὰ τὰ δοθέντος Σημεῖο α, τέμνων δὲ καὶ τὴν δοθείσαν Εὐθεῖαν κατὰ Σημεῖον ξ καὶ π· τῷ δὲ Τόξῳ πα, ἴσον εἰλήφθω Τόξον τὸ ξν, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ αν· ἡ δὲ ἔσται ἡ ζητούμενη Παράλληλος.

Ἡ ῥηται δὲ ἡ δεῖξις ἐκ τῆς ΚΘ'. τῇ Γ'. Βιβλίῳ, καὶ τῆς ΚΖ'. τῇ ἀναχρίσει. Ταύτην δ' εὐρήσεις ἐν τῷ Λήμματι τῷ πρὸς τὴν Ις'. Πρότασιν, τῶν ἐκ τῶν τῷ Ἀρχιμήδῃ ἐκλελεγμένων Θεωρημάτων.

(1) κζ. Βιβ. α. (2) Αὐτ. (3) Α'ξ. α. (4) κζ. Βιβ. α. (5) Α'τ. α. (6) κγ. Βιβ. α.
(7) κζ. Βιβ. α.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Α' ποδεδείκται ἡμῖν ἄρα τὰ ἐπὶ τῶν παραλλήλων Εὐθεϊῶν θεωρούμενα, διά τε τῷ κατ' Εὐκλείδην Α' ξιώματος, καὶ ἐκείνῳ ἄνευ· ἐπεὶ πολλοῖς εἰς τάξιν θεωρήματος, καὶ ἥ περ ἢκ' ἀλόγως ἀνάγεται. Ἀλλὰ καὶ αἱ τρεῖς ἀνωτέρω Προτάσεις, ΚΖ'. ΚΗ'. καὶ ΚΘ'. φημι, ὡς ὁ Τακτικὸς μὴ ἐξηρημένως τῷ εὐκλείδει Α' ξιώματος προδόμενος δεῖξαι, εἰς τὰς ΚΗ. ΚΘ. ΚΖ. μεταστήσας συνέχεε, τῆς προσηκείας παρ' ἡμῶν ἔτυχον χώρας καὶ τάξεως. Ἡ δὲ οὖν καὶ τὸ Α' ξίωμα ἐκεῖνο πειρατέον ἀποδείξει, τὸ συνεχῶς ἐν τοῖς ἐφεξῆς εἰς χρήσιν παραληφθητόμενον.

Θ ε ώ ρ η μ α .

„Εὖν Εὐθεῖα (αγ) εἰς Εὐθείας (τὰς αβ, καὶ γδ) ἐμπίπτουσα, τὰς ἐντὸς
 „καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη Γωνίας (ὑπὸ βαγ, καὶ δγα) δυοῖν Ὀρθῶν ἐλάσσονας
 „ποιῇ, ἐμβαλλόμεναι αἱ Εὐθεῖαι αβ, καὶ γδ συμπεσῶνται ἀλλήλαι, ἐφ' ἃ
 „μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο Ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Δ ε ῖ ξ ι ς ἡ κατὰ Πτολεμαῖου.

Λήμμα Α.

„Αἱ ἀπὸ δυοῖν Ὀρθῶν ἴσων ἐμβαλλόμεναι εὐ συμπίπτουσι.

Εἰσὶ γὰρ Παράλληλοι (1). Ἀρα καὶ τὸ ἀνάπαλιν, αἱ ἀπ' ἐλασσόνων συμπίπτουσι. Χρῆζει δὲ πάντως τὸ ἐπιφερόμενον δεῖξεως· οὐ γὰρ ἐξ ἀνάγκης ἔχει τ' ἀκόλουθον, ὅπως ἐπ' ἀμφοῖν τῶν ὑποθέσεων ἐνδοιάσειε τις μὴ ποτε ἐπίσης ἐπαληθεύοι τῶν Γραμμῶν τὸ ἀσύμπτωτον.

Λήμμα Β.

„Ἡ εἰς τὰς Παράλληλους (αβ, γδ) Εὐθεῖα ἐμπίπτουσα (εζ), τὰς ἐντὸς
 „καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη Γωνίας (ὑπὸ βεζ, καὶ δεζ) δυοῖν Ὀρθῶν ἴσας ποιεῖ.

Εἴςιν ἡ παρ' Εὐκλείδην ΚΘ'. Ἐπειδὴ δὲ διὰ τῷ εἰς ἀπόδειξιν ὑποκειμένα ια'. Α' ξιώματος τῷ Στοιχειωτῇ κατεσκευάσαι, τὸ διάλληλον φεύγων τῶν ἀποδείξεων ὁ Πτολεμαῖος, ἄλλως ἀποδεικνύειν πειρᾶται ὡς ἐφεξῆς.

Εἰ μὴ γὰρ, ἡ ἐλάσσονας, ἡ μείζονας. Ἀλλ' εἰ μὲν τῷτο, αἱ λοιπαὶ
 ὑπὸ αεζ, καὶ γζε, δυοῖν Ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσιν (2)· ἀλλὰ καὶ μείζονες αἱ

α. 95.

(1) α4. Βιβ. α. (2) ιγ. Βιβ. α.

αὐταί (1). Εἰδ' ἐκεῖνο, αἱ λοιπαὶ μείζονες (2) ἄλλα ἢ ἐλάσσονες αἱ αὐταί (3). Ἀτοπον δὲ ἐκάτερον· δυσὶν ἄρα Ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ. Ταῦτα Πτολεμαῖος.

Ἀλλὰ μήποτε παραλογισμὸς ἐν τῷτοις λαμβάνει (φησὶν ὁ Πρόκλος); Κωλύει γὰρ ἔξεν τὸν ἀσυμπτῶτας λέγοντα τὰς ἀπ' ἐλαττόνων ἢ δύο Ὀρθῶν ἐκβαλλομένας, τὰς μὲν τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ δύο Ὀρθῶν μείζους λέγειν, τὰς δὲ ἐπὶ δάτερα δύο Ὀρθῶν ἐλάσσονας.

Θεώρημα Α.

„Εἴαν εἰς δύο Εὐθείας (τὰς αβ, γδ), Εὐθεῖα ἐμπίπτῃ (ἢ εζ) τὰς ἐν-
„τὸς ἢ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν Ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ (τὰς ὑπὸ βεζ, καὶ
„δζε), αἱ Εὐθεῖαι (αβ, ἢ γδ) συμπεσῶνται ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο Ὀρ-
„θῶν ἐλάσσονες (ὑπὸ βεζ, ἢ δζε).

κ. 96. Εἰ μὴ γὰρ, ἢ ἐπ' ἑτέρω συμπεσῶνται ἢ ἐφ' ἑτέρα, τὰ μέρη α ἢ γ, ἐνθα αἱ τῶν Ὀρθῶν εἰσι μείζονες, ἢ αἱ Ὀρθαῖς δυσὶν ἴσαι· προδείξην δ' ἂν ἢ ἐφ' ἐκάτερα. Ἀλλ' εἰ μὲν ἐπ' ἑτέρω, Παράλληλοι (4) ἔσονται αἱ Εὐθεῖαι αβ, γδ. Ἀλλὰ τοιαῦται ἔσται, τὰς ἐντὸς ἢ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, δυσὶν Ὀρθαῖς ἔχουσιν ἴσας (5)· ἔσονται ἄρα αἱ ὑπὸ εβζ, ἢ δζε, δυσὶν Ὀρθαῖς ἢ ἴσαι, καὶ μὴ.

κ. 97. Ἀλλὰ συμπίπτειν κατὰ τὸ η, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ ὑπὸ αεζ, γζε δυσὶν Ὀρθῶν μείζονες· καὶ Τρίγωνον συστήσεται τὸ ηεζ. Καὶ δὴ αἱ μὲν ὑπὸ ηεζ, ἢ ηζε, μείζονες εἰσι δυσὶν (6) Ὀρθῶν, αἱ δὲ ὑπὸ ηεζ, ἢ ζεβ (7) δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ· μείζονες ἄρα αἱ ὑπὸ ηεζ, ἢ ηζε, τῶν ὑπὸ ηεζ, καὶ ζεβ· ἢ κοινῆς ἀφαιρεθείσης τῆς ὑπὸ ηεζ, μείζων ἢ ὑπὸ ηζε (8) τῆς ὑπὸ βεζ. Ἐπὶ ἄρα τῇ εζη Τριγώνῳ, ἐλάττων ἢ ἐκτὸς ὑπὸ βεζ, τῆς ὑπὸ ηζε ἐντὸς ἢ ἀπεναντίον. Ὅπερ (9) ἔκ' ἐστ.

Ὡσαύτως τὸ ἄτοπον δειχθήσεται καὶ τῶν ὑπὸ αεζ, ἢ γζε, ἐφ' ἃ μέρη συμβαίνειν λέγεται ἢ σύμπτωσις, Ὀρθῶν ὑποτιθεμένων· ἄλλως τε δὲ, ἢ ἀντιφάσκοντα τεδείσεται πρὸς τὸ προσληφθὲν Α'. Λήμμα.

Τελευταῖον ἢ δ' ἂν ἐφ' ἐκάτερα συνέλθοιεν· ἢ γὰρ Εὐθεῖαι δύο χωρὶν ποτὲ περιέξῃσι (10).

Πᾶσα ἄρα ἀνάγκη συνελθεῖν αὐτὰς, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο Ὀρθῶν ἐλάσσονες.

(1) Ε' ἐπὶ. (2) ιγ. Βιβ. α. (3) Ε' ἐπὶ. (4) Ὀρ. λ. (5) Δὴμ. β. (6) Ε' ἐπὶ. (7) ιγ. Βιβλ. α. (8) Δ' γ. (9) ις. Βιβ. α. (10) Δ' γ.

Καὶ ταῦτα μὲν οὕτω σαφροῖς δεμελίοις ἐπωκοδόμηται.

Δεῖξις ἡ κατὰ Πρόκλον.

Ἀξιῶμα.

„Εἰν ἀφ' ἐνὸς Σημεῖα δύο ἐκβάλλονται Εὐθεῖαι, Γωνίαν ποιῶται ἐπ' ἄπειρον, πᾶν πεπερασμένον Μεγέθος ὑπερβάλλει ἢ διάσασις αὐτῶν τῶν εἰς ἄπειρον ἐκβαλλομένων.

Τῷ δ' Ἀξιῶματι τῷ τῷ εἰς Ἀριστοτέλης ἐχρήσατο, δεικνὺς τὸν κόσμον μὴ εἶναι ἄπειρον. Ἀπείρων γὰρ ἔσων τῶν ἀπὸ τοῦ Κέντρου πρὸς τὴν Περιφέρειαν ἐκβαλλομένων, ἄπειρον τὸ μεταξὺ. Πεπερασμένα γὰρ ὄντος αὐξῆσαι τὴν διάσασιν ἀδύνατον. Ὡς ἐκ ἄπειροι αἱ Εὐθεῖαι.

Λήμμα.

„Εἰν Παραλλήλων Εὐθειῶν τὴν ἑτέραν (αβ), Εὐθεῖα τις (ἢ εζ) τέμνη· τεμεῖ προεκβληθεῖσαν εἰς τὴν λοιπὴν (γδ).

Εἴπερ γὰρ Εὐθεῖαι δύο εἰσιν ἀφ' ἐνὸς Σημεῖοις τοῦ ζ εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι, αἱ ζα, ζθ, παντὸς Μεγέθους μείζονα ἔχουσι διάσασιν (1)· ὥς ἐκ τῆς τέττα ὅσον ἐστὶ τὸ μεταξὺ τῶν Παραλλήλων· ὅταν οὖν μείζον ἀλλήλων διασῶσι τῆς τέττων διαστάσεως, τεμεῖ ἢ ζθ τὴν γδ. Εἰν ἄρα Παραλλήλων τὴν ἑτέραν τέμνη τις Εὐθεῖα κτ

κ. 98.

Θεώρημα.

„Εἴωσαν δύο Εὐθεῖαι (αἱ αβ, γδ), εἰς ἐμπιπτέτω εἰς αὐτάς ἢ εζ, ἢ ἐλάσσονας δύο Ὀρθῶν ποιῶσα, τὰς ὑπὸ βεζ, δε· λέγω ὅτι συμπε-
πνένται αἱ Εὐθεῖαι κατὰ ταῦτα τὰ μέρη, ἐφ' ἃ αἱ τῶν δύο Εὐθειῶν εἰ-
σιν ἐλάσσονες.

Εἰπερ γὰρ αἱ ὑπὸ βεζ, δε ἐλάσσονες εἰσὶ δύο Ὀρθῶν· τῇ ὑπεροχῇ τῶν δύο Ὀρθῶν ἔσω ἴση ἢ ὑπὸ δεβ (2), εἰς ἐκβεβλήσθω ἢ δε (3) ἐπὶ τὸ κ. Εἴπερ οὖν εἰς τὰς κθ, γδ ἐμπέπτωκεν ἢ εζ, εἰς ποιῇ τὰς ἐντὸς δυ-
σιν Ὀρθαῖς ἴσας, τὰς ὑπὸ δεζ, εἰς δε, Παραλλήλοί εἰσιν αἱ (4) δε, γδ Εὐθεῖαι. Ἀλλὰ τέμνει τὴν κθ (5) ἢ αβ, τεμεῖ ἄρα (6) εἰς τὴν γδ.

κ. 99.

(1) Διὰ τὸ Α'ξ. (2) κγ. Βιβ. α. (3) Α'τ. β. (4) κγ. Βιβ. α. (5) Β'κ κατ.
(6) Διὰ τὸ Λήμμα.

Α'λλ' ἔδὲ τούτοις ἔοικεν ἀγαπᾶν ὁ νεώτερος Τακτέτις, ἐπαπορεῖ δὲ δι' ὃν λόγον ἐν ὀρισμῷ λς'. φθάσας ἐξέθετο.

Δεῖξις ἡ κατὰ Κλάβιον.

Λήμμα Α.

κ. 100.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς Εὐθείας βθ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεΐσης τῆς βο, Γωνία συζαθῇ ὀξεῖα ἢ ὑπὸ βοφ, αἱ ἄλλαι Κάθεται ρπ, τσ, αἱ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βθ ἀγόμεναι, καὶ ἀπὸ τῆς αὐτῆς οφ περατῆμεναι, αἱ ἐλάττονες, καὶ ἐλάττονες ἔσονται.

Ἐπεὶ ἀχθεΐσης τῆς βπ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς οφ (ἡ καὶ ἐπὶ τὰ μέρη τῆς ὀξεῖας Γωνίας κείσεται· δεῖ γὰρ τὰς δύο τὰς ὑπὸ βοπ, καὶ βπο, δυοῖν Ὀρθῶν εἶναι ἐλάσσονας (1)· ἀδύνατον δὲ τὴν μὲν Ὀρθὴν εἶναι, τὴν δὲ Ἀμβλεῖαν ἐπὶ τῇ Τριγώνῳ πβο)· εἴτα καὶ ἐπὶ τῆς βδ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεΐσης τῆς πρ, καὶ τῆς ρσ ὁμοίως πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς οφ, καὶ τῆς στ ὡσαύτως πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς βθ, κτ'· φανερόν ὅτι ἡ μὲν βο, μείζων (2) ἔσται τῆς βπ, ἡ δὲ τῆς πρ, ἡ δὲ τῆς ρσ, ἡ δὲ τῆς στ, ὡς ὑποτείνονται τὴν Ὀρθὴν, ὑποτείνουσιν τὴν Ὀξεῖαν.

Λήμμα Β.

Τῆς ὑπὸ τσπ Ἀμβλείας ὕσης, αἱ πρ, οβ, κτ'· αἱ πρὸς Ὀρθὰς ἔσται ἐπὶ τῆς αὐτῆς βθ, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν ἡ Ἀμβλεῖα, αἱ μείζονες ἔσονται, καὶ μείζονες· οἷον ἡ μὲν σρ, αἱ μείζων τῆς στ, τῆς δὲ σρ μείζων ἡ πρ, τῆς δὲ πρ μείζων ἡ βπ, τῆς δὲ βπ, ἡ βο, ὡς ἐν τῷ α'. Λήμματι.

Λήμμα Γ.

Ἐπειδὴ τοῖνον ἐπὶ τῆς βτ πρὸς ὀρθὰς ἠχθησαν ἴσαι αἱ τσ, βψ, ἐπὶ ζευχθεΐσης τῆς σψ, αἱ ὑπὸ σψβ, καὶ ψστ Ὀρθαὶ ἄμφω ἔσονται. Εἰ μὴ γὰρ, ἀλλ' ἡ ἑτέρα Ὀξεῖα ἢ, ἢ γὰρ Ἀμβλεῖα, αἱ Κάθεται ψβ, καὶ στ, ἴται μὲν οὐ, αἱ τοὶ δ' ἂν εἴεν, καὶ ἡ μὲν μείζων, ἡ δὲ ἐλάσσων. Ὡς ἐπὶ τῶν ἀνωτ. Λημμάτων.

Θεώρημα.

Ἐὰν Εὐθεῖα ἡ αο, εἰς Εὐθείας τὰς οδ, αλ ἐμπίπτῃ, τὰς ὑπὸ

(1) 12. Βιβ. α. (2) 13. Βιβ. α.

αοδ, ε βαλ, δυοῖν Ὁρθῶν ἐλάττοναι ποιῇ, λέγω δὲ ὅτι προσεβληθεῖ-
σαι αἱ οδ καὶ αλ, συμπεσόνται ἐφ' α' μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο Ὁρθῶν ἐ-
λάττονες.

Εἰ γὰρ ἐπὶ τὰ μέρη τῆς ὑπὸ αοδ Ὁξείας, πρὸς ὀρθὰς ἀχθῇ ἀπὸ τῆς
α Σημεῖς ἢ αβ ἐπὶ τῆς οδ, ληφθῇ δὲ ἐπὶ τῆς αλ, τυχὸν Σημεῖον τὸ ε,
ἐπὶ δὲ τῆς αβ πρὸς ὀρθὰς ἀχθῇ ἢ εζ, εἴτα ληφθῇ ἢ εκ ἴση τῇ αε, καὶ
προαχθείσης τῆς εμ ἴσης τῇ εζ, συζευχθῇ ἢ κμ· ἴση ἔσαι καὶ αὕτη τῇ
αζ, ἥτε ὑπὸ εμκ, ἴση τῇ Ὁρθῇ ὑπὸ αζε (ὅτι αἱ δύο εκ, εμ, ἴσαι τὰς
δυτὶν αε, εζ, περιέχουσι δὲ ε Γωνίας ἴσας τὰς κατὰ τὴν κορυφὴν ε). Ληφθεῖ-
σα δὲ ἢ ζη ἴση τῇ αζ, ἴση ἔσαι ε τῇ κμ· καὶ συζευχθεῖσα ἢ ηκ, πρὸς ὀρ-
θὰς σήσεται ἐπὶ τῆς αη (ὡς δῆλον ἐκ τῆ γ· Λήμματος), τῶν κμ, ζη ἴσων τε
ἔσων ἀλλήλαις, ε πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς ζμ ἰσχυμένων.

Εἰν ἄρα ε τῇ ακ, ἴση ληφθῇ ἢ κλ, ε τῇ αη ἴση ηθ, προαχθείσης
τῆς ηκ ἐπὶ τὸ ν, ε τῆς κν ἴσης ληφθείσης τῇ κκ, ἐπιζευγνυμένη ἢ λν, ἴση
δειχθήσεται τῇ αη, ἥτε πρὸς τῷ ν Γωνία Ὁρθή, καθάπερ ἢ ὑπὸ ακκ. Καὶ
εἰν ἐπιζευχθῇ ἢ λθ, πρὸς ὀρθὰς σήσεται ε αὕτη ἐπὶ τὴν αθ. Κείθω οὖν
ἢ λγ ἴση τῇ αλ, ε θι ἴση τῇ αθ· εἰν ἐπιζευχθῇ ε ἢ γι, πρὸς ὀρθὰς ε
αὕτη σήσεται ἐπὶ τὴν αι.

Ἀλλὰ γὰρ ληφθείσης τῆς μὲν ζη ἴσης τῇ αζ, ε τῆς ηθ ἴσης τῇ αη, ε
τῆς θι ἴσης τῇ αθ, ε οὕτως ἐφεξῆς, ἔσαι ποθ' ὅτε ἢ αι, μείζων ἔσαι τῆς
αβ, ε οὕτως ἢ βθ ἐντὸς τῆ Τριγώνου αηγ ἐνχεθήσεται· εἰν ἄρα προαχθεῖν
ἢ βδ, ἔξω τέως τῆ πεπερασμένη διασήματος τῆ Τριγώνου γενήσεται. Ἐπεὶ
δὲ ἐκ αὐτῶν συνέλθοι ποτὲ τῇ βάσει ιγ, τῇ διὰ τὰς ὑπὸ δβι, ε γιβ τὰς δυτὶν
ὀρθαῖς ἴσας ἔσας, πρὸς αὐτὴν Παραλλήλῳ (1), συμπεσεῖται ἄρα ἢ βδ τῇ
αγ Πλευρᾷ κατὰ τὸ υ. Ἀρ' οὖν αἱ οβδ, ε αλ, εἰς ας ἐμπίπτει ἢ αο, ἢ
ἢ αβ, ἀπ' ἐλαττόνων ἢ δυοῖν Ὁρθῶν προσεβληθόμεναι ἐκ εἰσὶν ἀσύμπτωτοι.

Καὶ αὕτη μὲν ἢ κατὰ Κλάβιον ἀπόδειξις, ἣν μηδαμῶς μὲν ἠρτῆσθαι τῆς
θεωρίας τῶν Παραλλήλων ὁ Τακτέτιος ἐφησεν, εἶναι δὲ διεξοδικωτάτην τε,
ε ἐργωδεστάτην.

Δεῖξις ἢ κατὰ Τακτέτιον.

κ. 101.

Κείθωσαν αἱ ὑπὸ γβα, δαβ δυοῖν Ὁρθῶν ἐλάττονες, ε ἔωσαν αἱ ὑπὸ
γβα, φαβ δυτὶν Ὁρθαῖς ἴσαι (συζήτησις ἀμέλειτοι τῆς ὑπὸ φαβ ἴσης τῇ (2))

(1) κη. βιβ. α. (2) κγ. βιβ. α.

ὕπὸ μβγ)· ἔξονται αἱ βγ, ἀφ' Παράλληλοι (1), ἡ δὲ ὑπὸ φαβ, μείζων (2) τῆς ὑπὸ δαβ, τῇ ὑπεροχῇ τῆς ὑπὸ φαδ. Τῶτων οὕτω κειμένων, προσληπτέον δίκην Ἀξιωματος καὶ αὐτὸ τὸ γνώριμον ἔχοντος, ὅτι μεταξὺ τῶν αδ καὶ ἀφ' ἐπ' ἄπειρον προηγμένων, ἔξεται τῇ αμ Παράλληλον ἀγαγεῖν τὴν ψφ, ἣτις μείζων εἶη τῆς αβ. Εἰλήφθω τῇ φψ ἴση ἡ αρ, ἔπεξεύχθω ἡ ψρ. Ἐπεὶ τοίνυν αἱ αρ, φψ Παράλληλοί εἰσιν, αἱ ἐναλλὰξ ὑπὸ φψα, ἔψαψ, ἔσονται (3) ἴσαι. Εἰσὶ δὲ ἔς αἱ Πλευραὶ φψ, ψα, ἴσαι ταῖς ρα, αψ (4). Ἀρα καὶ αἱ ὑπὸ ρψα, φαψ (5) ἴσαι εἰσὶ. Καὶ ἡ ρψ Παράλληλός (6) ἐστὶ τῇ ἀφ. Ἀλλὰ ἔς ἡ βγ Παράλληλός ἐστὶ τῇ ἀφ. Ἀρα αἱ ρψ, ἔς βγ (7) Παράλληλοι εἰσίν. Ἐσιν ἄρα ἡ βγ ἔς παράλληλος τῇ ρψ, ἔς ἐγκλεισμένη τῷ Τριγώνῳ αρψ· καὶ δὴ ἐπ' ἄπειρον προεκβαλλομένη, ἔς ὅτε τῇ Παραλλήλῳ ρψ συμπεσεῖν δυναμένη, εἰς ἐπὶ τὸ α γενέσθαι (8), τῇ αδ προεκβληθεῖσιν ἡ βγ ἐξ ἀνάγκης συμπεσεῖται. Ο. Ε. Δ.

Αὐτὸς δὲ τῷτο ὧδέπως δείκνυμι.

α 102.

Διὰ τῇ δ Σημεῖν ἤχθω (9) ἡ δὲ Παράλληλος πρὸς τὴν αβ· προεκβεβλήθω δὲ ἐπ' εὐθείας τῇ δε ἡ εφ (10) ἐπ' ἄπειρον, ὁμοίως δὲ ἔς τῇ δγ ἡ γχ, ἔς ἤχθω Κάθετος ἀπὸ τῷ α ἐπὶ τὴν δγ προεκβληθεῖσαν (11) ἡ αδ. Μεταξὺ δὲ τῶν δχ, δφ εἰς ἄπειρον διαζευγνυμένων, κοίθω πρὸς ὁρθὰς ἐπὶ τῆς δχ ἡ μλ (12) μείζων τῆς αδ· ἔς ἀφηρήθω ἀπὸ τῆς μλ μείζονος ἡ ρλ ἴση τῇ (13) ἐλάττω αδ, ἔς ἐπεξεύχθω ἡ ρα, ἣτις (μεταξὺ τῶν Σημείων ρ ἔς α παρεμπίπτουσιν) τεμεῖ τὴν δφ κατὰ τὸ ζ, διὰ δὲ τὰς ἴσας Κάθετους (ὁρ. λς.) αδ, ρλ, Παράλληλός ἐστὶ πρὸς τὴν δλ. Διὰ γυν τῷ Σημεῖν ζ, ἤχθω Παράλληλος τῇ αγ ἡ ζκ. Αὗται δὴ ἔσονται ἔς ἴσαι Ἀλλήλαις· ἐστὶ γὰρ ἀπὸ ζ πρὸς Ὀρθὰς ἀχθῇ ἐπὶ τῆς δλ ἡ ζι (14), ἐπὶ τῶν Τριγώνων κζι, γαδ, αἱ ὑπὸ ζκ, ἔς ζκ, ἴσαι ταῖς ὑπὸ αγδ, ἔς αδγ ἑκατέρω ἑκατέρω (15). Ἀλλὰ ἔς ἡ Πλευρὰ ζι ἴση τῇ αδ (16). Ἀρα (17) ἔς ζκ ἴση τῇ αγ. Καὶ Γωνία δὲ ἡ ὑπὸ βαγ ἴση (18) τῇ ὑπὸ δεγ, ἡ δὲ τῇ ὑπὸ εζκ. Ἀρα ἔς ὑπὸ βαε (19) ἴση τῇ ὑπὸ εζκ.

Ὡς ἐπεὶ αγ δέδεικται ἴση τῇ ζκ, ἐφαρμόσεται (20). Καὶ Γωνία δὲ ἡ ὑπὸ

(1) κη. Βιβ. α. (2) Ὁρ. β. (3) κδ Βιβ. α. (4) Εκ κατ. (5) δ. Βιβ. α. (6) κζ. Βιβ. α. (7) λ. Βιβ. α. (8) Δ'ε. γ. ἔς ιδ. (9) λα. Βιβ. α. (10) Α'τ. β. (11) φ. Βιβ. α. (12) ιβ. Βιβ. α. (13) γ. Βιβ. α. (14) ιβ. Βιβ. α. (15) κδ. Βιβ. α. ἔς δις τὴν κατ. (16) Ὁρ. λς. (17) κς. Βιβ. α. (18) κδ. Βιβ. α. (19) Δ'ε. γ. (20) Δ'ε. η
οὐ

βαε, ἴση ἔσται τῇ ὑπὸ εζη ὁμοίως ἐφαρμόσει· ὡσαύτως δὲ καὶ ὑπὸ αγδ τῇ ὑπὸ ζκδ· ἢ ἐὰν ἄρα νοήσης τὸ βαγδ κείμενον ἐπὶ τῷ δζκ Τριγώνῳ, ὥς ἐ τὴν αγ πεσεῖν ἐπὶ ζκ, ἢ αβ πεσεῖται ἐπὶ ζδ, καὶ γδ ἐπὶ κδ. Ἀλλ' αἱ ζδ, κδ, οὕτως αὐταὶ εἰσιν αἱ αβ, γδ προεκβληθεῖσαι, ἢ συμπίπτουσαι ἐπὶ τὸ δ. Ἐὰν ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α Α'.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν τὰς μὴ Παραλλήλους Εὐθείας προεκβαλλομένας τέως συμπίπτειν· περὶ οὗ ἦν ἐνδοιάζειν, διὰ τὸν ἐπαχθέντα λόγον Ὁρισμ. λς'. Ἐΰωσαν γὰρ Εὐθεῖαι μὴ Παράλληλοι αἱ αβ, γδ, εἰς αἷ ἐμπίπτασα ἡ αγ· διὰ δὲ τῷ γ ἤχθω ἡ γε Παράλληλος πρὸς τὴν (1) αβ. Ἔςονται δὴ αἱ ὑπὸ εγα, ἢ βαγ (2) δυσὶν Ὁρθαῖς ἴσαι· ἄρα αἱ ὑπὸ δγα, ἢ βαγ (3) δυσὶν Ὁρθῶν εἰσιν ἐλάσσονες. Ἀρα διὰ τὸ προαποδεδειγμένον Θεώρημα, αἱ αβ, καὶ γδ συμπεσύνται.

κ. 103.

Π ό ρ ι σ μ α Β'.

Φανερόν δὲ ἢ ὅτι ἐὰν Εὐθεῖα ἡ γδ ἐπ' ἀπειρον προεκβάλλοιτο, ἀπείρους Εὐθείας ἀλλήλαις Παραλλήλους, ἐπ' ἀπειρον ἢ αὐτὰς (δεῖσαν) προεκβαλλομένας τεμεῖ, τὰς αβ, εζ, ηδ, ικ. κτ. Εἰ γὰρ ἡ αβ Παραλλύλη τῆς εζ ἐπίσης (4) ἀφίσταται, τέμνεται δὲ ὑπὸ τῆς γδ, ἢ ἄρα σώζει ἢ πρὸς αὐτὴν τὸ παράλληλον. Ἡ ἄρα δγ ἢ δὲ πρὸς τὴν εζ ἔσται Παράλληλος (εἰ γὰρ, ἦν ἂν (5) ἢ πρὸς τὴν αβ ἦν τέμνει· ὅπερ ἢ ἐξ (6))· τέμνει ἄρα ἡ δγ ἢ τὴν ιζ. Διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον μηδὲ πρὸς τὴν ηδ, ἢ ικ, κτ. παράλληλος ἔσται ἡ δγ, τέμνει ἢ ταύτας προεκβληθεῖσα, ἢ ἀπείρους Παραλλήλους ἐπ' ἀπειρόν.

κ. 104.

Πρότασεως ΔΒ'. Μέρος Α'.

„Παντὸς Τριγώνου μιᾶς τῶν Πλευρῶν προεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς Γωνία „(ὑπὸ αγδ), δυσὶ ταῖς ἐντὸς ἢ ἀπεναντίον (ταῖς κατὰ τὸ α ἢ β) ἴση ἐστί.

Ἦχθω διὰ τῷ γ τῇ βα Παράλληλος ἡ γε (7)· ἐπεὶ δὲ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτει ἡ αγ, ἔσται (8) ἡ ὑπὸ εγα, ἴση τῇ ὑπὸ γαβ· ὡσαύτως ἐμπιπτάσης ἢ τῆς βδ, ἔσται (9) καὶ ἡ ὑπὸ δγε, ἴση τῇ ὑπὸ γβκ. Ἡ ἄρα ὅλη ὑπὸ αγδ, ἴση δυσὶ ταῖς ἐντὸς ἢ ἀπεναντίον. Ο. Ε. Δ.

κ. 105.

(1) λα. Βιβ. α. (2) κδ. Βιβ. α. (3) Ο'ρ. β (4) Ο'ρ. λς. (5) λ. Βιβ. α. (6) Διὰ Πόρ. τὸ ἀνωτ. (7) λα. Βιβ. α. (8) κδ. Βιβ. α. (9) κδ. Βιβ. α.

Πορίσματα.

- A. Η' ἄρα ἐκτὸς ἑκατέρας τῶν ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον μείζων. Ἐστὶ δὲ ἡ παρὰ Εὐκλείδῃ Ις'. ἥς τὴν δεῖξιν εἰς τὸ δεῖν ὁ Τακτέτιος ὑπερέδωκε.
- κ. 106. B. Καὶ Γωνίων τῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως αβ, μείζων τῆς ὑπὸ αβ περιεχόμενης, ἢ ὑπὸ αβ περιεχομένη. Προαχθεῖσθαι γὰρ τῆς βδ κατὰ τὸ ε, ἢ ὑπὸ βδ μείζων τῆς ὑπὸ δεα, ἢ δὲ τῆς ὑπὸ εγδ· τὸ δὲ ἦν τὸ δεύτερον τῆς ΚΑ'. Πρωτ. μέρος, ὅπερ ἐνταῦθα δεῖξαι ὁ Τακτέτιος ὑπέρχετο.
- κ. 107. Γ. Ὡς ἂν Εὐθείαι αἱ αβ, αὐτῆς Εὐθείας δε, ἀπὸ τῆς αὐτῆς Σημεῖα α σαθῶσιν ἢ μὲν πρὸς ὀρθὰς ἡ αβ, ἢ δὲ πλαγίως ἡ αγ, κείσεται μὲν ἡ Κάθετος αβ, ἐφ' ἧς μέρη ἐσὶν ἡ ὀξεία Γωνία ὑπὸ αβγ, ἢ δὲ μὴ πρὸς ὀρθὰς, τὴν ὀρθὴν Γωνίαν ὑπὸ αβγ ὑποτενεῖ. Εἰ μὴ γὰρ, ὑποτενέτω μὲν (κειμένη ἐνθα ἡ αζ) ἡ Κάθετος, τὴν ὑπὸ αγζ Ἀμβλείαν, ὑποτενέτω δὲ ἡ μὴ πρὸς ὀρθὰς αγ, τὴν ὑπὸ αζγ Ὀξείαν· καὶ ὥτως ἔσται ἡ μὲν ὑπὸ αζε Ὀρθή (1) μείζων τῆς ὑπὸ αγε Ἀμβλείας, ἢ ἐκτὸς τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, ἢ δὲ ὑπὸ αγδ Ὀξεία (2) μείζων τῆς ὑπὸ αζγ Ὀρθῆς, ἢ ἐκτὸς τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον (3)· τῆτο δὲ ἄτοπον (4). Ἀρα κτ.

Προτάσεως ΑΒ'. Μέρος Β'.

„Καὶ αἱ ἐντὸς τῆς Τριγώνου Γωνίαι δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι. Διὸ καὶ μοίρας 180 συναποτελῶσιν.

- κ. 108. Μία γὰρ τῶν Πλευρῶν αβ κατὰ τὸ ζ προεκβληθείσης, ἢ ἐκτὸς ὑπὸ ζβγ, δυσὶ ταῖς ἐντὸς (5) καὶ ἀπεναντίον α καὶ γ ἴση ἐστί. Κοινῇ γὰρ προσεθεῖσθαι τῆς ὑπὸ γβα, δυσὶ ταῖς ὑπὸ ζβγ, γβα (6) αἱ τρεῖς τῆς Τριγώνου ἴσαι εἰσὶν. Ἀλλ' αἱ δύο δυσὶν Ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι (7). Καὶ αἱ τρεῖς ἄρα (8) τῆς Τριγώνου ἐντὸς Γωνίαι δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ.

Α' λ λ ω ς.

- κ. 109. Διὰ τῆς Γωνίας γ ἡχθω ἐξ παράλληλος τῇ ὑποτενέσει αβ (9). Καὶ ἐπεὶ αἱ ἐναλλὰξ ἡ καὶ κ, καὶ αἱ ἄλλαι θ καὶ λ ἴσαι (10) ἀλλήλαις εἰσὶν· αἱ δὲ τρεῖς η, ι, θ (11) δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ἀρα (12) καὶ αἱ τρεῖς ι, κ, λ δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ.

(1) Ε' ἐκτὸς. (2) Ε' ἐκτὸς. (3) Πόρ. α. (4) Ὁρ. ιδ. ιι. ις. (5) Διὰ τὸ α'. Μέρος. (6) Α' β. (7) ιγ. Βιβ. α. (8) Α' β. α. (9) λα. Βιβ. α. (10) κδ, Βιβ. α. (11) α. Πόρ. τῆς ΙΓ'. τῆς Α'. (12) Α' β. α.

Εγὼ δὲ καὶ Ἄλλως δείξω.

Ληφθήτω ἐπὶ μιᾶς τῶν Πλευρῶν, οἷον τῆς αβ, τυχὸν Σημεῖον τὸ ε, κ. 110.
 καὶ ἐπεξεύχθω ἡ γε. Διὰ μὲν οὖν τὸ Α'. Μέρος ἡ ὑπὸ γεβίτη ταῖς ὑπὸ εαγ,
 καὶ αγε· ὡσαύτως ἡ ὑπὸ γεα, ἴση ταῖς ὑπὸ εβγ, καὶ βγε. Αἱ δύο ἄρα αἱ ἐφε-
 ξῆς πρὸς τῷ ε, τρισὶ ταῖς ὑπὸ βγα, καὶ γαβ, καὶ αβγ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' ἐκεί-
 ναι δυσὶν Ὁρθαῖς (1) ἴσαι εἰσίν. Ἀρα καὶ αὗται.

Πορίσματα.

Οὐτινοσὺν εὐθυγράμμη Τριγώνῃ, αἱ τρεῖς Γωνίαι ἅμα ληφθεῖσαι, εἰ- Δ.
 σὶν ἴσαι ταῖς οὐτινοσὺν Εὐθυγράμμη τρισὶ Γωνίαις ἅμα ληφθεῖσαις.

Καὶ ἐὰν ἐν Τριγώνῳ ἡ μία Ὁρθὴ ᾖ, ἡ μείζων Ὁρθῆς· αἱ λοιπαὶ Ὁξεῖαι Ε.
 εἰσίν, ἡ δὲ Γωνία ὑφ' ἣν ἡ μὴ μεγίστη τῶν ἐν τῷ Τριγώνῳ Πλευρῶν ὑποτεί-
 νει, αἰετοτε (2) Ὁξεῖα ἐστὶ.

Μιᾶς δὲ ἐν τῷ Τριγώνῳ Ὁρθῆς ἔσης, δύο ἅμα αἱ λοιπαὶ μίαν Ὁρθὴν ς.
 συναποτελεῦσι.

Καὶ ἡ δυσὶ ταῖς λοιπαῖς ἅμα ἐν τῷ Τριγώνῳ ἴση ἔσται Γωνία, Ὁρθὴ ἔσται. Ζ.

Δοθεισῶν τῶν μοιρῶν μιᾶς τινος τῶν Γωνιῶν, φανερόν ὅσας μοίρας καὶ δύο Η.
 αἱ λοιπαὶ ἅμα συναποτελεῦσι· καὶ ἀνάπαλιν.

Ἐὰν Τριγώνῃ αἱ δύο Γωνίαι, ἥτοι ἑκατέρω ἰδίᾳ, ἡ ἅμα, Τριγώνῃ ταῖς Θ.
 δυσὶ Γωνίαις, ἥτοι ἑκατέρω ἰδίᾳ, ἡ ἅμα ἴσαι ὦσι, καὶ ἡ λοιπὴ τῇ λοιπῇ ἴση
 ἔσται. Ἐκ δὲ τούτου τῷ Πορίσματι καὶ τῆς Κς'. τὸ Β'. Μέρος ῥαδίως δείκνυται.

Δυσὶν Τριγώνων ἐὰν Γωνία Γωνία, μία μὲν ἴση ᾖ, καὶ αἱ λοιπαὶ ταῖς λοι- Ι.
 παῖς ἴσαι ἔσονται, εἴτε ἑκατέρω ἑκατέρω, εἴτε καὶ ἅμα.

Τῆς κατὰ κορυφὴν Γωνίας τῷ Ἰσοσκελεὺς ὀρθῆς ἔσης, τῶν λοιπῶν πρὸς ΙΑ.
 τὴν Βάσιν (3) ἡμίσεια Ὁρθῆς ἑκατέρω ἔσται. Καὶ τῷ Ἰσοσκελεὺς αἱ πρὸς τὴν
 Βάσιν Γωνίαι αἰετὶ ὀξεῖαι. Καὶ ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῷ Ἰσοσκελεὺς ἐπὶ τὴν Βάσιν
 ἀγομένη Κάθετος (4) ἐντὸς πίπτει τῷ Τριγώνῳ.

Ἡ τῷ Ἰσοπλεύρῳ Τριγώνῳ Γωνία, τριτημόρια δύο Ὁρθῆς μιᾶς περιέχει, ΙΒ.
 ἥτοι τριτημόριον ἐν (5) δυσὶν Ὁρθῶν· ὥστε ἐπεὶ Ὁρθαὶ δύο μοιρῶν εἰσὶν 180,
 ἔσται δὲ τριτημόριον δυσὶν Ὁρθῶν, ἥτοι ἡ τῷ Ἰσοπλεύρῳ Γωνία μοιρ. 60. Ταῦ-
 τα δὲ τριτημόριά ἐστι δύο Ὁρθῆς μιᾶς, ἥτις μοιρῶν ἐστὶν 90.

(1) 1γ. Βιβ. α. (2) 1η. Βιβ. α. (3) γ. Βιβ. α. καὶ ς. Πρότ. τῶν ἐνταῦθα. (4) Πρότ.
 γ. τῶν ἐνταῦθα. (5) Διὰ ταύτην καὶ τὸ Πρότ. τῆς Ε. Βιβλ. α.

κ. 111. ΙΓ. Ἐντεῦθεν ἡ Γωνίαν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ βαγ, τριχοτομήσαι ῥᾶδιον, Τριγώνων ἰσοπλευρον τὸ ἀδγ ἐπὶ τῆς ἐτέρας τῶν Πλευρῶν αγ (1) συστήσαντας, ἡ τὴν ὑπὸ δαγ Γωνίαν (2) δίχα τεμόντας. Τῆς γὰρ ὑπὸ δαγ δύο τριτημόρια Ὄρθῃς (3) περιεχίσεως, εὐδήλον ὅτι τῶν ὑπὸ βαδ, ἡ δαε, ἡ εαγ ἐκάσῃ Ὄρθῃς ἐστὶ τριτημόριον.

κ. 112. ΙΔ. Ἀπασῶν τῶν ἀπὸ τῆ αὐτῆς Σημείει α, ἐπίτινα Εὐθεΐαν βγ ἀχθῆναι δυναμένων Εὐθειῶν, ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ Κάθετος αδ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ αεδ Γωνία ὀξεῖα, ἡ δὲ ὑπὸ αδε ὀρθή (4)· ἡ ἡ αδ ἐλάσσων ἔσαι (5) τῆς αε ἡ οίασθαι ἄλλης.

ΙΕ. Ἀφ' ὁνός γε Σημείει ἐπὶ μίαν Εὐθεΐαν, μίαν μόνην ἐξέσαι πρὸς ὀρθὰς ἀγαγεῖν.

Ις. Διὰ δὲ τῆ Α'. Μέρους τῆς ἀνὰ χεῖρας Προτάσεως, ἡ τὴν ἀξέρων Παράλλαξιν, ταῦτέστι τὴν τῆ ἀληθῆς ἀπὸ τῆ φαινομένη τόπῃ διαφορὰν διορίζειν καταμανθάνομεν.

κ. 113. Ἐξω γῆς Κέντρον τὸ α, β δὲ ἔνθα ἔ παρατηρῶν, ἡ ἐβγ ἡ τῆ ἀξέροι γ γωνιώδης Διάσασις ἡ ἀπὸ τῆ κατὰ κορυφὴν Σημείει δ τῷ παρατηρῶντι καταρωμένη· ἔξω δὲ γωνιώδης Διάσασις ἡ ὑπὸ δαγ ἡ ἀληθῆς. Τῇ μὲν οὖν αβγ Τριγώνῃ ἡ ἐκτὸς Γωνία ὑπὸ δβγ ἡ διὰ τῆς παρατηρήσεως δεδομένη, δυσὶ ταῖς ἐντὸς ἡ ἀπεναντίον ὑπὸ βαγ, ἡ βγα ἰση (6) ἐστίν. Οὐκοῦν ἡ ὑπὸ βγα, ἐστὶ τῶν ὑπὸ ἐβγ, ἡ δαγ διαφορά. Ἐάν οὖν ἡ ὑπὸ δαγ ἡ δι' ἐπιλογισμῷ γινωσκόμενη, ἀπὸ τῆς ὑπὸ ἐβγ, ἣν ἡ παρατήρησις δίδωσιν ἀφαιρεθῇ, ἡ τέτων τῶν Γωνιῶν διαφορὰ (ἥτοι ἡ ὑπὸ βγα) ἣν Παράλλαξιν ἀποκαλῶμεν, ἔσαι κατάδηλος. Ο. Η. Ε.

ΙΖ. Φανερόν δὲ ἡ ἀπὸ τῆ Β'. Μέρους ταύτης τῆς Προτ., ὅτι παντὸς Τριγώνου αἱ δύο Γωνίαι, δύο Ὄρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, ἥτις ἦν ἡ ΙΖ'. Πρότ. ἡ εἰς τόδε τῷ Τακτερίῳ ὑπερτεθεῖσα.

κ. 114. ΙΗ. Ἐπὶ τῆ ὀρθογωνίᾳ σκαληνῇ Τριγώνῃ τῶν ὀξειῶν Γωνιῶν, ὅφ' ἦν μὲν τῶν τὴν ὀρθὴν Γωνίαν β περιεχουσῶν Πλευρῶν, ἡ μείζων βγ ὑποτείνει, ἡμισείας Ὄρθῃς μείζων ἐστὶν (ἥτοι ἡ α)· ὅφ' ἦν δὲ, ἡ ἐλάσσων βα, ἡμισείας Ὄρθῃς ἐλάσσων (ἥτοι ἡ γ). Αἱ γὰρ ὀξεῖαι Γωνίαι α ἡ γ ἅμα ληφθεῖσαι (7) Γωνίαν ὀρθὴν συναποτελῶσιν. Ἀρα ὅφ' ἦν μὲν ἡ μείζων Πλευρὰ βγ ὑποτείνει, ἡμισείας Ὄρθῃς ἐστὶ μείζων (8), ἡ α· ὅφ' ἦν δ' ἡ ἐλάττων, ἐλάττων, ἡ γ.

(1) α. Βιβ. α. (2) β. Βιβ. α. (3) Πόρ. ἀνωτ. (4) Πόρ. ε. (5) ιβ. Βιβ. α. (6) Διὰ τὴν ἀνὰ χεῖρας. (7) Διὰ τὸ ε. Πόρ. (8) ιη. Βιβ. α.

Εντεῦθεν ἡ Πύργος, ἥτοι παντὸς Σημεῖα μεταώρη τὸ ὕψος διὰ τῆς ἡλίου 10. κ. 115. σκιάς καταμετρεῖν δυνησόμεθα. Ἡλίου γὰρ ὑπὲρ τὸν ὀρίζοντα μοίραις 45 ὑψιμένοι, εἰσὶν αἱ τῶν σωμάτων σκιαί κατ' ἐπιπέδῳ προβαλλόμεναι, τῷ ἐκείνων ὕψει ἀκριβῶς ἴσαι. Ἐπεὶ διὰ τὴν ὑπὸ αβγ ὀρθήν, ἡ τὴν ὑπὸ αγκβ ἡμισίαν (1) ὀρθῆς, ἔσαι ἡ ὑπὸ βαγ ἡμισία ὀρθῆς (2). Τῶν οὖν πρὸς τὴν Βάσιν Γωνιῶν ἴσων ὕτων, αἱ Πλευραὶ αβ, βγ ἴσαι (3) εἰσονται. Καταμετρηθείσης ἄρα τῆς βγ, ἔσαι δὴλη ἡ ἡ αβ, τὸ τῇ Πύργῳ ἀπὸ τῇ ὀρίζοντος ὕψωμα.

Ἐκ δὲ διὰ τήτων ἡ Γραμμὴν ἀπρόσβατον τὴν αβ καταμετρεῖν ῥάδιον. Κ. κ. 116. Τρίγωνον γὰρ Ἰσόπλευρον τὸ τυχόν αδε, τῷ ἐπ' αὐτὸ Σημεῖω α ἡ τῇ Πλευρῇ αδ πρὸς τῷ τῆς ἀπροσβάτῃ Σημεῖω α, κατὰ τὴν αὐτὴν ὑποτεθείδω προσκειμένον. Ἀπὸ δὲ τῇ Σημεῖα α ὥσπερ Διόπτρας, διὰ Πλευρᾶς τῆς αε ὥσπερ Διόπτρας, πάντα τὰ ἐπὶ τῆς Εὐθείας αγκ Σημεῖα παρατηρεῖδω, εὐθύτε κατ' αὐτὴν κινεῖδω, ὥστε διὰ τῆς εδ Πλευρᾶς κατὰ τὴν γζ κειμένης, τὸ β τῆς ἀπροσβάτῃ ἀντικρὺ διοπτάνεσθαι· οὕτω ἡ γὰρ ἡ αγκ βατὴ τῇ ἀπροσβάτῳ αβ ἴση ἔσαι. Ἐπὶ γὰρ τῶν βαγ, δαε, κοινὴ μὲν ἡ κατὰ τὸ α Γωνία, ἴσαι δ' ἀλλήλαις αἱ κατὰ τὸ ε ἡ γ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αδε τῇ ὑπὸ αβγ, ἡ λοιπὴ (4) τῇ λοιπῇ. Ἀλλὰ τὸ αδε ὑπετέδει Ἰσόπλευρον εἶναι, ἡ ἐπομένως (5) Ἰσογώνιον· τὸ ἄρα αβγ Ἰσογώνιον, ἡ ἐκ τῇ ἀκολέδῃ (6) ἡ Ἰσόπλευρον. Ἰση ἄρα τῇ βατῇ αγκ ἡ ἀπρόσβατος αβ.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Τῇ Καλλίε τῷδε, ἡ εὐφορωτάτῃ ἐν Θεωρήμασιν, οὗ πολλὴ δι' ὅλων τῶν Μαθημάτων ἡ χρῆσις, εὐρετὴν γενέσθαι τὸν Πυθαγόραν Εὐδημος ὁ ἀρχαῖος Γεωμέτρης μάρτυς ἐστὶ· συνεχῶς δὲ τῇ αὐτῇ μέμνηται ἡ Ἀριστοτέλης, ὅς ἡ δειγμα οἶον αὐτὸ ἀκριβῶς προβάλλεται ἀποδείξεως. Ἀλλ' ὥσπερ ἐπὶ τῶν Τριπλεύρων ἔγνωμεν ἐκ τήτων τῇ Θεωρήματος, ὅσαις ὀρθαῖς αἱ πᾶσαι τρεῖς Γωνίαι εἰσὶν ἰσοδύναμοι, οὕτω ἡ ἐπὶ παντὸς Σχήματος εὐδυγράμμου, ὅσαις αἱ ἐν αὐτῷ συναποτελεῦσι Γωνίαι ὀρθαί, διὰ τῶν ἐφεξῆς τριῶν Θεωρημάτων παιδευσήσόμεθα.

Θ ε ώ ρ η μ α Α'.

„ Παντὸς Τετραπλεύρου αἱ τέτταρες Γωνίαι, τέττασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ.

— (1) Σχόλ. κγ. Βιβ. α. (2) Πόρ. γ. (3) γ. Βιβ. α. (4) Πόρ. δ. (5) Πόρ. τῆς Ε. Βιβ. α. (6) Πόρ. τῆς ε. τῇ α'.

κ. 117.

Ἐπιξευγνυμένης γὰρ διὰ τῶν ἀπεναντίον Γωνιῶν τῆς βδ, εἰς δύο Τρίγωνα τὸ Σχήμα ἀναλυθήσεται, ἐφ' ὧν ἑκατέρη αἱ Γωνίαι πᾶσαι δυσὶν (1) Ὅρθαῖς ἴσαι εἰσὶ.

Θ ε ώ ρ η μ α Β.

„Ἐπὶ παντὸς Σχήματος εὐθυγράμμου ἅπασαι αἱ Γωνίαι, δις τοσαύτας πλὴν τεττάρων, Ὅρθαὶ συναποτελεῖσι Γωνίας, ὅσαι εἰσὶν αἱ τῷ Σχήματος Πλευραί.

κ. 118.

Ἀπὸ τῆ ἐντὸς τῷ Σχήματος Σημεῖοις τυχόντος τῆ α, ἤχθωσαν ἐπὶ πάσας τὰς Γωνίας Εὐθεῖαι, εἰς τοσαῦτα τὸ Σχήμα διαμερίζουσαι Τρίγωνα, ὅσαι αἱ ἐπ' αὐτῷ Πλευραί. Ἐπεὶ οὖν ἕκαστα τῶν Τριγώνων, δυσὶν Ὅρθαῖς (2) ἴσας φέρουσι τὰς Γωνίας, πάντα πάντῃ δις τοσαύτας Ὅρθαὶ παρέξουσιν, ὅσαι αἱ τῷ Σχήματος Πλευραί. Ἀλλ' αἱ περὶ τὸ Σημεῖον α Γωνίαι (3) τέτρασιν Ὅρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ἐὰν ἄρα ἀπὸ πατῶν τῶν ἐν τούτοις Τριγώνοις Γωνιῶν, τὰς περὶ τὸ α ἀφέλῃς, δις τοσαύταις Ὅρθαῖς ἴσαι πλὴν τεττάρων, καταλειφθήσονται αἱ Γωνίαι, ὅσαι εἰσὶ τῷ Σχήματος αἱ Πλευραί.

Π ό ρ ι σ μ α.

Καὶ φανερόν ἄρα τῶν εὐθυγράμμων Σχημάτων τὰ ἰσάριθμα τὰς Πλευρὰς, καὶ ὁλικῶς εἰσιν Ἰσογώνια. Ὅπερ ἐκ ἔξω δαύματος.

Π ρ ᾱ ξ ι ς.

Τὸν τῷ Σχήματος Παρονομασίην διπλασιάσαντι, ἀπὸ τε τῷ Παραγόμενῳ τὸν ἀριθμὸν 4 ἀφελόντι, κατάλοιπος ἔσται ὁ τῶν ὀρθῶν Γωνιῶν ἀριθμὸς, αἷς αἱ ἐντὸς τῷ Σχήματος Γωνίαι συνεξισῶνται.

Θ ε ώ ρ η μ α Γ.

„Ἐπὶ παντὸς Σχήματος εὐθυγράμμου, ἅπασαι αἱ ἐκτὸς Γωνίαι τέτρασιν Ὅρθαῖς ἴσαι εἰσὶ.

κ. 119.

Αἱ γὰρ ἐφεξῆς δύο, δυσὶν Ὅρθαῖς (4) ἴσαι εἰσὶν. Ἀρα αἱ ἐκτὸς ἅμα πᾶσαι, συνάμα ταῖς ἐκτὸς ἅμα πάσαις, δις τοσαύταις Γωνίαις Ὅρθαῖς, ὅσαι αἱ τῷ Σχήματος Πλευραί, ἴσαι εἰσὶν. Ἀλλὰ καὶ αἱ ἐκτὸς ἅμα πᾶσαι (5)

(1) λβ. Βιβ. α. (2) λβ. Βιβ. α. (3) γ. Πόρ. τῆς ΙΓ. τῷ Δ'. (4) ιγ. Βιβ. α. (5) Δ'νωτ. Θέωρ. β.

συνάμα τέτταρσιν Ὁρθαῖς, δις τοσαύταις Ὁρθαῖς, ὅσαι αἱ τῷ Σχήματος Πλευραὶ, ἴσαι εἰσίν. Ἀρα αἱ ἐκτὸς μόναι (1) τέτταρσιν Ὁρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Π ό ρ ι σ μ α .

Θαυμασὸν τῷ ὄντι τετὶ τῶν Εὐθυγράμμων τὸ πάθος· ἐξ ἧ καὶ κεῖνο παρέπεται, ὅτι καὶ τὰ ὁπωσὺν τῷ εἶδει διαφέροντα ἐκτὸς εἰσὶν ὁλικῶς Ἰσογώνια, ὥστε καὶ Τριγώνου τὰς τρεῖς ἐκτὸς, ἴσας εἶναι ταῖς χιλίαις ἐκτὸς Γωνίαις τῷ χιλιογώνῳ Σχήματος. Τὸτο δὲ τὸ παράδοξον.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΓ.

„Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ Παραλλήλους (αβ, γδ) ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι Εὐθεῖαι (αγ, βδ), καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ Παράλληλοι εἰσίν.

Ἐπιζευχθεῖσης γὰρ τῆς αδ, αἴτε ὑπὸ βαδ, καὶ αδγ ἴσαι ἀλλήλαις (2) εἰσίν, αἴτε αβ καὶ γδ Πλευραὶ (3) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἥτε αδ κοινή. Ἀρα καὶ αγ (4) ἴση τῇ βδ. Ο. Η. τὸ Α'.

κ. 120.

Ἀλλὰ καὶ ὑπὸ δαγ ἴση τῇ ὑπὸ αδβ. Ἀρα καὶ αγ (5) τῇ βδ Παράλληλος εἰσίν. Ο. Η. τὸ Β'.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Ἐὰν Εὐθείαις δύο Παραλλήλους μὲν, ἀνίσως δὲ, τὰς αβ, γδ, ἐπιζευγνύωσι δύο Εὐθεῖαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη αγ, βδ, προσεβαλλόμεναι αὐταὶ αἱ ἐπιζευγνύουσαι, συμπεσάνται ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν ἡ τῶν Παραλλήλων ἐλάττων γδ. Ἐὰν γὰρ ἀπὸ τῆς μείζονος ληφθῇ (6) βε, ἴση τῇ ἐλάττωσι γδ, ἐπιζευχθῇ δὲ ἡ εγ (7), αἱ εγ, καὶ βδ ἔσονται (8) Παράλληλοι. Οὐκοῦν αἱ ὑπὸ δβε, καὶ βεγ δυσὶν Ὁρθαῖς (9)· ἀλλ' ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ βεγ, μείζων τῆς ὑπὸ (10) εαγ. Ἀρα αἱ ὑπὸ δβα, καὶ βαγ, δυσὶν Ὁρθῶν ἐλάττωτες εἰσίν. Αἱ ἄρα Εὐθεῖαι βδ καὶ αγ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο Ὁρθῶν ἐκβαλλόμεναι συμπεσάνται (11).

κ. 121.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΔ.

„Τῶν Παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον Πλευραὶ τε καὶ Γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ Διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

(1) Α' Ε. γ. (2) κβ. Βιβ. α. (3) Ε' Ε' ὑποδ. (4) δ. Βιβ. α. (5) κβ. Βιβ. α. (6) γ. Βιβ. α. (7) Α' Α. α. (8) λγ. Βιβ. α. (9) κβ. Βιβ. α. (10) ις. Βιβ. α. (11) Σχόλ. τὸ μετὰ τὴν λα. Βιβ. α.

κ. 122.

Καὶ γὰρ (1) ὑπὸ $\alpha\beta\gamma$, καὶ $\beta\gamma\delta$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ καὶ ὁμοίως ὑπὸ $\gamma\beta\delta$, καὶ $\beta\gamma\alpha$. Ἄρα (2) αἱ ὅλαι ὑπὸ $\alpha\beta\delta$, καὶ ὑπὸ $\alpha\gamma\delta$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Ὡσαύτως δειχθήσονται καὶ αἱ λοιπαὶ ἀπεναντίον α , καὶ δὲ Γωνίαι ἴσαι. Ἐπὶ μὲν οὖν τῶν $\gamma\alpha\beta$, καὶ $\gamma\delta\beta$ Τριγώνων, δυοῖν ταῖς δυοῖ Γωνίαις ἴσων δειχθεῖσων ἑκατέρας ἑκατέρᾳ, καὶ ἡ $\gamma\beta$ Πλευρὰ κοινὴ ἐστίν· ἄρα καὶ $\alpha\beta$ Πλευρὰ (3) ἴση τῇ $\gamma\delta$, καὶ $\alpha\gamma$ ἴση τῇ $\beta\delta$. Ὡς τε ἴσαι ἀλλήλαις καὶ αἱ Πλευραὶ αἱ ἀπεναντίον, καὶ ὅλον δὲ τὸ Τρίγωνον (4) ἴσον εἶναι ὅλῳ τῷ Τριγώνῳ, τὸ $\gamma\alpha\beta$, τῷ $\gamma\delta\beta$. Ο. Ε. Δ.

Π ο ρ ί σ μ α τ α .

κ. 123. Α'.

Παραλληλόγραμμον, οὗ ἡ μία τῶν Γωνιῶν ὀρθὴ οἷον ἡ α , ἐστὶν Ὁρθογώνιον, ἥτοι καὶ τὰς λοιπὰς Ὀρθὰς ἔχει. Αἱ γὰρ ἐντὸς δύο, αἱ κατὰ τὸ α καὶ γ (5) δυτὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· ἡ δὲ α Ὀρθὴ (6), ἄρα καὶ ἡ γ . Αἱ δὲ ἀπεναντίον ἴσαι (7)· ἄρα καὶ αἱ λοιπαὶ Ὀρθαὶ εἰσὶ.

Β'.

Παραλληλόγραμμοι τὰ μίαν μὲν ἴσην Γωνίαν τῶν ἐν αὐτοῖς ἕτερον πρὸς ἕτερον, ἔχοντα, καὶ τὰς λοιπὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἔξει ἐκάστην ἐκάστη, καὶ Ἰσογώνιοι ἔσσι. Δειχθήσεται δὲ ὡς καὶ τὸ ἀνωτέρω.

κ. 124. Γ'.

Κάντεῦθεν καὶ τῶν Ὀρέων τά τε ὑπὲρ τὸν Ὀρίζοντα ὕψη, καὶ τὰς ὀριζοντείας Γραμμὰς καταμετρεῖν παιδευόμεθα· οἷον ἐξω αεικλ ὀρθς Πλευρὰ, ἐπ' αὐτῆς δὲ Γνώμων μέγας, ἥ τι ἕτερον ἀντὶ Γνώμονος ὑπαργῶν, οὕτω πηγνύδω, ὡς τὴν μὲν τῷ Γνώμονος Πλευρὰν παράλληλον τῷ Ὀρίζοντι $\beta\alpha$, ἀπτεῖται τῆς κορυφῆς α , τὴν δὲ $\beta\epsilon$ πρὸς ὀρθὰς ἴσχυται. Ἐφεξῆς δὲ μεθιστάδω τὸ ὄργανον ἐπὶ Σημεῖον τῷ ϵ , κατὰ ἐδί, καὶ ἰδὲ προσωτέρω, καὶ κμλ. Ἐπεὶ γὰρ τῶν Παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον Πλευραὶ, καὶ Γωνίαι (8) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, εἰκός γε συμπληρωμένα τῷ Παραλληλογράμμῳ τὴν μὲν ἀν ἴσην εἶναι τῇ $\beta\epsilon$, τὴν δὲ ἐν, τῇ $\beta\alpha$, καὶ τὰς Γωνίας ἕδεν ἕττον· καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων Παραλληλογράμμων ὡσαύτως. Ἡ μὲν οὖν ὀριζόντειος κειμένη Πλευρὰ τῷ Γνώμονος $\beta\alpha$, δε, κτ. τὴν ὀριζόντειον Γραμμὴν τῷ ὀρθς λρ καταμετρήσει, ἡ δὲ Κάθετος τὸ ὑπὲρ τὸν Ὀρίζοντα ὕψος αρ, τοσάκις λαμβανόμεναι δηλονότι, ἴσαι γε αἱ τῷ Ὀργάνῳ ἀλλεπάλληλοι μεταξάσεις καὶ ἐφαρμόσεις.

κ. 125. Δ'.

Ἐντεῦθεν δὲ καὶ ἀστρονομικῷ Τεταρτημορίῳ χρωμένοις, Πύργῳ ὕψος καταμετρεῖται τὸ $\alpha\beta$ · ὅπερ γὰρ ἡ τῷ ὑψώματος Γωνία ἐν τῷ Τεταρτημορίῳ

(1) κδ. Βιβ. α. (2) α'ξ. β. (3) κς. Βιβ. α. (4) δ. Βιβ. α. (5) κδ. Βιβ. α. (6) ε'ξ ὑποδ. (7) λδ. Βιβ. α. (8) λδ. Βιβ. α.

ἡμίσεια εἰν Ὀρθῆς τῷ κατὰ τὸ ε παρατηρῶντι, ἀχθήτω ἡ δε πρὸς ὀρθάς ἐπὶ τὸν Ὀρίζοντα, ἰσαΰψης τῷ ἄχρῃ τῷ ὀφθαλμῷ τῷ σώματος ἀναστήματι, καὶ διὰ τῷ ὀφθαλμῷ εἰς τῇ δβ παραλληλος (1), καὶ ἔσαι πάντως τὸ εδβδ Παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον (2), καὶ Πλευρὰ ἡ βδ, Πλευρὰ τῇ δε τῷ ἀναστήματος ἴση (3), καὶ δε ἴση τῇ βδ, ἥτοι τῇ τῷ παρατηρῶντος ἀπὸ τῷ Πύργῳ ἀποστάσει. Ἐπὶ μὲν οὖν τῷ Τριγώνῳ αδε, τῆς μὲν ὑπὸ αδε Ὀρθῆς ἕσης (4), τῆς δὲ ὑπὸ αεδ ἡμισείας Ὀρθῆς (5) ὁμολογουμένης, ἔσαι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δεαε (6) ἡμίσεια Ὀρθῆς, ἥτε δε, εἰτὴν ἡ τῷ παρατηρῶντος ἀπὸ τῷ Πύργῳ ἀπόστασις, ἴση τῇ (7) δε, ἥτοι τῷ ὑπὲρ τὸν ὀφθαλμὸν τῷ Πύργῳ ὑψώματι. Τῇ γὼν δε προσεδείσης τῆς δβ, ἴσης τῇ εδ, τῷ τῷ ὀφθαλμῷ δηλονότι ὑψώματι, παρέσαι τὸ ἔλον τῷ Πύργῳ ὑψώμα, αβ.

Ἐντεῦθεν τελευταῖον καὶ Γεωδαῖται Ἀγρὸν παραλληλογράμμου αδ, τὸ Ε. κ 126. χωρίον ῥᾶς διχάζουσιν. Ἐπιζευχθεῖσης γὰρ τῆς Διαγωνίης γβ, ταύτης τε τῷ μεσαιτάτῃ Σημεῖς ε (8) ληφθέντος, ὑποκαθιστῶν Εὐθεία, οἷα ἡ εδ, διὰ τῷ Σημεῖς ε ἡγμένη τὸ χωρίον διχάζεται. Τὸ γὰρ αβγ Τρίγωνον (9) ἴσου τῷ γβδ, τὸ δὲ γεδ ἴσον τῷ βει. (δία τε τὰς ὑπὸ ηβε, καὶ δεγε (10) ἐναλλαξ ἴσας ἦσας, καὶ τὰς ὑπὸ ηβε, καὶ γεδ (11) τὰς κατὰ κορυφὴν, καὶ αὐτὰς ἴσας, καὶ τὴν γε ἴσην (12) τῇ βε) τυγχάνει (13). Ἐὰν οὖν τῷ Τραπεζίῳ αηγ, ἀντὶ Τριγώνῳ τῷ ηβε, προσθῇς Τρίγωνον τὸ γεδ, καὶ Τραπεζίῳ τῷ βεδδ, ἀντὶ τῷ εγδ, τὸ ἴσον Τρίγωνον ηβε προσθῇς, ἔσαι τὸ μὲν αηγ Τραπεζίον, ἴσου τῷ Τριγώνῳ αβγ, τὸ δὲ βηδδ, τῷ βγδ. Ἀλλὰ τὰ Τρίγωνα ἴσα. Ἀρὰ καὶ τὰ Τραπεζία. Ο. Ε. Δ.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Ἐκ τούτων δὲ τῷ Θεωρήματος καὶ τῷ ὀρίσμῳ, ὅνπερ τῷ δευτέρῳ Βιβλίῳ προτακτέον, εὐμαρῶς ἡ τῷ ὀρθογωνίῳ Παραλληλογράμμου ἐπιφέρεται καταμετρήσις· τῷ γὰρ τοιαύτῃ τὸ χωρίον πολλαπλασιασμῷ τῶν δύο προσεχῶν Πλευρῶν αβ, καὶ βγ παράγεται. Οἷον εἰν ἡ μὲν αβ ποδῶν ἢ τεττάρων, ἡ δὲ βγ ποδῶν ὀκτώ, ἀγομένων ἐπὶ 8 τῶν 4, Παραγόμενον ἔσαι τὸ ποδῶν 32 ἄθροισμα τετραγώνων, ὑφ' ὧν τὸ τῷ ὀρθογωνίῳ χωρίον καταμετρεῖται.

κ. 127.

(1) λα. Βιβ. α. (2) Ὁρ. λα. καὶ Πόρι. α. τῆς ἀνὰ χεῖρας. (3) λδ. Βιβ. α. (4) κδ. Βιβ. α. (5) Εξ ὑποδ. (6) Πόρι. γ. τῆς λαβ'. τῷ α'. (7) γλ γ. Βιβ. α. (8) ι. Βιβ. α. (9) λδ. Βιβ. α. (10) κδ. Βιβ. α. (11) ιε. Βιβ. α. (12) Εξ ὑποδ. (13) κγ. Βιβ. α.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΔΕ.

„Τὰ Παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως (αβ) ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς Παραλλήλοις (αβ, γδ) ἴσα ἄλλήλοις ἐσὶ.

κ. 128.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ αγ, βε Παράλληλοί εἰσιν, ἐμπίπτει δὲ εἰς αὐτάς ἡ γδ, ἡ ὑπὸ αγῆ, τῇ ἐκτὸς ὑπὸ βεδ ἴση (1) ἐσίν. Ἐστὶ δὲ καὶ αγ ἴση τῇ βε (2), αἶτε γε, ἡ ὑδ ἴσαι τῇ αὐτῇ τρίτῃ αβ, ἄρα ἡ (3) ἄλλήλαις. Κοινῆς δὲ προσεθείσης τῆς εη, ἔσαι (4) γη ἴση τῇ εδ. Ἀρα τὸ αγῆ Τρίγωνον, τῷ βεδ Τριγώνῳ (5) ἴσον ἐσὶ. Ἐὰν τοίνυν ἀφαιρεθῇ κοινῇ τὸ εδῆ Τρίγωνον, ἔσαι τὸ αγεδ Τραπεζίον ἴσον τῷ βδη Τραπεζίῳ (6). Κοινῇ προσεθείδω τὸ αδβ, ἡ ἔσαι τὸ αγεβ, ἴσον (7) τῷ αηδβ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Λς.

„Τὰ Παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων Βάσεων (βγ, ζη) ὄντα, ἡ ἐν ταῖς αὐταῖς Παραλλήλοις (αδ, βη) ἴσα ἄλλήλοις ἐσὶ.

κ. 129.

Ἡ μὲν βγ ἴση τῇ ζη (8)· ἡ δὲ ζη τῇ εδ (9). Ἀρα βγ ἴση (10) τῇ εδ· εἰσὶ δὲ ἡ παράλληλοι (11). Ἀρα ἡ αἱ ταύτας ἐπιζευγνύουσαι βε, καὶ γδ, ἴσαι τε εἰσὶ (12) ἡ παράλληλοι, καὶ Παραλληλόγραμμα ἄρα τὸ βεδγ (13). Πρὸς αὐτὸ δὲ τό, τε αβγδ, ἡ τὸ εζηδ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εἰσι Βάσεως, ἡ ἐν ταῖς αὐταῖς Παραλλήλοις (14) εἰσίν. Ἐκάτερον ἄρα τῷ τρίτῳ ἴσον (15) ἐσὶ, καὶ ἄλλήλοις (16) ἄρα· τὰ δὲ εἰσιν ἐπὶ ἴσων Βάσεων, ἡ τ. Ἀρα κτ. Ο. Ε. Δ.

Ἡ μὲν οὖν ΚΕ'. ἡ Λς'. ἄμφω καθόλου ἔσονται ἐν Προτά. Α': τῷ ς'. Βιβλίῳ δεικνύμεναι.

Π ο ρ ί σ μ α τ α .

Α'. Κὰν ἄρα εἰς ἄπειρον προεκτείνοιτο τὸ ἐπὶ τῆς αὐτῆς, ἥτοι ἴσης Βάσεως Παραλληλόγραμμον, ἐν ταῖς αὐταῖς Παραλλήλοις μένον, ἴσον ἐς αἰεὶ ἔσαι.

Β'. Καὶ πόλεις ἡ χῶραι παραλληλόγραμμοί τε, ἡ ἰσομεγέθεις ἄλλήλαις εἶεν ἂν χίλιοπλασίως τὴν Περίμετρον διαφέρειν.

Γ'. Καὶ Σχήματα ἰσοπερίμετρα ὅτι πλείζον τὰ Ἐμβαδὸν πολλὰκις διοίτῃσι.

Δ'. Καὶ ὅδε αἰεὶ τὰ ἴσα (ὅ τῷ Κλαβῷ ἡξίωται (17)) ἐπ' ἄλληλα ἐφαρμόσσῃσι.

(1) κδ. Ειβ. α. (2) λδ. Βιβ. α. (3) Α'ε. α. (4) Α'ε. β. (5) δ. Βιβ. α. (6) Α'ε. γ. (7) Α'ε. β. (8) Ε'ε ὑποδ. (9) λδ. Βιβ. α. (10) Α'ε. α. (11) Ε'ε ὑποδ. (12) λγ. Βιβ. α. (13) Ο'ε λδ. (14) Ε'ε κατ. (15) λδ. Βιβ. α. (16) Α'ε. α. (17) Α'ε. ε.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Ἐκ τῶν αὐτῶν δὲ Θεωρημάτων, ἡ ἡ παντός Παραλληλογράμμου γεῖθ
 ῥῆσα ληφθήσεται καταμέτρησις, πολλαπλασιαζομένης ἐπὶ τῷ ὕψει τῆς Βά-
 σεως. Τὸ γὰρ Ἐμβαδὸν τοῦ Ὀρθογωνίου γβ, ἴσα ὄντος (1) τῷ Παραλληλο-
 γράμμῳ γζ, παράγεται ὑπὸ τῆς γδ πολλαπλασιαζομένης (2) διὰ βδ, ἥτοι
 τῆς ἴσης (3) ζη.

κ. 130.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΔΖ.

„Τὰ Τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως ὄντα (βγ) ἡ ἐν ταῖς αὐταῖς
 „Παραλλήλοις (βγ, ἡ αδ), ἴσα ἄλλήλοις εἰσὶ.

Ἐκβληθείσης τῆς αδ ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη κατὰ τὰ ε ἡ ζ Σημεῖα,
 διὰ μὲν τοῦ β (4) Παράλληλος ἦχθω πρὸς τὴν αγ ἡ βε, διὰ δὲ τοῦ γ, Παράλ-
 ληλος πρὸς τὴν βδ ἡ γζ.

κ. 131.

Ἦσα οὖν ἄλλήλοις εἰσὶ τὰ γαεβ, ἡ βδζγ (5) Παραλληλόγραμμα. Καὶ
 εἰς τὸ μὲν γαεβ ἡμισυ, τὸ Τρίγωνον (6) γαβ, τὸ δὲ βδζγ ἡμισυ, τὸ Τρί-
 γωνον βδγ· τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση (7) ἴσα εἰσὶν. Ἄρα τὰ βαγ, ἡ βδγ Τρί-
 γωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως κτ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΔΗ.

„Τὰ Τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων Βάσεων ὄντα (βγ, εζ), ἡ ἐν ταῖς αὐ-
 „ταῖς Παραλλήλοις (βζ, αδ), ἴσα ἄλλήλοις εἰσὶ.

Ἐκβεβλήθω ἡ αδ ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη, καὶ διὰ μὲν τοῦ β ἦχθω ἡ βη
 Παράλληλος τῇ γα (8), διὰ δὲ τοῦ ζ, ἦχθω ἡ ζδ Παράλληλος τῇ εδ. Ἐπεὶ
 οὖν ἴσα τὰ Παραλληλόγραμμα βγαγ, ἡ εδδζ (9), εἰς δ' αὐτῶν ἡμίση (10)
 τὰ Τρίγωνα βαγ, ἡ εδζ· τὰ ἄρα (11) βαγ ἡ εδζ ἴσα ἄλλήλοις εἰσὶ. Ο. Ε. Δ.

κ. 132.

Καὶ αὗται δὲ αἱ Προτάσεις ἐν τῇ Α' τοῦ ζ. Βιβλίου καθόλου κείσονται.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Τὰ αὐτὰ δὲ κἄνταῦθα ἐπὶ τῶν Τριγώνων σημειωτέον, ἃ φθάσασιν ἀνω-
 τέρω (12) ἐπὶ τῶν Παραλληλογράμμων ἡμῖν σημειώσονται.

(1) λ. Βιβ. α. (2) Σχόλ. τῆς ΔΔ. τὸ α. Βιβλ. (3) Ὁρ. λς. (4) λ. Βιβ. α.
 (5) λ. Βιβ. α. (6) λ. Βιβ. α. (7) Δξ. ε. (8) λ. Βιβ. α. (9) λ. Βιβ. α. (10)
 λ. Βιβ. α. (11) Δξ. ε. (12) Πόρ. μετα τὴν λς.

Π ό ρ ι σ μ α .

- κ. 133. Ἐντεῦθεν δὲ καὶ Τρίγωνον τὸ τυχὸν χωρίον αβγ ἐπὶ τῶν ἀγρῶν ῥᾶς α τοῖς Γεωδαίταις διχάζεται, τῆς μὲν Βάσεως αγ δίχα τεμνομένης, Εὐθείας δὲ τῆς βδ ἐπιζευγυμένης. Τὰ γὰρ αβδ, εἰ δβγ Τρίγωνον ἰσοῦψῆτε ὄντα, εἰ ἴσας ἔχοντα τὰς Βάσεις (1), ἴσα ἀλλήλοισι ἐσὶ, διὰ τὴν ἀνωτέρω.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΘ.

- κ. 134. „Τὰ ἴσα Τρίγωνα (βαγ, βδγ) τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως (βγ) καὶ „ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς Παραλλήλοις (βγ, αδ) εἰσὶ.
Εἰ μὴ γάρ, ἔσω Παράλληλος ἡ αε, προηγμένης (2) βδ, ἢ γῆν ἢ αζ, εἰ ἐπιζευχθῆτω ἡ εγ, ἢ γῆν ἢ ζγ (3)· εἰ ἔσαι ἄρα τὸ βεγ, ἢ τὸ βζγ ἴσον (4) τῷ βαγ. Ἀλλὰ εἰ τὸ βδγ ἴσον (5) τῷ βαγ. Ἀρα (6) τὸ βεγ, ἢ τὸ βζγ ἴσον ἔσαι τῷ βδγ· τὸ ὅλον τῷ μέρει, ἢ γῆν τὸ μέρος τῷ ὅλῳ. Τὸ δὲ ἀδύνατον (7)· οὐδ' ἡ αε ἄρα ὑπὲρ τὴν αδ, οὐδ' ἡ αζ ὑπὸ τὴν αδ Παράλληλος ἐσὶ τῇ βγ. Καὶ Παράλληλος ἄρα ἡ αδ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Μ.

- κ. 135. „Τὰ ἴσα Τρίγωνα (βαγ, δεζ) τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων Βάσεων (βγ, δε) ὄν- „τα, εἰ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς Παραλλήλοις εἰσὶ.
Εἰ μὴ γάρ, ἢ χδω (8) διὰ τῆς α Παράλληλος ἡ αθ, προσεβληθείσης τῆς δε κατὰ τὸ θ, ἢ ακ, καὶ ἐπεζεύχθω (9) ἡ θζ, ἢ γῆν ἢ κζ· καὶ ἔσαι ἄρα τὸ θθζ, ἢ τὸ δκζ ἴσον (10) τῷ βαγ. Ἀλλὰ εἰ τὸ δεζ ἐστὶν ἴσον (11) τῷ βαγ. Ἀρα (12) τὸ θθζ, ἢ γῆν τὸ δκζ ἴσον ἐσὶ τῷ δεζ, τὸ ὅλον τῷ μέρει, ἢ γῆν τὸ μέρος τῷ ὅλῳ· τὸ δὲ ἀδύνατον (13). Οὐδ' ἡ αθ ἄρα, οὐδ' ἡ ακ, οὐδ' ἐτέρατις, ἀλλ' ἡ μόνη ἡ αε Παράλληλος ἐσὶ πρὸς τὴν βζ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΜΑ.

- „Εὰν Παραλληλόγραμμον (τὸ αβγδ) Τριγώνῳ (τῷ βεγ) Βάσιν τε ἔχη „τὴν αὐτὴν (βγ), εἰ ἐν ταῖς αὐταῖς Παραλλήλοις ἢ (αε, βγ), διπλάσιον ἔσαι „τὸ Παραλληλόγραμμον τῷ Τριγώνῳ.

(1) Ε'κ Κετ. (2) λα. Βιβ. α. (3) Α'τ. α. (4) λζ. Βιβ. α. (5) Ε'ξ ὑποθ. (6) Α'ξ. α. (7) Α'ξ. β. (8) λα. Βιβ. α. (9) Α'τ. α. (10) λη. Βιβ. α. (11) Ε'ξ ὑποθ. (12) Α'ξ. α. (13) Α'ξ. β.

Επιζευχθείσης τῆς αγ (1), τὸ βαγ Τρίγωνον (2) ἴσον τῷ βεγ. Ἀλλὰ κ. 136.
τὸ αβγδ (3) διπλάσιον τῷ βαγ, ἄρα (4) ἔ τῷ βεγ. Ο. Ε. Δ.

Πορίσματα.

Τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ἐτέρας τῶν τῷ Παραλληλογράμμῳ Πλευρῶν ὡς ἐπὶ Βά- 4. κ. 137.
σεως αβ συνεσθός, ἔ ἐπὶ τὴν ἀπεναντίον ἐκείνη γδ Πλευρὰν τῇ κορυφῇ ε προσ-
πίπτει αβ Τρίγωνον, ἡμίσειά ἐστι τῷ Παραλληλογράμμῳ αβδγ.

Καὶ ἐὰν ἀπὸ τῷ μεσαιτάτῃ Σημείῳ γ, μιᾶς τῶν Πλευρῶν αβ τῷ Πα- 5. κ. 138.
ραλληλογράμμῳ, ἐπὶ τινα τῶν ἐφ' ἑτέρα τὰ μέρη Γωνιῶν δ, ἐπιζευχθεῖν ἡ
γδ, Τρίγωνον συστήσεται τὸ γδβ, τῷ Παραλληλογράμμῳ τεταρτημόριον.

Ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ ἐπὶ τῆς ἡμισείας τῆς Πλευρᾶς ὡς Βάσεως, ἐπὶ τὴν Γ'. κ. 139.
ἀπεναντίον περατῶμενον, τεταρτημόριον ἐστὶ τῷ Παραλληλογράμμῳ Τρί-
γωνον.

Σχόλιον.

Εἵκοτε τῆς προκειμένης, καὶ τῷ προσημμένῳ τῇ Λε'. Σχολίῳ, φανερόν κ. 140.
ὅτι παντὸς Τριγώνου αβγ τὸ Εἰμβάδον παράγεται πολλαπλασιασμῷ τῷ ὕψους
βδ διὰ τῆς ἡμισείας τῆς Βάσεως αγ, ἢ γυν πολλαπλασιασμῷ τῆς Βάσεως αγ,
διὰ τῆς ἡμισείας τῷ ὕψους βδ. Καὶ ἐὰν ἄρα δοθῇ μία, ἡτις ἐν τῷ Τριγώνῳ Πλευ-
ρὰ, ἢ προσέτι τὸ τῷ αὐτῷ ὕψους, τετέστιν ἢ ἀπὸ τῆς ἀπεναντίον Γωνίας ἐπὶ
τὴν δοθεῖσαν Πλευρὰν, ἤν γε δὲ προαχθεῖται Κάθετος, ῥαδίον ἔσαι τὴν
ἀκριβῆ τῷ Τριγώνῳ λαβεῖν καταμέτρησιν. Οἷον ἐὰν ἡ μὲν Βάσις αγ ποδῶν ἢ
100, τὸ δὲ ὕψος βδ ποδῶν δὸς εἰπέιν 85, πεπολλαπλασιάσω 50 διὰ 85,
καὶ προκύψουσι 4250 Πόδες τετράγωνοι, ὑφ' ὧν τὸ Εἰμβάδον τῷ αβγ Τριγώνῳ
συναπαρτίζεται. Τὸ δὲ δὴ ὕψος, ἢτοι ἡ Κάθετος βατῶ μὲν ὄντος τῷ Τριγώνῳ,
ἐδὲν ἦττον ἢ αἱ Πλευραὶ, μηχανικῶς ἡμῖν ἐπιγνωθήσεται, ἀβάτη δὲ, γεω-
μετρικῶς διὰ τῆς IB. ἢ τῆς IG'. τῷ Β'. Βιβλίῳ (ὡς ἐν τῷ ἐκείνῳ Σχολίῳ)
ἔσαι κατάδηλον.

Επὶ τῷ ὀρθογωνίῳ Τριγώνῳ, τὸ ὕψος διατέρα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν Γω-
νίαν Πλευρῶν ταυτίζεται. Εὐθεντοὶ ἔ ταύτης ἢ ἡμίσεια τῇ ἐτέρᾳ ὅλη πολ-
λαπλασιασθεῖσα, τὸ Εἰμβάδον τῷ Τριγώνῳ παρέξεται.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΜΒ.

„Τῷ δοθέντι Τριγώνῳ (αγβ) ἴσον Παραλληλόγραμμον (δεζβ) συστή-
„σασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ Γωνίᾳ (θ).“

κ. 141.

Βάσιν τὴν αβ δίχα τεμών (1) κατὰ τὸ δ, ἢ πρὸς τῷ δ Σημεῖω τῇ δο-
θείσῃ Γωνίᾳ θ, ἴσην θέμενος (2) τὴν ὑπὸ εδβ, ἀγαγόντες διὰ μὲν β Πα-
ράλληλον τῇ δε, διὰ δὲ γ Παράλληλον (3) τῇ αβ, ἔξεις τὸ δεζβ Πα-
ραλληλόγραμμον, ἢ ἐν Γωνίᾳ ἴση τῇ δοθείσῃ (4) συνεχὸς, καὶ δὴ καὶ
(ἐπιζευχθεὶς τῆς (5) γδ) διπλασίον (6) τῷ Τριγώνῳ βγδ· κἄντεῦθεν καὶ
ἴσον (7) τῷ βαγ, διπλασίονι ἢ αὐτῷ (8) τῷ βγδ πεφυκότι.

Π ό ρ ι σ μ α.

κ. 142.

Δοθέντι τῷ αγβ Τριγώνῳ ἔξῃσαι λαβεῖν ἢ ἴσον Ὁρθογώνιον, ἄχ-
θείσης μὲν διὰ γ Παραλλήλου (9) τῇ αβ, δίχα δὲ τμηθείσης τῆς αβ (10)
κατὰ τὸ ζ, καὶ ἀπὸ τῷ β Καθέτε (11) ἄχθείσης τῆς βε· τὸ γὰρ ὑπὸ
ζβ, ἢ βε ἔσαι τὸ ζητέμενον.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΜΓ.

„Παντός Παραλληλογράμμου (αβγδ) τῶν περὶ τὴν Διάμετρον (αγ)
„Παραλληλογράμμων (ηζ, εθ), τὰ Παραπληρώματα (κβ, κδ) ἴσα ἀλλή-
„λοις ἐσὶ.“

κ. 143.

Τὰ γὰρ αδγ, ἢ αβγ Τρίγωνα ἴσα (12) ἀλλήλοις ἐσὶν, ὡσαύτως δὲ
ἢ κζγ ἴσον κηγ, ἢ αδκ ἴσον ακε· εἰν οὖν ἀπὸ τῶν ἴσων ἀφείλης τὰ ἴσα,
λοιπὸν τὸ κδ, λοιπῷ τῷ κβ (13) ἴσον ἔσαι.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΜΔ.

„Παρά τὴν δοθεῖσαν Εὐθείαν (αβ) τῷ δοθέντι Τριγώνῳ (γ) ἴσον Πα-
„ραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν τῇ δοθείσῃ Γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ (δ).“

κ. 144.

Συνεσάδω Παραλληλόγραμμον (14) τὸ ηθ ἴσον τῷ δοθέντι Τριγώνῳ
γ, ἐν Γωνίᾳ δοθείσῃ τῇ ὑπὸ ηδθ, ἢ προαχθῆτω ἐπ' εὐθείας τῇ θδ (15)
ἢ δε ἴση (16) τῇ δοθείσῃ αβ. Ἐξαχθῆτω δὲ ἢ ἢ κη κατὰ τὸ συνεχές,

(1) ι. Βιβ. α. (2) κγ. Βιβ. α. (3) λα. Βιβ. α. (4) Ε'κ κατ. (5) Α'τ. α. (6)
μα. Βιβ. α. (7) Α'ξ. γ. (8) λη. Βιβ. α. (9) λα. Βιβ. α. (10) ι. Βιβ. α. (11) ιβ.
Βιβ. α. (12) λδ. Βιβ. α. (13) Α'ξ. γ. (14) κβ. Βιβ. α. (15) Α'τ. β. (16) γ. Βιβ. α.

ἐξ δὲ τῶ ε ἤχθω εζ Παράλληλος (1) τῇ δὲ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ (10) ζθ, ἐξ προσεβληθῶ ὥς συμπεσεῖν (*) τῇ κθ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ λ. Καὶ διὰ τῶ λ ἄχθῆτω Παράλληλος (2) τῇ θε ἡ λμ, ἐξ ταύτῃ συμπιπτεύωσαν αἱ ηδ, ζε προσεβληθείσαι κατὰ ν ἐξ μ (συμπεσῶνται δὲ πάντως, ἅτε δὲ ἀπ' ἐλαττώσεων, ἡ δύο Ὁρθῶν, τῶν ὑπὸ λδν, ἐξ λζμ, μετὰ τῆς ὑπὸ ζλμ, ἐκβληθόμεναι (3))· φημί δὲ τὸ δμ Παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ ζητούμενον.

Καὶ γὰρ τὸ δμ ἴσον τῷ δκ (4)· ἀλλὰ δκ ἴσον τῷ δοθέντι Τριγώνῳ (5) γ. Αῖρα ἐξ δμ, ἴσον (6) τῷ Τριγώνῳ γ. Συνέσῃ δὲ ἐξ Γωνία ἡ ὑπὸ θδῃ ἰση (7) τῇ δοθείσῃ Γωνία δ· ἡ δὲ ὑπὸ νδε ἰση τῇ θδῃ (8). Αῖρα ἐξ ἡ ἐν τῷ παραβεβλημένῳ Παραλληλόγραμμῳ Γωνία ὑπὸ νδε, ἰση ἐστὶ τῇ δοθείσῃ (9) Γωνία δ. Ἡ δὲ Πλευρὰ δε, ἰση (10) ἐξ αὐτῇ τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ αβ. Αῖρα κτ. Ο. Ε. Π.

Π ό ρ ι σ μ α .

Εἰς δὲ τάδε φανερόν, πῶς ἂν εἴη ἐξ παρὰ τὴν δοθείσαν Εὐθείαν παραβαλεῖν ἴσοντες, ἐξ ἰσογώνιον τῷ δοθέντι Παραλληλόγραμμον.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Εἰς τῆς Προτάσεως καὶ τῶ προσεζέντος Πορίσματος, τὴν γεωμετρικὴν κ. 145.
Διαιρέσιν εἰς τις ἐστὶ διδασκόμεθα. Καθάπερ γὰρ τὸν διὰ Πολλαπλασιασμῶ Παραγόμενον ἀριθμὸν, δίκην Ὁρθογωνίᾳ τινὸς εὐλόγως θεωρῶμεν, οὗ δύο αἱ τυχεῖσαι προσσεχεῖς Πλευραὶ εἰσιν οἱ Παράγοντες (11), οὕτως ἡμῖν ἐξ ἀντι μὲν Διαιρετέων τὸ Ὁρθογώνιον κείσεται, ἀντὶ δὲ τῶ Διαιρέτε ἐξ τῶ Πηλίκου, αἱ περὶ ἐκάστην τῶν Γωνιῶν Πλευραὶ προσληφθήσονται. Εἴπει δὲ τὸν κείμενον Διαιρετέον ἀριθμὸν, διαφέρουσι τοῖς Διαιρέταις μερίζοντες, διαφέροντα ἐξ τῶ Πηλίκου πορίζόμεθα· διὰ τῶτο δὲ ἐξ Ὁρθογωνίου χωρίου δοθέν, τῇ τυχεύτῃ Εὐθείᾳ, ὡς Πλευρᾷ παραβαλεῖν δυνησόμεθα, ἢ πρὸς ὀρθὰς ἐτέρατις ἐπικείσεται, ἀντὶ τῶν Πλευρῶν τῆς ἐτέρας. Οἷον ἔσω Ὁρθογώνιον τὸ αβ, ἐκ δυοκαίδεκα τετραγώνων ποδῶν συνιστάμενον, ὃ Πλευρὰ ἡ μὲν ἀγ τριποδιαία, ἡ δὲ αε τετραποδιαία. Εἴσω δὲ ἰσομέγεθες Ὁρθογώνιον παρὰ Πλευρὰν διποδιαίαν (ἣτις ἀντὶ Μερικῆ εἶσαι) παραβαλεῖν, ὡς ἐντεῦθεν Πλευρὰν ἐτέραν ἀναφανῆναι, ἥτ. ε. ἂν ὡς Πηλίκον λογίζοιτο. Εἰς τῆς αε προαχθείσης εὐλήφθω

(1) λα. Βιβ. α. (2) Αἴτ. α. (*) Θεώρ. πρὸ τῆς λβ'. (3) λα Βιβ. α. (4) Θεώρ. πρὸ τῆς λβ'. (5) μυ. Βιβ. α. (6) Εἰς Κατ. (7) Αἴ. α. (8) Εἰς κατ. (9) ιι. Βιβ. α. (10) Αἴ. α. (11) Εἰς κατ.

Γραμμὴ διποδιαία ἢ εδ, παρ' ἣν παραβεβλήσω (1) Ὁρθογώνιον τὸ εη ἴσον τῷ αβ. Οὕτω γὰρ ἡμῖν καὶ ἡ ἑτέρα τῇ Ὁρθογωνίᾳ Πλευρὰ προκύψει ἢ εἰ ἑξα-
 πωδιαία, ἥτις ἔσσι Πηλίκον τὸ ζητούμενον. Ἐπειδὴ δὲ διὰ τὰ Παραλληλόγραμ-
 μα βδ αἰ, αἱ Εὐθεΐαι βδ, αε ἴσαι εἰσὶ ταῖς Εὐθεΐαις εδ, ζι (2) ἑκατέρω
 ἑκατέρω, εἰς Πρᾶξιν ἄλλας ἔσαι, ἐὰν ἐπὶ τῆς γβ προεχθῇ ληφθῇ ἢ βδ
 διποδιαία, καὶ διὰ τῶν Σημείων δ καὶ ε ἄχθῃ Εὐθεΐα ἢ δε κατὰ τὸ συνεχὲς προ-
 εμβαλλομένη, ὥστε συμπεσεῖν (3) τῇ Εὐθεΐᾳ γα κατὰ τὸ συνεχὲς προεμβαλ-
 λομένη ἐπὶ τὸ ζ· ἔσαι γὰρ ἡ αζ Εὐθεΐα ἢ ζητούμενη. Τὸ δὲ τῆς τοιαυτῆς
 Διαίρεσεως εἶδος Παραβολὴ ἦκυσε, τῇ Ὁρθογωνίᾳ χωρὶς αβ (ἢ τῇ ἴσῃ ἐκεί-
 νῃ εη) παρὰ τὴν Εὐθεΐαν βδ (ἥτοι τῇ ἴσῃ εδ) παραβαλλομένη. Τάδε δὲ ἐνε-
 κα καὶ ἡ Διαίρεσις Παραβολὴ τὰ πολλὰ ἐξωνόμασαι τοῖς ἀρχαιοτέροις Γεωμέ-
 τραις, οἱ καὶ τὴν διὰ Κανόνος καὶ Διαβήτης Γεωμετρικὴν κατασκευὴν, τῆς ἐν ἀριθ-
 μοῖς δι' ἐπιλογισμῶν τελευμένης, προσφυσζέραν ᾤοντο τυγχάνειν καὶ κρείττονα.

Π ρ ό τ α σ ι ς Μ Ε.

„Τῷ δοθέντι Εὐθύγραμμῳ (βαγ) ἴσον Παραλληλόγραμμον συστήσασθαι,
 „πρὸς τὴν δοθεῖσαν Εὐθεΐαν (ιπ) καὶ ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθύγραμμῳ Γωνίᾳ (θ).

κ 146.

Ἀναλελύδω τὸ Εὐθύγραμμον, εἰς Τρίγωνον ὅσα ἂν ὀνόντε ἦ, τὰ φ,
 χ, ψ· παρὰ δὲ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεΐαν ιπ (4) Παραλληλόγραμμον παραβε-
 βλήσω τὸ ιυ, ἐν τῇ κατὰ τὸ ι Γωνίᾳ ἴσῃ τῇ δοθείσῃ θ, ἴσον τῷ Τριγώνῳ
 φ. Ὡσαύτως παρὰ τὴν ρυ παραβεβλήσω τὸ ρσ ἴσον τῷ Τριγώνῳ χ, καὶ
 παρὰ τὴν τσ τὸ τω, ἴσον τῷ Τριγώνῳ ψ. Φημί δὲ ὅτι τὸ ιω Παραλληλό-
 γραμμον ἐστὶ τὸ ζητούμενον. Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ υρτ, ἴσῃ τῇ κατὰ τὸ ι, ἴσαι
 γὰρ ἄμφω τῇ δοθείσῃ (5), ἡ δὲ κατὰ τὸ ι καὶ ἡ ὑπὸ ιρυ δυσὶν Ὁρθαῖς (6) ἴσαι
 εἰσὶ, καὶ αἱ ὑπὸ ιρυ, καὶ υρτ δυσὶν Ὁρθαῖς (7) ἴσαι ἔσονται, καὶ ἐπομένως αἱ
 ιε καὶ τε (8) ἐπ' εὐθείας ἔσονται κείμεναι. Παραπλησίως δὲ δειχθήσονται καὶ
 αἱ ρτ, καὶ λτ ἐπ' εὐθείας κείμεναι, ὥστε μίαν εἶναι Εὐθεΐαν τὴν ιλ. Πάλιν αἱ
 ὑπὸ τρυ, καὶ συρ (9) δυσὶν Ὁρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ τρυ καὶ ιρυ δυσὶν
 Ὁρθαῖς ἴσαι εἰδείχθησαν, ἐὰν ἄρα κοινὴ ἀφαιρεθῇ ἡ ὑπὸ τρυ, ἔσαι ἡ ὑπὸ
 συρ (10) ἴσῃ τῇ ὑπὸ ιρυ. Κοινὴ προσθήσω ἡ ὑπὸ ρυπ, καὶ ἔσονται αἱ ὑπὸ
 ιρυ καὶ ρυπ, ἴσαι ταῖς ὑπὸ συρ, καὶ ρυπ (11). Ἀλλ' ἐκείναι δυσὶν Ὁρθαῖς (12)

(1) Διὰ τὸ ἀνωτ. Πόρισμα. (2) λδ. Βιβ. α. (3) Πόρ. α τῇ Σχολίᾳ τῇ μετὰ τὴν
 ΛΑ. Πρότ. (4) κδ. Βιβ. α. (5) Α'ξ. α. καὶ ἐκ Κατ. (6) κδ. Βιβ. α. (7) Α'ξ. β. (8)
 ιδ. Βιβ. α. (9) Ε'κ κατ. καὶ κδ. Βιβ. α. (10) Α'ξ. γ. (11) Α'ξ. β. (12) κδ. Βιβ. α.

ἴσαι εἶσιν, ἄρα καὶ αὐταὶ αἱ ὑπὸ συρ, καὶ ρυπ (1) δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ. Καὶ κεῖνται ἄρα ἐπ' εὐθείας, καὶ (2) αἱ πυ, καὶ συ. Ὡσαύτως δὲ δείξω καὶ τὰς υσ, ὡς ἐπ' εὐθείας εἶναι κείμενας, ὥς καὶ τὴν πω μίαν Εὐθείαν εἶναι. Ἐπειδὴ ἢ ἡ μὲν ιρ ἴση τῇ πυ, ἢ δὲ ρτ ἴση τῇ υσ, ἢ δὲ τλ ἴση τῇ σω (3). ἄρα καὶ ὅλη ἡ ιλ (4) ἴση ὅλῃ τῇ πω ἐστίν. Ἀλλὰ μὲν καὶ αἱ ὑπὸ λιπ καὶ ιπω δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι (εἰσὶ γὰρ αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῷ Παραλληλογράμῳ φ) (5) εἰσίν. Ἄρα αἱ ιλ καὶ πω παράλληλοι εἰσίν (6). Ἐδείχθησαν δὲ καὶ ἴσαι αἱ ἄρα ιπ καὶ λω (7) καὶ ἴσαι, καὶ Παράλληλοι εἰσὶ· καὶ ἔστιν ἄρα τὸ πλ Παράλληλόγραμμον. Ἀλλ' ἔστι δὴ τὸ μὲν φ Παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ φ Τριγώνῳ, τὸ δὲ χ τῷ χ, τὸ δὲ ψ τῷ ψ (8). Ἄρα καὶ τὸ ὅλον Παραλληλόγραμμον πλ, τῷ ὅλῳ Εὐθυγράμῳ βαγ (9) ἴσον ἐστίν. Περὶ βλήθη δὲ τὸ Παραλληλόγραμμον καὶ παρὰ τὴν δοθείσαν Εὐθείαν τὴν ιπ, καὶ ἐν Γωνίᾳ τῇ κατὰ τὸ ι, ἴση τῇ δοθείσῃ θ, γέγονεν ἄρα Ο. Ε. Π.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Ἐκ δὲ ταύτης τῆς Προτάσεως καταφανές, καὶ πῶς ἔσται Παραλληλόγραμμον ἐν τῇ δοθείσῃ Γωνίᾳ συστήσασθαι, ἴσον δυσὶν ἢ πλείοσιν Εὐθυγράμμοις ἅμα ληφθεῖσι.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἐξεύροι δ' ἄντις καὶ τὴν ὑπεροχὴν εὐμαρῶς ἐντεῦθεν, ἢ Εὐθυγράμῳ Εὐθύγραμμον ὑπερέχεται τῷ μείζονι τὸ ἔλαττον· ἀμέλειτοι εἰάν παρὰ τὴν αὐτὴν Εὐθείαν ιπ, καὶ ἐν τῇ αὐτῇ Γωνίᾳ πιλ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη παραβάλλοι ἑκατέρῳ ἴσον Παραλληλόγραμμον· ὃ γὰρ Παραλληλογράμῳ τὸ μείζον ὑπερέχει τὸ ἔλαττον, ἢ τῶν Εὐθυγράμμων διαφορὰ ἔσται. Ο. Η. Ε.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Κείθω δ' ἐνταῦθα καὶ τὸ ἐφεξῆς Πρόβλημα, ὡς πάντῳ ὠφέλιμον ἐσόμενον ἐπὶ Πράξει τῆς ἐν τῷ Β'. Βιβλ. ΙΔ'. Προτάσεως.

Π ρ ό β λ η μ α.

„Τῷ δοθέντι Τετραπλεύρῳ μὴ ὀρθογώνῳ (εζ) ἴσον Ὀρθογώνιον καταγράψαι.

(1) Α'ξ. κ. (2) ἰδ. Βιβ. κ. (3) λδ. Βιβ. κ. (4) Α'ξ. β. (5) κδ. Βιβ. κ. (6) κη. Βιβ. κ. (7) λγ. Βιβ. κ. (8) Ε'κ κατ. (9) Α'ξ. κ. καὶ δ.

α. 147. Ἀναλελύσθω εἰς Τρίγωνον, Εὐθείας (1) ἐπιζευχθείσης τῆς αγ, τὸ δοθὲν Τετράπλευρον. Ἀπὸ δὲ τῶν ἀπεναντίον Γωνιῶν, πρὸς ὁρθὰς ἤχθωσαν ἐπ' αὐτὴν αἱ βξ, ζι (1)· ἐ δόχῃα τετμήσθω ἡ αγ (3) κατὰ τὸ σ· ἀπὸ δὲ τῷ σ, Κάθετος ἀχθῆτω ἡ σλ (4) ἴση δυσὶ ταῖς βξ, ἐ ζι (5). Τὸ γὰρ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ λσ ἐ σα, ἴσον ἔσται τῷ δοθέντι Τετραπλεύρῳ βζ.

Ἡ δειξίς σαφὴς ἐκ τῆς ΜΑ'. καὶ τῇ μετ' αὐτὴν Σχολίῳ, ἣν ἐ μετὰ τὴν Α'. Πρὸτ. τῷ Β'. Βιβλ. διὰ τῷ ἐκείτῃ Πορίσματος εὐρήσεις ἐκτεθειμένην.

Π ρ ό τ α σ ι ς Μς.

„Ἀπὸ τῆς δοθείσης Εὐθείας (αβ) Τετράγωνον ἀναγράψαι.

α. 148. ἤχθωσαν πρὸς ὁρθὰς ἀπὸ τῶν α καὶ β περάτων (6) ἴσαι τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ (7) αβ, αἱ αγ, βε, καὶ ἐπεξεύχθω (8) ἡ γε. Ἐπεὶ οὖν αἱ κατὰ α ἐ β εἰσιν (9) Ὀρθαί, Παράλληλοι (10) ἔσονται αἱ αγ, βε· ἀλλὰ καὶ ἴσαι (11). Οὐκὼν ἐ γε ἡ ἐπιζευγνύουσα Παράλληλός ἐστι (12) πρὸς τὴν αβ, ἐ δὴ ἐ ἴση, ὥστε τὸ Σχήμα Ἰσόπλευρον· ἀλλὰ ἐ αἱ γ ἐ ε, ἀπ' ἐναντίον οὔσαι, ταῖς β ἐ α Γωνίαις ἴσαι (13) εἰσὶ, ἐ ἐπομένως Ὀρθαί. Ἄρα ἐ ὁρθογώνιον τὸ Σχήμα, ἧτοι (14) Τετράγωνον. Ο. Ε. Π.

Σ χ ό λ ι ο ν .

α. 149. Οὕτως εὐμαρῶς καὶ Ὀρθογώνιον συστήσεις ἐπὶ τῆς δοθείσης αβ, ὑπὸ δυσὶν τῶν αβ ἐ αγ περιεχόμενον, τὰς αγ ἐ βδ ἴσαι τῇ δοθείσῃ πρὸς ὁρθὰς ἀγαγών, ἐ τὴν γδ ἐπιζεύξαις.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΜΖ.

„Ἐν τοῖς ὁρθογωνίοις Τριγώνοις (αβγ) τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν Γωνίαν ὑποτείνουσας Πλευρᾶς (αγ) Τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν Γωνίαν περιεχουσῶν Πλευρῶν (αβ, γβ) Τετραγώνοις.

α. 150. Ἐπεξεύχθωσαν (15) αἱ ιγ, βζ, ἐ ἤχθω βε (16) Παράλληλος τῇ αζ· Ἐὰν οὖν ταῖς ὑπὸ ιαβ, ζαγ Ὀρθαῖς ἔσταις, ἐ ἴσαις, προσεθῇ καινὴ ἡ ὑπὸ βαγ, ἔσονται αἱ ὅλαι (17) ὑπὸ ιαγ, ζαβ ἴσαι ἀλλήλαις. Εἰσὶ δὲ ἐπὶ τῶν

(1) Αἱτ. α. (2) ιβ. Βιβ. α. (3) ι. Βιβ. α. (4) ιβ. Βιβ. α. (5) γ. Βιβ. α. (6) ια. Βιβ. α. (7) γ. Βιβ. α. (8) Αἱτ. α. (9) Ἐκ κατ. (10) κη. Βιβ. α. (11) Ἐκ κατ. (12) λγ. Βιβ. α. (13) λδ. Βιβ. α. (14) Ὀφ. λβ. (15) Αἱτ. α. (16) λα. Βιβ. α. (17) Αἱτ. β.

Τριγώνων ιγα, ἢ βζ, ἢ αἱ δύο Πλευραὶ αἱ ια, καὶ αγ, ἴσαι ταῖς δυσὶ Πλευραῖς βα (1) ἢ αζ, αἱ περιέχουσαι τὴν ἰσην Γωνίαν ταῖς περιεχούσαις, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· ἄρα τὰ Τρίγωνα ιγα, καὶ βζα (2) ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ. Ταῦτα δὲ ἐπεὶ μετὰ τῶν Παραλληλογράμμων αβλι, ἢ ψαζε, ὑφίστηκεν ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως αἱ, ἢ αζ, ἢ εἰσὶ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς Παραλληλοῖς ταῖς αἱ, γλ, ἢ ταῖς αζ, βε, τῶν Παραλληλογράμμων (3) αὐτῶν ἡμίση εἰσὶ. Τὰ ἄρα Παραλληλόγραμμα αβλι, ἢ ψαζε (4) ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ. Τῷ δ' αὐτῷ λόγῳ Εὐθείων ἀχθείων τῶν αφ, ἢ βρ, δείξομεν ἢ τὰ Παραλληλόγραμμα εγ, καὶ βφ, ἴσα ἀλλήλοις ὄντα. Τὸ ὅλον ἄρα αρ, δυσὶ τοῖς βι, ἢ βφ ἴσον ἔσται. Ο. Ε. Δ.

Ἐλήφθη τὴν λβγ Παράλληλον εἶναι τῇ ια, ἥτοι τὰς λβ, ἢ γβ ἐπ' εὐθείας κειμένας ἀλλήλαις Εὐθεῖαν μίαν συναποτελεῖν. Τὺτο δὲ δῆλον (5) τῶν ὑπὸ λβα, ἢ αβγ Ὀρθῶν ὡσὼν καδ' ὑπόθεσιν.

Πορίσματα.

Ὀρθογωνίᾳ ἄρα ἢ Ἰσοσκελεῖ τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτείνουσας τὴν ὀρθὴν Γωνίαν Α' Τετράγωνον, διπλάσιον τῷ ἀπὸ τῆς σκέλης.

Καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Διαγωνίης, διπλάσιον τῷ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς τῇ Τετραγώνῳ. *

Καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραπλάσιον τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας. Ἐπὶ γὰρ Γ' * α. 151. τῷ Ἰσοσκελεῖ Ὀρθογωνίᾳ αβγ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς Γωνίας β Καθέτε ἀχθείσης τῆς βε (6), ἢ ὑπὸ εβγ ἡμίσειά ἐστιν Ὀρθῆς· ἀλλὰ ἢ ἢ ὑπὸ βγα ἡμίσεια ἢ αὐτὴ (7) ἐστιν Ὀρθῆς. Τὸ ἄρα βεγ Ἰσοσκελεές (8) ἐστιν· ἐστὶ δὲ ἢ Ὀρθογώνιον (9). Ἄρα τὸ ἀπὸ βγ Τετράγωνον, διπλάσιον ἐστὶ (10) τῷ ἀπὸ εγ Τετραγώνῳ. Ἀλλ' ἢ εγ ἡμίσειά ἐστι (11) τῆς αγ, τότε τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης αγ, διπλάσιον τῷ ἀπὸ βγ, ἢ τὸ ἀπὸ βγ διπλάσιον τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης, (12) ἥτοι τῷ ἀπὸ τῆς εγ. Τὸ ἄρα ἀπὸ αγ Τετράγωνον τῆς ὅλης, διπλάσιον ὃν τῷ διπλασίονι, τετραπλάσιον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας εγ. Ο. Ε. Δ.

Καὶ Καθέτε δὲ ἀπὸ τῆς Σημεῖς ἀχθείσης ἐπὶ τὴν βγ Πλευράν, ὡσαύτως δειχθήσεται τὸ ἀπὸ τῆς Διαγωνίης αγ, ὅταπλάσιον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς Δ'.

(1) Ὁρ. λβ (2) δ. Βιβ. α. (3) κα. Βιβ. α. (4) Α' ε. (5) ιδ. Βιβ. α. (6) Διὰ τὸ Α'. τῶν ἐν τῇ Σχολ. τῷ μετὰ τὴν Κς. (7) ε. ἢ λρ. Βιβ. α. (8) ε. Βιβ. α. (9) Ε' κατ. (10) Τῶν αὐτ. Πόρ. Α'. (11) Διὰ τὸ Α'. τῶν ἐν τῇ ῥηζήντι Σχολ. (12) Τῶν αὐτ. Πόρ. Α'.

ἡμισείας τῆς Πλευρᾶς δγ. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Διαγωνίης αγ Τετράγωνον, ἐκκαίδεκαπλάσιον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς Διαγωνίης τεταρτημορίᾳ ζγ, καὶ τριακοδιπλάσιον τῷ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς τεταρτημορίᾳ θγ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ὡς ἀπὸ τῶν ὀρθῶν Γωνιῶν ἐπ' ἄπειρον ἀγομένων τῶν βε, εδ, δζ, ζθ, κτ. πρὸς ὀρθάς, καὶ ἐναλλάξ τῆς τε Διαγωνίης (ἥτοι τῆς Ὑποτεινύσης), καὶ τῆς Πλευρᾶς διχαζομένων, τήν τε τῶν Τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν ἀγομένων Καθέτων βε, εδ, δζ, κτ. καὶ τήν ἀπὸ τῶν Τμημάτων τῶν διχαζομένων αγ, εγ, ζγ, κτ. ἢ βγ, δγ, θγ, κτ. πρόοδον εἶναι κατὰ τὰ μόρια 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, κτ.

κ. 152. Ε'. Ἐπὶ παντὸς Τριγώνου αβγ, εἰς τὴν Γωνίαν α, ἐπὶ τὴν Βάσιν (προηγμένην δεῖσαν) πρὸς ὀρθάς ἀχθῆ ἡ αδ, ἔσται ἡ τῶν Τετραγώνων διαφορὰ τῷ τε ἀπὸ τῆς ἐτέρας τῶν Πλευρῶν αβ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὁμοῦς Τμήματος βδ, ἴση τῇ διαφορᾷ τῶν Τετραγώνων τῷ τε ἀπὸ τῆς λοιπῆς Πλευρᾶς αγ, καὶ τῷ ἀπὸ ταύτης ὁμοῦς Τμήματος δγ. Ἐπεὶ γὰρ αἱ πρὸς τῷ θ ὀρθαὶ εἰσιν (1), ἔσται ἐπὶ τῷ αβδ Τριγώνῳ, τὸ $\frac{αβ}{Ττρ.} = (2) \frac{αδ}{Τ.} + \frac{βδ}{Τ.}$ κοινῇ δὲ ἐκατέρωθεν ἀφαιρεθέντος τῷ $\frac{βδ}{Τ.}$, ἔσται (3) $\frac{αβ}{Τ.} - \frac{βδ}{Τ.} = \frac{αδ}{Τ.}$. Τὸ αὐτὸν δὲ τρόπον ἐπὶ τῷ Τριγώνῳ αδγ, δεῖξαι ἐς τὸ $\frac{αγ}{Τ.} - \frac{δγ}{Τ.} = \frac{αδ}{Τ.}$. Ἄρα $\frac{αβ}{Τ.} - \frac{βδ}{Τ.}$ (4) $= \frac{αγ}{Τ.} - \frac{δγ}{Τ.}$. Ο. Ε. Δ.

κ. 153. ς'. Ἐπὶ τῷ Τριγώνῳ αβγ, Καθέτε ἀχθείσης τῆς αδ, μείζον μὲν ἔσται τὸ τῆς Βάσεως βγ Τμήμα, τὸ τῇ μείζονι τῶν Πλευρῶν αγ προσκείμενον, ἔλαττον δὲ τὸ τῇ ἐλάττωσι αβ. Τῆς γὰρ αγ Πλευρᾶς μείζονος (5) ἥτης, τῆς δὲ αβ ἐλάττωσος, ἔσται καὶ $\frac{αγ}{Τ.}$ μείζον (6) ἢ αβ. Ἀλλ' $\frac{αγ}{Τ.}$ (7) $= \frac{αδ}{Τ.} + \frac{δγ}{Τ.}$, καὶ $\frac{αβ}{Τ.} = \frac{αδ}{Τ.} + \frac{βδ}{Τ.}$. Ἄρα τὸ τῶν Τετραγώνων $\frac{αδ}{Τ.}$ καὶ $\frac{δγ}{Τ.}$ ἄθροισμα, μείζον ἐστὶ τῷ τῶν Τετραγώνων $\frac{αδ}{Τ.}$ καὶ $\frac{βδ}{Τ.}$ ἄθροισματος. Τῷ ἄρα κοινῇ ἀφαιρεθέντος (8) $\frac{αδ}{Τ.}$, ὑπολειφθήσεται τὸ $\frac{δγ}{Τ.}$, μείζον τῷ $\frac{βδ}{Τ.}$, καὶ οὕτω τὸ Τμήμα δγ, τῷ Τμήματος βδ (9) μείζον ἔσται. Ο. Ε. Δ.

κ. 154. ζ'. Ἐὰν ἐπὶ τῷ Τριγώνῳ αβε, τὸ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς βε Τετράγωνον μείζον ἢ τῶν ἀπὸ τῶν Πλευρῶν αβ καὶ αε Τετραγώνων ἅμα ληφθέντων, ἢ ὑπὸ βαε, ὑφ' ἣν ὑποτείνει ἡ βε, ὀρθῆς ἔσται μείζων.

(1) Ὁρ. ισ. (2) μζ. Βιβ. α. (3) Δ'ε. γ. (4) Δ'ε. α. (5) Ε'ε ὑποδ. (6) Δ'ε. κ. (7) μζ. Βιβ. α. (8) Δ'ε. ε. (9) Δ'ε. ις.

Ἡ' χθω γὰρ ἐπὶ τῆς αβ (1) ἀπὸ τῆς πρὸς αὐτῇ Σημεία α, πρὸς ὁρ-
θᾶς ἢ αζ, ἴση τῇ Πλευρᾷ αε, καὶ ἐπεξεύχθω (2) ἢ βζ. Διὰ μὲν οὖν
τὴν ὑπὸ βαζ Ὀρθὴν, ἔσμι τὸ ἀπὸ τῆς βζ Τετράγωνον (3) ἴσον τοῖς ἀπὸ
βα καὶ αζ Τετραγώνοις ἅμα ληφθεῖσιν, ἦτοι (διὰ τὰς ἴσας ζα, καὶ εα) τὸ
ἀπὸ τῆς βζ Τετράγωνον (4), ἴσον ἔσται τοῖς ἀπὸ τῶν βα, αε Τετραγώ-
νοις ἅμα ληφθεῖσιν. Ἀλλὰ (5) τὸ ἀπὸ τῆς βε Τετράγωνον, μείζον ἐστὶ
τῶν ἀπὸ βα καὶ αε Τετραγώνων ἅμα ληφθέντων. Ἀρα τὸ ἀπὸ τῆς βε
Τετράγωνον (6) μείζον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βζ Τετραγώνῳ, ἥτε βε Εὐθεῖα
μείζων (7) ἔσται τῆς βζ. Ἐνθεντοὶ καὶ ἡ ὑπὸ βαε (8) τῆς ὑπὸ βαζ Ὀρθῆς,
μείζων τυγχάνει. Ο. Ε. Δ.

Παραπλησίως ἐὰν ἐπὶ τῷ Τριγώνῳ αβγ, τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τῆς ὑπο- H'.
τεινέτης τὴν ὑπὸ βαγ Τετράγωνον, ἔλαττον ἢ τῶν Τετραγώνων τῶν ἀπὸ
τῶν Πλευρῶν βα καὶ γα, ἅμα ληφθέντων, δειχθήσεται ἡ ὑπὸ βαγ, Ὀρ-
θῆς ἐλάσσων. Ἀχθεῖσθαι γὰρ ἐπὶ τῆς αβ Πλευρᾶς, Καθέτα τῆς αζ ἴσης
τῇ αγ, ἐπιζευχθεῖσθαι τε τῆς βζ, ἔσται (9) $\beta\zeta = \frac{\beta\alpha}{T} + \frac{\alpha\zeta}{T}$. Ἀλλ' $\frac{\alpha\zeta}{T}$
 $= \frac{\alpha\gamma}{T}$ (10). ἄρα $\frac{\alpha\zeta}{T} = \frac{\beta\alpha}{T} + \frac{\alpha\gamma}{T}$. Ἀλλὰ (11) $\frac{\beta\gamma}{T}$ ἔλαττόν ἐστιν ἢ $\frac{\beta\alpha}{T}$ καὶ
 $\frac{\alpha\gamma}{T}$. ἄρα $\frac{\beta\gamma}{T}$ ἔλαττον ἢ $\frac{\beta\zeta}{T}$, καὶ ἐπομένως (12) ἡ βγ ἐλάσσων τῆς βζ.
Ἐνθεντοὶ καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, τῆς ὑπὸ (13) βαζ Ὀρθῆς ἐλάσσων. Ο. Ε. Δ.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Τὸ ἀποδειχθὲν Θεώρημα, ὅπερ Εὐκλείδης ἐν Προτ. ΛΑ. Βιβ. ε'. ἐπὶ
πάνθ' ἀπλῶς τὰ ἐμφερῆ ἀλλήλοις ἐναποδέδειχε Σχήματα, Πυθαγόρειον
φερωνύμως ἀπὸ τῆς εὐρόντος ὠνόμασαι, ὑπὲρ ἧς καὶ θύσαι λέγεται Πυθα-
γόρας ταῖς Μήσαις, (ἢ Πρόκλος μαρτυρεῖ, καὶ Οὐίτρυϊός, καὶ ἄλλοι) ὑπερησ-
θεῖς τῷ εὐρήματι, ἐφ' ᾧ καὶ τῆς ἐκείνων ὤρετο ἀπολελαυκέναι ἐλλάμψεως·
ἀμελείτοι τὸν παροχέα τῶν φώτων ἐν ταῖς κατὰ τὰς ἐπισήμας θεωρίαις, καὶ
χορηγόν τῆς Σοφίας ἡγνόει Κύριον, εἰδὼς καὶ ἔγνω, ἀλλ' ἔχ' ὡς θεὸν ἐδόξα-
ζεν. Ἐστὶ δὲ πυκνή τε, καὶ παντός μείζων ἢ τῷ Θεωρήματι τῆς δι' ὅλης τῆς
Μαθησεως χρηστis, ἐπ' ἄλλοις τε πάνυ πολλοῖς συντελῶντος, καὶ τὴν εἰς τὰ ἀ-

(1) 1α. Βιβ. α. (2) Αἴτ. α. (3) μζ. Βιβ. α. (4) Α'ξ. 10. (5) Β'ξ. ὑποθ. (6) Α'ξ. α.
(7) Α'ξ. 15. (8) 11. Βιβ. α. (9) μζ. Βιβ. α. (10) Β'κ κατ. καὶ Α'ξ. 10. (11) Β'ξ ὑποθ.
(12) Α'ξ. 15. (13) 11. Βιβ. α.

σύμμετρα τῶν Μεγεθῶν φέρουσιν, τὸ μέγα τῆς γεωμετρικῆς Φιλοσοφίας μυ-
σῆριον ὑπανόγοντος.

α 155.

Ὅτι γὰρ ἡ τῷ Τετραγώνῳ Πλευρὰ ἀσύμμετρος τυγχάνει ἥσα τῇ Δια-
γωνίῳ, Θεωρήμα φέρεται πάλαι τοῖς Γεωμετρῶσι τεθρυλλημένον, καὶ πρὸ
πάντων Ἀρίσ. καὶ Πλάτωνι, ὅς, καὶ τὸν τῆτο μὴ εἰδότα, εὐδὲ ἄνθρωπον ἡξία
καλεῖν, συγκατέλεγε δὲ τοῖς κτήνεσιν. Ἡ δὲ δὴ τῷ τοιούτῳ ἀπορρήτῳ γυνώσκει,
τῇ προεκτεθείσῃ ΜΖ'. Προτάσει τὴν ἀρχὴν ἔοικε προσοφείλειν. Ἐπεὶ γὰρ ἐπὶ
τῷ Τετραγώνῳ, Ὁρθὴ ἐστὶν ἡ κατὰ τὸ α Γωνία, τὸ ἀπὸ τῆς Διαμέτρου γβ
Τετραγώνου, ἴσον πάντως δυσὶν ἔσται τοῖς ἀπὸ τῶν Πλευρῶν αβ, αγ Τετρα-
γώνοις, καὶ δὴ ἐκ τούτου, καὶ τῷ ἑτέρῳ (1) διπλάσιον. Τῷ γὺν ἀπὸ τῆς Δια-
μέτρου γβ Τετραγώνου ὑποτιθεμένης ὡς 2, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς αβ ὡς 1,
ἡ μὲν γβ Διαγωνίος ῥίζα τετραγωνικῇ ἔσται Δυνάδος, ἡ δὲ Πλευρὰ αβ, ῥίζα
τετραγωνικῇ Μονάδος, ἥτοι μονάς, ὧν ὁ λόγος (ὡς ἐν ἄλλοις εἰρησεται) ἀριθ-
μοῖς πάντα ἀνέκφρατος, δι' ὃ καὶ ἀσύμμετροι λέγονται.

Αὕτη δὲ τὸ ἡ ἀσύμμετρον τῆς Πλευρᾶς καὶ τῆς Διαγωνίης ἐπὶ τῶν Τετρα-
γώνων ἀποδεικνύσα, ἐσχάτη μὲν ἐστὶ τῶν παρ' Εὐκλείδῃ τῷ Ι' Βιβλ. Προτά-
σεων, δείκνυται δὲ παρὰ Τακτετίου, ἐν τοῖς ὑπ' αὐτῷ φιλοπονηθεῖσι σοιχείοις
τῶν Ἀριθμητικῶν, κατὰ τὸ Σχόλιον τὸ μετὰ τὴν ΙΑ'. Πρότ. τῷ Β'. Βιβλίῳ.

Ἐν οἷς ἐπιστῆσαι ἄξιον, ὡς εἰ καὶ μηδεὶς ἕτερος παρὴν λόγος, εἰς δεῖξιν
τῆ μὴ ἐξ ὠρισμένων τῷ ἀριθμῷ Σημείων τὰ Μεγέθη συνίστασθαι, ἤρεσεν
ἂν ὅτος καὶ μόνος. Οὐδὲ γὰρ ἂν ἦν Μεγέθη ὅλως ἀλλήλοις ἀσύμμετρα, εἰ
πάντων ἦν μέτρον κοινὸν λαβεῖν τὸ Σημεῖον.

Ἐπὶ τούτοις ἅπασι προκείμενῳ καὶ Προβλήματα τρία, τὰ ἐκ τῆς ΜΖ'.
ἀπηρτημένα, ὧν πυκνοτάτη ἡ χρῆσις, τὰ ἐφεξῆς.

Π ρ ό β λ η μ α Α'.

„Τετραγώνων ὁποσωνῶν δοθέντων, ἴσον τοῖς πᾶσι Τετράγωνον ἀνα-
γράφαι.

α. 156.

Κεῖσθω Τετράγωνον τρία, ὧν Πλευραὶ αβ, βγ, γδ, καὶ συνεχάσθω Γω-
νία ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ζβψ, ἥς αἱ Πλευραὶ ἐπ' ἄπειρον ἔσωσαν προεκτείνόμεναι.
Ἐπὶ δὲ τῶν Πλευρῶν (2) μετηνέχθωσαν αἱ αβ, καὶ βγ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ αγ,
καὶ ἔσται πάντως τὸ ἀπὸ τῆς αγ Τετράγωνον (3) ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, καὶ
βγ. Εἴτα ἡ αγ μετηνέχθω καὶ αὐτὴ ἀπὸ τῆ β ἐπὶ τὸ φ, ἥτε γε τρίτῃ τῶν

(1) Α'. Πόρ. τῶν ἀνωτ. (2) γ. Βιβ. α. (3) μζ. Βιβ. α.

δοθειςῶν Πλευρῶν, μετατιθέσθω ἐπὶ βε, ἢ ἐπεζεύχθω ἢ εφ· καὶ ἔσαι δὴ τὸ ἀπὸ τῆς εφ (1) Τετράγωνον ἴσον τοῖς ἀπὸ βφ, ἢ εβ (ἦτοι εγ), τετέστιν ἴσον τρισὶ τοῖς δοθεῖσι, τοῖς ἀπὸ αβ, ἢ βγ, ἢ γε. Ο. Ε. Π.

Π ρ ό β λ η μ α Β.

„Δυοῖν δοθειςῶν Εὐθειῶν ἀνίσων (αβ, βγ) Τετράγωνον ἀναγράψαι, ὥ τὸ ἀπὸ τῆς μείζονος (αβ) Τετράγωνον, ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τῆς (βγ) ἐλάσσονος.

Κέντρῳ μὲν τῷ β, Διαστήματι δὲ τῷ βα Κύκλος γεγράφθω· ἐπὶ δὲ τῆς Διαμέτρου αζ, ἀπὸ τοῦ Κέντρου β ἐπὶ ζ, ἐκκείσθω ἡ βγ, ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ γε προσπίπτουσα ἐπὶ τὴν Περιφέρειαν πρὸς τὸ ε. Καὶ τὸ ἀπὸ τῆς γε Τετράγωνον ἐστὶ τὸ ζητούμενον· ἦτοι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀπὸ τῆς αβ Τετραγώνου, ἢ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τῆς γβ Τετράγωνον.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ βς· καὶ δὴ τὸ ἀπὸ τῆς βε τετράγ. ἴσον (2) τοῖς ἀπὸ βγ ἢ γε, ἅμα ληφθεῖσιν. Ἀρα κτ.

Π ρ ό β λ η μ α Γ.

„Παντὸς ὀρθογωνίου Τριγώνου, τὰς δύο εἰδὼς Πλευρὰς πάντα μεταλαμβανομένας, ἢ τὴν λοιπὴν εὐρήσεις.

Πλευραὶ αἱ τὴν ὀρθὴν Γωνίαν περιέχουσιν, ἔσωσαν αἱ αγ, αβ, ἡ μὲν ποδῶν 6, ἡ δὲ 8. Δεῖ δὴ προσεμερεῖν ὅσων τυγχάνει ποδῶν ἡ βγ, ἡ ὑπὸ τὴν ὀρθὴν Γωνίαν ὑποτείνουσα.

Πεπολλαπλασιάζων οἱ 6 ἢ 8 δι' ἑαυτὸν μὲν 8, εἰς ἑαυτὸν δ' ἑκάστος· καὶ ἀνακύψει δὴ τῶν Πλευρῶν Τετράγωνα, τῆς μὲν 36, τῆς δὲ 64· τέτων κεφάλαιον ἐπαθροισζομένων τὰ 100. Τοιγαρὲν ἡ τετραγωνέσιος ῥίζα τῶν 100, ἣτις ἐστὶν ἡ 10, δώσει τῆς πόδας τῆς ζητούμενης Πλευρᾶς βγ. Ἡ δὲ δεῖξις σαφής (3). Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἄθροισμα τῶν Τετραγώνων τῶν ἀπὸ αβ, ἢ αγ, ἴσον ἐστὶ τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς βγ, ἡ ῥίζα πάντως τοῦ τηλικούτου ἄθροίσματος, ἡ αὐτὴ ἔστι τῇ ῥίζῃ, ἦτοι τῇ Πλευρᾷ βγ.

Ἀλλ' ἔσωσαν δὴ δοθεῖται αἱ Πλευραὶ αβ, ἢ βγ, ἡ μὲν ποδῶν 8σα 10, ἡ δὲ 6· δεῖ δὴ προσεμερεῖν τὴν αγ, ὅσων ἐστὶ. Τὸ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς αβ Τετράγωνον 36, ἀφηρέσθω ἀπὸ τοῦ Τετραγώνου 100 τοῦ ἀπὸ τῆς βγ. Τὸ δὲ

(1) μζ. Βιβ. α. (2) μζ. Βιβ. α. (3) μζ. Βιβ. α.

κατάλοιπον 64 Τετράγωνον ἔσαι τὸ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς $\alpha\gamma$. Ἐὰν οὖν ἐξέλῃς
 ἐκ ἀπὸ τέττε τὴν Τετραγωνικὴν ῥίζαν, ἔξεις 8, ὅς ἔσαι ὁ ἀριθμὸς τῶν ποδῶν
 τῶν ἐπὶ τῆς Πλευρᾶς $\alpha\gamma$.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΜΗ.

„Ἐὰν Τριγώνῃ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν Πλευρῶν ($\alpha\beta$) Τετράγωνον ἴσον ἢ τοῖς
 „ἀπὸ τῶν λοιπῶν τῶ Τριγώνῃ δύο Πλευρῶν ($\alpha\gamma$, $\beta\gamma$) Τετραγώνοις, ἢ
 „περιεχομένη Γωνία (ὑπὸ $\alpha\gamma\beta$) ὑπὸ τῶν λοιπῶν τῶ Τριγώνῃ δύο Πλευρῶν
 „Ὁρθὴ ἔσῃ.

κ. 159.

Εἰ μὴ γὰρ, ἔσω ἢ ὑπὸ $\alpha\gamma\beta$ Ὁρθῆς μείζων, ἢ γοῦν ἐλάσσων. Ἄρα
 (ὡς ἐν IB' καὶ IG'. Προτ. τῇ B'. Βιβλ., ταῖς ἐκ ταύτης ἑδαμῶς ἡρημέναις
 δειχθήσεται) τὸ ἀπὸ τῆς $\alpha\beta$ Τετράγωνον ἢ ἔσαι ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν $\alpha\gamma$ καὶ
 $\beta\gamma$ Τετραγώνοις· ὅπερ ἐστὶ κατὰ τῆς ὑποθέσεως.

Α' λ λ ω ς.

Ἦχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ $\gamma\zeta$ ἐπὶ τῆς $\gamma\beta$, ἴση τῇ $\alpha\gamma$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ
 $\beta\zeta$. Καὶ δὴ τὸ ἀπὸ τῆς $\beta\zeta$ Τετράγωνον (1), ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $\zeta\gamma$, καὶ
 $\gamma\beta$, ἥτοι τοῖς ἀπὸ τῶν $\alpha\gamma$ καὶ $\beta\gamma$ (2), τετέστι τῷ ἀπὸ (3) τῆς $\alpha\beta$ Τετρα-
 γώνῳ. Αἱ ἄρα $\alpha\beta$, καὶ $\zeta\beta$ (4) ἀλλήλαις ἴσαι εἰσὶν· ἐπὶ ἄρα τῶν Τριγώνων,
 διὰ τὴν ἰσότητά τῶν Πλευρῶν (5), ἔσαι καὶ ὑπὸ $\alpha\gamma\beta$, ἴση τῇ ὑπὸ $\beta\gamma\zeta$. Ἄρα
 καὶ αἱ πρὸς τῷ γ' ὀρθῆς Γωνίαι (6) ὀρθαὶ, οἷαν δεῖξαι πρᾶκειτο τὴν ὑπὸ $\alpha\gamma\beta$.

(1) μζ. Βιβ. α. (2) Ε' α κατ. (3) Ε' ε ὑποθ. (4) Δξ. ιι. (5) η. Βιβ. α. (6)
 Ὁρ. ιθ.

Τῶν σοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

ΒΙΒΛΙΟΝ Β'.

Βραχεῖα μὲν ἡ Βίβλος τὸν ὕγκον, διαφέρουσα δέ τοι τῶν ἐν αὐτῇ θεωρημένων τῇ χρήσει καὶ τιμιότητι. Ὅπερ εἰ καὶ τοῖς ἐντυγχάνουσι τῶν Νεανίσκων αὐτίκα μὲν ἔπω, προσωτέρω ἄλλ' οὖν γενομένοις, εὖ οἶδ' ὅτι ἐξ αὐτῆς ἔσαι τῆς πείρας κατάδηλον.

Καὶ δὴ θεωρεῖ μὲν ἡ Βίβλος τῶν Εὐθειῶν τὰς δυνάμεις, οἷα περ ἐστὶ τὰ Τετράγωνα, παραβάλλει δὲ καὶ Τετραγώνοις αὐτοῖς καὶ Ὀρθογώνιοις, τοῖς γε ἀπὸ, καὶ ὑπὸ Εὐθειῶν ὄλων περιεχομένοις, Ὀρθογώνια παντοῖα, τὰ ὑπὸ τῶν, ἢ δίχ' α, ἢ ἄλλως πως τετμημένων Εὐθειῶν ἀνακύπτοντα. Καὶ πολλῆς οὖν τὸ σοιχειῶδες τῷ μέρει γέμον τῆς ὠφελείας πολλῶν τε ἕνεκα κρίνεται, καὶ τέττα προὐ πάντων, ὅτι τῶν Ἀλγεβραϊκῶν πράξεων ταῖς κυριωτέραις προκαταβάλλει τὰς θεμελίους, τῶν μὲν τριῶν πρωτίσων ἐν αὐτῷ Προτάσεων εἰς ἀπόδειξιν τῆς πολλαπλασιασμῇ τεινεσῶν, τῆς δὲ τετάρτης εἰς ἐξαγωγὴν τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν ξυντελήσης, τῶν δὲ λοιπῶν ἀπὸ μὲν ζ'. ἕως Η'. ταῖς κατὰ τὴν περιώνυμον Ἀλγεβραν, ἀπὸ δὲ Η'. ἕως τῆς ἐσχάτης ταῖς κατὰ τὴν Τριγωνομετρίαν πράξεσι ξυμβαλλομένων. Οὐ τοίνυν μικροψυχητέον τοῖς πρωτοπείροις, τραχυτέρας πως ἐν αὐταῖς πρώταις ἐπιβολαῖς καὶ δυσαντιβλέπτου ἀπαντώσης τῆς Βίβλου. Παρὰ γὰρ τὸ τὰς πλείους τῶν ἐν αὐτῇδείξεων τῷ προδηλοτάτῳ ἐκείνῳ προσερεῖσθαι Ἀξιώματι, τῷ τὸ ὅλον ἴσον ἅπασιν τοῖς ἐν αὐτῷ μέρεσιν ἀποφαινομένῳ, καὶ οἷς ἡ τέλεον ἐκ πρώτης ἐπιβάλλειν δοκῶσιν, εἰςδελεχῶς ἐπικύπτοντες, ἔσαι ποῦ ὅτε καὶ ἑαυτὰς θαυμάσονται, ὅτι πράγματα σφίσι παρῆχε τὰ ἔτω σαφεῖτε καὶ γνώριμα.

Ὁ ρ ι σ μ ο ι.

Πᾶν Παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον (τὸ καὶ ἀπλῶς ὀρθογώνιον καλεῖμενον) περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν Γωνίαν περιεχουσῶν Εὐθειῶν α γ, α β.

κ. 160.

Τέτων γὰρ τῇ μὲν $\alpha\gamma$ τὸ ὕψος, τῇ δὲ $\alpha\beta$ τὸ τῇ Ὀρθογωνίᾳ διορίζεται πλάτος. Εἷτα νοημένης τῆς $\alpha\gamma$ πρὸς ὀρθὰς φέρεσθαι δι' ὅλης τῆς $\alpha\beta$, ἢ ϵ τῆς $\alpha\beta$ ὡταύτως δι' ὅλης τῆς $\alpha\gamma$, τὸ Εἰμβαλὼν τῇ Ὀρθογωνίᾳ τῇ τοιαύτῃ κινήσει τὴν γένεσιν λήφεται. Καὶ εἰκότως ἄρα πολλαπλασιασμῷ τῶν δύο προσεχῶν Πλευρῶν ἐπ' ἀλλήλαις, γεννᾶσθαι τὰ Ὀρθογώνια λέγεται.

κ. 161.

Ὅτε τοίνυν ἡμῖν ὑποτίθεται τὸ ὑπὸ $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$, ἢ συντόμως τὸ $\alpha\gamma\beta$, οὐδὲν ἄλλ' ἢ τὸ ὑπὸ τῶν Εὐθειῶν $\alpha\gamma$ ϵ $\gamma\beta$, ἢ τῶν ταύταις παρισταμένων, ἑκατέρας ἑκατέρᾳ πρὸς ὀρθὴν Γωνίαν συσχετισῶν, ὑποδηλεῖται περιεχόμενον Ὀρθογώνιον. Παραπλησίως, ϵ διὰ τῆς ὑπὸ $\alpha\beta$ ϵ $\beta\gamma$, εἴτεν $\alpha\beta\gamma$, τὸ ὑπὸ δυσὶν Εὐθειῶν ἴσων ταῖς $\alpha\beta$, ϵ $\beta\gamma$ περιεχόμενον ὑποσημαίνεται Ὀρθογώνιον, τῶν τὴν ὀρθὴν Γωνίαν περιλαμβανουσῶν.

Ὀρθογώνιον δὲ τὸ μὲν Ἑτερόμηκες, τὸ δὲ Τετράγωνον. Καὶ Ἑτερόμηκες μὲν τὸ τὰς προσεχεῖς Πλευρὰς ἔχον ἀνίσας, ἦτοι τὸ ὑπὸ δυσὶν Εὐθειῶν ἀνίσων περιεχόμενον. Τετράγωνον δὲ τὸ ἀπὸ δύο ἴσων, ἦτοι τὸ ἀπὸ μιᾶς ἐφ' ἑαυτὴν ἀγομένης περιεχόμενον.

Τ' π ο ς ε σ ε ι ς.

Καίθω τὸ μὲν = σημεῖον Ἰσότητος.

τὸ δὲ + σημεῖον Προθέσεως.

τὸ δὲ — σημεῖον Ὑφαιρέσεως.

τὸ δὲ ο ἀντὶ τῇ Μηδενός.

τὸ δὲ $\times$ σημεῖον Πολλαπλασιασμῷ, ὅπερ καὶ αἰεὶ παραντίθεται φιλεῖ, τῶν ἐπιπολλαπλασιαζομένων ἀμέσως τὰ πολλὰ παρασυναπτομένων οἷον $\alpha\beta$, ἀντὶ $\alpha \times \beta$.
τὸ δὲ : σημεῖον Διαιρέσεως· οἷον $\alpha : \beta$ σημαίνει τὸ α διαιρούμενον διὰ τῆς β · ὃ ϵ ἐν εἶδει κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ πολλαῖς εἴωθε γράφεσθαι.

τὸ δὲ T σημεῖον Τετραγώνου.

τὸ δὲ K σημεῖον Κύβου.

τὸ δὲ V σημεῖον τῆς Τετραγωνικῆς ῥίζης.

τὸ δὲ $\sqrt[3]{}$ σημεῖον τῆς Κυβικῆς.

τὸ δὲ :: σημεῖον τῶν ἴσων λόγων οἷον $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$.

τὸ δὲ ∷ σημεῖον τῆς συνεχῆς Ἀναλογίας.

Π ρ ό τ α σ ι ς Α.

„Εἰ ἂν ὥσι δύο Εὐθεΐαι (αβ, αγ), τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὅσα-
 „,δηποτῶν Τμήματα (αε, εζ, ζγ), τὸ περιεχόμενον Ὁρθογώνιον ὑπὸ τῶν
 „,δύο Εὐθειῶν (αβ, αγ), ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπὸ τε τῆς ἀτμήτις (αβ), καὶ ἐκάσ-
 „,τῶν Τμημάτων (αε, εζ, ζγ) περιεχομένοις Ὁρθογωνίοις.

Ἦχθω ἀπὸ τῆς α, ἐπὶ τῆς αγ πρὸς ὀρθὰς (1) ἡ αη, καὶ κείθω ἴση τῇ κ. 162.
 ἀτμήτι αβ. Καὶ διὰ τῆς η τῇ αγ Παράλληλος (2) ἤχθω ἡ ηδ· διὰ δὲ τῶν
 ε, ζ, γ, τῇ αη Παράλληλοι αἱ εκ, ζλ, γδ.

Ἰσον δὴ ἐστὶ τὸ ηγ, τοῖς ηε, κζ, λγ (3). Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ηε τὸ ὑπὸ
 ηαε, ταυτὸν εἰπεῖν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ἀτμήτις αβ, καὶ τῆς Τμήματος
 αε. Τὸ δὲ κζ τὸ ὑπὸ κεζ, τὸ ὑπὸ κδ (ἡ τις ἴση τῇ ηα (4)), τατέστι τῆς
 αγ, καὶ εζ. Τὸ δὲ λγ, ὁμοίως ὑπὸ λζγ, ἦτοι ὑπὸ αβ καὶ ζγ (5).

Π ό ρ ι σ μ α.

Κρατυθείη δ' ἂν ἐντεῦθεν πληρεσέρας τυγχάνουσα δείξεως, καὶ ἡ τῇ κ. 163.
 προβλήματος ἐπίλυσις, τῇ ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν ΜΕ'. τῇ Α'. Βιβλ.
 προτεθέντος. Τῇ γὰρ Τετραπλεύρῃ βζ, διὰ τῆς Εὐθείας αγ εἰς τὰ δύο
 Τρίγωνα αβγ καὶ αζγ ἀναλυθέντος, δίχα τμηθείσης τῆς αγ κατὰ τὸ σ,
 ἀπὸ τε τῶν ἀπεναντίον Γωνιῶν β καὶ ζ, ἐπὶ τῆς κοινῆς Βάσεως αγ Καθέτων
 ἠχθειῶν τῶν βξ καὶ ζι, καὶ ἀπὸ τῆς σ πρὸς ὀρθὰς ἡγμένης τῆς σλ, καὶ ἴσο-
 μήκης ταῖς δυσὶν ἅμα βξ καὶ ζι ληφθείσης, δεικτέον ὅτι τὸ Ὁρθογώνιον τὸ
 ὑπὸ γσ καὶ σλ, ἴσον τῷ Τετραπλεύρῳ βζ. Ἐπειδὴ γὰρ τὰ Τρίγωνα αβγ,
 αζγ (6) ἴσα τοῖς Ὁρθογωνίοις τοῖς ὑπὸ γσ καὶ βξ, καὶ ὑπὸ γσ καὶ ζι, θά-
 τερον θάτερον· ἐπαίτε Εὐθεΐα ἡ λσ, ἴση ἐστὶ ταῖς βξ καὶ ζι ἅμα ληφθείσαις,
 εἰς τε μέρη τέτμηται τὰ σδ καὶ δλ, αἱ ἴσα ἐλήφθη τοῖς βξ καὶ ζι, τὸ ἕτερον
 τῷ ἑτέρῳ. Τὰ ἄρα Τρίγωνα, ἦτοι τὸ Τετράπλευρον βζ, τοῖς Ὁρθογωνίοις
 γδ, λε τοῖς ὑπὸ τῆς ἀτμήτις γσ, καὶ ἐκατέρῃ τῶν μερῶν τῆς τετμημένης
 σλ, τατέστι (δυνάμει τῆς ἀνὰ χεῖρας Προτάσ.) τῷ Ὁρθογωνίῳ λγ τῷ ὑπὸ
 τῶν λσ καὶ γσ, ἐξ ἀνάγκης συνεξισῶται.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Τὰ δὴ πρῶτα δέκα τῶν ἐν τῷ παρόντι Βιβλίῳ Θεωρημάτων ἀληθεύει

(1) ια. Βιβ. α. (2) ΑΔ. τῇ α'. (3) Α'ξ. 2. (4) ΑΔ. τῇ α'. (5) Ο'ρ. τῇ β'. (6) μα. Βιβ. α.

ἡδὲν ἦττον καὶ ἐπὶ ἀριθμῶν, ἣν εἰς μέρη κατὰ τὰς Γραμμὰς διαιροῦντο. Αὐ-
ναφύεται γὰρ καὶ τὰ ἀριθμητικὰ Ὀρθογώνια διὰ πολλαπλασιασμῶν δυοῖν ἀριθ-
μῶν· τὰ δὲ ἀριθμητικὰ Τετράγωνα, δι' ἐνὸς ἀριθμοῦ κατ' ἐαυτὸν πολλαπλα-
σιαζομένα.

Οἷον ἔστω ἀριθμὸς μὴ τετμημένος ὁ 9, τετμημένος δὲ ὁ 12 εἰς μέρη
ταυτὰ τὰ τρία, 3 καὶ 4, καὶ 5· καὶ ἔσται δὴ τὸ Ὀρθογώνιον ὑπὸ 9 καὶ 12 = 108,
ἴσον τοῖς τρισὶν Ὀρθογωνίοις 27, καὶ 36, καὶ 45, ὧν τὸ μὲν ὑπὸ 9 καὶ 3, τὸ
δὲ ὑπὸ 9 καὶ 4, τὸ δὲ ὑπὸ 9 καὶ 5 συναπαρτίζεται.

Ἦν γοῦν ἀριθμὸς ἔστω 432, ὥστε Πολλαπλασιαστέος τετμημένος εἰς 400,
καὶ 30, καὶ 2· ἀριθμὸς δὲ, οἷον Πολλαπλασιαστής ὁ 8 μὴ τετμημένος. Καὶ ἔσται
 $8 \times 432 = 3456$, ἴσος $8 \times 400 = 3200 + 8 \times 30 = 240 + 8 \times 2 = 16$. Καντεῦθεν οὖν τὴν ἀπόδειξιν ληπτέον τῆς κατὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν
πράξεως.

Π ρ ό τ α σ ι ς Β.

κ. 164.

„Εἴαν εὐθεία Γραμμὴ (αβ) τμηθῇ ὡς ἔτυχε (κατὰ τὸ γ), τὰ ὑπὸ
„τῆς ὅλης (αβ) καὶ ἑκατέρω τῶν Τμημάτων (αγ, γβ) περιεχόμενα Ὀρθο-
„γώνια, ἴσα ἐσὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης Τετραγώνῳ.

Ληφθῆτω δὴ ἡ ζ = τῇ αβ.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ὀρθογ. ζαβ} = \text{Ὀρθογ. ζαγ} \\ \text{Ὀρθογ. ζγβ} \end{array} \right\} (1).$$

Τατέστιν ἐπεὶ ἡ ζ = τῇ αβ.

Τετράγ. τὸ ἀπὸ αβ = Ὀρθογ. βαγ)

Ὀρθογ. αβγ)

Α' λ λ ω ς.

κ. 165.

Αναγεγράφω αβδε Τετράγωνον ἀπὸ Εὐθείας τῆς αβ (2), καὶ ἀπὸ
τῆς Σημεῖς γ ἤχθω (3) πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς αβ ἢ γδ. Αἱ γὰρ πρὸς τῇ γ
Γωνίαι Ὀρθαὶ εἶναι, ταῖς κατὰ τὸ α καὶ β ἴσαι εἰσὶν· αἵ τε Εὐθείαι αε, γδ,
βδ πρὸς ἀλλήλας Παράλληλοι (4) εἰσι, τὰ τε αδ, καὶ βδ Παραλληλόγραμ-
μα ὀρθογώνια (5). Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ Εὐθεία γδ τῇ Εὐθείᾳ αε (6), ἥτοι τῇ αβ
(7) ἴση. Ἐνθεντοὶ τὰ αδ καὶ βδ Ὀρθογώνια εἰσὶν ὑπὸ (8) τῆς ὅλης αβ, καὶ

(1) Α. τῷ β. (2) Μς. τῷ α. (3) ΙΑ. τῷ α. (4) ΚΗ τῷ α. (5) Ὀρ. τῷ β.
(6) ΛΔ. τῷ α. (7) Εκ κατ. (8) Ὀρ. τῷ β.

τῶν Τμημάτων $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ περιεχόμενα, ἃ δὲ καὶ ἅμα ληφθέντα, τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς $\alpha\beta$ συνεξισῶνται.

Ἐς αὐτὸν ἀριθμὸς 8 εἰς 5 καὶ 3 τετμημένος. Τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης $8 \times 8 = 64$, ἴσον ἐστὶ τοῖς Ὀρθογωνίοις $8 \times 3 = 24$, καὶ $8 \times 5 = 40$.

Π ρ ό τ α σ ι ς Γ.

„Εὰν εὐθεῖα Γραμμὴ ($\alpha\beta$) ὡς ἔτυχεν τμηθῇ (κατὰ τὸ γ), τὸ ὑπὸ τῆς $\alpha\beta$ καὶ τῆς ὅλης ($\alpha\beta$) καὶ ἐνὸς τῶν Τμημάτων ($\beta\gamma$) περιεχόμενον Ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν Τμημάτων ($\alpha\gamma$, $\gamma\beta$) περιεχομένῳ Ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς προειρημένης Τμήματος ($\beta\gamma$) Τετραγώνῳ. κ. 166.

Ληφθήτω δὴ ἡ $\zeta = \gamma\beta$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ὀρθογ. } \alpha\beta\zeta = \text{Ὀρθογ. } \alpha\gamma\zeta \\ \text{Ὀρθογ. } \gamma\beta\zeta \end{array} \right\} (1). \text{ Ἀλλὰ } \zeta = \gamma\beta.$$

$$\text{Ἀρα Ὀρθογ. } \alpha\beta\gamma = \text{Ὀρθ. } \alpha\gamma\beta) \\ \text{Τετρ. } \gamma\beta)$$

Α' λ λ ω ς.

Ἀναγεγράφω (2) γὰρ Ὀρθογ. τὸ $\alpha\delta$, ὑπὸ τῆς ὅλης $\alpha\beta$ καὶ τῆς Τμήματος $\gamma\beta$, καὶ ἀπὸ τῆς Σημεῖς γ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἢ $\gamma\epsilon$. Διὰ γὰρ τὴν $\gamma\epsilon$ Εὐθεῖαν, ἣτις τῇ $\beta\delta$ (3), καὶ ἐπομένως τῇ $\beta\gamma$ (4) ἴση ἐστὶ, τὸ Ὀρθογώνιον $\alpha\delta$ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης $\alpha\beta$ καὶ τῆς Τμήματος $\beta\gamma$ περιεχόμενον, ἴσον ἐστὶ τῷ τε Ὀρθογωνίῳ $\alpha\epsilon$ τῷ ὑπὸ τῶν Τμημάτων $\alpha\gamma$ καὶ $\gamma\beta$, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς εἰρημένης Τμήματος $\gamma\beta$ Τετραγώνῳ $\gamma\delta$. κ. 167.

Ἐς αὐτὸν ἀριθμὸς 7 εἰς 3 καὶ 4 τετμημένος. Τὸ γὰρ Ὀρθογ. $7 \times 3 = 21$ ἴσον ἐστὶ τῷ Ὀρθογ. $3 \times 4 = 12$, καὶ τῷ Τετραγ. $3 \times 3 = 9$, ἅμα ληφθεῖσι. Ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ Ὀρθογώνιον $7 \times 4 = 28$, ἴσον ἐστὶ τῷ Ὀρθογ. $3 \times 4 = 12$, καὶ τῷ Τετραγ. $4 \times 4 = 16$, ἅμα ληφθεῖσι.

Π ρ ό τ α σ ι ς Δ.

„Εὰν εὐθεῖα Γραμμὴ ($\zeta\lambda$) τμηθῇ ὡς ἔτυχεν (κατὰ τὸ ξ), τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης Τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν Τμημάτων ($\zeta\xi$, $\xi\lambda$) Τετραγώνοις, καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν Τμημάτων ($\zeta\xi$, $\xi\lambda$) περιεχομένῳ Ὀρθογωνίῳ. κ. 168.

(1) Α. τῆ β. (2) Σχόλ. τὸ τῆς Μς. τῆ α'. (3) ΚΗ. καὶ ΛΔ. τῆ α'. (4) Ε' κατ.

$$\begin{aligned}
 & \text{Τετράγ. } \zeta\lambda = \left. \begin{array}{l} \text{Ορθογ. } \zeta\lambda\xi \\ \text{Ορθογ. } \lambda\xi\zeta \end{array} \right\} (1) \\
 & \text{Α' } \lambda\lambda' \text{ Ορθογ. } \zeta\lambda\xi = \left. \begin{array}{l} \text{Ορθογ. } \zeta\xi\lambda \\ \text{Τετραγ. } \xi\lambda \end{array} \right\} (2) \\
 & \text{Καὶ Ορθογ. } \lambda\xi\zeta = \left. \begin{array}{l} \text{Ορθογ. } \zeta\xi\lambda \\ \text{Τετραγ. } \zeta\xi \end{array} \right\} (3) \\
 & \text{Α' } \rho\alpha \text{ Τετράγ. } \zeta\lambda = \left. \begin{array}{l} \text{δις Ο'ρθ. } \zeta\xi\lambda \\ \text{Τετ. } \xi\lambda \\ \text{Τετ. } \zeta\xi \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Α' λ λ ω ς.

κ. 169.

Ἀναγεγράφω ἀπὸ τῆς ζλ Εὐθείας Τετράγωνον (4) τὸ ζλδη, καὶ ἀχ-
θεΐσης τῆς Διαμέτρου ηλ ἐπὶ τῷ ζηλ Τριγώνῳ, διὰ τε τὰς ἰσας Πλευρὰς ζη
ἔ ζλ, ἔ δὴ ἔ διὰ τὴν κατὰ τὸ ζ' ὀρθὴν Γωνίαν, ἔσονται αἱ ὑπὸ ζηλ, ἔ ζλη
ἡμίσειαι (6) Ο'ρθῆς, ἔ ἀλλήλαις ἰσαι· διὰ γὰρ τῷ ξ Σημεῖν, ἤχθω πρὸς
τὴν ζη (6) Παράλληλος ἡ ξκ, ἥτις Παράλληλος ἔσαι ἔ τῇ λδ, τεμεῖ δὲ καὶ
τὴν Διάμετρον ηλ κατὰ τὸ γ. Διὰ δὲ τῷ Σημεῖν γ, Παράλληλος ὁμοίως
ἤχθω τῇ ζλ ἔ τῇ ηδ, ἡ δι. Ἐπεὶ τοίνυν ἀπασαί αἱ τῷ Τετραγώνῳ ζδ Γω-
νίαι Ο'ρθαὶ εἰσιν, ἔσονται δὴ ἔ πάντα τὰ παραλληλόγραμμα ζγ, ξι, θκ,
γδ ὀρθογώνια (7). Ἐπεὶ δὲ καὶ αἱ ξκ καὶ ζη Παράλληλοι, ἔσαι ἡ ἐκτὸς
Γωνία (8) λγξ, ἴση τῇ ἐντὸς ἔ ἀπεναντίον ζηλ, ἥτοι τῇ ὑπὸ ζλη ἡμι-
σεῖα οὕτῃ Ο'ρθῆς. Ἀ' ρα ἐπὶ τῷ λξγ Τριγώνῳ αἱ ξγ, ξλ, ἴσαι (9) εἰσὶν·
ἰσαι δὲ ἔ τῷ Ο'ρθογωνίῳ ξι (10) αἱ ἀπεναντίον Πλευραὶ ξλ, γι, ἔ ξγ, λι.
Τὸ ἄρα ξι (11) Τετράγωνόν ἐστιν ἀπὸ τῆς ξλ Εὐθείας. Ὡσαύτως δὲ δειχ-
θήσεται ἔ τὸ θκ Τετράγωνον εἶναι ἀπὸ τῆς Εὐθείας θγ, ἥτοι (12) ἀπὸ
τῆς ζξ. Α' λλ' αἱ γξ ἔ ξλ ἰσαι εἰσιν, ἔσαι τὸ ζγ Ο'ρθογώνιον ὑπὸ τῶν ζξ
καὶ ξλ Τμημάτων τῆς δοθείσης Εὐθείας ζλ. Α' λλὰ γὰρ τὰ Ο'ρθογώνια ζγ
ἔ γδ ἴσα (13) εἰσὶ, διὸ ἔ ἅμα ληφθέντα, ἴσα ἐστὶ τῷ δις Ο'ρθογωνίῳ τῷ
ὑπὸ τῶν Τμημάτων ζξ, ξλ. Ἐνθεντοὶ τὸ ζδ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης
Εὐθείας ζλ, ἴσον ἐστὶ τοῖς θκ ἔ ξι, τοῖς ἀπὸ τῶν Τμημάτων ζξ, ξλ Τε-

(1) Β. τῷ β. (2) Γ. τῷ β. (3) Διὰ τὴν αὐτ. (4) Μς. τῷ α. (5) Πόρ. Σ. τῆς
ΑΒ. τῷ α. (6) ΑΔ. τῷ α. (7) Πόρ. α. τῆς ΑΔ. τῷ α. (8) ΚΘ. τῷ α. (9) ε. τῷ α.
(10) ΑΔ. τῷ α. (11) Ορ. ΑΒ. τῷ α. (12) ΑΔ. τῷ α. ἔ ἀξ. ιο. (13) ΜΓ. τῷ α.

τραγώνις, σὺν τοῖς ζγ εἰ γδ, ἤτοι σὺν τῷ δις Ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῶν αὐτῶν Τμημάτων. Ο. Ε. Δ.

Ἐςω ἀριθμὸς 10 εἰς μέρη 7 εἰ 3 τετμημένος. Τὸ Τετράγωνον $10 \times 10 = 100$, ἴσον τοῖς Τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ τῶν μερῶν $7 \times 7 = 49$, εἰ $3 \times 3 = 9$, καὶ τοῖς δυτίν Ὀρθογωνίοις $7 \times 3 = 21$, εἰ $7 \times 1 = 21$. Ἡ γὰρ ἔςω ἀριθμὸς 12, εἰς μέρη 10 εἰ 2 τετμημένος· τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης $12 \times 12 = 144$, ἴσον ἐστὶ τοῖς Τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ τῶν μερῶν $10 \times 10 = 100$, εἰ $2 \times 2 = 4$, συνάμα τῷ δις Ὀρθογωνίῳ $10 \times 2 = 20$, ἤτοι $2 \times 10 \times 2 = 40$. Ἐξ ὧν εἰ ἡ τῆς Τετραγωνικῆς ρίζης Ἐξαγωγή ἡρτῆται.

Πορίσματα.

Ἐκ τούτων δὲ φανερὸν, ὅτι τὰ Παραλληλόγραμμα ξι εἰ θκ, τὰ περὶ Α'. τὴν Διάμετρον (ὅρα τὸ ἀνωτ. Σχῆμα) τῷ Τετραγώνῳ, Τετράγωνῳ ἐστὶ.

Καὶ ὅτι ἡ Διάμετρος παντὸς Τετραγώνου δίχα τέμνει τὰς δι' ὧν ἄγεται Β'. Γωνίας. Ἐστὶ γὰρ ἡ μὲν ὑπὸ ζλδ Ὀρθή, ἡ δὲ ὑπὸ ζλη ἡμίσεια Ὀρθῆς.

Καὶ ὅτι τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας, τῇ ἀπὸ τῆς ὅλης ἐστὶ Γ'. κ. 170. Τετραγώνῳ τεταρτημόριον. Ἐὰν γὰρ αἱ ξκ, θι παραλλήλῳ κινήσῃ πρὸς τὰ μεσαιτάτω τῶν ζλ, ηδ, εἰ ηζ, δλ χωρήσωσι, τότε δύο Ὀρθογώνια ζγ, γδ, εἰ τὰ δύο Τετράγωνα ξι, εἰ θκ εἰς τέσσαρα Τετράγωνα ἀλλήλοις ἴσα ἀποτελευνύσῃσι τὰ λγ, ικ, γη, ξθ. Ὡσαύτως δὲ δήλων εἰ ὅτι εἰ ἅπαν Ὀρθογώνιον (ἢ γὼν εἰ ἀπλῶς ἅπαν Παραλληλόγραμμον) τὸ ὑπὸ δύο ὁποιωνῶν Εὐθείων, τῇ Ὀρθογωνίᾳ (ἢ καὶ τῇ Παραλληλογράμμῳ τῇ τῷ δοθέντι ἰσογωνίᾳ) τῇ ὑπὸ τῶν ἡμισειῶν ἐστὶ τετραπλάσιον.

Καὶ ὅτι ἅπαν Τετράγωνον ζβ ἴσον ἐστὶ τῷ δις Ὀρθογωνίῳ ζκ, ξθ τῷ Δ'. κ. 171. ὑπὸ τῇ τῆς Πλευρᾶς τῇ Τετραγώνῳ δλ, ἤτοι ζλ, εἰ τῆς ἡμισείας ταύτης, οἷον τῆς ζξ περιεχομένῳ. Καὶ ὅτι ἅπαν Παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ δις Παραλληλογράμμῳ τῷ ἰσογωνίῳ, τῷ ὑπὸ τῆς ἐτέρας τῶν Πλευρῶν εἰ τῇ ἡμίσειᾳ τῆς ἐτέρας.

Πρότασις Ε.

Ἐὰν εὐθεῖα Γραμμὴ (πφ) τμηθῇ εἰς ἴσα (κατὰ τὸ ρ) καὶ εἰς ἄνισα κ. 172. (κατὰ τὸ σ), τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης Τμημάτων (πσ, σφ) περιεχόμενον Ὀρθογώνιον, μετὰ τῇ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν (ρσ) Τετραγώνῳ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας (πρ) Τετραγώνῳ.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ο'ρθογών. } \pi\sigma\phi = \text{Ο'ρθ. } \pi\rho \times \sigma\phi \\ \text{Ο'ρθ. } \rho\sigma\phi \end{array} \right\} (1)$$

$$\text{Ο'ρθογ. } \pi\rho \times \sigma\phi = \text{Ο'ρθ. } \rho\sigma\phi$$

Τετρέςιν (2)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ο'ρθογ. } \pi\rho \times \sigma\phi = \text{Ο'ρθ. } \rho\sigma\phi \\ \text{Τετρ. } \sigma\phi \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Αρ'α Ο'ρθογ. } \pi\sigma\phi = \text{Ο'ρθογ. } \rho\sigma\phi \\ \text{Ο'ρθογ. } \rho\sigma\phi \\ \text{Τετρ. } \sigma\phi \end{array} \right\}$$

Προσιδέω κοινῇ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ ρσ, ἔτσι

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ο'ρθογών. } \pi\sigma\phi \\ \text{Τετράγ. } \rho\sigma \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \text{Ο'ρθογ. } \rho\sigma\phi \\ \text{Ο'ρθογ. } \rho\sigma\phi \\ \text{Τετραγ. } \sigma\phi \\ \text{Τετραγ. } \rho\sigma \end{array} \right\} = \rho\sigma^T = \pi\rho^T (3).$$

Α' λ λ ω ς.

α 173.

Ἐπὶ τῆς Εὐθείας πφ, ἀπὸ τῆς ἡμισείας ρφ ἀναγεγράφω Τετράγωνον (4) τὸ ρζ, ἔχον ἀχθείσης τῆς Διαμέτρου φε, διὰ τῆ σ ἤχθω (5) Παράλληλος τῇ ρε ἢ φζ, ἢ ση τέμνεται τὴν Διάμετρον κατὰ τὸ θ, καὶ διὰ τῆ θ ὁμοίως (6) Παράλληλος τῇ πφ ἢ τῇ εζ, ἢ κι τέμνεται τὴν ρε κατὰ τὸ λ καὶ διὰ τῆ π ὡσαύτως Παράλληλος τῇ ρλ ἢ πκ. Ἐπειδὴ τοίνυν τὸ σι Τετράγωνόν ἐστι (7) περὶ τὴν Διάμετρον τῆ Τετραγώνου ρζ, ἔτσι σφ = σθ (8) · ἔπει τὸ σλ Παραλληλόγραμμόν (9) ἐστίν, ἔτσι ἔστι ἢ ρσ = λθ (10) ἔστι ρλ = σθ = σφ. Ἐστὶ δὲ (11) πρ = ρφ = φζ· τὸ ἄρα πλ = σζ (12). Κοινῇ προσιδέω τὸ ρη, ἔστι ἔτσι πθ + λη = ρζ. Ἀλλὰ τὸ μὲν πθ ἐστὶ τὸ Ο'ρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν τῆς πφ Εὐθείας ἀνίσων Τμημάτων πσ, σφ, τὸ δὲ λη ἐστὶ (13) τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν ρσ, τὸ δὲ ρζ (14) ἐστὶ τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ρφ. Ἐὰν ἄρα Εὐθεῖα ἢ πφ εἰς ἴσα τμηθῇ κατὰ τὸ ρ, ἔστι εἰς ἄνιστα κατὰ τὸ σ, ἔτσι κτ. Ο. Ε. Δ.

Ἐκ δὲ δὴ ταύτης ἔστι τῆς ἐφεξῆς Προτάσεως ἡρηται ἡ Γεωμετρικὴ κα-

(1) Α. τῆ β. (2) Γ. τῆ β. (3) Δ. τῆ β. (4) Μς. τῆ α. (5) ΑΔ. τῆ α. (6) Αὐτ. (7) Α. Πόρ. τῆς ἀνωτ. (8) Ο'ρ. λβ. Βιβ. α. (9) Ε'κ κατ. (10) ΑΔ. τῆ α. (11) Εξ ὑποθ. (12) Ο'ρ. λβ. Βιβ. α. (13) Α. Πόρ. τῆς ἀνωτ. καὶ ΑΔ. τῆ α. Βιβ. (14) Ε'κ κατ.

τασκευῇ τῶν Ἐξισώσεων τῶν τετραγωνικῶν καὶ διατεθειμένων, ὡς ἐπὶ τῆς ΚΗ'. καὶ ΚΘ'. τῷ ζ'. Βιβλ. πληρέστερον ἀναπτυχθήσεται.

Ἐς αὐτοὺς ἀριθμοὺς ὁ 8 εἰς ἴσα τετμημένος 4 καὶ 4, καὶ εἰς ἄνισα 5 καὶ 3. Καὶ ἔσαι τὸ Ὀρθογώνιον $5 \times 3 = 15$ μετὰ τῷ Τετραγώνῳ $ixi = 1$, ἴσον τῷ Τετραγώνῳ $4 \times 4 = 16$.

Πορίσματα.

Ἐκ δὲ τούτων φανερὸν ὅτι τὸ Ὀρθογώνιον ποσφ τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων Τμημάτων, ἔλαττον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας περ, ἢ ρφ Τετραγώνῳ. Δ.

Ὅσω ἔγγιον τῷ μέσῳ ρ τὸ κατὰ τὴν ἄνισον τομὴν Σημεῖον σ γίνεται, τοσούτῳ μείζον ἔσαι τὸ ποσφ Ὀρθογώνιον· ὅσω τε ἀπωτέρω ἐκείνου, τοσούτῳ ἔλαττον τῷ το γβ. Τὸ γὰρ σ προσιὸν μὲν ἔλαττοϊ, ἀπὸν δὲ ἐπαύξει τὴν μεταξὺ τῶν τομῶν ρσ, ἐνθεντοὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ρσ Τετράγωνον (1) μειωθήσεται ἀναλόγως, καὶ αὐξηθήσεται. Ἀλλὰ διὰ τὴν ἐν χερσὶ Πρότ. ρστ + ποσφ = περτ· ὅσω ἄρα ἦττον τὸ ρστ, τοσούτῳ μείζον ἔσαι τὸ Ὀρθογ. ποσφ, καὶ τὸναντίον. Β.

Ὅσω ἔγγιον γίνεται τὸ Σημεῖον σ τῷ μέσῳ ρ, τοσούτῳ ἔλαττον ἔσαι τὸ ἄθροισμα τῶν Τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν ἀνίσων Τμημάτων ποσ, σφ· ὅσω δὲ πορρωτέρω, τοσούτῳ μείζον ἔσαι τὸ ἰζηδὲν ἄθροισμα. Καὶ γὰρ (2) ποστ = ποστ + σφτ + 2 ποσφ· ἀλλὰ μὴν ἔγγυτέρω μὲν τῷ σ τῷ ρ γινομένου μείζον τὸ ποσφ καθίσταται Ὀρθογώνιον (3), ἀπωτέρω δὲ ἔλαττον, τὸ ἄρα σ τῷ μέσῳ ρ προσιὸν, ἐλάσσονα τὰ (ποστ = σφτ) Τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων Τμημάτων, μείζονα δὲ ἀπὸν ἀπὸ τῶν αὐτῶν ἀναδεικνυσί. Γ.

Ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων Τμημάτων Ὀρθογώνιον ποσφ, τετράκις λιφθὲν, ἔλαττον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης περ Τετραγώνῳ. Τὸ γὰρ ἀπὸ τῆς ἡμισείας περ Τετράγωνον, τετράκις λιφθὲν, ἴσον (4) τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης περ Τετραγώνῳ. Ἀλλὰ τὸ ποσφ Ὀρθογ. (5) ἔλαττον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ρφ, ἢ περ Τετραγώνῳ, ἐνθεντοὶ καὶ τὸ ποσφ τετράκις, ἔλαττον τῷ ἀπὸ περ Τετραγ. τετράκις· ἔλαττον ἄρα καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης περ Τετραγώνῳ. Ο. Ε. Δ.

Ἐὰν Εὐθεῖαι δύο ἴσαι ἀλλήλαις αβ, καὶ γδ, ἑτῶτοι κατὰ τὰ Σημεῖα ε καὶ ζ τετμημέναι, ὥστε τὸ Ὀρθογώνιον αεβ τὸ ὑπὸ τῶν Τμημάτων τῆς ἐτέρας ἴσον εἶναι τῷ Ὀρθογώνιῳ γζδ, τῷ ὑπὸ τῶν Τμημάτων τῆς ἐτέρας, ἔσαι Ε. κ. 174.

(1) Δε. ε. (2) Δ. τῷ β. (3) Πόρ. αὐτ. (4) Πόρ. Γ. τῆς Δ. τῷ β. (5) Πόρ. α. τῶν Δ' αὐτῶν.

δὴ ἡ τῶν τὰ Τμήματα ἴσα τῷ ἑτέρῳ τὸ ἕτερον, τῷ μείζονι τὸ μείζον, καὶ τῷ ἐλάσσονι τὸ ἐλάσσον, ἐὰν ἢ τὰ Τμήματα ἄνιτα. Ἐὰν μὲν γὰρ τὰ e ἢ z Σημεῖα εἰς ἴσα τέμνη τὰς Εὐθείας $αβ$ ἢ $γδ$, δῆλον ὅτι τὸ μὲν $αε = γζ$, τὸ δὲ $εβ = ζδ$. Ἐὰν δὲ ἄλλως, τετμήσθωσαν δὲ αἱ $αβ$ ἢ $γδ$, ἢ μὲν κατὰ τὸ $μ$, ἢ δὲ κατὰ τὸ $ν$, ἄμφω εἰς ἴσα. Οὕτω γὰρ ἐπεὶ τὰ τέτων ἡμίση $μβ$, ἢ $νδ$, ἴσα (1) ἐστὶ, πάντως ἢ $μβ^T = νδ^T$ (2). Ἀλλὰ γὰρ διὰ τὴν Πρότ. $μβ^T = αεβ + με^T$, καὶ $νδ^T = γζδ + νζ^T$, ἄρα (3) $αεβ + με^T = γζδ + νζ^T$. Ἐὰν οὖν ἀφαιρεθῇ τὰ ὑποτεθέντα ἴσα Ὁρθογώνια (4), ἔσται $με^T = νζ^T$, καὶ δὴ ἢ $με = νζ$. Τέτων οὖν ταῖς ἴσαις $αμ$ ἢ $γν$ προσθεισῶν, ἢ ἀπὸ τῶν ἴσων $μβ$, $νδ$ ἀφαιρεθεῖσων, ἔσται (5) $αε = γζ$, ἢ $εβ = ζδ$. Ο. Ε. Δ.

κ. 175. ζ.

Τὸ Ὁρθογώνιον τὸ ὑπὸ τε τῶ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς δυσὶν Εὐθεῖων $πρ$ καὶ $ρσ$, ἴσον ἐστὶ τῇ διαφορᾷ τῶν Τετραγώνων, τῶν ἀπὸ αὐτῶν τέτων τῶν Εὐθειῶν, καὶ γὰρ $πσφ + ρσ^T = πρ^T$. Ἐὰν οὖν ἀφέλῃς ἐκ ατέρωθεν $ρσ^T$, ἔσται $πσφ = πρ^T - ρσ^T$. Ἐπεὶ δὲ $πσ$, τῶν Εὐθειῶν $πρ$ καὶ $ρσ$ τὸ ἄθροισμά ἐστι, ἢ (διότι $ρφ = πρ$) $σφ$ ἐστὶν ἡ τέτων διαφορὰ, δῆλον τὸ προτεθέν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ζ.

κ. 176.

„Ἐὰν εὐθεῖα Γραμμὴ ($αβ$) τμηθῇ δίχα (κατὰ τὸ $γ$), προσεθῇ „δέ τις αὐτῇ Εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας (ἢ $βζ$), τὸ ὑπὸ τῆς ὄλης σὺν τῇ „προσκειμένη ($αζ$), ἢ τῆς προσκειμένης ($βζ$) περιεχόμενον Ὁρθογώνιον, „μετὰ τῇ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ($γβ$) Τετραγώνῳ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγ- „κειμένης ἐκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς (ἔστι δὲ „αὕτη ἢ $γζ$) ἀναγραφέντι Τετραγώνῳ.

Πρώτως ἐπ' εὐθείας ἐτέρωθεν τὴν $λα$ ἴσην τῇ προσκειμένη $βζ$. Καὶ δὴ ἐπεὶ ταῖς ἴσαις $αγ$ ἢ $βγ$, ἴσαι προστετέθησαν αἱ $αλ$ ἢ $βζ$, ἔστι πάντως ἢ $λζ$ εἰς ἴσα τετμημένη κατὰ τὸ $γ$, ἢ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ $β$.

Ἄρα Ὁρθογών. $λβζ$ } = Τετραγ. $γζ$. (6).
Τετραγ. $γβ$ }

Ἀλλὰ γὰρ ἐπεὶ ἴσαι ἀλλήλαις αἱ $λβ$ ἢ $αζ$

Ὁρθογών. $λβζ = αζβ$

(1) Δ' Ε. ζ. (2) Δ' Ε. ιθ. (3) Δ' Ε. α. (4) Δ' Ε. γ. (5) Δ' Ε. β. ἢ γ. (6) ἡ δὲ τὴν ἀνωτ.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Α'ρα Ο'ρθογών. αβ} \\ \text{Τετραγ. γβ} \end{array} \right\} = \text{Τετραγ. γζ.}$$

Α λ λ ω ς.

Κατασκευάσαντες τὸ σχῆμα ὡςπερ ἐ τὸ ἀνωτέρω, ἔχομεν τὸ ἀν Ο'ρ- κ.
 θογώνιον, ὑπὸ τῆς ὅλης συν τῇ προσκειμένῃ (ἦτοι ὑπὸ τῆς αζ) καὶ τῆς
 προσκειμένης (ἦτοι τῆς βζ). τὸ δὲ κη Τετραγώνον ἀπὸ τῆς γβ, ἣτις ἐστὶν
 ἡμίσεια τῆς αβ. τὸ δὲ γε Τετραγώνον ἀπὸ τῆς γζ, ἣτις ἐστὶν ἡ συγκει-
 μένη ἔκ τε τῆς ἡμισείας ἐ τῆς προσκειμένης. Ἐπεὶ οὖν τὸ Ο'ρθογώνιον δε-
 ῖσον ἐστὶ τῷ Ο'ρθογώνῳ ακ (καὶ γὰρ (1) ακ = κβ = δε (2)), τὸ δὲ λοι-
 πὸν χωρίον ἐκατέρωσε κοινόν, δηλὸν τὸ προτεθέν.

Ἐςω ἀριθμὸς 6 τετμημένοις εἰς ἴσα 3 καὶ 3, τῷ δὲ προσεθείδω ἀριθ-
 μὸς 2, καὶ ἔσαι τὸ Ο'ρθογώνιον $8 \times 2 = 16 + 3 \times 3$ τῷ Τετραγώνῳ $9 = 5 \times 5 = 25$.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Ἐὰν οὖν τρεῖς Εὐθεῖαι αζ, γζ, βζ ἀριθμητικῶς ᾖσιν ἀνέλογοι (του 4. κ. 178.
 τέσιν ἐὰν ἡ αγ διαφορὰ τῆς πρώτης πρὸς τὴν δευτέραν, ἴση ᾖ τῇ διαφορᾷ
 γβ τῆς δευτέρας πρὸς τὴν τρίτην), ἔσαι τὸ Ο'ρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν ἀκρῶν
 αζ, ἐ βζ, συνάμα τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς διαφορᾶς αγ, ἢ γβ, ἴσον
 τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης γζ.

Ἐνδεῖντο ἐ τὸ Ο'ρθογώνιον αν (ἐπὶ τῷ προαναγραφέντος Σχήματι) B.
 ἑλαττόν ἐσι τῷ Τετραγώνῳ γε, τῇ ἐλλείψει τῷ Τετραγώνῳ κη. Ἡ δὲ ἔλλει-
 ψις, τῆς αβ-δοθείσης, ἢ αὐτὴ αὐτὴ μένει, ὅσησ' ἐ τύχοι ἢ βζ Εὐθεῖα αὐ-
 ξήσεως. Παρὰ δὲ τὴν αὐξήσιν αὐτῆς ταύτης τῆς βζ, τὸ Ο'ρθογώνιον αν τῷ
 Τετραγώνῳ γε μᾶλλον ἐ μᾶλλον ἐγγυτέρω γίνεται καὶ λόγῳ καὶ Σχήμα-
 τι, ὡς τὴν διαφορὰν κη, πρὸς τὸ Μέγεθος τῶν Σχημάτων αν καὶ γε, ὡς
 μηδὲ λόγῳ τινὸς οὕταν τέως ὀλιγωρεῖσθαι.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ζ.

„Ἐὰν εὐθεῖα Γραμμὴ (αβ) τμηθῇ ὡς ἔτυχῃ (κατὰ τὸ γ), τὸ ἀπὸ τῆς κ. 179.
 ὅλης (αβ) ἐ τὸ ἀφ' ἐνὸς τῶν Τμημάτων (αγ), τὰ συναμφότερα Τετράγωνα,

(1) λ. Βιβ. α. (2) μυ. Βιβ. α.

„ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῆς ὅλης (αβ) καὶ τῷ εἰρημένῳ Τμήματος (αγ) περιε-
 „χομένῳ Ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ Τμήματος (γβ) Τετραγώνῳ.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Τετράγωνον τὸ ἀπὸ αβ} = \text{Ὀρθογ. βγα δις} \\ \text{Τετραγ. αγ} \\ \text{Τετραγ. γβ} \end{array} \right\} (1)$$

Πρόδες ἐκατέρωστε Τετράγ. αγ, καὶ ἔσαι

$$\left. \begin{array}{l} \text{Τετράγ. αβ} \\ \text{Τετραγ. αγ} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{βγα Ὀρθ. δις} \\ \text{Τετραγ. αγ δις} \\ \text{Τετραγ. γβ.} \end{array} \right.$$

Ἀλλὰ τὸ βγα Ὀρθογ. δις, σὺν τῷ Τετραγ. τῷ ἀπὸ αγ δις, ἴσα
 ἐστὶ (2) τῷ ὑπὸ βγα δις. Ἐὰν ἄρα ἀντὶ τοῦ βγα δις, καὶ ἀντὶ τοῦ Τετραγ.
 αγ δις, ληφθῇ τὸ βαγ δις, ἔσαι.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Τετράγ. αβ} \\ \text{Τετραγ. αγ} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{βαγ Ὀρθογ. δις} \\ \text{βγ Τετραγ.} \end{array} \right.$$

Α' λ λ ω ς.

κ. 180.

Κατασκευαζόμενος τῷ Σχήματος ὡς εἶναι τὸ μὲν αδ, Τετράγωνον τὸ
 ἀπὸ τῆς ὅλης αβ, τὸ δὲ αλ, Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τοῦ Τμήματος αγ, ἀχ-
 θεΐσης τε τῆς Διαμέτρου εβ, καὶ προσεβληθείσης τῆς λγ ἕως τοῦ ζ, ἥτις αἱ
 τέμνη καὶ τὴν Διάμετρον κατὰ τὸ η, διὰ δὲ τοῦ η Παραλλήλου τῇ αβ καὶ
 εδ, ἀχθεΐσης τῆς δι, εἰσονται αἱ δρ καὶ δι Εὐθείαι, τῇ τε ὅλῃ αβ, καὶ ἀλλή-
 λαις ἴσαι (ἀμείλειτοι γὰρ δρ = δα + αρ, καὶ αρ (3) = αγ, καὶ αδ = γη
 (4) = γβ (4). ἔνθεντοι δρ = αγ + γβ = αβ = δι (6).), καὶ δε, δι ὁ-
 μοίως τῷ Τμήματι αγ, καὶ ἀλλήλαις ἴσαι. Ἐπεὶ τοίνυν ἴσα τὰ δύο Ὀρθο-
 γώνια δδ καὶ δλ, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης αβ, καὶ τῷ Τμήματι αγ· ταῦτα δὲ με-
 τὰ τῷ γι Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τοῦ ἑτέρου Τμήματος γβ, τὸ αὐτὸ πληρῶσι χω-
 ρίον, ὃ καὶ τὰ Τετράγωνα αλ, καὶ αλ, τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ὅλης ὄν, τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ
 Τμήματος, δηλοῦν τὸ προτεθέν.

Ἐς τὸν ἀριθμὸν 13 ὡς ἔτυχεν τετμήμενος εἰς 9 καὶ 4, καὶ ἔσαι $13 \times 13 =$
 169 · καὶ $9 \times 9 = 81$, τὰ συναμφότερα Τετράγωνα 250, ἴσα τῷ $13 \times 9 =$
 117 , καὶ $13 \times 9 = 117$, καὶ $4 \times 4 = 16$, ἅπαρ ἅμα 250.

(1) Δ. τῷ β'. (2) Γ. τῷ β'. (3) Εκ κατασκ. καὶ Ὁρ. ΑΒ, τῷ α'. (4) λδ. Βιβ. α.
 (5) Δ. Πόρ. τῆς Δ. τῷ β'. (6) ΛΔ. τῷ α'.

Διὰ μὲν τῆς Δ'. τῶν τε παρόντος Βιβλίου Περιτάσεων τὸ ἀπὸ τῆς Δυνάμει ρίζης παρίσταται ἡμῖν Τετράγωνον, διὰ δὲ τῆς Ζ'. ταύτης, τὸ ἀπὸ τῆς λοιπῆς ρίζης Τετράγωνον ὑπεξάγεται, κατὰ τὸ ἐφεξῆς

Π ό ρ ι σ μ α .

Εἰν ἀπὸ Εὐθείας τῆς αβ, μέρος ἀφαιρεθῇ τὸ αγ, τὸ ἀπὸ τῆς λοιπῆς βγ Τετράγωνον, τὸ τε ἀπὸ τῆς ὅλης αβ, ἢ τὸ ἀπὸ τῆς ἀφαιρεθέντος Τμήματος αγ, συναμφοτέρων τῶν Τετραγώνων, διαφέρει τῷ δις ὑπὸ βγ Ὁρθογώνῳ τῷ ὑπὸ τε τῆς ὅλης ἢ τῆς ἀφαιρεμένης Τμήματος περιεχομένῳ. κ. 181.

Καὶ γὰρ δυνάμει τῆς ἀνὰ χεῖρας Προτ. Ζ'. $\alpha\beta^T + \alpha\gamma^T = 2\beta\alpha\gamma + \gamma\beta^T$.
Εἰν ἔν ἐκατέρωθεν ἀφαιρεθῇ τὸ $2\beta\alpha\gamma$, ἔσται $\alpha\beta^T + \alpha\gamma^T - 2\beta\alpha\gamma = \gamma\beta^T$.
Ο. Ε. Δ.

Τῷ ὅτι δι' ἐπὶ τῇ ἀνωτέρω ἀναγεγραμμένῃ Σχήματος τὸ γι Τετράγ. = Τετραγ. αδ, ἢ Τετραγ. αλ — Ὁρθογ. βδ — Ὁρθογ. βλ· τατέσι $\beta\gamma^T = \alpha\beta^T + \alpha\gamma^T - 2\beta\alpha\gamma$.

Π ρ ό τ α σ ι ς Η.

„Εἰν Εὐθεῖα (ΛΖ) εἰς ἴσα τμήθῃ (κατὰ τὸ ι), προσεθῇ δέ τις αὐτῇ
„Εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας (ἢ ΖΞ), τὸ ὑπὸ τῆς ἡμισείας (ιλ), ἢ τῆς συγκεκλιμένης
„ἔκτε τῆς ἡμισείας ἢ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς (ιξ) περιεχόμενον Ὁρ-
„θογώνιον (λιξ), τετράκις ληφθὲν μετὰ τῷ ἀπὸ τῆς προσκειμένης (ΖΞ) Τε-
„τραγώνῳ, ἴσον ἐστὶ τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης ἢ τῆς προσκειμένης,
„ὡς ἀπὸ μιᾶς (λξ) ἀναγραφέντι. κ. 182.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Τετράγ. ιξ} \\ \text{Τετραγ. ιξ} \end{array} \right\} = 2\lambda\lambda\lambda \text{ Ὁρθογ.} \quad (1).$$

Τατέσιν, ἐπεὶ δὲ ὑποθέσωμεν $\lambda\lambda = \iota\lambda$, ἢ $\iota\lambda^T = \lambda\iota^T$ · ἢ $\xi\iota\lambda = \xi\lambda\iota = \lambda\xi$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Τετράγ. ιξ} \\ \text{Τετραγ. λι} \end{array} \right\} = 2\lambda\xi \text{ Ὁρθογ.}$$

ΖΞ Τετραγ.

Εἰν ἄρα τοῖς ἴσοις κοινον προδῆς τὸ $2\lambda\xi$, ἔσται

$$\left. \begin{array}{l} \text{Τετράγ. ιξ} \\ \text{Τετραγ. λι} \\ \text{Ὁρθ. λξ δις} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} 2\lambda\xi \text{ Ὁρθογ.} \\ 2\lambda\xi \text{ Ὁρθογ.} \\ \xi\lambda \text{ Τετραγ.} \end{array} \right\}$$

Τατέσι (2) Τετράγ. λξ =

(1) Διὰ τὴν ἀνωτ. (2) Δ. τῷ α'.

α 183.

Α'ναγεγράφω Τετράγωνον τὸ ξδ ἀπὸ τῆς ὅλης εἰς τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς λξ, καὶ ἄχθεισθαι τῆς Διαμέτρου λα, διὰ τῶν ι εἰς ζ Σημεῖον ἤχθωσαν Παράλληλοι τῇ λδ καὶ ξα, αἱ ιβ καὶ ζε τέμνεσαι τὴν Διάμετρον κατὰ τὰ Σημεῖα ρ εἰς σ· διὰ δὲ τῶν Σημεῖων ρ εἰς σ, ἤχθωσαν Παράλληλοι τῇ λξ καὶ δα, αἱ τν καὶ μθ. Ἐπεὶ γὺν ἡ λζ εἰς ἴσα τέτμηται κατὰ τὸ ι, ἔσαι (1) τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας λι Τετράγωνον τι, τεταρτημόριον τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης λζ Τετραγώνῳ μζ· καὶ τὰ τέσσαρα Ὀρθογώνια τι, ρζ, μρ, οπ (2) Τετράγωνα ἔσαι ἁλλήλοισι ἴσα. Ἐτι παρὰ τὰς ζπ, πσ τῶν ἴσων Τετραγώνων Πλευράς, καὶ δι' αὐτὸ τῷτο ἴσας, ἴσα ἔσαι (3) καὶ τὰ Ὀρθογώνια ζν, πθ. Ἀλλὰ ζθ (4) = δσ, εἰς πθ (5) = σβ. Ἀρα εἰς ζν (6) = μβ· καὶ δὴ τὰ τέσσαρα Ὀρθογώνια ζν, πθ, σβ, μβ ἴσα ἁλλήλοισι ἔσαι. Ἐπεὶ τοίνυν ἴσαι ἁλλήλαις εἰσὶ εἰς αἱ λι, ιρ, ἔσαι τὸ ρξ (τετέστι τὸ Τετράγωνον ρζ μετὰ τῷ Ὀρθογώνῳ ζν) Ὀρθογώνιον ὑπὸ τε τῆς ἡμισείας λι, εἰς ιξ τῆς συγκεκλιμένης ἔκτε τῆς ἡμισείας εἰς τῆς προσκειμένης περιεχόμενον. Τὰ ἄρα τέσσαρα Τετράγωνα τι, ρζ, μρ, οπ μετὰ τῶν τεσσάρων Ὀρθογώνων ζν, πθ, βμ, βσ, ἴσα τῷ Ὀρθογώνῳ τῷ ὑπὸ τῆς ἡμισείας λι, εἰς τῆς συγκεκλιμένης ἔκτε τῆς ἡμισείας εἰς τῆς προσκειμένης, ἥτοι τῆς ιξ περιεχομένῳ, τετράκις ληφθέντι. Ἀλλ' ἔστι δὴ εἰς τὸ εθ Τετράγωνον ἀπὸ τῆς προσκειμένης ζξ. Ἐὰν ἄρα Εὐθεῖα ἡ λζ εἰς ἴσα τμηθῇ κατὰ τὸ ι, προσεθῇ δέ τις αὐτῇ Εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ ζξ, ἔσαι κτ. Ο. Ε. Δ.

Ἐςω ἀριθμὸς 12 εἰς ἴσα 6 εἰς 6 τετμημένος, καὶ τῷτω προσκείσθω ἀριθμὸς ἕτερος 4. Καὶ ἔσαι τὰ τέτταρα Ὀρθογώνια $10 \times 6 = 240$ μετὰ τῷ Τετραγώνῳ $4 \times 4 = 16$, ἴσα τῷ Τετραγώνῳ $16 \times 16 = 256$.

Ὅ δὲ Εὐκλείδης οὕτω προτίθησι τὸ Θεώρημα.

„Ἐὰν, φησὶν, εὐθεῖα Γραμμὴ (ιξ) τμηθῇ ὡς ἔτυχεν (κατὰ τὸ ζ), τὸ „τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης (ιξ) εἰς ἑνὸς τῶν Τμημάτων (ιζ) περιεχόμενον Ὀρ- „θογώνιον, μετὰ τῷ ἀπὸ τῷ λοιπῷ Τμήματος (ζξ) Τετραγώνῳ, ἴσον εἴ- „σιν τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης (ιξ) εἰς τῷ εἰρημένῳ Τμήματος (ιζ), ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγ- „ράσθαι Τετραγώνῳ.

Οἷον ἔσω ἀριθμὸς 10 εἰς 6 εἰς 4 τετμημένος, καὶ ἔσαι τὸ παραγόμενον

(1) Πόρ. γ'. τῆς Δ. τῷ β. (2) Πόρ. τὸ αὐτό. (3) Δε. τῷ α'. (4) ΜΓ. τῷ α'.
(5) Διὰ τὴν αὐτήν. (6) Δ'ε. γ.

$$6 \times 10 \text{ τετράκις ληφθὲν} = 240, \text{ καὶ } 4 \times 4 = 16 \cdot \text{ τὰ δὲ } 240 + 16 = 256 \\ = 10 + 6 \times 10 + 6.$$

Π ρ ό τ α σ ι ς Θ.

„Εάν εὐθεία Γραμμὴ (αγ) τμηθῇ εἰς ἴσα (κατὰ τὸ β), ἢ εἰς ἄνισα κα- κ. 184.
 „τὰ τὸ ζ, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης Τμημάτων (αζ, ζγ) Τετράγωνα,
 „διπλάσιά ἐστι τῷ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας (αβ), ἢ τῷ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν το-
 „μῶν (βζ) Τετραγώνου.

$$\text{Τετράγ. αζ (1)} = \left. \begin{array}{l} \text{Ο'ρθ. 2αβζ} \\ \text{Τετραγ. αβ} \\ \text{Τετραγ. βζ} \end{array} \right\} \text{ Κοινῇ οὖν προσεδέντο· τῷ Τετραγ. ζγ. ἔσται.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Τετράγ. αζ ?} \\ \text{Τετραγ. ζγ ?} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \text{Ο'ρθογ. 2αβζ δις} \\ \text{Τετρ. αβ} \\ \text{Τετρ. βζ} \\ \text{Τετρ. ζγ} \end{array} \right\}$$

Α'λλ' Ο'ρθογ. αβζ = γβζ, ὅτι αβ = βγ ἐξ ὑποθέσεως.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Α'ρα Τετράγ. αζ ?} \\ \text{Τετραγ. ζγ ?} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \text{Ο'ρθογ. γβζ δις} \\ \text{Τετρ. αβ} \\ \text{Τετρ. βζ} \\ \text{Τετρ. ζγ} \end{array} \right\}$$

Α'λλὰ γβζ δις + ζγ^τ (2) = βγ^τ + βζ^τ· ἤτοι = αβ^τ + βζ^τ,
 εἰαν ἄρα ταῦτα ἀντ' ἐκείνων τεθῇ ἔσται

$$\left. \begin{array}{l} \text{Τετράγ. αζ ?} \\ \text{Τετραγ. ζγ ?} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \text{Τετραγ. αβ δις ?} \\ \text{Τετραγ. βζ δις ?} \end{array} \right\}$$

Α' λ λ ω ς.

Ἦχθω ἀπὸ τῷ β τῇ αζ πρὸς ὀρθὰς (3) ἴση τῇ βα ἢ βε, καὶ ἐπιζευχ- κ. 185.
 δεῖτων τῶν βε, ζε, ἤχθω διὰ τῷ γ ἢ γπ Παράλληλος τῇ βε (4), καὶ διὰ
 τῷ π ἢ πι Παράλληλος τῇ αζ· ἐπεζεύχθω δὲ ἡ απ· Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ αβε
 Γωνία ἐστὶν Ο'ρθή, ἢ αἱ αβ καὶ βε ἴσαι ἀλλήλαις, ἔσονται δὲ (5) αἱ ὑπὸ
 βαε, ἢ βεα ἡμίσειαι Ο'ρθῆς. Διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον ἢ αἱ ὑπὸ βεζ ἢ βζε,

(1) Δ. τῷ β. (2) Ζ. τῷ β. (3) ΙΔ. τῷ α'. (4) ΙΔ. τῷ α'. (5) Πόρ. ικ'. τῷ ε
 ΑΒ. τῷ α'.

ήμισ. Ο'ρθής, ὡς ἡ ὅλη ὑπὸ ἀεπ Ο'ρθή. Ἀλλὰ καὶ τῆς ὑπὸ εβζ Ο'ρθῆς ὅσης, ἥτε ὑπὸ εηπ, καὶ ὑπὸ πγζ (1) ἔσονται Ο'ρθαί· ἡμίσεια δὲ Ο'ρθῆς ἡ ὑπὸ ηεπ, ἡ ἄρα λοιπὴ (2) ὑπὸ ηπε, ἡμίσεια Ο'ρθῆς καὶ αὐτή. ἄρ' οὖν (3) καὶ ηε ἰση τῇ ηπ. Ὡσαύτως δὲ δείξεις καὶ τὴν γπ ἴσην εἶναι τῇ γζ. Τὸ τοῖνον ἀπὸ αε Τετράγωνον ἴσον (4) τοῖς ἀπὸ αβ καὶ βε, διπλάσιον δὲ (5) τῷ ἀπὸ αβ. Παραπλησίως δὲ καὶ τὸ ἀπὸ επ, διπλάσιον τῷ ἀπὸ ηπ (6). Ἀλλ' ἡ ηπ ἰση τῇ βγ (7), τὸ ἄρα ἀπὸ επ διπλάσιον καὶ τῷ ἀπὸ βγ. Ἀλλὰ μὲν τὸ ἀπὸ απ ἴσον τοῖς ἀπὸ αβ καὶ επ ἅμα (8) ληφθεῖσι· τὸ ἄρα ἀπὸ απ διπλάσιον τῶν ἀπὸ αβ καὶ βγ. Τῷ δὲ δὴ ἀπὸ απ ἴσα (9) τὰ ἀπὸ αγ καὶ γπ (τῆς ὑπὸ αγπ Ο'ρθῆς ὅσης, ἐπεὶ (10) καὶ ἡ ὑπὸ πγζ Ο'ρθὴ δέδεικται), τὰ ἄρα ἀπὸ αγ καὶ γπ διπλάσια τῶν ἀπὸ αβ καὶ βγ. Ἀλλὰ γὰρ καὶ ἡ γπ ἰση ἐδείχθη τῇ γζ, τὰ ἄρα ἀπὸ αγ καὶ γζ, ἅπερ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἀντίων Τμημάτων Τετράγωνον, διπλάσια τῶν ἀπὸ αβ καὶ βγ, τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ἡμισείας ὅτος, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν. Ο. Ε. Δ.

Ἐς ὧ ἀριθμοὶ 32 τετμημένοι εἰς ἴσα 16 καὶ 16, καὶ εἰς ἄνισα 20 καὶ 12. Τὰ τοῖνον Τετράγωνα $20 \times 20 = 400$ καὶ $12 \times 12 = 144$, διπλάσιά ἐστὶ τῶν Τετραγώνων τῷ τε $16 \times 16 = 256$, καὶ $4 \times 4 = 16$.

Π ρ ό τ α σ ι ς I.

κ. 186.

„Εὰν εὐθεῖα Γραμμὴ (Ζι) τμηθῇ δίχα (κατὰ τὸ λ), προσεθῇ δὲ τις αὐτῇ Εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας (ἡ ιξ), τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ (Ζξ), καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης (ιξ), τὰ συναμφότερα Τετράγωνα, διπλάσιά ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας (Ζλ), καὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκτε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς (λξ) ἀναγραφέντος Τετραγώνου.

Προσκειῶμεν δὴ ἐπ' εὐθείας ἡ πζ ἐτέρωθεν ἰση τῇ ιξ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ Ζλ, ιλ ἴσαι εἰσὶν ἐξ ὑποθ., καὶ ταύταις ἴσαι προστεθήσαν, ἔσονται αἱ πλ, ξλ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ ὅτως ἡ πξ εἰς ἴσα τέτμηται κατὰ τὸ λ, καὶ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ ι. Καὶ τοῖνον

$$\left. \begin{array}{l} \text{Τετράγ. πι} \\ \text{Τετραγ. ιξ} \end{array} \right\} (11) = \left. \begin{array}{l} \text{Τετραγ. πλ δις} \\ \text{Τετραγ. λι δις} \end{array} \right\}$$

(1) ΚΗ. τῷ α'. (2) ΑΒ. τῷ α'. (3) ζ. τῷ α'. (4) ΜΖ. τῷ α'. (5) Α. Πόρ. τῆς ΜΖ. τῷ α'. (6) Διὰ τὴν αὐτ. (7) ΑΔ. τῷ α'. (8) ΜΖ. τῷ α'. (9) Διὰ τὴν αὐτ. (10) ΙΓ. τῷ α'. (11) Διὰ τὴν αὐτ.

Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ πι Τετράγ. ταυτόν ἐστι τῷ ἀπὸ ζξ, ἢ Τετράγ. τὸ ἀπὸ πλ τῷ ἀπὸ λξ, ἢ τὸ ἀπὸ λι τῷ ἀπὸ ζλ.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ἀρα Τετράγ. ζξ} \\ \text{Τετράγ. ιξ} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \text{Τετράγ. λξ} \\ \text{Τετράγ. ζλ} \end{array} \right\} \text{ δις.}$$

Α' λ λ ω ς.

Ἦχθω ἀπὸ τῆ λ Σημεῖν, τῇ Εὐθείᾳ ζι πρὸς Ὁρθάς (1) καὶ ἴση τῇ ζλ ἢ λι, ἢ λε, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ζε, ιε. διὰ δὲ τῆ ε ἤχθω ἢ επ (2) Παράλληλος τῇ ζξ, καὶ διὰ τῆ ξ, ἢ επ Παράλληλος τῇ λε. Καὶ ἐπεὶ Παράλληλοί εἰσιν αἱ ελ, πξ, αἱ εἰ, πξ μὴ Παράλληλοι, προαχθεῖσαι (3) συμπεσοῦνται πε, οἷον κατὰ τὸ η· ἐπεξεύχθω δὲ ἢ ἢ ζη. Ἐπειδὴ τοῖνυν ἢ ὑπὸ ζλε Ὁρθή, αἱ δὲ ζλ, λε ἴσαι, ἔσονται αἱ ὑπὸ λζε, λεζ (4) ἡμίσειαι Ὁρθῆς. Παραπλησίως δὲ καὶ αἱ ὑπὸ λιε ἢ λει (5) ἔσονται ἡμίσειαι Ὁρθῆς· κἀντεῦθεν ἢ ὅλη ὑπὸ ζει Ὁρθή. Ἡ δὲ δὴ Γωνία ὑπὸ ξιη, ἴση τῇ λιε (6), ἢ ἐπομένως Ὁρθῆς ἡμίσεια καὶ αὐτή. Διὰ δὲ τὰς Παραλλήλους ελ, πη, ας τέμνει ἢ ζξ κατὰ τὸ λ ἢ ξ, ἢ τὴν ὑπὸ ελξ Ὁρθήν, ἔσαι δὴ καὶ ἢ ἐναλλάξ (7) ὑπὸ ηξλ Ὁρθή. Ταύτητοι ἐπὶ τῇ Τριγώνῳ ηξι τῆς μὲν κατὰ τὸ ξ Γωνίας Ὁρθῆς ὅσης, τῆς δὲ κατὰ τὸ ι ἡμισείας Ὁρθῆς, ἔσαι ἢ ἢ ὑπὸ ξιη ἡμίσεια (8) ἢ αὐτὴ Ὁρθῆς· διὸ ἢ αἱ Πλευραὶ ξη, ξι ἀλλήλαις (9) ἴσαι. Τῆς γὰρ τῆ λπ Παραλληλογράμμου Γωνίας τῆς κατὰ τὸ λ Ὁρθῆς ὅσης, ἢ ἢ ἀπεναντίον π Ὁρθή (10) ἂν εἴη. Ὡς ε ἢ ἐπὶ τῇ επη Τριγώνῳ, τῆς μὲν κατὰ τὸ π Ὁρθῆς δευδεύσης, τῆς δὲ κατὰ τὸ η ἡμισείας Ὁρθῆς, ἔσαι δὴ καὶ ἢ ὑπὸ πεη Ὁρθῆς ἡμίσεια (11), αἶτε Πλευραὶ πε, πη ἀλλήλαις (12) ἴσαι. Ἀλλὰ γὰρ ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ λπ, επ = λξ (13), ἄρα ἢ λξ = πη. Ἡ δὴ μὲν οὖν ἐπὶ τῇ ὀρθογωνίῳ Τριγώνῳ ζλε, ἴσων οὐσῶν τῶν ζλ καὶ λε, τὸ ἀπὸ ζε Τετράγωνον (14) διπλάσιόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ζλ· ἐπὶ δὲ τῇ ὀρθογωνίῳ Τριγώνῳ επη, ἴσων ὁμοίως ὡσὼν τῶν πε, πη, τὸ ἀπὸ εη Τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι (15) τῷ ἀπὸ επ, ἢ λξ, ἥτοι τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔχτε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης. Τὰ δὲ τοῖ ἀπὸ ζε ἢ εη Τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ (16) τῷ ἀπὸ τῆς ζη Τετραγώνῳ, ταῦτέσι τοῖς Τετραγώνοις (17) τοῖς δυοῖ,

(1) ΙΑ. τῆ α'. (2) ΛΑ. τῆ α'. (3) Πόρ. α'. τῆ Σχολ. τῆς ΛΑ. τῆ α'. (4) Πόρ. ια'. τῆς ΛΒ. τῆ α'. (5) Δι' αὐτ. (6) ΙΕ. τῆ α'. (7) ΚΘ. τῆ α'. (8) Πόρ. ζ'. τῆς ΛΒ. τῆ α'. (9) ζ. τῆ α'. (10) ΛΔ. τῆ α'. (11) ζ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τῆ α'. (12) ζ. τῆ α'. (13) ΛΔ. τῆ α'. (14) Πόρ. α'. τῆς ΜΖ. τῆ α'. (15) Διὰ τὴν αὐτ. (16) ΜΖ. τῆ α'. (17) Διὰ τὴν αὐτ.

τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΖΞ, τῆς ἕστε τῆς ὅλης ἔ τῆς προσκειμένης, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΞΗ, ἥτοι τῆς ΙΞ, ἥτις ἐστὶν ἡ προσκειμένη. Τὰ ἄρα Τετράγωνα (1) τότε ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ ΖΞ, ἔ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης ΞΙ, τὰ συνζυφότερα, διπλάσιά ἐσι τῶν Τετραγώνων τῆς ἀπὸ τῆς ἡμισείας ΖΛ, ἔ τῷ ἀπὸ τῆς συγκεκλιμένης ἕστε τῆς ἡμισείας ἔ τῆς προσκειμένης, ΛΞ, τῶν συναμφοτέρων. Ο. Ε. Δ.

Ἐς τὴν Ἀριθμὸς 40 τετμημένος εἰς ἴσα 20 καὶ 20, καὶ τῷ προσκείδω ἀριθμὸς 14. Καὶ ἔσαι δὴ τὰ Τετράγωνα $54 \times 54 = 2916$, καὶ $14 \times 14 = 196$. διπλάσια τῶν Τετραγώνων $20 \times 20 = 400$, ἔ $34 \times 34 = 1156$.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΑ.

„Τὴν δοθεῖσαν Εὐθεΐαν (αβ) τεμεῖν (κατὰ τὸ γ), ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῶν ἑτέρων τῶν Τμημάτων περιεχόμενον Ὀρθογώνιον (αβγ), ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῶ λοιπῶ Τμήματος (αγ) Τετραγώνῳ. —

κ. 188.

Ἀπὸ α ἤχθω Κάθετος πρὸς Ὀρθὰς τῇ αβ ἴση ἢ αζ· ἀχθεῖσα δὲ διχα τετμήσθω κατὰ τὸ χ, ἐπεξεύχθω δὲ ἡ χβ· τῇ δὲ χβ ἀπὸ τῆς ζα προαχθεῖσης, ἀποτετμήσθω ἴση ἢ χι· εἴτα ἀποτετμήσθω ἡ αγ ἴση τῇ αι. Φημι ὡς γέγονεν οὕτω τὸ ἐπιταχθεῖν. Πληρωθέντος γὰρ τῶ Τετραγώνῳ αβσζ, καὶ ἀχθεῖσθαι διὰ γ πρὸς ὀρθὰς, ἔ πληρωθέντος ἔ τῶ Ὀρθογωνίῳ ζιλεξ, ἐπεὶ ἡ ζα εἰς ἴσα μὲν τέτμηται κατὰ τὸ χ, προτετέθη δὲ τις αὐτῇ Εὐθεΐα ἐπ' εὐθείας ἢ αι, ἔσαι:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ὀρθογ. ζια} \\ \text{Τετραγ. χα} \end{array} \right\} = (2) \text{ Τετραγ. χι} = \chi\beta^T (3) = \chi\alpha^T_{\alpha\beta^T} \left. \right\} (4).$$

Ἀφαιρεθέντος τοίνυν ἑκατέρωθεν τῶ χα^τ

ἔσαι Ὀρθογ. ζια = Τετραγ. αβ ἥτοι ζλ = ασ.

Ἀφαιρεθέντος δὲ ἔ τῶ κοινῷ χωρίῳ αξ, ἔσαι αλ = γτ.

Ἀλλὰ τὸ αλ Τετράγωνον ἐστὶν ἀπὸ τῆς αγ, ἐπειδὴ αγ = αι ἐκ κατασκευῆς, τὸ δὲ γσ Ὀρθογώνιον ἐστὶ τὸ ὑπὸ αβγ, ὅτι τῇ βσ ἴση ἢ αβ· τὸ ἄρα Ὀρθογώνιον αβγ, ἴσον τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ αγ· Τέτμηται ἄρα ἡ δοθεῖσα Εὐθεΐα αβ, κατὰ τὸ αἰτηθέν.

(1) Δξ. α. (2) ζ. τῶ β. (3) Εκ κατ. ἔ Δξ. ιι. (4) ΜΖ. τῶ α.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Τῶν ἐπὶ τῷ παρόντος Βιβλίου Προτάσεων τὰς μὲν πρώτας δέκα, ἃ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ἀληθεύσας κατελήφαμεν, τὴν δὲ δὴ πρώτην ἐπὶ τῇ δεκάτῃ ἀριθμητικῶς ἐκθέσθαι ἀμήχανον, οὐδὲ γὰρ ἔστιν εὐρεῖν ἀριθμὸν τοιαύτην τινὰ τὴν τομὴν ἐπιδεχόμενον, ὡς τὸ ὑπὸ τῷ ὅλῳ ἃ τῷ ἑτέρῳ τῶν μερῶν παραγόμενον, ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῷ λοιπῷ Τετραγώνῳ· ὃ δὴ περὶ ἃ ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν ΚΘ'. τῷ τρίτῳ Βιβλίῳ τῶν στοιχείων τῆς Ἀριθμητικῆς, τῆς προσηκῆσαι τετύχηκε δεξιῶς. Ἀλλ' εὗροι ἄντις ἐν ἀρρήτοις ἀριθμοῖς Πηλικότητας, τοῖς γραμμικοῖς Τμήμασιν αὐτῶν καὶ γβ ἀντιστοιχίσας. Οἶον ἔσω αβ = 2, ἀμέλειτοι προσκείσθω δυαδικὸς ἀριθμὸς διαιρετέος εἰς μέρη, ὧν τὸ ἀπὸ τῷ μείζονος Τετραγώνου, ἴσον εἴη τῷ Ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ τῆς ὅλης δυάδος ἃ τῷ ἐλάττονος. Ἔσται γὰρ τὸ μὲν τῶν μερῶν μείζον αὐτῶν = $\sqrt{5} - 1$. τὸ δὲ γβ τὸ ἐλάττον = $3 - \sqrt{5}$. Οὕτω γὰρ ἡ μόνον τὸ ἐκ τετῶν τῶν μερῶν ἄθροισμα ἴσον τῇ δυάδι παρίσταται, ἀλλὰ δὴ ἃ τὸ ἀπὸ τῷ μείζονος μέρους Τετραγώνου, ἃ τὸ ὑπὸ τῆς δυάδος καὶ τῷ ἐλάττονος μέρους ἀνακόπτει, ἴσα ἄμφω τῇ αὐτῇ Πηλικότητι, ἣτις ἐστὶν $6 - 2\sqrt{5}$. Τῆς γὰρ προτεθείσης τομῆς θαυμασία ἡ δύναμις, περὶ ἣς ὄρα τὴν Α'. τῷ ε'. Βιβλίῳ.

Π ρ ό τ α σ ι ς IB.

„Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις Τριγώνοις (αγβ), τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεΐαν
 „Γωνίας (γ) ὑποτείνουσας (αβ) Πλευρᾶς Τετραγώνου, μείζον ἐστὶ τῶν ἀπὸ π. 189.
 „τῶν τὴν ἀμβλεΐαν Γωνίαν περιεχουσῶν Πλευρῶν (αγ, βγ) Τετραγώνων,
 „τῷ περιεχομένῳ δις, ὑπὸ τῇ μιᾷ (βγ) τῶν περὶ τὴν ἀμβλεΐαν Γωνίαν
 „(αγβ), ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσαν ἡ Κάθετος πίπτει (αζ), ἃ τῆς ἀπολαμβανομέ-
 „νης ἐκτὸς (ζγ) ὑπὸ τῆς Κάθετος πρὸς τῇ ἀμβλεΐᾳ Γωνίᾳ.

Καὶ γὰρ Τετράγ. αβ (1) = $\left. \begin{matrix} \alpha\zeta^T \\ \beta\zeta^T \end{matrix} \right\}$

Ἀλλὰ μὲν $\beta\zeta^T = \beta\gamma^T$
 $\left. \begin{matrix} \gamma\zeta^T \\ 2\beta\gamma\zeta \end{matrix} \right\} (2).$

(1) ΜΖ. τῷ α'. (2) δ. Βιβ. β'.

Ἄρα τεθέντων τῶν ἰσῶν ἀντὶ τῶν ἰσῶν, ἔσαι

$$\left. \begin{array}{l} \text{Τετράγ. } \alpha\beta^T = \alpha\zeta^T \\ \beta\gamma^T \\ \gamma\zeta^T \\ 2\beta\gamma\zeta \end{array} \right\}$$

Ἐπεὶ τοῖνυν τὰ $\alpha\zeta^T + \gamma\zeta^T = \alpha\gamma^T$ (1), ἔσαι Τετράγ. $\alpha\beta = \alpha\gamma^T + \beta\gamma^T + 2\beta\gamma\zeta$. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΓ.

κ. 190.

„Ἐπὶ παντός Τριγώνῳ (αγβ) τὸ ἀπὸ τῆς τῆς ὀξείας Γωνίας (γ) ὑποτεινέσης Πλευρᾶς (αβ) Τετράγωνον, ἑλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τῆς ὀξείας Γωνίας περιεχυτῶν Πλευρῶν (αγ, βγ) Τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δις Ὄρθογωνίῳ (βγζ), ὑπὸ τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξείαν Γωνίαν (ἤτοι τῆς βγ), ἐφ' ἣν πίπτει ἡ Κάθετος (αζ), καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς (γβ) ὑπὸ τῆς Καθέτου (αζ) πρὸς τῇ ὀξείᾳ Γωνίᾳ (γ).

$$\left. \begin{array}{l} \beta\gamma^T (2) = 2\beta\zeta\gamma \\ \beta\zeta^T \\ \zeta\gamma^T \end{array} \right\}$$

$$\text{Καὶ } \alpha\gamma^T (3) = \left. \begin{array}{l} \zeta\gamma^T \\ \alpha\zeta^T \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Τὰ ἄρα δύο } \alpha\gamma^T + \beta\gamma^T = 2\beta\zeta\gamma \\ \beta\zeta^T \\ 2\zeta\gamma^T \\ \alpha\zeta^T \end{array} \right\}$$

Ἀλλὰ γὰρ τὸ βζγ Ὄρθογ. δις, μετὰ τῷ ἀπὸ ζγ Τετραγώνῳ δις, ἵσων ἐστὶ (4) τῷ δις ὑπὸ βγζ. Ἐὰν ἄρα ταῦτα ἀντὶ ἐκείνων τεθῇ, ἔσαι

$$\left. \begin{array}{l} \alpha\gamma^T + \beta\gamma^T = 2\beta\gamma\zeta \\ \beta\zeta^T \\ \alpha\zeta^T \end{array} \right\}$$

Τὰ δὲ διὰ $\alpha\zeta^T + \beta\zeta^T = \alpha\beta^T$ (5), εἰάν ἄρα καὶ τῷτο ἀντὶ ἐκείνων τεθῇ, $\alpha\gamma^T + \beta\gamma^T = 2\beta\gamma\zeta + \alpha\beta^T$.

Ταῦτίς τὰ ἀπὸ αγ καὶ βγ Τετράγωνα ὑπερέχει τὸ ἀπὸ αβ Τετράγωνον, τῷ δις Ὄρθογωνίῳ βγζ.

(1) MZ. τῷ α'. (2) δ. Βαβ. α'. (3) MZ. τῷ α'. (4) Γ. τῷ β'. (5) MZ. τῷ β'.

Π ό ρ ι σ μ α .

Ἐςαι δὲ ἕδεν ἥττον ἀληθείας ἐχομένη ἢ Πρότασις, καὶ εἰ Ἀμβλαίας τῆς κ. 191.
 ὑπὸ αβγ τυχέσης (1), ἢ αζ Κάθετος ἔξω τῷ Τριγώνῳ πεσέται ἐπὶ τῆς
 γβ Πλευρᾶς προσεβληθείσης. Ἡ δὲ δεῖξις σχεδὸν ἡ αὐτή, ἢ ὡς πῶς ἔχυστα.

$$\begin{array}{l} \text{Τετράγ. αγ (2) = Ὁρθογ. γβζ δὲς} \\ \left. \begin{array}{l} \text{Τετρ. γβ} \\ \text{Τετρ. αβ} \end{array} \right\} \end{array}$$

Κοινὴ τοίνυν προσεδέντος τῷ Τετραγώνῳ ἀπὸ γβ

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \text{Ἐςαι Τετράγ. αγ} \\ \text{Τετραγ. γβ} \end{array} \right\} = \begin{array}{l} 2\gamma\beta\zeta \text{ Ὁρθογ.} \\ 2 \gamma\beta \text{ Τετραγ.} \\ \alpha\beta \text{ Τετραγ.} \end{array} \end{array}$$

$$\text{Ἀλλὰ τὸ } 2\gamma\beta\zeta \text{ Ὁρθογ.} + 2\gamma\beta^{\Gamma} (3) = 2\beta\gamma\zeta$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ἀρα Τετράγ. αγ} \\ \text{Τετραγ. γβ} \end{array} \right\} = \begin{array}{l} 2\beta\gamma\zeta \text{ Ὁρθογ.} \\ \alpha\beta \text{ Τετραγ.} \end{array}$$

Α' λ λ ω ς .

Καθόλου δ' ἂν μάλλον δειχθεῖν ἢ τῷ Παρόντος ΙΓ'. εἴτε ἐντὸς τῷ Τρι-
 γώνῳ τῆς πρὸς Κάθετον ἀγομένης πιπτέσης, εἴτε ἔκτός, ὡς

$$\begin{array}{l} \beta\gamma^{\Gamma} + \gamma\zeta^{\Gamma} (4) = 2\beta\gamma\zeta + \beta\zeta^{\Gamma}. \text{ Ἐὰν οὖν προσεθῇ } \alpha\zeta^{\Gamma}, \text{ ἔσαι } \beta\gamma^{\Gamma} \\ + \gamma\zeta^{\Gamma} + \alpha\zeta^{\Gamma} = 2\beta\gamma\zeta + \beta\zeta^{\Gamma} + \alpha\zeta^{\Gamma}. \text{ Ἀλλὰ } \gamma\zeta^{\Gamma} + \alpha\zeta^{\Gamma} = \alpha\gamma^{\Gamma}. \text{ Ἀρα} \\ \beta\gamma^{\Gamma} + \alpha\gamma^{\Gamma} = 2\beta\gamma\zeta + \beta\zeta^{\Gamma} + \alpha\zeta^{\Gamma} (5). \text{ Ἀλλὰ καὶ } \beta\zeta^{\Gamma} + \alpha\zeta^{\Gamma} (6) = \\ \alpha\beta^{\Gamma}. \text{ Ἀρα } \beta\gamma^{\Gamma} + \alpha\gamma^{\Gamma} = 2\beta\gamma\zeta + \alpha\beta^{\Gamma}. \text{ Ο. Ε. Δ.} \end{array}$$

Σ χ ό λ ι ο ν Α'.

Ἐκ δὲ ταύτης ἡ τῆς ΜΖ'. τῷ α'. , ἡ παντὸς Τριγώνου, οὗ δῆλαί μιν
 ἂν εἶεν αἱ Πλευραὶ, ἄβατον δὲ τὸ χωρίον, λαβεῖν ἔξεσαι τὴν καταμέτρησιν.
 Διὰ γὰρ τῶν τῶν Θεωρημάτων, καὶ τοῖς ἐμποδῶν ἰσαμένῃ τῷ τόπῳ, τὴν εἰς
 τῷτο ἀπαιτημένην Κάθετον ἐξευρίσκομεν. Ἡ δὲ τοι Κάθετος ἡμῖν διὰ τῷ ἡμί-
 σης τῆς Πλευρᾶς ἐφ' ἣν πίπτει πολλαπλασιασθεῖσα, τὸ χωρίον ἀποδώσει τὸ
 τῷ Τριγώνῳ, ὡς δῆλον ἐκ τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν ΜΑ'. τῷ α'.

(1) Πόρ. γ'. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (2) ΙΒ. τῷ β'. (3) Γ. τῷ α'. (4) Ζ. τῷ β'. (5)
 ΜΖ. τῷ β'. (6) Διὰ τὴν αὐτή.

κ. 192. Οἷον ἔσω Τρίγωνον τὸ τυχὸν $αβγ$, ἡ τότε δῆλαι αἱ Πλευραὶ· δεῖ οὖν δῆλιν καταστῆσαι ἡ τὴν Κάθετον $αζ$, τὴν ἀπότινος Γωνίας $α$, ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν αὐτὴν Πλευρὰν $βγ$ ἀγομένην.

κ. 193. Τὸ γὰρ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς $αβ$, τῆς τὴν ὀξείαν Γωνίαν $γ$ ὑποτείνουσας, ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ἀδροίσματος τῶν Τετραγώνων τῶν ἀπὸ $αγ$ ἡ $βγ$, ὑπόλοιπον (1) ἔσται τὸ δις Ὀρθογ. $βγζ$. Ἐνθεντοὶ καὶ τὸ λοιπὸν τῷ δε τὴν ἡμίσειαν (τετέστι τὸ Ὀρθογ. $βγζ$) διὰ τῆς προδήλου ἕτης Πλευρᾶς $βγ$ διελόμενος, ἔξει Εὐθεΐαν τὴν $γζ$. Καὶ ἐὰν ἄρα τὸ ἀπὸ $γζ$ Τετράγωνον ἀφέλῃς ἀπὸ τοῦ Τετραγώνου τῷ ἀπὸ $αγ$, κομίσει δὴ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ $αζ$, οὗ περ ἡ Τετραγωνικὴ ῥίζα παρέξει τὴν Κάθετον $αζ$.

Κεῖδω γὰρ δὴ ἡ μὲν $αβ = 13$, ἡ δὲ $βγ = 14$, ἡ δὲ $αγ = 15$ · καὶ ἔσται $αβ^T = 169$, καὶ $βγ^T + αγ^T = 196 + 225 = 421$ · διὸ τὸ $2βγζ (= βγ^T + αγ^T - αβ^T = 421 - 169) = 252$. Καὶ ἐπομένως τὸ $βγζ = 126$, ἡ $γζ = 9$. Ἀρ' οὖν $αζ^T (= αγ^T - γζ^T = 225 - 81) = 144$, καὶ $αζ = 12$. Τὸ δὲ τῷ Τριγώνῳ χωρίον ἔσται $12 \times 7 = 6 \times 14 = 84$.

Δυνήσῃ δὲ αὐτὸ τέτο λαβεῖν καὶ διὰ τῆς $ΙΒ'$. Προτάσεως· ἀρκέσει γνημὴν ἡ $ΙΓ'$. εἰς τέτο. Οὐδὲν γάρ ἐστι Τρίγωνον, ἐφ' ὅτῳ ἡ ἀπότινος τῷ Γωνιῶν ἐπὶ τὴν ταύτην ὑποτείνουσαν Κάθετον, ἢ ἐντὸς αὐτῆς τῷ Τριγώνῳ πεσεῖται.

κ. 194. Ἀλλ' ἵνα μὴ ἡ τότε δεῖγμα τοῖς νεωτέροις προσδένται, ὅπως ἀμέλει ἡ διὰ τῆς $ΙΒ'$. ἐπὶ τῶν ἀμβλυγωνίων Τριγώνων, (ἐφ' ὧν ἐκτὸς συμβαίνει πίπτειν τὴν ἀπὸ τῆς ἑτέρας τῶν Ὀξείων Κάθετον) τὸ Πρόβλημα ἐπιλυόμεθα. Φέρε δὴ κεῖδω Τρίγωνον ἀμβλυγώνιον τὸ $αγβ$ · ἡ τότε ἡ μὲν $αγ = 20$, ἡ δὲ $αβ = 13$, ἡ δὲ $βγ = 11$. Καὶ ἔσται $αγ^T = 400$, καὶ $αβ^T + βγ^T = 169 + 121 = 290$. Ἐνθεντοὶ $αγ^T - αβ^T - βγ^T = 400 - 290 = 110 = 2γβζ$. Καὶ $γβζ = 55$, ἡ $βζ = 5$. Καὶ $βζ^T = 25$, ἡ $αβ^T - βζ^T = 169 - 25 = 144 = αζ^T$. Καὶ τοίνυν $αζ = 12$, καὶ $\frac{1}{2} αζ \times βγ = 6 \times 11 = 66$, ὅπερ ἐστὶ τὸ χωρίον τοῦ Τριγώνου $αβγ$.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν Β'.

κ. 195. Ἐπὶ παντὸς Τριγώνου ($αγβ$) ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ($α$) ἐπὶ τὴν Βάσιν ($γβ$) προσεβληθεῖσαν ἢν δέησοι, ἀχθῇ Κάθετος ἡ $αζ$, ἔσται ἡ διαφορὰ τῶν Τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν Πλευρῶν ($αγ$, $αβ$), ἴση τῷ δις Ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆς Βάσεως $γβ$, ἡ ($ζγ - \frac{1}{2} βγ$) τῆς ἀποστάσεως, ἢν ἡ Κάθετος ἔχει

(1) $ΙΓ$. τῷ β'.

ἀπὸ τῆς μέσης τῆς Βάσεως. Ὅρα τὴν Καθόλου Ἀριθμητ. Σελ. 103. κατὰ τὴν Α'. ἐκδοσιν.

Διὰ γὰρ δὴ ταύτην τὴν Πρότασιν $\alpha\gamma^T + \beta\gamma^T = \alpha\beta^T + 2\beta\gamma\zeta$. Ἐὰν οὖν ὑφέλῃ τις ἐκατέρωθεν $\alpha\beta^T + \beta\gamma^T$, ἔσται $\alpha\gamma^T - \alpha\beta^T = 2\beta\gamma\zeta - \beta\gamma^T$. Ἀλλὰ γὰρ $\beta\gamma^T (1) = 2\beta\gamma \times \frac{1}{2}\beta\gamma$. Ἄρα $\alpha\gamma^T - \alpha\beta^T = 2\beta\gamma \times \gamma\zeta - \frac{1}{2}\beta\gamma$. Φανερόν δὲ τὸ τῆς ἐπιφορᾶς. Ἐὰν γὰρ τὸς $2\beta\gamma \times \gamma\zeta - \frac{1}{2}\beta\gamma$ Παρά- γουται πολλαπλασιάσῃς, ἔξεις Παραγόμενον τὸ $2\beta\gamma\zeta - 2\beta\gamma \times \frac{1}{2}\beta\gamma$, ὡς ἀνωτέρω.

Ἐὰν δὲ αἱ Πλευραὶ $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ ἴσαι ᾖσι, ἐπιπεσεῖται πάντως ἡ $\alpha\zeta$ Κάθετος κατὰ (2) τὸ μέσον τῆς Βάσεως. Ὡς τε τὴν τε διαφορὰν τῶν ἀπὸ τῶν Πλευρῶν Τετραγώνων, καὶ τὴν τῆς Καθέτου ἀπὸ τῆς μεσαιτάτης τῆς Βάσεως ἀπόστασιν τέλεον ἐξαφανίζεσθαι. κ. 196.

Καὶ εἰ ἡ ἑτέρα τῶν πρὸς τὴν Βάσιν Γωνιῶν Ὀρθὴ ᾖ, οἷον ἡ β , ἡ Κάθετος $\alpha\zeta$ τῇ Πλευρᾷ $\alpha\beta$ εἰς ἓν συμπεσεῖται. Ἡ δὲ διαφορὰ τῶν ἀπὸ τῶν Πλευρῶν Τετραγώνων, τῷ Τετραγώνῳ αὐτῷ (3) τῷ ἀπὸ τῆς Βάσεως συνεξισωθήσεται. Ἡ δὲ τῆς Καθέτου ἀπὸ τῆς μέσης τῆς Βάσεως ἀπόστασις, ἴση ἔσται αὐτῇ τῇ ἡμισείᾳ τῆς Βάσεως. Τῷτοι καὶ τὸ δις Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τε τῆς Βάσεως καὶ τῆς τοσῆςδε ἀποστάσεως, ἦτοι τὸ ὑπὸ τῆς Βάσεως καὶ τῆς ἡμισείας τῆς Βάσεως (4), ἴσον ἔσται καὶ αὐτῷ τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς Βάσεως. Καὶ ἔσται ἄρα ἡ διαφορὰ τῶν Τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν Πλευρῶν, ἴση τῷ δις Ὀρθογώνῳ τῷ ὑπὸ τε τῆς Βάσεως, καὶ τῆς ἀποστάσεως ἣν ἔχει ἡ Κάθετος ἀπὸ τῆς μέσης τῆς Βάσεως. κ. 197.

Σ χ ό λ ι ο ν. Γ.

Ἐπὶ παντὸς Τριγώνου $\alpha\beta\gamma$ εἰάν ἀπὸ τῆς κορυφῆς α , Εὐθεῖα ἀχθῇ ἡ $\alpha\gamma$, τὴν Βάσιν $\beta\gamma$ δίχα τέμνῃς κατὰ τὸ γ , τὰ ἀπὸ τῶν Πλευρῶν $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ Τετραγώνων ἅμα ληφθέντα, διπλάτια ἔσται τῶν Τετραγώνων, τῆς τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς Βάσεως $\beta\gamma$, καὶ τῆς ἀπὸ τῆς διχοτομήσεως τὴν Βάσιν $\alpha\gamma$, ἅμω ληφθέντων. κ. 198.

Ἀπὸ τῆς κορυφῆς α , ἤχθω Κάθετος ἡ $\alpha\zeta$ τῇ Βάσει, καὶ πίπτέτω δὴ ἀχθεῖσα μεταξὺ τῶν Σημείων γ καὶ π (5). Καὶ ἔσται ἡ μὲν ὑπὸ $\alpha\gamma\beta$ Ἀμ-

(1) Πόρ. δ. τῆς Δ. τῆς β. (2) Αριθ. α. τῆς Σχολ. τῆς Κε. τῆς α. (3) Πρόβλ. β. κατὰ τὴν ΜΖ. τῆς α. (4) Δ. Πόρ. τῆς Δ. τῆς β. (5) Γ. Πόρ. τῆς ΔΒ. τῆς α.

βλεῖα, ἡ δὲ ὑπὸ αὐτῆς ὀξεία. Ἐνθεντοὶ (διὰ τὴν IB'.) $\alpha\beta\Gamma = \alpha\gamma\Gamma + \beta\gamma\Gamma + 2\beta\gamma\zeta$. Διὰ δὲ τὴν IG'. $\alpha\pi\Gamma = \alpha\gamma\Gamma + \gamma\pi\Gamma - 2\pi\gamma\zeta$. Ἀλλὰ μὲν $\beta\gamma = \pi\gamma$. Ἀρα καὶ $\gamma\beta\Gamma = \gamma\pi\Gamma$ (1), καὶ $2\beta\gamma\zeta = 2\pi\gamma\zeta$ (2). Διὸ καὶ $\gamma\beta\Gamma + \gamma\pi\Gamma = (3) 2\gamma\beta\Gamma$, καὶ $2\beta\gamma\zeta - 2\pi\gamma\zeta = 0$. Ἐὰν ἄρα τοῖς ἴσοις ἴσα προδῇς, τὰ ἀδροιζόμενα ἴσα ἔσται· καὶ τοίνυν $\alpha\beta\Gamma + \alpha\pi\Gamma = 2\alpha\gamma\Gamma + 2\beta\gamma\Gamma$. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α .

Τῶν αὐτῶν δὲ μενισσῶν, τῆς τε Βάσεως φημί βπ, καὶ τῆς Εὐθείας αὐτῆς τὴν Βάσιν διχοτομήσης, ὅπως ἂν ἄλλως ἢ πρὸς τὴν Βάσιν αὐτὴν κεκλιμένη, οἷον ἡ Αγ, τὸ ἀδροῖσμα τῶν ἀπὸ τῶν Πλευρῶν Τετραγώνων αἰ τὸ αὐτὸ ἔσαι. Αἰεὶ γὰρ $\alpha\beta\Gamma + \alpha\pi\Gamma = \alpha\beta\Gamma + \alpha\pi\Gamma$, καὶ ὅτως ἐν ἅπασιν.

Προσαρμοδεῖν δ' ἂν τετὶ τὸ Θεώρημα καὶ ταῖς τῶν Καμπύλων Ἀπτομέναις, καὶ Διαμέτροις, καὶ Τεταγμέναις. Οἷον ἀπτέδωσαν αἱ Εὐθεῖαι αβ, απ, Κωνικὴν οἰανδηποτὴν τομὴν, ἢ τομὰς ἀντιθέτως κατὰ τὰ Σημεῖα β καὶ π· καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ βπ, δίχα τετμήδω κατὰ τὸ γ· καὶ ἔσαι ἡ βγ ἢ ἡ πγ, Τεταγμένη πρὸς τὴν Διάμετρον αγ. Ἐνθεντοὶ τὰ Τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν Ἀπτομένων αβ, απ, διπλάσια ἔσαι τῶν Τετραγώνων, τῶ τε ἀπὸ τῆς Ἀπτομένης βγ, ἢ πγ, καὶ τῆς Διαμέτρου τῆς μεταξὺ τῆς τε Τεταγμένης, καὶ τῆς συνόδου τῶν Ἀπτομένων ἐναπολαμβανομένης αγ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΔ.

„Τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ (φχψ) ἴσον Τετράγωνον συζητάσθαι.

κ. 199.

Εὐθεῖαν λαβὼν τὴν τυχήσαν ια, ἐπ' αὐτῆς τῷ Εὐθυγράμμῳ φχψ, ἴσον σύσησον Παραλληλόγραμμον (4) ὀρθογώνιον τὸ γι, οὗ αἱ Πλευραὶ αἱ ια, γα, εἰν ἴσαι ἀλλήλαις ὥσι, αὐτὸ ἔσαι τὸ ζητούμενον Τετράγωνον. ἄντων δὲ ἡσῶν τὴν μείζονα Πλευρὰν ια προεκβαλὼν ἐπὶ τὸ λ, ὥστε τῆς αλ ἴσην εἶναι τῇ αγ, δίχα τέμε τὴν ιλ κατὰ τὸ ζ. Καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ ζ, Διαστήματι δὲ τῷ ζι, ἢ ζλ, Κύκλον γράψον· πρόαγε δὲ καὶ τὴν γα, ὥστε προαχθεῖσαν τῇ τῷ Κύκλῳ Περιφερείᾳ ἀπαντῆσαι κατὰ τὸ β· Φημί δὲ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς αβ Τετράγωνον, ἴσον εἶναι τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ φχψ.

Ἦχθω καὶ γὰρ Εὐθεῖα ἡ ζβ, καὶ ἐπεὶ ἡ ιλ Εὐθεῖα εἰς ἴσα τέτμηται κατὰ τὸ ζ, καὶ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ α, ἔσαι

(1) Δξ. ιι. (2) Λς. τῆ α. (3) Δξ. δ. (4) ΜΕ. τῆ α.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ορθογ. ιαλ} \\ \text{Τετρ. ζα} \end{array} \right\} (1) = \text{Τετραγ. ζλ} = (2) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ζβ} = (3) \\ \text{Τετρ. αβ} \end{array} \right\} \text{Τετρ. ζα.}$$

Αφαιρεθέντος ἄρα ἐκατέρωθεν τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ ζα, ἔσται

$$\text{Ορθογ. ιαλ} = \text{Τετραγ. αβ.}$$

Τετέστιν ἐπεὶ αἱ αγ, αλ ἴσαι εἰσιν, ἔσται τὸ Ορθογώνιον γι, ἥτοι τὸ Εὐθύγραμμον (4) φχψ = Τετραγ. αβ. Ο. Ε. Δ.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν .

Ἡ κατ' Εὐκλείδην κατασκευὴ, διὰ τῆς ΜΖ'. τῷ Α', τὸ Εὐθύγραμμον μετασχηματιζόμενον λαμβάνει εἰς Ορθογώνιον. Ἐπεὶ δέ τοι ἐργώδης ἡ μεταμορφωσις αὕτη τῷ Σχήματός ἐστι, ῥᾷδιον ἴσως τὸ πρόβλημα τόνδε τὸν τρόπον ἐπιλυθήσεται.

Τὸ δοθέν Εὐθύγραμμον εἰς τοσαῦτα Τετράγραμμα ἀναλολύσω εἰς ὅσα ἂν ἐξῇ. Εἰς' ἐκάστοις Τετραγράμμοις ἰδίᾳ (5), Ορθογώνια συνεχάσω ἴσα. Ἐὰν δέ τι ὑπόλοιπον ᾖ (ὡς ἐπὶ τῷ προτεθέντῳ Σχήματι), ἀπλᾶν Τρίγωνον οἷον τὸ φ, συνεχάσω δὴ (6) καὶ τῷ Ορθογώνιῳ ἴσον. Εἴτα ἐκάστοις Ορθογωνίοις, διὰ τῆς ἀνὰ χεῖρας Πρωτ. ΙΔ'. συνεχάσω Τετράγωνα ἴσα, καὶ τελευταῖον Τετράγωνον ἐν (7) τοῖς καίμένοις ἅπασιν ἴσον· καὶ ἔσται πάντως ἴσον ἢ τῷ δοθέντι Εὐθύγραμμῳ φχψ.

(1) Ε. τῷ β'. (2) Ἐντε κατασκ. ἢ τῷ Ορ. τῷ Κύκλῳ. (3) ΜΖ. τῷ α'. (4) Ε' κατασκ. (5) Σχόλ. Β. τῆς ΜΕ. τῷ α'. (6) Πρότ. τῆς ΜΒ. τῷ α'. (7) Πρόβλ. Α'. Σχόλ. τῆς ΜΖ. τῷ α'.

Τῶν σοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'.

Τὸ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις τῶν Σχημάτων τελεωτάτα, τὰ πάθη τὰ βασιμώτατα ἐπὶ τῷ παρόντος Βιβλίου δέκνυνται. Ὅσης δὲ τὸ Βιβλίον γέμει τῆς ὠφελείας, αὐτὸς ὁ Κύκλος περὶ οὗ ἡ πραγματεία, δῆλον καθίστησιν, ἀφ' ἧς τὰ ἐπὶ ὅλων τῶν μαθημάτων θαυμαζόμενα ὡς ἀπὸ πηγῆς πρόεισι πολυχεύμονος. Τύτων δὲ τὰ ἐπισημότερα τῶν Θεωρημάτων ἐς τὰ ἐφεξῆς, τὸ Ιζ', τὸ Κ', τὸ ΚΑ', καὶ ΚΒ', τὸ ΛΑ', καὶ ΛΒ', καὶ ΛΕ', καὶ Λς'.

Τοῖς δέ τοι πάθεσι τῷ Κύκλῳ ἐπισυνάπτεται καὶ ἡ διαφόρων Γραμμῶν πρὸς ἀλλήλας παράθεσις, τῶν μὲν ἐντὸς τῆς ἐκείνου Περιφερείας, τῶν δὲ καὶ ἔξωθεν ἐπ' αὐτὴν ἀγομένων. Ἐπὶ τύτοις δὲ καὶ ὅσα συμβαίνει τοῖς Κύκλοις ἐπιθεωρεῖται, ὅς Κύκλοι τέμνουσιν ἄλλοι, καὶ ὧν αὗ Κύκλοι, ἢ γὰρ Εὐθεῖαι εἰσὶν ἀπτόμεναι. Ἀλλὰ καὶ τῶν Γωνιῶν ὅσαι τε πρὸς τὸ Κέντρον, καὶ ὅσαι διήποτε πρὸς τὴν Περιφέρειαν εἰσὶν, ἀλλήλαις παρεξετάζονται. Εἴνιτε λόγῳ τὰ πρώτιστα οἰοεὶ τῆς πρακτικῆς Γεωμετρίας σοιχεῖα, ἅττα μάλιστα τῷ Κύκλῳ ἐξήρηται, ἐπὶ τῷ ἀνὰ χεῖρας Βιβλίῳ ἐκτίθεται.

Ὅ ρ ι σ μ ο ι.

- Α. Ἰσοὶ Κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ Διάμετροι ἢ αἱ Ἡμιδιάμετροι ἴσαι εἰσὶ.
- κ. 200. Β. Εὐθεῖα Κύκλῳ ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἡτις ἀπτομένη τῷ Κύκλῳ κατὰ τὸ β καὶ ἐκβαλλομένη αὐτὸν τέμνει τὸν Κύκλον.
- Γ. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἵτινες ἀπτόμενοι ἀλλήλων αὐτὰ τέμνουσιν ἀλλήλους.
- κ. 201. Δ. Ἐν Κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν τῷ Κέντρῳ (α) Εὐθεῖαι λέγονται (αἱ δγ, δλ), ὅταν αἱ ἀγόμεναι ἀπὸ τῷ Κέντρῳ ἐπ' αὐτὰς Κάθετοι (αμ, αν) ἴσαι εἴη. Ὡς εἴπερ αἱ ἀπὸ τῷ Κέντρῳ ἀγόμεναι Κάθετοι ὥσιν ἄνισοι, μᾶλλον τῷ Κέντρῳ ἀπέχειν εἰρήσεται (ἡ πρ) Εὐθεῖα, ἐφ' ἣν ἢ ἀπὸ τῷ Κέντρῳ Κάθετος (αμ) μείζων εἴη. ἥττον δὲ (ἡ στ) ἐφ' ἣν ἢ ἀπὸ τῷ Κέντρῳ (αν) ἐλάσσων.

Τμήμα Κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον Σχήμα ὑπὸ τε Εὐθείας καὶ Κύκλου Ε'. κ. 202.
Περιφερείας, ὅσον τὰ αδβ εἰς βγα. Ἡ δὲ αβ τῶν Τμημάτων ἐκατέρη Βάσις.

Γωνία ἐν Τμήματι ἐστὶν (ἢ ὑπὸ αεβ, καὶ ὑπὸ αδβ) ἡ περιεχομένη ὑπὸ εἰς.
εὐθεῶν Εὐθειῶν (αε εἰς βε, ἢ αδ εἰς δδ) τῶν ἐφ' ἐντι τῶν τῆς Περιφερείας Ση-
μείων (ὅσον εἰς ἢ δ) ἀπὸ τῶν περάτων τῆς Βάσεως (αβ) ἀγομένων.

Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσιν τὴν Γωνίαν Εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσιν τινα Περι- Ζ'.
φέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ Γωνία· ὅσον ἐν τῷ Σχήματι, ἐπὶ
τῆς Περιφερείας αγκυ.

Τομεὺς δὲ Κύκλου ἐστὶν, ὅταν πρὸς τῷ Κέντρῳ αὐτοῦ τῷ Κύκλῳ (κ) συστα- Η'.
θῇ ἡ Γωνία, τὸ περιεχόμενον Σχήμα ὑπὸ τε τῶν τὴν Γωνίαν περιεχουσῶν
Εὐθειῶν (κλ εἰς κμ), εἰς τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν Περιφερείας, ὅσον
τὸ κλμ.

Τμήματος δὲ Γωνία ἐστὶν, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε Εὐθείας καὶ Κύκλου Θ'.
Περιφερείας, ὅσον ἡ ὑπὸ βαγ, εἰς ἡ ὑπὸ βδλ, εἰς ἡ ὑπὸ βδδ.

Ἡ ἐντὸς τοῦ Κύκλου γεγραμμένη Εὐθεῖα βγ λέγεται τῶν τόξων βαγ Γ. κ. 203.
εἰς βιγ Ὑποτείνουσα, εἰς δὲ εἰς τῆς πρὸς τῷ Κέντρῳ ὑπὸ βδγ Γωνίας ὡσαύ-
τως Ὑποτείνουσα εἰς Χορδή. Καὶ εἰς ἀπὸ τοῦ πέρατος α τοῦ τόξου αβ, Διά-
μετρος ἀχθῇ ἡ αἰ, ἐπ' αὐτῇ δὲ ἀπὸ θατέρου πέρατος καὶ τῷ τόξῳ αβ,
πρὸς Ὁρθῆς ἡ βη, εἰς αὐτῇ τῶν τόξων βα εἰς βι, ἢ γὰρ τῶν πρὸς τῷ
Κέντρῳ Γωνιῶν ὑπὸ βδα εἰς ὑπὸ βδι, Ἡμίτονον ὀρθὸν ἢ εἰς ἀπλῶς Ἡμίτο-
νον, ἢ δὲ ηα εἰς αἰ τῷ τόξῳ αβ, ἢ τῆς ὑπὸ αδβ Γωνίας (ὡσπερ δὲ εἰς ἡ
ηι τῷ τόξῳ βι, ἢ τῆς ὑπὸ βδι) Ἡμίτονον πλάγιον. Εἰς δὲ προσεβληθεῖ-
σα ἡ Ἡμιδιάμετρος δβ, τῇ κατὰ τὸ α τοῦ Κύκλου ἀπτομένη ἐξ συμπίεση
κατὰ τὸ Σημεῖον ε, ἡ μὲν αε καλεῖται τῶν τόξων αβ εἰς βι, ἢ γὰρ τῶν
ὑπὸ αδβ καὶ βδι Γωνιῶν Ἀπτομένη, ἥτε δὲ Εὐθεῖα, πρὸς τὰ αὐτὰ τόξα
τε καὶ Γωνίας Τέμνουσα. Ἐπὶ τῆς πρὸς τῷ Κέντρῳ ὀρθῆς Γωνίας ὑπὸ αδκ,
τὸ δκ (ὅπερ ἐνταῦθα Ἡμιδιάμετρος τοῦ Κύκλου ἐστὶ) ἰδίως Ἡμίτονον ὀλο-
χερές τε εἰς ὀλικὸν ἀκύνει. Ἐπὶ τέτοις δὲ καὶ τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον βλ τῆς
ὑπὸ βδκ (ἥτις Παραπλήρωμα διατελεῖ τῆς ὑπὸ αδβ πρὸς Ὁρθῆς) Συνημί-
τονον τῆς ὑπὸ αδβ Γωνίας ὠνόμασαι. Ἡ δὲ δκ Ἀπτομένη, ἢ δὲ δδ Τέμνουσα
πρὸς γε τὴν αὐτὴν Γωνίαν ὑπὸ βδκ, Συναπτομένη δὲ τοι καὶ Συντέμνουσα
πρὸς τὴν ὑπὸ αδβ.

Ὅμοια Τμήματα Κύκλου ἐστὶ τὰ δεχόμενα Γωνίας ἰσας.

ΙΑ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Α.

„Τὸ δοθέντος Κύκλου τὸ Κέντρον εὑρεῖν.

κ. 204.

Διήχθωτις εἰς αὐτὸν ὡς ἔτυχεν Εὐθεΐα ἡ βγ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ π Σημεῖον (1), καὶ ἀπὸ τῆ π τῇ βγ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω (2) ἡ πλ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ ζ, καὶ τετμήσθω ἡ λζ δίχα κατὰ τὸ α. Λέγω δὲ ὅτι τὸ α Κέντρον ἐστὶ τῷ Κύκλῳ.

Μὴ γὰρ, ἂλλ' εἰ δυνατόν ἔσω τὸ ξ ἐκτὸς τῆς Εὐθεΐας ζλ (ὃ γὰρ ἀμελείτοι ἐπὶ ταύτης ἄλλοθί περ ἂν εἴη παρὰ τὸ α, τέμοι γὰρ ἂν τὸ παρὰ τὸ α Σημεῖον τὴν λζ εἰς ἄνισα), καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βξ, πξ, γξ. Καὶ ἐπεὶ Κέντρον εἶναι δοκεῖ τῷ Κύκλῳ τὸ ξ, ἔσονται αἱ βξ, γξ ἴσαι ἀλλήλαις, τὰ δέ τοι βξπ καὶ πξγ ἀμοιβαδὸν ἰσόπλευρα. Ἐπεὶ καὶ βπ = πγ (3), καὶ ἡ ξπ ἐπ' ἀμφοῖν κοινὴ, ἄρ' ἔν καὶ ἡ ὑπὸ ξπγ Γωνία (4) = ξπρ. Ἀρ' αὖ ἡ ὑπὸ ξπγ (5) Ὀρθὴ ἐστὶ, καὶ τῇ ὑπὸ λπγ Ὀρθῇ καὶ αὐτῇ (6) ὅση ἴση· τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἄτοπον.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἐκ δὲ τῶν φανερόν ὅτι ἐὰν ἐν Κύκλῳ τις Εὐθεΐα (λζ) Εὐθεϊάν τινα (βγ) δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνη, ἐπὶ τῆς Τεμνύσης ἐστὶ τὸ Κέντρον τῷ Κύκλῳ.

κ. 205.

Ὅτι ῥᾶστα δὲ διὰ Γνώμονος τὸ τῷ Κύκλῳ Κέντρον λαμβάνεται τῆς κορυφῆς τῷ γνώμονος π τῇ Περιφερείᾳ τῷ Κύκλῳ προσαπτομένης. Ἐὰν γὰρ Εὐθεΐα ἐπιζευχθῇ δε τὰ κατ' αἱ τῷ γνώμονος Πλευραὶ τὴν τῷ Κύκλῳ τέμνουσι Περιφέρειαν, Σημεῖα δὲ καὶ εὐ συνάπτουσα, δίχα δὲ τμηθῇ κατὰ τὸ α, ἔσαι δὲ τῷ Κέντρον τῷ Κύκλῳ τὸ α. Ἀλλ' ἡ δεΐξις ἐκ τῆς ΛΑ'. τῷ παρόντος Βιβλίου ληφθήσεται.

Π ρ ό τ α σ ι ς Β.

„Ἐὰν κύκλῳ ἐπὶ τῆς Περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα Σημεῖα (β, γ), καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ Σημεῖα ἐπιζευγνυμένη Εὐθεΐα ἐντὸς πεσεῖται τῷ Κύκλῳ.

κ. 206.

Ληφθῆτω γὰρ ἐπὶ τῆς βγ Εὐθείας Σημεῖον ἕτερον παρὰ τὰ δύο τὸ ξ, καὶ ἀπὸ τῷ Κέντρῳ α ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, αξ, αγ. Ἐπεὶ οὖν αἱ αβ, αγ ἴσαι εἰσὶ, καὶ αἱ πρὸς τῇ βάσει Γωνίαι (7) β καὶ γ ἔσονται ἴσαι. Ἡ δὲ ἐκ-

(1) I. τῷ α'. (2) ΙΑ. τῷ α'. (3) Ἐκ κατ. (4) Η. τῷ α'. (5) Ορ. ΙΔ. τῷ α'. (6) Ἐκ κατ. (7) Ε. τῷ α'.

τὸς ὑπὸ ἀξγ (1) μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς β, μείζων δὴ πᾶς ἔσται καὶ τῆς ἴσης ἐκείνῃ γ. Καὶ τοίουν ἐπὶ τῷ ξαγ Τριγώνῳ, ἡ Πλευρὰ αγ, ἅτε δὴ ὑποτείνουσα τὴν μείζονα Γωνίαν ὑπὸ ἀξγ μείζων ἐστὶν (2), ἡ δὲ ἀξ, ὡς ὑποτείνουσα τὴν ἐλάσσονα γ ἐλάσσων. Ἀλλὰ μὲν ἡ αγ ἀφικνεῖται ἀπὸ τοῦ Κέντρου ἄχρι τῆς Περιφερείας, ἃρ' ἡ ἀξ ἡδαμῶς ἀφίξεται. Τοιγαρὲν τὸ ταύτης πέρας ξ εἰσὼ πεσεῖται τῷ Κύκλῳ. Τῷτο δ' αὐτὸ δειχθήσεται καὶ περὶ τοῦ τυχόντος ἄλλου Σημεῖου τῶν ἐπὶ τῆς βγ. Ἡ ὅλη ἄρα βγ πεσεῖται ἐντὸς τοῦ Κύκλου.

Π ό ρ ι σ μ α .

Ὅποιαδήποτε οὖν ἂν ἄρα Εὐθεῖα τῷ Κύκλῳ ἀψῆται, κατὰ Σημεῖον μόνον ἐφάψεται. Εἴπερ γὰρ κατὰ δύο ἄπτοτο τῆς Περιφερείας Σημεῖα, εἴη ἂν ἡ διὰ τῶν δύο τυτῶν Σημεῖων ἀγομένη Εὐθεῖα, τῷ Κύκλῳ ἐντὸς (3) πίπτῃσιν· τῷτο δὲ τῆς Ἀπτομένης τὸν Ὅρισμόν σαφῶς ἀνατρέπει. Παραπλησίῳ δὲ λόγῳ (ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὰ σφαιρὰ μεταβῆσιν) ἔχει ἂν ἀποδειχθῆναι καὶ ἅπαν Ἐπίπεδον κατὰ Σημεῖον τῆς Σφαίρας ἐφάπτεσθαι.

Π ρ ό τ α σ ι ς Γ.

Εἴαν ἐν Κύκλῳ Εὐθεῖα τις (βλ) διὰ τοῦ Κέντρου, Εὐθεῖαν τινὰ (γζ) μὴ διὰ τοῦ Κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὁρθὰς αὐτὴν τεμεῖ, καὶ εἴαν πρὸς ὁρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ.

Α'. Ἀπὸ τοῦ Κέντρου α ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, αζ, καὶ ἐπεὶ αἱ γξ, ζξ ἴσαι (4). ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ αἱ αγ καὶ αζ, ὡς ἀπὸ τοῦ Κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις, ἡ δὲ ἀξ ἐπ' ἀμφοῖν τοῖς Τριγώνοις κοινὴ. Ἀρα (5) αἱ ὑπὸ ἀξγ, καὶ ὑπὸ ἀξζ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἐπομένως (6) Ὅρθαι. Ο. Η. τὸ Α'.

Β'. ἐπεὶ ἐξ ὑποθέσεως αἱ ὑπὸ ἀξγ καὶ ἀξζ Ὅρθαι, ἔσται καὶ τὸ ἀπὸ αγ Τετράγωνον (7) ἴσον τοῖς Τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ ἀξ καὶ ξγ. Ὀμοίως δὲ καὶ τὸ ἀπὸ αζ, ἴσον τοῖς ἀπὸ ἀξ καὶ ξζ. Τὰ δέ τοι ἀπὸ αγ καὶ αζ Τετράγωνα (8) ἀλλήλοις ἴσα ἐστὶν, ἄρα καὶ τὰ δύο ἀπὸ ἀξ καὶ ξγ, ἴσα ἔσται τοῖς δυτὶν ἀπὸ ἀξ καὶ ξζ· καὶ τῷ κοινῇ ἀπὸ ἀξ ἐκατέρωθεν ἀφαιρεθέντος, ἔσται τῷ ἀπὸ γξ ἴσον τὰ ἀπὸ ζξ. Ἀρα καὶ ἡ γξ ἴση τῇ ζξ. Ο. Η. τὸ Β'.

(1) Πόρ. α. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (2) ἰδ. Βιβ. α'. (3) Διὰ ταύτην. (4) Ἐξ ὑποθ. (5) Η. τῷ α'. (6) Ὅρ. ΙΔ. τῷ α'. (7) ΜΖ. τῷ α'. (8) Αξ. ἰδ.

Πορίσματα.

Ἡ ἡμίσεια τῆς Χορδῆς τῆς ὁποιανδήποτε Γωνίαν πρὸς τῷ Κέντρῳ ἔσαν ὑποτείνουσας, τῇ ἡμίσει τῆς αὐτῆς Γωνίας ὀρθὸν Ἡμίτονον ἔσιν. Ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῇ Χορδῇ γζ, ἥτις ὑποτείνει τὴν πρὸς τῷ Κέντρῳ Γωνίαν ὑπὸ γαζ, Κάθετος ἀπὸ τοῦ Κέντρου ἀχθῇ ἢ αξ, ἔσονται ἐπὶ τῶν Τριγώνων (1) αἱ γξ, ζξ ἀλλήλαις ἴσαι, ἢ δὲ αξ κοινὴ, αἶτε πρὸς τῷ ξ Γωνίαι ὀρθαί. Ἄρα ἢ ὑπὸ γαξ ἡμίσεια ἔσαι τῆς Γωνίας τῆς ὑπὸ γαζ, ἢ δὲ γξ Εὐθεῖα ἡμίσεια τῆς Χορδῆς γζ. Ἀλλ' ἢ γξ Ἡμίτονόν (2) ἔσιν ὀρθὸν τῆς ὑπὸ γαξ. Ἡ ἄρα ἡμίσεια τῆς Χορδῆς, τῆς ὁποιανδήποτε Γωνίαν πρὸς τῷ Κέντρῳ ἔσαν ὑποτείνουσας, τῇ ἡμίσει τῆς αὐτῆς Γωνίας ὀρθὸν Ἡμίτονον ἔσιν.

Β'. Καὶ εἰάν παντὸς Τριγώνου ἰσοπλευρὰ ἢ καὶ ἰσοσκελεῖς αγγ, ἢ μὲν Γωνία α ὡς Κέντρον ληφθῇ, θάτερον δὲ τῶν ἴσων σκελῶν αγγ ὡς Διάσημα, ἢ Κύκλος γραφῇ, διελύσεται δὴ ὁ Κύκλος καὶ διὰ τῷ ζ (3). Ἐνθεντοι δυνάμει τῆς προκειμένης Προτάσ., εἰάν Εὐθεῖα ἢ αξ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἰσοσκελεῖς Τριγώνου ἀγομένη διχοτομοῖ τὴν Βάσιν, ἔσαι ἐπ' αὐτῇ ἢ πρὸς ὀρθὰς· εἰάν δὲ ἐπ' αὐτῇ πρὸς ὀρθὰς ἢ, ταύτην διχοτομήσει. Κάντεῦθεν δ' ἂν ἔχοιεν ἐπαχθῆναι καὶ τὰ λοιπὰ, ἅπερ ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν Κς. τῷ α'. Βιβλίῳ ἄλλοθεν ἔσιν ἐπιφερόμενα.

Σχόλιον.

α. 208. Ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἰσοσκελεῖς Τριγώνου αβγ, ἐπὶ τὸ τυχρὸν Σημεῖον τῆς Βάσεως Γραμμὴ εὐθεῖα ἀχθῇ, ἔσαι τὸ ἀπὸ τῆς ἀγομένης Τετραγώνου μετὰ τῷ ὑπὸ τῶν Τμημάτων τῆς Βάσεως Ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς αβ ἢ αγγ.

Ἡτοι γὰρ ἢ ἀπὸ τῆς κορυφῆς α ἀγομένη Εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς κείσεται ἐπὶ τῇ Βάσει βγ, ἢ ἐχθ'. καὶ κείτω δὴ πρῶτον πρὸς ὀρθὰς ὡς ἢ αδ. Ἐσαι ἔν βδ = δγ (4)· διὸ δὴ ἢ τὸ Ὀρθογώνιον βδγ = βδτ ἢ δγτ. Ἀλλὰ αδτ + βδτ = (5) αβτ· ὁπέρ ἐσιν αδτ + βδγ Ὀρθογ. = αβτ. Ο. Η. τὸ ἀποδειχθῆσόμενον.

Ἀλλὰ γὰρ ἔσαι ἀγομένη Εὐθεῖα ἢ αε, μὴ πρὸς ὀρθὰς ἔσα ἐπὶ τῆς Βάσεως· ἢχθω δὲ δὴ ἢ πρὸς ὀρθὰς ἢ αδ, ἢ ἢ τὴν Βάσιν κατὰ τὸ δ δίχα τε

(1) Διὰ τὴν Πρὸτ. (2) Ὁρ. I. τῷ β. (3) Ὁρ. ΙΗ. ΙΘ. ἢ Κς. τῷ α'. Βιβλ. (4) Πρ. β. τῷ αὐτ. (5) ΜΖ. τῷ α'.

μεῖ (1)· καὶ ἐπεὶ Εὐθεΐα ἢ βγ εἰς ἴσα τέτμηται κατὰ τὸ δ, ἢ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ ε, ἔσαι (2) τὸ Οῤθωγωνιον βεγ + εδ^Τ = βδ^Τ. Κοινῇ οὖν προσεθείτω τὸ αδ^Τ· καὶ ἔσαι βεγ + εδ^Τ + αδ^Τ = βδ^Τ + αδ^Τ. Ἀλλὰ μὲν εδ^Τ + λα^Τ = (3) αε^Τ, καὶ βδ^Τ + αδ^Τ = (4) αβ^Τ. Ἀρα βεγ + αε^Τ = αβ^Τ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Δ.

„Εὰν ἐν Κύκλῳ δύο Εὐθεΐαι (βγ, ζλ) μὴ διὰ τῷ Κέντρῳ ἄμφω ἔσαι, τέμνωσιν ἀλλήλας, ἢ τέμνωσιν ἀλλήλας δίχα.

Εὰν γὰρ τῶν ἢ ἑτέρα λζ διὰ τῷ Κέντρῳ διηγμένη τύχοι, σαφές ὡς ἡκιστα αὐτὴ διὰ τῆς ἑτέρας τῆς μὴ διὰ τῷ Κέντρῳ ἄγεσθαι ὑποτιθεμένης βγ, δίχα τμηθήσεται. κ. 209.

Εἰ δ' ὑδὲτέρα διὰ τῷ Κέντρῳ α ἔσιν, ἀπὸ τῷ Κέντρῳ ἤχθω ἢ αξ· εἰάν ἂν ἀμφότεραι αἱ βγ ἢ ζλ δίχα τετμημέναι ὥσι κατὰ τὸ ξ, εἰεν ἂν ἢ αἱ ὑπὸ αξγ ἢ αξλ Οῤθαι (5), ἢ ἐπομένως ἀλλήλας ἴσαι· τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἀδύνατον.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ε.

„Εὰν δύο Κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, ἢ ἔσαι αὐτῶν τὸ αὐτὸ Κέντρον.

Ἀλλως γὰρ τῆς αβ ἐπιζευχθείσης, ἢ ἀχθείσης τῆς αγζ, εἰεν ἂν ἴσαι αἱ αζ ἢ αγ, τῷ μέρει τὸ ὅλον, ἐπεὶ ἑκατέρω τῶν ἴση τῇ τρίτῃ αβ (6). κ. 210.

Π ρ ό τ α σ ι ς ς.

„Εὰν δύο Κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός, ἢ ἔσαι αὐτῶν τὸ αὐτὸ Κέντρον.

Ὁμοίως τῇ ἀνωτέρῳ δειχθήσεται.

κ. 211.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ζ.

„Εὰν Κύκλος ἐπὶ τῆς Διαμέτρου ληφθῇτι Σημεῖον ὃ μὴ ἔστι Κέντρον τῷ Κύκλῳ, ἀπὸ δὲ τῷ Σημείῳ προσπίπτωσιν Εὐθεΐαι τινὲς πρὸς τὸν Κύκλον (γβ, γλ, γξ, γζ). κ. 212.

„Α'. Μεγίστη μὲν ἔσαι ἐφ' ἧς τὸ Κέντρον (α) ἢ γβ.

(1) Πόρ. β. τῶν ἀνωτ. (2) Ε. τῷ β'. (3) ΜΖ. τῷ α'. (4) Διὰ τὴν αὐτ. (5) Διὰ τὴν αὐτ. (6) Οῤθ. ΙΗ. τῷ α'. ἢ Αξ. α'.

„Β'. Ἐλάχιστη δὲ ἡ λοιπή, ἥτοι τὸ λοιπὸν τῆς Διαμέτρου μέρος γζ.

„Γ'. Τῶν δὲ ἄλλων, αἱ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τῷ Κέντρῳ, τῆς ἀπωτέρω μείζων ἐστὶ.

„Δ'. Δύο δὲ μόνον Εὐθείαι ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ Σημεῖου (γ) ὁ Κέντρον, μὴ ἐστὶ, πεσύνται πρὸς τὸν Κύκλον ἐκατέρωθεν.

Δείκνυτ. τὸ Α'. Ἡ' χθω ἀπὸ τοῦ Κέντρου α, Εὐθεῖα ἡ αλ, καὶ ἐπεὶ αλ, αβ ἴσαι εἰσὶ, κοινῆς αὐταῖς προσεθείσης τῆς αγ, ἔσονται λα, αγ ἅμα ἴσαι τῇ βγ. Ἀλλὰ μὴν λα, αγ μείζονες εἰσι (1) τῆς γλ. ἄρα καὶ βγ μείζων τῆς γλ. Ὡσαύτως ἐξ οἰσῶν ἄλλης μείζων ἡ γβ δευχθήσεται.

Β'. Ἀπὸ τοῦ Κέντρου ἡ χθω ἐ ἡ αξ. Ἡ' μὲν οὖν αξ (τατέσιν ἡ αζ) ἐλάσσων ἐστὶ (2) τῶν αγ ἐ γξ ἅμα ληφθεῖσων. Ἀφαιρεθείσης ἄρα τῆς κοινῆς αγ, ὑπολειφθήσεται ἡ γζ ἐλάσσων τῆς γξ. Ὡσαύτως δ' αὖ καὶ οἰσῶν ἄλλης ἐλάσσων ἔσα ἡ γζ δευχθείη.

Γ'. Ἐπὶ τῶν Τριγώνων γξα, γλα ἡ Πλευρὰ λα ἴση τῇ ξα, ἡ δὲ γα ἐπ' ἀμφοῖν κοινή, ἡ δὲ ὑπὸ λαγ Γωνία μείζων τῆς ὑπὸ ξαγ. Ἀρα καὶ ἡ Βάσις (3) λγ μείζων τῆς Βάσεως ξγ.

Δ'. Φανερόν ἐκ τῶν προαποδειχθέντων, εἴαν γὰρ τρεῖς ἴσας ἁλλήλαις ἀχθῆναι δυνατόν, οἷον τὰς γξ, γι, γπ, εἴεν αὖ αἱ δύο τῶν, οἷον αἱ γι, γπ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ἐ ἁλλήλαις ἴσαι. Ὁ τῷ Γ'. μέρει τῆς Προτάσεως ἀντιπεριπίπτει.

Π ό ρ ι σ μ α .

Παραπλησίω δὲ λόγῳ μετὰ Θεοδοσίῳ ἐπιφέρομεν, ὅτι τῶν τόξων τῶν μεγίστων Κύκλων τῶν ἀπὸ τοῦ τυχόντος Σημεῖου, ὁ μὴ ἐστὶ Πόλος τοῦ δοθέντος Κύκλου, ἐπὶ τῆς Ἐπιφανείας τῆς Σφαίρας πρὸς τὸν Κύκλον αὐτὸν ἀγομένων, μέγιστον μὲν ἐστὶν, ἐφ' οὗ ὁ τῷ Κύκλῳ Πόλος, ἐλάχιστον δὲ τὸ λοιπόν. Τῶν δὲ ἄλλων αἱ τὸ ἔγγιον τοῦ διὰ τοῦ Πόλου, τῷ ἀπωτέρω μείζων ἐστὶ. Δύο δὲ μόνον Τόξα ἴσα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ Σημεῖου, ὁ μὴ Πόλος ἐστὶ προσπεσύνται πρὸς τὸν Κύκλον ἐκατέρωθεν. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ἐ ἐπὶ τῶν πλειόνων Προτάσεων τῇδε τοῦ Βιβλίου μετιόντας ἐνὶ συλλογίζεσθαι, ἐπὶ γὰρ τῶν τοιούτων ἀπὸ τῶν Ἐπιπέδων ἐπὶ τὰ στερεὰ μεταβαίνειν ἐστὶν εὐχερέστερον.

(1) Κ. τῷ α'. (2) Διὰ τῆς αὐτῆς. (3) ΚΔ. τῷ α'.

Π ρ ό τ α σ ι ς Η.

„Εάν Κύκλῳ ληφθῇ τι Σημεῖον ἐκτός (α), ἀπὸ δὲ τοῦ Σημεῖου πρὸς τὸν
 „Κύκλον διαχθῶσιν Εὐθεῖαι τινεὶς (αβ, αγ, αζ, αξ, απ, αρ), ὧν μία μὲν
 „διὰ τοῦ Κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχεν·

„Α'. Τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην Περιφέρειαν προσπιπτουσῶν Εὐθειῶν,
 „μεγίστη μὲν (ἢ αβ) ἢ διὰ τοῦ Κέντρου (ψ).

„Β'. Τῶν δὲ ἄλλων αἰεὶ ἢ ἑγγιον τῆς διὰ τοῦ Κέντρου (αβ) τῆς ἀπώτε-
 „ρον μείζων ἐστὶ.

„Γ'. Τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν Περιφέρειαν προσπιπτουσῶν Εὐθειῶν, ἐλα-
 „χίστη μὲν ἐστὶν ἢ μεταξὺ τούτων Σημεῖου (α) καὶ τῆς Διαμέτρου.

„Δ'. Τῶν δὲ ἄλλων αἰεὶ ἢ ἑγγιον τῆς ἐλαχίστης, τῆς ἀπώτερον ἐστὶν
 „ἐλάσσων.

„Ε'. Δύο δὲ μόναι Εὐθεῖαι ἴσαι προσπεσῶνται ἀπὸ τοῦ Σημεῖου (α)
 „πρὸς τὸν Κύκλον, ἐφ' ἐκάτερα τῆς ἐλαχίστης, ἥτοι πρὸς τὴν κυρτὴν ἢ καὶ
 „πρὸς τὴν κοίλην αὐτὴν διαγόμεναι.

Α'. Ἀπὸ τοῦ Κέντρου ψ ἤχθω ἢ ψγ. Ἐπεὶ γυν ψγ, ψβ ἴσαι ἀλλή- κ. 213.
 λαις εἰσὶ, κοινῆς προσδεθείσης τῆς αψ, ἔσονται αψ, ψγ ἅμα ληφθεῖσαι
 ἴσαι τῇ αβ. Ἀλλ' αἱ αψ, ψγ ἅμα (1) τῆς αγ μείζονες εἰσιν, ἄρα καὶ ἡ αβ
 μείζων τῆς αγ. Ὡς αὐτως δὲ καὶ οἷασθαι ἄλλης ἢ αβ μείζων δειχθήσεται.

Β'. Ἡ'χθω ἢ ψζ. Αἱ γυν γψ, ψα Πλευραὶ ἴσαι ταῖς Πλευραῖς ζψ,
 ψα, ἢ δὲ ὑπὸ γψα μείζων τῆς ὑπὸ ζψα. Ἀρα (2) ἡ Βάσις γα μείζων
 τῆς Βάσεως ζα.

Γ'. Ἡ'χθω ἢ ψπ. Αἱ γοῦν δύο απ, πψ ἅμα μείζονες εἰσὶ τῆς αψ.
 Ἀφαιρεθεῖσων ἄρα τῶν ἴσων ψπ, ψξ ὑπολειφθήσεται ἢ αξ ἐλάσσων τῆς
 απ. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ἢ αξ οἷασθαι ἄλλης ἐλάσσων δειχθήσεται.

Δ'. Ἡ'χθω ἢ ψρ. Αἱ γυν απ, πψ ἐλάσσονες εἰσιν ἅμα ληφθεῖσαι (3),
 τῶν αρ, ρψ ἅμα ληφθεῖσων. Ἀφαιρεθεῖσων ἄρα τῶν ἴσων ψπ, ψρ, ὑπο-
 λειφθήσεται ἢ απ ἐλάσσων τῆς αρ.

Ε'. Φανερόν ἐκ τῶν προαποδείχθέντων. Ἐάν γὰρ πλείους δύοιν ἴσαι ἀλ-
 λήλαις ἀχθῆναι δύνανται, προσπεσῶνται δὴ δύο ἴσαι Εὐθεῖαι, ἥτοι πρὸς
 τὴν κυρτὴν ἢ καὶ πρὸς αὐτὴν τὴν κοίλην, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος· ὃ τῷ Β'. ἢ
 τῷ Δ'. μέρει ἀντιπεριπίπτου ἐστὶ.

(1) Κ. τῷ α'. (2) ΚΔ. τῷ α'. (3) ΚΔ. τῷ α'.

Π ρ ό τ α σ ι ς Θ.

„Εὰν Κύκλος ληφθῇ τι Σημεῖον ἐντός (α), ἀπὸ δὲ τῷ Σημεῖοι πρὸς τὸν Κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο Εὐθεῖαι ἴσαι, τὸ ληφθὲν Σημεῖον Κέντρον ἔσαι τῷ Κύκλῳ.

Κατάδηλον τὸ Θεώρημα ἐκ τῷ Δ'. μέρει τῆς Ζ'. τῷ παρόντος.

Ο' δὲ Εὐκλείδης οὕτωτοι δείκνυσι.

κ. 214. Ἐξω φησὶ Κύκλος ὁ αβγ, ἐντός δὲ αὐτῷ Σημεῖον τὸ δ, καὶ αἱ ἀπὸ τῷ προσπίπτωσαι Εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις δα, δβ, δγ. Λέγω δὲ ὅτι τὸ δ Κέντρον ἔστί.

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ αβ, βγ, καὶ τετμήσωσαν δίχα (1) κατὰ τὰ Σημεῖα ε καὶ ζ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ εδ, δζ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ η, κ, θ, λ Σημεῖα. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ αε τῇ εβ (2), κοινὴ δὲ ἡ εδ, ἤτε δα ἴση (3) τῇ δβ, Γωνία ἄρα (4) ἡ ὑπὸ αεδ Γωνία τῇ ὑπὸ βεδ ἴση ἐστὶ, καὶ ἄμφω ἄρα (5) Ὀρθαί. Ἡ ηκ ἄρα τὴν αβ, καὶ δίχα τέμνει καὶ πρὸς ὀρθάς, ὥς ἐπὶ τῆς Τεμνύσης ηκ ἔσαι τὸ Κέντρον (6) τῷ Κύκλῳ. Τῷτο δὲ ὁμοίως ῥᾶδιον ἔσαι καὶ ἐπὶ τῆς λθ δεῖξαι. Κοινὸν δὲ ταῦτι μόνον ἐστὶ ταῖς ηκ, λθ τὸ Σημεῖον καὶ ὁ τέμνονται τὸ δ, τὸ δ ἄρα Σημεῖον ἔστι τὸ Κέντρον τῷ Κύκλῳ.

Δείκνυσι δὲ καὶ ἄλλως.

κ. 215. Μὴ γάρ φησιν, ἀλλ' εἰ δυνατόν ἔσω τὸ ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ δε διήχθω ἐπὶ τὰ ζ, η Σημεῖα, ἡ δὲ ζη Διάμετρος ἔστω τῷ Κύκλῳ. Καὶ ἐπεὶ ἐπ' αὐτῆς εἰληπταί τι Σημεῖον, ὃ μὴ ἐστὶ Κέντρον τῷ Κύκλῳ τὸ δ (7), μεγίστη μὲν ἔσαι ἡ δη, μείζων δὲ ἡ μὲν δγ τῆς δβ, ἡ δὲ δβ τῆς δα (8), ἀλλὰ καὶ ἴση (9). Ὅπερ ἀδύνατον.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ι.

„Κύκλος ὃ τέμνει Κύκλον κατὰ πλείονα Σημεῖα ἢ δύο.

κ. 216. Τεμέντω γὰρ εἰ δυνατόν κατὰ πλείονα ἢ δύο, οἷον κατὰ β, γ, δ, ἀπὸ δὲ τῷ Κέντρῳ α τῷ βεζ Κύκλῳ ἐπεξεύχθωσαν Εὐθεῖαι αβ, αγ, αδ· αὐταὶ δὲ ἔσονται ἴσαι (10). Ἐπεὶ δὲ ἐπὶ τὰς τομάς εἰσι περατέμεναι, αἱ αὐταὶ

(1) Ι. τῷ α. (2) Εκ κατ. (3) Εξ ὑποθ. (4) Η. τῷ α. (5) Ὀρ. ΙΔ. τῷ α. (6) Διὰ τὸ Πόρ. τῆς Α. τῷ γ. (7) Μίρος Α. τῆς Ζ. τῷ γ. (8) Διὰ Γ'. μέρος τῆς αὐτῆς. (9) Εξ. ὑποθ. (10) Ὀρ. ΙΗ. τῷ α.

ἐπὶ πρὸς τὴν Περιφέρειαν τῶν ἡβδ Κύκλων προσπεσῶνται. Ἀρα (1) τὸ α Κέντρον ἔσαι ἐπὶ τῶν ἡβδ Κύκλων, καὶ δύο ἄρα Κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους τὸ αὐτὸ ἔσαι Κέντρον. Ὅπερ (2) ἀδύνατον.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΑ.

„Εἰ δὲ δύο Κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντὸς, ἐπὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ Κέντρα (ἢ ἐπὶ 2), ἢ ἐπὶ τὰ Κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη Εὐθεΐα, ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν Κύκλων.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν πιπτέτω ὡς ἡ ζηδθ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αζ, αη. Ἐπεὶ γὰρ αἱ αη, ηζ τῆς ζα (ταυτὸν δ' εἰπεῖν (3) τῆς ζθ) μείζονες (4) εἰσιν, ἀφαιρέσθω κοινὴ ἡ ζη, ἐπὶ ἔσαι ἡ λοιπὴ αη, τῆς λοιπῆς ηθ μείζων, ἴση δὲ ἡ αη τῇ ηδ (5). Ἡ ἄρα ηδ μείζων τῆς ηθ, τὸ μέρος τῆ ὅλη. Ὅπερ ἀδύνατον. κ. 217.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΒ.

„Εἰ δὲ δύο Κύκλοι ἀπτονται ἀλλήλων ἐκτὸς, ἢ ἐπὶ τὰ Κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη Εὐθεΐα διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Εἰ μὴ γὰρ, ἔσω τὰ Κέντρα τῶν Κύκλων ὡς τὰ α, β, τὴν μὴ διὰ τῆς ἐπαφῆς ἀγομένην Εὐθεΐαν αβ, τέμνουσαν δὲ τὸς Κύκλους κατὰ ο ἐπὶ παρατῆντα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ασ, βσ. Ἔσονται δὲ αἱ ασ, βσ ἅμα (6) μείζονες τῆς αβ. Ἀλλὰ μὴν ἡ μὲν ασ ἴση τῇ αο, ἡ δὲ βσ ἴση τῇ βπ (7), αἱ ἄρα ασ ἐπὶ βπ ἅμα μείζονες τῆς ὅλης αβ. Ὅπερ ἀδύνατον. κ. 218.

Π ό ρ ι σ μ α .

Ἐκ ταύτης ἄρα ἐπὶ τῆς πρὸ αὐτῆς φανερόν, ὡς εἰς δύο Κύκλοι δύο ἀπτονται ἀλλήλων εἴτε ἐντὸς εἴτε ἐκτὸς, ἢ ἀπὸ τῶν Κέντρων τῶν ἐτέρων διὰ τῆς ἐπαφῆς ἀγομένην Εὐθεΐαν, διὰ τῶν Κέντρων τῶν ἐτέρων προεκβαλλομένη διελεύσεται. Ἡ γὰρ τοιαύτη Εὐθεΐα ἂν διόλσει τῆς ἐπὶ τὰ Κέντρα ἐπιζευγνυμένης, ἥτις (διὰ τὴν ΙΑ. ἐπὶ ΙΒ.) ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται, καὶ διὰ τῆς ἐπαφῆς διελεύσεται.

(1) Διὰ τὴν ἀνωτ. (2) Ε. τῶν γ'. (3) Ο'ρ. ΙΗ. τῶν α'. (4) Κ. τῶν α'. (5) Ο'ρ. ΙΗ. τῶν α'. (6) Κ. τῶν α'. (7) Ο'ρ. ΙΗ. τῶν α'.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΓ.

„Κύκλος Κύκλῳ ἐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα Σημεῖα ἢ καθ' ἓν, εἴαν τε ἐντὸς, εἴαν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται. Ομοίως δὲ καὶ Εὐθεῖα Κύκλῳ ἐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα Σημεῖα ἢ καθ' ἓν.

κ. 219. Αὔπτεσθω γὰρ ἐντὸς (εἰ δυνατόν) Κύκλος Κύκλῳ, ἐν μέρει Περιφερείας τῷ γλ. Η' γυν ἐπὶ τὰ Κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη Εὐθεῖα, ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν (1) πεσεῖται τῶν Κύκλων, οἷον κατὰ τὸ γ. Α'Β' ἐπεζεύχθωσαν καὶ αἱ αλ, βλ. Ἐπεὶ τοίνυν αἱ βλ, βγ (ὡς ἀπὸ τῶ Κέντρου ἐπὶ τὴν Περιφέρειαν ξλγ) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ· κοινῆς προσδεύσεως τῆς αβ, ἡ αβ καὶ βλ ἅμα ἴσαι τῇ αγ εἰσὶ. Τῇ δὲ αγ ἴση ἡ αλ, ὡς ἀπὸ τῶ Κέντρου α πρὸς τὴν Περιφέρειαν πλγ, ἄρα αἱ αβ, βλ ἅμα ἴσαι τῇ αλ εἰσὶν. Ὅπερ (2) ἀδύνατον.

Α'Β' αὔπτεσθω Κύκλος Κύκλῳ ἐκτὸς (εἰ δυνατόν) κατὰ πλείονα Σημεῖα ἢ καθ' ἓν, οἷον κατὰ τὸ Τόξον ξλ. Η' γυν Εὐθεῖα απ ἡ ἐπὶ τὰ Κέντρα α καὶ π ἐπιζευγνυμένη, διελεύσεται πάντως (3) διὰ τῆς ἐπαφῆς, οἷον κατὰ τὸ ξ. Ἦδη μὲν ὅν ἤχθωσαν καὶ αἱ αλ, πλ, καὶ οὕτως αἱ δύο τῶ Τριγώνου Πλευραὶ αλ, πλ ἅμα, ἴσαι ἔσονται ταῖς αξ, πξ, ἥτοι τῇ ὅλῃ απ. Ὅπερ (4) ἀδύνατον.

Τελευταῖον δὲ ἡ βζ Εὐθεῖα αὔπτεσθω τῷ Κύκλῳ (εἰ δυνατόν) κατὰ μέρος τὸ γε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἀπὸ τῶ Κέντρου π Εὐθεῖαι αἱ πγ, πε. Αὐταὶ δὲ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἰσοσκελεῖς ἄρα τὸ πγε Τριγώνον. Διὸ (5) αἱ ὑπὸ πγε, πεγ Ὁξεῖαι εἰσὶ, καὶ ἡ ἐπὶ τῇ βζ Κάθετος ἀπὸ τῶ Κέντρου π (6), πεσεῖται μεταξὺ γ καὶ ε, οἷον κατὰ τὸ δ, καὶ ἔσονται ἄρα τὰ σκέλη πγ καὶ πε ἴσα τῇ μεταξὺ τούτων Καθέτῳ (7). Ὅπερ (8) ἄτοπον.

Π ό ρ ι σ μ α.

κ. 220. Οἱ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Εὐθείας τὰ ἑαυτῶν Κέντρα ἔχοντες Κύκλοι, καὶ ταύτην κατὰ τὸ αὐτὸ Σημεῖον τέμνοντες β, ἐν τῷ αὐτῷ Σημείῳ β ἀλλήλων καθ'ἀπτόνται.

Ἄλλως τε ἡ παρῶσα Πρότασις ΙΓ. ἐξ αὐτῆς τῆς τῶν παραβαλλομένων

(1) ΙΑ. τῷ γ'. (2) Διὰ τὴν Κ. τῷ α'. (3) ΙΒ. τῷ α'. (4) Διὰ τὴν Κ. τῷ α'. (5) Πόρ. ια'. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (6) Πόρ. Γ. τῆς αὐτ. (7) Ὑρ. ΙΗ. τῷ α'. (8) Διὰ τὸ ἰδ'. Πορ. τῆς ΑΒ. τῷ α'.

ἀλλήλαις Γραμμῶν ἐννοίας ἐς τὴν κατάδηλον. Οὐ γὰρ ἐδ' Εὐθεΐα καὶ Κύκλος Περιφέρειαι, ἐδὲ Περιφερειῶν ἀνίσων διαφέρειν Καμπυλότητες, ἐδὲ Κυρταὶ δύο, ὅτι μὴ κατὰ Σημεῖων ἀλλήλων ἄπτεσθαι δυνήσονται· κατὰ μέρη γὰρ ἐφαρμόζειν ἔστι δυνατόν. Ἐφαρμόσειαν δὲ, εἰ κατὰ μέρος τι πεφύκεσαν ἄπτεσθαι.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΔ.

„Ἐν Κύκλῳ αἱ ἴσαι Εὐθεΐαι (βγ, λζ) ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ Κέντρου.
„Καὶ αἱ ἴσον ἀπέχονται ἀπὸ τοῦ Κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ.

Ἀπὸ τοῦ Κέντρου α ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, αλ, καὶ ἤχθωσαν αἱ αξ, αἱ πρὸς ὁρθὰς ἐπὶ τῶν βγ, λζ (1), καὶ ἔσονται αἱ βγ, λζ δίχα τετμημέναι (2) κατὰ ξ καὶ ι.

Ἐπεὶ γυν αἱ βγ, λζ ἴσαι ἀλλήλαις (3) εἰσὶν, ἴσα ἔσαι καὶ τέτων τὰ ἡμίση ξβ, ιλ, καὶ δὴ καὶ τὰ ἀπὸ τέτων (4) Τετράγωνα ἀλλήλοις ἴσα. Ἀλλὰ γὰρ τὸ ἀπὸ αβ Τετράγωνον (5) ἴσον τοῖς ἀπὸ αξ καὶ βξ, καὶ τὸ ἀπὸ αλ Τετράγωνον (6) ἴσον τοῖς ἀπὸ αἱ καὶ ιλ, τὰ δὲ ἀπὸ αβ καὶ αλ Τετράγωνα (7) ἀλλήλοις ἴσα ἔσιν, ἄρα τὰ ἀπὸ αξ καὶ ξβ Τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ αἱ καὶ ιλ, τὰ συναμφοτέρω τοῖς συναμφοτέροις. Ἀλλὰ μὲν τὰ ἀπὸ βξ καὶ ιλ ἴσα ἀλλήλοις ἐδεχθή, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ αξ καὶ αἱ Τετράγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἔσιν. Ἀρα (8) καὶ αἱ Κάθετοι αξ καὶ αἱ ἴσαι, καὶ αἱ βγ, καὶ ζλ Εὐθεΐαι (9) ἐπίσης εἰσὶν ἀπὸ τοῦ Κέντρου α ἀπέχουσαι. Ο. Η. τὸ Α'.

Ἀνάπαλιν δὲ, εἴαν αἱ ξα, ια ἀποκάσεις ὧσιν ἴσαι, τότε δὴ ἀφαιρεθέντων τῶν Τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν ἴσων Εὐθειῶν ξα, ια, ὁμοίως ἀποδειχθήσεται τὰ λοιπὰ Τετράγωνα τὰ ἀπὸ ξβ, ιλ ἴσα ἀλλήλοις εἶναι, ἐκ τῶν ἀπολεσθῆ δὲ καὶ τὰς Εὐθείας ξβ, ιλ ἴσας ἀλλήλαις εἶναι. Αὗται δὲ ἡμίσειαι εἰσὶ τῶν Εὐθειῶν (10) βγ, ζλ, ἄρα καὶ αὗται εἰσὶν ἴσαι. Ο. Η. τὸ Β'.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΕ.

„Ἐν Κύκλῳ μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ Διάμετρος, τῶν δὲ ἄλλων αἰεὶ ἡ ἑγγύσιον
„τοῦ Κέντρου, τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστὶ.

Ἦχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ Κέντρου ἐπὶ τὰς βγ, ζη Κάθετοι αἱ εθ, εκ. Καὶ ἐπὶ ἑγγύσιον μὲν τοῦ Κέντρου ἡ βγ, ἀπώτερον δὲ ἡ ζη, μείζων ἄρα ἡ εκ (11)

(1) IB. τὸ α'. (2) Γ. τὸ γ'. (3) Ε'ξ ὑποθ. (4) Δ'ξ ι'. (5) MZ. τὸ α'. (6) διὰ τὴν αὐτ. (7) Δ'ι ὁρ. IH. τὸ α'. καὶ Δ'ξ ι'. (8) Δ'ξ ι'. (9) Ὁρ. Δ. τὸ γ'. (10) Γ. τὸ γ'. (11) Ὁρ. Δ. τὸ γ'.

κ. 222.

Δ'λλας.

Η' αὐθ = εκ
+ εν. Δ'ι δὲ
εκ + εν >
μν. ἄρα αθ
> μν. Πάλιν
εκ + εν = εζ
+ εν. Καὶ
μν > ζη,
ἄρα μν > ζη.
Ο. Ε. Δ.

τῆς εθ. Κείδω τῇ εθ ἴση ἢ ελ, καὶ διὰ τῷ λ τῇ εκ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖται ἡ λμ διήχθω ἐπὶ τὸ ν, καὶ ἐπαζεύχθωσαν αἱ εμ, εν, εζ, εη.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἢ εθ τῇ ελ, ἴση ἐστὶ (1) καὶ ἡ βγ τῇ μν. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἢ μὲν αε τῇ εμ, ἢ δὲ εδ τῇ εν, ἢ ἄρα αδ ταῖς εμ, εν ἴση ἐστίν. Αἱ δὲ, μείζονες εἰσι (2) τῆς μν, καὶ ἡ αδ ἄρα μείζων τῆς μν, καὶ δὴ καὶ τῆς ταύτης ἴσης βγ. Πάλιν ἐπεὶ αἱ δύο εμ, εν ἴσαι ταῖς δυσὶν εζ, εη, ἢ δὲ ὑπὸ μὲν μείζων τῆς ὑπὸ ζην, Βάσις ἄρα ἡ μν Βάσεως τῆς ζη (3) μείζων ἐστίν. Ἀλλὰ ἡ μν τῇ βγ ἐδείχθη ἴση, ἄρα ἡ βγ τῆς ζη μείζων ἐστὶ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ις.

„Η' τῇ Διαμέτρῳ τῇ Κύκλου (γβ) πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας (β) ἀγχομένη
„(ιζ), ἐκτὸς πεσεῖται τῇ Κύκλου, καὶ προαγομένη ἀπτεται τῇ Κύκλου μὴ
„τέμνουσα· καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε Εὐθείας καὶ τῆς Περιφερείας,
„ἐτέρα Εὐθεῖα (κατὰ τὴν ἐπαφὴν β) ἢ παρεμπεσεῖται, ὅτι μὴ Τέμνουσα.

α. 223.

Α'. Ληφθῆτω δὴ ἐπὶ τῆς ιβζ Εὐθείας Σημεῖον τὸ τυχὸν λ, καὶ ἐπαζεύχθω ἀπὸ τῷ Κέντρῳ ἡ αλ. Καὶ ἐπεὶ ἐπὶ τῷ Τριγώνῳ λαβ ἡ ὑπὸ αβλ ὀρθὴ ἐστίν (ἐξ ὑποθ.), ἔσται ἡ ὑπὸ αλβ (4) ὀξεῖα. Ἄρα ἡ αλ ἡ ὑποτείνουσα τὴν μείζονα Γωνίαν ὑπὸ αβλ, μείζων ἐστὶ τῆς αβ τῆς ὑποτείνουσας (5) τὴν ἐλάσσονα ὑπὸ αλβ. Ἀλλ' ἡ αβ ἄχρι τῆς Περιφερείας μόνον ἦκει, ἡ ἄρα αλ ἐπέκεινα τῆς Περιφερείας γενήσεται, καὶ τό γε λ ἐκτὸς πεσεῖται τῷ Κύκλου. Αὐτὸ δὲ τῷτο καὶ περὶ παντὸς ἄλλου Σημεῖου τῶν ἐπὶ τῆς ιζ δειχθήσεται, πλὴν τῷ β. Η' ὅλη ἄρα ιζ ἀπτεται τῇ Κύκλου κατὰ τὸ β μὴ τέμνουσα (6). Ο. Η. τὸ Α'.

Β'. Ὑπὸ τὴν βζ (εἰ δυνατόν) εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε Εὐθείας καὶ τῆς Περιφερείας, παρεμπίπτει τὴν ἐτέρα Εὐθεῖαν ἡ ρβ. Ἐπεὶ δὲ ἡ ὑπὸ ζβλ ὀρθὴ (ἐξ ὑποθ.), ἔσται ἡ ὑπὸ ρβα ὀξεῖα· οὐκ ἄρα ἐπὶ τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἱσταται ἡ β. Η' χθω γὰρ ἀπὸ τῷ Κέντρῳ α ἐπὶ τῇ βρ πρὸς ὀρθὰς ἡ αο, πρὸς γε τὴν βρ (7) πίπτουσα, καὶ τὴν Περιφέρειαν κατὰ τὸ π. Καὶ τοίνυν ἡ μὲν αβ, ἅτε δὴ ὑποτείνουσα τὴν μείζονα Γωνίαν ὑπὸ αοβ (ἥτις ὀρθή), μείζων ἐστὶ (8) τῆς αο τῆς ὑποτείνουσας τὴν ἐλάσσονα ὀξεῖαν ὑπὸ ρβα. Ἀλλὰ μὴν ἡ αβ ἴση τῇ απ, ἢ ἄρα απ μείζων τῆς αο, τὸ μέρος τῷ ὅλῳ. Ὅπερ ἀδύνατον.

(1) ΙΔ. τῷ γ'. (2) Κ. τῷ α'. (3) ΚΔ. τῷ α'. (4) Πόρ. Ε. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (5) ΙΘ. τῷ α'. (6) Ὑφ. β. Βιβλ. γ'. (7) Γ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (8) ΙΘ. τῷ α'.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν Α'.

Ἡ παρ' Εὐκλείδῃ Πρότασις οὕτως ἐκφέρεται.

„Ἡ τῇ Διαμέτρῳ τῷ Κύκλῳ πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πε-
 „σεῖται τῷ Κύκλῳ, καὶ εἰς τὸν μεταξύ τόπον τῆς τε Εὐθείας καὶ τῆς Περιφε-
 „ρείας, ἑτέρα Εὐθεῖα ἢ παρεμπεσεῖται, καὶ ἡ μὲν τῷ Ἡμικυκλίῳ Γωνία ἀπά-
 „σης ὀξείας Γωνίας Εὐθύγραμμη μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων. Τε-
 „τραμερὴς οὖν ἔστω τῆς Προτάσεως προκειμένης, τὸ μὲν Α'. καὶ Β'. μέρος Α' ἡ-
 „δρέας ὁ Τακνέτιος (ὡς ἐστὶν Ἰδεῖν ἀνωτέρω) καλῶς ἀποδέδειξε, τὸ δὲ δὴ Γ'. καὶ
 Δ'. οἷον δὴ τινὰς παραδόξῃς θέσεις μηδενὶ ἐδραίῳ λόγῳ προσερερισμένας,
 ἡδὲ λόγῳ ἤξιωσε. Δοκεῖ δὲ ὡς ἐκ ὀρθῶς περὶ τούτων ὑπελιηφώς, εἰπερ γὰρ
 Εὐθύγραμμός τις Γωνία ὑπὸ αβρ, τῆς μὲν Ο'ρθῆς ὑπὸ αβζ ἐλάσσων (ὅπερ
 ἐστὶν Ὀξεία), τῆς δὲ τῷ Ἡμικυκλίῳ Γωνίας αβπ μείζων ὑποτεθεῖν, ἡ γοῦν
 εἰ δυνατόν τὴν τυχεύσαν Εὐθύγραμμον ὑπὸ ζβρ, εἰς τὸν μεταξύ τόπον τῆς
 τε Α'πτομένης ζβ καὶ τῆς Περιφερείας πβ παρεμπεσεῖν, κατὰ τὸ β Σημεῖον
 κορυφωμένην, εἴη ἂν ἐκ τῶ ἀκολούθῃ καὶ Εὐθείαν μεταξύ τῆς τε Α'πτομένης καὶ
 τῆς Περιφερείας ἀγαγεῖν δυνατόν, τὸν Κύκλον μηδαμῶς τέμνουσαν. Ἀλλὰ τε-
 τί ἐν τῷ Β'. μέρει ὡς ἔχον ἀδυνάτως ἐδείκνυτο.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Τ Α .

Ἐκ δὴ τούτων αὖθις φανερόν, ὡς ἡ Εὐθεῖα τε καὶ Περιφερεία ἐπαφῇ Α.
 ἐν ἀδιαίρετῳ ἐστίν.

Καὶ ὅτι ἐὰν Κέντροις τοῖς ἐπὶ τῇ αὐτῇ Εὐθείᾳ ἐπ' ἄπειρον προεκβαλλο- Β.
 μένη ληφθεῖσι, διὰ τῷ β ἀγόμενοι Κύκλοι ὑπὲρ ἀριθμὸν, ὃν ἂν εἴποις, γρη-
 φῶσιν, ἅπαντες ἀπλῶς οἶτε ἐλάσσονες καὶ οἱ μείζονες, τῆς ιζ Εὐθείας κατὰ
 τὸ αὐτὸ Σημεῖον β καθάψονται. Ὅρα τὸ Πόρ. τὸ μετὰ τὴν ΙΓ'. τῷ παρόντι.

Καὶ οἱ Κύκλοι ἄρα οἱ κατὰ Μέγεθος τῷ δοθέντι αἰεὶ μείζον προσευρυνό- Γ.
 μενοι, ἔγγιον αἰεὶ ἐπ' ἄπειρον τῆς Α'πτομένης γίνονται, καί τοι ἡδέποτε
 αὐτῇ, πλην ἢ κατὰ τὸ Σημεῖον τῆς ἐπαφῆς συναπτόμενοι, ὃ σαφέστατον
 ἅμα καὶ θαύματος ἄξιον.

Καὶ Γρημμή ἄρα ἡ τυχεύσα εἰς αἰεὶ διαιρετὰ διαιρετὴ πέφυκεν. Ἐὰν γὰρ Δ.
 ἀπὸ τίνος τῶν ἐπὶ τῆς Διαμέτρου Σημεῖων, ἐπὶ τῇ Α'πτομένῃ ιζ προσπίπτε-
 σα διαχθῇ Εὐθεῖα ἡ απ (ἐν Σχῆμ. τῷ Πορίσμ. τῷ μετὰ τὴν ΙΓ'. τῷ παρόν-
 τι), οἱ ὑπὲρ ἀριθμὸν γραφόμενοι Κύκλοι, ὧν τὰ Κέντρα ἐπὶ τῆς Εὐθείας αβ
 τῆς ἐπ' ἄπειρον προεκβαλλομένης, καθάψονται μὲν τῆς Εὐθείας ιζ (διὰ τὸ Β'.

Πόρ. τῶν ἀνωτ.), κατὰφονται δὲ ἐν ἀλλήλων (διὰ τὸ Πόρ. τὸ μετὰ τὴν ΙΓ'. τῇ Πορ.), ἀλλ' ἐν σημείῳ τῷ αὐτῷ β. Οὐδαμῇ δὲ ἦτοι ἀλλήλοις, ἢ τῇ ιζ Εὐθείᾳ, πλὴν ἢ κατὰ τὸ β συναφθῆσονται. Ὡς ἐν τὴν Εὐθείαν ἀπ' ἐξ ἀνάγκης τεμῶσιν ἐπ' ἄπειρον, τῆς εἰς ὁποσωνῶν δοθέντων ἔτι πλείονα.

Ε'. Καὶ τὴν κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνίαν ὑπὸ λβπ (ἐν Σχήμ. τῷ τῆς Προτ.) (τὴν ὑπὸ τῆς Α' πτομένης δηλονότι βζ, ἐν τῆς Περιφερείας βπ περιεχομένην) οὐδεμία Εὐθεΐα δυνήσεται τεμῆν.

ς'. Διὰ γεμὴν τῶν Περιφερειῶν τῶν κατὰ τὸ αὐτὸ Σημεῖον β συναπτομένων (ὅρα Σχήμ. τῇ Πορ. τῆς ΙΓ'.) τμηθεῖν ἂν καὶ ἀπομειωθεῖν ἢ κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνία ἐπ' ἄπειρον. Κἂν τῷ τῷ δὴ, καὶ ἐν τῷ Γ'. Πορίσματος τῇ τῶν ἀσυμπτότων Γραμμῶν παραδόξῃ κεῖται ἢ πᾶσα φύσις, οἷα ἀμέλει εἰσὶν Εὐθεΐα τε ἐν Ὑπερβολῇ, ἐπ' ἄπειρον μὲν ἄμφω προεκβαλλόμεναι, καὶ γε Διαστήματι τῷ παντὸς δοθέντος ἐλάσσονι ἀλλήλαις πελάζεσθαι, μηδαμῇ δὲ μηδαμῇ συμπίπτουσαι. Οὐ δὲ εὐδόχως τε ἡψατο, ἐν δὲ εἰς ἀπέδωκε ἐν Μάριος Βεττινός ὁ Γησιῆτης, καὶ πρό γε τῷ Βαρόκιος καὶ Κάρδανος ἐκ τῶν τῇ Ρ' αββὶ Μωυσέως τῇ ἀπὸ Ναρθόνης, οὐ ἐν τὴν κατασκευὴν ἡμῖν ὁ Κάρδανος ὑποτίθησιν ἐν τοῖς περὶ Λεπτότητος Βιβλ. Ις'. Καὶ ταῦτα μὲν ὁ Τακ. Η' δὲ κατὰ τὴν ἐπαφὴν (ἢ λέγεται) Γωνία, ὡς ὁ Οὐίςων ἐκ τῶν τῇ Οὐαλλισίς περὶ Γωνίας γεγραμμένων εἰληφώς ἀποφαίνεται, διὰ τῶν κατὰ τὸ αὐτὸ Σημεῖον ἀπτομένων Περιφερειῶν ἡκιστα μείναι, ὡς ἐν τῇ Γωνία ὅρα, ἐν τῷ τὸ ποσὸν ἔχουσα. Καὶ γὰρ Γωνία ἐστὶν (κατὰ τὸν Η'. τῇ Α'. Βιβλ. Ο'ρισμὸν) ἢ ἐν ἐπιπέδῳ δύο Γραμμῶν ἀπτομένων ἀλλήλων, ἐν μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν Γραμμῶν κλίσεις. Η' δὲ πὶ Εὐθεΐα (ἐν Σχήμ. τῇ μετὰ τὴν ΙΓ'. Πορίσμ.) μιᾶς ἢ πλείονων Περιφερειῶν κατὰ τὸ αὐτὸ Σημεῖον β ἀπτομένη, ἐν αὐτῷ τῷ τῆς ἐπαφῆς Σημεῖῳ (ἐν ἐκείνῳ γὰρ ὑφίστηεν ἢ Γωνία, εἰς ἐστὶν) ἡδεμίαν ἔχει κλίσιν πρὸς τὰς Περιφερείας αὐτὰς, ἐκείναις δὲ πάντα ἐστὶ συμπίπτουσα. Ἀλλὰ περὶ μὲν τῶν τούτων τούτων. Ὅτι δὲ καὶ τὸ ς'. τῇ Πορίσμα συνάδει τῷ Γ', φανερόν.

Ζ'. Κἂν τευθεν ἐξ ὧν ὁ Οὐίςων ἀποφαίνεται, δηλονότι ἢ ὑπὸ αβπ (ἐν Σχήμ. τῷ τῆς Προτ.) τῇ Η' μικυκλίς Γωνία, τῇ Εὐθυγράμμῳ τε ἐν Ὁρθῇ ὑπὸ αβζ ἴση ἐστὶν. Εἰ γὰρ ὁ μεταξὺ τῆς τε Εὐθείας ἐν τῆς περιφερείας, ἢς ἐκείνη ἀπτεται τόπος πβζ, πρὸς γε τὸ β Σημεῖον ἐκ ἐστὶ Γωνία, ὡς ἐν τῷ τὸ ποσὸν ἔχουσα, ἐν τῷ τῇ ἀπὸ τῆς ὑπὸ αβζ ἀφαιρεθέντος, ὑπολειφθήσεται ἐν τῇ ἡττον ἢ ὀρθῇ Γωνία ἀμείωτος, ἢ τε τῇ Η' μικυκλίς Γωνία ὑπὸ αβπ, Ὁρθῇ ἔτι ὑπολειφθήσεται.

Πάντας δὲ εἰ
κλίσεις ἔχει
Εὐθεΐα κατὰ
ὅν δὲ ἢ τοῦ
Σημεῖου ῥοῦ
ἔχει διορισ-
μόν, πῶς ἂν
τις φαίη τὴν
ἀπτομένην
Εὐθεΐαν κλί-
σιν ἔχειν
πρὸς τὴν Πε-
ριφερείαν, ἢ
ἡκιστα τέμνει.

Τὸ γεμὴν ἐν τῷ ἐφεξῆς Σχολίῳ (περὶ ὃ τῷ εὐκλεεῖ Οὐαλλισίῳ πλη-
ρέσερον γέγραπται, ἐν τόμῳ Β'. τῶν μαθηματικῶν ἐκείνης ποιημάτων, ἐν τῇ
περὶ Γωνίας τῆς κατ' ἐπαφῆν, καὶ τῆς τῷ Ἡμικυκλίῳ Γεωμετρικῇ ἐρσύνῃ, Σε-
λίδι 605 — 630, καὶ ἐν τῇ ὑπὲρ ἐκείνης ἀπολογίᾳ Σελίδι 631 — 664)
ὑποτιθέμενον Ζήτημα ὑπερβάντες, εἴγες τὰ χρένα εἰπὶ φειδόμενοι οἱ μαθη-
τιῶντες, τῆς ΙΖ'. καὶ τῶν ἄλλων Προτάσεων ἀπείσωσαν.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν Β'.

Δείκνυται ἅμα καὶ ἐπιλύεται ὁ παραλογισμὸς τῶν παραδόξων,
τῶν ἐκ τῆς κατὰ τὴν ἐπαφῆν Γωνίας ἐπιφέρεισθαι εἰωθότων.

Ταῦτα μὲν οὖν τὰ ἐκ τῆς Ις'. Προτάσ. ἄχρι τῆς δε ἐπαχθέντα, οὐδὲν
ἥττον ἔχει τῷ ἀσφαλῶς τὸ παράδοξον· τὰ δὲ παρὰ ταῦτα ἐκ τῆς αὐτῆς ἐπι-
φέρεισθαι εἰωθότα ὑπὲρ πᾶσαν ὅλως διανοίας ἐςὶ κατάληψιν. Ἀνδ' ὅτε δὴ καὶ
εἰς ὑπόνοιαν ἐμπεσεῖν μοι ποτὲ ἐγένετο, μήτι ἐνταῦθα λανθάνει τοιοῦτον,
οἷον ἀγνοούμενον εἰς ἀπάτην συνωθεῖν καὶ αὐτὸς ἔχῃ ἡκιστα τῆς ἐπὶ φρενῶν θρυ-
μαζομένους λεπτότητι, καὶ πρὶ τὸ τὰ παραδοξότατα ἐκεῖνα ὑποτιθέναι ἐπεί-
γειν· τῷ ὄντι δὲ κατελιγμέναι μοι δοκῶ, ὃ φθάσας ὑποπενόηκα. Τὰ δὲ δὴ
παράδοξα, ἅπερ ἐκ τῆς Ις'. ἐπιφέρειν εἰώθασιν, ὡς ἐκ τῶν πολλῶν τὰ κεφα-
λαιωδέεσρα λαβεῖν, ἐςὶ τὰ δε.

Ἡ' κατὰ τὴν ἐπαφῆν Γωνία ὑπὸ σαπ, οἰασθὲν Ὁξείας ἐλάσσων ἐσίν. Α. κ. 224.
Ε'σω γὰρ Ὁξεία ἢ ὑπὸ ραο, ἀφ' ἧς δυνατόν ἀφελεῖν ἡμίσειαν, καὶ ἀπὸ τῆς
λοιπῆς αὐθις ἡμίσειαν, καὶ ὅτως ἐφεξῆς ἀνευ πέρατος, ὅτω γάρτοι ἢ Ὁξεία
οἰασθὲν δοθείσης ἐλάσσων ἂν γένοιτο. Ἀλλὰ γὰρ εἰ καὶ ἐπ' ἄπειρον ὅτως αὐ-
τὴ ἀπομειωθεῖ, αἰεὶ γεμὴν τῆς λοιπῆς Γωνίας, οἷον τῆς ὑπὸ σαο, ἢ ἑτέρα.
τῶν Πλευρῶν σα (1) ἐντὸς τῷ Κύκλῳ πεσεῖται. Ε'νθεντοὶ καὶ ἢ κατὰ τὴν ἐπα-
φῆν Γωνία παο, ὑπὸ τῆς Ὁξείας περιχεθήσεται, καὶ μέρος ἐκείνης ἔσαι, καὶ
αὐτῆς ἐλάσσων.

Ἡ' Γωνία τῷ Ἡμικυκλίῳ βαπ, καίτοι τῆς Ὁρθῆς ἐλάσσων ἔσα, ἀλλ' Β'.
οἰασθὲν Ὁξείας μείζων ἐσίν. Ὅτι διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ὅποσην ἂν εἴη τὸ
μέγεθος ἢ Ὁξεία, οἷα ἢ ὑπὸ βασ, ἐντὸς τῆς τῷ Ἡμικυκλίῳ Γωνίας ὑπὸ
βαπ κείσεται.

Καὶ ταῦτα δὴ τὰ δύο ἐν αὐτῇ τῇ Ις'. ἐκφέρεται, ὥς καὶ διαπορεῖν ἐνίαις,

(1) Ις. τῷ γ'.

πότερον γνήσια τῇ Στοιχειωτῇ ἔσιν, ἢ γὰρ ὑπότινος παρείσθηνεκται. Ὑπὸς δὲ περὶ τῆς ἐνδοιάζειν ἐκ ἀπεικότητος, καὶ γὰρ καὶ Ἀπολλόνιος, ὃ μέγα δὴ ἐπὶ Γεωμετρίας τὸ κλέος, τὸ αὐτὸ τῆτο πάθημα ἐπὶ τῇ Εὐκλείδους, καὶ τῇ Ὑπερβολῇ, καὶ τῇ Παραβολῇ ἀποδείξαι, τὰ γε τοιαῦτα ὑποσυνάψαι παρείασε.

Γ. Γωνία ὀρθή ἢ ὑπὸ οὐκ (μᾶλλον δὲ καὶ ἡ τυχῶσα Ὁξεία ὑπὸ οὐκ) ἀπειρῆς τῶν κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνίας ἐς ἐπερίχουσα ἴσας, καὶ ἀπειρον ἄρα τὴν πρὸς ταύτην ὑπεροχὴν ἔχει. Ἡ γὰρ ὑπὸ οὐκ εἰς ἀπειρῆς ἂν διαιρεθείη Ὁξεία ἀεὶ ἐλάττωσθε καὶ ἐλάττωσι, ὧν ἐκάστη μείζων τῇ κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνίας ὑπὸ οὐκ (1) ὑπετέθη.

Δ. Ἡ κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνία ὑπὸ οὐκ, τῇ ὀρθῇ ὑπὸ βῆς μέρος πραγματοῦδες τυγχάνει, ἅτε δὴ συνάμει τῇ τῇ Ἡμικυκλίᾳ Γωνία ὑπὸ βῆς τὴν ὀρθὴν ἀπαρτίζουσα. Ἀλλὰ καὶ ὅπως ἐμπὴς ἔχουσα, ὅποσον ἂν πολλὰ πλασιασθεῖ, τῷ ὅλῳ ἑαυτῇ συνεξισωθεῖναι ὁ δυνατόν· κἀντεῦθεν καὶ ἴσα ἀπειροπληθεῖ προσεθεμένα ἀλλήλοις, τὸ ἀπειρον ὁ συνίστησι.

Ε. Καὶ μεταβάσις δὲ τις ὧδε τελεῖται ἐκ τῇ ἐλάττωσι ἐπὶ τὸ μείζον, καὶ διὰ τῶν μεταξὺ ἀπάντων ἡ πρόοδος, διὰ δὲ τῇ ἴσῃ ὁδῶς· ἢ ὁ εἰς ταῦτο φέρεται, τῇ αὐτῇ τὸ μὲν μείζον ἐς λαβεῖν, τὸ δὲ ἐλάττον, ἴσον δὲ ὁδῶς. Ἐὰν γὰρ Εὐθεία ἢ αβ κατὰ θάτερον αὐτῇ τῶν περάτων α αἰριζομένη οὕτω κινήθῃ, ὥστε τῇ Ἀπτομένη αὐ ἐφαρμόσθαι, συστήσει δὴ πρὸς Ὁξείας τὰς ὑπὸ βῆς, βῆς, καὶ ἄλλας ὅσας δυνάτῳς ἔχουσαι. Αἱ δὲ καὶ τοὶ ἀεὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον μεγαθυνόμεναι, ἀεὶ ἄλλ' οὖν τῇ τῇ Ἡμικυκλίᾳ Γωνίας ὑπὸ βῆς (2) ἐλάττωσθες ἔσονται. Ἐν ᾧ δ' ἂν πρῶτον ἢ αβ τῇ Ἀπτομένη αὐ ἐφαρμόσθῃ, ὀρθὴ αὐτίκα ἢ ὑπὸ οὐκ συνίσταται, ἥτις μείζων τῇ τῇ Ἡμικυκλίᾳ Γωνίας καθέστηκε.

Ταῦτα τοίνυν καὶ τῶν ἐπὶ πλείῳ ἐκ τῇ δὲ τῇ Ις. Προτ. ἐπιφέρεται, ἀπερ εἰ ὡς προτίθεται, οὕτω καὶ ἔχει, πόρῳ καταλήψεως οἰστοῦν θεόντως ἀπέκείται, καὶ ἔστιν ὅλως ὑπὲρ διάνοιαν. Ταύτητοι καὶ τῶν παραδόξων δὴ τῶν αὐτὸν ἀπαλλάττων ὁ Πελετάριος, τὴν κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνίαν ἀνεπίδεκτον πάντων εἶναι ποσότητος ἀπεφάνετο, καὶ μὲν οὖν καὶ πέραν ἂν εἶχεν ἐκείνῳ τὸ περὶ τῆς, εἰ πάσης ἀπλῶς Γωνίας τὸ ποσόν εἶναι ἀπέφηνεν. Ἀλλὰ γὰρ τῇ ἀληθείᾳ λίαν ἀπήχθη, ἐντεῦθεν ἀπάσας τὰς τῇ Ἡμικυκλίᾳ Γωνίας ἴσας ἀλλήλαις τυγχάνειν ἀπικυριόμας, ὅπερ

ἔκ ἂν ἐπέφερε συνεῖς, ὡς ὅπερ αὐτὸς τῇ κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνίᾳ προσεῖ-
ναι ὑπέλιπε, κοινὸν ἀπασῶν τῶν Γωνιῶν τυγχάνει παρακολύθημα. Ἐγὼ
δὲ οὐδὲ τῷ Κλαβίῳ, ἐν οἷς κατὰ τῇ Πελεταρίῳ διείλεκται, συναινεῖν ἔχω,
ἐπίσης γὰρ ἐκότερον τῇ ἀληθεῖ διαμαρτάνειν ἡγῆμαι, τὸν μὲν ἀπάσαις
ὅσαις ταῖς Γωνίαις τῷ ποσοῦ μετεῖναι οἰόμενον, τὸν δὲ πλὴν τῶν κατὰ
τὴν ἐπαφὴν ἀπάσαις. Ἔτεροι δὲ ἀπαντήτει μὲν ἅπασαν ἐκ μέσων ποιῆ-
σαι δυσχέρειαν οἰηθέντες, ἀπαραδέχτες ἀλλήλαις εἶναι τάς τε καμπυλογράμ-
μους, καὶ τὰς εὐθυγράμμους Γωνίας ὑπέδεντο, ἐρωτώμενοι δὲ τῇ χάριν εἶσιν
ἀπαραῖστοι, ἄλλες αὐτοῖς ἔχειν, εἰ φαῖεν ἐνόμισαν, ὅτι ἡ κατὰ τὴν ἐπαφὴν
Γωνία ὅσακις ἐπιπολλαπλασιασθῇ, συνεξισῶνται ἤτοι Ὁρθῇ, ἢ Ὁξείᾳ
τινὶ Γωνίᾳ, ὑδέποτε ἀφίσταται.

Ἀλλὰ μὲν τῷτο δὴ τὸ παραδοξότατον ἐστὶν ἐν ἀρχῇ αἰτούμενον· τί δή πο-
τε ἡ κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνία, καίτοι τῆς Ὁρθῆς μέρος τυγχάνουσα, ὅσακι-
ς ἐπιπολλαπλασιασθῇ, ἔκ ἂν ταύτῃ συνεξισωθῇ ποτέ, χολῇ γὰρ ἂν
ὑπερχοίῃ αὐτήν. Πρὸς ἃ ἐκεῖνοι τὴν κατ' ἐπαφὴν Γωνίαν ὑδὲ μέρος τῆς
Ὁρθῆς εἶναι διδόασιν, παρὰ τὸ μὴ συνεξισῶνται αὐτῇ ἐπιπολλαπλασιαζομένην.
Ἀλλ' οἱ τὰ παράδοξα ἐκεῖνα εἰσηγόμενοι, καὶ ἀποδεχόμενοι αὐτοῖς ὑπεξανί-
σανται, κἀντεῦθεν (φασί) τῷδ' ἡκιστα ἐπεται, μηδαμῶς εἶναι μέρος ἀληθές
καὶ πραγματιῶδες, ὅτι καὶ τῇ τῇ Ἡμικυκλίᾳ προσεδείξα, ὁλοκληρῇ τὴν Ὁρθὴν
ἀποδιδῶσι, ταῦτ' δὲ καὶ μόνον μὴ μέρος εἶναι Πηλίκον καὶ ἐκεῖνοι διδόασιν. Τὰς δὲ
τοιῶδες λόγῳ τὰ προσπίπτοντα δυσχερῇ ἐπιλύσασθαι προελομένους, ἔδει δή ποτε
τὴν κατ' ἐπαφὴν Γωνίαν μηδὲν ὅλως τρόπον μέρος εἶναι τῆς Εὐθυγράμμου
ἀποδεικνύειν πειρᾶσθαι, οὐδὲ τῇ προσλήψει τῆς τῇ Ἡμικυκλίᾳ τὴν Ὁρθὴν
συναπαρτίζειν διῷχυρίζεσθαι, τῷ δ' ὅπερ ἡμεῖς σὺν Θεῷ ποιήσῃ αὐτοὶ πει-
ρασόμεθα.

Ἐμοὶ γυν δοκεῖ ὅτι τὸ πᾶν τῆς ἐπιλύσεως ἐξ αὐτῆς δὴ τῆς κατ' Εὐκλείδην Ὁρ. κ. Βιβ.
ὀρισμῶ τῆς Γωνίας ἡρτηται. Ταύτην γὰρ τοῖς ἐς βάθος φιλοκρινῶσι φανερόν, α'.
ὅτι φύσει πᾶσα Γωνία ποσότητός ἐστιν ἀνεπίδεκτος· ταύτης γὰρ τῆς ἐξεπᾶ-
της ἐκποδῶν γενομένης, αὐτίκα πάντα ἡμῖν οἰχίσεται τὰ παράδοξα. Ἐγὼ
γὰρ ὅπως εἰμὶ δόξης ἔχων·

Ὅτι ὑδεμία Γωνία ποσὸν ἐστὶ, τρόπος δὲ τις μᾶλλον ἢ Γωνία ποσότητος. α'.
Ὡρίζαι γὰρ ἐκείνην (Ὁρ. Η. τῇ Α'.) δυοῖν εἶναι Γραμμῶν ἀλλήλων ἀπτομέ-
των, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων κλίσιν, ἡ δὲ τῶν Γραμμῶν πρὸς ἀλλήλας
κλίσις ἔκ ἐστὶ ποσὸν, τρόπος δὲ τις ποσότητος, τῆς γὰρ καμπυλότητος τὸ
ποσὸν εἶναι παραιτημένης, πῶς ἂν αὐτὸ ἡ κλίσις περιποιεῖτο, μηδὲν ἐκείνης

διαφέρητα μᾶλλον, ἢ ὅσον ἡ κλάσις τῆς κάμψεως; Εἴτα ἐ ποσόντι οὕσα ἡ Γωνία, εἴη ἂν πάντως ἦτοι Γραμμὴ, ἢ Ἐπιφάνεια, ἢ Σῶμα. Ἀλλ' ὅτι μὲν ἐδὲ Γραμμὴ, ἐδὲ Σῶμα καθ' αὐτὸ δῆλον, ὅτι δὲ ἐδ' Ἐπιφάνειά τις ἐστίν, ἐν-
τεῦθεν ἀποδείξαι βῆδιον, τῆς μὲν γὰρ Ἐπιφανείας ἰδιον, ἢ δι' ἀφαιρέσεως τῶν
μερῶν ἀπομειώσις, τῆς δὲ Γωνίας βδαμῶς. Ἀλλ' ἐδ' ἂν εἴη (ὅπερ ἂν ἴσως τις
ὑπολάβοι) ἡ Γωνία Ἐπιφάνειά τις ἀόριστος, ἐπεὶ πᾶσα Γωνία ὠρισμένη καθε-
στηκε.

Β'. Τῶν οὖν Γωνιῶν μὴ ποσῶν, ποσῇ δὲ τρόπων τινῶν οὕσων, ἡ κατὰ πα-
ράδεισιν χέσις οὐκ ἂν εἴη κατ' ἰσότητα ἢ ἀνισότητα, κατὰ δὲ τὸ ὅμοιον ἢ
ἀνόμοιον.

Γ'. Ἐπειδὴν δὲ ἴσαι ἢ ἀνισοὶ ἀλλήλαις παρατιθέμεναι αἱ Γωνίαι λέγονται,
τῷτο δὴ νοητέον ἐκείνας ὁμοίους, ἢ ἀνομοίους εἶναι λέγεσθαι. Ταύτας δὲ ἴσαι
τε ἐ ἀνίσως ὁ Στοιχειωτὴς ὀνομάζειν προεῖλετο, τὰς πρῶτας μᾶλλον οἱ ἐσο-
μένους φωνάς, ἐπὶ τῇ τῶν Εὐθυγράμμων θεωρίᾳ παραλαβὼν, ἥ δὴ περ χρή-
σει ἐ αὐτοὶ σοιγήσομεν.

Δ'. Ὅμοιαι δὲ Γωνίαι εἰσὶν, ὧν ἅμφω αἱ Πλευραὶ ἐπιτιθέμενων ἐφαρμόζο-
σιν, ἀνόμοιοι δὲ ὧν ἕκ ἐφαρμόζουσιν αἱ Πλευραί. Οὐδὲν γὰρ ἀμέλει ἡ Γωνία
ἕτερόν ἐστιν, ὅτι μὴ δυοῖν Γραμμῶν πρὸς ἀλλήλας κλίσις, οὐκὲν ἐ Γωνίαι ὁ-
μοιαι, αὐτὸ τῷτο εἰσὶ τῶν Γραμμῶν ὁμοιαι κλίσεις. Οὐκ ἐσονται δὲ τῶν
Γραμμῶν ὁμοιαι κλίσεις, εἰμὴ ἅμφω ἐπιτιθέμεναι ἀλλήλαις προσεφαρμόζεσι.
Γωνίαι ἄρα ὁμοιαι εἰσὶν, ὧν ἐφαρμόζουσιν αἱ Πλευραί, ἀνόμοιαι δὲ ὧν ἕκ ἐφαρ-
μόζεσι.

Ε'. Καὶ τοίνυν σαφές ἐστι, μηδεμίαν Γωνίαν καμπυλόγραμμον συνεξιστῆσαι
ἔχειν Γωνίᾳ μηδεμιᾷ εὐθυγράμμῳ. Ἐπειδὴ γὰρ ἡ τῶν Γωνιῶν ἰσότης ἐδὲν
ἐστίν ἕτερον παρὰ τὴν τῶν αὐτῶν ὁμοιότητα (Θέσ. Β. ἐ Γ.), ἡ δὲ ὁμοιότης
τῶν Γωνιῶν ἐν τῇ τῶν Πλευρῶν κείται προσεφαρμόσει (Θέσ. Δ.). ἄδύνατον
δὲ προσεφαρμόζειν Γωνίαν καμπυλόγραμμον Γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ, ἄρα κτ.
Οὐκ' ἄρα ὀρθῶς ὁ Πρόκλος ἴσα καταγεγραφώς Ἡμικύκλια, συλλογίζεται
ὅτι τῶν ἴσων Ἡμικυκλίων καθ', ὡς αἱ Γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, κἄντεῦθεν
ἐπιφέρει, ὅτι εἰ προσεδῇ Γωνία ἡ ὑπὸ βαε, ἔσαι ἡ ὑπὸ βαδ καμπυλόγραμ-
μος ἴση τῇ ὑπὸ γαε ὀρθῇ. Τί θαί; ψεύδεται τὸ Ἀξίωμα, ὡς εἰ τοῖς
ἴσοις, ἢ ἀπὸ τῶν ἴσων, ἴσα προδῇς ἢ ἀφελῇς, τὰ ἀδριζόμενα ἢ τὰ λοιπὰ ἴσα
ἔσαι; Οὐ μὰ δι', ἀλλὰ τοῖς ποσῇ δεκτικοῖς μόνοις ταῖς προσανῆκον ἐστίν. Αἱ
δὲ Γωνίαι ποσῇ εἰσὶν ἀνεπίδεκτοι, τὸ δὲ Ἀξίωμα ὡς ἂν ἔχη κατὰ τῶν Γωνι-
ῶν χῶραν, ὅπως ὠφείλεν ἐκφέρεσθαι ἐ νοεῖσθαι, τὸ τὰς ὁμοίας δηλονότι Γω-

νίας, προσαπτομένας ταῖς ὁμοίαις Γωνίαις, καὶ ὁμοίως κειμέναις, Γωνίας ὁμοίας παρέχειν. Ὁ δὲ Πρόκλος παρατίθησι μὲν Γωνίας ὁμοίας, προσάπτει δὲ ἑκατέραις τρίτην κοινὴν, τὴν παρὰ τὸ τὴν ἑτέραν Εὐθείαν ἔχειν, διατέραν δὲ καμπύλην τῶν Πλευρῶν, μὴ ὁμοίως προσαπτομένην.

Εὐθεντοὶ ἐπεὶ αὕτη ἡ τῶν Γωνιῶν φύσις, ἡ τῶν ἀπτομένων Γραμμῶν πρὸς ἀλλήλας κλίσις, ἡδέποτ' ἔσαι Γωνία Γωνίας μέρος, οὐδὲ γὰρ κλίσις τις μέρος ἂν εἴη ἑτέρας κλίσεως, οὐδὲ μὲν οὖν Γωνία ἀπὸ Γωνίας ἀφαιρεῖσθαι δυνήσεται, οὐ γὰρ ἂν ἀφέλῃ τις κλίσειν ἀπὸ κλίσεως κτ. Ταῦτα γὰρ καὶ τὰ τοιαῦτα, ἔχῃ ταῖς τῶν Πλευρῶν κλίσεσιν, αἱ ποσὲ εἰσὶν ἀνεπίδεκτοι, ταῖς δὲ μεταξὺ τῶν Πλευρῶν Ἐπιφανείαις ἐστὶ προσήκοντα.

Τελευταῖον ἐκ τῶν ἤδη εἰρημένων ὑποσυνάψομεν, ὅπως νοητέον τὰ παρὰ τῶν Γεωμέτρων καὶ τῷ Εὐκλείδῃ πρὸ πάντων λεγόμενα, τὰ περὶ τομῆς Γωνιῶν, καὶ αὐξήσεώς τε καὶ μειώσεως τῆς αὐτῶν, καὶ ὅτι Γωνία Γωνίας διπλασία, ἢ τριπλασία, καὶ τὰ παραπλήσια. Ταῦτα γὰρ οἰόμεθα μὴ κυρίως ἐκείνης, ἀναλογικῶς δὲ περὶ Γωνιῶν λέγειν, ἐλέσθαι τε τῶν φωνῶν τὰς χρησιμωτέρας, καὶ ὧν ἕδνα κίνδυνον φέρει ἀπάτης, ἕως ἂν μένη ἐπὶ τῶν εὐθυγράμμων Γωνιῶν παραληφθεῖτα ἢ χρησίς. Καὶ δὴ τὸ Γωνίαν ὑπὸ Εὐθείας τινός, φέρε εἰπεῖν τῆς δα διαιρεῖσθαι, ἢ δὲν ἄλλο σημαίνειν φανέν, ἢ τὸ μεταξὺ τῶν Πλευρῶν εα, γα, ἄλλην Πλευρὰν παρεμπίπτειν, ἥτις καινὰς κλίσεις δύο σὺν ἑκατέρᾳ τῶν Πλευρῶν, τατέσι δύο καινὰς Γωνίας συνίστησι. Τὸ δὲ τὴν ὑπὸ εαγ διπλασίαν εἶναι τῆς ὑπὸ εαδ, ἢ δὲν ἄλλο ἔσαι, ἢ τὸ μεταξὺ τῶν Εὐθειῶν εα, γα, τρίτην παρεμπίπτειν τινὰ πρὸς ἑκατέραν ἐκείνων ὁμοίαν τὴν ἐπίκλινσιν ἔχουσαν, ἐξ ἧς δὴ συμβαίνει καὶ τὰς εα, δα ταῖς γα καὶ δα ἐπιτιθεμένας, μηδαμῶς ἀμειβομένων τῶν κλίσεων ἐφαρμόζειν· ὥς εἴ τις ἕτως εἴη συλλογιζόμενος (Γωνία ἢ ὑπὸ εαδ, ἴση ἐστὶ Γωνία τῇ ὑπὸ ιλπ, ἥτε ὑπὸ δαγ ἴση τῇ ὑπὸ πλρ, ἄρα καὶ ὅλη ἢ ὑπὸ εαγ, ἴση ἔσαι ὅλη τῇ ὑπὸ ιλρ) ἢ δὲν ἄλλο φήσει, ἢ ὅτι ἡ τῶν Εὐθειῶν κλίσις εαδ ὁμοία ἐστίν, ἢ γυν ἢ αὐτὴ τῇ τῶν Εὐθειῶν κλίσει ιλπ. Ἡ δὲ κλίσις τῶν Εὐθειῶν δαγ, ὁμοία ἐστὶ τῇ κλίσει τῶν Εὐθειῶν πλρ, ἄρ οὖν καὶ ἡ κλίσις τῶν Εὐθειῶν εαγ, ὁμοία ἔσαι τῇ κλίσει τῶν Εὐθειῶν ιλρ. Σὺ δέ μοι καὶ ἔγω (ὅ πάντως εἰς ταυτὸ φέρει κατὰ τὴν Δ. Θέσ.) τὴν ἐπιφορὰν ταύτην ὑποσυνάψαι· αἱ Πλευρὶ εδ ἐφαρμόζῃσι ταῖς Πλευραῖς ιλπ, καὶ αἱ δαγ ταῖς πλρ, ἄρα καὶ αἱ εαγ ταῖς ιλρ· ἥτις δὴ συνέπεια ἢ δὲν ἥττον ἔσαι σαφές, ἢ εἴπερ συνάψαις, ὅτι τοῖς ἴτοις ἴσων προσεθέντων τὰ ὅλα ἴσα ἐσὶ. Παραπλησίως δὲ, καὶ εἰτινες ἄλλαι χρήσεις ταῖς

ποσότητι προσοίεσθαι, ἐπὶ ταῖς Γωνίαις εἰσίνισσι μεταφέρεσθαι, τῆς τῶν Θεωρημάτων ἀληθείας σωζομένης ἐκμηθεύουσινται.

Τῶν οὖν ἕτω κειμένων, τὰ περὶ τὰς Γωνίας παραδόξια ἐκείνη ῥᾶστα ἡμῖν ἐπιλυσήσεται. Ταῦτα γὰρ οὐκ ἀλλοθιεν ἢ πῃ τὴν ἀρχὴν ἔρχεν, ἢ ἐκ τῆς τὰς Γωνίας ἀντὶ ποσῶν προσλαμβάνεσθαι, καὶ ἔστιν ἄρα (ὡς ἐπὶ λόγῳ ἀπασησθα) τὰ πάντα ψευδῆ κυριολεχτημένων τῶν φησάσων. Οὕτω γὰρ ἐκείνη ληφθέντα τοῖς ποσῶ μετέχουσι προσοικειωθήσεται, οὗ τὴν Γωνίαν ἀνεπίκετον εἶναι φησάσαντας ἀπεδείξαμεν.

Καὶ τοῖνον ἢ κατὰ τὴν ἐπαφὴν Γωνία, ἔκουν ἢδ' ἐλάσσων ἐστὶν ἀπασθης Ὁξείας, ἢδὲ μέγος τὸ τυχεῖν Γωνίας τῆς εὐδυσχεύμενης, οὐδ' ἐν τῇ Εὐδυσχεύμῳ ἀπειράταις ἐστὶ περιεχομένη, πολλαῖ γὰρ εἰ δέῃ, εἰ ἢδὲ ἀπαξ· οὐδὲν γὰρ τῶν τοιούτων τῇ τῶν γεγεμῶν πρόσκει κλίσει, ἐν ἣ παῖστα κείται ἢ φύσις ἢ τῆς Γωνίας. Εἰάν δὲ μὴ κυρίως, ἀναλογικῶς δὲ πῶς ἐκείνη ὑποτελεῖ λαμβανόμενα, οὐδὲν ἦδη περιέξει, ὃ τῆς κοινῆς αἰδήσεως καὶ τῆ λόγῳ εἰη ἀλλότριον, οὕτω εἰ γὰρ τό, τε τὴν κατ' ἐπαφὴν Γωνίαν (ὅρα τὸ Σχημ. ἐν τῷ Δ'. τῶν Παραδόξων), τὴν ὑπὸ πᾶσι ἐλάσσονα εἶναι οἰσθῆν Ὁξείας, εἰ τὸ τὴν τῇ Ἡμικυκλίᾳ ὑπὸ πᾶσι οἰσθῆν Ὁξείας μείζονα, ἢδὲν ἄλλο σημαίνει, ἢ ὅτι ὑπὸ τῇ Ἀπτομένῃ σα, ἢδὲμίαν ἐστὶν ἀγαγεῖν Εὐθείαν πρὸς τὴν ἐπαφὴν, ἥτις μὴ τίμιοι τὴν Περιφέρειαν· ὃ δὴ πῃ πείδημα ἐστὶ τῆς Κύκλου φύσεως παντὸς διαιρέματος ἄξιον, ἡμῖν δὲ τοιούτου, οἷον ὑπὲρ κατάληψιν εἶναι πᾶσας, εἰ τῷ λόγῳ ἀντιμαχόμενον. Παρεπλήτοιοι δὲ τῷ ἐκτεθέντι ἔδειται καὶ τῶν παραδόξων τῶ τε Γ'. καὶ τῷ Δ'. ὁ γὰρ. Καὶ ἕτω διὰ μόνον τῇ κατ' Εὐκλείδειον Ὁρισμῶ, ἀκριβῶς ἐπιγνησσι τῆς Γωνίας τὴν φύσιν, πᾶσα ἡμῖν ἢ ἐκ τῶν παραδόξων ἐκείνων ἐπιπολλάσθαι τῇ διαπολῇ ἀχλὺς, οἷονε φωτὸς ἐπιδείκνυται διασπιδνεται.

Π ρ ο τ α σ ι ς ΙΖ.

« Ἀπὸ τῆ δοθέντος ἡμισίς (β), τῇ δοθέντος Κύκλου (ορ) ἐφαπτομένην εὐθείαν Γεμῆν ἀγαγεῖν.

Ἐπεξεύχθω τὸ Κέντρον α τῇ δοθέντος Κύκλου, εἰ τὸ δοθὲν Σημεῖον β, δι' Εὐθείας τῆς αβ, τεμνέσθαι τὴν τῇ Κύκλου Περιφέρειαν κατὰ τὸ ο. Καὶ Κέντρον μὲν τῷ α, -Διασπιδναι δὲ τῷ αβ Κύκλος γεγραφθῶ, καὶ ἀπὸ τῆ ο ἥχθῶ οπ (ι) πρὸς ὀρθὰς τῇ αβ, προσπίπτουσα τῷ Κύκλῳ βπ κατὰ τὸ π, καὶ

ἐπεξεύχθω πα, τέμνεσα τὴν τῷ δοθέντος Κύκλου οῖ Περιφέρειαν κατὰ τὸ 1, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ βι. Λέγω δὴ ὅτι αὕτη ἔσαι ἡ τῷ Κύκλου οῖ Ἐφαπτομένη.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ βα, ια Πλευραὶ ἴσαι ταῖς πα, οα εἰσὶν (1), ἡ ἑτέρα τῇ ἑτέρᾳ, ἡ δὲ πρὸς τῷ α Γωνία κοινὴ ἐπὶ τῶν Τριγώνων ιαβ, οαπ, ἔσαι δὴ ἡ ὑπὸ αοπ (2) ἴση τῇ ὑπὸ αιβ. Ἀλλὰ μὲν ἡ ὑπὸ αοπ Ὀρθή (3) ἐστίν, ἄρα ἡ ἡ ὑπὸ αιβ Ὀρθή ἐστίν. Ἀρα (4) ἡ βι Ἐφαπτομένη τῷ Κύκλῳ ἐστὶ κατὰ τὸ 1. Ο. Ε. Π.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Διὰ τῆς ΛΑ'. τῷ Παρόντος, πάνυ καλῶς ἀπὸ τῷ δοθέντος Σημεῖο ο κ. 228.
τῷ δοθέντος Κύκλου βπ, ἔφαπτομένην κατὰ τὸ β, τὴν οβ εὐθεῖαν Γραμμὴν ἀγειν παιδευόμεθα,

Τὴν ἐπιζευγνύουσιν τὸ α Κέντρον, ἡ τὸ δοδὲν Σημεῖον ο, δίχα τέμνοντες (5) κατὰ τὸ ρ, ἡ Κέντρῳ μὲν τῷ ρ, Διαστήματι δὲ τῷ ρα Κυκλον γράφοντες τὸν δοθέντα τέμνοντα κατὰ τὸ β, καὶ τὴν οβ ἐπιζευγνύντες, ἥτις ἔσαι ἡ Ἐφαπτομένη.

Ἐπιζευχθεῖσης γὰρ τῆς αβ, ἔσαι ἡ ὑπὸ αβο, ἅτε δὴ Γωνία ἐν τῷ Ἡμικυκλίῳ ἔσα (διὰ τὴν ΛΑ'. τῷ παρ.), Ὀρθή. Ὡς δὲ διὰ τὴν Ις'. τῷ αὐτῷ, ἡ οβ τῷ Κύκλῳ βπ ἔσαι Ἐφαπτομένη.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΗ.

„Ἐὰν Κύκλος ἐφάπτηταί τις Εὐθεΐα (γλ), ἀπὸ δὲ τῷ Κέντρῳ (α) ἐπὶ τὴν ἀφὴν (β) ἐπιζευχθῇ τις Εὐθεΐα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα Κάθετος ἔσαι ἐπὶ τὴν Ἀπτομένην.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' ἀπὸ τῷ α Κέντρῳ Κάθετος ἤχθω ἄλλη (6) ἡ αζ, τέμνεσα τὸν Κύκλον κατὰ τὸ ο (7). ἡ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ αζβ Ὀρθή ὑποτίθεται, ἔσαι ἡ ὑπὸ αβζ (8) Ὀξεΐα. Ἡ ἄρα αβ (ἥτοι ἡ αο) μείζων (9) τῆς αζ, τὸ μέρος τῷ ὅλῳ. κ. 229.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΘ.

„Ἐὰν Κύκλος ἐφάπτηταί τις Εὐθεΐα (βγ), ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς (α) τῇ Ἐφα-

(1) Οἱ. ΙΗ. τῷ α'. (2) Δ. τῷ α'. (3) Ἐκ κατ. (4) Ις' τῷ γ'. (5) ΙΔ. τῷ α'. (6) Ι. τῷ α'. (7) Μερ. τῆς Ις. τῷ α'. (8) Πόρ. Ε. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (9) ΙΘ. τῷ α'.

„πτομένη πρὸς ὀρθὰς Γωνίας εὐθεῖα Γραμμὴ (αι) ἀχθῆ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης
 „ἔσαι τὸ Κέντρον τῆς Κύκλου.

κ. 230.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' ἔσω τὸ Κέντρον μὴ ἐπὶ τῆς αι, κατὰ τὸ ψ, καὶ ἀπὸ
 τότε ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἐπεξεύχσω ἢ ψα, καὶ ἔσαι ἢ ὑπὸ ψαγ (1) Ὀρθή, καὶ
 δὴ ἢ ἴση τῇ ὑπὸ ιαγ, τῇ (καδ' ὑπόθ.) ἢ αὐτῇ Ὀρθῇ, τὸ μέρος τῷ ὅλῳ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Κ.

„Εν Κύκλῳ ἢ πρὸς τῷ Κέντρῳ Γωνία (ὑπὸ βαγ) διπλασίῳ ἐστὶ τῆς πρὸς
 „τῇ Περιφερείᾳ (ὑπὸ βζγ), ἔταν τὴν αὐτὴν Περιφέρειαν (βγ) Βάσιν ἔχω-
 „σιν αἱ Γωνίαι.

κ. 231.

Α'. Τῶν βα, βζ Πλευρῶν συμπίπτουσιν, εἰ τύχοι, ἐπεὶ αἱ ἀπὸ τῆς
 Κέντρος πρὸς τὴν Περιφέρειαν αζ, αγ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἔσονται δὴ (2) αἱ
 πρὸς τῷ ζ ἢ γ Γωνίαι ἀλλήλαις ἴσαι. Α'λλ' ἢ ὑπὸ βαγ (3) ἴση ἐστὶ ταῖς
 δυσὶν ἀπεναντίον ἅμα ληφθεῖσαις, ἄρα ἢ ὑπὸ βαγ διπλασίῳ ἐστὶ τῆς κα-
 τὰ τὸ ζ.

κ. 232.

Β'. Εἰ δὲ αἱ αβ ἢ αγ τῆς πρὸς τῷ Κέντρῳ Πλευραὶ, μεταξὺ τῶν
 βζ ἢ γζ, τῶν πρὸς τῇ Περιφερείᾳ Πλευρῶν, ὥσπερ πίπτουσαι, ἀχθείσης διὰ
 τῆς Κέντρος τῆς ζχ, ἢ μὲν ὑπὸ βαχ (διὰ τὸ Α') διπλασίῳ τῆς ὑπὸ βζχ,
 ἢ δὲ ὑπὸ χαγ διπλασίῳ τῆς ὑπὸ χζγ. Ἡ ἄρα (4) ὅλη ὑπὸ βαγ διπλα-
 σίῳ τῆς ὅλης ὑπὸ βζγ.

Ἐσω ἢ ὑπὸ χαβ μοιρ. 6, καὶ ἔσαι (5) ἢ ὑπὸ χζβ μοιρ. 3. Ἐσω δὲ
 ἢ ὑπὸ χαγ μοιρ. 4, καὶ ἔσαι (6) ἢ ὑπὸ χζγ μοιρ. 2· τοιγαρὲν $\chi\alpha\beta + \chi\alpha\gamma = \text{μοιρ. } 6 + 4 = \text{μοιρ. } 10 = \text{βαγ}$. Αἱ δὲ $\chi\zeta\beta + \chi\zeta\gamma = \text{μοιρ. } 3 + 2 = \text{μοιρ. } 5 = \text{βζγ}$, ὁ δὲ δεκάδικος ἀριθμὸς τῆς πενταδικῆς διπλασίῳ ἐστίν, ἄρα
 ἢ ὑπὸ βαγ τῆς ὑπὸ βζδ διπλασίῳ ἐστὶ.

κ. 233.

Γ'. Εἰ δὲ ἢ βζ τεμνῇ τὴν αγ, ἢτε ὑπὸ βαγ Γωνία, ἢ ἢ ὑπὸ βζγ ἐκτὸς
 ἀλλήλων κείμεναι ὥσιν, ἐπεξεύχσω ἢ αζ, ἢ διήχσω πρὸς τὸ λ· Καὶ δὴ ὅλης
 τῆς ὑπὸ λαγ (7) διπλασίονος ἔσης ὅλης τῆς ὑπὸ λζγ, εἰάν ἀφαιρεθῇ ἢ ὑπὸ
 λαβ διπλασίῳ ἐτέρωθεν, ἢ ἢ ὑπὸ λζβ ταύτης ὑποδιπλασίῳ, λοιπὴ ἢ
 ὑπὸ βαγ (8) λοιπῆς τῆς ὑπὸ βζγ διπλασίῳ ἔσαι. Ο. Ε. Δ.

Ἐσω λαγ μοιρ. 12, ἢ λαβ μοιρ. 2, καὶ ἔσονται (9) λζγ μοιρ. 6, ἢ

(1) Διὰ τὴν ἀνωτ. (2) Ε. τῆς α'. (3) ΑΒ. τῆς α'. (4) Διὰ ΙΒ. τῆς πίπτουσας τὴν ἐκ
 ταύτης μηδαμῶς ἡρημένην. (5) Διὰ τὸ Α'. (6) Διὰ τὸ αὐτό. (7) Διὰ τὸ Α'. (8) Διὰ
 τὴν ΙΘ. τῆς Ε. τῆς ἐκ ταύτης μηδαμῶς ἡρημένην. (9) Διὰ τὸ Α'.

λζβ μοιρ. 1. Ἄρα λαγ — λαβ = μοιρ. 12 — 2 = μοιρ. 10 = βαγ. Καὶ
 λζγ — λζβ = μοιρ. 6 — 1 = 5 = βζγ, ἡ ἄρα ὑπὸ βαγ διπλασίων ἐστὶ
 τῆς ὑπὸ βζγ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΑ.

„Εν Κύκλῳ, αἱ ἐν τῷ αὐτῷ Τμήματι (βπγ) Γωνίαι (βπγ, βτγ)
 ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ.

Εἴσω δὴ Α'. μείζον Η'μικυκλίῳ τὸ Τμήμα βπγ, καὶ ἀπὸ τῆς Κέντρος κ. 234.
 ἤχθωσαν αἱ αβ, αγ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ βαγ διπλασίων ἐστὶ (1) τῆς τε ὑπὸ
 βπγ καὶ τῆς ὑπὸ βτγ, καὶ οἰσθὲν ἄλλης τῆς πρὸς τῇ Περιφερείᾳ ἥσης, ἐκεί-
 ναι ἄρα αἱ ὑπὸ βπγ καὶ βτγ, καὶ ὅσαι ἄλλαι ἐν τῷ αὐτῷ Τμήματι (2), ἴσαι
 ἀλλήλαις εἰσὶ.

Ἀλλ' εἴσω δὴ Β'. τὸ Τμήμα, ἥτοι Η'μικύκλιον, ἢ ἑλάττον Η'μικυκλίῳ, κ. 235.
 τὸ βπζγ· καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ποβ ἴση ἐστὶ (3) τῇ ὑπὸ ζογ, ἡ δὲ ὑπὸ
 πβζ ἴση τῇ ὑπὸ πγζ (4). Ἄρα καὶ λοιπὴ (5) ὑπὸ βπο, ἴση ἔσται τῇ λοι-
 πῇ ὑπὸ οζγ.

Π ό ρ ι σ μ α .

Εὐτεῦθεν ἐπὶ τῶν ὀπτικῶν ἐπιφέρομεν, ὅτι Γραμμὴ πᾶσα οἷον ἡ βγ,
 ὑπὸ τῆς ὀφθαλμοῦ τῆς ὀψεσθῆναι ἂν τύχη κειμένη τῆς Περιφερείας, ἥς ἡ Γραμ-
 μὴ ἐστὶν Ὑποτείνουσα, ἰσομεγέθους ὁράται, ὥς ἄρα διὰ Γωνιῶν πανταχῶς ἰσῶν,
 τῶν ὑπὸ βπγ καὶ βζγ ὀπτανομένη.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Εἰάν ἐπὶ Περιφερείᾳ βογ τῆς αὐτῆς, βεβηκείαι ὥστι Γωνίαι δύο ἴσαι
 ἀλλήλαις, καὶ τούτων ἡ ἐτέρα ὑπὸ βζγ πρὸς τῇ Περιφερείᾳ ἢ τῇ ἀντιθέτῳ
 πρὸς τὴν βογ, ἔσται δὴ ἑκατέρω τῶν Γωνιῶν πρὸς τῇ Περιφερείᾳ, τῇ πρὸς τὴν
 βογ ἀντιθέτῳ, ταύτης ἢ τῇ ὑπὸ βζγ ἴση Γωνία οὐδ' ὑπὲρ τὴν Περιφε-
 ρειαν ἀφίξεται, ἅτε εἰσω τῆς Περιφερείας πεσεῖται.

Πιπτέτω γὰρ εἰ δυνατόν εἰσω τῆς Περιφερείας κατὰ τὸ 1 ἢ ὑπὸ βιγ, κ. 236.
 ἢ τῇ ὑπὸ βζγ τῇ πρὸς τῇ Περιφερείᾳ ἴση, καὶ προήχθω ἡ βι, ὥς προσ-

(1) Διὰ τὴν αὐτὴν. (2) Αξ. ε'. (3) ΙΒ. τῷ α'. (4) Διὰ τὸ Α. μέρος. (5) Πόρ.
 Θ. τῆς ΑΒ. τῷ α'.

πεσεῖν τῇ Περιφερείᾳ κατὰ τὸ π , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $\pi\gamma$. Καὶ ἐπεὶ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ Τμήματι Γωνίαι (1) ὑπὸ $\beta\pi\gamma$, $\beta\zeta\gamma$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἡ δὲ ὑπὸ $\beta\iota\gamma$ (2) ἴση τῇ ὑπὸ $\beta\zeta\gamma$, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $\beta\iota\gamma$ ἐκτός, ἴση τῇ ὑπὸ $\beta\pi\gamma$ ἐντός. Ὅπερ (3) ἄτοπον.

Ἀλλὰ γὰρ εἰ δυνατόν πιπτέτω τῆς Περιφερείας ἐπέκεινα ἡ Γωνία ἀφικναμένη τῷ Κύκλῳ ἐκτός, κατὰ τὸ ϵ , ἀπὸ δὲ τῆς Σημείας δ , κατὰ τὸ τέμνει τὴν Περιφέρειαν, ἡχθῶ ἐπὶ τὸ γ ἡ $\delta\gamma$. Καὶ ἔσκι ὁμοίως ἡ ὑπὸ $\beta\delta\gamma$ (4) ἴση τῇ ὑπὸ $\beta\zeta\gamma$ ἡ δὲ ὑπὸ $\beta\epsilon\gamma$ (5) ἴση τῇ αὐτῇ ὑπὸ $\beta\zeta\gamma$. Ἀρα ἡ ὑπὸ $\beta\delta\gamma$ ἴση τῇ ὑπὸ $\beta\epsilon\gamma$, ὅπερ (6) ἀδύνατον. Ο. Ε. Δ.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον, καὶ τῇ Τμήματος Ἡμικυκλίου ὄντος ἡ γὰρ Ἡμικυκλίᾳ ἐλάσσονος, ἀποδείξει ῥᾶδιον, ὅτι ἡ τῇ πρὸς τῇ Περιφερείᾳ ἴση, ὅτε ἐπέκεινα τῆς Περιφερείας γενήσεται, ὅτε ἐντός, ἀλλ' ἐπ' αὐτὴν δὴ τὴν Περιφέρειαν ἀκριβῶς ἀφίξεται.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΒ.

„Τῶν ἐν τοῖς Κύκλοις Τετραπλεύρων (αβγζ), αἱ ἀπεναντίον Γωνίαι „δυσὶν Ὁρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

κ. 237.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ $\beta\zeta$, $\gamma\alpha$. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ $\alpha\beta\gamma$ μετὰ δυσὶν τῶν κατὰ τὸ $\circ$ καὶ π , δυσὶν Ὁρθαῖς (7) ἴσεται, καὶ ἡ μὲν $\circ$ ἴση τῇ ι , ἡ δὲ π ἴση τῇ σ (8), ἡ ἄρα ὑπὸ $\alpha\beta\gamma$ σὺν δυσὶ ταῖς κατὰ τὸ σ καὶ ι , δυσὶν Ὁρθαῖς συνεχισθῆται. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ ἡ ὑπὸ $\beta\alpha\zeta$ καὶ ὑπὸ $\beta\gamma\zeta$ δυσὶν Ὁρθαῖς ἴσαι δειχθήσονται.

Π ό ρ ι σ μ α Α΄.

Καὶ εἰν ἄρα τις τῶν τῶν Τετραπλεύρων τῶν ἐν τῷ Κύκλῳ Πλευρῶν προαχθῇ, οἷον ἡ $\alpha\zeta$ κατὰ τὸ δ , ἔσκι ἡ ἐκτός Γωνία ὑπὸ $\gamma\zeta\delta$, ἴση τῇ τῇ Τετραπλεύρῳ ἀντιθέτῳ β . Ἡ γὰρ τῇ ἐκτός ἐφεξῆς ὑπὸ $\gamma\zeta\alpha$, ὁποτέρῃ αὖν τούτων προσεθείη (9). Ὁρθὰς δύο συστήσει.

Π ό ρ ι σ μ α Β΄.

Καὶ περὶ Ῥόμβον, ἡ ῥομβοειδὲς Σχήμα Κύκλος ἐκ αὐτῶν ἔχει γραφῆναι.

(1) Διὰ ταύτην τὴν ἀνὰ χεῖρας. (2) Ἐξ ὑποθ. (3) Πόρ. Α. τῆς ΑΒ. τῷ α. ἥτοι Ις. τῷ α. (4) Διὰ τὴν Πρότ. (5) Ἐξ ὑποθ. (6) Διὰ τὸ αὐτὸ Πόρισμα. Ἡτοι Ις. τῷ α. (7) ΑΒ. τῷ α. (8) ΚΑ. τῷ γ. (9) Διὰ ταύτ. καὶ τὴν ΙΓ. τῷ α.

Τῶν γὰρ αἱ ἀπεναντίον δύο Γωνίαι, ἥτοι ἐλάττωσιν εἰσι δυοῖν Ὁρθῶν ἢ μείζονες.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΓ.

„Ἐπὶ τῆς αὐτῆς Εὐθείας (αβ) δύο Τμήματα Κύκλων ὅμοια, καὶ ἄνισα
 „(τὰ αγκ, αδβ) οὐ συσκαθίσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Συσκαθίτω γὰρ εἰ δυνατόν, καὶ διήχθω ἡ αγκ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ γβ, α. 238.
 δβ. Ἐπεὶ οὖν ὅμοιον ἐστὶ τὸ αγκ Τμήμα τῷ αδβ Τμήματι· ὅμοια δὲ Τμή-
 ματα ἐστὶ τὰ βεχόμενα Γωνίας ἴσαι (1), ἴση ἔρα ἡ ὑπὸ αγκ τῇ ὑπὸ αδβ,
 ἢ ἐντὸς τῇ ἐκτός. Ὅπερ (2) ἀδύνατον.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΔ.

„Τὰ ἐπὶ ἴσων Εὐθειῶν (αβ, γδ) ὅμοια Τμήματα Κύκλων αεβ, γδδ
 „ἴσα ἀλλήλοις εἰσι.

Αἱ γὰρ ἴσαι Εὐθεῖαι ἐπιτεθεῖσαι ἀλλήλαις ἐφαρμόσονται, καὶ τεύθεν ἐ- α. 239.
 φαρμοσασῶν ἀλλήλαις καὶ τῶν Περιφερειῶν, ἴσα ἔσται πάντως τὰ ὅμοια Τμή-
 ματα. Εἰδὲ παραλλάξῃ καὶ μὴ ἐφαρμόσῃ ἡ γδδ Περιφέρεια, ἥτις τῷ αεβ
 Τμήματος ὑποτίθεται εἶναι, τῇ γδδ Περιφέρειᾳ, τεμεῖ ἄρα Κύκλος κατὰ πλείο-
 να ἢ δύο Σημεῖα Κύκλον ἕτερον, οἷον κατὰ τὰ γ, καὶ η, καὶ δ. Ὅπερ (3)
 ἀδύνατον.

Εἰ δὲ τέως ἐφαρμοσασῶν τῶν ἴσων Εὐθειῶν, ἡ ἑτέρα τῶν Περιφερειῶν α. 240.
 καὶ περιέχουσα, ἡ δὲ ἑτέρα περιεχομένη, διαχθείσης Εὐθείας τῆς αεζ, καὶ
 ἐπιζευχθείσων τῶν ζβ, εβ, ἔσται ἡ ὑπὸ αεβ ἴση τῇ ὑπὸ αεζ (4), καὶ διὰ
 καὶ ἄνιστοι (5). Ὅπερ ἀδύνατον.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Τὰς ἀμέσως προηγμένας δύο, ὡς ἐκ ἀναγκαίας ἥσας παρέδραμεν ὁ
 Τακτικὸς, καὶ ὡς περὶ ὁμῶν Τμημάτων διαλεγόμενας, ὧν ἄνευ τῆς τῶν Α'-
 ναλογιῶν θεωρίας, ἀκριβῆ (φησι) λαβεῖν μὴ ἐξεῖναι περίνοιαν, καί τοι ἔδὲ
 πάντῃ ταύτας ἐκείνος ὥφθη ἀποσυρίξας, ἐν γὰρ τοῖς Πορίσμασι τοῖς μετὰ
 τὴν ἐσχάτην τῷ ζ'. Βιβλίῳ, λόγον ἐκείνων ἐποίησεν. Αὐτοὶ δὲ καὶ ταῦτα τὰ

(1) Ὁρ. ΙΑ. τῷ γ'. (2) Ις. τῷ α'. (3) Ι. τῷ γ'. (4) Ὁρ. ΙΑ. τῷ γ'. (5) Ις. τῷ
 α'. καὶ Α. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ αὐτῷ.

Εὐκλείδῃ ἐξ αὐτῆ ἀνελλιπῶς λαβόντες ἐδείξαμεν, ὡς ἂν μήτι δόξω τοῖς ἐν-
 τυγχάνουσιν ὑπερτίθεσθαι, πάνυ πολλὰ τὰ λόγῳ δεόμενον.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΕ.

„Κύκλῳ Τμήματος δοθέντος (αβγ) προσαναγράψαι τὸν Κύκλον, οὗ πῆρ
 „ἔστι Τμήμα.

κ. 241.

Υποτεινέτωσαν ὡς ἔτυχε τὸ Τμήμα Εὐθείαι δύο αἱ αβ καὶ βγ, καὶ δι-
 χα τετμήσωσαν κατὰ τὰ Σημεῖα ι καὶ λ (1), ἀπὸ δὲ τῶν Σημεῖων ι καὶ λ πρὸς
 ὁρθὰς (2) ἀγέσωσαν ἑκατέρᾳ τῶν Εὐθειῶν αἱ ιο, λο, τέμνεσθαι ἀλλήλας κα-
 τὰ τὸ ο· φημὶ δὴ τῆτο εἶναι τὸ τῷ Κύκλῳ Κέντρον, ὃ Τμήμα ἐτέθη τὸ αβγ.

Ἐπειδὴ γὰρ τὸ Κέντρον ἐφ' ἑκατέρας (3) εἶναι δεῖ, καὶ ἐπὶ τῆς ιχ δηλο-
 νότι καὶ ἐπὶ τῆς λψ, ἔσαι ἄρα ἐπὶ τῷ κοινῷ ταύταις ὄντος Σημεῖον τῷ ο.

Ἀλλως παρ' Εὐκλείδῃ.

κ. 242.

Τῆς αγ Υποτεινέσθης δίχα (4) τμηθείσης κατὰ τὸ δ, ἐὰν ἀπὸ τῆ δ πρὸς
 ὁρθὰς ἀχθῇ (5) ἡ δβ, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ αβ, ἡ ὑπὸ αβδ ἥτοι μείζων ἔσαι τῆς
 ὑπὸ βαδ, ἡ ἴση, ἡ ἐλάσσων· καὶ εἰ μὲν μείζων συνεσάδω πρὸς τῷ α ἡ ὑπὸ
 βαε (6) ἴση τῇ ὑπὸ αβδ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ ε ἡ δβ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εγ, καὶ
 ἔσαι ἡ αε (7) ἴση τῇ βε. Ἐπειδὴ δὲ καὶ αδ ἴση (8) τῇ δγ, ἥτε δε κοινὴ, καὶ
 ὑπὸ αδε ἴση τῇ ὑπὸ εδγ, Ὅρθαι γὰρ ἄμφω, ἔσαι καὶ ἡ αε (9) ἴση τῇ εγ·
 ὥστε ἴσαι ἀλλήλαις αἱ τρεῖς αε, βε, γε. Τὸ ἄρα Σημεῖον ε (10) Κέντρον ἔ-
 σαι τῷ Κύκλῳ, ὃν ἄντις διὰ τῶν α, β καὶ γ Σημεῖων ἀγόμενον προσαναγρά-
 ψεισθαι.

κ. 243.

Ἐὰν δὲ ἡ ὑπὸ αβδ ἴση ἢ τῇ ὑπὸ βαδ, ἴσαι (11) ἔσονται καὶ αἱ αδ, δβ
 ἀλλήλαις, καὶ δὴ καὶ ἡ δγ, ἥτις (12) ἴση ἐλήφθη τῇ αδ. Ὡς τε τῶν τριῶν ἴσων
 ἡσῶν (13), Κέντρῳ τῷ δ, καὶ Διασήμετι τῷ ἐκαίνων ὁ Κύκλος προσαναγρα-
 φήσεται.

κ. 244.

Ἐὰν δὲ ὑπὸ αβδ ἐλάσσων ἢ τῆς ὑπὸ βαδ, συνεσάδω ἡ ὑπὸ βαε (14)
 ἴση τῇ ὑπὸ αβδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εγ, ἥτις ἴση ὁμοίως (15) δειχθήσεται
 τῇ αε καὶ ἐπομένως τῇ εβ. Ὡς τε τὸ ε Κέντρον εἶναι (16), ὃ ἂν προσαναγρα-
 φεῖν ὁ Κύκλος.

(1) I. τῷ α. (2) IΔ. τῷ α. (3) Πόρ τῆς Δ. τῷ γ. (4) I. τῷ α. (5) IΔ. τῷ α.
 (6) ΚΓ. τῷ α. (7) Γ. τῷ α. (8) Εκ κατ. (9) Δ. τῷ α. (10) Θ. τῷ γ. (11) Γ.
 τῷ α. (12) Εκ κατ. (13) Διὰ τὴν Θ. τῷ γ. (14) ΚΓ. τῷ α. (15) Δ. τῷ α. (16) Θ. τῷ γ.

Π ρ ᾱ ξ ι ς.

Κέντρον ληφθέντι ἐπὶ τῷ δοθέντος Τόξου τῷ τυχόντι β, καὶ Διασήμε-
τι ὡσαύτως τῷ τυχόντι βκ, Κύκλος γεγράφθω ὁ ακγλ, τέμνων τὸ δοθὲν Τό-
ξον κατὰ τὰ Σημεῖα α καὶ γ. Εἴτα Κέντροις ληφθεῖσιν ἐκατέρωθεν ἐπὶ τῷ Τό-
ξῳ, ἐν Διασήμετι ἴσῳ τῷ πρότερον Κύκλοι γεγράφθωσαν τέμνοντες τὸν
γραφέντα πρὶν ἄμφω κατὰ δύο Σημεῖα. Οὕτω γὰρ αἱ τὰς τομὰς ἐπιζευγνύ-
σαι Εὐθεῖαι, τέμνεσθαι ἀλλήλας κατὰ τὸ Σημεῖον κ, δώσουσι τὸ Κέντρον. Ὅρα κ. 245.
τὴν Πρᾶξιν τῆς Γ'. τῷ Α'. καὶ τὸ Πόρ. τῆς Α'. τῷ Γ'.

Π ρ ό τ α σ ι ς Κς.

„Εν τοῖς ἴσοις Κύκλοις (ἢ πάντως καὶ ἐν ἐνὶ καὶ τῷ αὐτῷ Κύκλῳ), αἱ ἴσαι
„Γωνίαι ἐπὶ ἴσων Περιφερειῶν βεβήκασιν, εἴαντε πρὸς τοῖς Κέντροις, εἴαν
„τε πρὸς ταῖς Περιφερείαις ὥσι βεβηκείαι.

Εἴπερ γεγράφθωσαν γὰρ αἱ βγ, εζ, καὶ αἱ μὲν ηβ, ηγ ἴσαι ταῖς δε, κ. 246.
εζ (1), ἡ δὲ ὑπὸ βηγ ἴση (2) τῇ ὑπὸ εδζ, ἄρα (3) καὶ Βάσις βγ ἴση τῇ Βά-
σει εζ. Εἴπερ δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ α Γωνία ἴση τῇ πρὸς τῷ δ (4), τὸ ἄρα βαγ
Τμήμα (5) ὁμοιον τῷ εδζ· ἔστι δὲ ἐπὶ ἴσων Εὐθειῶν τῶν βγ, εζ, ἄρα (6) καὶ
ἴσα ἀλλήλοισ. Ὡς εἰ εἴαν ἀπὸ τῶν ἴσων (7) Κύκλων ἀφαιρεθῶσιν, ἔσται τὰ λοιπὰ
(8) ἴσα, καὶ προσεδέντα ἄρα ἐφαρμόσει (9), ἥτε βηγ Περιφέρεια ἴση τῇ ελζ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΖ.

„Εν τοῖς ἴσοις Κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων Περιφερειῶν βεβηκείαι Γωνίαι, ἴσαι
„ἀλλήλαις εἰσίν, εἴαντε πρὸς τοῖς Κέντροις, εἴαντε πρὸς ταῖς Περιφερείαις ὥσι
„βεβηκείαι.

Ἀλλὰ μὴ ἔσωσαν ἴσαι, μείζων δὲ ἡ ὑπὸ βηγ τῆς ὑπὸ εδζ, καὶ συνε- κ. 247.
σάδω πρὸς τῷ η ἡ ὑπὸ βηγ ἴση τῇ ὑπὸ (10) εδζ. Οὐκὲν (11) ἡ βη Περι-
φέρεια ἴση τῇ εζ, ταύτη δὲ καὶ ἡ βγ (12) ἴση, ἄρα ἡ βκ ἴση τῇ βγ, τὸ
μέρος τῷ ὅλῳ.

Ὡς ἂν οὖν οὕτως ἴσαι ἀποδειχθῶσιν αἱ πρὸς τοῖς Κέντροις, ἴσαι ἔσου-
ται (13) καὶ αἱ πρὸς ταῖς Περιφερείαις.

(1) Αἲ. ιι. (2) Εἲ ὑποδ. (3) Δ. τῷ α. (4) Κ. τῷ γ. καὶ Αἲ. ε. (5) ΙΑ. Ὅρ.
τῷ γ. (6) ΚΔ. τῷ γ. (7) Εἲ. ὑποδ. (8) Αἲ. γ. (9) Αἲ. η. (10) ΚΓ. τῷ α.
(11) Διὰ τὴν αὐτ. (12) Εἲ ὑποδ. (13) Κ. τῷ γ.

Π ό ρ ι σ μ α .

248. Εὐθεΐα ἡ εζ, ἡ κατὰ τὸ μεσαίτατον α Περιφερείας τινὸς οἶον τῆς βγ, ἀπτομένη τῷ Κύκλῳ, Παράλληλός ἐστι τῇ βγ Εὐθεΐα τῇ ὑποτείνουσῃ τὴν αὐτὴν Περιφέρειαν. Ἐπιζευχθεΐσης γὰρ τῆς δα, ἐπιζευχθεΐσων δὲ εἰς τῶν δβ, δγ, εἰς ἴσων οὐσῶν (1) ἐπὶ τῶν Τριγώνων, τῆς δὲ δι κοινῆς, ἐπεὶ ἡ Περιφέρεια βα ἴση (2) τῇ Περιφερείᾳ αγ, εἰς ὑπὸ βδῆ ἴση (3) ἐστὶ τῇ κδγ, ἄρα (4) εἰς ὑπὸ βηδ ἴση τῇ ὑπὸ γηδ, εἰς (5) ἄμφω Ὁρθαί. Ἀλλὰ εἰ αὐτὸς ὑπὸ εαδ εἰς βαδ Ὁρθαί (6), ἄρα (7) βγ Παράλληλός ἐστι τῇ εζ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΗ.

249. „Ἐν τοῖς ἴσοις Κύκλοις (καὶ ἐν τῷ αὐτῷ-δὲ πάντως), αἱ ἴσαι Εὐθεΐαι (βγ, εζ) ἴσας Περιφερείας ἀφαιρῶσι, τὴν μὲν μείζονα (βαγ) τῇ μείζονι (εδζ), τὴν δὲ ἐλάττωνα (βηγ) τῇ ἐλάττωι (εδδ).
Τῶν γὰρ Κέντρων κ εἰς λ (8) ληφθέντων, εἰς τῶν Εὐθειῶν κβ, κγ, λε, εἰς λζ ἐπιζευχθεΐσων, εἰς ἴσων ἀλλήλαις (9) ὡσῶν, ἐπεὶ εἰς ἡ βγ (10) ἴση τῇ εζ, ἔσαι εἰς ἡ ὑπὸ βκγ ἴση (11) τῇ ὑπὸ ελζ. Ἀλλὰ μὲν αἱ ἴσαι Γωνίαι ἐπὶ ἴσων Περιφερειῶν βεβήκατι (12), ἄρα ἡ βηγ ἴση τῇ εδζ, ἄρα εἰς αἱ λοιπαὶ (13) ἡ βαγ ἴση τῇ εδδ.

Π ό ρ ι σ μ α .

Ἐν τοῖς ἴσοις ἄρα Κύκλοις, ἡ ἐν τῷ αὐτῷ, αἱ μὴ ἴσαι Εὐθεΐαι, ἐχθὶ ἴσαι Περιφερείας ἀφαιρῶσιν, ἀλλ' ἡ μὲν μείζων μείζονα, ἡ δὲ ἐλάττω ἐλάττωνα.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΘ.

250. „Ἐν τοῖς ἴσοις Κύκλοις, ὑπὸ τὰς ἴσας Περιφερείας ἴσαι Εὐθεΐαι ὑποτείνουσι.
Ἐπιζευχθεΐσων γὰρ ὁμοίως τῶν Εὐθειῶν ὡς ἀνωτέρω, ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ Περιφερεΐαι (14) βηγ, εδζ, ἴσαι εἰς αἱ ὑπὸ βηγ εἰς ελζ Γωνίαι εἰσὶ (15). Ἀλλὰ εἰς αἱ κβ, κγ ἴσαι εἰσὶ (16) ταῖς λε, εζ, ἄρα (17) καὶ βγ ἴση τῇ εζ.

(1) Α. ρ. ιη'. (2) Εξ ὑποδ. (3) Διὰ τὴν Πρότ. (4) Δ. τῷ α'. (5) Ο. ρ. ΙΔ. τῷ α'. (6) ΙΗ. τῷ γ'. (7) ΚΗ. τῷ α'. (8) Α. τῷ γ'. (9) Α. ξ. ιθ'. (10) Εξ ὑποδ. (11) Κ. τῷ α'. (12) Κ. τῷ γ'. (13) Α. ξ. γ'. (14) Εξ ὑποδ. (15) ΚΖ. τῷ γ'. (16) Α. ξ. ιθ'. (17) Δ. τῷ α'.

Π ό ρ ι σ μ α .

Υ'πὸ ἄρα τὰς ἀνίσους Περιφερείας, Εὐθεΐαι ἄνισοι ὑποτείνουσι, μείζων μὲν ὑπὸ τὴν μείζονα, ἐλάσσων δὲ ὑπὲρ τὴν ἐλάσσονα.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Τῶν ἀμέσως προηγησαμένων Δ'. Προτάσεων, ὁ Τακτικὸς τὴν τάξιν ἀντέστρεψε, προτάξας μὲν εἰς Κς'. ἢ ΚΖ'. τὴν ΚΗ'. ἢ ΚΘ'. ὑποσυνάψας δὲ μετὰ ταύτας ἐκείνας, ὡς ἂν προχειροτέρας ἔχουν λαβεῖν τὰς δεξιὰς ἡγόμενος. Α'λλ' αὐτοὶ κεντέρους τῷ Στοιχειωτῇ κατ' ἰχνοῦ ἀκολουθεῖν ἐγνώμεν, τῆς ἐκ τῶν τοιῶνδε μεταθέσεων ἐπιγινόμενης συγχύσεως τὰς νέας ἀπαλλάττοντες.

Π ρ ό τ α σ ι ς Α.

„Τὴν δοθεῖσαν Περιφέρειαν (αβγ) δίχα τεμεῖν.

Ἐπεζεύχθω μὲν ἡ αγ, ἀπὸ δὲ τῆ σ Σημεῖν (καθ' ὃ ἂν δίχα (1) τμηθεῖν) πρὸς ὀρθὰς (2) ἤχθω ἡ οβ. Φημὶ δὴ, ὡς αὕτη τὴν Περιφέρειαν προσ- κ. 251.
πεσῆσα κατὰ τὸ β δίχα τέμνει.

Ἐπιζευχθεῖσων γὰρ τῶν αβ, γβ, αἱ αο ἢ οβ ἴσαι ταῖς γο ἢ οβ, ἡ δὲ ὑπὸ αοβ ἴση (3) τῇ ὑπὸ γοβ, ἄρα (4) ἡ αβ ἴση τῇ γβ, ἄρα ἡ Περιφέρεια αβ ἴση (5) τῇ Περιφέρειᾳ γβ.

Π ρ ᾱ ξ ι ς .

Κέντροις μὲν α ἢ β, Διαστήμασι δὲ ἰσοῖς, κύκλοι γεγραφθῶσαν τεμνόμενοι, ἡ δὲ ἐπιζευγνύουσα τὰς κατατομὰς δίχα τὸ τόξον τεμεῖ (6). κ. 252.

Π ό ρ ι σ μ α .

Ἐκ δὴ τέτη φανερὸν, ὡς ἡ ἡμίσεια τῆς Ὑποτείνουσας τὴν Περιφέρειαν, ἐστὶ τῆ ἡμίσεος τῆς Περιφερείας Ἡμίτονον ὀρθόν, κατ' ἀνάπαλιν, τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον διπλασιαζόμενον, ὑποτείνει τὴν διπλασίονα Περιφέρειαν. Ἐστὶ δὲ πάντως τῷ παρόντι παραπλήσιον τὸ πρῶτον Πόρισμα τῆς τρίτης Προτάσεως τῷ Ρ'. τὸ περὶ τῆς Ὑποτείνουσας τὴν πρὸς τῷ Κέντρῳ Γωνίαν ἀποφαινόμενον.

(1) I. τῆ α'. (2) IΔ. τῆ α'. (3) Ἐκ κατ. (4) Δ. τῆ α'. (5) ΚΗ. τῆ γ'. (6) Διὰ ταύτην ἢ τὴν Πρᾶξ. τῆς I. τῆ α'.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΑ.

„Εν Κύκλῳ ἡ μὲν ἐν τῷ Ἡμικυκλίῳ Γωνία (βγζ) Ὀρθή ἐστίν, ἡ δὲ
 „ἐν τῷ μείζονι Τμήματι ἐλάττων Ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι μείζων Ὀρ-
 „θῆς, καὶ ἔτι ἡ μὲν τῇ μείζονος Τμήματος Γωνία μείζων ἐστίν Ὀρθῆς, ἡ δὲ
 „τῇ ἐλάττονος τμήματος Γωνία ἐλάττων ἐστίν Ὀρθῆς.

α. 253.

Α'. Επεξεύχθω ἡ αγ, ἐπεὶ ὅν ἴσαι αἱ αβ, αγ (1), καὶ αἱ ὑπὸ αβγ, αγκβ (2) ἴσαι εἰσὶ. Δι' αὐτὸ δὲ ταῦτο καὶ αἱ ὑπὸ αγκζ καὶ αγκγ ἴσαι εἰσὶν, ἡ ἄρα ὅλη ὑπὸ βγκ, δυσὶ ταῖς κατὰ τὸ β καὶ ζ ἴση ἐστίν. Α'λλ' αἱ τρεῖς (3) δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ἡ ἄρα ὑπὸ βγκ Ὀρθή.

Β'. Προαχθείσης τῆς ζγ κατὰ τὸ δ, αἱ ὑπὸ δγκ καὶ βγκ (4) δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· ἡ δὲ ὑπὸ βγκ Ὀρθὴ οὕσα (5) δέδεικται, ἄρα ἡ ὑπὸ δγκ Ὀρθή. Α'λλ' ἡ ὑπὸ δγκ ἐκτὸς τῆς κατὰ ζ (6) μείζων ἐστίν, ἡ ἄρα κατὰ τὸ ζ, ἣτις ἐστίν ἐν τῷ γζηβ Τμήματι, ὃ μείζων ἐστίν Ἡμικυκλίῳ, Ὀρθῆς ἐλάττων ἐστὶ.

Γ'. Ἐπειδὴ τὸ βγκ ἐν τῷ Κύκλῳ Τετράπλευρόν ἐστιν, αἱ ἀπεναντίον τέτε Γωνίαι δ καὶ ζ δυσὶν Ὀρθαῖς (7) εἰσὶ. Ἐστὶ δὲ ἡ κατὰ τὸ ζ (8) ἐλάττων Ὀρθῆς, ἡ ἄρα κατὰ τὸ δ ἐν τῷ ἐλάσσονι τῷ Ἡμικυκλίῳ Τμήματι ὅσα, μείζων ἐστίν Ὀρθῆς.

Δ'. Αὐτόθεν (ὡς Εὐκλείδης φησὶν) ἐστὶ φανερόν, ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ βγκ (9) Ὀρθή, ἡ ἄρα περιεχομένη ὑπὸ τῆς βγ Εὐθείας, καὶ τῆς γζ Περιφερείας (ἣτις ἐστίν ἡ Γωνία τῇ μείζονος Τμήματος), μείζων Ὀρθῆς ἐστὶ· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ δγκ (10) Ὀρθή, ἄρα ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε τῆς βγ Εὐθείας, καὶ τῆς γδβ Περιφερείας (ταυτὸν εἰπεῖν ἡ Γωνία τῇ ἐλάσσονος Τμήματος) ἐλάττων Ὀρθῆς ἐστὶ.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Τὸ δὲ Δ'. τῆς προτεθείσης Πρωτ. μέρος, ὃ μὲν Τακῆτιος παρέδραμεν, αὐτοὶ δὲ σὺν Οὐίτσωι, ἐξ αὐτῇ τῇ Εὐκλείδου ἀποκαταστήσαι δεῖν ἔγνωμεν.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

α. 254. Α'. Ἐντεῦθεν οὖν καὶ τῇ γνώμονος βάσανον ἐνὶ λαβεῖν, εἰ ἐπ' ἀκριβές ἐστιν

(1) Ορ. ΙΗ. τῷ α'. (2) Ε. τῷ α'. (3) ΑΒ. τῷ α'. (4) ΙΓ. τῷ α'. (5) Διὰ τὸ Α'. (6) Πόρ. α'. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (7) ΚΒ. τῷ γ'. (8) Διὰ τὸ Β'. (9) Διὰ τὸ Α'. (10) Διὰ τὸ Α'. καὶ τὴν ΙΓ. τῷ α'.

Ορθογώνιος. Εἰν γὰρ τῷ τυχόντος Σημεῖοι α ἐπὶ Κύκλου Περιφερείας, ἢ τῷ γινώμενος κορυφὴ ἀπτομένη, αἱ Πλευραὶ διὰ τῶν περάτων τῆς τῷ Κύκλου διήκωσι Διαμέτρου, Ὁρθὴ μὲν ἔσαι ἢ Γωνία, ἀκριβὲς δὲ ὁ γινώμων. Ἀλλως δ' ἡδαμῶς.

Καὶ εἰν τῶν τῷ γινώμενος Πλευρῶν πρὸς τοῖς Σημείοις β ἢ γ ἀκινήτων. β'.
των, ἢ κορυφὴ α ἀπὸ τῷ αὐτῷ ἐπὶ τὸ αὐτὸ περιάγοιτο, Κύκλον ἀναγράφει,
ἢ Διάμετρος ἢ βγ.

Εὐτεῦθεν δὲ ἢ ἀπ' ἄκρας γ τῆς δοθείσης Εὐθείας βγ, Εὐθεῖαν πρὸς Γ'. α. 255.
Κάθετον τῇ δοθείσῃ ῥαδίως ἄγειν παιδεύμεθα, κύκλον μὲν γράφοντες διὰ τῷ
πέρατος τῆς Εὐθείας γ ἡγόμενον, ἢ τὴν βδ ἐπιζευγνύντες Διάμετρον, καὶ
τὴν γδ, ἣτις ἔσαι ἢ ζητούμενη.

Εἰπὶ τῷ Ορθογώνι Τριγώνῳ βγδ, τῆς ὑποτείνουσας τὴν ὑπὸ βγδ ὀρθὴν Δ'.
Γωνίαν βδ δίχα τμηθείσης (1), ἢ τῆς γα ἐπιζευχθείσης, εἰς Τρίγωνα δύο
ἰσοσκελῆ τὰ βαγ, γαδ τὸ Τρίγωνον γβδ τμηθήσεται. Ὁ δὲ Κύκλος, ὅς ἐστιν
Κέντρῳ μὲν τῷ α, Διαστήματι δὲ τῷ αβ ἀναγραφείη, ἢ διὰ τῆς κορυφῆς γ τῆς
ὀρθῆς Γωνίας διελεύσεται. Ἐστὶ δὲ παραληπτέον εἰς δεῖξιν Α'. τὸ Β'.

Επεὶ δὲ ἢ μικτόγραμμος Γωνία τῷ μείζονος Τμήματος Ὁρθῆς-μείζων Ε'.
ἔστιν, ἢ τε τῷ ἐλάττωτος Ὁρθῆς ἐλάσσων (2), ἢ ἄρα τῷ Ἡμικυκλίῳ Γωνία
τῇ εὐθυγράμμῳ Ὁρθῇ ἴση ἔσαι· τῷ δ' ὅπερ ἀνωτέρω ἐξ ἄλλης ἀρχῆς ἐδείκ-
νυμεν (3).

Π ρ ό σ α σ ι ς ΔΒ.

„Εἰν Κύκλου ἐφάπτηταί τις Εὐθεῖα (γζ), ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς ἐπὶ τὸν
„Κύκλον, διαχθῆτις Εὐθεῖα (αβ) τέμνησα τὸν Κύκλον, αἱ ποιεῖ Γωνίας
„πρὸς τῇ Ἐφαπτομένῃ ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλάξ τῷ Κύκλου Τμή-
„μασι Γωνίαις.

Διήχθω δὴ Α'. ἢ τέμνησα αβ διὰ τῷ Κέντρῳ, καὶ ἔσαι ἢ ὑπὸ γαβ (4) α. 256.
Ὁρθή. Ἀλλὰ ἢ κατὰ τὸ λ Ὁρθή (5) ἔστιν, ἢ ἄρα ὑπὸ τῆς Ἐφαπτομένης
ἢ τῆς Τεμνύουσας, ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ Τμήματι.

Διήχθω δὴ Β'. ἢ τέμνησα αβ μὴ διὰ τῷ Κέντρῳ, διήχθω δὲ καὶ διὰ τῷ α. 257.
Κέντρῳ ἢ απ, ἢ ἐπεζεύχθω ἢ βπ· καὶ ἐπεὶ ἢ ἐν τῷ Ἡμικυκλίῳ ὑπὸ αβπ
Ὁρθή ἐστι (6), δύο ἄρα αἱ ὑπὸ βπα καὶ παβ ἴσαι ἔσονται (7) μὲν Ὁρθῇ.

(1) I. τῷ α. (2) Μίρ. Δ. τῆς Πρωτ. (3) Πόρ. Ζ. τῆς Ις. τῷ γ. (4) ΙΗ. τῷ γ.
(5) ΑΔ. τῷ γ. (6) ΑΔ. τῷ γ. (7) Πόρ. ζ. τῆς ΔΒ. τῷ α.

Α'λλὰ ἐ ἡ ὑπὸ γὰρ Ο'ρθή (1) ἐσιν, ἀφαιρεθείσης ἄρα τῆς κοινῆς ὑπὸ βκπ, ἡ κατὰ τὸ π (ἦτοι ἡ κατὰ τὸ λ (2)) ἴση τῇ ὑπὸ γαβ.

Πάλιν αἱ ὑπὸ ζαβ καὶ γαβ ἴσαι (3) εἰσὶ δυσὶν Ο'ρθαῖς, καὶ ἐν τῷ Τετραπλεύρῳ βοαλ, αἱ ἀπεναντίον (4) ο ἐ λ ἴσαι εἰσὶ δυσὶν Ο'ρθαῖς. Αἱ δύο ἄρα ὑπὸ ζαβ ἐ γαβ, ἴσαι δυσὶ ταῖς κατὰ τὸ ο ἐ λ. Α'λλ' ἡ κατὰ τὸ λ ἴση ἐδείχθη ἀνωτέρω τῇ ὑπὸ γαβ, εἰάν ἄρα τὰ ἴσα ἀπὸ τῶν ἴσων ἀφαιρεθῇ, ἔσται ἡ ὑπὸ ζαβ ἡ ὑπὸ τῆς Ε'φαπτομένης ἐ τῆς Τεμνέσσης, ἴση τῇ κατὰ τὸ ο τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ Τμήματι.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΓ.

„Επὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας (βγ) γράψαι Τμήμα Κύκλου, δεχόμενον „Γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ Γωνίᾳ εὐθυγράμμω.

κ. 258.

Εἴαν ἡ δοθεῖσα Γωνία ὀξεῖα ᾗ, οἷα ἡ ὑπὸ αβζ, ἀπὸ τῆ β ἤχθω τῇ αβ (5) πρὸς ὀρθὰς ἡ βλ, πρὸς δὲ τῷ πέρατι γ τῆς δοθείσης Εὐθείας βγ, συνεχάσθω Γωνία (6) ἡ ὑπὸ βγι ἴση τῇ ὑπὸ γβλ, ἥς δὲ συζάσης τεμεῖ ἡ Πλευρὰ γι τὴν βλ κατὰ τὸ ι. Εἴτα Κέντρῳ μὲν τῷ ι, Διαστήματι δὲ τῷ ιβ Κύκλος γεγράφθω διερχόμενος (ἐπεὶ ἴσαι μὲν αἱ πρὸς τῇ Βάσει (7) Γωνίαι, ἴσαι δὲ αἱ τὰς Γωνίας ὑποτείνονται (8) ιβ, ιγ Πλευραὶ) διὰ τῆ γ, καὶ Τμήμα ἔχων τὸ βπγ, δεχόμενον Γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ ὑπὸ αβζ.

Επειδὴ γὰρ ἡ αβ τῇ Διαμέτρῳ βλ πρὸς ὀρθὰς (9) ἐσιν, ἡ αβ ἐφάπτεται τῷ Κύκλῳ (10), τὸν δὲ τέμνει ἡ βγ. Ἀρα ἡ ἐν τῷ ἐναλλάξ Τμήματι βπγ Γωνία (11) ἴση τῇ δοθείσῃ ὑπὸ αβζ.

Εἴαν δὲ ἡ δοθεῖσα ὑπὸ ρβγ Ἀμβλεία ᾗ, διὰ παραπλησίαις τῆς κατασκευῆς, ἔσται τὸ γοβ τὸ ζητούμενον Τμήμα.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Διὰ δὲ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ἐ Κύκλου Περιφέρειαν ἀγχιγεῖν ἐξέσαι, ἥτις τῆς δοθείσης Εὐθείας αρ κατὰ τὸ δοθὲν Σημεῖον ἀπτοίτο, καὶ δι' αὐτοῦ Σημεῖοι τῆ γ, ὃ ἐκτός εἰν τῆς δοθείσης αρ διήκοι. Αἰμείλειτοι τῆς βγ ἐπιζευχθείσης, ἐ τῇ δοθείσῃ αρ πρὸς ὀρθὰς ἀχθείσης τῆς βλ, εἴαν γένη-

(1) ΙΗ. τῷ γ. (2) ΚΑ. τῷ γ. (3) ΙΓ. τῷ α. (4) ΚΒ. τῷ γ. (5) ΙΑ. τῷ α. (6) ΕΓ. τῷ α. (7) Εκ κατ. (8) ζ. τῷ α. (9) Εκ κατ. (10) Ις. τῷ γ. (11) ΔΒ. τῷ α.

ται ἡ ὑπὸ βγι ἴση τῇ ὑπὸ βγ, ἡ τῶν Εὐθεϊῶν βλ εἰς γι τομὴ τὸ Κέντρον παρέξει, ἡ δὲ ιβ ἢ ιγ τὴν Διάμετρον, οἷς ὁ Κύκλος γεγραφέται.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΔ.

„Α'πὸ τοῦ δοθέντος Κύκλου Τμήμα ἀφελεῖν, δεχόμενον Γωνίαν ἴσην τῇ
 „δοθείσῃ Γωνίᾳ εὐθυγράμμω.

Α'χθεΐσθαι τῆς Ε'φαπτομένης τοῦ Κύκλου αβ (1), πρὸς τῷ β Σημεῖω τῆς
 ἐπαφῆς συνεχᾶσθαι (2) Γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, ἴση τῇ δοθείσῃ· οὕτω γὰρ ἡ βγ,
 ἀφελεί Τμήμα τὸ βγδ, δεχόμενον Γωνίαν (3) ἴσην τῇ δοθείσῃ Γωνίᾳ εὐ-
 θυγράμμω. κ. 259.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΕ.

„Ε'άν ἐν Κύκλῳ δύο Εὐθεΐαι (γλ, βζ) τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν
 „τῆς μιᾶς Τμημάτων περιεχόμενον Ὀρθογώνιον (γολ), ἴσον εἶσι τῷ ὑπὸ τῶν
 „τῆς ἐτέρας Τμημάτων περιεχομένῳ Ὀρθογωνίῳ (βοζ).

Ε'άν οὖν ἀλλήλας τέμνωσι κατὰ τὸ Κέντρον α, αὐτόθεν εὐδὴλον τὸ
 λεγόμενον, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ἡμιδιαμέτρων Τετράγωνα τοῦ αὐτοῦ Κύκλου ἴσα εἶσι.

Ε'άν δὲ ἡ ἐτέρα γλ διαγομένη διὰ τοῦ Κέντρου α, τὴν ἄλλην βζ δίχα
 τέμνη, ἐπεὶ καὶ πρὸς ὁρθὰς (4) τέμνει, τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ ζο, Ὀρθο-
 γώνιον εἶσι τὸ ὑπὸ βοζ. Ἐπεξεύχθω δὴ ἡ αζ, καὶ ἔσαι Ὀρθογ. γολ + αο^τ
 (5) = αλ^τ = αζ^τ = αο^τ + οζ^τ (6). Ε'άν ἔν ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν αο^τ, ἔσαι
 Ὀρθογ. αολ = οζ^τ = βοζ. Ο. Ε. Δ. κ. 260.

Ε'άν δὲ ἡ ἐτέρα γλ διὰ τοῦ Κέντρου ἀγομένη, τέμνη τὴν ἐτέραν βζ εἰς ἄ-
 νισα κατὰ τὸ ο, ἀπὸ τοῦ Κέντρου α ἀχθεΐσθαι τις Εὐθεΐα ἡ αι, τεμνέτω δίχα
 (7) τὴν βζ κατὰ τὸ ι, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ αβ. Ἐπεὶ ἔν ἡ ὑπὸ αιβ (8) Ὀρθή
 εἶσιν, ἡ δὲ γλ εἰς ἴσα τέμνεται κατὰ τὸ α, καὶ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ ο, ἔσαι
 Ὀρθογ. γολ + αο^τ = (9) αλ^τ = αβ^τ = (10) αι^τ + βι^τ. Ἀλλ' αο^τ (11)
 = αι^τ + ιο^τ, ἄρα Ὀρθογ. γολ + αι^τ + ιο^τ = αι^τ + βι^τ. Κοιῇ οὖν
 ἀφηρεῖται αι^τ, εἰς αὐτὴν Ὀρθογ. γολ + ιο^τ = βι^τ, τὸ δὲ βι^τ = (12) βοζ
 + ιο^τ. Ε'άν ἄρα κἀντεῦθεν τὸ κοινὸν ιο^τ ἀφαιρεθῇ, ἔσαι Ὀρθογ. γολ =
 Ὀρθογ. βοζ. κ. 261.

(1) ΙΖ. τῷ γ'. (2) ΚΓ. τῷ α'. (3) ΑΒ. τῷ γ'. (4) Γ. τῷ γ'. (5) Ε' τῷ β'.
 (6) ΜΖ. τῷ α'. (7) Ι. τῷ α'. (8) Γ. τῷ γ'. (9) Ε. τῷ β'. (10) ΜΖ. τῷ α'. (11)
 διὰ τὴν αὐτ. (12) Ε. τῷ β'.

- κ. 262. Ἐάν δὲ οὐδετέρα τῶν Εὐθειῶν γλ, ζβ διὰ τῷ Κέντρῳ διέγῃται, ἐπε-
 ζεύχθω ἡ αο, ἡ δὲ διήχθω ἐκατέρωθεν πρὸς τὴν Περιφέρειαν ψχ, καὶ κατὰ
 τὸ δειχθὲν ἀνωτέρω, τῶν Ὀρθογωνίων ζοβ καὶ γολ ἐκάτερον ἴσον ἐστὶ τῷ
 ψοχ, ὥστε ἡ ἀλλήλοισι αὐτὰ ἴσα ἔσται.

Α' λ λ ω ς.

- κ. 263. Ἐν γένει δ' ἂν ἔτῳς ἡ ἀπόδειξις βραδίως ἀποδοθῇ, ἐπιζευχθεῖσιν τῶν
 γζ, λβ. Ἐπὶ τῶν Τριγώνων ἡ μὲν ὑπὸ ζγλ ἴση τῇ ὑπὸ ζβλ (1), ἡ δὲ ὑπὸ
 γοζ ἴση τῇ ὑπὸ βολ (2). Ἄρα (3) Ἰσογώνια ἐστὶ τὰ Τρίγωνα. Ὡς τε κατὰ
 τὴν Δ' τῷ ζ'. Βιβλίῳ τὴν ἐκ τῆς ἀνὰ χεῖρας μηδαμῶς ἠρητιμένην, γο : οζ ::
 βο : ολ. Καὶ ἐπομένως κατὰ τὴν Ιζ'. τῷ αὐτῷ ζ'. γο × ολ = οζ × βο. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Δς.

- κ. 264. „Ἐάν Κύκλῳ ληφθῇτι Σημεῖον ἐκτός (β), ἡ ἀπ' αὐτῷ πρὸς τὸν Κύκ-
 „λον προσπίπτωσι δύο Εὐθεῖαι, ἡ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν Κύκλον (βγ),
 „ἡ δὲ ἐφάπτεται (βζ), ἔσται τὸ ὑπὸ ἐλῆς τῆς Τεμνέσης (γβ), ἡ τῆς ἐκτός
 „ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τῶν τε Σημεῖα ἡ τῆς κυρτῆς Περιφερείας (βο) πο-
 „ρισχόμενον Ὀρθογωνίον (γβο), ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς Ἐφαπτομένης (βζ) Τε-
 „τραγώνῳ.

Ἐάν ἔν ἡ Τέμνασθαι βγ διὰ τῷ Κέντρῳ α διὰγοίτο, ἐπεζεύχθω ἡ αζ, ἡ
 ἔσται ἡ ὑπὸ αζβ (4) Ὀρθή. Ἐπεὶ δὲ ἡ γο εἰς ἴσα τέτμηται κατὰ τὸ α, ἡ
 προστετέθη αὐτῇ Εὐθείᾳ τις ἐπ' εὐθείας ἡ οβ, ἔσται Ὀρθογ. (5) γβο } = αβτ.
 Τετραγ. αο }

Ἦ' τοι Ὀρθογ. γβο + αζτ (6) = βζτ + αζτ. Καὶ ἀφαιρεθέντος ἄρα
 τῷ κοινῷ αζτ, ἔσται γβο = βζτ.

- κ. 265. Ἐάν δὲ μὴ ἡ γβ διὰ τῷ Κέντρῳ α διέγῃται, ἐπεζεύχθωσαν Εὐθεῖαι αἱ
 αβ, αζ, αο ἡ αλ. Καὶ ἡ ἀπὸ τῷ Κέντρῳ α, εἰ δίχα τέμνει τὴν ογ κατὰ τὸ
 λ, ἡ ὑπὸ (7) αλο Ὀρθή ἔσται. Ὡσαύτως δὲ ἡ ὑπὸ αζβ (8) Ὀρθή
 ἔσται. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γο εἰς ἴσα τέτμηται κατὰ τὸ λ, ἡ προστετέθη αὐτῇ Εὐ-
 θεῖα τις ἐπ' εὐθείας ἡ οβ,

Ἐσται Ὀρθογ. γβο } (9) = λβτ. Κοινῇ προσειλήφθω τὸ αλτ.
 Τετραγ. λο }

(1) ΚΑ. τῷ γ'. (2) ΙΒ. τῷ α'. (3) Θ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (4) ΙΗ. τῷ γ'. (5) Ζ. τῷ β'. (6) ΜΖ. τῷ α'. (7) Γ. τῷ γ'. (8) ΙΗ. τῷ γ'. (9) ς. τῷ β'.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Καὶ ἔσαι. Ο'ρθογ. γβο} \\ \text{Τετραγ. λο} \\ \text{Τετραγ. αλ} \end{array} \right\} = \lambda\beta^T + \alpha\lambda^T.$$

Ἀλλὰ τὰ μὲν $\lambda\alpha^T + \alpha\lambda^T = \alpha\sigma^T = \alpha\zeta^T$, τὰ δὲ $\lambda\beta^T + \alpha\lambda^T = \alpha\beta^T$ (1), ἄρα Ο'ρθογ. γβο + $\alpha\zeta^T = \alpha\beta^T =$ (2) $\alpha\zeta^T + \beta\zeta^T$. καὶ τῷ κοινῷ ἀφαιρέσθεις $\alpha\zeta^T$, ἔσαι γβο = $\beta\zeta^T$. Ο. Ε. Δ.

Α' λ λ ω ς.

Γ' ἄδιον δ' ἂν εἴη ἢ γενικώτερον τὴν ἀπόδειξιν ἀποδῆναι ὥδι.

Ἦν χθω γζ ἢ ζο· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ βζο τῇ κατὰ τὸ γ (3) ἴση ἐστίν, ἢ κ. 266.
δὲ κατὰ τὸ β ἐπὶ τῶν Τριγώνων κοινὴ, τὰ γβζ καὶ ζβο Τρίγωνα ἔσαι (4)
Ἰσογώνια. Ἀ'ρα (Δ. τῷ ζ'. ἥτις ἐκ τῆς δε ὑδαμῶς ἡρτηται) ἐστὶ γβ : βζ ::
βζ : βο, ἢ ἐπομένως (κατὰ τὴν ΙΖ'. τῷ ζ'. ἥτις ἐδ' αὐτῇ ταύτης ἐξήρτηται
ὅλως) γβ × βο = βζ^Τ. Ο. Ε. Δ.

Πορίσματα.

Ἐὰν ἀπὸ τῆ αὐτῆς Σημείει β τῷ ἐκτός τῆ Κύκλου ὄντος, ἐποσαιῶν διαχ- Α. κ. 267.
θῶσι Τέμνεσθαι βγ, ἅπαντα τὰ ὑπὸ γβο Ο'ρθογώνια ἴσα ἀλλήλοις ἔσαι,
ἐπεὶ τέτων ἕκασον ἴσον ἐστὶ (5) τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς Ἐφαπτομένη βζ.

Καὶ αἱ ἀπὸ τῆ αὐτῆς δὲ ἐκτός τῆ Κύκλου ὄντος Σημείει Ε'φαπτόμεναι Β.
τῆ Κύκλου βζ, βπ, ἴται ἀλλήλαις εἶσιν· ἑκατέρῳ γὰρ τῶν ἀπὸ τέτων Τε-
τραγώνων (6) ἴσον τὸ ὑπὸ γβο Ο'ρθογώνιον.

Καὶ δύο δὲ ἀπὸ τῆ ἐκτός τῆ Κύκλου β ἀχθεῖεν ἂν Εὐθεῖαι μόναι τῆ Κύκ- Γ.
λου Ε'φαπτόμεναι αἱ βζ· βπ, εἰ γὰρ ἢ τρίτην ἀχθῆναι δυνατόν ἢν Ε'φαπτο-
μένην, ἢν ἂν ἢ αὐτῇ (7) ἴση ταῖς βζ, βπ, ἢ τῆς ἐτέρας τέτων μηδὲ ποσῶν
διαφέρουσα.

Κἀντεῦθεν μετὰ τῷ Μαυρολύκῳ, ἐὰν ὕψος ὄρεος τὸ δα δῆλον ἦ, γινώσκη- Δ. κ. 268.
ται δὲ ἢ ἡ ὀριζόντιος αβ, ἢ τῆς γῆς Ε'φαπτομένη κατὰ τὸ β, ἔνθα πρῶτον
ἡ κορυφὴ τῷ ὄρει, τοῖς αὐτῷ ἀφασμένοις ἀφανὴς γίνεται, τὴν Διάμετρον τῆς
γῆς δε (ἢν ἐνὶ λαβεῖν ἐπὶ τῆς αδ προαχθείσης ἀχρι τῆς Περιφερείας) καταμε-
τρέειν παίδευσμεθα. Ἐσαι γὰρ (8) τὸ Ο'ρθογών. αε × αδ = αβ^Τ, ὥστε διπι-
ρεθὲν τὸ ἤδη δῆλον ὄν Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς αβ, διὰ τῷ ὕψους τῷ ὄρει αδ,

(1) ΜΖ. τῷ α'. (2) Διὰ τὴν αὐτ. (3) ΑΒ. τῷ γ'. (4) Θ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'.
(5) Διὰ τὴν Πρὸτ. (6) Διὰ τὴν Πρὸτ. (7) Διὰ τὸ β'. Πόρ. (8) Διὰ τὴν Πρὸτ.

ἢ αὐτὴ δὴλὰ ὑποτιθεμένη, τὸ Πηλίκον δώσει Εὐθείαν τὴν $αβ$, ἀφ' ἧς εἰς ἀφαιρεθῇ τὸ τῆ ὀρθῆς ὕψος $αδ$, λοιπὴ πάντως ἔσται ἢ ἐκ τῆς γῆς Διάμετρος.

Ἐπὶ παντὸς Ὀρθογωνίου Τριγώνου $αβγ$, τὸ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῆ ἀθροίσματος τῆς τε Ὑποτείνουσας καὶ τῆς ἐτέρας τῶν Πλευρῶν, καὶ ὑπὸ τῆς διαφορᾶς τῶν αὐτῶν περιεχόμενον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς λοιπῆς Πλευρᾶς Τετραγώνῳ. Εἰς γὰρ Κέντρῳ τῷ $γ$, Διαστήματι δὲ τῷ $γβ$ Κύκλος γραφῇ, τὴν Ὑποτείνουσαν τέμνων κατὰ τὸ $δ$, διαχθῇ δὲ ἡ $αγ$ ἄχρι πρὸς τὴν Περιφέρειαν $ε$, ἔσται ἢ μὲν $αε$ ἴση τῷ ἀθροίσματι τῷ ἐκ τῆς Ὑποτείνουσας $αγ$, καὶ τῆς Πλευρᾶς $βγ$ (ἐπεὶ $βγ = γε$ (1)), ἢ δὲ $αδ$ ἢ διαφορὰ τῆς Ὑποτείνουσας $αγ$, ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς $γβ$ (ἐπεὶ $γα = γβ$ (2)). Ἐπεὶ οὖν ἢ μὲν $αε$ τέμνηται τὸν Κύκλον ἐκτὸς (3), ἢ δὲ $αβ$ ἐφαπτομένη (4) αὐτῷ, ἔσται τὸ ὑπὸ $εαδ$ (ταυτὸν εἰπεῖν τὸ ὑπὸ τῆ ἀθροίσματος τῆς Τεμνύουσας καὶ τῆς Πλευρᾶς, καὶ ὑπὸ τῆς τῶν αὐτῶν διαφορᾶς περιεχόμενον Ὀρθογώνιον), ἴσον τῷ ἀπὸ $αβ$ (ταυτὸν εἰπεῖν τῷ ἀπὸ τῆς λοιπῆς Πλευρᾶς) Τετραγώνῳ (5). Ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

π. 268. ζ. Ἐὰν ἀπὸ τῆς $α$ Γωνίας τῷ $αβγ$ Τριγώνῳ, ἢ ἄνιστοι αἱ Πλευραὶ $αβ$, $αγ$, Κάθετος ἀχθῇ ἐπὶ τὴν Βάσιν (ἣν δέοι προαχθεῖσαν) ἢ $αλ$, ἔσται τὸ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῆ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν Πλευρῶν $αβ$, $αγ$, ἴσον τῷ Ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῆ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν Εὐθειῶν $λβ$, $λγ$, τῶν ἀπὸ τῆς Κάθετης $αλ$, καὶ τῶν πρὸς τὴν Βάσιν Γωνιῶν $β$ καὶ $γ$ ἀπολαμβανόμενον.

Κέντρῳ μὲν γὰρ τῷ $α$, Διαστήματι δὲ τῷ $αγ$, τῷ τῆς ἐλάσσονος Πλευρᾶς δηλονότι, Κύκλος γεγραφῶν τέμνων τὴν μείζονα τῶν Πλευρῶν $αβ$ κατὰ τὸ $δ$, τὴν δὲ Βάσιν (ἣν δέοι προαχθεῖσαν) κατὰ τὸ $ο$. Προήχθω δὲ καὶ ἡ $βα$ μείζων Πλευρὰ, ἄχρι τῆς Περιφέρειας κατὰ τὸ $ε$, καὶ ἐπεὶ ἴσαι (6) αἱ $αγ$, $αδ$, $αε$, ἔσται μὲν $εβ$ τῶν Πλευρῶν τὸ ἄθροισμα, ἔσται δὲ $βδ$ τῶν Πλευρῶν ἢ διαφορὰ. Ἐπεὶ δὲ ἴσαι (7) αἱ $λγ$, $λο$, ἔσονται ἐπὶ τῷ $Α'$. Σχήμ. αἱ $βγ$ καὶ $βο$, ἐπὶ δὲ τῷ $Β'$. Σχήμ. αἱ $βο$ καὶ $βγ$, τὸ ἄθροισμα καὶ ἢ διαφορὰ τῶν ἐναπολαμβανόμενων $λβ$ καὶ $λγ$. Ἄλλω μὲν (8) τὸ $εβδ = γβο$, ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

Ἐπὶ γὰρ τῷ $Α'$ τῶν δύο Σχημάτων, ὅπως ἂν τις τὸ Θεώρημα προτείνειεν.

Ἐὰν ἀπὸ τῆς Γωνίας $α$ τῷ $αβγ$ Τριγώνῳ, Κάθετος ἀχθῇ ἐπὶ τὴν Βάσιν ἢ $βγ$, εἰς Τμήματα δύο τὰ $βλ$, $λγ$ αὐτὴν κατατέμνουσα, τὸ Ὀρθογώνιον

(1) Ὁ. ΙΗ. τῷ $α$. (2) Διὰ τὸν αὐτ. (3) Ἐκ κατ. (4) Ἐκ κατ. καὶ διὰ τὴν $Κ$ τῷ $γ$. (5) Διὰ ταύτην τὴν Πρωτ. (6) Ὁ. ΙΗ. τῷ $α$. (7) Γ. τῷ $γ$. (8) $Δ$. Πόρ. τῆς παρῆς.

τὸ ὑπὸ τῶ ἀθροίσματος, ἐ τῆς διαφορᾶς τῶν Πλευρῶν αβ, αγ, ἴσον ἐστὶ τῷ Ὁρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ τε τῆς Βάσεως βγ, ἐ τῆς διαφορᾶς τῶν Τμημάτων τῆς αὐτῆς Βάσεως βο. Ἡ δὲ τῷ Θεωρήματος τὰδε χρήσις κατὰ τὴν ἐπίπεδον Τριγωνομετρίαν ἐπισημοτάτη ἐστὶ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΖ.

„Εὰν Κύκλῳ ληφθῇτι Σημεῖον ἐκτὸς (β), ἀπὸ δὲ τῷ Σημεῖῳ πρὸς τὸν
 „Κύκλον προσπίπτωσι δύο Εὐθεῖαι, ἐ ἡ μὲν αὐτῶν (βγ) τέμνῃ τὴν Κύκλον,
 „ἡ δὲ (βζ) προσπίπτῃ, ἡ δὲ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τεμνύσης (γβ) ἐ τῆς ἐκτὸς
 „ἀπολαμβανομένης (βο) μεταξὺ τῶ τε Σημεῖοι ἐ τῆς κυρτῆς Περιφέρειαι, ἴσον
 „τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτέσης (βζ) Τετραγώνῳ, ἡ προσπίπτουσα (βζ) ἐφά-
 „ψεται τῷ Κύκλῳ κατὰ τὸ ζ.

Ἀπὸ τῷ β ἤχθω (1) Ἐφαπτομένη ἡ βπ, ἐ ἐπεξεύχθωσαν αἱ επ, εζ, κ. 269.
 εβ· καὶ ἐπεὶ τῷ Ὁρθογωνίῳ γβο, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ βζ Τετράγωνον (2), ἐ
 τὸ ἀπὸ (3) βπ, ἔσαι δὴ ταῦτα ἀλλήλοισι ἴσα τὰ Τετράγωνα, ἐ μέντοι (4)
 ἐ αἱ Εὐθεῖαι βζ, βπ ἴσαι ἀλλήλαις· τὰ ἄρα ζεβ, πεβ Τρίγωνα ἐστὶν ἀλλή-
 λοις Ἰσόπλευρα, ἄρα ἐ αἱ κατὰ τὸ ζ ἐ π Γωνίαι (5) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν.
 Ἀλλὰ γὰρ ἡ κατὰ τὸ π (6) Ὁρθή ἐστὶν, ἄρα ἐ ἡ κατὰ τὸ ζ Ὁρθή ἐστὶν, ὥστε
 (7) ἡ βζ ἐστὶν Ἐφαπτομένη. Ο. Ε. Δ.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Ἡ ἄρα ὑπὸ εβζ (8) ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εβπ. Ὁ ἐ ἄμεινον ἂν ταχθεῖν Α.
 μετὰ τὸ Β'. Πόρισμα τῆς Λς'. τῷ Γ'. ἀνωτέρω.

Καὶ εἰάν Εὐθεῖαι δύο ἴσαι ἀλλήλαις βζ, βπ, ἀπὸ τινος Σημεῖοι τῶν Β.
 ἐκτὸς τῷ Κύκλῳ, πρὸς τὴν κυρτὴν προσπίπτωσι Περιφέρειαν, ἡ δὲ τέτων
 ἡ ἑτέρα βπ Ἐφαπτομένη τῷ Κύκλῳ, ἐ ἡ ἑτέρα πάντως βζ τῷ αὐτῷ Κύ-
 κλῳ ἐφάψεται. Ἰσὼν γὰρ ὑτῶν (9), ἐ τὰ ἀπὸ τέτων Τετράγωνα (10) ἴσα
 ἀλλήλοισι ἔσαι. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ βπ (11) = γβο, ἄρα ἐ βζ^τ (12) = γβο,
 ἄρα διὰ τὴν ΛΖ'. τὴν ἀνά χεῖρας, ἡ βζ ἀπτομένη ἐστὶ τῷ Κύκλῳ.

(1) ΙΖ. τῷ γ'. (2) Εξ ὑποθ. (3) Διὰ τὴν Λς. τῷ γ'. (4) Αξ. ι'. (5) Η. τῷ α'.
 (6) ΙΗ. τῷ γ'. (7) Ις. τῷ γ'. (8) Η. τῷ α'. (9) Εξ ὑποθ. (10) Αξ. ιι. (11) Λς.
 τῷ γ'. (12) Αξ. α'.

Τῶν σοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ'.

Προβληματώδης ἐστὶν ἅπαντα ἢ ἐν χερσὶ Βίβλος, διδάσκειν δὲ προτίθεται ἡμᾶς, τίνι δὴ ποτε μεθόδῳ τῶν Σχημάτων μάλιστα τὰ κανονικά, καὶ τεταγμένα ἀκρόντα, ἐγγράφεται τῷ Κύκλῳ καὶ περιγράφεται. Ἡ δὲ χρῆσις τῆς Βίβλου ἐπὶ τῇ κατασκευῇ τῶν ὀχυρωμάτων ἐστὶ πυκνοτάτη, καὶ μέντοι καὶ ἐξ αὐτῆς, οἷον ἐπὶ Πηγῆς, τὰ τῶν Ἡμιτόνων καὶ Ἀπτομένων, καὶ Τεμνωσῶν θαυμαζόμενα κανόνια, τὰ ἐπ' ἀγαθῷ μεγίστῳ τῶν μαθηματικῶν, ἐπισημῶν ἐπινοηθέντα ἐξοχετεύεται.

Ταύτῃ δέ τοι καὶ πρὸς τὴν Τριγωνομετρικὴν μάθησιν ἔχει ἡ Βίβλος πολὺ τὸ ἀνύσιμον· οὐδὲ γὰρ ἄλλως ἢ πολὺγωνα Κύκλοις ἐγγράφοντες, τῶν Ὑποτεινυσῶν τέτων καὶ Ἀπτομένων, καὶ Τεμνωσῶν κατασκευάζειν παιδευόμεθα τὰ κανόνια, δι' ὧν, καὶ Σχημάτων αὐτῶν, καὶ σωμάτων Μεγέθη καταμετρεῖται. Καὶ μὴν καὶ τὰς γε τῶν ἀσέρων, ἧ καλεῖν εἰώδασι φύσεις, τήν τε τεταρτημορικὴν δηλαδὴ καὶ τὴν ἐκτημορικὴν, καὶ ὅσας ἄλλας, ὅλην γ' ἄντις ἄνεν τῆς παρὰ τῆςδε τῆς Βίβλου ἐπικυρίας ὀρθῶς διακρίνειεν, ἅτε δὴ καὶ τέτων τῆς τῶν πολυγώνων ἐν Κύκλῳ ἐγγραφῆς ὅλως ἐξηρητημένων. Εἶδὲ καὶ Κύκλος τὸ ἐμβαδόν, καὶ οἷον τετραγωνισμόν τινα λαβεῖν ἐνι, οὐκ ἂν ποθεν ἄλλοθεν ἢ δὲ τῷτο, ὅτι μὴ ἐκ πολυγωνίων καὶ Τετραγωνικῶν χωρίων, ὑπὲρ ἀριθμὸν τῷ Κύκλῳ ἐγγραφομένων τε, καὶ περὶ αὐτὸν γραφομένων, εἰς πέρας ἀγαγεῖν δυνατὸν ἐστὶν· καὶ τῶν Κύκλων δὲ ὃν ἔχῃ πρὸς ἀλλήλους διπλασίονα λόγον, ἐκ τῷ διπλασίονος τῶν ἐν τέτοις τε καὶ περὶ αὐτῶν Πολυγώνων ὑποσυνάπτομεν. Τό γε μὴν τῆς κατὰ τὰ Στρατιωτικὰ Ἀρχιτεκτονικῆς χρῆσει ὃν εἶδος, τῇ ἐν Κύκλῳ τῶν Πολυγωνίων Σχημάτων ἐγγραφῇ, οὕτω πυκνῶς φέρεται κεχρημένον, ὥστε εἰκότως τῷδε τῷ Βιβλίῳ, οἷον ἀρχικῇ τινι εἴδει προσανατίθεσθαι.

Ὁ ρ ι σ μ ο ς .

Σχήμα εὐθύγραμμον εἰς Κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ἢ (ὃ ταυτόν *Α.* εἰς) Κύκλος περὶ Σχήμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἐκάσῃ τῶν τῷ Εὐθύγραμμου Γωνιῶν, πρὸς αὐτῇ εἰς τῇ τῷ Κύκλου Περιφερείᾳ. Ἐστὶ δ' ὁ παρ' Εὐκλείδῃ Γ'. εἰς *Α.*

Σχήμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ Κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ἢ (ὃ *Β.* ταυτόν εἰς) Κύκλος εἰς Σχήμα ἐγγράφεσθαι, ὅταν ἐκάσῃ Πλευρὰ τῆς τῷ Κύκλου Περιφερείας ἐφάπτηται. Οἱ παρ' Εὐκλείδῃ Δ'. εἰς Ε'. ἐν ἐνὶ τούτῳ σαφῶς περιέχονται.

Σχήματα δὲ τεταγμένα καὶ κανονικὰ λέγεται τὰ Ἰσόπλευρά τε καὶ *Γ.* Ἰσογώνια.

Τῆς δὲ περὶ τῆς ἐγγραφῆς εἰς περιγραφῆς τῶν Εὐθύγραμμων πρὸς τὰ Εὐθύγραμμα (τὸν *Α.* εἰς *Β.* φημι παρ' Εὐκλείδῃ), τῆς διὰ τῆς προσεπιπτώσεως τῶν Γωνιῶν ἐπὶ τὰς Πλευρὰς ἀποδιδομένης, καὶ δι' εἰς τὸν παρὰ τῷ αὐτῷ *Ζ.*, καὶ ὃν Εὐδεῖαν εἰς Κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγει, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς Περιφερείας ἢ τῷ Κύκλῳ, ὡς περιττὸς ἄρα δοκῶνται οἱ περὶ Ταχέτιον παραγράφουσι.

Π ρ ό τ α σ ι ς Α.

„Εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον (βδ), τῇ δοθείσῃ Εὐδεῖα (α) μὴ μείζονι ἔσῃ *κ. 270.*
„τῆς τῷ Κύκλου Διαμέτρου, ἴσην Εὐδεῖαν ἐναρμόσαι.

Ἦτοι ἡ τῷ δοθέντος Κύκλου ἀγομένη Διάμετρος βδ ἴση τῇ δοθείσῃ α, εἰς γεγονόσιν εἴη τὰ ἐπιταχθέν· ἢ εἴπερ μείζων, εἰλήφθω ἡ βγ (1) ἴση τῇ ελάσσονι α, καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ β, Διαστήματι δὲ τῷ βγ (2) Κύκλος γεγράφθω, καὶ (3) ἐπεξεύχθω ἡ βε, ἡ δὲ ἔσται ἴση (4) τῇ βγ, εἰς πομένως (5) τῇ α.

Π ρ ό τ α σ ι ς Β.

„Εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον, τῷ δοθέντι Τριγώνῳ (χ) ἰσογώνιον Τρίγωνον ἐγγράψαι.

Ἦχθω Ἀπτομένη τῷ Κύκλῳ ἡ εὐκ κατά τὸ δ, εἰ συνεσάδῳ ἡ ὑπὸ εδῇ *κ. 271.*

(1) Γ. τῇ α. (2) Διτ. γ. (3) Διτ. α. (4) Διτ. ΙΗ. τῇ α. (5) Εὐκ. κατ. καὶ διὰ τὸ Α. Αξ.

κατὰ τὸ δ (1) ἴση τῇ τῷ Τριγώνῳ Γωνίᾳ γ, ὁμοίως δὲ εἰς ἡ ὑπὸ ζδθ ἴση τῇ α, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηθ· φημί δὲ ὅτι γέγονε τὸ ἐπιταχθέν.

Ἡ γὰρ κατὰ τὸ θ Γωνία ἴση (2) τῇ ὑπὸ εδθ, ταύτης (3) τῇ ἐν τῷ δοθέντι Τριγώνῳ γ, ἡ δὲ κατὰ τὸ η τῇ ὑπὸ ζδθ, ἥτοι τῇ α, ἡ ἄρα λοιπὴ ὑπὸ ηθθ (4) ἴση ἔστι λοιπῇ τῇ κατὰ τὸ β. Ἄρα εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον κτ. Ο. Ε. Π.

Π ρ ό τ α σ ι ς Γ.

„Περὶ τὸν δοθέντα Κύκλον, τῷ δοθέντι Τριγώνῳ-(ιλκ) ἰσογώνιον Τριγώνον περιγράψαι.

κ. 272.

Προήχθω ἐκατέρωθεν ἡ Πλευρὰ ικ, ὥς τε συζηῖναι τὰς ἐκτὸς Γωνίας ο, ν, καὶ συνεσθῶσαν δὴ κατὰ τὸ Κέντρον α (5) αἱ ὑπὸ ηαβ, ηαζ ἴσαι ταῖς κατὰ τὸ ο ε ν Γωνίαις. Εἴτα κατὰ τὰ Σημεῖα η, β, ζ Εὐθεῖαι ἀπτεῶσαν τῷ Κύκλῳ τρεῖς, συμπίπτουσαι κατὰ τὰ Σημεῖα γ, ε, δ.

Ἐπεὶ οὖν ἐπὶ τῷ Τετραπλευρῷ γηαβ, αἱ κατὰ τὸ β ε η Γωνίαι ἄμφω (6) εἰσὶν Ὀρθαί, καὶ αἱ λοιπαὶ ἄρα δύο ἢ τε ὑπὸ ηαβ, εἰς ἡ κατὰ τὸ γ (7) ἴσαι εἰσὶ δυσὶν Ὀρθαῖς, εἰς ἴσαι ἄρα εἰσὶ ταῖς κ ε ο· ὥς τε ἀφαιρεθεισῶν τῶν ἴσων (8) ὑπὸ ηαβ ε ο, ἔσται ἡ γ λοιπὴ ἴση τῇ λοιπῇ κ. Ὡσαύτως δὲ δεῖξθῆσεται εἰς ἡ ἰ ἴση τῇ δ, ἄρα (9) εἰς ἡ λοιπὴ ε, ἴση τῇ λοιπῇ λ. Ἰσογώνιον ἄρα τὸ δεγ τῷ ιλκ, εἰς περιγέγραπται εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον. Ο. Ε. Π.

Ὅτι δὲ εἰς Ἐφαπτόμεναι προαχθεῖσαι συμπίπτουσιν ἀλλήλαις, ἔτις ἀνδείξαις. Αἱ Γωνίαι ι, ν, ε κ, ο, καὶ ἑκατέραν τὴν συζυγίαν δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι (10) εἰσὶν. Αἱ δὲ ι ε κ δυοῖν Ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσὶν (11), αἱ ἄρα ο ε ν (ταύτας (12) αἱ ὑπὸ ηαβ ε ηαζ δυοῖν Ὀρθῶν μείζονες εἰσὶν, εἰς ἡ λοιπὴ ἄρα ὑπὸ βαζ (13) δυοῖν Ὀρθῶν ἐλάσσων ἐσὶ· ἡ ἄρα Περιφέρεια βηζ τῆς ἡμικυκλικῆς (14) μείζων ἐστίν, ἡ δὲ ζβ ἐλάσσων, ταύτητοι εἰς ἐπιζευχθεῖσα ἡ ζβ Εὐθεῖα, ὑπὲρ τὸ Κέντρον α (ταύτας μεταξὺ α ε ε) κείσεται. Ἐπεὶ δὲ αἱ ὑπὸ αζε, αβε (15) εἰσὶν Ὀρθαί, φανερόν ὅτι αἱ ὑπὸ βζε, ζβε ἐλάσσονες εἰσὶ δυοῖν Ὀρθῶν. Ὡς (16) αἱ Εὐθεῖαι γβε ε δζε προαχθεῖσαι πεσύν-

(1) ΚΓ. τῷ α. (2) ΑΒ. τῷ γ. (3) Εκ κατασ. (4) Πόρ. Σ. τῆς ΑΒ. τῷ α. (5) ΚΓ. τῷ α. (6) ΙΗ. τῷ γ. (7) Θιάρ. Α. τῷ Σχολ. μετὰ τὴν ΑΒ. τῷ α. (8) Εκ κατασ. (9) Πόρ. Θ. τῆς ΑΒ. τῷ α. (10) ΙΓ. τῷ α. (11) ΙΖ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α. (12) Εκ κατασ. (13) Γ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α. (14) Σχολ. τῆς ΚΓ. τῷ α. (15) ΙΗ. τῷ γ. (16) Σχολ. τῆς ΑΑ. τῷ α.

ται καθ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο Ὀρθῶν ἐλάσσονες, οἷον κατὰ τὸ ε. Παραπλησίω δὲ λόγῳ δειχθήσεται ἡ σύμπτωσης ἢ τῶν λοιπῶν.

Α Λ Λ ω ς.

Πρὸς τῷ Κέντρῳ α. τῷ δοθέντος Κύκλου, τῷ ἐπὶ τῆς Ημίδιαμέτρου βα, x. 273.
 συνεισάδωσαν ὡς ἀνωτέρω αἱ ὑπὸ βαη, ζαβ ἴσαι ταῖς ο εἰς ν ταῖς ἐκτὸς ὕσαι
 Γωνίαις τῷ Τρίγωνῳ ιλκ, ἑτέρα τῇ ἑτέρᾳ· κατὰ δὲ τὰ Σημεῖα ζ, η, β ἐφαπ-
 πτέδωσαν τῷ Κύκλῳ αἱ τρεῖς Εὐθείαι Γωνίαις ὁρθὰς συνεισῶσαι τὰς αβγ,
 ανγ, εἰς τὰς αβε, αζε, εἰς ἐπεζεύχθησαν αἱ βη, βζ, ἐκατέρωθεν τῆς βα Ημι-
 διαμέτρου Τρίγωνον συνεισῶσαι τὰ βαη εἰς βαζ. Ἐάν οὖν ἀπὸ τῶν δύο ὁρθῶν
 Γωνιῶν ὑπὸ αβγ εἰς ανγ τῷ βαη Τρίγωνῳ, αἱ πρὸς τοῖς β εἰς η Γωνίαις ἔχει,
 ἀφαιρεθῶσι, λοιπαὶ αἱ ὑπὸ ηβγ εἰς βηγ δυοῖν Ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσονται,
 ὥς αἱ Ἐφαπτόμεναι βγ, ηγ προαχθεῖσαι καθ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο Ὀρ-
 θῶν ἐλάσσονες (1), συνελεύσονται τέως κατὰ τι Σημεῖον· ὡσαύτως δὲ καὶ
 αἱ βε, ζε συνελεύσονται προαχθεῖσαι εἰς αὐταῖ· προεκβεβλήδωσαν οὖν καὶ
 συμπιπτεῖν αἱ μὲν κατὰ τὸ γ, αἱ δὲ κατὰ τὸ ε· ἐπεὶ τοίνυν ἐπὶ τῷ
 Τετραπλευρῳ αβγη, αἱ κατὰ τὰ β εἰς η Σημεῖα εἰσὶν Ὀρθαί, αἱ ὑπὸ βαη
 εἰς βγη ἴσαι εἰσι (2) δυοῖν Ὀρθαῖς. Ἀλλὰ εἰς ο, εἰς δυοῖν Ὀρθαῖς (3) ἴσαι
 εἰσὶ, εἰς τούτων ἡ ο ἴση (4) τῇ ὑπὸ βαη, ἄρα εἰς ἡ ὑπὸ βγη ἴση τῇ ι. Ὡσαύ-
 τως δὲ δειχθήσεται εἰς ἡ ὑπὸ βεζ ἴση τῇ κ· ἀλλ' αἱ ι εἰς κ ἅμα ληφθεῖσαι,
 δυοῖν Ὀρθῶν (5) ἐλάσσονες εἰσιν, ἄρα αἱ ὑπὸ ηγς καὶ γεζ δυοῖν Ὀρθῶν
 ἐλάσσονες εἰσι, ταύτητοι αἱ Εὐθεῖαι γη, εζ προεκβληθεῖσαι συμπεσύνται.
 Συμπιπτεῖν οὖν κατὰ τὸ δ· καὶ ἐπεὶ αἱ γ εἰς ε Γωνίαι τῷ γδε Τρίγωνῳ,
 ἴσαι εδείχθησαν ταῖς ι εἰς κ τῷ ικλ, ἡ ἑτέρα τῇ ἑτέρᾳ, ἔσαι πάντως ἴση εἰς ἡ
 λοιπὴ τῇ λοιπῇ (6), ἥτοι ἡ δ τῇ λ. Καὶ Ἰσογώνιον ἄρα εδείχθη τὸ γδε
 Τρίγωνον τῷ δοθέντι ιλκ, εἰς περιγέγραπται δὲ (7) εἰς περὶ τὸν δοθέντα Κύ-
 κλον. Ο. Ε. Π.

Π ρ ό τ α σ ι ς Δ.

„Εἰς τὸ δοθὲν Τρίγωνον Κύκλον ἐγγράψαι.

Αἱ δύο Γωνίαι γ καὶ ε δίχα τετμήδωσαν δι Εὐθειῶν τῶν γα, εα, x. 274.

(1) Σχολ. τῆς ΔΑ. τῷ α'. (2) Θιάρ. α'. τῆς ΔΒ. φθ' α'. (3) ΙΓ. τῷ α'. (4) Ε' κατ. (5) ΔΒ. τῷ α'. Πόρ. ιζ'. (6) Θ. Πόρ. τῆς ΔΒ. τῷ α'. (7) Ε' κατ.

συνιστῶν κατὰ τὸ α (διὰ τὸ τὰς δύο τῷ Τριγώνῳ Γωνίας γ ἢ ε δυοῖν Ὁρ-
θῶν (1) ἐλάσσονας εἶναι, ἢ ἔτι τὰς ὑπὸ α γ ε καὶ α ε γ ἔτι ἐλάσσονας). Ἀ-
πὸ δὲ τῆ α (2) πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ α β, α η, α ζ. Τῷ γὰρ Κύκλῳ,
ὅς ἐν Κέντρῳ μὲν τῷ α, Διαστήματι δὲ τῷ α β γραφεῖται, διὰ τῶν Σημείων
ζ ἢ η διερχομένη ἐφάπτονται αἱ τρεῖς τῷ Τριγώνῳ Πλευραὶ, καὶ ἔτι εἰς
τὸ Τρίγωνον ἐγγεγραμμένοι ἔσσι ὁ Κύκλος.

Ἐπὶ γὰρ τῶν Τριγώνων γ α β καὶ γ α η, αἱ μὲν ὑπὸ α β γ καὶ α η γ ἴσαι
εἰσὶν, ὡς ἄμφω (3) Ὁρθαὶ, αἱ δὲ ὑπὸ α γ β καὶ α γ η ὁμοίως (4) ἀλλήλαις
ἴσαι, ἄρα καὶ (5) ὑπὸ γ α β ἴση τῇ ὑπὸ γ α η, καὶ ἐπομένως (6) ἡ α β ἴση
τῇ α η. Ὡσαύτως δ' ἀντις δείξαι καὶ τὰς α β καὶ α ζ ἴσας ἔσας, καὶ τοῖνον ὁ
α Κέντρῳ καὶ Διαστήματι τῷ α β ἐγγεγραφομένοι (7), καὶ διὰ τῆ η καὶ ζ διελεύ-
σεται. καὶ ἐπεὶ αἱ κατὰ τὰ β καὶ η καὶ ζ Γωνίαι εἰσὶν (8) Ὁρθαὶ, αἱ τῷ Τρι-
γώνῳ Πλευραὶ (9) ἐφάπτονται τῷ Κύκλῳ, ὥστε ἐγγεγραμμένοι ἔσσι (10)
ὁ Κύκλος εἰς τὸ δοθέν Τρίγωνον. Ο. Ε. Π.

Π ο ρ ί σ μ α τ α .

Α. Ἐντεῦθεν οὖν γνωσκομένων τῶν τῷ Τριγώνῳ Πλευρῶν, δῆλα ἡμῖν
ἔσαι καὶ τέτων τὰ Τμήματα, τὰ διὰ τῶν ἐπαφῶν τῷ ἐγγεγραμμένῳ εἰς τὸ
Τρίγωνον Κύκλῳ γινόμενα.

κ 275.

Οἶον ἔστω $\delta\gamma = 12$, καὶ $\delta\epsilon = 16$, καὶ $\gamma\epsilon = 18$, καὶ ἔσαι $\delta\gamma + \delta\epsilon$
 $= 12 + 16 = 28$. εἰν ἀπὸ τέτων ἀφαιρεθῇ $\gamma\epsilon = 18 = \gamma\eta + \epsilon\zeta$,
λοιπὰ ἔσαι $\eta\delta + \delta\zeta = 10$, ἄρα (11) $\eta\delta = 5 = \delta\zeta$, καὶ $\eta\gamma = 7 = \gamma\beta$,
καὶ $\beta\epsilon = 11 = \zeta\epsilon$.

Β. Δοθεῖσῶν τῶν τῷ Τριγώνῳ Πλευρῶν, καὶ τῆς Ἡμιδιαμέτρου τῷ ἐγγε-
γραμμένῳ εἰς τὸ Τρίγωνον Κύκλῳ, ῥαδίον ἐστὶ τὸ ἐμβαδὸν τῷ Τριγώνῳ προ-
σευρεῖν, νοητέον γὰρ τὰς ἄλλας α γ καὶ α ε, ὡς ἐπὶ τῷ ἀνωτ. Σχήματος
ἠγμέναις. Ἐπιζευχθεῖσης γὰρ καὶ τῆς α δ, ἡ τῷ Κύκλῳ Ἡμιδιάμετρος αὐ-
τὸ τὸ ὕψωμα ἐστὶ τῶν τριῶν Τριγώνων γ α ε, ε α δ, δ α γ, εἰς α τὸ ὅλον Τρί-
γωνον γδε διανέμεται, αἱ δὲ τέτε Πλευραὶ Βάσεις ἐκείνων. Ἡ ἄρα Ἡμι-
διάμετρος ἐπιπολλαπλασιασθεῖσα τῇ τῶν Πλευρῶν ἡμισυτροίσματι, δώσει
(12) τὸ ἐμβαδὸν τῷ Τριγώνῳ γδε.

(1) 12. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (2) 16. τῷ α'. (3) Ἐκ κατ. (4) Ἐκ κατ. (5) Θ.
Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (6) Ἐκ. τῷ α'. (7) Θ. τῷ γ'. (8) Ἐκ κατασ. (9) 18. τῷ γ'.
(10) Ὁρ. Β. τῷ δ. (11) Β. Πόρ. τῆς Ας. τῷ γ'. (12) Σχόλ. τῆς ΜΑ. τῷ α'. καὶ Πρώτ.
Α. τῷ β.

Οἷον ἔσω $\alpha\beta = 5$, αἱ δὲ Πλευραὶ ὡς ἀνωτέρω 12, 16, 18, τέτων δὲ ἡμιάθροισμα 23, καὶ ἔσαι $5 \times 23 = 115$, τὸ ἐμβαδὸν τῷ Τριγώνῳ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ε.

„Περὶ τὸ δοθέν Τρίγωνον Κύκλον γράψαι, ἥτοι (ὁ ταυτὸν εἰσι)
„τριῶν δοθέντων Σημείων μὴ ἐπ' εὐθείαις κειμένων (β, γ, δ), Κύκλον δι
„αὐτῶν ἀγόμενον γράψαι.

Ἐπιζευχθεῖσιν τῶν βγ, γδ, ἡ δίχα τμηθεῖσιν κατὰ τὰ ο ἡ ε (1), καὶ ἀχθεῖσιν πρὸς ὀρθὰς τῶν (2) οα ἡ εα, τῶν κατὰ τὸ α συνισῶν, τὸ α Κέντρον ἔσαι, ὃ ἂν καταγραφεῖν ὁ διὰ β ἡ γ ἡ δ διαγόμενος Κύκλος. κ. 276.

Ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ αβ, αγ, αδ, ἐπὶ τῶν Τριγώνων αἱ δο, αο Πλευραὶ ἴσαι ἔσονται (3) ταῖς γο, αο, αἵτε πρὸς τῷ ο Γωνίαι ἄμφω ὀρθαί, ὥστε (4) ἡ αδ ἴση τῇ αγ· ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ αβ ἴση τῇ αγ. Καὶ τῶν τριῶν οὖν ἕτως (5) ἴσων ἔσων, τὸ α (6) Κέντρον ἔσαι τῷ Κύκλῳ τῷ διὰ τῶν Σημείων ἀγόμενου β, γ, δ.

Π ρ ᾱ ξ ι ς:

Κέντροις τοῖς β ἡ γ ἡ δ εἰς τρεῖς ἴσας ἀλλήλοις γράψας Κύκλους τεμνο- κ. 277.
μένους, αἱ ἐπιζευγνύσονται τὰς τῶν Κύκλων τομας Εὐθεῖαι, καὶ ὁ συνίσσι Ση-
μεῖον, τὸ τῷ ζητεμένῳ Κύκλῳ δώσῃσι Κέντρον.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἐκ δὲ τέτων ἡ περὶ Τετράπλευρον (αβγζ), οὗ ἂν αἱ ἀπεναντίον Γω-
νίαι ὑπὸ αβγ, αζγ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ᾖσι, Κύκλον γράψειν διδασκόμεθα.

Ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς αγ, Κύκλος περὶ τὸ δοθέν Τρίγωνον (7) αβγ κ. 278.
γραφήσεται. Ἐὰν οὖν κατὰ τὴν ἀντίθετον Περιφέρειαν ληφθῇτι Σημεῖον το
δ, ἡ ἐπιζευχθῶσιν αἱ αδ, δγ, ἔσονται δὲ τῷ αβγδ Τετραπλεύρῳ αἱ ἀπεναν-
τίον Γωνίαι β ἡ δ (8) δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. Ἀλλὰ ἡ ἐπὶ τῷ αβγζ Τετραπλεύ-
ρῳ αἱ ἀπεναντίον β ἡ ζ (9) δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, εἰ ἂν ἄρα ἀφαιρεθῇ ἐκ-
τέρῳθεν ἡ β, ἔσαι ἡ κατὰ τὸ δ ἴση τῇ κατὰ τὸ ζ. Ἀμφω δὲ τῇ αὐτῇ Περι-
φερείᾳ αβγ βεβήκασι, ἡ τέτων ἡ ἑτέρα δ πρὸς τῇ ἀντιθέτῳ Περιφερείᾳ εἰσιν,

(1) I. τῷ α'. (2) IΔ. τῷ α'. (3) Εκ κατ. ἡ Γ. τῷ γ'. (4) Δ. τῷ α'. (5) Δε α'.
(6) Θ. τῷ γ'. (7) Διὰ τὴν Πρῶτ. (8) KB. τῷ γ'. (9) Εξ ὑποθ.

ἄρα (1) εἰ ἢ ζ. Ἐνθεντοὶ ὁ διὰ τῶν τριῶν Γωνιῶν α, β, γ , τῷ Τετραπλεύρῳ $\alpha\beta\gamma\delta$ ὑψόμενος, ἤχθῃ πάντως εἰ διὰ τῆς τετάρτης ζ. Ο. Ε. Π.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

α. 279.

Κατὰ τὴν διαφορὰν τῷ Τριγώνῳ, περὶ ὃ ὁ Κύκλος γράφεται, διαφέρει-
σαν εἰς τὸ τῷ περιγραφόμενῳ Κύκλῳ Κέντρον ἶχει τὴν Δέσιν. Ἐὰν μὲν γὰρ
Οἰκονομῶν τύχῃ, ἔσαι δὴ τὸ Κέντρον ἐντὸς τῷ Τριγώνῳ, διὰ γὰρ τὴν ὑπὸ
 $\beta\gamma\delta$ (2) τὴν ἐν τῷ μείζονι Τμήματι, τὸ Κέντρον αἰ ἐν αὐτῷ τῷ μείζονι Τμή-
ματι πεσεῖται, ἢ Βάσις ἢ $\beta\delta$. ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται, ὅτι τὸ Κέντρον αἰ ἐν
τοῖς μείζουσιν εἰσὶ Τμήμασιν, ὧν Βάσεις αἱ $\beta\gamma$ εἰ $\delta\gamma$, ὥστε ἐντὸς τῷ Τριγώνῳ
 $\beta\gamma\delta$ ἔσαι τὸ α Κέντρον. Ἐν δὲ τῷ ὀρθογωνίῳ Τριγώνῳ, περὶ ὃ ἂν εἴη πε-
ριγεγραμμένος ὁ Κύκλος, τὸ Κέντρον θ κείσεται ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας τὴν
ὀρθὴν Γωνίαν εἰ (3). Ἀμβλυγωνίᾳ δὲ τῷ Τριγώνῳ ὄντος κείσεται τὸ τῷ περι-
γραφόμενῳ περὶ αὐτὸ Κύκλῳ Κέντρον μ (4) ἐκτὸς τῷ Τριγώνῳ.

Α'.

Ἐὰν ἀπὸ τῷ Κέντρῳ α, ἐφ' ἐκάστην τῶν Γωνιῶν β, γ, δ τῷ ὀξυγωνίῳ
Τριγώνῳ ἐπιζευχθῶσιν Εὐθεῖαι $\alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta$ (Σχ. 1.), τεμήσι δὴ τὸ Τρίγω-
νον εἰς Τρίγωνα τρία ἰσοσκελῆ τὰ $\alpha\beta\gamma, \alpha\beta\delta, \alpha\gamma\delta$, διὰ τὴν τῶν Ἡμιδιαμέ-
τρων ἰσότητά. Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον, εἰ ἐὰν ἐπιζευχθῇ (Σχ. 2.) ἐπὶ τῷ
ὀρθογωνίῳ Τριγώνῳ, περὶ ὃ περιγέγραπται ὁ Κύκλος, ἢ ζθ, διελαῖναι κα-
κίνο εἰς ἰσοσκελῆ δύο τὰ $\epsilon\theta\zeta, \zeta\theta\eta$, ὃ εἰ ἀνωτέρω (5) σεσημειώται. Ἐὰν δὲ
ἐπὶ ἐκάστης τῶν τῷ Ἀμβλυγωνίᾳ (Σχ. 3) Γωνιῶν, ἀπὸ τῷ Κέντρῳ μ τῷ περὶ αὐ-
τὸ περιγεγραμμένῳ Κύκλῳ ἐπιζευχθῶσιν αἱ $\mu\iota, \mu\kappa, \mu\lambda$, συστήσονται ὡσαύ-
τως Τρίγωνα τρία ἰσοσκελῆ, ὧν τὸ μὲν $\iota\mu\lambda$, ἢ Βάσις ἢ τὴν Ἀμβλεῖαν ὑπο-
τείνουσα, ἐκτὸς κείσεται τῷ Ἀμβλυγωνίᾳ, εἰ σὺν ἐκείνῳ Τετράπλευρον τὸ $\iota\mu\lambda\epsilon$
συστήσῃ τοῖς δυσὶν ἰσοσκελεῖσι $\iota\mu\kappa, \kappa\mu\lambda$ ἰσον.

α. 280. Β'.

Ἐπὶ τῷ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένῳ ὀξυγωνίῳ Τριγώνῳ $\beta\gamma\delta$, εἰ
ἀπὸ τῷ Κέντρῳ α Ἡμιδιάμετροι ἀχθῶσιν αἱ $\alpha\delta\epsilon, \alpha\iota\zeta, \alpha\eta$, πρὸς ὀρθὰς τέ-
μνεσαι τὰς Πλευράς $\beta\gamma, \gamma\delta, \beta\delta$, αὗται δὴ δίχα τεμήσι (6) τὰς τε Πλευ-
ράς κατὰ θ, ι, κ, εἰ τὰς Περιφερείας, αἱ ὑποτείνουσιν αἱ Πλευραὶ κατὰ ε,
ζ, η, εἰ τὰς πρὸς τῷ α Γωνίας τῶν ἰσοσκελῶν Τριγώνων.

Ομοίως δὲ εἰ ἐπὶ τῷ ὀρθογωνίῳ λξμ τῷ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένῳ

(1) Σχόλ. τὸ μετὰ τῆς ΚΑ. τῷ γ. (2) ΑΑ. καὶ Σχόλ. τῆς ΚΑ. τῷ γ. (3) Αὐτ.
(4) Αὐτ. (5) Πόρ. ε. τῆς ΑΑ. τῷ γ. (6) Γ. τῷ γ. εἰ Σχόλ. Ορ. α. τῆς Κε. τῷ α.
εἰ Α. τῷ γ.

να, αὶ πρὸς ὁρθὰς ἀγόμεναι ἐπὶ τῶν Πλευρῶν νρσ, ηπτ, ταύταις τε (1) κατὰ ρ ε π, ε ᾧς αὐταὶ ὑποτείνουσι Περιφερείας κατὰ σ, τ, καὶ τὰς πρὸς τῷ ν Γωνίας δίχα τέμνουσιν, ἡ δὲ νο τὴν Περιφέρειαν λομ, ἣν ἡ Διάμετρος λμ ὑποτείνει, κατὰ τὸ ο' δίχα τέμνει.

Ἐπὶ δὲ τῷ Ἀμβλυγωνίῳ ἡ υφ δίχα τέμνεσθαι τὴν ὑποτείνουσαν ψψ, ε τὸ Τόξον ψχψ διαχθεῖται δίχα (2) τέμνει, ε δὴ ε αὶ λοιπαὶ να, υα ε τὰς Πλευράς, ε ᾧς αὶ Πλευραὶ ὑποτείνουσι Περιφερείας.

Ἐνθεντοὶ ἐπὶ τῷ ὀξυγωνίῳ Τριγώνῳ αὶ ἡμίσειαι τῶν Πλευρῶν βδ, δγ, γι, κτ. ἔσονται τῶν ὑπὸ βαε, εαγ, γαζ, κτ. (3) Ἡμίτονα ὁρθά. (Σχ. 1).

Καὶ παραπλησίως ἐπὶ τῷ ὀρθογωνίῳ (Σχ. 2.) ε Ἀμβλυγωνίῳ (Σχ. 3.), ἡ μὲν λρ ὁρθὸν ἐστὶν Ἡμίτονον τῆς ὑπὸ λνο, ἡ δὲ ξπ τῆς ὑπὸ ξηπ ἐπ' ἐκείνῃ, ἐπὶ δὲ τῷ ἡ μὲν ψο τῆς ὑπὸ ψαα, ἡ δὲ ωι τῆς ὑπὸ ωαα. Πάλιν ἐπὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ἡ λν Ἡμιδιάμετρος, ὅλικόν Ἡμίτονον ἐστὶ τῆς ὑπὸ λνο (4)· καὶ ἐπεὶ τὸ αὐτὸ ἐστὶν ἐκάστης Γωνίας, ε τῷ παραπληρώματος εἰς Ὅρθας δύο (5) ὁρθὸν Ἡμίτονον, ἐπὶ τῷ Ἀμβλυγωνίῳ ἡ ψδ, ὁρθὸν Ἡμίτονον ἔσται τῆς τε ὑπὸ ψυφ ε τῆς ὑπὸ ψυχ.

Ἡ πρὸς τῷ Κέντρῳ Γωνία ὑπὸ βαε, ἣτις βέβηκεν ἐπὶ τῆς βε ἡμισείας τῆς Περιφερείας βεγ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῇ Περιφερείᾳ ὑπὸ βδγ, ἣτις βέβηκεν ἐπὶ τῆς ὅλης Περιφερείας βγ· ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ βαγ τῆς τε ὑπὸ βαε (6) ε τῆς ὑπὸ βδγ (7) διπλασίῳ ἐστὶ, φανερόν (8) ὅτι αὶ ὑπὸ βαε ε βδγ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν Ὡσαύτως δὲ ἴσαι δειχθήσονται ε αὶ ὑπὸ γαδ ε γιβ, καὶ αὶ ὑπὸ γαζ ε γβδ (Σχ. 1). Αἱ δὲ ὑπὸ λνο ε λξμ ἐπὶ τῷ ὀρθογωνίῳ (Σχ. 2), ὅτι ἄμφω Ὅρθαι οὐσαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, δῆλον. Ἐπὶ δὲ τῷ Ἀμβλυγωνίῳ (Σχ. 3.) ὅτι ἡ ὑπὸ ψυχ ἡ βεβηκεία ἐπὶ τῷ ἡμίσει τῷ Τόξῳ ψχ, ἴση τῇ ὑπὸ ψωψ, τῇ βεβηκείᾳ ἐπὶ τῷ ὅλῳ Τόξῳ ψχψ, ὅτω δεικνύται· ἐπεξεύχσωσαν αὶ ψχ, χψ· ἡ πρὸς τῷ Κέντρῳ ὑπὸ ψυφ, ἣτις βέβηκεν ἐπὶ τῆς ἡμισείας ψφ τῆς Περιφερείας ψφψ, δειχθήσεται ὡς ἀνωτέρω ἴση τῇ ὑπὸ ψχψ, ἣτις βέβηκεν ἐπὶ τῆς ὅλης Περιφερείας ψφψ. Ἀλλ' ἐπὶ τῷ Τετραπλευρῳ ψχψω αὶ μὲν ἀπεναντίον χ ε ω (9) δυσὶν Ὅρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ἥτοι ταῖς ὑπὸ ψυφ ε ψυχ (10), εἰάν ἄρα ἀφαιρεθῶσιν αὶ ἴσαι ὑπὸ ψχψ, ψυφ, ἔσται λοιπὴ ψυχ ἴση ψωψ.

Παντὸς Τριγώνου βγδ (Σχ. 1.) αὶ Πλευραὶ βγ, βδ, γδ εἰσὶ πρὸς ἀλ-

(1) Αὐτ. (2) Α. τῷ γ'. (3) Πόρ. α. τῆς Γ. τῷ γ'. (4) Ορ. Ι. τῷ γ'. (5) Αὐτ. (6) Διὰ τὸ β'. τῶν ἀμφοτέρων. (7) Ε. τῷ γ'. (8) Α. ε. (9) ΕΒ. τῷ γ'. (10) ΙΕ. τῷ α'.

λήλας ὡς τὰ Ἡμίτονα τῶν Γωνιῶν ὑπὸ βδγ, βγδ, γβδ, ὅφ' αὖ ἐκείναι αἱ Πλευραὶ ὑποτείνουσιν. Εἰσὶ γὰρ πάντως αἱ Πλευραὶ βγ, βδ, γδ, ὡς τὰ αὐτῶν ἡμίση βδ, βκ, γι· τετέστιν ὡς τὰ Ἡμίτονα τῶν Γωνιῶν (1) τῶν ὑπὸ βαε, βαη, γαζ. Ἀλλ' αὗται αἱ Γωνίαι ταῖς πρὸς τῇ Περιφερείᾳ ἴσαι εἰσὶν, (2) ἡ μὲν δηλονότι τῇ δ, ἡ δὲ τῇ γ, ἡ δὲ τῇ β· ἄρα αἱ Πλευραὶ βγ, βδ, γδ εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς τὰ Ἡμίτονα τῶν Γωνιῶν, ὅφ' αὖ ἐκείναι αἱ Πλευραὶ ὑποτείνουσιν. Ἐκ δὲ δὴ τῆς μέν τῃ Πορίσματος, τὸ πλεῖστον μέρος τῆς ἐπιπέδου Τριγωνομετρίας ἐπιφέρειται, ὅπερ ἀκριβῶς σημειωτέον.

κ. 281. ζ'. Κέντεῦθεν τὴν ἀπὸ τῆς γῆς ἀπόσασιν τῆς Σελήνης καταμετρεῖν παιδευόμεθα· δοθείσης γὰρ διὰ τῶν Ἀστρονομικῶν παρατηρήσεων τῆς παραλλακτικῆς Γωνίας ὑπὸ αγκβ, καὶ τῆς ὑπὸ δβγ, καὶ δὴ καὶ τῆς ταύτης παραπληρώσεως εἰς δύο Ὁρθὰς ὑπὸ γβα, καὶ μέντοι καὶ τῆς Ἡμιδιαμέτρου τῆς γῆς αβ, ἐρῆμεν ὡς τὸ Ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αγκβ, πρὸς τὸ Ἡμίτονον τῆς ὑπὸ γβα, ὅπως αβ πρὸς αγκ (3) κτ.

κ. 282. ζ'. Ἐντεῦθεν δὲ καὶ τῆς Ἡλιακῆς ἀφ' ἡμῶν ἀποστάσεως ἐν τὸ μέτρον λαβεῖν· καὶ γὰρ αὖθις εἰς διὰ τῶν Ἀστρονομικῶν παρατηρημάτων, ἡ τῆς κατὰ μῆνα παραλλάξεως Γωνία (ἐν ᾗ μάλιστα διχότομος ἐστὶν ἡ Σελήνη) ληφθῇ ὑπὸ σηγ, καὶ ἡ τῆς Σελήνης ἀπόστασις σγ, ἀναλογισόμεθα ὡδὶ· τὸ Ἡμίτονον τῆς ὑπὸ σηγ, πρὸς τὸ Ἡμίτονον τῆς Ὁρθῆς ησγ (ἥτοι πρὸς τὴν Ἡμιδιάμετρον (4)), ὅπως σγ ἡ τῆς Σελήνης ἀπὸ τῆς γῆς ἀπόστασις, πρὸς γη τὴν τῇ Ἡλίᾳ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ζ.

„Εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον Τετράγωνον ἐγγράψαι.

κ. 283. Ἦχθωσαν Διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλας τέμνουσαι (5) αἱ αγκ, βδ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ αβ, βγ, γδ, δα. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ βε τῇ εδ (6), ἡ δὲ εα ἐπὶ τῶν Τριγώνων βεα, αεδ κοινὴ, ἥτε ὑπὸ βεα ἴση τῇ ὑπὸ (7) αεδ, ἄρα (8) βα ἴση τῇ αδ. Ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ αβ ἴση δεῖχθήσεται τῇ βγ, καὶ ἡ αδ τῇ δγ, καὶ τὸ αβγδ Ἰσόπλευρον ἔσται, καὶ δὴ τὸ αὐτὸ καὶ Ὁρθογώνιον· ἐπειδὴ γὰρ αἱ βδ καὶ αγκ Διάμετροι ἐτέθησαν, ἔσται τὰ βαδ, αδγ, δγβ, γβα (9) Ἡμικύκλια, καὶ αἱ ἐν αὐτοῖς (10) Γωνίαι α, β, γ, δ Ὁρθαί. Τετράγωνον ἄρα (11) ἐστὶ τὸ αβγδ, καὶ ἐγγεγραπταὶ (12) εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον.

(1) Πόρ. γ'. τῇ πρώτῃ Σχολ. (2) Πόρ. δ'. τῶν αὐτῶν. (3) Πόρ. ε'. (4) Ὁρ. 1. τῇ γ'. (5) 1Α. τῇ α'. (6) Ὁρ. 1Η. τῇ α'. (7) Εἰς κατ. (8) Δ. τῇ α'. (9) ΚΒ. Ὁρ. τῇ α'. (10) 1Α. τῇ γ'. (11) Ὁρ. 1Α. τῇ α'. (12) Ὁρ. Δ. τῇ δ'.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ζ.

„Περὶ τὸν δοθέντα Κύκλον Τετράγωνον περιγράψαι.

Τῶν Διαμέτρων τῇ Κύκλῳ ὡς ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω ἀχθείσων, κατὰ τὰ Σημεία α, β, γ, δ ἤχθωσαν αἱ Ἐφαπτόμεναι ζθ, δι, ιη, ηζ· καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς ταῖς ἐπαφαῖς Γωνίαι (1) Ὁρθαὶ εἰσιν, οἷον αἱ ὑπὸ ζαε, ζβε καὶ αἱ λοιπαὶ, ἐπιζευχθείσης τῆς αβ, αἱ ὑπὸ ζαβ καὶ ζβα ἐλάσσονες εἰσι δυοῖν Ὁρθῶν (2)· καὶ δεικνυμένε τέττε καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν, αἱ Ἐφαπτόμεναι προεκβληθεῖσαι συμπεσῶνται, καὶ συζησεται ἥτω τὸ ζηθ, ὃ φημὶ δὴ εἶναι Τετράγωνον.

Καὶ γὰρ ἐπεὶ δὴ ὑπὸ ζαε ἰση τῇ ὑπὸ αεδ, ἔσαι (3) ἡ ζη Παράλληλος πρὸς τὴν βδ, διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ δι Παράλληλος πρὸς τὴν βδ, ὥστε καὶ πρὸς (4) ἀλλήλας. Ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ζθ καὶ ηι Παράλληλοι εἰσὶ τῇ αγ καὶ ἀλλήλαις, τοιγαρὴν αἱ ζη καὶ δι (ἐπὶ τῶν Παραλληλογράμμων ζδ καὶ βι) ἰσαι ἔσονται (5) τῇ αὐτῇ βδ, καὶ δὴ (6) καὶ ἀλλήλαις· ὥσαύτως δὲ ἐπὶ τῶν Παραλληλογράμμων ζγ, αι, αἱ ζθ, ηι ἰσαι εἰσὶ τῇ αὐτῇ αγ καὶ ἀλλήλαις. Ἀλλὰ μὲν αἱ αγ, βδ ἰσαι ἀλλήλαις εἰσιν, ἄρα αἱ τέσσαρες ζη, ηι, ιθ, θζ ἰσαι ἀλλήλαις εἰσιν, ὥστε ἰσοπλευρον ἐστὶ τὸ ζηθι. Ἐπεὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τῷ β ἐφεξῆς (7) Ὁρθαὶ εἰσιν, ἄρα καὶ αἱ ἀπεναντίον ἐπὶ τῶν Παραλληλογράμμων Γωνίαι, ἥτοι ἡ η καὶ ἡ ι Ὁρθαὶ (8) εἰσὶ, καὶ (9) ἐπομένως καὶ αἱ ζ καὶ θ, ὥστε καὶ Ὁρθογώνιον τὸ αὐτὸ ζηθθ, καὶ Τετράγωνον (10) ἄρα, καὶ εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον (11) περιγεγραμμένον. Ο. Ε. Π.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Τὸ εἰς τὸν Κύκλον περιγεγραμμένον Τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τῷ εἰς τὸν αὐτὸν ἐγγεγραμμένῳ.

Ἐπεὶ δὴ γὰρ ἡ ὑπὸ βαγ ἐν τῷ Ἡμικυκλίῳ (12) Ὁρθὴ ἐστὶ, τὸ ἀπὸ τῆς Ὑποτείνουσας βγ Τετράγωνον (13) ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αβ καὶ αγ, καὶ ἐπομένως (14) τὸ ἀπὸ βγ, ἥτοι τὸ ἀπὸ θζ περιγεγραμμένον εἰς τὸν Κύκλον Τετράγωνον, διπλάσιόν ἐστι τῷ ἀπὸ αβ εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένῳ.

Καὶ τῇ ἀπὸ τῆς Ἡμιδιαμέτρου δε. αη Τετραγώνῳ, τὸ μὲν περιγεγραμ-

(1) ΙΗ. τῷ γ. (2) Σχόλ. τῆς ΛΑ. τῷ δ. (3) ΚΖ. τῷ ε. (4) Λ. τῷ δ. (5) ΛΔ. τῷ ε. (6) ΛΕ. δ. (7) Ε' κατ. (8) ΛΔ. τῷ ε. (9) Διὰ τὴν αὐτ. (10) ΛΒ. Ὁρ. τῷ ε. (11) Ε' κατ. Ὁρ. Δ. τῷ δ. (12) ΛΑ. τῷ γ. (13) ΜΖ. τῷ ε. (14) Λ. Πόρ. τῆς ΜΖ. τῷ ε.

μένον εἰς τὸν Κύκλον τετραπλάσιον, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον διπλάσιον. Ἀλλ' αὐτὴ τῇ περιγεγραμμένῃ Πλευρᾷ Διάμετρος ἐστὶ τῇ ἐγγεγραμμένῃ, ἢ δὲ Πλευρᾷ ἢ τῇ Διάμετρος ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς Ἡμιδιαμέτρου βῆ, ἢ ἄρα τῶν Τετραγώνων πρόδος τῶν ἀπὸ τῶν Διαμέτρων πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν Πλευρῶν, κατὰ ὑποδιπλασίονα λόγον συνεχῶς χωρεῖ, ἢ δὲ ἀνάπαλιν τῶν ἀπὸ τῶν Πλευρῶν πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν Διαμέτρων κατὰ διπλασίονα, καὶ ἢ μὲν τῶν ἀπὸ τῶν Διαμέτρων τῶν Κύκλων πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν Ἡμιδιαμέτρων κατὰ ὑποτετραπλασίονα, ἢ δὲ ἀνάπαλιν τῶν ἀπὸ τῶν Ἡμιδιαμέτρων πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν Διαμέτρων κατὰ λόγον τετραπλασίονα.

Π ρ ό τ α σ ι ς Η.

„Εἰς τὸ δοθέν Τετράγωνον Κύκλον ἐγγράψαι.

κ. 287.

Δίχα τεμήσθωσαν αἱ $αβ$ καὶ $αδ$ (1), ἀπὸ δὲ τῶν τομῶν $ζ$ καὶ $ε$, ἡχθώσαν ἢ μὲν (2) $ζη$ ὅποτέρᾳ τῶν $αδ$, $βγ$, ἢ δὲ $εθ$ ὅποτέρᾳ τῶν $αβ$, $δγ$, καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ $κ$, Διαστήματι δὲ τῷ $κζ$ ἢ $κε$ Κύκλος γέγραψθω· φημὶ δὴ ἔστι οὗτος ἐγγεγραμμένος ἔσαι εἰς τὸ δοθέν Τετράγωνον, ἐπεὶ γὰρ Παραλλήλογραμμον ἐστὶ (3) τὸ $ακ$, ἔσαι ἢ $αζ$ ἴση τῇ ἀπεναντίον (4) $εκ$, ἢ δὲ $αε$ τῇ $ζκ$. Ἀλλ' αἱ $αζ$ καὶ $αε$, ἅτε δὴ τῶν $αβ$ καὶ $αδ$ ἴσων (5) ἡμίσειαι, ἴσαι (6) ἀλλήλαις εἰσὶν, ἄρα καὶ $κζ$ ἴση τῇ $κε$ · ὡσαύτως δὲ δείξω ἴσας εἶναι καὶ τὰς $κη$, $κε$, ὥστε ἐπεὶ αἱ τρεῖς $κζ$, $κε$, $κη$ ἴσαι ἀλλήλαις, ὁ Κέντρῳ μὲν τῷ $κ$, Διαστήματι δὲ τῷ $κζ$ γραφόμενος Κύκλος, ἥξει καὶ διὰ τῶν Σημείων $ε$, $η$, $θ$, καὶ τῆς δὲ ἐφάπτονται αἱ Εὐθεῖαι κατὰ τὰ αὐτὰ Σημεῖα· ἐπεὶ γὰρ αἱ Γωνίαι $α$ καὶ $β$ (7) Ὀρθαί εἰσι, καὶ αἱ κατὰ τὸ $ε$ καὶ $θ$ ἀπεναντίον (8) Ὀρθαί ἔσονται· ὡσαύτως δὲ διὰ τὸ Ὀρθόν τῶν $α$ καὶ $δ$, Ὀρθαί καὶ αἱ κατὰ $ζ$ καὶ $η$ · ἄρα (9) αἱ $αβ$, $αδ$, $βγ$, $γδ$ Ἐφαπτόμεναι εἰσὶ τῷ Κύκλῳ, καὶ οὕτως ἐγγεγράφεται ὁ Κύκλος (10) εἰς τὸ δοθέν Τετράγωνον. Ο. Ε. Π.

Π ρ ό τ α σ ι ς Θ.

„Περὶ τὸ δοθέν Τετράγωνον Κύκλον περιγράψαι.

κ. 288.

Ἐπιζευχθεῖσων τῶν $αγ$, $βδ$, Κέντρῳ τῷ $ε$, Διαστήματι δὲ τῷ $εα$, ὁ γραφόμενος Κύκλος ἥξει καὶ διὰ $β$ καὶ $γ$ καὶ $δ$ · ἐπεὶ γὰρ αἱ $αδ$, $δβ$ ἴσαι

(1) I. εἰς α'. (2) ΔΔ. εἰς α'. (3) Εκ κατ. (4) ΔΔ. εἰς α'. (5) ΔΒ. ὅρ. τῷ α'. (6) ΔΕ. ε'. (7) Εξ ὑποθ. (8) ΔΔ. τῷ α'. (9) Ιε. τῷ γ'. (10) Ὅρ. Ε. εἰς δ'.

ταῖς γδ, δβ, ε Βάσις ἢ αβ ἴση τῇ βάσει βγ, ἄρα ε ἢ ὑπὸ αδβ ἴση ἐστὶ (1) τῇ ὑπὸ βδγ· ἢ δὲ ὑπὸ αδγ Ὀρθή (2), ἄρα ὑπὸ αδε, εδγ ἡμίσεια Ὀρθῆς ἐκατέρω. Παραπλησίως δείξω ε τὰς ὑπὸ εαδ ε εγδ ἡμισείας εἶναι Ὀρθῆς, ὥς εα ε εγ (3) ἴσαι εἶναι τῇ αὐτῇ εδ ἐκατέρω, ε δὲ (4) ε ἀλλήλαις· ὁμοίως δὲ δεῖχθήσεται ὅτι ε τῇ εβ. Ὁ ἄρα Κέντρον τῷ ε, ε Διαστήματι τῷ εα γραφόμενος Κύκλος ἦξει ε διὰ β ε γ ε δ, ἄρα κτ. (5). Ο. Ε. Π.

Π ο ρ ί σ μ α τ α .

Εἴτευθεν δὲ φανερόν, ὡς ἢ ὑπὸ εβα ἢ ὑπὸ τε τῆς Α' πτομένης εβ, καὶ τῆς Τεμνέσης βα ἡμίσειά εἰσι Ὀρθῆς, ἦτοι μοιρ. 45. ἢ δὲ ὑπὸ αβδ ἡμιόλειον Ὀρθῆς, ἦτοι μοιρ. 135. Ὡς ἢ πλευρά αβ τῇ ἐγγεγραμμένῃ εἰς τὸν Κύκλον Τετραγώνῃ (ἢ ὁ ταυτὸν εἰσι, ἢ Εὐθεῖα ἢ ἀποτεμνύσασα τὸ τεταρτημόριον τῆς ὅλης Περιφερείας) ἐναρμολογούμενη τῷ Κύκλῳ διατέμνει αὐτὸν εἰς Τμήματα δύο, ὧν τὸ μὲν μείζον βδα (6) Γωνίαν περιέχει τὴν ὑπὸ βγα ἢ βζα ἡμίσειαν ἦσαν Ὀρθῆς, τὸ δ' ἐλάττω αιβ Γωνίαν ἡμιόλειον ἦσαν Ὀρθῆς. Ταύτητοι ε ἢ ἐν τῷ τεταρτημοριῷ Τμήματι Γωνία ἴση εἰσι Ὀρθῇ ε ἡμίσεια Ὀρθῆς ἅμα ληφθεῖσαι, ἢ δὲ Γωνία ἢ βεβηκεία ἐπὶ Περιφέρειᾳ τεταρτημορικῇ, ἴση εἰσι ἡμίσεια Ὀρθῆς.

Καὶ εὖ ἐπὶ τῆς αβ (ἣτις ἐστὶ τῇ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένη Τετραγώνῃ Πλευρᾷ) ὡς ἐπὶ Διαμέτρῃ, Κέντρῳ τῷ μεσασιγὰτῳ Σημεῖῳ η, ε Διαστήματι τῷ ηα, ἢ ηβ Κύκλος γραφῇ ἐλάσσων, διελευσέται δὲ ἢ τὰτε Περιφέρεια διὰ τῷ κ, ὁ Κέντρον ἐστὶ τῷ Κύκλῳ. Εἰ δὲ ε περὶ τὸν μείζονα Κύκλον γε γραμμένον τύχη Τετραγώνον, διήξει πάντως ἢ τῷ ἐλάσσονος Κύκλου Περιφέρεια ε διὰ τῆς τῇ περιγεγραμμένη Τετραγώνῃ Γωνίας ε. Περί γὰρ τῇ Τετραγώνον αιβ, ἢ ἢ μὲν τῶν Γωνιῶν α πρὸς τῷ Κέντρῳ ἐστὶ τῷ Κύκλῳ, ἢ δὲ ε τῇ τῇ περιγεγραμμένη Τετραγώνῃ Γωνία, συμπίπτει, περιγέγραπται (7) ὁ ἐλάσσων Κύκλος.

Π ρ ό τ α σ ι ς I.

Ἰσοσκελὲς Τρίγωνον συστήσασθαι (βγ), ἔχον ἐκατέρω τῶν πρὸς τῇ Βάσει Γωνιῶν (αβγ ἢ αγβ), διπλασίαν τῆς λοιπῆς (ἦτοι τῆς κατὰ κορυφὴν α).

(1) Η. τῷ α. (2) Εἰ ὑπὸ αδγ. (3) ε. τῷ α. (4) Α. α. (5) Ὀ. Α. τῷ ε. (6) βγ. τεταρτημοριῳ. (7) Θ. τῷ ε.

Α. Χ. 289.

* Καὶ εὖ ἐπὶ τῆς αβ (ἣτις ἐστὶ τῇ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένη Τετραγώνῃ Πλευρᾷ) ὡς ἐπὶ Διαμέτρῃ, Κέντρῳ τῷ μεσασιγὰτῳ Σημεῖῳ η, ε Διαστήματι τῷ ηα, ἢ ηβ Κύκλος γραφῇ ἐλάσσων, διελευσέται δὲ ἢ τὰτε Περιφέρεια διὰ τῷ κ, ὁ Κέντρον ἐστὶ τῷ Κύκλῳ. Εἰ δὲ ε περὶ τὸν μείζονα Κύκλον γε γραμμένον τύχη Τετραγώνον, διήξει πάντως ἢ τῷ ἐλάσσονος Κύκλου Περιφέρεια ε διὰ τῆς τῇ περιγεγραμμένη Τετραγώνῃ Γωνίας ε. Περί γὰρ τῇ Τετραγώνον αιβ, ἢ ἢ μὲν τῶν Γωνιῶν α πρὸς τῷ Κέντρῳ ἐστὶ τῷ Κύκλῳ, ἢ δὲ ε τῇ τῇ περιγεγραμμένη Τετραγώνῃ Γωνία, συμπίπτει, περιγέγραπται (7) ὁ ἐλάσσων Κύκλος.

Β'.
ριον ἀποτεμνύσας, Γωνία ὑπὸ βα τεταρτημορίου εἶσι Ὀρθῆς. Ὁμοίως δὲ ε ἢ ὑπὸ τε τῆς Α' πτομένης εβ, ε τῆς ἀποτεμνύσας ὀκνημόριον εβ, οἷον ἢ ὑπὸ εβι, τεταρτημορίου εἶσι Ὀρθῆς. Ὡς αὐτῶς δὲ ε ἢ βεβηκεία ἐπὶ τῇ ὀκνημορικῇ Περιφέρειᾳ εβ, ἢ τοι ἢ ὑπὸ βγι τεταρτημοριῳ. ε αὐτῇ Ὀρθῆς. Καὶ

κ. 289.

Εκκείδω τις Εὐθεΐα ἢ αβ, ἐς ἂν τετμήσθω κατὰ τὸ δ (1), ὥς το
 ἕξαπλασίαν ὑπὸ αβδ Ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ αδ Τετραγώνῳ. Καὶ Κέντρῳ μὲν
 ἄρα τούτων τῷ α, Διασέματι δὲ τῷ αβ Κύκλος γεγράφθω, ἐπὶ τῷ γραφέντι Κύκλῳ
 ἡ ἐν τῷ τεταρτη- ἐνημέσθω (2) ἢ βγ ἴση τῇ αδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἢ αγ, καὶ ἔσαι τὸ βγγ
 μορικῶς Τμή- ματι ὑπὸ Τρίγωνον τὸ ζητούμενον.

αιβ.

κ. 290.

Ἐπιζευχθεῖσιν γὰρ τῆς γδ, περὶ τὸ γδα Κύκλος (3) γεγράφθω·
 καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ αβδ ἴσον ἐστὶ τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ αδ, ἥτοι τῷ ἀπὸ
 βγ, ἐφύπτεται πάντως ἢ βγ (4) τῷ Κύκλῳ δο, ὃν τέμνει ἢ γδ. Ἄρα ἢ
 ὑπὸ βγδ (5) ἴση ἔσαι τῇ ἐν τῷ ἐναλλαχῆς Τμήματι ὑπὸ γαδ. Κοινῆς δὲ
 προσεθείσης τῆς ὑπὸ δγα, ἔσαι ἢ ὑπὸ βγα ἴση τῇ α ἐπὶ τῇ ὑπὸ αγδ
 ἅμα ληφθεῖσαι. Ἀλλὰ τὰ σκέλη αγ ἐπὶ αβ ἴσα ἐστὶ, ἐπὶ (6) ἢ ὑπὸ αβγ
 ἴση τῇ ὑπὸ βγα, ἄρα ἐπὶ ἢ ὑπὸ αβγ ἴση ἐστὶ τῇ α ἐπὶ τῇ ὑπὸ αγδ ἅμα
 ληφθεῖσαι. Ἀλλὰ μὲν ἐπὶ ἢ ἐκτός ὑπὸ βδγ (7) ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντός ἐπὶ
 ἀπεναντίον α, ἐπὶ ὑπὸ αγδ ἅμα ληφθεῖσαι, αἱ δύο ἄρα ὑπὸ γβδ ἐπὶ γδβ
 ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἐπομένως (8) ἢ δγ ἴση ἐστὶ τῇ βγ, ἥτοι (9) τῇ
 αδ. Ἄρα αἱ Γωνίαι α, ἐπὶ ὑπὸ αγδ (10) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ· δέδεικται δὲ
 ἢ ὑπὸ αβγ ἴση ἀμφοῖν ἅμα, τῆς ἄρα κατὰ τὸ α διπλασίων ἐστὶ. Ἄρα
 Ο. Ε. Π.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Ἐκ τῆς τῷ Προβλήματος δὲ κατασκευῆς δῆλον, ὅτι τῆς ἐτέρας τῶν
 ἴσων τῷ Ἰσοσκελεῶς Πλευρῶν διδομένης, τὸ ζητούμενον συνίσταται Τρίγωνον.
 Δεῖσταν δὲ ἐπὶ τῆς Βάσεως βγ δοθείσης Ἰσοσκελεῶς τοιοῦτον συστήσασθαι, ὅ-
 περ ἀμέλει ἐκατέρω τῶν πρὸς τὴν Βάσιν Γωνιῶν διπλασίων εἶναι τῆς λοι-
 πῆς, πρῶτον ἐπὶ τῆς βγ ὥς ἐπὶ σκέλεος, τὸ Τρίγωνον βγδ (11) κατασκευα-
 σέον, ὃ κορυφὴ μὲν ἢ γ, Βάσις δὲ ἢ βδ, εἴτα πρὸς τῷ γ Σημείῳ τῆς
 βγ, Γωνίαν θετέον τὴν ὑπὸ βγα ἴσην (2) τῇ γβδ, καὶ προσεβληθείσης
 τῆς βδ ὥς ἐπὶ συμπεσεῖν τῇ γα κατὰ τὸ α, συστήσεται τὸ αβγ Τρίγωνον
 κατὰ τὸ ἐπιταχθέν ἐπὶ τῆς δοθείσης Βάσεως βγ.

Ἐπειδὴ γὰρ αἱ ὑπὸ βδγ ἐπὶ αβγ, ὥς τῇ αὐτῇ τρίτῃ, ἴσαι ἐτέθησαν
 (13) ἐπὶ ἀλλήλαις, καὶ τούτων ἢ μὲν ὑπὸ βδγ (14) ἴση δυσὶ ταῖς ἐντός ἐπὶ

(1) ΙΑ. τῷ β. (2) Α. τῷ δ. (3) Ε. τῷ δ. (4) ΑΒ. τῷ γ. (5) ΑΒ. τῷ γ. (6) Ε. τῷ α. (7) ΑΒ. τῷ α. (8) Ε. τῷ α. (9) Ε. ἀπὸ α. (10) Ε. τῷ α. (11) ΑΒ. τῷ α. (12) ΚΓ. τῷ α. (13) Ε. κατ. (14) ΑΒ. τῷ α. κατ. αὐτ. Προβλ. (12) ΚΓ. τῷ α. (13) Ε. κατ. (14) ΑΒ. τῷ α. κατ. αὐτ. Προβλ.

ἀπεναντίον τῇ τε α καὶ τῇ ὑπὸ δγα, ἡ δὲ ὑπὸ βγα ἰση ταῖς ὑπὸ βγδ καὶ δγα, κεινῆς ἄρα ἀφαιρεθείσης τῆς ὑπὸ δγα, ἔσαι ἡ ὑπὸ βγδ ἰση τῇ α· ταύτης ἄρα διπλασίον ἐκατέρω τῶν πρὸς τὴν Βάσιν τῷ μείζονος Τριγώνου ἔσαι, ὅτι καὶ κεινῆς.

Π. ο ρ ί σ μ α τ α.

Ἐκατέρω τῶν πρὸς τῇ Βάσει Γωνιῶν β καὶ γ τῷ ἤδη συζάντες ἴσουςκε- Α'.
λῆς Τριγώνου, δυοὶ πεμπτημόριοις δυοῖν Ὁρθῶν ἰση ἐστὶ, τατέσι τέσσαρσι πεμπτημόριοις μιᾷς Ὁρθῆς, ἡ δὲ λοιπὴ α ἐν ἐστὶ πεμπτημόριον δυοῖν Ὁρθῶν, ἥτοι πεμπτημόρια δύο μιᾷς. Δῆλον δὲ τὸ λεγόμενον ἔκτε τῆς ἐνὰ χεῖρας Προτάσεως, καὶ ἐκ τῆς ΑΒ'. τῷ πρώτῳ.

Ἐπειδὴ οὖν μέτρον δυοῖν Ὁρθῶν τὸ Ἡμικύκλιον ἐστὶ, μοιρῶν ἀμέλει 180, ἔσαι δὴ τὸ μὲν τῶν δύο Ὁρθῶν πεμπτημόριον, οἷα ἡ α Γωνία μοιρ. 36. τὰ δὲ δύο πεμπτημόρια τῶν δύο Ὁρθῶν, οἷα ἡ κατὰ τὸ β Γωνία, μοιρ. 72. Καὶ ἐπεὶ ἡ Ὁρθὴ μοιρ. ἐστὶν 90, τὸ ταύτης πεμπτημόριον μοιρ. ἐστὶ 18· ἄρα ἡ κατὰ τὸ α Γωνία (μοιρ. ἔσα 36) δύο πεμπτημόρια μιᾷς Ὁρθῆς περιέχει. Ἡ δὲ κατὰ τὸ β Γωνία (μοιρ. ἔσα 72) τέσσαρα πεμπτημόρια μιᾷς Ὁρθῆς, ἡ δύο πεμπτημόρια δυοῖν περιέχει· τὰ γὰρ δύο πεμπτημόρια δυοῖν Ὁρθῶν τέσσαρα ἐστὶ μιᾷς, καὶ τὸ πεμπτημόριον δυοῖν δύο μιᾷς. Καὶ ἐν γένει διὰ τῶν μορίων τῶν Ὁρθῶν ἐπιλογιζόμενοι τὰς Γωνίας, τῇ ἡμιστεῖα τῷ τῶν Ὁρθῶν ἀριθμῷ, τὸν ἀριθμὸν τῶν μορίων διπλασιάζομεν, καὶ ἀνάπαλιν. Οἷον ἐάν τις Γωνία ἐξ Ὁρθῆς πεμπτημόρια περιέχουσα τύχη, περιέξει πάντως ἡ αὐτὴ δυοῖν Ὁρθῶν τρεῖς πεμπτημόρια.

Ἐπεὶ δὲ ἡ ὑπὸ βαγ (ὄρα τὸ Σχ. τῆς Πρστ.) δυοῖν Ὁρθῶν ἐστὶ πεμπτημόριον, ἥτοι δύο δεκατημόρια, μοιρ. ἀμέλει 36, ἔσαι πάντως ἡ αὐτὴ δεκατημόριον Ὁρθῶν τεττάρων, ἥτοι τῆς ὁλοχρεῦς τῷ Κύκλῳ Περιφερείας, μοιρ. 360. Ἐνδεῖντοι ἡ Εὐδεῖα βγ Πλευρὰ ἐστὶ τῷ κανονικῷ Δεκαγώνῳ τῷ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγραφομένῳ, οὗ Ἡμιδιάμετρος ἡ Εὐδεῖα αβ, εἴταν ἡ αγ.

Ἐὰν ἡ τῷ Κύκλῳ Ἡμιδιάμετρος αβ (Σχ. τῷ αὐτ.) ἔτω τηθεῖ κατὰ τὸ Γ.
δ, ὥστε τὸ ὑπὸ αβδ Ὁρθογώνιον, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης Ἡμιδιαμέτρου καὶ τῷ ἑλάσσονος Τμήματος, ἴσον εἶναι τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῷ δα μείζονος Τμήματος, ἔσαι τὸ μείζον τῶν Τμημάτων ἡ Πλευρὰ τῷ Δεκαγώνῳ τῷ εἰς τὸν Κύκλον, ἡ Ἡμιδιάμετρος ἡ αβ, ἐγγραφομένη. Φανερόν γάρ τῇ ἀποδείξει τῆς ἐν χερσὶ Προτάσ., ὅτι τὸ αδ Τμήμα ἴσον ἐστὶ τῇ Βάσει βγ.

Ἐὰν Κέντρῳ μὲν τῷ γ, Διαστήματι δὲ τῷ γβ ἡ γδ Κύκλος γραφῇ, ἐ-

πειδὴ τὸ βγδ Ἰσοσκελὲς τῷ βαγ Ἰσοσκελεῖ ἐστὶν ἰσογώνιον (1), ἔσαι δὴ ἡ Βάσις βδ Πλευρὰ τῷ κανονικῷ Δεκαγώνῳ (2), ὅπερ ἂν εἰς τὸν Κύκλον ἐγγραφεῖν. Καὶ ἐπεὶ ἡ τῷ Κύκλῳ Ἡμιδιάμετρος γβ = (3) αὐτὴ Πλευρὰ ἐστὶ τῷ Ἑξαγώνῳ (4), ὅπερ ἂν εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγραφεῖν, εἰς ἄρα Εὐθεῖα τις οἶον ἡ αβ, ἔτω τμηθῇ κατὰ τὸ δ, ὥστε τὸ ὑπὸ αβδ Ὀρθογώνιον, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης αβ καὶ τῷ ἐλάσσονος Τμήματος βδ, ἴσον εἶναι τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῷ μείζονος Τμήματος αδ, ἔσαι τὸ μὲν μείζον τῶν Τμημάτων αδ Πλευρὰ τῷ Ἑξαγώνῳ, τὸ δὲ ἐλάττω δβ Πλευρὰ τῷ Δεκαγώνῳ τῷ εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγραφομένῳ. Καὶ αὕτη ἐστὶν ἡ παρὰ τῷ Εὐκλείδῃ ἐν Βιβλ. ΙΓ'. Πρὸτ. Θ.

Ε'. Ἐντεῦθεν δὲ παιδεύομεθα τὴν τῷ Κύκλῳ τεταρτημορικὴν Περιφέρειαν εἰς μέρη πέντε ἴσα ἀλλήλοις, καὶ (τῆς δίχα τομῆς συνεχιζομένης (5)) εἰς μέρη 10, 20, 40, καὶ τέμνειν. Ἐπειδὴ γὰρ ἡ βγ Εὐθεῖα Πλευρὰ ἐστὶ τῷ κανονικῷ Δεκαγώνῳ (6) τῷ εἰς τὸν Κύκλον, ἢ Κέντρον μὲν τὸ α, Ἡμιδιάμετρος δὲ ἡ αβ, ἐγγραφομένη, ἔσαι δὴ τὸ Τόξον βγ δεκατημόριον τῆς ὅλης Περιφέρειας, ἥτοι πεμπτημόριον τῆς Ἡμιπεριφέρειας. Ἐνθεντοὶ ἡ ἡμίσεια τῷ Τόξῳ βγ δεκατημόριον ἔσαι τῆς Ἡμιπεριφέρειας, πεμπτημόριον δὲ τῆς τεταρτημορικῆς.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΑ.

„Εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον Πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, (ἥτοι κανονικόν) ἐγγράψαι.

κ. 291.

Συνεσάδω Τρίγωνον (7), ἢ ἑκατέρω τῶν πρὸς τῇ Βάσει Γωνῶν διπλάσιον εἶη τῆς λοιπῆς, τῷ δὲ συνεσθέντι Ἰσογώνιον ἐγγεγραψάτω (8) εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον τὸ γαδ, καὶ τῷ ἐγγραφέντῳ αἱ πρὸς τὴν Βάσιν Γωνίαι ὑπὸ αγδ, αδγ δίχα (9) τετμήσωσαν διὰ τῶν γε καὶ δβ Εὐθειῶν, τῶν τῇ Περιφέρειᾳ κατὰ τὰ Σημεῖα ε καὶ β προσπιπτουσῶν, καὶ ἐπεξεύχσωσαν αἱ αβ, βγ, γδ, δε, εα.

Ἐπεὶ οὖν αἱ Γωνίαι ζ, η, θ, ι, κ ἴσαι (10) ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ αἱ Περιφέρειαι πάντως αἷς βεβήκασιν αε, εδ, βγ, αβ, γδ (11), ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ δὴ καὶ αἱ τὰς ἴσας Περιφέρειας ὑποτείνουσαι Εὐθεῖαι (12) ἴσαι

(1) Διὰ τὴν ἀπόδ. τῆς I. τῷ παρόντι. (2) Πόρ. β. τῆς παρῆς. (3) Διὰ τὴν κατ. ταύτ. τῆς I. (4) Α. Πόρ. τῆς ΙΕ. τῷ δ. (5) Α. Βιβ. γ. (6) Πόρ. Β. ταύτ. (7) Κατὰ τὴν ἀνωτ. (8) Β. τῷ δ. (9) Θ. τῷ α. (10) Εἰς κατ. (11) Ας. τῷ γ. (12) ΚΘ. τῷ γ.

ἄλλήλαις εἰσὶν, ὥς τὸ Πεντάγωνον ἐστὶν ἰσόπλευρον· ἀλλ' ἔστι δὴ καὶ ἰσογώνιον, ἐπεὶ αἱ τέττα Γωνίαι βαε, αεδ, κτ. βεβήκασιν ἐπὶ ἰσων (1) Περιφερειῶν βγδε, αβγδ, κξ. γέγονεν ἄρα (2) τὸ ἐπιταχθέν.

Π ο ρ ῖ σ μ α τ α .

Ἦ τὰ ἰσοπλεύρα τε καὶ ἰσογώνια Πενταγώνια Γωνία ἴση ἐστὶν ἕξ πεμπτημορίοις μιᾶς Γωνίας Ὁρθῆς (ἦτοι (3) τρισὶ πεμπτημορίοις δυοῖν Ὁρθῶν). Ἐπειδὴ γὰρ αἱ πρὸς τῷ α τρεῖς Γωνίαι ἴσαι εἰσὶν ὥς ἐπὶ ἰσων Περιφερειῶν βγ, γδ, δε βεβηκείαι, ἡ δὲ μετὰξὺ ἴση ἐστὶ δυοῖ (4) πεμπτημορίοις Ὁρθῆς, φανερόν ὅτι αἱ τρεῖς ἅμα (ταυτόν δὲ εἰπεῖν ἡ τὴ Πενταγώνια Γωνία) ἴση ἔσται ἕξ πεμπτημορίοις μιᾶς Ὁρθῆς.

Ὡς ἐπὶ τὸ πεμπτημόριον τῆς Ὁρθῆς μοιρ. ἐστὶ 18, ἔσται ἡ τὴ Πενταγώνια Γωνία μοιρ. 18 ἑξάκις, ἦτοι μοιρ. 108. ἐν ᾧ δὲ φαιμέν ἕξ πεμπτημόρια Ὁρθῆς τὴν τῇ Πενταγώνια Γωνίαν περιέχειν, δῆλον ὅτι πεμπτημορίῳ Ὁρθῆς, τὴν Ὁρθὴν αὐτὴν ὑπερέχειν ἀποφαινόμεθα.

Ἐκ δὲ τῆς κατὰ τὴν ἐπίλυσιν τῇ Προβλήματος κατασκευῆς φανερόν γίνεταί, καὶ ὅπως ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας γδ Πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε, καὶ ἰσογώνιον ἐνὶ συζήσασθαι. Συνεζάσθω γὰρ ἐπ' αὐτῆς ὥς ἐπὶ Βάσεως (5) τὸ ἰσοσκελὲς γαδ, οὐπὲρ ἑκατέρω τῶν πρὸς τῇ Βάσει Γωνιῶν διπλασίῳ εἴη τῆς λοιπῆς, καὶ περὶ αὐτὸ συζαδὲν Κύκλος (6) γεγραφθῶ καὶ δίχα τετμήσθωσαν (7) αἱ πρὸς τῇ Βάσει Γωνίαι δι' Εὐθειῶν τῶν γε, δβ τῇ Περιφερείᾳ προσπιπτεσῶν κατὰ Σημεῖα τὰ ε καὶ β, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, βγ, γδ, δε, εα. Οὕτω καὶ γὰρ Πεντάγωνον συζήσεται ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας γδ, ὥς ἐκ τῆς ἀποδείξεως τῆς Προτάσεως δῆλον ἐστὶ. Ἀλλὰ καὶ δι' ἄλλης τούτου μεθόδου συνίστασθαι τὸ ἐφεξῆς διδάσκεται Πρόβλημα.

Σ χ ό λ ι ο ν Α'.

Ἐν γίνεαι μὲν οὖν τῶν κανονικῶν Σχημάτων τὰ μὲν περιττόπλευρα ἐγγράφεσθαι πέφυκεν εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον δι' ἰσοσκελῶν Τριγώνων, ὧν αἱ πρὸς τῇ Βάσει ἴσαι Γωνίαι, τῶν κατὰ κορυφὴν τυγχάνουσιν ἔσθαι πολλαπλα-

(1) KZ. τῷ γ'. (2) Ὁρ. γ'. καὶ α'. (3) Δ'. Πόρ. τῆς αὐτ. (4) Δύτ. (5) Σχολ. τῆς I. τῷ ε'. (6) E. τῷ ε'. (7) Θ. τῷ α'.

σίονες, τὰ δὲ ἀρτιόπλευρα δι' ἰσοσκελῶν Τριγώνων, ὧν αἱ πρὸς τῇ Βάσει ἴσαι Γωνίαι, τῶν κατὰ κορυφὴν εἰσι πολλαπλασίονες ἡμιόλαιοι. Οἷον ἐπὶ τῷ Ἰσοσκελῆς α γδ, εἰάν ἡ Γωνία γ, ἢ δ τριπλασίον ἢ τῆς α, ἢ γδ ἔσαι Πλευρὰ Ἑξαγώνου· εἰάν δὲ τετραπλασίον, Ἑνεαγώνου κξ. Εἰάν δὲ ἡ γ ἢ δ ἢ $1\frac{1}{2}$ τῆς α, ἔσαι ἡ γδ Πλευρὰ Τετραγώνου, καὶ εἰάν ἡ γ ἢ δ ἢ $2\frac{1}{2}$ τῆς α, ὑποτενῇ ἡ γδ ἐκτιμόριον τῆς ὅλης Περιφερείας· καὶ εἰάν ἡ γ, ἢ δ ἢ $3\frac{1}{2}$, ἔσαι ἡ γδ Πλευρὰ Ὀκταγώνου, κξ. Καθάπερ γὰρ ἐπὶ τῷ τῆς ἐν χειρὶ Προτάσεως Ἰσοσκελῆς, τῶν πρὸς τῇ Βάσει διχοτομημένων Γωνιῶν τὰ μέρη, συνάμα τῇ κατὰ κορυφὴν Γωνίᾳ βεβήκασιν ἐπὶ πέντε ἴσοις Τόξοις τῆς ὅλης Περιφερείας, διὸ καὶ τῷ τοιῷδε Τριγώνῳ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγραφομένῳ, ἡ Βάσις Πλευρὰ εἰς τὸ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγραφομένον τὸν αὐτὸν ἰσοπλευρῆτε καὶ ἰσογωνίῳ Πενταγώνῳ. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον, καὶ εἰάν ἡ ἑτέρα τῶν πρὸς τῇ Βάσει τῇ Ἰσοσκελῆς Γωνιῶν, τριπλασίον τύχη τῆς κατὰ κορυφὴν, τῶν πρὸς τῇ Βάσει τριχοτομημένων Γωνιῶν τὰ μέρη συνάμα τῇ κατὰ κορυφὴν Γωνίᾳ, ἐπὶ Τόξων ἑπτὰ βεβήσονται ἰσαριθμῶν τοῖς μέρεσι τῆς ὅλης Περιφερείας, διὸ καὶ τῷ τοιῷδε Τριγώνῳ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγραφομένῳ ἡ Βάσις Πλευρὰ ἔσαι τῷ κανονικῷ Τετραγώνῳ, ὅπερ ἂν εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγραφεῖν. Ὡς αὐτῶς δὲ δὴλον ἔσαι καὶ περὶ τῶν λοιπῶν. Ἐς ω καὶ γὰρ α ὁ ἀριθμὸς τῶν Πλευρῶν τοῦ κανονικῷ Σχήματος ὅπερ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγράφειν δεῖ, ἔσαι δὲ ἡ τῷ εἰς ἐγγραφὴν τότε ὑπεργυντός Ἰσοσκελῆς Γωνία πρὸς τῇ Βάσει, πρὸς γε τὴν κατὰ κορυφὴν Γωνίαν τῷ αὐτῷ, ὡς $\frac{a}{2}$ πρὸς 1· ὥς εἰάν Μονὰς ἀντὶ τῆς κατὰ κορυφὴν Γωνίας ὑποτεθῇ, τὰς πρὸς τῇ Βάσει Γωνίας τῷ Ἰσοσκελῆς, συνάμα τῇ κατὰ κορυφὴν διὰ τῶν δεδωμένων ἀριθμῶν, ἐπὶ τῇ ἐγγραφῇ ἐτινοσύν Σχήματος κανονικῷ ἐκθετέον. Αἰμέλειτοι ἐπὶ μὲν τῷ

$$\text{Ἰσοπλευρὸν Τριγώνον} \quad 1 + 1 + 1 = 3.$$

$$\text{Ἐπὶ δὲ τῷ Τετραγώνῳ} \quad 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + 1 = 4.$$

$$\text{Ἐπὶ δὲ τῷ Πενταγώνῳ} \quad 2 + 2 + 1 = 5.$$

$$\text{Ἐπὶ δὲ τῷ Ἑξαγώνῳ} \quad 2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 1 = 6.$$

$$\text{Ἐπὶ δὲ τῷ Ἑπταγώνῳ} \quad 3 + 3 + 1 = 7.$$

$$\text{Ἐπὶ δὲ τῷ Ὀκταγώνῳ} \quad 3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} + 1 = 8.$$

$$\text{Ἐπὶ δὲ τῷ Ἑνεαγώνῳ} \quad 4 + 4 + 1 = 9.$$

$$\text{Ἐπὶ δὲ τῷ Δεκαγώνῳ} \quad 4\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} + 1 = 10.$$

Καὶ ἐπὶ τῶν ἐξῆς δὲ ὡσαύτως, χωρητέον.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β'.

Εὐμήχανος μὲν ἢ κατ' Εὐκλείδην τῷ Πενταγώνῳ εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον ἐγγραφή, προχειροτέρα δὲ πολλῶ ἢ κατὰ Πτολεμαῖον ἐν πρώτῳ Βιβλ. τῷ Ἀλμαγέστῃ· ἐς δὲ τοιαύτη.

Ἦ' χθωσαν αἱ Διάμετροι εδ, βζ πρὸς ὀρθὰς τεμνόμεναι κατὰ τὸ α, ε
 δίχα (1) τετμήσθω ἢ ἀδ Ἡμιδιάμετρος κατὰ τὸ γ, ε Κέντρῳ μὲν τῷ γ, Δια-
 σήματι δὲ τῷ γβ Κύκλος γεγράφθω, τέμνων τὴν εδ Διάμετρον κατὰ τὸ η.
 Οὕτω ε γὰρ ἢ ἐπιζυγνυμένη Εὐθεΐα ηβ Πλευρά ἐς τὸ Πενταγώνῳ, ἢ δὲ
 αη τῷ Δεκαγώνῳ.

Ἀ' ἔνταῦθα τὴν δεῖξιν ἐπαγαγεῖν τῷ λεγομένῳ ἤχ οἶον τε, ἅτε δὴ
 ἐκ τῆς Γ'. τῇ κατ' Εὐκλείδην ΙΓ'. Βιβλίῳ ἐξηρητημένην, ἣν ὄρα παρὰ τῷ Κλα-
 βίῳ ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν Γ'. τῇ ΙΓ'. Βιβλίῳ.

Ἐπὶ γὰρ τῆς Γ'. ἐκείνης τῇ κατ' αὐτὸν ΙΓ'. ἀποδείκνυσιν ὁ Εὐκλείδης,
 ὅτι ἡ Πλευρὰ τῇ εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον ἐγγεγραμμένη ἰσοπλευρετε ε
 ἰσογωνίᾳ Πενταγώνῳ, ἴσα δύναται τῇ τε τῷ Ἐξαγώνῳ Πλευρᾷ, ε τῇ τῷ
 Δεκαγώνῳ τῶν εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγεγραφομένων. Ἀ' ὅτι δὴ τῷ Ἐξα-
 γώνῳ Πλευρὰ τῇ τῷ Κύκλῳ Ἡμιδιαμέτρῳ ἴση ἐστὶ, φανερόν ἐστι ἐκ τῇ Α' Πο-
 ρίσματος τῆς ΙΕ'. τῇ Δ'. Ὅτι δὲ ε ἢ τῇ εἰς τὸν αὐτὸν ἐγγεγραφομένῳ Κύκλον
 Δεκαγώνῳ Πλευρὰ, τὸ μείζον ἐστὶ τῶν Τμημάτων τῆς Ἡμιδιαμέτρου, τῆς κα-
 τὰ τὴν ΙΑ'. Πρότ. τῇ Β'. Βιβλίῳ τετμημένης, φανερόν ε τῷτο ἤδη ἐγένετο
 ἐν τῷ Γ'. Πορίσματι τῆς Γ'. τῇ παρόντος Δ'. Ἀ' ἅ ε ἐπὶ τῷ Τριγώνῳ αβη
 τῷ ὀρθογωνίᾳ κατὰ τὸ α, ὅτι μὲν ἢ αβ Πλευρὰ Ἡμιδιάμετρος ἐστὶ τῷ Κύκλῳ
 δῆλον· ὅτι δὲ ε ἢ αη Πλευρὰ, τὸ μείζον ἐστὶ Τμήμα τῆς Ἡμιδιαμέτρου αε,
 τῆς κατὰ τὴν ΙΑ'. τῇ Β'. τετμημένης, ἐπιγνοίῃ τις ἂν τὴν ἐπὶ τῆς ΙΑ'. τῇ Β'.
 κατασκευὴν, τῇ τῇ ἐν χερσὶ Σχολίῳ παραδεμένος. Ἀ' ῥα διὰ τὴν Γ'. τῇ ΙΓ'.
 ε τὴν ΜΖ'. τῇ Α'. ἢ βη ἐστὶ ἢ Πλευρὰ τῷ Πενταγώνῳ τῇ εἰς τὸν Κύκλον
 ἐγγεγραφομένη, ἢ δὲ τῆς Ι. τῇ ΙΓ'. ἀπόδειξις κατὰ τὸ τέλος τῇ ἔκτῃ Βιβ-
 λίῳ παρατεδίσταται.

Ἡ δὲ παράθεσις τῶν κατασκευῶν τῆς τε ΙΑ'. τῇ Β', ε τῆς κατὰ τὸν
 Πτολεμαῖον ἐπιλύσεως τῷ Προβλήματος, ὅτω γινέσθω· ἐπὶ μὲν ἐκείνης ἢ
 αβ (2) ἴση ὅσα τῇ αε, ε πρὸς ὀρθὰς δίχα ἐτέμνετο κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπε-
 ζεύγνυτο ἢ δε, ε προήγετο ἢ θα κατὰ τὸ κ, ὡς εἶναι τὴν θκ ἴσην τῇ δε,

(1) 1. τῇ α.

ἡ τῷ μέρει τῆς προαχθείσης τῷ $ακ$ ἴση ἀπετέμενετο ἀπὸ τῆς $αε$ ἢ $αη$, ἡ ἔτι τὸ ἀπὸ τῆς $αη$ Τετράγωνον ἴσον τῷ ὑπὸ $αεη$ Ὀρθογωνίῳ εἰδείκνυτο.

Ἐπὶ δὲ ταύτης παραπλησίως (4) $αβ = αε = αδ$. διχα δὲ τέμνεται ἡ $αδ$ κατὰ τὸ $γ$, ἡ ἐπεξεύχθη ἡ $γβ$, τὸ δὲ ταυτόν ἐστιν ὡς εἰ διχα τμηθεῖν ἡ $αβ$ κατὰ τὸ $δ$, ἡ ἐπιζευχθεῖν ἡ $εδ$. Ἐπεὶ δὲ ἡ $εδ = βγ$ (ἐν γὰρ τοῖς $αβγ$, $αδε$ Τριγώνοις $αγ = αδ$, ὅτι τῶν ἰσῶν ἡμίσειαι, καὶ $αβ = αε$, ὅτι τῶ αὐτῷ Κύκλῳ Ἡμιδιάμετροι, ἥτε ὑπὸ $γαβ = δαε$, ἄρα ἡ $βγ = δε$), ἐὰν ληφθῇ $δκ = δε$, ἡ $γβ = γη$, ἔσαι $γη = δκ$, ἀλλ' $αγ = αδ$, ἄρα $ακ = αη$. Καὶ ὡσαύτως ἄρα κἀνταῦθα, κατὰ τὴν τῆς $ΙΑ$. τῷ $Β$. κατασκευῇ, τὸ ἀπὸ τῆς $αη$ Τετράγωνον ἴσον τῷ ὑπὸ $αεη$ Ὀρθογωνίῳ.

Π ρ ό β λ η μ α.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας ($αβ$) Πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἡ ἰσογώνιον (ὁπέρ ἐστι κατὰ τὰς ὕψερων εἰπεῖν, τεταγμένον) ἔτι συζηήσει.

κ. 294.

Τῆς $αβ$ τμηθείσης (1) κατὰ τὸ $γ$, ὡς τὸ Ὀρθογώνιον ὑπὸ $αβγ$ ἴσον εἶναι τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ $αγ$, ἀπὸ τῆς $αβ$ ἐκατέρωθεν προαχθείσης, ληφθῆτωσαν $αδ$ ἡ $βε$ ἴσαι ἐκατέρα τῷ μείζονι τμήματι $αγ$, καὶ Κέντροις $α$ ἡ $δ$, Διαστήματι δὲ τῷ $αβ$, γραφήτωσαν Κύκλοι τέμνοντες ἀλλήλους κατὰ τὸ $ζ$. ἡ πάλιν Κέντροις $β$ ἡ $ε$, Διαστήματι τῷ αὐτῷ γραφήτωσαν ὁμοίως Κύκλοι ἀλλήλους τέμνοντες κατὰ τὸ $η$. καὶ τέως Κέντροις ταῖς $ζ$ ἡ $η$, ἡ τῷ αὐτῷ Διαστήματι $αβ$, Κύκλοι γραφήτωσαν ἀλλήλους τέμνοντες κατὰ τὸ $ι$. Τὰ γὰρ Σημεῖα $α$, $ζ$, $ι$, $η$, $β$, ἐπιζευγνύμενα δώπει τὸ τεταγμένον Πεντάγωνον (τετέστι τὸ ἰσόπλευρόν τε ἡ ἰσογώνιον) ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας $αβ$.

Καὶ ἐκ μὲν τῆς κατασκευῆς δῆλον ὅτι ἰσόπλευρον ἔστι καὶ ἰσογώνιον ὧδε δειχθήσεται. Ἀχθείσης τῆς $δζ$, τὸ $αδζ$ ἔσαι (2) ἰσοσκελές, ἐπεὶ τε ἡ τέτα Βάσις $αδ$, τὸ μείζον Τμήμα ἐστὶ τῆς $δζ$ Πλευρᾶς, τῆς κατ' ἄκροις ἡ μέσον λόγον (3) τμηθείσης (ἴση γὰρ ἡ $δζ$ τῇ $αβ$, ἡ ἡ $αδ$ τῇ $αγ$), ἡ ἄρα ὑπὸ $δαζ$ ἴση ἐστὶ δυσὶ πεμπτημορίοις (4) δυσὶν Ὀρθῶν. Ὡς ἡ λοιπὴ ὑπὸ $ζαβ$ ἴση ἔσαι (5) τρισὶ πεμπτημορίοις δυσὶν Ὀρθῶν, ὁπέρ ἐστιν ἕξ πεμπτημορίοις μιᾷς Ὀρθῆς, ταύτη δὲ τοι ἡ Γωνία ἐστὶν αὕτη (6) τῇ Πενταγώνῳ τῷ τεταγμένῳ. Ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται ὅτι ἡ ὑπὸ $ηβκ$, πεμπτημορίοις ἕξ μιᾷς Ὀρθῆς ἰσομένη, τῇ ὑπὸ $ζαβ$ ἴση ἐστὶ. Διὸ ἡ τὰς λοιπὰς ἐπάναγκαι

(1) $ΙΑ$. τῷ $β$. (2) $Εκ$ κατ. (3) Παράδειγμα τὴν $Α$. τῷ $ζ$. μετὰ τῆς $ΙΑ$. τῷ $β$. (4) $Α$. Πόρ. τῆς $Ι$. τῷ $δ$. (5) $ΙΓ$. τῷ $α$. (6) $Α$. Πόρ. τῆς $ΙΑ$. τῷ $δ$.

(λέγω τὰς ζ ἢ ι ἢ η) ἴσας ταύταις εἶναι, ὡς δῆλον ἐκ τῆς Η'. τῆ Α'. , τῆς ζι ὑποτείνεσθαι νομμένες.

Ἀχθεισὼν γὰρ τῶν ζι, ζβ, διὰ τὰ ἐπὶ ἴσων Βάσεων αδ ἢ βε ἴσα Τρίγωνα αζδ, εβη, παράλληλοι ἔσονται (1) αἱ Εὐθεῖαι ζη, δε· ἐνθεντοι αἱ ἐναλλαξ Γωνίαι ὑπὸ δαζ, αζη, ἢ ἐπὶ εβη, βηζ (2) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, ἢ τῶν ἐκάσθῃ δυοῖ πεμπτημορίοις δυεῖν Ὁρθῶν ἴση ἔσαι· ἐπεὶ δὲ ἐπὶ τῇ Ἰσοσκελεῖ αζβ, ἡ κατὰ κορυφὴν α τρισὶ πεμπτημορίοις δυεῖν Ὁρθῶν (3) ἴση ἔσιν, ἐκατέρω τῶν πρὸς τὴν Βάσιν ἐνὶ πεμπτημορίῳ ἴση ἔσαι. Διὸ ἢ τῆς βζ δίχα τεμνύσης τὴν ὑπὸ αζη, ἢ ὑπὸ ζβη (ἐπεὶ αβη — αβζ ἀπὸ τριῶν, πεμπτημόριον ἐν ἀφῆρηται) περιέξει πεμπτημόρια δύο, ἢ ἡ ὑπὸ ζηβ δύο, ἢ ἡ ὑπὸ βζη ἐν. Καὶ τοίνυν τῇ βζη Ἰσοσκελεῖ ὄντος (4), τὰ βαζ, ζη, ἰσόπλευρά τε ἀλλήλοις ἐσὶ, ἢ δὴ (5) ἢ Ἰσογώνια, ἥτε ὑπὸ ζιη περιέξει δυεῖν Ὁρθῶν τρία πεμπτημόρια, ἢ ὑπὸ ιζη ἐν, ἢ ὑπὸ ιηζ ἐν· ὥστε αἱ ὑπὸ ιζη, ηζα ἅμα ληφθεῖται, πεμπτημόρια συστήσασι τρία· ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται ὅτι ἢ ἡ ὑπὸ ιηβ τρία πεμπτημόρια περιέχασα ἐσὶ. Τὸ ἄρα Πεντάγωνον ἐστὶν ἰσογώνιον, ἢ σιγῇ ἕτως ἡμῖν ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας αβ Πεντάγωνον τεταγμένον. Ο. Ε. Π.

Καὶ ἄλλως δὲ ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας αβ Πεντάγωνον τεταγμένον συστήσεται, εἰ ἐπὶ τῆς αβ ὡς ἐπὶ Βάσεως, ἐξ ἀντιθέτου Ἰσοσκελεῖς Τρίγωνον συστή τὸ αβχ, ἢ ἡ πρὸς τὴν Βάσιν Γωνία ὑπὸ βαχ ἢ αβχ διπλασίον ἢ τῆς πρὸς τῇ κορυφῇ χ. Προαχθεισὼν γὰρ τῶν χα, χβ ἐπὶ ζ ἢ η , ὥς τε τὰς αζ, βη ἴσας εἶναι τῇ αβ ἐκατέρω, ἢ Κέντροις τοῖς ζ ἢ η , ἢ Διαιρέμασι τοῖς αζ, βη, Κύκλων γραφέντων κατὰ δισὰ Σημεῖα τεμνομένων, ὧν πρῶτον τῆς αβ τὸ ι , ἢ ἐπιζευχθεισῶν τῶν ζι ἢ η , φημί δὴ ὅτι συνέση κτ. Η' δὲ δεῖξις παραπλησία ἐστὶ τῇ ἀνωτέρω, ἀχθείσης γὰρ τῆς αη, ἢ τῶν Εὐθειῶν αβ, ζη Παράλληλα, τῇ τῶν Τριγώνων αβη, ζαβ (6) ἰσότητι ἀποδειχθήσεται (7).

κ. 295.

Π ρ ό τ α σ ι ς IB.

„Περὶ τὸν δοθέντα Κύκλον Πεντάγωνον περιγράψαι ἰσόπλευρόν τε ἢ ἰσογώνιον.

Εἰ γγραφῆτω δὲ Πεντάγωνον ὡς ἀνωτέρω ηδικμ ἰσόπλευρόν τε ἢ ἰσογώ-

κ. 296.

(1) M. τῇ α'. (2) KZ. τῇ α'. (3) AB. τῇ α'. (4) ε. τῇ α'. (5) H. τῇ α'. (6) A. τῇ α'. (7) M. τῇ α'.

νιον, ϵ ἀχθήτωσαν Ἀπτόμεναι κατὰ τὰ Σημεῖα η , θ , ι , κ , μ , συμπίπτειν κατὰ β , γ , δ , ϵ , ζ . Οὕτω γὰρ γενήσεται τὸ ζητούμενον.

Ἀχθήτωσαν ἀπὸ τῆς Κέντρος Εὐθείαι $\alpha\eta$, $\alpha\beta$, $\alpha\theta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\iota$, ϵ ἐπεὶ αἱ $\beta\eta$, $\beta\theta$ ἀπὸ τῆς αὐτῆς Σημεῖο β ἄπτονται τῷ Κύκλῳ, ἴσαι (1) ἔσονται· τῶν δὲ Τριγώνων $\eta\alpha\beta$, $\theta\alpha\beta$ ἁμοιβαδὸν Ἰσοπλευρῶν ὄντων, ἴσαι ἔσονται (2) αἱ Γωνίαι, ἡ μὲν ξ τῇ σ , ἡ δὲ π τῇ σ . Ἐνθεντοὶ ϵ ὅλη ἡ κατὰ τὸ β διπλασίον ἔσαι τῆς σ , ὅλη δὲ ἡ ὑπὸ $\theta\alpha\eta$ διπλασίον ἔσαι τῆς σ . Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον ϵ αἱ Γωνίαι, ἥτε κατὰ τὸ γ , ϵ ἡ ὑπὸ $\theta\alpha\iota$ διπλασίονες εἰσιν, ἡ μὲν τῆς τ , ἡ δὲ τῆς ν . Ἀλλ' αἱ ὑπὸ $\eta\alpha\theta$ ϵ $\theta\alpha\iota$ ἴσαι (3) εἰσὶ, βεβήκασιν γὰρ ἐπὶ ἴσαις Περιφερείαις ταῖς $\eta\theta$, $\theta\iota$ (4), ἃς οὖν ϵ τέτων αἱ ἡμίσειαι σ ϵ ν ἴσαι εἰσὶ. Ἐπεὶ τοίνυν ἐπὶ τῶν Τριγώνων $\beta\alpha\theta$, $\gamma\alpha\theta$, αἱ δύο Γωνίαι σ ϵ ν ἴσαι εἰσὶ, ϵ αἱ πρὸς τῷ θ δύο (5) Ὀρθαί, ἥτε $\alpha\theta$ Πλευρὰ κοινὴ, ἔσαι ϵ (6) $\beta\theta$ ἴση τῇ $\gamma\theta$, ἥτε κατὰ τὸ σ Γωνία ἴση τῇ κατὰ τὸ τ · ὡσαύτως ἂν ϵ αἱ $\beta\eta$, $\zeta\eta$ ἴσαι δειχθεῖεν, ὥστε αἱ $\gamma\beta$, $\zeta\beta$ διπλασίονες αὐταὶ τῶν ἴσων $\beta\eta$, $\beta\theta$, ἴσαι εἰσὶ. Οὐκ ἄλλως ϵ αἱ λοιπαὶ τῷ περιγεγραμμένῳ Πενταγώνῳ Πλευραὶ ἴσαι δεικνύμεναι, Ἰσόπλευρον αὐτὸ παραστήσουσιν· ἔσι δὲ τὸ αὐτὸ καὶ Ἰσογώνιον, ἐπεὶ γὰρ αἱ κατὰ τὰ β ϵ γ Γωνίαι διπλασίονες ἀπεδείχθησαν τῶν σ ϵ τ , ἑκατέρα ἑκατέρας, ἔσονται δὲ ϵ αὐταὶ ἴσαι, ϵ ὡσαύτως ϵ αἱ λοιπαί. Περιγέγραπται ἄρα περὶ τὸν δοθέντα Κύκλον τὸ τεταγμένον Πεντάγωνον. Ο. Ε. Π.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Τῇ αὐτῇ μεθόδῳ περὶ τὸν Κύκλον, ϵ ὁποιοιδηποτῶν ἄλλο Ἰσόπλευρόν τε καὶ Ἰσογώνιον Σχῆμα περιγραφῆσθαι, τῷ παραπλησίῳ πρῶτον τῷ Κύκλῳ ἐγγραφομένη, ταύτῃ εἰν ἀχθῶσιν Ἀπτόμεναι τῷ Κύκλῳ κατὰ τὰ Σημεῖα η , θ , ι , κ , ϵ . καθ' ἃ αἱ τῷ ἐγγεγραμμένῳ Γωνίαι τῇ Περιφερείᾳ προσπίπτουσι.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΓ. ϵ ΙΔ.

„Εἰς τὸ δοθέν Πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν Ἰσόπλευρόν τε ϵ Ἰσογώνιον, Κύκλον ἐγγράφαι, ϵ περὶ αὐτὸ περιγράφαι.

Αἱ δύο τῷ Πενταγώνῳ Γωνίαι β γ δίχα τετμήσθωσαν διὰ τῶν Εὐθειῶν $\beta\alpha$ ϵ $\gamma\alpha$ τῶν συνισσῶν κατὰ τὸ α , ἀπὸ δὲ τῆς α ἀχθήτω Κάθετος ἡ $\alpha\lambda$.

(1) Β. Πόρ. Ας. τῷ γ'. (2) Η. τῷ α'. (3) Κς. ϵ ΚΘ. τῷ γ'. (4) Ε' κατ. (5) ΙΗ. τῷ γ'. (6) Κς. τῷ α'.

Ο' τοίνυν Κέντρω τῷ α διὰ τῷ λ καταγραφόμενος Κύκλος, ἀπασῶν τῶν τῷ Πενταγώνου Πλευρῶν ἄψεται· ὁ δέ τοι Κέντρω τῷ α διὰ τῷ β καταγραφόμενος, διελύσεται ἔξω διὰ τῶν Σημείων γ, δ, ε, ζ.

Μέρος Α'. Α' πὸ τῶν Γωνιῶν τῶν κατὰ δ, ε, ζ, ἀχθήτωσαν ἡ αὐτὴ δα, εα, ζα· ἐν γὰρ τοῖς Τριγώνοις δγα, βγα, ἐν οἷς ἴσαι μὲν αἱ Πλευραὶ δγ, αγ (1) ταῖς βγ, γα, ἴσαι δὲ (2) αἱ Γωνίαι π ἡ ο, ἡ αὐτὴ ἡ ι (3) ἔσονται ἴσαι· εἰσὶ δὲ ἡ αὐτὴ ὅλαι Γωνίαι αἱ κατὰ β ἡ δ ἴσαι (4). Ταύτη τοι τῆς η (5) Γωνίας ἡμισείας ἄτης τῆς β, ἡ ἡ ι ἡμίσεια ἔσαι τῆς δ, ὥστε ἡ τὴν δ δίχα τετμημένην εἶναι διὰ τῆς δα. Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον, ἡ αὐτὴ λοιπαὶ τῷ Πενταγώνου Γωνίαι ε ἡ ζ, δίχα τετμημέναι εἰσὶ, διὸ ἡ αὐτὴ ἡμίγωνίαι ἀπασαὶ ἀλλήλαις ἴσαι εἰσὶν· ἡχθῶσαν δὲ ἡ αὐτὴ Κάθετοι αμ, ασ, αν, αρ, ἡ ἐπειδὴ ἐπὶ τῶν Τριγώνων λβα, μβα, αἱ Γωνίαι η ἡ ὑπὸ βλα, ἴσαι εἰσὶ ταῖς Γωνίαις ξ ἡ ὑπὸ βμα, ἡτε βα Πλευρὰ κοινὴ, ἔσονται δὲ (6) ἡ αὐτὴ αλ, αμ ἴσαι· ὥσαύτως δεῖξω ἡ ταῖς λοιπὰς αμ, ασ, αν, αρ ἀλλήλαις ἴσας εἶναι· Ο' ἄρα Κέντρω τῷ α διὰ τῷ λ γραφόμενος Κύκλος, ἡ διὰ τῶν μ, σ, ν, ρ διελύσεται· ἐπεὶ τε αὐτὸς πρὸς τῷ λ, ἡ μ, ἡ σ, ἡ ν, ἡ ρ Γωνίαι ὀρθαὶ εἰσιν, (7) ἄψεται δὲ ὁ Κύκλος (8) τῶν πέντε τῷ Πενταγώνου Πλευρῶν. Ο. Η. τὸ Α'.

Μέρος Β'. Ε' πὶ τῷ Τριγώνου γαβ, τῶν Γωνιῶν ο ἡ ι ἴσων δευτέρων, ἔσονται αἱ Πλευραὶ (9) αγ, αβ ἴσαι ἀλλήλαις, ὥσαύτως δὲ ἡ αὐτὴ αβ, αζ, κε, αδ· διὸ ἡ ὁ Κέντρω τῷ α διὰ τῷ β καταγραφόμενος Κύκλος, καὶ διὰ τῶν γ, δ, ε, ζ, διελύσεται. Περί τὸ τοίνυν Πεντάγωνον ὁ Κύκλος περιγέγραπται. Ο. Η. τὸ Β'.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Τῇ αὐτῇ δὲ μεθόδῳ, εἴς τε ἡ περὶ ὁποιοῦν Σχήμα ἰσόπλευρόν τε ἡ ἰσογώνιον, Κύκλος ἐγγραφήσεται ἡ περιγραφήσεται, δυσὶν ὁποιοῦν Γωνιῶν, αἱ αὐτὴ ἐγγὺς ἀλλήλων ὥσι, δίχα τεμνομένων, οἷον τῶν δγβ, γβζ, διὰ τῶν Εὐθειῶν γα, βα, ἡ ἀπὸ τῷ κατὰ τὴν σύμπτωσιν Σημεῖν α, ἐφ' ἡς ἐνοσθὲν τῶν Πλευρῶν βγ πρὸς ὀρθὰς ἀχθείσθης τῆς αλ· τῶν γὰρ Κύκλων, τῶν Κέντρω μὲν τῷ α, Διασχήμασι δὲ τοῖς αλ, αβ καταγραφόμενων, θάτερος μὲν εἰς τὸ Πολύγωνον ἐγγεγραμμένος ἔσαι, θάτερος δὲ περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένος.

(1) Ε' ὑποδ. (2) Ε' κατ. (3) Δ. τῷ α'. (4) Ε' ὑποδ. (5) Ε' κατ. (6) Κε. τῷ α'. (7) Ε' κατ. (8) Ιε. τῷ γ'. (9) Κε. τῷ α'.

Πορίσματα.

Α'. Κἀντεῦθεν ἂν Γωνίαι δύο προσεχεῖς αἱ β, γ τῷ τεταγμένῳ Σχήματος, διχοτομηθῶσι ταῖς βα, γα Εὐθείαις, ταῖς συμπιπτόσαις κατὰ τὸ α, ἀπὸ δὲ τῷ κατὰ τὴν σύμπτωσιν Σημεῖοι α, Εὐθεῖαι ἀχθῶσιν αἱ αδ, αε, αζ ἐπὶ τὰς λοιπὰς τῷ Σχήματος Γωνίαι, δίχα τμηθῆσονται αἱ πᾶσαι Γωνίαι, καὶ τὸ τεταγμένον Σχῆμα (1) διαιρεθήσεται εἰς τοσαῦτα Τρίγωνα ἰσοσκελῆ τε καὶ ἀλλήλοις ἴσα, ὅσαι αἱ τῷ Σχήματος Πλευραί. Ἀπὸ δὲ τῷ α, ἐπὶ τὰς τῷ Σχήματος Πλευρὰς πρὸς ὁρθὰς ἀχθεισῶν τῶν αλ, αμ, κτ., δίχα (2) τμηθῆσονται αἱ Πλευραί, αἵτε τέμνεσθαι ἐκείναι, ὡς Ἡμιδιάμετροι τῷ ἐγγραφομένῳ Κύκλῳ, καὶ ἀλλήλαις ἴσαι εἰσὶ.

Β'. Δοδείσῃς τοίνυν τῆς τῷ τεταγμένῳ Σχήματος Πλευρᾷ, καὶ τῆς τῷ εἰς αὐτὸ ἐγγραφομένῳ Κύκλῳ, ῥάδιον τὴν τῷ ἐμβαλῆ καταμέτρησθαι λαβεῖν, πολλαπλασιάζοντες τὴν μὲν Ἡμιδιάμετρον τῇ ἡμίσει τῆς Πλευρᾷ, τὸ δὲ ἐντεῦθεν παραγόμενον τῷ τῷ Σχήματος παρονουμασῇ. Οὕτω τοι τὸ τῷ Πενταγώνῳ βγδεζ ἐμβαδὸν, εἰσὶν αλ x λβ x ε.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΕ.

„Εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον Εἰσάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

κ. 298. Ἦχθω Διάμετρος ἡ Ζαβ, καὶ Κέντρῳ τῷ β διὰ τῷ α Κύκλος γεγράφθω, τέμνων τὸν δοθέντα κατὰ γ καὶ δ, καὶ πάλιν Κέντρῳ τῷ ζ, διὰ τῷ α γεγράφθω Κύκλος τέμνων τὸν δοθέντα κατὰ ε καὶ η, καὶ ἐπιζεύχθω τὰ Σημεῖα β, γ, ε, ζ, η, δ, αἱ γὰρ ἐπιζευχθεῖσαι Εὐθεῖαι δώσουσι τὸ ζητούμενον.

Ἀχθεισῶν γὰρ ἀπὸ τῷ Κέντρῳ α, αγ, αε, αη, αδ, φανερόν ἐστι τὰ Τρίγωνα θ, ι, μ, λ, ἰσόπλευρα (3) εἶναι· ἐπειδὴ δὲ τῶν Γωνιῶν ἑκατέρα ὑπὸ γαβ, εαζ, τριτημόριον (4) δεῖν Ὀρθῶν εἶναι, καὶ ἐπομένως τριτημόρια δύο ἄμφω, δηλον (5) ὅτι ἡ ὑπὸ εαγ τριτημόριον εἶναι καὶ αὕτῃ δεῖν Ὀρθῶν· Αἱ τοίνυν ὑπὸ εαγ, γαβ ἴσαι εἰσὶν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ Πλευραὶ εα, αγ ἴσαι ταῖς Πλευραῖς βα, αη, καὶ Βάσις ἄρα (6) εγ ἴση τῇ Βάσει γβ, τατέσι (ὡς ἐδείχθη) τῇ Ἡμιδιαμέτρῳ αη, ὥς τε καὶ τὸ ν ἰσόπλευρον εἶναι· Ὡς αὐτῶς δὲ

(1) Γ. Ὁρ. τῷ δ. καὶ Πρότ. ε. καὶ Κς. τῷ α'. (2) Α'ριθ. Α. τῷ Σχολ. μετὰ τὴν Ας. τῷ α'. (3) Α. τῷ α'. (4) ΙΒ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (5) ΙΓ. τῷ α'. (6) Α. τῷ α'.

δειχθήσεται Ἰσόπλευρον εἶναι καὶ τὸ κ· καὶ ἐπεὶ οὖν ἅπαντα τὰ Τρίγωνα θ, ι, κ, λ, μ, ν ἰσόπλευρά ἐστι, φανερόν ὅτι ἐκάστη τῶν ἐν αὐτοῖς Πλευρῶν γβ, βδ, δη, κζ, ζε, εγ, ἴση ἐστὶ τῇ Ἡμιδιαμέτρῳ τῆς Κύκλου αγ, ἥτοι αβ, καὶ δὴ καὶ ἀλλήλαις ἴσαι αἱ αὐταί. Τὸ ἄρα Ἐξάγωνον ἰσόπλευρον ἐστίν· ἐστὶ δὲ καὶ Ἰσογώνιον, ἐκάστη γὰρ τῶν ἐν αὐτῷ Γωνιῶν, ε, γ, β, δ, η, ζ, σύγκειται ἐκ δυεῖν Γωνιῶν τῶν τῇ Ἰσοπλευρῇ, εἰς ἅρα τὸν δοθέντα Κύκλον, Ἐξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐνεγραψάμεθα.

Π. ο ρ ί σ μ α τ α .

Α'. Ἡ τῇ εἰς τὸν Κύκλον περιγεγραμμένῃ Ἐξαγώνῃ Πλευρὰ (ἥτοι ἡ μοιρῶν 60 Ὑποτείνουσα) ἴση τῇ Ἡμιδιαμέτρῳ ἐστίν, ὥς τε τὸ 30 μοιρ. Ἡμίτονον, ἴσον ἐστὶ τῇς Ἡμιδιαμέτρου (1) τῇ ἡμισείᾳ.

Β'. Ἡ τῇ τεταγμένῃ Ἐξαγώνῃ Γωνία, τέτταρσι τριτημορίοις μιᾷς Ὀρθῆς ἴση ἐστίν, ἴση γὰρ ταῖς δυοῖ τῇ ἰσοπλευρῇ Τριγώνῃ Γωνίαις ἅμα, ὧν ἐκάστη (2) δυοῖ τριτημορίοις μιᾷς Ὀρθῆς ἴση ἐστίν· ὥς τε περιέχει Ὀρθήν τε καὶ τριτημόριον Ὀρθῆς, τατέσι μοιρ. $90 + 30 =$ μοιρ. 120.

Γ'. Καὶ ἐὰν ἄχθῃ Διάμετρος ἡ σσ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν ἑτέραν ζβ, καὶ Κέντροις μὲν τοῖς ο καὶ σ, Διαστήματι δὲ τῷ οα, τομαὶ γένοιντο κατὰ ξ καὶ π, καὶ κατὰ ρ καὶ τ, ἐπιζευχθῇ δὲ τὰ Σημεῖα ξ, ε, ο, γ, π, β, τ, δ, σ, η, ρ, ζ, συστήσεται Δωδεκάγωνον τεταγμένον, μιᾷ τῇ Διαβήτῃ διανοιγῇ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγραφόμενον, τῷ δ' ὅπερ ἐν τοῖς Γνωμονικοῖς πολλῆς ἐστὶ χρήσεως. Κἄντεῦθεν καταμανθάνομεν καὶ τὴν τεταρτημορικὴν Περιφέρειαν οζ, εἰς μέρη τρία ἀλλήλοις ἴσα οε, εξ, ξζ τριχομεῖν, καὶ ἐκ τῆς ἀκολουθεῖ συνεχεῖ (3) τῇ διχοτομίᾳ, εἰς μέρη ἴσα 6, 12, 24, 48, κτ. διαμερίζειν.

Δ'. Ἐκ δὲ τῶν δειχθέντων ῥᾶστα καὶ ἡ τῇ ἰσοπλευρῇ Τριγώνῃ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγραφῇ ἐπιφέρεται. Ἀχθείσῃ γὰρ τῇς Διαμέτρου βζ, Κέντρῳ τῷ β, διὰ τῆς α Κέντρου καταγραφῇ τῷ Τόξῳ τὸ γαδ· τῶν γὰρ Σημεῖων γ, ζ, δ ἐπιζευχθέντων Εὐθείαις, συστήσεται τὸ ζητούμενον Ὀρθογώνιον.

Ε'. Ἡ τῇ ἰσοπλευρῇ Τριγώνῃ Πλευρὰ γχδ, τῇς πρὸς ὀρθὰς ἐπ' αὐτὴν Διαμέτρου βζ τεταρτημόριον τὸ βχ ἀποτεμένει. Αἱ γὰρ ὑπὸ αγχ, βγχ ἐπὶ ἴσων Περιφερειῶν τῶν βδ, δη βεβηκείαι, ἴσαι (4) εἰσὶν· αἵ τε Πλευραὶ

(1) Α. Πόρ. τῆς Γ. τῇ γ'. καὶ Δ. Πόρ. τῆς Α. τῇ γ'. (2) Πόρ. ΙΒ. τῆς ΑΒ. τῇ δ'.
(3) Α. τῇ γ'. (4) ΚΘ. τῇ γ'.

αγ, γχ ἴσαι ταῖς Πλευραῖς βγ, γχ, ἄρα ἐ αὐ αχ, βχ (1) ἴσαι εἰσὴν· ἢ ἄρα βχ τεταρτημόριον ἐστὶ τῆς Διαμέτρου βζ.

Ἀλλως. Διὰ τὰς ὑπὸ αγχ, βγχ τὰς ὡς πρότερον ἴσας, ἐ τὰς πρὸς τῷ χ Ὀρθὰς (2) ἐ διὰ τῆς ἴσας, ἐ διὰ τὴν γχ κοινὴν, ἔσαι (3) αχ = βχ.

Π ρ ό β λ η μ α .

α. 301. Ἐξάγωνον τεταγμένον ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας βγ, ῥᾶκα συστήσεις, Τρίγωνον συστήσεις (4) ἰσοπλευρον ἐπ' αὐτῆς, ἐ Κέντρῳ μὲν τῷ α, Διαστήματι δὲ τῷ αβ Κύκλον γράψαι· ὅτος γὰρ τῷ ζητούμενῃ Ἐξαγώνῳ δεκτικὸς ἐστὶ. Δῆλον ἔκτε τῆς Προτάσεως, ἐ τῷ Α'. τῶν Πορισμάτων.

Θ ε ώ ρ η μ α .

„Τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς τῷ ἰσοπλεύρῳ Τριγώνῳ, τριπλάσιόν ἐστι τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς Ἡμιδιαμέτρου τῷ Κύκλῳ, εἰς ὃν ἐγγέγραπται τὸ Τρίγωνον· ἐνθεντοὶ ἐ πρὸς τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς Διαμέτρου, ἐστὶν ὡς 3 πρὸς 4. Ἐστὶ δὲ αὕτη ἡ ΙΒ'. Πρῶτ. τῷ ΙΓ'. Βιβλίῳ παρὰ τῷ Στοιχειωτῇ.

α. 302. Ἀχθήτω Ἡμιδιάμετρος ἡ αδ· τὸ γυν Τετράγωνον τὸ ἀπὸ ζδ, ἴσον ἐστὶ τοῖς Τετραγώνοις (5) τοῖς ἀπὸ ζα, δα, ἐ τῷ δις Ὀρθογ. ὑπὸ ζαχ. Ἀλλὰ τὸ δις Ὀρθογ. ζαχ, ἴσον ἐστὶ τῷ Τετραγ. τῷ ἀπὸ τῆς Ἡμιδιαμέτρου ζα, ἥτοι τῆς δα (ἐ γὰρ ἐπεὶ αχ ἐ χβ ἴσαι (6) εἰσὶ, τὸ Ὀρθογ. ζαχ δις ληφθέν, ἴσον ἐστὶ τοῖς δυσὶν Ὀρθογωνίοις, τῷ τε ὑπὸ ζα ἐ αχ, ἐ τῷ ὑπὸ ζα ἐ χβ, τῷ τε τῷ Ὀρθογωνίῳ ζαβ (7), ἥτοι τῷ Τετραγ. τῷ ἀπὸ ζα), ἄρα τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ ζδ τριπλάσιόν ἐστι τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς Ἡμιδιαμέτρου.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ὕλης Διαμέτρου ζβ Τετράγωνον, τετραπλάσιόν ἐστι (8) τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ ζα, φανερόν ἐστι τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ ζδ, πρὸς τὸ Τετραγ. τὸ ἀπὸ τῆς Διαμέτρου, ἐστὶν ὡς 3 πρὸς 4.

Π ό ρ ι σ μ α .

Κατεῦθεν ἐπεται, ὡς ἡ τῷ ἰσοπλεύρῳ Τριγώνῳ Πλευρᾷ, ἐστὶ πρὸς τὴν

(1) Δ. τῷ α'. (2) Ἐξ. ὑποθ. (3) Κς. τῷ α'. (4) Δ. τῷ α'. (5) ΙΒ. τῷ β'. (6) Ε. Πόρ. τῶν ἀνωτ. (7) Δ. τῷ β'. (8) Γ. Πόρ. Πρωτ. Δ. τῷ β'.

Διάμετρον, ὡς ἡ Τετραγωνικὴ ῥίζα τῆς τριαδικῆς πρὸς 2, ἥτις ἐστὶν ἡ ῥίζα ἢ τετραγώνειος τῆς τετραδικῆς ἀριθμοῦ. Ταῦτητοι καὶ Γραμμαὶ αὗται τῶν ἀσυμμέτρων τυγχάνουσι.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ις.

„Εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον, Πεντεκαίδεκαγώνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνον ἐγγράψαι.

Εἰς γὰρ ἐγγράψω δὴ (1) εἰς τὸν Κύκλον ἐναρμοθεῖται τῷ Πενταγώνῳ Πλευρὰ ἢ αὐτῇ, καὶ Πλευρὰ (2) ἢ αὐτῇ τῷ ἰσοπλευρῷ Τριγώνῳ, ἥτε γὰρ Περιφέρεια δίχα τμηθῆτω κατὰ τὸ ε, οὕτω γὰρ ἢ γὰρ Εὐθεία, ἥτις ἂν ἐπιζυγῇ, ἔσται ἢ τῷ Πεντεκαίδεκαγώνῳ Πλευρὰ.

Εἴαν γὰρ ὅλη ἢ Περιφέρεια ὑποτεθείη 15, ἔσται ἢ μὲν αὐτῇ Περιφέρεια, 3, ἢ δὲ αὐτῇ, 5, διὸ δὴ ἢ γὰρ, 2, καὶ ἐπομένως ἢ γὰρ, 1.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Α'. Διὰ τῆς ὑποτεθείσης μεθόδου, ὑπὲρ ἀριθμὸν ὅσα τεταγμένα Σχήματα εἰς τὸν Κύκλον ἐγγράφεται. Εἴαν γὰρ δυοῖν τεταγμένων αἱ Πλευραὶ αὐτῇ, αὐτῇ τῷ Κύκλῳ ἐναρμοθῶσιν, ἢ τῶν Περιφερειῶν διαφορὰ γὰρ τοσούτων ἔσται περιεκτικὴ Πλευρῶν τῇ καὶ τῷ τεταγμένῳ Σχήματι, ὅσαι μονάσι διαφέρουσιν ἀλλήλων οἱ τῶν προτέρων Παρονομασαί. Ὅτε Παρονομασίης τῇ καὶ λαμβάνεται σχήματος, τῶν Παρονομασιῶν τῶν προτέρων ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιαζομένων.

Οἷον εἴαν ἢ καὶ ὑπόθ. ἢ μὲν αὐτῇ Τετραγώνῳ Πλευρὰ, ἢ δὲ αὐτῇ Δεκαγώνῳ, ἢ τῶν Παρονομασιῶν διαφορὰ ἔσται 6· καὶ τοίνυν ἢ Περιφέρεια γὰρ εἰς Πλευρῶν τῇ καὶ Σχήματι ἔσται περιεκτικὴ, ἐκείνο δέ τοι Πλευρῶν εἰς 40, οἱ γὰρ Παρονομασαί 4 καὶ 10. ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιασθέντες παρέχουσι 40.

Β'. Κἀντεῦθεν διδασκόμεθα τὴν τεταρτημορικὴν Περιφέρειαν, εἰς μέρη ἴσα 15 διαμερίζειν (καὶ δὴ καὶ συνεχεῖ τῇ διχοτομίᾳ (1) εἰς 30, 60, 120, καὶ μέρη), τὴν Περιφέρειαν δηλονότι γὰρ πεντεκαίδεκατημόριον τῆς ὅλης εἶσαν, δι' ἐπανειλημμένης διχοτομίας εἰς μέρη τέτταρα ἀλλήλοις ἴσα διμερίζοντες. Καὶ Καθόλου ἐπὶ ἑνικοῦ τεταγμένῳ Σχήματι τῇ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένῳ, δοθείσης τῆς Πλευρᾶς βχ, τὴν τῇ Κύκλῳ τεταρτημορικὴν Περιφέρειαν, ἐπανειλημμένη διχοτομήσει τῆς Περιφερείας βχ, εἰς τοσαῦτα

(1) 1. α. τῇ δ. (2) Δ. Πόρ. τῆς ΙΕ. τῇ δ. (3) Δ. τῇ γ.

μέρη ἴσα, ὅσαι αἱ τῷ Σχήματος εἰσὶ Πλευραὶ διαιρεῖν ἐξέσαι, καὶ ἐπαναλήψαι τῆς διχοτομήσεως εἰς δις, τετράκις, ὀκτάκις κτ. τσαυτὰ ἴσα ἀλλήλοις, ὅσαι αἱ Πλευραὶ τῷ Σχήματος.

Γ'. Ἐπεὶ δὲ ἡ τεταρτημορικὴ Περιφέρεια εἰς μοίρας τετμημένη 90 ὑποτίθεται, καὶ ἐκάστη δὲ τῶν μοιρῶν εἰς ἐξηκοσημόρια Α'. 60, φανερόν ὡς τὸ τεταρτημόριον τῆς ὅλης Περιφερείας, ἐξηκοσημόρια $90 \times 60 = 5400$ περιέχον ἐστὶ· καὶ εἰς τοῖνον διὰ τῆ ἀνωτ. Πορίσμ. τὸ τεταρτημόριον εἰς 120 μέρη διαιρεθῇ, τῶν ἐκαστὸν ἐξηκοσημόρια πρῶτα $45 = 120^\circ$, ταῖς τρεῖς τρία τεταρτημόρια μοίρας μιᾶς περιέχον ἔσαι. Ἡ δὲ ὕψω βραχεῖα Περιφέρεια ἀνευ ἐπισήμης ἀπάτης εἰς μέρη ὁπισσῶν ἴσα, ὡς εἰ καὶ εὐθείαις (1) Γραμμὴ ἦν, δυνήσεται διαιρεῖσθαι. Διαιρεῖσθω τοῖνον εἰς τρία ἴσα, ὧν τὰ 15 ἐξηκοσημόρια Α'. ἦτοι τῆς μοίρας τὸ τεταρτημόριον δώσεται, τὸ δὲ ἡμισυ $15 + 15$, τὴν δ' ὅλην μοίραν $15 + 45$. Πάλιν διὰ τριχοτομίας τῇ Τόξῃ 15, Τόξον ἔχομεν 5, καὶ τῇ εἰς ἴσα πέντε τῷδε τομῇ Τόξον ἐξηκοσημόρια Α'. ἐνός, καὶ σαφὲς ἄρα ὁ τρόπος καθ' ὃν Κύκλος ἀποχερῶν τὸ Μέγεθος, εἰς ἐξηκοσημόρια δευτέρα ἂν διαιρεθῇ, καὶ ἐφεξῆς. Ἐὰν δὲ τὸ ρηθὲν Τόξον ἦτοι ἡ Περιφέρεια 45 καμπυλωτέρα ἢ, ἢ ὥστε δίκεν εὐθείας Γραμμῆς διαιρεῖσθαι ἔχειν, προαγαγόντες τὴν δίχα τομὴν, εἰς Τόξον ὅτι ἔγγιστα Εὐθείας γινόμενον τέως ἀφισόμεθα. Οὕτωτοι τὸ $22\frac{1}{2}$ τρία ὀκτημόρια περιέχει, καὶ $11\frac{1}{4}$ τρία δεκαθ' ὀκτημόρια μοίρας, καὶ ὕψω ἐφεξῆς· καὶ δῆλον ἄρα ὅπως ὁ Κύκλος εἰς τὰς μοίρας τὰς ἑαυτῶν, καὶ τὰς τῶν μοιρῶν ἡμισείας, καὶ τὰ τεταρτημόρια, καὶ τὰ ὀκτημόρια, καὶ, ἢ γυν, εἰ ὕψω θόξῃ, εἰς ἐξηκοσημόρια Α', Β', Γ', καὶ, μηχανικῶς γυν δύναται διαιρεῖσθαι.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν Α'.

Ἡ δὲ τῷ Κύκλῳ Περιφέρεια διαιρεῖσθαι γεωμετρικῶς ἔχει εἰς μέρη

4, 8, 16, καὶ, διὰ τῆς ζ'. Πρωτ. τῷ Δ', καὶ τῆς Θ'. τῷ Α'.

3, 6, 12, καὶ, διὰ τῆς ΙΕ'. τῷ Δ', καὶ Πορ. Δ'. καὶ Γ'.

5, 10, 20, καὶ, διὰ τῆς ΙΑ'. καὶ Πορ. Β'. καὶ Ε', καὶ Γ'. τῷ Δ'.

15, 30, 60, καὶ, διὰ τῆς Ις'. τῷ Δ', καὶ Πορ. Β'.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν Β'.

Οὕτω δὲ ἡ μέθοδος εὐρίσκεται, τῷ διὰ Κύκλῳ καὶ Εὐθείας ἐγγράφεσθαι

(1) Σχολ. τῆς Γ. τῷ ζ'.

τῷ Κύκλῳ τεταγμένα Σχήματα, κατ' ἀριθμὸς Πλευρῶν τὰς ἐξῆς 7, 9, 11, 13, 14, 17, κξ., τῆς τοιαύτης ἐγγραφῆς ἡρτημένης ἐκ τῆς διαιρέσεως τῆς Περιφερείας εἰς μέρη τινὰ, ἣν δὴ διαίρεσιν καταθύμιον ἔστω ἢ νῦν οἱ Γεωμετρῶντες ἔχουσι. Ἀλλ' ἐξέσται τῆς τῷ Κύκλῳ Περιφερείας εἰς μοῖρας 360 διαιρεθείσης, μηχανικῶς Σχήματα ἀποιαδηποτῶν τεταγμένα εἰς τὸν δοθέντα Κύκλον ἐγγράφειν ὅτω.

Π ρ ό β λ η μ α Α'.

Τὰς 360 μοῖρας (τετέσι τὴν ὅλην Περιφέρειαν) διέλεο διὰ τῷ Παρονομασῷ τῷ ἐγγραπτῷ Πολυγώνῳ (τῷ Ἐννεαγώνῳ φέρε), ἰσαρίθμων δὲ ταῖς τῷ Πηλίκῳ μονάσι (οἷον κατὰ τὰ τεθέντα ὡς 40) μοιρῶν Γωνίαν τὴν ὑπὸ αἷκ πρὸς τῷ Κέντρῳ λαβὼν, ἢ τὴν αἷκ ἐπιζεύξας, Πλευρὰν ἕξαις τῷ Ἐννεαγώνῳ τῷ ζηταμένῳ, ὅπερ αὖν εἰς τὸν Κύκλον ἐγγράφειν.

Π ρ ό β λ η μ α Β'.

Ἐπὶ δὲ τῆς δοθείσης Εὐθείας, Σχήμα τεταγμένον καταγράψαις διὰ τῷ ἐφεξῆς πίνακος.

Ἡ ὀρθὴ Γωνία πρὸς τὴν τῷ Σχήματος Γωνίαν ἐστὶν Διαφ.

Ἐπὶ μὲν τῷ Πενταγώνῳ	ὡς 5	πρὸς 6	1
Ἑξαγώνῳ	ὡς 3	πρὸς 4	1
Ἑπταγώνῳ	ὡς 7	πρὸς 10	3
Ὀκταγώνῳ	ὡς 2	πρὸς 3	1
Ἐννεαγώνῳ	ὡς 9	πρὸς 14	5
Δεκαγώνῳ	ὡς 5	πρὸς 8	3
Ἐνδεκαγώνῳ	ὡς 11	πρὸς 18	7
Δωδεκαγώνῳ	ὡς 3	πρὸς 7	2

Δεῖσαν τοίνυν ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐθείας χβ Ἑπταγώνον τεταγμένον καταγράψαι, Κέντρῳ μὲν τῷ χ, Διαστήματι δὲ τῷ χβ Κύκλος γεγράφθω, ἢ τὴν τεταρτημόριον ἀποτετμήθω τὸ βο, εὐρῶν δὲ ἐκ τῷ Πίνακος τὸν τῆς ὀρθῆς Γωνίας πρὸς τὴν τῷ Ἑπταγώνῳ λόγον, ὡς 7 πρὸς 10, ἢ τὴν διαφορὰν 3, μέρισον τὸ τεταρτημόριον εἰς Τόξα 7 ἴσα ἀλλήλοις, οἷς δὴ τοσαῦτα ἐφεξῆς πρόσθεις ἀπὸ τῷ ο κατὰ τὸ ν, ὅσαι μονάδες ἐν τῇ διαφορᾷ. Εἶτα διὰ τῶν τριῶν Σημείων β, χ, ξ (1) Κύκλον καταγράψον, ὅς τις τῷ ἐπὶ τῆς δοθείσης χβ Ἑπταγώνῳ ἐστὶ χωρητικός.

Οὐ δέ τοι Πίναξ διὰ τῆ Β'. Θεωρήματος τῆ ἐν τῷ Σχολ. τῷ μετὰ τὴν ΔΒ'. τῆ πρώτῃ Βιβλ. κατεσκευάσθη, δι' οὗ δὴ Θεωρ. εὐρίσκεται ὅσαι δὴ ποτε Γωνίαι ὀρθαῖς, ἀπασαι αἱ ἐφ' ὁποίων εὐθυγράμμω Σχήματι Γωνίαι ἅμα ληφθεῖται ἴσαι εἶναι. Οἱ γὰρ ἀριθμοὶ τῶν ὀρθῶν Γωνιῶν διαίρεθεις διὰ τῆ Παρονομαστῆς τῆ Σχήματος, τὸν λόγον παρονομάζει τὸν τῆς Γωνίας τῆ Σχήματος πρὸς τὴν Ὀρθήν.

Ἐπειδὴ δὲ περὶ τῶν τεταγμένων Σχημάτων πολλὰ εἰς τόδε παρετέθη, τὸ θρυλλόμενον τῷ Πρόκλῳ Θεώρημα πέρας τῷ Βιβλίῳ ἐπιτιθεῖσθω.

Θ ε ώ ρ η μ α.

Τῶν τεταγμένων Σχημάτων τρία μόνον, ταῖς 6 μὲν Τρίγων. ἰσοπλ., 4 δὲ Τετράγ., 3 δὲ Ἑξάγ. χωρίον πληρῆν δύνανται, μίαν δηλονότι Ἐπιφάνειαν συναχθῆναι συνισῶντα· δείκνυται δὲ ὧδε.

Εἰς τῆτο γὰρ ἀπαιτεῖται, τὸ κατ' ἐκείνο τὸ εἶδος Γωνίας ὁποσαυτῶν, συνίσσας εἰς ἓν Σημεῖον Ὀρθὰς τέτταρες συναποτελεῖν· τοσαῦται γὰρ περὶ τὸ αὐτὸ Σημεῖον Γωνίαι συνίστανται (1). Οἷον ἐκ Τριγώνων φέρεται εἰπεῖν ἰσοπλευρῶν τὸ χωρίον πληρεῖται, ὁποσωνῶν τῶν κατ' αὐτὰ Γωνιῶν, μ, λ, ν, κ, θ, ι περὶ τὸ αὐτὸ Σημεῖον α συναπτομένων, καὶ Ὀρθὰς τέτταρες συνισώσων. Ἀλλ' 6 τῆ ἰσοπλ. Τριγ. Γωνίαι Ὀρθὰς τέτταρες συναποτελεῖσιν (ἴση γὰρ ἐκάσῃ ἐστὶ δυοὶ τρίτημοριοις (2) Ὀρθῆς, αἵτε 6 τρίτημοριοις 12, ταῖς 6 Ὀρθ. 4), τέτταρες δὲ τῆ Τετραγ. ὡς δῆλον, καὶ 3 δὲ τῆ Ἑξαγώνου (ἴση γὰρ ἐκάσῃ 4 τρίτημοριοις (3) Ὀρθῆς, αἵτε 3 τρίτημοριοις 12, ταῖς 6 Ὀρθ. 4). Ἀρα κτ.

Ὅτι δὲ ἄλλο Σχῆμα τῆτο δύναται φανερόν ἔσθαι, εἴ τις τὴν κατ' αὐτὸ Γωνίαν εὐρεθεῖσαν ὡς ἀνωτέρω παντὶ ἀριθμῷ πολλαπλασιάσῃ, καὶ γὰρ τὸ γινόμενον τῆς τῶν Ὀρθῶν τετραδος ἦτοι ὑπερέχον ἔσθαι, ἢ ἐλλείπον.

(1) Γ. Πόρ. τῆς ΙΓ. τῆ α'. Ὅρα τὸ Σχ. τῆς ΙΒ. Περτ. (2) ΙΒ. Πόρ. τῆς ΔΒ. τῆ α'. (3) Β. Πόρ. τῆς ΙΒ. τῆ δ'.

Τῶν σοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

ΒΙΒΛΙΟΝ Ε΄.

Εἰς μὲν κατασκευὴν τῶν τῷ ζ'. Προτάσεων, τόδε τὸ Ε'. ἀναγκαιότατον κρίνεται, τὰ δ' ἐν αὐτῷ πραγματευόμενα εἰς χρῆσιν ἤκει πυκνότερα· ὁ δέ τοι τῇ ἐπιχειρεῖν τρόπος ἐκ τῆς Γεωμετρικῆς ἀναλογίας λαμβανόμενος, λεπτότατός τε τυγχάνει ὢν, καὶ ἀσφαλές τε καὶ συντομώτατος. Διὸ καὶ τῇ κατ' αὐτὸν τῷ συλλογίζεσθαι μετέδωκεν, οἷα Λογικῇ τινι μαθηματικῇ, ἥτε Γεωμετρίας, καὶ ἡ Ἀριθμητικῇ, καὶ Μουσικῇ, καὶ Ἀστρονομίᾳ, καὶ Στατικῇ, καὶ τὰ λοιπὰ τῶν Μαθημάτων εἴδη μάλιστα κέχρηται, ἐπεὶ καὶ ἀναλογίαις τισὶν ἀλλήλαις-συνημμέναις αἱ ἕξαι αὗται βεβήκασι, τῷ περὶ τὰ ἀνάλογον ἔχοντα συλλογίζεσθαι τὰς τρόπους παρὰ τῷ Πέμπτῳ τῷδε Βιβλίῳ αἱ πᾶσαι ἐρανίζονται. Ἡ μὲν οὖν πρακτικὴ ἀκέραια Γεωμετρία, ἡ περὶ τὴν τῶν Γραμμῶν, καὶ Σχημάτων, καὶ Σωμάτων καταμέτρησιν ἐνασχολούμενη, ἐκ τῆς τῶν Ἀναλογιῶν διδασκαλίας τὸ πλεῖστον μέρος ἐξήπται, αἷτε Ἀριθμητικαὶ μέθοδοι ἅπασαι κομιδῇ διὰ τῶν τῷ Πέμπτῳ τήτε Βιβλίῳ Προτάσεων, καὶ ἄνευ τῷ Ζ'. καὶ Η'. καὶ Θ'. τῶν κατὰ πρόθεσιν περὶ Ἀριθμῶν πραγματευομένων, δεικνύσθαι δύνανται. Τὴν δὲ Μουσικὴν τῶν Ἀρχαίων, τί ἄλλο ἢ Γεωμετρικὰς Ἀναλογίας ταῖς τῶν φωνῶν ὑψηλῆσι προσαρμοζομένας, ὁρθῶς κρίνειν ἐλόμενος ὀνομάσαι; Αὐτὸ δὲ τῷτο καὶ περὶ τῆς Στατικῆς τῆς περὶ τὰ τῶν Σωμάτων βάρη ἔχειν ἂν ἀποφύγεσθαι. Συνελόντι γὰρ φάναι, τὴν τῶν Ἀναλογιῶν διδασκαλίαν ἀπὸ τῶν Μαθηματικῶν ἀφελῶν, ὕδεν ὅ,τι καὶ λόγῳ ἄξιον καταλείψει.

Ὅσον οὖν τοῖς Γεωμετρικοῖς ἡ τῶν Ἀναλογιῶν συμβάλλεται ἐπισήμη, ὕδεις ἀγνοεῖ τῶν Μαθηματικῶν· ταύτην Εὐκλείδης ἐν ἑλῶ τῷ Ε'. καὶ ζ'. Βιβλ. ἐπραγματεύσατο. Ἀλλὰ γὰρ εἰ καὶ αὐτῷ τε καὶ τοῖς λοιποῖς τῶν σοιχείων δημιουργοῖς πλεῖστον ἐφείλεται ὑφ' ἡμῶν, ἐν οἷς μέντοι περὶ τῆς Ἀναλογίας εἰρήκασιν ἐνδεῖν τι ἔτι δοκεῖ. Τὸ δὲ πᾶν τῆς δυσχερείας περὶ τὸν Ε'. τῷ Ε'. Βιβλ. ὀρισμὸν εἰσφέρειται, ἐνθα ὁ Εὐκλείδης διδάσκει, τί ἐστὶ τὸ τέτ-

ταρα Μεγέθη εἶναι ἀνάλογον, εἴτ' ἢν λόγους δύο τῆς αὐτῆς, ἢ ὁμοίης, ἢ ἴσους τυγχάνειν. Καὶ δὴ λόγους δύο ἴσους, εἴτ' ἢν ὁμοίης εἶναι ἀπέδωκεν, ὅτε τὰ ἡγούμενα ἐν αὐτοῖς ὁτῶν ἀριθμῶ ἐπίσης πολλαπλασιαζόμενα, πρὸς τὰ ἐπόμενα ὁτῶν καὶ αὐτὰ ἀριθμῶ ἐπίσης πολλαπλασιασθέντα, αἰετοὶ ἢ ἴσα ἅμα μείζονα, ἢ ἅμα ἐλάττωνα ἐσὶ (1). Κἀκτὴτα ἔν τῷ Ὄρισμῷ, πᾶσας ἔπειτα τὰς τῷ Ε'. καὶ Σ'. τῶν Βιβλίων ἀποδείξεις ἤτοι ἐμμέσως, ἢ καὶ ἀμέσως ἐπιφέρει. Καὶ ἡ μὲν κατ' Εὐκλ. διδασκαλία αὕτη ἐστίν, ἥς δὲ δυσκολίας ἐστὶ περιέχοντα, ἐκ ὀλίγων εἰσὶ. Α'. καὶ γὰρ τὸτο βέβαιον ἐστὶ, τὸν ἐκτεθέντα Ὄρισμόν, τὴν μὲν τῶν ἴσων λόγων φύσιν ἔχει, τῶν δὲ πάθηματι μόνον διασφαλεῖν. Εἴτα ἐκεῖνο τὸ κατὰ τὰ πολλαπλάσια ἴδιον τίθεται πάντῳ, ἤτοι ὡς Σημεῖον ἀδιάπταισιν τῶν ἴσων λόγων, ὥστε ἐκεῖνα ἀποδειχθέντος ἤδη, περὶ ὧντινων λόγων ἐπιφέρειν ἐξεῖναι ἀσφαλῶς, ὅτι ἴσοι εἰσὶν, ἢ γὰρ ὁ νοῦς ἐκείνου τοιοῦτος ἐστὶ, τὰ τὰ λόγον τὸν αὐτὸν ἔχοντα Μεγέθη μηδὲν ἕτερον ὑπολαμβάνειν, ἢ τὸ τὰ αὐτῶν πολλαπλάσια κατὰ γε τὸν εἰρημένον τρόπον ὑπερέχειν ἢ ὑπερέχεσθαι. Εἰ μὲν οὖν τὸ Α', δεῖξει ὥφειλε τὸ πάθημα ἐκεῖνο πᾶσι καὶ μόνις τοῖς ἴσοις τῶν λόγων παρακολουθεῖν, ἢν ἐξ αὐτῆς ἢ τῶν λόγων ἰσότης ἀσφαλῶς εἶχεν ἐπισυνάγεσθαι· τὸτο δὲ ἐκ εὐκαταφρόνητόν τι Θεώρημα τυγχάνει γε οὐ, ἀλλ' οἷον ἔτ' Εὐκλείδης αὐτὸς, ἔτ' ἄλλος τις παρὰ τὸν Εὐκλείδην εἰς τόδε ἀπέδειξεν. Εἰ δὲ τὸ Β', ἐξομεν δὴ τὴν πληροφορίαν τῷ ἀληθεύειν τὰ Θεωρήματα κατὰ γε τὸν ἔν τῷ Ὄρισμῷ λαμβανόμενα, ἐμὴν δὲ τῇ τῶν ἀποδείξεων δυνάμει, καὶ ἀσφαλῆς ἡμῖν καὶ βεβαία ἐστὶ ἢ τῶν λόγων ἰσότης. Οἷον (εἰς γὰρ δεῖγμα κείτω ἢ Α'. τῷ Σ'.) ἐκ τῆς παρ' Εὐκλείδην ἀποδείξεως βεβαίως εἰσόμεθα, τὸν λόγον τὸν τῶν Τριγώνων αβγ, δεξ ἴσον εἶναι τῷ λόγῳ τῷ τῶν Βάσεων αγ, δζ, ἀντὶ τῆς τῶν λόγων ἰσότητος, ἐδὲν ὅτι μὴ τὸ τῶν πολλαπλασίων εἰρημένον ἴδιον ἐννοῶντες, ἐμὴν δὲ καὶ τῆς τῶν Τριγώνων λόγους ἐκείνας τοῖς λόγοις τῶν Βάσεων ἀληθῶς καὶ κυρίως συνεξισῶνται κατανοήσομεν, μήπω ἀποδειχθέν τὸ τοιόνδε τῶν πολλαπλασίων πάθος τῇ τῶν λόγων ἀληθείᾳ καὶ κυρίᾳ ἰσότητι ἐξ ἀνάγκης παρέπεσθαι. Ὅπως ἂν ἔν ὁ Ὄρισμός ἔτος ληφθῇ, αἱ τῷ Ε'. καὶ τῷ Σ'. Βιβλία ἀποδείξεις ἐκ ἀσταλεύτως πεπήγασιν, ἕως ὅστις ἀποδείξη τὴν ἀληθῆ καὶ κυρίαν τῶν λόγων ἰσότητα, τῷ τῶν πολλαπλασίων ἐκείνῳ πάθει αἰ ἀπαραιτήτως συνέπεσθαι. Ἀλλως δὲ, καὶ εἰ πάντα ὁρθῶς ἔχεν καὶ βεβαίως τὰ περὶ τῶν τεθῆ, ὅγος μὴν τῶν πολλαπλασίων λαβύρινθος οὗτος

(1) Ὁ Ὄρισμ. οὗτος ἀναπτύσσεται κατωτ. μετὰ τὸν Σ'. Ὄρισμ.

ἔ μοι ἔ πᾶσιν ἄει ἀπαρέσκων ὥφθη, τοῖς δὲ πρωτοπείροις ἔ πράγματα πολλὰ παρεχόμενος, ὧν ἔτω πολλάκις τὴν διάνοιαν συμποδίζει, ὡς μὴ ἐξαρχεῖν πρὸς τὴν ἔξοδον. Διατῆτο τοῖνυν τὴν μυελῷ δίκην, ἔ οἰοῦναι ψυχὴν τῆς Γεωμετρίας ἔ ἀπάσης τῆς Μαθητέως τελῶσαν τῶν Ἀναλογιῶν εἰσῆγησιν, τῷ ἔλλείμματος αὐτοὶ τῷδε ἀπαλλάξαι φροντίσαντες, ταῦτα τὰ τρία ποιῆται πειρασόμεθα.

Α'. Δείξω ὅτι τὰ τῷ Ε'. Βιβλίῳ Θεωρήματα, τὰ διὰ τῶν πολλαπλασίων παρ' Εὐκλείδου δεικνύμενα, ὅσα ἔ Α'ξιώματα ἐν τέτοις δύνασθαι, διασαφήσεώς τινος ἢ περ ἀποδείξεως χρῆζοντα. Οὕτω γὰρ ἐν ἡ τῶν Ἀναλογιῶν γνῶσις, ἢ ἡ τῶν πολλαπλασίων ἔκθεσις δυσχερὲς ἔ πολλῆς ἐχομένην ἀσφαλείας εἰς τόδε ἀπέφηνε, εὐχερὲς τε ἔ σαφὲς καταστήσεται.

Β'. Ἀποδείξομεν, ὅτι ὅσάκις τὰ τῶν ἡγυμένων ὁποιαδήποτε ἴσοπολλαπλασία τοῖς τῶν ἐπομένων ἴσοπολλαπλασίοις παρατιθέμενα, ἢτοι ὡσαύτως μείζονά ἐσιν, ἢ ὡσαύτως ἐλάσσονα, ἢ ὡσαύτως ἴσα, οἱ λόγοι ἀληθῶς τε ἔ κυρίως ἴσοι, εἴτ' ἢν ὅμοιοι εἰσὶ. Τῆτε γὰρ τεθέντος ἔ κατασκευασθέντος, ἀπασαι αἱ κατ' Εὐκλείδην ἀποδείξεις, ἔ ὅλη ἡ κατ' αὐτὸν περὶ τῶν Ἀναλογιῶν διδασκαλία τὸ ἐδραῖον ἔξει ἔ ἔμπαδον, ἢν εἴ τις ταῖς ἡμετέραις μὴ ἀρέσκειτο δείξει, πρὸς τὰς Εὐκλείδους καί τοι διεξοδικὰς ἢσας, ἀλλ' ἀσφαλεῖς ἢδη ἔ σπευδᾶς τρέποιτο. Διορισόμεθα δὲ ἔ δὴ ἔ ἀποδείξομεν, ἔ τῶν ἴσων λόγων ἄλλοτι γινώρισμα ἐναργέστατον ἔ πρῶτον, ἐξ ἡ ἀπάσαι τὰς τῷ Ε'. Βιβλίῳ Προτάσεις, ὁ βυλόμενος ἐπάγειν ἐνυήσεται.

Γ'. Καὶ περὶ Παρονομασιῶν τῶν λόγων, ἔ περὶ συνθέσεως πραγματεύσομαι, πραγματεῖαν τοῖς εἰς τὰ βαθυτέρα τῆς Γεωμετρίας χωρῆσαι ἐπιεμένοις ἀναγκαιοτάτην· ἐνθα καὶ τὸ Α'ξίωμα ἀποδείξομεν, ἢ μᾶλλον εἰπεῖν τὸ Θεώρημα, τὸ ἔχρι τῆτε ἀναποδείκτως ὑποτιθέμενον, ὅτι ὁ λόγος ὁ ἐκ τῶν ἄκρων ἐξ ὁποσωνῶν λόγων τῶν κατὰ τὸ μέτρον ἴσχει τὴν σύνθεσιν. Τοῖς γεμῆν πρωτοπείροις ἄλλος ἔξει, εἰ τὸς Ὅρισμὸς ἔ τῶν Μερῶν τὸ Α' μετέλθοιεν.

Τ' πόμνησις τοῖς τὴν Γεωμετρίαν διδασκόμενοις.

Ὅσον εἰς τὴν Γεωμετρικὴν μάθησιν ἡ τῶν Ἀναλογιῶν ἐπισῆμη συντελέσῃ ἐσιν, ἢδεῖς τῶν Μαθηματικῶν (ὁ καλῶς τῷ Τακτικῷ σσημειώται) ἀγνοεῖ, μυελὸς γάρ πως οὗτος τῶν Μαθηματικῶν ἐσιν ἐπισημῶν, ἔ οἱ παντοῖοι τῷ περὶ τὰ ἀνάλογα συλλογίζεσθαι τρόποι λυσιτελέσται εἰσιν ἄμα ἔ ἀσφαλέστατοι, ὡς τῶν ἄνευ ἢδε βραχυτί χωρῆσαι δυνατόν ὄν. Τὴν γε

μὴν Διδασκαλίαν ταύτην, ταῖς ἀνθρώπων ψυχαῖς τῷ κοινῷ λόγῳ σύμφυτον εἶναι ἡγῆμαι, καὶ τὰς ποικίλας τῆ περὶ τῶν Ἀναλογικῶν συλλογίζεσθαι τρόπους, οἷς δι' ὅλην τὴν ἐν χειρὶ Βιβλίῳ μετὰ πολλῶν δυσκολιῶν παραδιδωσιν ὁ Στοιχειωτής, καὶ τοσούτον ἀποδείξεως κυρίως, ἢ ἐκθέσεως οἷος τινος, καὶ τῆς ἐκ τῶν παραδειγμάτων διασαφήσεως δεῖσθαι ὑπολαμβάνω· καί μοι, οἱ διὰ μακρᾶς Προτάσεων περιόδη τὴν εἰσηγήσιν ταύτην εὐχερῇ κατασχῆσαι πειρώμενοι, αὐτὸ τὸ καθ' αὐτὸ φανώτατον συσκιάζειν δοκῶσι, καὶ πολλῷ δυσχερέστερον ἀπεργάζεσθαι. Αὐτὸ δὲ τὸ Κεφάλαιον ἐν ὀλίγοις τῶ πρῶτον ὑποδείτω. Σαφές οὖν ἐστίν, ὡς Πηλικιότητες τέτταρες ἀναλογικαί, ὡς ἄρα ὁμοίως τε καὶ ἴσως τὰς πρὸς ἀλλήλας λόγους ἔχουσιν ἀκέραιον, ὅτε τέτων ἡ πρώτη τῇ τοσάκις τὴν δευτέραν περιεμένησιν, ὡσάκις ἡ τρίτη τὴν τετάρτην, ἢ ὅτε τοσάκις ἡ Α' περιέχεται ἐν τῇ Β', ὡσάκις ἡ Γ' ἐν τῇ Δ'. Οὕτως τοι $16 : 8 :: 4 : 2$, ἢ γὰρ $3 : 9 :: 4 : 12$ λόγοι ὅμοιοι εἰσιν, ἐπὶ γὰρ τὰς προτέραις παραδείγματός τὰ ἐπόμενα 8 καὶ 2, ἐν τοῖς ἡγημένοις αὐτῶν 16 καὶ 4, ἐκάτερον ἐν ἐκατέρῳ δις περιέχονται, καὶ ὁ λόγος ἐπ' ἀμφοῖν θεωρεῖται διπλάσιος. Καὶ τῷ Β' δὲ παραδείγματι οἱ λόγοι ὅμοιοι εἰσιν, ἐπεὶ τὰ ἐπόμενα 9 καὶ 12, τρεῖς τὰ ἡγόμενα τὰ ἑαυτῶν ἐκάτερον περιέχει, ὅθεν καὶ ὁ λόγος ὑποτριπλασίονα ἐκατέρωστε λέγεται. Οὐδ' ἐστὶ τις τῶν συμμετρῶν Πηλικότητων λόγος, ὁ μὴ δι' ἀριθμῶν ὠρισμένων, ἢ δ' ἐστὶ τις τῶν ἀσυμμέτρων ἀλλήλοισι, ὁ μὴ δι' ἀριθμῶν τῷ ἀληθεῖ ἐς ἄπειρον ἐγγύς γινομένων ἐξαναχθῆναι δυνάμενος. Οἱ δέ τοι λόγοι δυεῖν Πηλικότητων, τῆς μὲν ἡγημένης, τῆς δ' ἐπομένης, τῷ διὰ τῆς τῆς ἡγμένης διὰ τὰ ἐπόμενα διαιρέσεως ἀνακύπτοντι Πηλικῷ ἐκφέρεται· οὕτως ὁ λόγος 16 πρὸς 8 ἴσα δύναται τῷ 2, ἢ τοι $2 = 2$, λόγος γὰρ διπλάσιος ἐστίν· ὅτε λόγος 3 πρὸς 9 ἐστὶ $\frac{1}{3}$ ἢ τοι $\frac{1}{3}$, τατέστιν ὑποτριπλασίονα· ὁ δὲ λόγος 8 πρὸς 3 ἐστὶ $\frac{8}{3}$ ἢ τοι $2\frac{2}{3}$, τατέστι διπλάσιος ἐπιδίτριτος, τὸ δὲ πηλικὸν ταῦτο τῶ λόγῳ Ἐκθέτης κατονομάζεται· Ἐκ μὲν ἔν τῶν εἰρημένων φανερόν ὅτι τὰς ὁμοίας λόγους ὁποιοῦσιν ὄντας, καὶ μόνον δι' ἀριθμῶν διαφερόντων, ἀλλὰ καὶ διὰ τῶν αὐτῶν ὁρδύτατα ἐκτιθέμεθα, τῷ ὄντι γὰρ τὸν διπλασίονα λόγον ἐπίσης καὶ τῷ 2 πρὸς 1, καὶ τῷ 16 πρὸς 8, καὶ τῷ 4 πρὸς 2 ἐπίσης σημαίνομεν· ὁμοίως δὲ καὶ τὸν ὑποτριπλασίονα, καὶ τῷ 1 πρὸς 3, καὶ τῷ 4 πρὸς 12, καὶ τῷ 3 πρὸς 9 παραπλησιότατα ὑποδηλῶμεν. Ἐὰν οὖν τέτταρες Πηλικιότητες ὡσιν ἀνάλογοι $A : B :: a : b$, ζητεῖται ἐν τῷδε τῷ Ε'. Βιβλίοις δὲ ποτε ὁμοίοις τρόποις, οἱ ὅμοιοι ἔτοι λόγοι ἀμείβεσθαι τε, καὶ δὴ καὶ συντίθεσθαι ἀλλήλοισι πεφύκασιν, ὥστε καὶ τὰς ἀνακύπτοντας ἐντεῦθεν λόγους ἐκατέρωθεν ὁμοίας τυγχάνειν; Ἀπαντητέον δὲ πάντως, ὅτι ἅπασιν τοῖς τῶν

ποις, ὅς ἄντις ἔχοι ἐπινοῆσαι. Ἐπειδὴ γὰρ ὁ, τε λόγος Α πρὸς Β, καὶ ὁ α πρὸς β ὁμοιοὶ ἀλλήλοις εἰσὶ, διὰ τῶν αὐτῶν ἑκάτερος ἀριθμῶν παραστῆναι δυνατόν ἐστι ὥδε, Α : Β :: 9 : 3, καὶ α : β :: 9 : 3. Ἐνθεντοὶ καὶ πάντες ἀπλῶς οἱ λόγοι, οἱ ἂν ἑκατέρωθεν, ἢ τῇ Ἐναλλάξ τῶν ὁρῶν μεταλήψει, ἢ τῇ Ἀνάπαλιν, ἢ Συνθέσει, ἢ Διαιρέσει, ἢ δι' Ἀντιστροφῆς, ἢ Μίξεως ἀνακύψαν, διὰ τῶν αὐτῶν ὁλως ἀριθμῶν ἐξενοχθεῖεν, καὶ ἐπομένως καὶ λόγον τὸν αὐτὸν ἑκατέρωθεν διασώσειαν. Οἷον δὴ πε Α + Β : Β :: α + β : β. τῷ γὰρ αὐτῷ λόγῳ παραστατικῇ ἢ 9 + 3 : 3, ἥτις ἐστὶν ἡ τῷ λόγῳ σύνθεσις. ὥσαύτως δὲ καὶ περὶ τῶν ἄλλων οἰητέον. Ἀλλὰ δὴ τῷτο μάλιστα τοῖς μαθητιῶσι παρατηρεῖσθαι, τὸ τὴς πάντῃ ὁμοίους λόγους εἶς μετῴσι, καὶ τρόπῳ πάντῃ παραπλησίῳ ἀμειβεῖν τε καὶ διατάσσειν, ὥς ἔστω ἐκ τῆς παραπλησίας ἀμοιβῆς τε καὶ διατάξεως ὁμοιοτάτων πανταχῇ καὶ τῶν λόγων ἀναφυητομένων, καὶ θαυμάζειν ἔπεισιν, ὅτι μηδένα τῶν τὰ Γεωμετρικὰ χοιχεῖα ἄχρι τῆς ἐκδεδωκότων, ἐν τῷ τόδε τὸ Ε'. Βιβλίον ὑποτιθέναι, τὸ ῥᾶλλον τῷτο καὶ προχειρότατον τῶν ἴσων λόγων τεκμήριον, εἰς ἀνάπτυξίν τε καὶ διατάφησιν τῆς τῶν Ἀναλογιῶν διδασκαλίας προχειρισάμενος φαίνεται. Ἀλλ' αὐτοὶ τῷ περὶ τῶν ὁμοίων λόγων ἐπιχειρεῖν, τὴς κυριωτέρας τῶν τρόπων, οἷς ἡ Γεωμετρία κέχρηται, ἐπὶ τῷ βραχείῳ τῷδε Πίνακι ὑποθῶμεν· καὶ δὴ ἔστω

$$Α : Β :: α : β :: 9 : 3.$$

Καὶ ἐναλλάξ Α : α :: Β : β :: 9 : 9 :: 3 : 3.

Ἀνάπαλιν Β : Α :: β : α :: 3 : 9.

Ἐν Συνθ. Α + Β : Β :: α + β : β :: 9 + 3 = 12 : 3.

Ἐν Διαιρ. Α - Β : Β :: α - β : β :: 9 - 3 = 6 : 3.

Ἐν Ἀντισρ. Α : Α + Β :: α : α + β :: 9 : 9 + 3 = 12.

$$Α : Α - Β :: α : α - β :: 9 : 9 - 3 = 6.$$

Ἐν Μίξει Α + Β : Α - Β :: α + β : α - β :: 9 + 3 : 9 - 3 :: 12 : 6.

Ὅθεν δὴ καὶ εἰ Α : Β :: α : β, καὶ Β : Γ :: β : γ, ἔσται Α : Γ :: α : γ.

$$9 : 3 :: 9 : 3, \text{ καὶ } 3 : 1 :: 3 : 1, \text{ ἔσται } 9 : 1 :: 9 : 1.$$

Ἐνθα ὁ λόγος τῷ Α : Γ (τετέστιν 9 : 1) συγκρίσθαι λέγεται ἐκ τῶν λόγων τῷ Α : Β, καὶ τῷ Β : Γ (τετέστιν 9 : 3 καὶ 3 : 1).

Δι' ἴσου τεταγμένως Α : Β :: α : β. 8 : 3 :: 16 : 6.

Καὶ Β : Γ :: β : α. 3 : 2 :: 24 : 16.

Ἐσται γὰρ Α : Γ :: β : β. 8 : 2 :: 24 : 6.

Ἐνθα ὥσπερ ὁ λόγος Α : Γ (8 : 2) σύγκειται ἐκ τῶν λόγων Α : Β, καὶ Β : Γ (τετέστιν 8 : 3 καὶ 3 : 2) ἐπ' εὐθείας κειμένων, ἔστω ὁ λόγος τῷ δ πρὸς

β (24 : 6). σύγκειται ἐκ τῶν λόγων δ : α, καὶ α : β (τετέστιν 24 : 16 καὶ 16 : 6), ἀλλὰ μετατεθέντων.

Ἀλλὰ γὰρ περὶ τῆς τῶν λόγων συνθέσεως εὐρήσεις πλείονα ἐν Ὁρ. Ε'. τῷ ζ'. Βιβλίῳ.

Τελευταῖον εἰάν ᾤ A : B :: Γ : Δ :: 9 : 8

α : β :: γ : δ :: 3 : 4

Ἐς αὐτὴν καὶ A × α : B × β :: Γ × γ : Δ × δ :: 9 × 3 : 8 × 4 :: 27 : 32.

Καὶ $\frac{A}{\alpha} : \frac{B}{\beta} :: \frac{\Gamma}{\gamma} : \frac{\Delta}{\delta} :: \frac{9}{3} : \frac{8}{4} :: 3 : 2.$

Ὁ τῆς τοίνυν τῶν τρόπων τῶν περὶ τὰ ἀνάλογον ὄντα ἐπιχειρεῖν ἀκριβῶς εἰδὼς, καὶ τέτοις χρῆσθαι κατὰ τὸ δέον ἐπιστάμενος, τῶν τῷ Ε'. Βιβλίῳ ἐν μέρει Προτάσεων (εἰ μὴ τις τὰς Ἀξιωματικὰς οὕτως καὶ ἐναργεστάτας ἐξέλῃ) σπανιώτατα δεηθῆσεται. Ὅθεν δὴ καὶ εἰ παρ' ἐμοὶ ἦν, ὅλην ἀνωθεν τῆς τῶν Ἀναλογιῶν διδασκαλίαν, καὶ χωρὶς τῆς παρ' Εὐκλείδῃ μεθόδου αὐτοῖς ὑποδείην ἂν. Ἐπεὶ δὲ τῷ Τακυστίῳ τῷ τῆς Εὐκλείδειος τάξεως ἄλλως ἀκριβεῖ ἐν ἅπασιν ἀκολουθεῖ, ἅπασαν κἀνταῦθα τὴν τῷ Στοιχειωτῷ εἰσήγησιν ἀνελλιπῆ, καὶ ὡς ἔχει παρ' ἐκείνῳ τάξεως ἔδοξεν ὑποδέσθαι, καὶ αὐτοὶ τὴν ἰδίαν πρόθεσιν ὑπερβησόμεθα.

Μ Ε Ρ Ο Σ Α'.

Τὰ τῶν Ἀναλογιῶν χοιχεῖα Μεθόδῳ εὐχερες ἐρεῖα ἐκτίθεται.

Ὁ ρ ι σ μ ο ς.

Α'. Μέρος ἐστὶ Μείγματος Μεγέθους, τὸ ἔλαττον τῷ μείζονος ὅταν (ποσάκις δηλ. ἐπαναληφθὲν) καταμετρήῃ τὸ μείζον· μέρος δὲ ὅταν ἢ καταμετρήῃ.

Ὅσον μῆκος ποδιαῖον μέτρον ἐστὶ μήκους τῷ δεκαποδιαίῳ, εἰάν γὰρ δεκάκις ἐπαναληφθῇ, καταμετρήσῃ αὐτό· μῆκος δὲ τὸ τετραποδιαῖον οὐ μέρος, μέρος δὲ τῷ δεκαποδιαίῳ ἐστίν, ἐπαναληφθὲν γὰρ ἢ καταμετρεῖ, ἀλλὰ δις μὲν ἐλλείπει, τρίς δὲ ὑπερέχει. Τὰ δὲ τοιαῦτα μέρη ἢτοι συμμετρῶς ἔχει πρὸς τὸ ὅλον ὡς ἐπὶ τῷ τεθέντος, ἢ γὰρ καὶ ἀσυμμετρῶς, ὡς ἐάν τις τὴν Πλευρὰν τῷ Τετραγώνῳ παραβάλλῃ πρὸς τὴν αὐτῇ Διαγώνιον. Ὅρα τὸ Σχολ. τῆς ΜΖ'. τῷ Α'. Βιβλίῳ.

Μεγέθος Μεγέθους πολλαπλάσιόν ἐστι, τὸ μείζον τῷ ἐλάσσονος ὅταν **κ'**. καταμετρηῇται ὑπὸ τῷ ἐλάσσονος, ταυτέστιν ὅταν τὸ ἐλάττον μέρος τῷ μείζονος ἢ, εἴτ' ἐν ὁ ταυτόν ἐστιν, ὅταν τὸ μείζον περιεκτικὸν ἐπ' ἀκριβὲς ἢ τῷ ἐλάττονος πλεονάκις ἐπαναληφθέντος.

Λόγος ἐστὶ δύο Μεγεθῶν ὁμογενῶν, ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα **Γ'**. ποια χέσις.

Ἐπὶ παντὸς δὲ λόγου ὅροι δύο εἰσὶν, ὧν ὁ μὲν πρωτοταγῆς ἡγούμενον τῷ λόγῳ καλεῖται, ταυτέστιν ὁ δι' Ὁρῆς ἐκφερόμενος, ὁ δὲ ἐξῆς ἑπόμενον.

Τῷ ἡγούμενῳ τε καὶ ἐπομένῳ συνισαμένων, ὁ λόγος τῆς ἰσότητος εἶναι λέγεται, ἀνίσων δὲ ὄντων, Ἀνισότητος, καὶ μείζονος μὲν ἀνισότητος, εἰ τὸ ἡγούμενον μείζον ἢ, ἐλάσσονος δὲ, ἢν ἐλάττον.

Λόγος λογικός ἐστιν, ὁ ἐν τοῖς συμμετροῖς τῶν Μεγεθῶν θεωρούμενος, **Δ'**. καὶ ἀριθμοῖς ἐκφέρεσθαι δυνάμενος, ἄλογος δὲ, ὁ ἐν τοῖς ἀσυμμετροῖς τῶν Μεγεθῶν θεωρούμενος, καὶ δι' ἀριθμῶν ἀνέκφρατος.

Οἷον ὁ λόγος 2 πρὸς 1 λογικός ἐστιν, ὁ δὲ $\sqrt{2}$: 1 ἄλογος, καὶ γὰρ $\sqrt{2}$ ἔδεικνυται ἀν' ἀριθμῶν ἐκφραστῆς.

Καὶ σύμμετρα μὲν Μεγέθη ἐσὶν, ἅττα κοινόντι παραληφθὲν μέτρον καταμετρεῖ, ἀσύμμετρα δὲ, ἅττα κοινὸν ἔχει μέτρον καταμετρεῖ.

Λόγοι δύο $A : B$ καὶ $\Gamma : \Delta$ ὁμοιοί, ἴσοι, οἱ αὐτοὶ εἰσιν, ὅταν τὸ θάτερον **Ε'**. ἡγούμενον A , ἐπίσης τε καὶ ὡσαύτως (ταυτέστιν ἔχει μᾶλλον, ἔδει γὰρ ἦττον) περιέχῃ τὸ ἐπόμενον B τὸ ἑαυτῷ, ὥσπερ τὸ θάτερον ἡγούμενον Γ περιέχῃ τὸ ἐπόμενον Δ τὸ ἑαυτῷ.

Ἢ ὅταν τὸ θάτερον ἡγούμενον A ὡσαύτως περιέχῃται ἐν τῷ ἰδίῳ ἐπομένῳ B , ὥσπερ τὸ θάτερον ἡγούμενον Γ ἐν τῷ ἰδίῳ ἐπομένῳ Δ .

Τὰ δὲ Μεγέθη τὰ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, καλεῖται Ἀνάλογον.

Λόγοι δύο ἀνόμοιοι εἰσι, ταυτέστιν λόγος λόγῳ μείζων ἐστίν, ὅταν τὸ θάτερον **ς'**. ἡγούμενον E , μᾶλλον περιέχῃ τὸ ἰδίον ἐπόμενον Z , ἢ τὸ θάτερον ἡγούμενον H , τὸ ἰδίον ἐπόμενον Θ . ἢ ὅταν τὸ θάτερον ἡγούμενον, ἦττον περιέχῃται ἐν τῷ ἰδίῳ ἐπομένῳ, ἢ τὸ θάτερον ἡγούμενον ἐν τῷ ἰδίῳ.

Ἢ τῶν λόγων ἰσότης τε καὶ ἀνισότης ἀναπτύσσεται.

Τι δὲ βέλεται τὸ θάτερον τῶν ἡγούμενων ἦτοι ἐπίσης, ἢ μᾶλλον περιέχειν τὸ ἰδίον ἐπόμενον, ἢ θάτερον τὸ ἑαυτῷ, εἰάν οἱ λόγοι λογικοὶ ᾤσι, ὁριζῆσθαι τε καὶ ἀναπτυχθῆναι περαιτέρω καὶ διὰ τῶν ἀριθμῶν δυνατόν. Οἷον εἰάν τὸ A τριπλάσιον ἢ τῷ B , τότε Γ τριπλάσιον τῷ Δ , δῆλον ὅπως τὸ

- Α ἐπίσης τε ἔκ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, περιεκτικὸν ὂν τυγχάνει τῷ Β, καὶ ὂν ἔκ τὸ Γ τῷ Δ· καὶ εἰάν τὸ Ε τριπλάσιον ἢ τῷ Ζ, τὸ δὲ Η διπλάσιον τῷ Θ, φανερόν αὖθις ὅπως τὸ Ε, μᾶλλον περιέχει τὸ Ζ, ἢ τὸ Η, τὸ Θ. Ἐὰν δὲ οἱ λόγοι τῶν ἀλόγων τύχωσι, τὸ πρᾶγμα περαιτέρω ἀναπτύξεώς ἐστι ἀνένδεκτον. Ἐς αὖ Μεγέθυ ἀσύμμετρα τὰ Α ἔκ Β, σαφές δὲ ὅτι τὸ Α ἔκ μόνον μείζον τῷ Β ἐστίν, ἀλλὰ ἔκ ὅπως ἂν μείζον ἐστίν (ἄλλως γὰρ τὸ Α περιεκτικὸν τυγχάνει τῷ Β, ἢ Μεγέθους ἄλλο τὸ τυχόν, ὃ μείζον ἂν εἴη αὐτῷ τῷ Α, ἢ ἔλαττον), οὐδέ γε δεῖ περαιτέρω ζητεῖν ἢ ἀναπτύξαι πειραῖσθαι, τίς δ' ὠρισμένος τρόπος, καὶ ὂν τὸ Α περιέχειν λέγεται τὸ Β, ἐστὶ γὰρ ὁ τρόπος δι' ἀριθμῶν πάντῃ ἀνέκφρατος ἔκ ἀδιερμήνευτος· ὥς τε καὶ περ' ὁμοίων δοθέντων Μεγεθῶν ἀσύμμετρων, ζητεῖν οὐ δεῖ τί τὸ ὅπως ἂν, εἴτ' οὖν ὠρισμένως θάτερον περιέχειν θάτερον, οὕτως τοι ἔκ Μεγεθῶν τεσσάρων, ἐν οἷς ἀνά δύο τὸ ἀσύμμετρον ἐστὶ, δοθέντων, ζητεῖν ἔκ δεῖ τί τὸ ἐπίσης τε ἔκ ὡσαύτως τὸ Γ φέρε, περιεκτικὸν εἶναι τῷ Δ, ὥσπερ τὸ Α περιεκτικὸν τυγχάνει τῷ Β· τῷ γάρ τοι τρόπῳ καὶ ὂν τὸ Α περιεκτικὸν ἐστὶ τῷ Β ἀδιερμήνευτος ἔχοντος, ἔκ ἢ ταυτοῦς πάντως τῷ τρόπῳ ὅτῳ τὸ Α περιέχει τὸ Β, τῷ ὅτῳ τὸ Γ περιέχει τὸ Δ, ὡσαύτως ἀδιερμήνευτος ἐστὶ.

Ἡ δὲ τῶν τρόπων ταυτοῦς ἐκ τῷ κατ' Εὐκλείδην Ὁρισμῷ τῶν ἴσων λόγων, περὶ οὗ κατωτέρω, ἢ ἐκ τῇ κατά γε τὸν Τακνέτιον γνωρίσματος τῶν αὐτῶν, περὶ οὗ ἐφεξῆς, ὅσον τῇ φύσει τῷ πράγματι ἐγγχωρεῖ, ἀποχωρῶντως ὅσκιον ἀναπτύσσεσθαι.

κ. 307.

Ὅτι δὲ ἀλόγη τινὸς λόγῳ, τῷ Α φέρε πρὸς τὸ Β δοθέντος, δυνατοὶ εἶσι ἔκ λόγοι ἄλλοι ἄπειροι, ἢ τοι ἴσοι, ἢ μείζονες, ἢ ἐλάσσονες, ἐν ὅροις ποικίλοις συνεσῶτες, συνιδεῖν ῥᾶδιον ἐντεῦθεν. Ληφθήτω Μεγέθος ὁποιοῦν τὸ Γ, ἔκ ἀφαιρεθήτω τὸ Β ἀπὸ τῷ ἀσύμμετρῳ αὐτῷ Α, ὅσας ἂν ἐξῇ, ὅσον τρεῖς, ἔκ λοιπὸν ἔσω τὸ ΕΖ· ἔσω δὲ Ο τριτημόριον τῷ Γ, κείσθω δὲ ἔκ τὸ τυχόν Χ πρὸς μὲν τὸ Γ ἀσύμμετρως ἔχον, τῷ δὲ Ο μείζον· ἐπεὶ δὲ τὸ Α περιέχει τὸ Β πλεονάκις ἢ τρεῖς, τὸ δὲ Γ περιέχει τὸ Χ ἡττονάκις ἢ τρεῖς (τρεῖς γὰρ ἐπ' ἀκριβὲς τὸ Γ περιεκτικὸν ἐτέθη τῷ Ο, οὐ μείζον ἐλήφθη τὸ Χ), ἔσαι ὁ ἄλογος λόγος τῷ Γ πρὸς τὸ Χ, ἐλάσσων τῷ ἀλόγῳ λόγῳ τῷ Α πρὸς τὸ Β. Ἡ δὲ κείσθω ἔκ τὸ Π τεταρτημόριον ὂν τῷ Γ, ἔκ ἔσω τὸ τυχόν Ψ, τῷ μὲν Γ ἀσύμμετρον, τῷ δὲ Π ἔλαττον· καὶ ἐπεὶ τὸ Α περιέχει τὸ Β ἡττονάκις ἢ τετράκις, τὸ δὲ Γ περιέχει τὸ Ψ πλεονάκις ἢ τετράκις (τὸ γὰρ Γ ἐπ' ἀκριβὲς τετράκις περιεκτικὸν ἐτέθη τῷ Π, οὐ περ' ἔλαττον ἐλήφθη τὸ Ψ), ἔσαι δὲ ὁ ἄλογος λόγος τῷ Γ πρὸς τὸ Ψ, μείζων τῷ ἀλόγῳ λόγῳ τῷ Α πρὸς τὸ Β.

Ἦδη δὲ ἐπεὶ τὸ Γ πρόστι τὸ Χ, ελάσσονα λόγον ἔχον ἐστὶν ἢ τὸ Α πρὸς τὸ Β· καὶ πάλιν ἐπειδὴ τὸ Γ πρόστι τὸ Ψ, μείζονα λόγον ἔχον ἐστὶν ἢ τὸ Α πρὸς τὸ Β, φανερόν ἐστι τὸ Γ πρόστι τὸ Δ, μέσον τινὰ λόγον ἢ πρὸς τὸ Χ καὶ τὸ Ψ ἔξει, ἴσον τῷ ὄνπερ ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Β. Ὅ δὴ περὶ ἐκ τῆς κατὰ φύσιν ἐναργείας κατὰδηλόν ἐστιν ἕδεν ἦττον, ἢ εἰ τις διανοεῖται ὥδε· δοτὸν μὲν τὸ μείζον τῷ Κ, δοτὸν δὲ τὸ ἐλάττω τῷ Κ, δοτὸν ἄρα καὶ τὸ ἴσον τῷ Κ.

**Τὶ τὸ ἐν τῷ κατ' Εὐκλείδην Ὁρισμῷ τῶν ἴσων λόγων
ἐλλείπον.**

Ὁ μὲν οὖν Εὐκλείδης, λόγους δύο Α πρὸς Β, καὶ Γ πρὸς Δ ἴσους εἶναι φησὶν, ὅταν τὰ τῶν ἡγημένων ἰσάκεις πολλαπλάσια Ε καὶ Ζ, τῶν τῶν ἐπομένων ἰσάκεις πολλαπλασίων Η, Θ, καὶ ὅποιον πολλαπλασιασμόν ἢ ἅμα ὑπερέχη, ἢ ἅμα ἐλείπη, ἢ ἅμα ἴσα ᾗ, ταῖς ἐν ὅταν τῷ Ε ὑπερέχοντος τὸ Η, καὶ τὸ Ζ ὑπερέχη τὸ Θ, καὶ ὅταν τῷ Ε ὑπερεχόμενα τῷ Η, καὶ τὸ Ζ ὑπερέχηται τῷ Θ, καὶ ὅταν τῷ Ε συνισκόμενα τῷ Η, καὶ τὸ Ζ συνισκόμενα ᾗ τῷ Θ. Εἶδα καλῶς σημειωτέον, ὡς ὁ Εὐκλείδης τὴν τῶν ἰσάκεις πολλαπλασίων ὑπεροχὴν τε καὶ ἐλλείψιν, ἐκ ἀναλογικῶς καὶ κατ' ὁμοιότητα ἐξεδέξατο, ὅτω γὰρ ἀλόγως τὸ αὐτὸ διὰ τῶν αὐτῶν ἀναπτύξαι ἂν ἐπεχείρησεν, ἀλλὰ τὴν ὑπεροχὴν καὶ τὴν ἐλλείψιν ἀπλῶς. Ἀλλὰ καὶ ὅπως ἐμπης τὸν τῶν Γεωμετρῶν ὑπατεύοντα, κατὰ τι ἐλλείπειν ἀνωτέρω ἡμῖν σεσημειώται· ἵτοι γὰρ διὰ τούτων, τὸν τῶν ἴσων λόγων Ὁρισμὸν ἀποδῆναι σκοπῶν, τὸ τῷ ὀρίσῃ πάθος εἰς Ὁρισμὸν ἐξείληψε· δῆλον γὰρ ὅτι ἐκ τῆς τῶν λόγων ἰσότητος, ὡς ἐξ ἀρχῆς προβλεψάνει αὕτη ἢ τῶν πολλαπλασίων ἰδιότης· ἢ γὰρ ὡς γνώρισμα τοῦτο προβάλλεται ὅν τῶν ἴσων λόγων πρῶτόν τε καὶ ἀδιάπτεισον, καὶ ὅπως ἀποδείξαι ὤφειλε, τοῖς ἴσοις λόγοις αὐτὸ ἀεὶ συνηκόμενον εἶναι, ὡς ἐκ τούτου ἐκεῖνης ἀεὶ ἐπιφέρεισθαι, ἥτις δὴ συνάφεισ ἀταφῆς τε ἐστὶ καὶ ἐκ εὐαπόδεικτος, ἢ τῶς ἀντὶ τῆς τῶν λόγων ἰσότητος ἕδεν ἕτερον· ἐννοεῖ, ὅτι μὴ τὴν ἅμα τῶν πολλαπλασίων ἐκείνων ὑπεροχὴν τε καὶ ἐλλείψιν· καὶ ὅπως ἐν ὅλῳ τῷ Ε'. καὶ ζ'. Βιβλ. ὅταν τέσσαρα Μεγέθη Ἀνάλογον εἶναι ἀποδεικνύη, ἕδεν ἕτερον εἰσόμεθα, ἢ τὴν εἰρημένην ὑπεροχὴν τε καὶ ἐλλείψιν αὐτοῖς προσήκειν, ἀγνοῖντες εἰ ὅλως ταῦτα τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος Μεγέθη Ἀνάλογον πῶν τι ἐστὶ.

Ἀλλ' ὁ Εὐκλείδης ἐν τῷ τῶν ἴσων λόγων Ὁρισμῷ, ἕδεν ἄλλο ἢ

τὸν υἱὸν καὶ ὃν τὰς φωνὰς ἐκείνας ἐξείληφει, ὡς εἶπες τοῖς ἀπὸ τῶν Μαθημάτων θεῖς,αι προδόμενος, συνορῶν ἡ ἐχὼ τὴ τοσούτον αἰγιατός ἐστὶ καὶ μάλας τῆς Ὀρίσμις ἀπασι τοῖς ἰσοῖς τῶν λόγων ἀληθινῶς προσήκουσας, εἶτε λογικοὶ εἴεν, εἴς οὐν καὶ ἀλογοί, ὡς ἐν τῷ Β'. μέγας τῆ ἐς χροσθὶ Βιβλίος καὶ αὐτὸς ὁ ἱκανέσιος ἀποδείκνυσται, ὃ καὶ τοῖς ἀκριβῶς τὸν υἱὸν τῷ Ὀρίσμῳ ἐπιδέχσασθαι αὐτόνδιν κατὰδὴλον ἐστὶν. ὅρα τὰς ἡμῖν σεσημασμένους ἐκταρῶντας ὁ ἱκανέσιος ἀλλ' ἐπείγες τῇ καὶ αὐτὸν μεσιόδῳ ἐπιδάσκας ἀκολούθῃσαι, ἰδόμεν τῶς ὁποιοιδή ποτε κασιόλως τεμένηον τῶν ἰσων λόγων ἡμῖν προβιβάσται.

ಉಪಗ್ರಹಗಳ ಕಾರ್ಯವು ಇದುವೇ ಅಂತ್ಯವಾಗುವುದು ಎಂದು ನಂಬಲಾಗಿದೆ.

Ἰσχυροῦμαι τοῖσιν ἀντοῖ σαφές τε καὶ ἀδιαμφαδον, καὶ πρῶτον τοῖσιν τοῖσιν ἡγουμένης καὶ θεῖσιν ἐν Θεῷ. Ε'. καὶ δ'. γ'. Β'. Μίγος (ἀλλὰ ἡ γὰρ θεῖσιν ἐγγυμένης ἐπαίδος εἶναι ἡμῶν δοκεῖ τῇ τὸ πᾶν ἰσχυρῶς ἡγουμένης, ὡς ἐκ τῶν ὀρίστων. Ε'. καὶ δ'. ἀμέσως ἐπαφροῦμεν, καὶ πᾶσι τοῖσιν τῇ ἐκείνῃς καὶ διασφύρας ὅν)· ἐξ ἧς τοῖσιν.

ΟΙ ΛΟΓΟΙ (ΟΙ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΜΕΙΖΥΝΑ ΑΝΠΟΤΗΤΑ) ΙΣΟΙ ΕΙΣΙΝ (ΟΙΟΝ Ο ΤΗΣ ΑΒ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΓΖ, Ή Ο ΤΗΣ ΗΜ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΝΠ), ΟΤΑΝ Ή ΑΥΤΑ ΤΑ ΕΠΟΛΕΜΑ, Ή ΤΕΤΩΝ ΑΠΛΑΝ ΟΠΟΙΟΥΝ ΜΕΓΕΘΟΣ ΟΙΟΙΟΥ, ΕΝ ΤΟΙΣ ΉΥΜΕΝΟΙΣ ΙΣΑΚΡΙΣΙΜΩΣ ΔΕΙΞΙ ΠΕΡΙΕΧΗΤΑΙ· ΕΙΝ· ΕΑΝ Τῆ ΔΙΑΚΤΗΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΓΖ ΔΙΑΚΟΤΙΧΙΣ ΕΝ Τῇ ΑΒ ΠΕΡΙΕΧΜΕΝΗ, Ή Τὸ ΔΙΑΚΤΗΜΟΡΙΟΝ ΤΗΣ ΝΠ ΔΙΑΚΟΤΙΧΙΣ ΕΝ Τῇ ΗΜ ΠΕΡΙΕΧΗΤΑΙ· ΚΑΙ ΕΑΝ Τῆ ΕΚΑΤΟΧΗΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΓΖ ΧΙΛΙΑΔΙΣ ΕΝ Τῇ ΑΒ ΠΕΡΙΕΧΜΕΝΗ, Ή Τὸ ΕΚΑΤΟΧΗΜΟΡΙΟΝ ΤΗΣ ΝΠ ΧΙΛΙΑΔΙΣ ΕΝ Τῇ ΗΜ ΠΕΡΙΕΧΗΤΑΙ, Ή ἴσως ΕΦΕΞΗ· ΕἴΤΙ ΑΠΕΡΟΝ, ἘΣΤΙ Ή ΑΒ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΓΖ, ὡς Ή ΗΜ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΝΠ· ΟὐΤΩΣ γὰρ τοι κατὰ τοῦ Ε'. Ο ὄρισμόν, τὸ τῆ προτέρου λόγος ἡγούμενον ΑΒ, ἐπείσθητε ἡ ἀσφαύτως (ταύτης ἐν μάλλον, ἢ ἥττον) περιέχεται τὸ ἴδιον ἐπόμενον ΓΖ, ὡς τὸ τῆ Β' ἡγούμενον ΗΜ περιέχεται τὸ ἴδιον ἐπόμενον ΝΠ.

Εὰν δὲ οἱ κατὰ τὴν ἐλάχιστον ἀνισότητη λόγοι ITZ πρὸς AB , καὶ
 NI πρὸς HM ἴσοι τεθώσι, τὰ ἡγόμενα αὐτὰ, εἰ τῶν ἡγμένων πᾶν ὁ-
 ποιοῦν μέρος ὁμοίον, ἐν τοῖς ἐπομένοις αὐτῶν ἰσχυρίσας ἀεὶ περιέχουσιν
 ἑκάτ' ἑαυτο γὰρ αὐτὶς ὁ E . τῶν ὀρίσθ. ἀπαραισῶ, τὸ ἡγόμενον αἰετὶς ITZ ,
 ὡς αὐτὸς περιέχεται ἐν τῷ ἰσῷ ἐπομένῳ AB , ὥστερ' τὸ ἡγόμενον NI
 ἐν τῷ ἰσῷ αὐτῷ HM .

Ἀνισοὶ δὲ λόγοι εἰσὶν, ὅταν ἦτοι τὰ ἐπόμενα αὐτὰ, ἢ τῶν ἐπομένων πᾶν ὁτιῶν μέρος ὁμοιον, μὴ ἰσαριθμῶς ἐν τοῖς ἡγυμένοις περιέχεται. Καὶ τῶν μείζων μὲν ὁ λόγος, ὅστινος ἦτοι τὸ ἐπόμενον, ἢ τὸ μέρος τῶ ἐπομένῃ πλεονάκις περιέχοιτο ἐν τῷ ἡγυμένῳ.

Οἷον ἐὰν ἑκατονχιλιοσημόριον τῆς ΓΖ πλεονάκις περιέχεται ἐν τῇ ΑΒ, ἢ τὸ ἑκατονχιλιοσημόριον τῆς ΝΠ ἐν τῇ ΗΜ, ἔσαι ὁ λόγος ΑΒ πρὸς ΓΖ μείζων τῷ λόγῳ ΗΜ πρὸς ΝΠ. * Ἐπεται δὲ ἡ τῷτο ἐκ τῷ ζ'. Οἰσμῦ.

Ἰσαριθμῶς δὲ περιέχεσθαι λέγεται, ὡς αἱ ἀφαιρέσεις αἱ δυναταὶ ἰσάριθμοι εἰσὶ.

Τῷ δὲ τοιῷδε τεκμηρίῳ, ἡ τῶν ἀλόγων λόγων ἰσότης τε ἡ ἀνισότης καταφαίνεται. Οὕτω γὰρ ἡ τὰ ἡγυμένα τὰ τοῖς ἐπομένοις ἔντα ἀσύμμετρα, τῇ ἀφαιρέσει τῶν συμμετρῶν τε ἡ ἀναλόγων τοῖς ἐπομένοις αὐτοῖς, εἰς τὸ μηδὲν ἀποληγυσιν οἷον ἐξαπλύμενα.

Οἷοια δὲ μέρη ἐστὶ τὰ ἐπίσης τε ἡ ὡσαύτως ἐν τοῖς ὅλοις αὐτῶν περι- κ.
χόμενα, ὥς οἰονδὴ ποτε μέρος τῷ οικείῳ ὅλη τὸ ἕτερον εἶναι τεθείη, τοιῶ-
τον εἶναι ἡ τῷ οικείῳ τὸ ἕτερον. Ὅ τῶνόντι ὑδὲν ἄλλο ἐστίν, ἢ τὰ μέρη πρὸς
τὰ αὐτῶν ὅλα, ἡ δὲ ἡ ἀνάπαλιν τὰ ὅλα πρὸς τὰ μέρη αὐτῶν εἶναι ἀνάλο-
γον, εἴτε τὰ μέρη τοῖς ὅλοις σύμμετρα ἢ, εἴτε ἡ ἀσύμμετρα.

Μέρος δὲ μέρος ὁμοιον, τὸ ὡσαύτως τὸ κατ' αὐτὸ ὅλον καταμετρῆν, οἷον
ἐὰν ἑκάτερον φέρε τῷ ὅλῳ τριτημόριον ἢ, ἢ δεκατημόριον, ἢ κξ'.

Μεγέθη συνεχῶς ἀνάλογον ἐστὶν (α, β, γ, δ), ὡς οἱ μεταξὺ ὄροι β, Η.
γ δις λαμβάνονται, διττὴν ἔχοντες τὴν σχέσιν, τὴν μὲν τῷ ἐπομένῃ πρὸς
τὸν ἀμέσως ἡγυμένον, τὴν δὲ τῷ ἡγυμένῳ πρὸς τὸν ἐφεξῆς ἐπόμενον· τὰς
δέτοι συνεχεῖς λόγους ὅπως ἐκφέρομεν, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, ἔτω τὸ Β πρὸς
τὸ Γ, ἡ ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Γ, ἔτω τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, κξ

Μεγέθη δὲ διωρισμένως ἀνάλογον ἐστὶν, ὡς ὑδαὶς τῶν ὄρων δις λαμβά- Θ.
νεται· ἢ ἡ ὅπως ἐκφέρομεν Α πρὸς Β, ὡς Γ πρὸς Δ.

Τὰ δὲ πλείονα τριῶν Μεγέθη ἀνάλογον εἶναι λεγόμενα, διωρισμένως
καὶ νοεῖσθω.

Ἐὰν ἢ Μεγέθη συνεχῶς ἀνάλογον (α, β, γ, δ), τὸ πρῶτον α πρὸς ι'.
τὸ τρίτον γ διπλασίονα τὸν λόγον ἔχων λέγεται, ἢ τὸ αὐτὸ πρῶτον α
πρὸς τὸ δεύτερον β, καὶ τὸ πρῶτον α πρὸς τὸ τέταρτον δ τριπλασίονα, ἢ τὸ
πρῶτον α πρὸς τὸ δεύτερον β, ἡ ἐφεξῆς.

Ὡσαύτως δὲ ἡ τὸ πρῶτον α πρὸς τὸ δεύτερον β, ὑποδιπλασίονα (τε-

τέσι τὸν ἐφ' ἡμισείας) λόγον λέγεται ἔχειν, ἢ τὸ αὐτὸ α πρὸς τὸ τρίτον γ, ἢ ὑποτριπλασίονα, ἢ τὸ αὐτὸ α πρὸς τὸ τέταρτον δ, ἢ ἔτως ἐφεξῆς.

Καὶ ἐὰν λόγους τις τριπλασίων λόγῳ τινὶ διπλασίονι ἴσος ᾖ, ἔσαι ὁ τῷ δευτέρῳ ἀπλῆς τῷ κατὰ τὸν πρότερον ἀπλῇ ἡμιπλασίῳ, τετέστιν ἡμιόλειος. Οἷον ἔσω α, β, γ, δ :: εἰ A, B, Γ ::· κείῳ δὲ α πρὸς δ ἐν τῇ προτέρῃ ἀναλογίᾳ, ὡς Α πρὸς Γ ἐν τῇ δευτέρᾳ· φημὶ δὴ ὅτι Α ἔσι πρὸς Β ἐν λόγῳ ἡμιολείῳ τῷ λόγῳ α πρὸς β. Ἐῶ γὰρ ζ μεταξὺ β ἢ γ, ἢ ὁ ταυτὸν ἔσι, μεταξὺ α ἢ δ μέσον ἀνάλογον, διὰ γὰρ τὰς ἴσας λόγους α πρὸς δ, ἢ Α πρὸς Γ, ἢ τὰς ἀναλόγους ἐκατέρωσε μεσότητας ζ ἢ Β, ἔσαι α:ζ::Α:Β. Ἀλλὰ μὲν ὁ λόγος α πρὸς ζ σύγκειται ἐκ τῆ ὅλης λόγῳ α πρὸς β, ἢ τῆς ἡμισείας τῷ αὐτῷ β πρὸς ζ, ἅρα ὁ λόγος Α πρὸς Β, ὅς ἴσος ἐστὶ τῷ λόγῳ α πρὸς ζ, περιέχει τὸν τε ὅλον λόγον α πρὸς β, ἢ τὴν κατ' αὐτὴν ἡμισίαν, ἥτοι τὸν β πρὸς ζ· ὁ δὲ ἐκ τῷ ὅλῳ ἢ τῆς ἡμισείας λόγος, ἡμιπλασίων καλεῖται, τετέστιν ἡμιόλειος, ἔστιν ἅρα Α πρὸς Β ἐν λόγῳ ἡμιπλασίονι, ἥτοι ἡμιολείῳ τῷ α πρὸς β. Καὶ ἔτως ἐν τοῖς Ἀστρονομικαῖς, ἐπειδὴ οἱ κύβοι τῶν ἀποστάσεων τῶν Πλανητῶν ἀφ' ἡλίου, εἰσὶ πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ ἀπὸ τῶν περιοδικῶν χρόνων Τετράγωνα, ἔτως ὥστε τὸν τριπλασίονα τῶν ἀποστάσεων λόγον, τὸν αὐτὸν εἶναι τῷ τῶν περιοδικῶν χρόνων διπλασίονι (οἱ μὲν γὰρ κύβοι ἐν λόγῳ εἰσὶ (1) τριπλασίονι, τὰ δὲ Τετράγωνα ἐν διπλασίονι (2) τῶν ἰδίων Πλευρῶν, ἥτοι τῶν ῥιζῶν σχετικῶς), λέγειν εἰώθαμεν, ὡς οἱ περιοδικοὶ χρόνοι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλους ἐν λόγῳ ἡμιπλασίονι, ἥτοι ἡμιολείῳ τῶν ἀφ' ἡλίου ἀποστάσεων.

14. Ὁμόλογα Μεγέθη καλεῖται, τὰ μὲν ἡγόμενα τοῖς ἡγμένοις, τοῖς δ' ἐπομένοις τὰ ἐπόμενα. Οἷον ἐὰν ᾖ $A : B :: \Gamma : \Delta$, ὁμόλογα ἔσαι τὰ Α, Γ, ἢ Β, Δ.

Οἱ δὲ λοιποὶ τῶν Ὄρισμῶν εὐχερέστερον ἐν αὐταῖς ταῖς Προτάσεσι κατανοηθήσονται.

Τὸ δὲ Πέμπτον Βιβλίον Προτάσεις περιέχον ἐστὶν 25, ἐξ ὧν αἱ 10 εἰς ἄλλης χρήσεως εἰσὶν, ἢ ἐπὶ τῷ ἐξ αὐτῶν τὰς λοιπὰς διὰ τῶν Ἰσοπολλυπλασίων ἀποδειχθῆναι· διὸ ἐκεῖνας παραλιπόντες, τὰς λοιπὰς 15 μόναις ὑποδείσομεν, τὴν παρ' Εὐκλείδῃ τάξιν τηρήσαντες. Ἐπισητέον ἀλλ' οὐδ' ὅτι τῷ παρόντος Βιβλίου Θεωρήματα, ἢ μόναις ταῖς Γραμμαῖς, ἀλλὰ ἢ παντὶ πό-

(1) ΑΓ. τῷ 14. (2) Ε. τῷ 5.

σέτητος εἶδει προσήκοντα ἐστὶ· διὸ καὶ τὰς Γραμμὰς αἷς χρησόμεθα, ὡς παρα-
 ρατικῆς οἰασθήποτε ποσότητος δέον ἐκδέχονται.

Α' ΞΙΩΜΑ.

Τριῶν Μεγεθῶν δοθέντων Α, Β, Γ, δοτὸν καὶ τέταρτον Δ, πρὸς ὃ ἂν
 τὸ Γ, τῷ τῷ Α πρὸς τὸ Β λόγῳ δεκτικὸν ᾖ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Α. Β. Γ. Δ. Ε. ς.

Εν τῇ κατ' ἡμᾶς μεθόδῳ περιτταί εἰσιν, ὧν ἡ Δ'. ἐπισημοτέρα οὖσα,
 καὶ τὴν χρῆσιν πυκνότερα, καὶ ἡμῖν κατωτέρῳ ἀποδειχθήσεται. Ἐς γὰρ τὸ
 Α'. Λήμμα τῷ Β'. μέρος τῷ παρόντος Βιβλίου.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ζ.

„Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.
 Τετέστιν ἐὰν ὑποτεθῶσι Μεγέθη δύο τὸ μὲν Α, τὸ δὲ Β ἀλλήλοις ἴσα,
 δοθῇ δὲ καὶ Μέγεθος τρίτον τὸ Γ, ἔσται δὴ Α πρὸς Γ, ὡς Β πρὸς Γ· καὶ
 ἀνάπαλιν τὸ Γ πρὸς τὸ Α, ὡς τὸ αὐτὸ Γ πρὸς τὸ Β.

Αὕτη ἡ Πρότασις, ὅσα δὴ καὶ αἱ ἐφεξῆς ἐπόμεναι τέσσαρες, ψιλὰ Α'-
 ξιώματα οὔσαι, ὑδαμῖα ἐπιθετοὶ τυγχάνουσι δεξιῶς.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ ἴσα πρὸς τὰ ἴσα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· τετέστιν
 ἐὰν καὶ ἕτερον Μέγεθος τὸ Δ φέρεται δοθῇ, ὅπερ ἴσον εἴη τῷ Γ, ἔσται Α:Γ:
 : Β: Δ, καὶ ἀνάπαλιν. Παραπλησίῳ δὲ τῷ λόγῳ καὶ αἱ ἐφεξῆς τρεῖς Προ-
 τάσεις σαφῶς ἀληθεύουσι, καὶ ἐὰν ἀντὶ τῷ ἐνὸς Μεγέθους Γ, δύο ἴσα ὑπο-
 τεθῇ τὰ Γ καὶ Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Η.

„Τῶν ἀνίσων Μεγεθῶν, τὸ μείζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει,
 „ἢ περὶ τὸ ἔλαττον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει, ἢ πρὸς
 „τὸ μείζον.

Οἷον ἐὰν ᾖ Μεγέθη ἅπαντα τὰ Ζ, Θ, τὸ μείζον Ζ πρὸς τι τρίτον τὸ
 Κ, μείζονα λόγον ἔξει, ἢ τὸ ἔλαττον Θ πρὸς τὸ αὐτὸ Κ· καὶ τὸ ἔλαττον
 Θ πρὸς τὸ Κ, ἐλάττωνα λόγον ἔχει, ἢ τὸ μείζον Ζ πρὸς τὸ αὐτὸ Κ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΑ.

„Οἱ τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ (ἢ ἴσοι, ἢ ὅμοιοι, ἰσοδυναμεῖν γὰρ ταῦτα), καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοὶ.

Ὅταν εἶν ἢ $A : B :: \Gamma : \Delta$.

Καὶ $E : Z :: \Gamma : \Delta$. ἔσται $A : B :: E : Z$.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Ὡσαύτως διὰ τοῦ οἱ λόγοι οἱ τοῖς ἴσοις ἴσοι, καὶ ἀλλήλοις ἔστω ἴσοι· καὶ οἱ λόγοι οἱ τῷ ἑτέρῳ τῶν ἴσων μέτρων, ἢ ἐλάσσωνος, καὶ τῷ ἑτέρῳ ὁμοῦς μέτρων εἰσὶν, ἢ ἐλάσσωνος. Ἡ δὲ εἰς τὸ ἑτέρον τῶν ἴσων λόγων τρίτης τιμῆς μέτρου ἢ, ἢ ἐλάσσων, καὶ ὁ ἑτέρος τῷ αὐτῷ τρίτῳ μέτρῳ ἔσται, ἢ ἐλάσσων.

Ὅταν εἶν ἢ $A : B :: \Gamma : \Delta$, καὶ $\Gamma : \Delta > E : Z$.

ἔσται καὶ $A : B > E : Z$.

Αὐτὴ δὲ εἰς ἢ ΙΓ'. Πρότασις, ἣν ὁ Τακτικός παραδίδωκε. Καὶ εἰς αὐτὴν ἔστω εἶν ἢ $A : B :: \Gamma : \Delta$, καὶ $\Gamma : \Delta < E : Z$.

ἔσται καὶ $A : B < E : Z$.

Καὶ τὸ αὐτὸ Κ ἐλάσσονα λόγον ἔχει πρὸς τὸ μείζον Ζ, ἢ πρὸς τὰ ἑλ-
λαττον Θ· τότε αὐτὸ Κ πρὸς τὸ ἐλάττον Θ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ πρὸς
τὸ μείζον Ζ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Θ.

Ἦτα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἐστὶ· καὶ πρὸς ἃ τὸ
αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, κακέκαστα ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶ.

Οἷον ἐάν ἦ Α:Γ::Β:Γ, τὰ Α ἔξ Β ἴσα.

Καὶ ἐάν ἦ Γ:Α::Γ:Β, τὰ Α ἔξ Β ἴσα.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ι.

Ἦτων πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον, ἐκεί-
νον μείζον ἐστὶ· πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκείνο ἐλάττον ἐστὶ.

Οἷον ἐάν Ζ:Κ>Θ:Κ, ἔσται Ζ>Θ· Διό

καὶ ἐάν Θ:Κ<Ζ:Κ, ἔσται Θ<Ζ.

Ἐάν δὲ Κ:Θ>Κ:Ζ, ἔσται Θ<Ζ· Διό

Ἐάν Κ:Ζ<Κ:Θ, ἔσται Ζ>Θ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΒ.

„Εάν ἡ ὁποσαῦν Μεγέθη ἀνάλογον, ἔσαι ὡς ἐν τῶν ἡγούμενων πρὸς
 „ἐν τῶν ἐπομένων, ὅτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα.

Οἷον ἐάν ἡ $A : B :: \Gamma : \Delta :: E : Z$.

Ἐσαι $A : B :: A + \Gamma + E : B + \Delta + Z$.

Καὶ τοίνυν (ἵνα διὰ παραδείγματος τὸ ἄλλως σαφές λευκότερον ἦ)
 ἐάν ἕκαστον A , ϵ Γ , ϵ E , ἑκάστω B , ϵ Δ , ϵ Z , τριπλάσιον ἢ (τετέστιν
 ἐάν ἕκαστον πρὸς ἕκαστον λόγον ἔχη, ὃν 3 πρὸς 1), ϵ τὰ A , Γ , E ἅμα ληφ-
 θέντα, τῶν B , Δ , Z ἅμα ληφθέντων τριπλάσια ἔσαι (τετέστιν ἕξει λόγον
 ὃν 3 πρὸς 1). Καὶ ἐπὶ τῶν ἀλόγων δὲ λόγων αὐτὸ τῆτο ὁμοίως ἐς σαφές.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Τὴν ΙΓ'. Πρότασιν ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν ΙΑ'. ἀνωτέρω ἐθέμε-
 θα, ἡδὲ αὐτὴν δειξέως δεομένην· τὴν δ' ἐφεξῆς ΙΔ'. καίτοι τῷ Τακτικῷ πε-
 ριττὴν δόξασαν, ὡς ἔκ ἄχρησον ἀποκαταστῆσαι κατὰ χώραν, ϵ δεῖξαι δεῖν
 ἔγκωμεν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΔ.

„Εάν πρῶτον (α) πρὸς δεύτερον (β) τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον, καὶ τρίτον
 „(γ) πρὸς τέταρτον (δ), τὸ δὲ πρῶτον (α) τῷ τρίτῳ (γ) μείζον ἢ, ϵ τὸ δεύ-
 „τερον (β) τῷ τετάρτῳ (δ) μείζον ἔσαι· καὶ ἴσον, ἴσον, καὶ ἑλασσον, ἑλασσον.

Εάν ἡ δοθεῖσα ἀναλογία κατ' ἰσότητα ἦ, τῶν ἡγούμενων τοῖς ἐπομένοις
 ἴσων ὄντων, ἡ Πρότασις κατ' αὐτὴν δῆλη. Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῇ ἀναλογίᾳ τῇ κα-
 τὰ τὴν μείζονα ἀνισότητι, τῷ ἑτέρῳ λόγῳ τὸ ἡγούμενον (1) ἐπίσης, ἥτοι
 ὡσαύτως περιέχει τὸ ἐπόμενον αὐτῷ, ὡς περ τὸ τῷ ἑτέρῳ ἡγούμενον τὸ ἐπό-
 μενον τὸ ἴδιον· ἐν δὲ τῇ ἀναλογίᾳ τῇ κατὰ τὴν ἐλάσσονα ἀνισότητι, τὸ τῷ
 ἑτέρῳ ἡγούμενον ἐπίσης περιέχεται ἐν τῷ ἴδιῳ ἐπομένῳ, ὡς περ ϵ τὸ θάτερον
 ἐν τῷ ἴδιῳ, δῆλον ὅτι ϵ ἐν τῇ ἀναλογίᾳ τῇ κατὰ τὴν ἥτοι μείζονα, ἢ ἐλάσ-
 σονα ἀνισότητι, φανερὰ ἡ Πρότασις τῷ προσέχοντι. Εἰ δέ τις ἐκ περιουσίας ἐτι-
 ταύτης τὴν ἀπόδειξιν ζητοῖ, μετίτω τὰ ἐφεξῆς.

Α'. Εάν ἡ $A > \Gamma$, ἔσαι (2) $A : B > \Gamma : B$ · ἀλλὰ $A : B :: \Gamma : \Delta$ (3),
 ἄρα $\Gamma : \Delta >$ (4) $\Gamma : B$, ἄρα (5) τὸ Δ ἐλαττον τοῦ B · καὶ ἐπομένως $B > \Delta$

(1) Ὁρ. Β. τῷ ε'. (2) Η. τῷ ε'. (3) Εξ ὑποθ. (4) Σχόλ. τῆς ΙΔ. τῷ ε'. (5) Ι. τῷ ε'.

B' . Εάν ἢ $A = \Gamma$, ἔσται (1) $A : B :: \Gamma : B$. Ἀλλ' ἔσιν (ἐξ ὑποθ.) $A : B :: \Gamma : \Delta$, ἔσιν ἄρα (2) $\Gamma : B :: \Gamma : \Delta$ · καὶ ἐπομένως (3) $B = \Delta$.

Γ' . Εάν ἢ $A < \Gamma$, ἔσται $A : B < \Gamma : B$ (4)· ἔστι δὲ (ἐξ ὑπ.) $A : B : \Gamma : \Delta$, ἄρα (5) $\Gamma : \Delta < \Gamma : B$ · ἐνθεντοὶ τὸ Δ μείζον τῆς B (6), καὶ ἐπομένως $B < \Delta$.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΕ.

„Μέρος (α) πρὸς Μέρος (β) εἶναι ἢ ὁμοία, ἔσιν ὡς ὅλον (Α) πρὸς ὅλον (Β)· καὶ ἐν γένει τὰ ὁμοία μέρη εἰσὶ πρὸς ἀλλήλα ὡς τὰ ὅλα, εἴτε σύμμετρα τοῖς ὅλοις ταῦτα ἢ, εἴτ' ἂν καὶ ἀσυμμέτρως πρὸς αὐτὰ ἔχῃ.

Τῶντοι Ἀξιώματος δίκην ληπτέον τὸ τεθὲν ἀκριβῶς ἐφιστάνεσι, τί ἐστὶν τὸ τὰ μέρη ὁμοία εἶναι· ὅρα Ο'ρ. Ζ'.

„Ο' δὲ Εὐκλείδης ἔτω προτίθῃσι τὴν Πρότ.· τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως, πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Εἰάν τὰ ὁμοία μέρη $\gamma\beta$, $\lambda\iota$, ἀπὸ τῶν ἰδίων ὅλων $\alpha\beta$, $\zeta\iota$ ἀφαιρεθῇ, καταλείψει μέρη ὁμοία τὰ $\alpha\gamma$, $\zeta\lambda$, ὃ καθ' αὐτὸ δῆλον ἐστὶ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ις.

„Εἰάν τέσσαρα Μεγέθη ἀνάλογον ἢ $(A : B :: \Gamma : \Delta)$, καὶ ἐναλλάξ ἀνάλογον ἔσται $(A : \Gamma :: B : \Delta)$.

Κείθω τὰ B καὶ Δ ἐλάσσονα τῶν A καὶ Γ · εἰ γὰρ ἴσα, καθ' αὐτὸ δῆλον (ἔξει γὰρ τότε τὰ ἴσα A καὶ B πρὸς τὰ ἴσα Γ καὶ Δ (7), τὸν αὐτὸν λόγον, ὥς εἶναι $A : \Gamma :: B : \Delta$)· ἐπειδὴ τοίνυν (ἐξ ὑποθ. $A : B :: \Gamma : \Delta$), ἔσονται διὰ τὴν Ζ'. Ο'ρισμ. B καὶ Δ τῶν ὅλων A καὶ Γ μέρη ὁμοία. Ἐνθεντοὶ διὰ τὴν ἀνωτ., ὃν ἔχει λόγον πρὸς ἀλλήλα τὰ ὅλα A καὶ Γ , τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ τὰ μέρη τὰ ὁμοία B καὶ Δ , τατέστιν $A : \Gamma :: B : \Delta$.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον, καὶ εἰάν τὰ ἡγέμενα A καὶ Γ , τῶν ἐπομένων B καὶ Δ ἐλάσσονα τεθῇ, ἐπειδὴ $A : B :: \Gamma : \Delta$, ἔσονται (8) A καὶ Γ μέρη ὁμοία τῶν ὅλων B καὶ Δ , καὶ ἐπομένως (9) $A : \Gamma :: B : \Delta$.

(1) Ζ. τῷ ε'. (2) ΙΑ. τῷ ε'. (3) Θ. τῷ ε'. (4) Η. τῷ ε'. (5) Σχόλ. ΙΑ. τῷ ε'. (6) Ι. τῷ ε'. (7) Σχόλ. τῆς Ζ. τῷ ε'. (8) Ο'ρ. Ζ. τῷ ε'. (9) ΙΒ. τῷ ε'.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Εάν ἢ $A : B :: Γ : Δ$, ἔσαι καὶ ἀνὰ πάλιν $B : A :: Δ : Γ$. Καθ' αὐτὸ δὲ δῆλον.

Παρ' Εὐκλείδῃ δὲ Πορίσματος ἔχει χωρὰν τῆς Δ'. Πρωτ., ὅπερ ἐκείνης τῇ καθ' ἡμᾶς Μεθόδῳ περιττῆς ὕψους, ἐνταῦθα κείδω.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΖ.

„Εάν ἡγόμενον (αβ) πρὸς ἐπόμενον (γβ), ἢ ὡς ἡγόμενον ἕτερον „(ζι) πρὸς ἐπόμενον ἕτερον (λι), ἔσαι καὶ ἐν διαιρέσει ὡς (αγ) ἡ ὑπεροχὴ „τῷ πρώτῳ ἡγμένῳ ὑπὲρ τὸ ἐπόμενον αὐτῷ, πρὸς αὐτὸ τὸ ἐπόμενον (γβ), „ὥτως ἢ (ζλ) ὑπεροχὴ τῷ δευτέρῳ ἡγμένῳ ὑπὲρ τὸ ἐπόμενον αὐτῷ, πρὸς „τὸ αὐτὸ ἐπόμενον τὸ δευτέρον (λι).

Ταύτην ὁ Στοιχειωτὴς ὕψω προτίθησιν· εἰάν συγκείμενα Μεγέθη ἀνά- „λογον ἢ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσαι.

Καὶ αὕτη δὲ Ἀξιώματος διὰ τὴν ἔχει ληφθῆναι· Εάν γὰρ τὰ ὅλα αβ, ζι κ. 309. τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον πρὸς τὰ χ καὶ ψ, καὶ εἰ μέρη τινὰ ὁμοία ἀφαιρεθῇ, τὸν αὐτὸν ἔξει πρὸς τὰ χ καὶ ψ λόγον, ὃν εἶχε πρότερον· τετέστιν ἢ αβ καὶ ἀπομειωθεῖσα, ἔσαι ἔδεν ἦττον πρὸς τὴν χ, ὥσπερ καὶ ἢ ζι ὁμοίως ἀπομειωθεῖσα ἔχει πρὸς τὴν ψ, τῷτο δὲ ἔστιν ὃ τίθησιν ἢ Πρότασις· ἐπεὶ γὰρ τίθεται $αβ : γβ :: ζι : λι$, ἔσονται (1) γβ καὶ λι μέρη ὁμοία τῶν ὅλων αβ καὶ ζι, τὰ δὲ αγ καὶ ζλ ἔσαι τὸ ὅλα, ἀφ' ὧν τὰ ὁμοία μέρη ἀφίηται· ἀλλὰ γὰρ τὰ ὅλα τὸν αὐτὸν ἢ ἔχοντα λόγον πρὸς γβ καὶ λι, τοιγαρὲν καὶ αγ καὶ ζλ (ἀτινα ἐστὶ τὰ ὅλα αὐτὰ, ἀφ' ὧν τὰ ὁμοία μέρη ἀφίηται), τὸν αὐτὸν καὶ μετὰ τὴν ἀφαιρείσιν ἔξουσιν λόγον πρὸς γβ καὶ λι, τετέστιν ἔτι δὴ $αγ : γβ :: ζλ : ζι$.

Α λ λ ω ς.

Επεὶ δὴ $αβ : γβ :: ζι : λι$, ἄρα (2) γβ καὶ λι μέρη ὁμοία ἐστὶ τῶν ὅλων αβ καὶ ζι. Εἵνεκεν καὶ εἰάν ἀπὸ τῶν ἰσῶν ὅλων ἀφαιρεθῇ, καταλείψει (3) μέρη ὁμοία τὰ αγ, ζλ τῶν αβ, ζι· διὸ (4) $αβ : ζι :: αγ : ζλ$ · διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ $αβ : ζι :: γβ : λι$, ἄρα (5) $αγ : ζλ :: γβ : λι$, καὶ ἐναλλάξ $αγ : γβ :: ζλ : λι$. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΗ.

„Εάν ἢ ἡγόμενον (αγ) πρὸς ἐπόμενον τὸ ἑαυτῷ (γβ), ὡς ἡγόμενον

(1) Ο. Ζ. τῷ δ'. (2) Ο. Ζ. τῷ δ'. (3) Εὐκλ. ΙΕ. τῷ δ'. (4) ΙΕ. τῷ δ'. (5) ΙΑ. τῷ δ'.

ἄλλοτερον (Ζλ) πρὸς ἐπόμενον τὸ ἑαυτῷ (λι), ἔσαι δὲ καὶ ἐν συνδέσει (αγ
 ἢ συν βγ) τὸ πρῶτον ἡγούμενον σὺν τῷ ἐπομένῳ αὐτῷ, πρὸς τὸ αὐτὰ ἐπό-
 μενον (γβ), ὥσπερ (Ζλ σὺν λι) τὸ δεύτερον ἡγούμενον σὺν τῷ ἐπομένῳ
 αὐτῷ, πρὸς αὐτὸ τὸ ἐπόμενον (λι).

Οἱ δὲ Εὐκλείδης ταύτην ἔτω προτίθησιν· εἰὰν διηρημένα Μεγέθη ἀνάλο-
 γον ᾗ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσαι.

Αὐτῷσι Α'ξιώματος δίκην καὶ αὕτη ληφθῆναι δύναται· Εἰὰν γὰρ δύο Με-
 γέθη αγ καὶ Ζλ, τὸν αὐτὸν πρὸς χ καὶ ψ λόγον ἔχοντα ᾗ, καὶ ἐπαυξηθέντα
 ὁμοίως, τετέσιν ἀναλόγως τὰ αγ, Ζλ πρὸς τὰ χ καὶ ψ αὐτὰ λόγον ἔξουσιν
 ἔτι τὸν αὐτὸν· ἀμέλειτοι καὶ αὐξηθὲν τὸ αγ ἔσαι πρὸς τὸ χ, ὥσπερ δὲ καὶ τὸ
 Ζλ αὐξηθὲν ὁμοίως ἐστὶ πρὸς τὸ ψ. Οὐδὲν ἔν ἄλλ' ἢ τῆτο ἢ Πρότασις προτί-
 θησι· τίθεται μὲν γὰρ αγ : γβ :: Ζλ : λι, εἰὰν οὖν ταῖς αγ, Ζλ προσεθώ-
 σιν αἱ γβ, λι, ἔσονται αἱ αγ, Ζλ ὁμοίως, τετέσιν ἀναλόγως ἐπηυξημέναι
 καὶ ἐπειδὴ τοίνυν αἱ αγ καὶ Ζλ, ὁμοίως ἔχεται εἰς πρὸς τὰς γβ, λι, καὶ μετὰ
 τὸ ὁμοίως αὐξηθῆναι (τότε δὲ ἔσονται αβ, ζι) πρὸς τὰς αὐτὰς γβ, λι, ὡ-
 σαύτως ἔτι ἔξουσιν, τετέσιν ἔσαι αβ : γβ :: ζι : λι.

Α' λ λ ω ς.

Ἐπειδὴ αγ : γβ :: Ζλ : λι, ἄρα (1) αγ : Ζλ :: γβ : λι· ἄρα καὶ αγ +
 γβ : Ζλ + λι :: γβ : λι (2), τετέσιν αβ : ζι :: γβ : λι· καὶ πάλιν ἐναλλάξ
 αβ : γβ :: ζι : λι. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α Α'.

Εἰὰν ἡγούμενον (αβ) ᾗ πρὸς ἐπόμενον (γβ), ὡς ἡγούμενος ἕτερον (ζι)
 πρὸς ἐπόμενον ἕτερον (λι), ἔσαι καὶ τὸ πρῶτον ἡγούμενον (αβ) πρὸς (αγ), τὴν
 ἣν ἔχει ὑπεροχὴν ὑπὲρ τὸ ἐπόμενον τὸ αὐτῷ, ὥσπερ τὸ ἕτερον ἡγούμενος
 (ζι) πρὸς (Ζλ), τὴν ἣν ἔχει ὑπεροχὴν ὑπὲρ τὸ ἐπόμενον τὸ ἑαυτῷ (λι).

Ἐπειδὴ γὰρ αβ : γβ :: ζι : λι, ἔσαι καὶ ἐν διαιρέσει (3) αγ : γβ :: Ζλ : λι
 καὶ ἀνάπαλιν (4) βγ : γα :: ιλ : λζ· καὶ ἐν συνδέσει (5) βα : γα :: ιζ : λζ.

Τὸ δ' ἔτως ἐπιχειρεῖν κατ' Ἀναξροφῆν λόγῳ καλεῖται.

Καὶ παρὰ ταῦτα, εἰὰν ἡγούμενον (αγ) πρὸς τὸ ἐπόμενον αὐτῷ (γβ), ᾗ
 ὡς ἕτερον ἡγούμενον (Ζλ) πρὸς τὸ ἴδιον ἐπόμενον (λι), ἔσαι καὶ κατ' ἄλλον ἀνα-
 ξροφῆς τρόπον, τὸ πρῶτον ἡγούμενον (αγ) πρὸς αὐτὸ τὸ πρῶτον ἡγούμενον.

(1) Ιε. τῷ ε'. (2) Ιβ. τῷ ε'. (3) Ιζ. τῷ ε'. (4) Σχόλ. τῆς Ιε. τῷ ε'. (5) Ιη. τῷ ε'.

σὺν τῷ ἐπομένῳ αὐτῷ (αβ), ὡς τὸ ἔτερον, ἡγούμενον (ζλ) πρὸς αὐτὸ τὸ ἔτερον ἡγούμενον σὺν τῷ ἐπομένῳ αὐτῷ (ζι).

Καὶ γὰρ $\alpha\gamma:\gamma\beta::\zeta\lambda:\lambda\iota$ καὶ (1) ἀνάπαλιν $\beta\gamma:\gamma\alpha::\iota\lambda:\lambda\zeta$ καὶ ἐν συνθέσει (2) $\beta\alpha:\alpha\gamma::\iota\zeta:\zeta\lambda$ καὶ πάλιν ἀνάπαλιν $\alpha\gamma:\alpha\beta::\zeta\lambda:\zeta\iota$.

Π ό ρ ι σ μ α Β'.

Εἴαν ᾗ $\alpha\gamma:\alpha\beta::\zeta\lambda:\zeta\iota$, ἔσαι καὶ $\alpha\gamma:\gamma\beta::\zeta\lambda:\lambda\iota$, καὶ $\alpha\beta:\gamma\beta::\zeta\iota:\lambda\iota$.

Ἐπειδὴ γὰρ $\alpha\gamma:\alpha\beta::\zeta\lambda:\zeta\iota$, ἔσαι ἀνάπαλιν $\beta\alpha:\gamma\alpha::\iota\zeta:\lambda\zeta$ καὶ ἐν διαιρέσει (8) $\beta\gamma:\gamma\alpha::\iota\lambda:\lambda\zeta$ καὶ πάλιν ἀνάπαλιν $\alpha\gamma:\gamma\beta::\zeta\lambda:\lambda\iota$ καὶ ἐν συνθέσει (4) $\alpha\beta:\gamma\beta::\zeta\iota:\lambda\iota$.

Ἀλλως· $\gamma\alpha:\alpha\beta::\lambda\zeta:\zeta\iota$, ἔσαι ἀνάπαλιν $\beta\alpha:\alpha\gamma::\iota\zeta:\zeta\lambda$ καὶ κατ' ἀναστροφὴν (5) $\alpha\beta:\beta\gamma::\zeta\iota:\iota\lambda$. ὅπερ ἦν θάτερον· καὶ ἐν διαιρέσει (6) $\alpha\gamma:\gamma\beta::\zeta\lambda:\lambda\iota$, ὅπερ ἦν θάτερον.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΘ.

„Εἴαν ᾗ ὡς ὅλον (αβ) πρὸς ὅλον (ζι), ἕτως ἀφαιρεθὲν (γβ) πρὸς ἀφαι-

κ. 310.

ρεθὲν (λι), καὶ τὸ λοιπὸν (αγ) πρὸς τὸ λοιπὸν (ζλ), ἔσαι ὡς ὅλον πρὸς ὅλον. Ὅλως ἐναργέες ἐστὶ καὶ εἰς αὐτὸ τὸ λεγόμενον, ἔχει γεμὴν διὰ τῶν προτεθέντων ἀποδειχθῆναι ἕτως· ἐπεὶ $\alpha\beta:\zeta\iota::\gamma\beta:\lambda\iota$, ἔσαι καὶ ἐναλλάξ (7) $\alpha\beta:\gamma\beta::\zeta\iota:\lambda\iota$, καὶ κατ' ἀναστροφὴν λόγου (8) $\alpha\beta:\alpha\gamma::\zeta\iota:\zeta\lambda$ καὶ πάλιν ἐναλλάξ $\alpha\beta:\zeta\iota::\alpha\gamma:\zeta\lambda$.

Ἀλλως· $\alpha\beta:\zeta\iota::\gamma\beta:\lambda\iota$ καὶ ἐναλλάξ (9) $\alpha\beta:\gamma\beta::\zeta\iota:\lambda\iota$, ὥς (10) $\gamma\beta$ καὶ $\lambda\iota$ εἰσὶ μέρη ὅμοια τῶν ἑλῶν $\alpha\beta$ καὶ $\zeta\iota$ ταύτητοι καὶ εἰς ἀπὸ τῶν ἰδίων ὅλων ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπὰ (11) μέρη ὅμοια εἰσὶν $\alpha\gamma$ καὶ $\zeta\lambda$ ἄρα (12) $\alpha\beta:\zeta\iota::\alpha\gamma:\zeta\lambda$.

Π ρ ό τ α σ ι ς Κ. καὶ ΚΑ.

Ἐν τῇ καὶ ἡμᾶς μεθόδῳ εἰσὶ περιτταί, κείνται γεμὴν ἐν τοῖς Πορίσμασι τῶν ἐφεξῆς Προτ. ΚΒ'. καὶ ΚΓ'.

(1) Σχόλ. τῆς Ιε'. τῷ ε'. (2) ΙΗ. τῷ ε'. (3) ΙΖ. τῷ ε'. (4) ΙΗ. τῷ ε'. (5) Α'. Πόρ. ταύτη. (11) ΙΖ. τῷ ε'. (7) Ιε'. τῷ ε'. (8) Α. Πόρ. τῆς ἀνωτ. (9) Ιε'. τῷ ε'. (10) Οφ. Ζ. τῷ ε'. (11) Σχόλ. τῆς ΙΕ. τῷ ε'. (12) ΙΕ. τῷ ε'.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΒ.

„Εάν ἢ $A : B :: E : \Pi$, ἢ $B : \Gamma :: \Pi : P$, ἢ ἕτως ἐφεξῆς, ἔσαι δι' ἴσου
 ὡς A πρῶτον πρὸς Γ ἔχατον, ἔτω E πρῶτον πρὸς P ἔχατον.

Ἐκφέρεται δὲ παρ' Εὐκλ. ἕτως. Εάν ἢ ὅποσαῦν Μεγέδη, ἢ ἄλλα αὐ-
 τοῖς ἴσα τὸ πληθός, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἢ δι' ἴσου ἐν
 τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσαι.

Κεῖσθω δὴ τὰ Γ ἢ P ἐλάσσονα εἶναι τῶν B ἢ Π (ἢ δ' αὐτὴ δεῖξις ἢ
 μειζόνων ὑποτιθεμένων). Ἐπειδὴ (1) $B : \Gamma :: \Pi : P$, ἔσαι τὰ Γ ἢ P , τῶν
 ὅλων B ἢ Π (2) μέρη ὁμοία· καὶ ἐπεὶ τοίνυν τὰ A ἢ E , πρὸς τὰ B ἢ Π τὸν
 αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔξει δὴ ἢ πρὸς τὰ Γ ἢ P , ἢ ἐς τῶν B ἢ Π μέρη ὁμοία,
 λόγον τὸν αὐτὸν, ἢ τῷτο τοίνυν ὅλον Ἀξίωμα ἐστίν· εάν Μεγέδη δύο πρὸς
 ἕτερα δύο τὸν αὐτὸν ἔχω λόγον, ἢ πρὸς τὰ ὁμοία μέρη τῶν αὐτῶν
 ἔξει λόγον.

„Εάν δὲ ἢ πλείονα τριῶν ἐκατέρωθεν Μεγέδη παρῇ, τῷ αὐτῷ τρό-
 πῳ ἢ περὶ τῶν ἄλλων συλλογιόμεθα.

Ἀλλως· Ἐπειδὴ $A : B :: E : \Pi$, ἔσαι (3) ἐναλλάξ $A : E :: B : \Pi$.
 ἐπεὶ δὲ ἢ $B : \Gamma :: \Pi : P$, ἔσαι ἢ ἐναλλάξ $B : \Pi :: \Gamma : P$. ἄρα (4) $A : E ::$
 $\Gamma : P$, καὶ ἐναλλάξ $A : \Gamma :: E : P$.

Π ό ρ ι σ μ α Α'.

Κάντεῦθεν ἢ παραλειφθεῖσα τῷ Τακестίῳ Κ'. ἔχει ἐπενοχθῆναι. Ἐσω-
 σκεν γὰρ πηλικότητες τρεῖς A, B, Γ , τρισὶν ἄλλαις E, Π, P ἀνάλογον
 ἔχουσαι, σύνδυο λαμβανόμεναι, τῷτο δὲ ἐστίν $A : B :: E : \Pi$, ἢ $B : \Gamma :: \Pi : P$.
 εάν οὖν ἢ A μείζων ἢ τῆς Γ , ἔσαι δὴ ἢ ἢ E μείζων τῆς P , καὶ εάν ἴση, ἴση
 ἢ εάν ἐλάσσων, ἐλάσσων. Κατὰ γὰρ τὴν ἐν χειρὶ Πρότ. $A : \Gamma :: E : P$,
 ἢ ἐναλλάξ $A : E :: \Gamma : P$. ἄρα διὰ τὴν ΙΔ'. τὰ παρόντος Βιβλίου δηλοῦν τὸ
 προτεθέν.

Π ό ρ ι σ μ α Β'.

Ἐπειδὴ δὲ $A : B :: E : \Pi$, ἔσαι ἢ ἐν συνθέσει (5) $A + B : B :: E + \Pi : \Pi$.
 ἐστὶ δὲ $B : \Gamma :: \Pi : P$, ἄρα διὰ τὴν ἐν χειρὶ Πρότ. ἔσαι $A + B : \Gamma :: E +$

(1) Εξ. ὑποδ. (2) Ορίσ. Ζ. τῷ δ. (3) Ις. τῷ ε. (4) ΙΑ. τῷ δ. (5) ΙΗ. τῷ δ.

$\Pi : P \cdot$ καὶ παραπλησίως ἐν διαιρέσει (1) Συλλογιζομένων, ἔσαι $A - B :$
 $\Gamma :: \Xi - \Pi : P.$

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΓ.

„Εὰν ἡ ὡς A πρῶτον πρὸς B δεύτερον, ἔτω Ξ πρῶτον πρὸς Π δεύτερον, καὶ ὡς B δεύτερον πρὸς Γ τρίτον, ἔτω τρίτον τὸ τυχὸν P πρὸς τὸ „πρῶτον Ξ , ἔσαι δι' ἴσου τεταραγμένως, ἢ ὡς A πρῶτον πρὸς Γ τρίτον, ἔτω „ P τρίτον πρὸς Π δεύτερον.

Ἐκφέρεται δὲ ὑπὸ τῆς Στοιχειωτῆς αὕτη οὕτως. Εἰ ἂν ἡ τρία Μεγέθη, ἢ „ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, „ἡ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ἢ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσαι.

Ὡς B ἔχει πρὸς Γ , ἔτω ἢ (2) Π πρὸς ἄλλο ὁποῖον τὸ Σ δύναται ἔχειν. Ἦδη μὲν οὖν ἐπειδὴ $B : \Gamma :: P : \Xi$ (3), καὶ πάλιν $B : \Gamma :: \Pi : \Sigma$ (4), ἔσαι καὶ $P : \Xi :: \Pi : \Sigma$ (5) καὶ τοίνυν ἢ ἐναλλάξ (6) $P : \Pi :: \Xi : \Sigma$. Εἴτα ἐπειδὴ (ἐξ ὑποθ.) $\Xi : \Pi :: A : B$, ἢ $\Pi : \Sigma :: B : \Gamma$ (ἐκ κατ.), δι' ἴσου ἔσαι (6) $\Xi : \Sigma :: A : \Gamma$ · δέδεικται δὲ $P : \Pi :: \Xi : \Sigma$, ἄρα (7) $P : \Pi :: A : \Gamma$.

Καλεῖται δὲ τοῖς Γεωμέτραις ἡ τοιαύτη ἀναλογία Τεταραγμένη.

Π ό ρ ι σ μ α .

Κείθω Μεγέθη τρία A, B, Γ , πρὸς τρία P, Ξ, Π ἀνάλογον σύνδυο λαμβανόμενα, ἄλλα τεταραγμένως, τετέστιν ἔσω $A : B :: \Xi : \Pi$, καὶ $B : \Gamma :: P : \Xi$. Εἰ ἂν ἢ τὸ A μείζον ἢ τῷ Γ , ἔσαι δι' ἴσου ἢ τὸ P μείζον τῷ Π , καὶ εἰ ἂν ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἂν ἑλαττον, ἑλαττον. Κατὰ γὰρ τὴν ἐν χειρὶ Πρώτ. $A : \Gamma :: P : \Pi$, καὶ ἐναλλάξ $A : P :: \Gamma : \Pi$ · ἄρα διὰ τὴν ΙΔ'. τῶ παρόντος δῆλον τὸ προτεθέν. Αὕτη δὲ ἐστὶν ἡ παραλειφθεῖσα ΚΑ'.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΔ.

„Εὰν ἡ A πρὸς B , ὡς Γ πρὸς Z , ἢ I πρὸς B , ὡς Λ πρὸς Z , ἔσαι ἢ „ὡς Λ σὺν I πρὸς B , ἔτω Γ σὺν Λ πρὸς Z .

Ταύτην ὁ Στοιχειωτής ἔτω προβάλλεται. Εἰ ἂν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν „αὐτὸν ἔχη λόγον, ἢ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχη δὲ ἢ πέμπτον πρὸς δεύ-

(1) ΙΖ. τῷ ε'. (2) Δξ. τὸ πρὸς τῆς Α'. τῷ ε'. (3) Εξ ὑποθ. (4) Εκ κατ. (5) ΙΔ. τῷ ε'. (6) Ις. τῷ ε'. (7) Διὰ τὴν αὐτ. (8) ΙΑ. τῷ ε'.

„τερον τὸν αὐτὸν λόγον, ἢ ἕκτον πρὸς τέταρτον· καὶ συντεθέν πρῶτον καὶ
 „πέμπτον πρὸς δεύτερον, τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον, ἢ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς
 „τέταρτον.

Ἐπειδὴ (ἐξ ὑποθ.) $I : B :: \Lambda : Z$, ἔσαι ἢ (1) ἀνάπαλιν $B : I :: Z : \Lambda$.
 ἄλλ' (ἐξ ὑποθ.) ἔσιν $A : B :: \Gamma : Z$, ἢ $B : I :: Z : \Lambda$, ἄρα (2) δι' ἴσιν $A :$
 $I :: \Gamma : \Lambda$. Καὶ τοῖσιν ἐν (3) συνθέσει ἢ $AI : I :: \Gamma \Lambda : \Lambda$. ἄλλ' ἔσιν (4)
 $I : B :: \Lambda : Z$, πάλιν ἄρα δι' ἴσιν (5) $AI : B :: \Gamma \Lambda : Z$.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΕ.

„Εἰν τέσσαρα Μεγέθη (αβ, γζ, ι, λ) ἀνάλογον ἢ, τὸ μέγιστον
 „(αβ) ἢ τὸ ἐλάχιστον (λ), τῶν λοιπῶν (γζ, ι) μείζονα ἐστὶ.

κ. 311.

Κείδω αβ : γζ :: ι : λ, ἢ ἀπὸ τῆ μεγίστης αβ ληφθήτω απ ἴσον τῷ ι,
 ἀπὸ δὲ τῆ γζ ληφθήτω γρ ἴσον τῷ ἐλαχίστῳ λ, καὶ ἔσαι ὅλον αβ πρὸς
 ὅλον γζ, ὡς τὸ ἀφαιρεθὲν απ πρὸς τὸ ἀφαιρεθὲν γρ, ὡς ἢ τὸ λοιπὸν (6)
 πβ πρὸς τὸ λοιπὸν ρζ, ὡς ὅλον αβ πρὸς ὅλον γζ. ἄλλ' (7) αβ μείζον τῆ
 γζ, ἄρα ἢ πβ μείζον τῆ ρζ. Ἡ δὲ ἐπεὶ ἢ μὲν απ ἐλήφθη ἴση τῇ ι, ἢ δὲ
 γρ ἴση τῇ λ, ἔσαι ἢ απ σὺν λ, τῷ ι σὺν γρ ἴσον. Εἰν ἄρα τῷ απ σὺν
 λ προσεθῇ τὸ μείζον πβ, τῷ δὲ ι σὺν γρ προσεθῇ τὸ ἐλάττω ρζ, ἔσαι τὸ
 ὅλον απβ σὺν λ, μείζον τῷ ὅλῳ ι σὺν γρζ. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α.

κ. 312.

Εἰν ἢ τρία Μεγέθη Α, Β, Γ ἀνάλογον, τὸ ἐκ τῶν ἄκρων ἡμιάθροισ-
 μα, τῆ μέσης μείζον ἔσαι· ἐπεὶ γὰρ (8) $A : B :: B : \Gamma$, ἔσαι (9) τὸ ἐκ τῶν
 ἄκρων Α ἢ Γ ἄθροισμα μείζον, ἢ τὸ Β δις ληφθὲν, ἢ ἐπομένως τὸ ἡμιά-
 θροισμα (10) τὸ ἐκ τῶν ἄκρων μείζον ἐστὶ τῆ Β ἀπαξ ληφθέντος.

Αἱ δὲ ἐπόμεναι Προτάσεις ἢχι τῆ Εὐκλείδους ἔσαι, ἄλλ' ἐκ τῶν τῆ Πίπ-
 πη τῆ ἀλεξανδρέως ἢ ἐξ ἄλλων λαμβανόμεναι, διὰ τὸ πολὺ τῆς χρήσεως.
 ταῖς Εὐκλείδειοις εἰώθασι παρασυνάπτεσθαι.

Π ρ ό τ α σ ι ς Κς.

„Εἰν πρῶτον (Α) πρὸς·δεύτερον (Β) μείζονα λόγον ἔχῃ, ἢ τρίτον (Γ)

(1) Σχόλ. τῆς Ις. τῷ ε'. (2) ΚΒ. τῷ ε'. (3) ΙΗ. τῷ ε'. (4) Εξ ὑποθ. (5) ΚΒ.
 τῷ ε'. (6) ΙΘ. τῷ ε'. (7) Εξ ὑποθ. (8) Ορ. Η. τῷ ε'. (9) Διὰ ταύτην τῇ Ιθ.
 (10) Αξ. ε. τῷ α'.

„πρὸς τέταρτον (Z), ἔξει εἰς ἀνάπαλιν δεύτερον (B) πρὸς πρῶτον (A) ἐλάσσο-
να λόγον, ἢ τέταρτον (Z) πρὸς τρίτον (Γ).

Ἐπειδὴ γὰρ τίθεται τὸ A μείζονα λόγον ἔχον πρὸς τὸ B, ἢ τὸ Γ πρὸς
τὸ Z, τὸ A πάντως (1) πρὸς τι τὸ BX, ὃ μείζον ἔσαι (2) τῷ B, τὸν αὐτὸν
ἔξει λόγον, ὃν τὸ Γ πρὸς τὸ Z· καὶ ἀνάπαλιν τοῖνυν, ἔσαι $BX:A::Z:\Gamma$.
ἄλλὰ B ἐστὶ πρὸς A ἐν ἐλάσσονι λόγῳ (3) ἢ BX πρὸς A, ἄρα (4) $B:A < Z:\Gamma$. α. 313.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Τὸ δ' αὐτὸ παραπλησίως δειχθήσεται καὶ πὶ τῆς ἐλάσσονος ἀναλογίας·
τυτέσιν εἰάν B πρὸς A ἐλάσσονα λόγον ἔχη ἢ Z πρὸς Γ, ἔξει δὴ ἀνάπα-
λιν A πρὸς B μείζονα λόγον ἢ Γ πρὸς Z.

Π ρ ό τ α σ ι ς KZ.

„Ἐὰν A πρὸς B μείζονα λόγον ἔχη ἢ Γ πρὸς Z, εἰ ἐναλλάξ A πρὸς
„Γ μείζονα λόγον ἔξει ἢ B πρὸς Z.

Ἐπειδὴ ὁ λόγος A πρὸς B μείζων τίθεται τῷ λόγῳ Γ πρὸς Z, ἔσαι
(5) ὁ λόγος A πρὸς ἄλλο τι BX (ὅπερ ἐξ ἀνάγκης μείζον ἔσαι (6) τῷ B), ἴσος
τῷ λόγῳ Γ πρὸς Z· καὶ τοῖνυν ἐναλλάξ (7) ἔσαι $A:\Gamma::BX:Z$ · ἄλλὰ BX
πρὸς Z εἰσὶν ἐν μείζονι λόγῳ (8) ἢ B πρὸς Z, ἄρα (9) $A:\Gamma > B:Z$.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται εἰ περὶ τῆς ἀναλογίας τῆς ἐλάσσονος.

Π ρ ό τ α σ ι ς KH.

„Ἐὰν αβ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἔχη ἢ ζι πρὸς ιλ, εἰ ἐν συνθέ-
σει αγ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ζλ πρὸς ιλ.

Ἐπειδὴ τίθεται αβ, βγ ἐν μείζονι λόγῳ τυγχάνειν ἢ ζι πρὸς ιλ, α. 314.
ἄρα ἑτεροῦντι (10) τὸ ξβ (ὃ καὶ ἀνάγκη ἐλαττον εἶναι (11) τῷ αβ) ἐστὶ
πρὸς βγ, ὡς ζι πρὸς ιλ· καὶ τοῖνυν ἐν συνθέσει (12) ξγ πρὸς βγ, ὡς
ζλ πρὸς ιλ· ἄρα (13) $\alpha\gamma:\beta\gamma > \zeta\lambda:\iota\lambda$.

(1) Διὰ τὸ ΔΕ. τὸ πρὸ τῆς Α. τῷ Ε. (2) Ι. τῷ Ε. (3) Η. τῷ Ε. (4) Σχόλ. τῆς
ΙΑ. τῷ Ε. (5) Διὰ τὸ ΔΕ. τὸ πρὸ τῆς Α. τῷ Ε. (6) Ι. τῷ Ε. (7) Ις. τῷ Ε. (8)
Η. τῷ Ε. (9) Σχόλ. τῆς ΙΑ. τῷ Ε. (10) ΔΕ. τὸ πρὸ τῆς Α. τῷ Ε. (11) Ι. τῷ Ε.
(12) ΙΗ. τῷ Ε. (13) Η. τῷ Ε. εἰ Σχόλ. ΙΑ. τῷ Ε.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Τὸ δ' αὐτὸ παραπλησίως ἀποδειχθήσεται ἐπεὶ τῆς ἀναλογίας τῆς ἐλάττωνος.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΘ.

„Εἰάν αγ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἔχη ἢ ζλ πρὸς ιλ, ἐν διαιρέσει αβ πρὸς βγ, μείζονα λόγον ἔχει ἢ ζι πρὸς ιλ.

κ. 315.

Εἰπεὶ δὲ τίθεται αγ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἔχειν ἢ ζλ πρὸς ιλ, ἑτερόν τι πάντως (1) τὸ ξγ (ὃ ἐ ἐλάττων εἶναι ἐπ' ἀνάγκης (2) τῷ αγ) ἔσαι πρὸς βγ, ὡς ζλ πρὸς ιλ· καὶ τοίνυν ἐν διαιρέσει (3) ἔσαι ξβ : βγ : : ζι : ιλ· ἄρα (4) αβ : βγ > ζι : ιλ.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Τὸ αὐτὸ παραπλησίως δειχθήσεται ἐπεὶ τῆς ἀναλογίας τῆς ἐλάττωνος.

Π ρ ό τ α σ ι ς Λ.

„Εἰάν αγ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἔχη ἢ ζλ πρὸς ιλ, κατὰ λόγον ἀναστροφὴν, αγ πρὸς αβ ἐλάττωνα λόγον ἔξει ἢ ζλ πρὸς ζι.

κ. 316.

Εἰπεὶ δὲ αγ πρὸς βγ ἐν λόγῳ μείζονι ἔσιν ἢ ζλ πρὸς ιλ, ἔσαι ἐν διαιρέσει (5) αβ πρὸς βγ, ἐν λόγῳ μείζονι ἢ ζι πρὸς ιλ· ἄρα ἀνάπαλιν γβ πρὸς βα (6) ἔσιν ἐν ἐλάττωσι λόγῳ ἢ λι πρὸς ιζ· ἄρα ἐν συνθέσει (7) γα πρὸς βα ἐν λόγῳ ἐλάττωσι ἔσιν ἢ λζ πρὸς ιζ.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Τὸ αὐτὸ παραπλησίως ἀποδεικνύεται ἐπεὶ τῆς ἀναλογίας τῆς ἐλάττωνος· τίτειςιν ἐὰν αγ πρὸς αβ ἐλάττωνα λόγον ἔχη ἢ ζλ πρὸς ζι, ἔξει ἐ κατ' ἀναστροφὴν τῷ λόγῳ αγ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἢ ζλ πρὸς ιλ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΑ.

„Εἰάν αβ πρὸς γ μείζονα λόγον ἔχη ἢ ζ πρὸς ι, καὶ γ πρὸς λπ

(1) ΑΞ. τὸ πρὸ τῆς Α. τῷ ε. (2) Ι. τῷ ε. (3) ΙΖ. τῷ ε. (4) Η. τῷ ε. (5) Σχολ. τῷ ε. (6) Διὰ τὴν ἀντιστ. (7) ΚΗ. τῷ ε.

„μείζονα λόγον ἔχει ἢ 1 πρὸς σ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἔσαι δι' ἴσα καὶ τὸ
 „πρῶτον αβ, πρὸς τὸ ἔχατον λπ μείζονα λόγον ἔχον, ἢ τὸ πρῶτον ζ
 „πρὸς τὸ ἔχατον σ.

Ἐπειδὴ αβ : γ > ξ : ι, ἕτερον ἄρα (1) τὸ ξβ (ὅπερ ἐξ ἀνάγκης (2) α. 317.
 ἐλαττον ἔσαι τῷ αβ) ἐστὶ πρὸς γ ὡς ζ πρὸς ι· καὶ ἐπειδὴ γ : λπ > ι : σ,
 ἄρα τὸ γ πρὸς ἕτερόν τι (ὅπερ ἐξ ἀνάγκης μείζον ἔσαι τῷ λπ) τὸ λρ,
 ἔσαι ὡς τὸ ι πρὸς τὸ σ, ὡς καὶ δι' ἴσα (3) ξβ : λρ :: ζ : σ· ἄρα ξβ πρὸς
 λπ μείζονα λόγον ἔχει (4) ἢ ζ πρὸς σ· ἄρα αβ πρὸς λπ (5) πολλῷ
 μείζονα λόγον ἔχει ἢ ζ πρὸς σ.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Τὸ δ' αὐτὸ παραπλησίως δειχθήσεται καὶ περὶ τῆς ἐλάσσονος ἀνα-
 λογίας.

Π ό ρ ι σ μ α .

Ἐκ δὲ τῆς ἀποδείξεως τῆςδε τῆς Προτάσεως φανερόν, ὅτι εἰάν αβ
 πρὸς γ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ζ πρὸς ι, καὶ γ : λρ :: ι : σ, καὶ πρῶτον αβ
 πρὸς ἔχατον λρ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ πρῶτον ζ πρὸς ἔχατον σ· ὁ
 παραπλησίως ἀληθὲς ἐστὶ καὶ ἐπὶ τῆς ἐλάσσονος ἀναλογίας.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΑΒ.

„Εἰάν αβ πρὸς γ μείζονα λόγον ἔχει ἢ 1 πρὸς σ, καὶ γ πρὸς λπ
 „μείζονα ἢ ζ πρὸς ι, ἔσαι καὶ δι' ἴσα τεταραγμένως αβ πρὸς λπ μείζονα
 „λόγον ἔχον, ἢ ζ πρὸς σ.

Παραπλησία ἐστὶν ἡ ἀπόδειξις τῇ ἀνωτέρω, πλὴν ὅσον ἀντὶ τῆς ΚΒ.
 ληπτέον τὴν ΚΓ'.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Τὸ δ' αὐτὸ παραπλησίως ἀποδειχθήσεται καὶ περὶ τῆς ἐλάσσονος ἀ-
 ναλογίας. Καὶ ἐκ ταύτης δὲ τῆς Προτάσεως Πόρισμα παραπλήσιον τῷ
 ἀπὸ τῆς ἀνωτέρω Προτ. ἐπιφέρεται.

(1) ΑΕ. τὸ πρὸ τῆς Α. τῷ ε. (2) Ι. τῷ ε. (3) ΚΒ. τῷ ε. (4) Η. τῷ ε. (5)
 - Διὰ τὴν αὐτήν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΓ.

„Εάν ὅλον (αβ) πρὸς ὅλον (ζι) μείζονα λόγον ἔχη, ἢ ἀφαιρεθὲν
 „(γβ) πρὸς ἀφαιρεθὲν (λι), ὅλον πρὸς ὅλον ἐλάχιστον λόγον ἔξει, ἢ
 „λοιπὸν (αγ) πρὸς λοιπὸν (ζλ).

κ. 318. Ἐπειδὴ αβ πρὸς ζι μείζονα λόγον ἔχει ἢ γβ πρὸς λι, ἔσαι ἐναλλάξ (1)
 αβ πρὸς γβ ἐν μείζονι λόγῳ ἢ ζι πρὸς λι· ἄρα κατὰ ἀναστροφὴν (2) αβ πρὸς
 αγ ἐν ἐλάσσονι ἔσαι, ἢ ζι πρὸς ζλ· ἄρα καὶ ἐναλλάξ (3) αβ πρὸς ζι, ἐν ἐλάσ-
 σονι λόγῳ ἔσαι ἢ αγ πρὸς ζλ.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον, καὶ εἰς ὅλον πρὸς ὅλον ἐλάχιστον λόγον ἔχη, ἢ
 ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθὲν, ὅλον πρὸς ὅλον μείζονα λόγον ἔξει, ἢ λοιπὸν
 πρὸς λοιπὸν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΔ.

„Εάν οἱ λόγοι (Α:Γ, καὶ Ε:Ξ) ὥσι τῶν ἰσῶν λόγων (Α:Β, καὶ
 „Ε:Ζ) διπλασίονες, ἢ τριπλασίονες, καὶ ἐφεξῆς, ἴσοι ἔσονται καὶ αὐτοί.

Ἐπειδὴ γὰρ τῷ λόγῳ Α:Β διπλασίων ὁ Α:Γ, ἔσαι (4) Α:Β::Β:
 Γ· διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον Ε:Ζ::Ζ:Ξ, ἀλλ' (5) Α:Β::Ε:Ζ, καὶ Β:
 Γ::Ζ:Ξ (καὶ γὰρ Β:Γ::Α:Β::Ε:Ζ::Ζ:Ξ), δι' ἴσα τοίνυν (6) Α:Γ:
 :Ε:Ξ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΕ.

„Εάν οἱ ἴσοι λόγοι (Α:Γ::Ε:Ξ) διπλασίονες ὦσιν, ἢ τριπλασίονες,
 „καὶ ἐφεξῆς, τῶν λόγων Α:Β καὶ Ε:Ζ, ἔσονται καὶ ἑτοὶ ἀλλήλοις ἴσοι.

Εἰ μὴ γὰρ ἔσω ὡς Α πρὸς Β, ἔτις Ε πρὸς ἄλλο τι τὸ Φ, ὅπερ ἄνισον
 ἂν εἴη τῷ Ζ, καὶ ἔσω ὡς Ε:Φ::Φ:Χ· καὶ ἐπεὶ τοίνυν τῶν ἰσῶν λόγων Α:
 Β καὶ Ε:Φ διπλασίονες εἰσιν οἱ λόγοι Α:Γ καὶ Ε:Χ, καὶ ὁ λόγος Ε:Χ
 ἴσος ἔσαι (7) τῷ λόγῳ Α:Γ, τετέστιν (ὅς ἐστὶν ὑποθ.) τῷ λόγῳ Ε:Ξ· ἀρ' οὖν
 (8) ἴσα τὰ Ξ καὶ Χ, οὐκ ἂν καὶ τὰ μέσα Ζ καὶ Φ ἴσα ἔσαι· ἀρχ Α:Β::Ε:Ζ.
 Ο. Ε. Δ.

Ἐκ τῆς ἀντιφατικῆς ὁρθῶς συνεπεράνθη ἡ ἀπόφανσις.

(1) ΚΖ. τῷ ε. (2) Α. τῷ ε. (3) ΚΖ. τῷ ε. (4) Ὁρ. Ι. τῷ ε. (5) ΚΖ. ὑποθ.
 (6) ΚΒ. τῷ ε. (7) διὰ τὴν ἀνωτ. (8) Θ. τῷ ε.

Μ Ε Ρ Ο Σ Β'.

Ὁ κατ' Εὐκλείδην διὰ τῶν Πολλαπλασίων Ὄρισμός τῶν ἴσων λόγων ἀποδείκνυται καὶ προτίθεται, καὶ δείκνυται τὸ μᾶλλον ἄμεσον, καὶ εὐχερέστερον γνῶρισμα τῆς τῶν λόγων Ἰσότητος.

Τὰ τῶν Ἀναλογιῶν ζοιχεῖα, μεθόδῳ (εἰ μὴ ἀπατώμεθα) προχειροτέρᾳ εἰληγησάμενοις, λοιπὸν ἡμῖν, ὃ τὸ Β'. ἢ τῶν ὑπερχημένων, πληρῶσαι. Ἐνταῦθα τοίνυν (τὸ ὑπὸ μηδενὸς εἰς τόδε γενόμενον) ἀποδείξομεν, μηδὲν ὅ,τι μὴ κατ' αὐτὸ τῇ ἐναργείᾳ τῇ κατὰ φύσιν φωτὶς ἐστὶ συμφανὲς λαμβάνοντες, ὡς λόγοι δύο ἀλλήλοις ἴσοι εἰσιν, ὅτε τὰ ὁποιαδήποτε Ἰσοπολλαπλάσια τῶν ἡγμένων, τοῖς τῶν ἐπομένων Ἰσοπολλαπλασίοις παραβαλλόμενα, αἰεὶ ἢ ἅμα μείζονα εἰσιν, ἢ ἅμα ἐλάχιστονα, ἢ ἅμα ἴσα. Οὐ δὲ τῆςδείξεως χαλεπήσετε ὅσης καὶ διεξοδικῆς, ὡς ἐξ αὐτῶν τῶν πραγμάτων εἶναι φανερόν, ῥᾶς ἂν τις ἐπιγνοίῃ πρωθυερέως πως τὸν Εὐκλείδην χωρῆσαι, τὸν ἐκ τῆς ἀναποδείκτου εἰς τόδε ταύτης ἰδιότητος τῶν πολλαπλασίων, ἧς ἡ ἐπιφορὰ ὅπως ἀσαφὲς οὕσα τυγχάνει, καὶ τῆς τῶν λόγων Ἰσότητος τοσούτον ἀπέχεται, ὡς ἐκ γνωρίσματος πρώτου καὶ βεσιμωτάτου τῶν ἴσων λόγων, ἐπὶ τὴν τέτων θεωρίαν ὀρμησάμενον.

Λ ἢ μ μ α Α'.

„Ἐςω $A : B :: \Gamma : Z$ · κείδω δὲ τῶν ἡγμένων A καὶ Γ , ὁποιαδήποτε Ἰσοπολλαπλάσια τὰ I καὶ Π , τετίξιν ἤτοι διπλάσια, ἢ τριπλάσια καὶ ἐφεξῆς, „ἔςω δὲ καὶ τῶν ἐπομένων B καὶ Z , ὁποιαδήποτε Ἰσοπολλαπλάσια τὰ Λ καὶ P .

„Ἐςαι δὲ δὴ $I : \Lambda :: \Pi : P$, ἥτις ἐστὶν ἡ Δ'. τῇ παρόντος Βιβλίου, ἢ ἐν τῷ Α'. μέρει παραλειφθεῖσα.

Ἐπεὶ γὰρ $A : B :: \Gamma : Z$, καὶ I τὸ διπλάσιον τῇ A ἔσαι πρὸς τὸ B , ὡς τὸ Π τὸ διπλάσιον τῇ Γ ἐστὶ πρὸς τὸ Z , καὶ I τὸ τριπλάσιον τῇ A ἔσαι πρὸς τὸ B , ὡς τὸ Π τὸ τριπλάσιον τῇ Γ ἐστὶ πρὸς τὸ Z , καὶ τὸτο ἐς ἄπειρον, ὅπερ ὅθεν ἤττον Ἀξιώματος αὐτολαμπές ἐστὶ καὶ αὐτόπιστον. Ἐπεὶ οὖν $I : B :: \Pi : Z$, ἔσαι καὶ I πρὸς Λ τὸ διπλὸν τῇ B , ὡς Π πρὸς P τὸ διπλὸν τῇ Z , καὶ ὅπως ἐς ἄπειρον, ὅπερ αὖθις ὅθεν τῶν Ἀξιωμάτων δεύτερον εἰς σαφήνειαν· δῆλον ὅρα τὸ προτεθέν.

Α'λλως. Ἐκ τῶν Προτ. Ις', ΙΕ', καὶ ΙΑ'. τῷ ε'.

Ἐπειδὴ $A : B :: \Gamma : Z$, ἐναλλάξ $A : \Gamma :: B : Z$. ἄλλ' (ΙΕ') $A : \Gamma :: I : \Pi$, καὶ $B : Z :: \Lambda : \rho$. ἄρα διὰ τὴν ΙΑ'. $I : \Pi :: \Lambda : \rho$, καὶ ἐναλλάξ $I : \Lambda :: \Pi : \rho$.

Λ ἦ μ μ α Β'.

„Ἐὰν τὰ Μεγέθη A καὶ B κοινὸν ἔχῃ μέτρον τὸ Γ , ἔσαι τὸ A τοσάκις „λαμβάνομενον, ὅσάκις ἐστὶ τὸ Γ ἐν τῷ B , ἴσον τῷ B τοσάκις λαμβανομένω, ὅσάκις ἐστὶ τὸ Γ ἐν τῷ A .

Περιεχέσω γὰρ δὴ κατ' ὑπόθεσιν τὸ Γ ἐν τῷ B τετράκις, ἐν δὲ τῷ A ἑξάκις, ὡς εἶναι μὲν τὸ $B = 4\Gamma$, εἶναι δὲ τὸ $A = 6\Gamma$. Τοιγαρὲν 6Γ (τετέσι τὸ A) ἐπιπολλαπλασιασθέν τῷ 4 (τετέσι τοσάκις ληφθέν, ὅσάκις τὸ Γ ἐστὶν ἐν τῷ B), δώσει δὴ 24Γ . ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ 4Γ (τετέσι τὸ B) ἐπιπολλαπλασιασθέν τῷ 6 (τετέσι τοσάκις ληφθέν, ὅσάκις τὸ Γ ἐστὶν ἐν τῷ A), δώσει δὴ 24Γ . Τὸ ἄρα A τοσάκις λαμβανόμενον, ὅσάκις τὸ Γ ἐστὶν ἐν τῷ B , τῷ B τοσάκις λαμβανομένῳ, ὅσάκις τὸ Γ ἐστὶν ἐν τῷ A , ἴσον ἐστὶ.

Θ ε ώ ρ η μ α Α'.

α. 319.

„Ἐὰν ὁ λόγος $\alpha\beta$ πρὸς $\zeta\iota$ μείζων ᾖ τῷ λόγῳ λ πρὸς ρ , τοιαῦτα δυνατόν ληφθῆναι τῶν ἡγμένων $\alpha\beta$ καὶ λ ἴσοπολλαπλάσια, τοιαῦτα δὲ ἴσοπολλαπλάσια καὶ τῶν ἐπομένων $\zeta\iota$ καὶ ρ , ὡς τῷ πολλαπλασίῳ τῷ ἡγμένῳ $(\alpha\beta)$ τῷ μείζονος λόγῳ, ὑπερέχοντος τὸ πολλαπλάσιον τῷ ἐπομένῳ $(\zeta\iota)$, τὸ τῷ ἡγμένῳ (λ) τῷ ἐλάσσονος λόγῳ πολλαπλάσιον, μὴ ὑπερέχειν τὸ πολλαπλάσιον τῷ ἰδίῳ ἐπομένῳ (ρ) .

Ἐς τὸν ὁ λόγος $\alpha\beta$ πρὸς $\zeta\iota$ μείζων τῷ λόγῳ λ πρὸς ρ , ἔσωσαν δὲ καὶ $\alpha\beta$ καὶ λ οἱ τῶν λόγων μείζονες ὅροι. Ἐπεὶ ταῖνυν $\alpha\beta$ πρὸς $\zeta\iota$ μείζονα λόγον ἔχει ἢ λ πρὸς ρ , ἑτερόν τι τὸ ϕ ἔξει πρὸς τὸ $\zeta\iota$, τὸν αὐτὸν λόγον (1) ὅν τὸ λ πρὸς τὸ ρ . καὶ ἐπειδὴ ὁ λόγος $\phi : \zeta\iota$ τῷ λόγῳ λ πρὸς ρ ἴσος ἐστὶ, ἐτέθη δὲ ὁ λόγος $\alpha\beta$ πρὸς $\zeta\iota$ μείζων τῷ λόγῳ λ πρὸς ρ , ἔσαι καὶ ὁ λόγος $\alpha\beta$ πρὸς $\zeta\iota$ μείζων τῷ λόγῳ ϕ πρὸς $\zeta\iota$, καὶ ἐπομένως $\alpha\beta$ μείζον ἐστὶ τῷ ϕ , ἃ δὴ πάντα κατ' αὐτὰ δῆλα ἐστὶ. τοῖνυν ἀπὸ τῶν $\alpha\beta$ δυνατόν ληφθῆναι τὸ $\alpha\gamma$ ἴσον τῷ ϕ , καὶ ἔσαι $\alpha\gamma : \zeta\iota :: \lambda : \rho$. Αἰρεῖσθω τοιγαρὲν τὸ λοιπὸν $\beta\gamma$ ἀπὸ $\alpha\gamma$, ὅσάκις ἂν ἐξῇ, οἷον τρεῖς, εἴτα τετμήσθω τὸ $\alpha\gamma$ εἰς τοσαῦτα ἴσα μέρη, φέρε

(1) Αἴ. τὸ πρὸ τῆς A . τῷ ε'.

Ξ, εἰς ὃ ἐκ τῶν ἐν ληφθῆναι ἂν ἔχοι πλεονάκεις ἀπὸ τῶ Ζι, ἢ βγ ἀπὸ αγ, οἷον τετράκεις, καὶ λοιπὸν ἔσω τὸ Ξι, ὅπερ ἔλαττον ἔσαι ἐνὸς μορίου· καὶ τῆτο δὲ δυνατόν εἶναι καὶ αὐτό τε δῆλον, καὶ ἐκ τῆς Α'. τῷ Γ'. Βιβλίῳ ἐπιφερόμενον ἐς, τῆς τῶν Ἀναλογιῶν μηδαμῶς ἐξηρητημένης· τῶν δὲ δὴ μορίων ἐκείνων τὸ Μεγεθος ἔσω Π.

Εἴπερ τοιγαρὲν τὸ Π κοινόν ἐστι μέτρον τῶν Μεγεθῶν αγ, ΖΞ, ἄρα τὸ αγ τοσάκεις ληφθὲν, ὡσάκεις τὸ π ἐγχωρεῖ ἐν τῷ ΖΞ, τατέσι τετράκεις, ἴσον ἐς τῷ ΖΞ τοσάκεις ληφθέντι, ὡσάκεις τὸ π ἔστιν ἐν τῷ αγ, τατέσιν ἐξάκεις. Εἴτα ἐπειδὴ τὸ λοιπὸν Ξι ἐνὸς μορίου ἔλαττον ἐστὶ, τατέσι τῷ π, ἔσαι τὸ Ξι τοσάκεις λαμβανόμενον, ὡσάκεις τὸ π ἐστὶν ἐν τῷ αγ, τατέσιν ἐξάκεις ἔλαττον εἰσέτι τῷ αγ. Ἐντι ἐπειδὴ τὸ βγ ἡττονάκεις ἀφαιρεθῆναι δύναται ἀπὸ τῷ αγ, ἢ τὸ π ἀπὸ τῷ Ζι (ὑπετέδη γὰρ τὸ μὲν βγ ἀπὸ τῷ αγ ἀφαιρεῖσθαι ἔχειν τρεῖς, τὸ δὲ π ἀπὸ τῷ Ζι τετράκεις), πρόδηλόν ἐστιν ὡς τὸ βγ τοσάκεις λαμβανόμενον, ὡσάκεις ἐστὶ τὸ π ἐν τῷ Ζι, τατέσι τετράκεις, μείζον ἔσαι τῷ αγ, καὶ ἐπομένως πολλῶ μείζον ἢ τὸ Ξι λαμβανόμενον ἐξάκεις, ὅπερ ἀνωτέρω ἐδείχθη ἔλαττον ὂν τῷ αγ. Ἀλλὰ μὴν ἐδείχθη ὅτι τὸ αγ τετράκεις, καὶ τὸ ΖΞ ἐξάκεις λαμβανόμενα ἴσα ἐστίν, εἴαν ἄρα τῷ αγ τετράκεις λαμβανομένῳ προσεθῇ τετράκεις τὸ βγ, καὶ τῷ ΖΞ ἐξάκεις λαμβανομένῳ προσεθῇ τὸ Ξι ἐξάκεις, ἔσονται τὰ 4 αγ καὶ 4 βγ, τατέσι τὰ 4 αβ, μείζονα τῶν 6 ΖΞ καὶ 6 Ξι, τατέσι τῶν 6 Ζι· ἐπειδὴ δὲ τὰ 4 αγ ἴσα ἢν τοῖς 6 ΖΞ, ἔσαι τὰ 4 αγ ἐλάσσονα τῶν 6 Ζι· ἀλλ' ἐτίθετο ἀνωτέρω αγ:Ζι::λ:ρ, ἄρα (διὰ τὸ Α'. Λήμ.) τὰ 4 λ ἐλάσσονά ἐστι τῶν 6 ρ· καὶ ἐλήφθη ἄρα τῶν ἡγεμένων αβ καὶ λ τὰ Ἰσοπολλαπλάσια, τατέσι τὰ τετραπλάσια, καὶ δὴ καὶ τῶν ἐπομένων Ζι καὶ ρ τὰ Ἰσοπολλαπλάσια, ἦτοι τὰ ἑξαπλάσια, καὶ μὴν ἐδείχθη ὅτι τὸ πολλαπλάσιον τῷ ἡγεμένῳ αβ (τατέσι τὰ 4 αβ) ὑπερέχει τὸ πολλαπλάσιον τῷ ἐπομένῳ Ζι (τατέσι τὸ 6 Ζι), τὸ δὲ τοι πολλαπλάσιον τῷ ἡγεμένῳ λ (ὅπερ ἐστὶ 4 λ) ἔχ ὑπερέχει τὸ πολλαπλάσιον τῷ ἐπομένῳ ρ (τατέσι τὸ 6 ρ). Ο. Ε. Δ.

Θ ε ὡ ρ η μ α Β'.

„Εἴαν τῶν ἡγεμένων (α, γ) ὅποιον Ἰσοπολλαπλάσια, ὅποισιν
 „τῶν ἐπομένων (β, ζ) Ἰσοπολλαπλάσιοις, ἦτοι ἅμα ἴσα ἢ, ἢ τῶν
 „ἅμα μείζονα, ἢ ἐλάσσονα, ὁ λόγος (α:β) τῷ λόγῳ (γ:ζ) ἴσος ἔσαι.

Εἰ γὰρ μὴ, ἀλλ' ἔσω ὁ λόγος α:β > γ:ζ. Διὰ δὲ τὸ ἀνωτέρω Θεώρημα, τοιαυτὰ ἅττα μὲν τῶν ἡγεμένων α καὶ γ, τοιαυτὰ δὲ τῶν ἐπομέ-

νων λαβεῖν ἐνὶ ἰσοπολλαπλάσια, ὡς τὸ τῷ ἡγμένῳ α πολλαπλάσιον ὑπερέχον τὸ πολλαπλάσιον τῷ ἐπομένῳ β, τὸ θατέρῳ ἡγμένῳ γ πολλαπλάσιον ἡμῖς ὑπερέχειν τὸ πολλαπλάσιον τῷ ἐτέρῳ ἐπομένῳ ζ· ἄτοπον δὲ ὡς τὴν ὑπόθεσιν περιτρέπον. Ἀρα κτ.

Εἰν τῇ δὲ τῇ ἀποδείξει, οἷα καὶ ταῖς ἐξῆς, τῶν ἐν τῷ Ε'. Βιβλίῳ αἱ Προτάσεις παραλαμβάνονται αἱ αὐτοφανεῖς καὶ αὐτόπιστοι.

Θ ε ώ ρ η μ α Γ'.

„Εἴαν τοιαῦτα μὲν τῶν ἡγμένων (Ξ, Ρ), τοιαῦτα δὲ τῶν ἐπομένων (Π, Σ) ἰσοπολλαπλάσια ληφθῆναι δυνατόν ἢ, ὡς τῷ πολλαπλασίῳ θατέρῳ τῶν ἡγμένων (Ξ) τὸ τῷ ἐπομένῳ (Π) πολλαπλάσιον ὑπερέχοντος, τὸ θατέρῳ τῶν ἡγμένων (Ρ) πολλαπλάσιον, τὸ τῷ ἐπομένῳ αὐτῷ (Σ) πολλαπλάσιον μηδαμῶς ὑπερέχειν, ἔσαι ὁ λόγος (Ξ : Π), καὶ ὅν τὸ τῷ ἡγμένῳ πολλαπλάσιον ὑπερέχει τὸ πολλαπλάσιον τῷ ἐπομένῳ, μείζων θατέρῳ (Ρ : Σ).

Αἰτίαι γὰρ εἶναι τὰς τοιαύτας λόγους ἔτω κατασκευάζω. Εἰ γὰρ ἴσοι, τὰ τῶν ἡγμένων ὁποιαδήποτε ἰσοπολλαπλάσια (ὡς ἐκ περιστάσεως σαφές ἐκ τῷ Α'. Λήμματος), τῶν ἐπομένων ὁποιοῦνδήποτε ἰσοπολλαπλασίων ἢ ἅμα μείζονα, ἢ ἅμα ἐλάσσονα, ἢ ἅμα τέτοις ἴσα. Περιτρέπει δὲ ταῦτα τὴν ὑπόθεσιν.

Τὸν δὲ δὴ λόγον (Ξ : Π), καὶ ὅν τὸ τῷ ἡγμένῳ ἰσοπολλαπλάσιον ὑπερέχον τίθεται, μείζονα τυγχάνειν, ὡς πῶς δείκνυμι. Εἰ γὰρ μὴ, ἔσω δὴ ὁ λόγος (Ρ : Σ) μείζων τῷ λόγῳ (Ξ : Π), ἂρ οὖν (κατὰ τὸ Α'. Θεώρ.) τοιαῦτα δὴ ληφθῆναι δυνατόν τῶν ἡγμένων Ρ καὶ Ξ ἰσοπολλαπλάσια, τοιαῦτα δὲ καὶ τῶν ἐπομένων Σ καὶ Π, ὡς τὸ τῷ ἡγμένῳ Ρ τῷ κατὰ τὸν μείζονα λόγον πολλαπλάσιον, ὑπερέχον τὸ πολλαπλάσιον τῷ ἐπομένῳ Σ τότε τῷ ἡγμένῳ Ξ πολλαπλάσιον, μὴ ὑπερέχειν τὸ πολλαπλάσιον τῷ ἐπομένῳ Π. Οὐκ ἐστὶν δὲ τοιαῦτα (ὅπερ ἐκ τῷ Α'. τῶν Θεωρημάτων εὐαπόδεικτον ἐστίν), ὡς τῷ πολλαπλασίῳ τῷ Ξ ὑπερέχοντος τὸ τῷ Π πολλαπλάσιον, τὸ πολλαπλάσιον τῷ Ρ μὴ ὑπερέχειν τὸ πολλαπλάσιον τῷ Σ. Ὅπερ ἂν ἦτο ἀναίρεται τὰ τῆς ὑποθέσεως.

Θ ε ώ ρ η μ α Δ'.

„Τῷ λόγῳ ἀλόγῳ τυγχάνοντος, ἔστιν ὅτι τῶν τῶν τῷ ἡγμένῳ πολ-

„λαπλασίων, οὐδενὶ ὁτῶν τῶν τῷ ἐπομένῳ πολλαπλασίων ἰσὺν ἂν εἶη.
 „Ταύτῃ δέ τοι ἐν οἷς διὰ τῶν πολλαπλασίων ζητεῖται ἢ τῶν ἀλόγων ἀνα-
 „λογίων ἰσότης, νοητέον μόνον τῶν πολλαπλασίων τὸ ἅμα τῆς ὑπερο-
 „χῆς καὶ ἐλλείψεως.

Ἐς δὲ λόγος ἄλογος $A : B$. Εἴπερ οὖν τὸ A ποσάκις ληφθέν, ἰσώθῃναι εἶχε τῷ B ποσάκις ληφθέντι, ὡς ὑφ' ἑκατέρῃ ἴσην πηλικότητα συσαθῇναι τὴν Z , ἑκάτερον ἂν A καὶ B ἢ ἂν τῷ αὐτῷ Z συμμετρῶς ἔ-
 χον, καὶ σύμμετρα ἂν ἦτην, κατὰ τῆς ὑποθέσεως.

Ἐπειδὴ δὲ τῶν Θεωρημάτων τὸ B' ὑδὲν ἦττον τοῖς ἀλόγοις, ἢ τοῖς
 λογικοῖς τῶν λόγων προσήκον ἐστὶ, τῇ ἅμᾳ ὑπεροχῇ τε καὶ ἐλλείψει τὴν
 ἅμα ἰσότητα προσιδέμεθα σὺν τῷ Εὐκλείδει.

Τοῖς παρὰ τῷ Στοιχειωτῇ ἐν Ὀρίσμοις E' καὶ ϵ' ὑποτιθεμένοις ὡς
 δειχθεῖσιν, ἀπασαι ἡδὴ αἱ ἐν τῷ E' καὶ ϵ' Βιβλίῳ ἀποδείξεις ἔχουσι τὸ
 ἐδραῖον· καὶ δῆλον ἄρα ὡς τὸ τῆς ἅμα νοημένης ὑπεροχῆς, εἴταν ἐλλεί-
 ψως τεκμήριον, ἀπασίως ἔχει εἰς διαγνώρισιν τῆς τῶν λόγων ἰσότητος,
 ἔχ' ἀπλῶς μὲν τοι, ὑδὲ ἀμέσως, τῆς δὲ ἣν φθάσαντες παρεχόμεθα δεκ-
 ξως ὀρθῶς πρῶτον κατανοηθείσης.

Ἀλλὰ γὰρ ἐπεὶ τὸ διὰ τῶν πολλαπλασίων τεκμήριον καί τοι ἀσφα-
 λές, πορρώτερον γεμὴν ὅν τυγχάνει καὶ πεπλεγμένον, ἕτερον ἀντ' ἐκείνου
 σαφέστατον τε ἅμα καὶ ἐγγυτάτω ὅν, ἡμοι ὑπέσχηται, προδήσομαί τε καὶ δεῖξω.

Θ ε ω ρ η μ α Ε'.

„Ἐὰν τὰ ἐπόμενα ($\gamma\zeta$, $\nu\pi$), καὶ τῶν ἐπομένων ἑκάστων μέρος ὁμοῖον α. 320.
 „(οἷον δεκατημόριον, ἑκατοσημόριον, χιλιοσημόριον, καὶ ἥτως ἐφεξῆς πέ-
 „ηρατος ἄνευ), ἐν τοῖς ἡγεμένοις ($\alpha\beta$, $\eta\mu$) ἰσαρίθμῳ αἰεὶ ὥστις περιεχόμενα,
 „οἱ λόγοι ($\alpha\beta$ πρὸς $\gamma\zeta$, καὶ $\eta\mu$ πρὸς $\nu\pi$) ἴσοι ἔσονται.

Σεσημειώσω, ὅτι τὴν ἰσαρίθμον ἑκατέρωστε περισχὴν ἐκ τῆς ἰσαρίθμου
 ἑκατέρωθεν ἀφαιρέσεως τεκμαιρόμεθα.

Δείκν. Εἰ μὴ γυν, ἔσαι τῶν λόγων ὁ ἕτερος, οἷον ὁ $\alpha\beta$ πρὸς $\gamma\zeta$,
 μείζων τῷ λόγῳ $\eta\mu$ πρὸς $\nu\pi$ · καὶ δῆλον ταῖνον, ὅτι Εὐδεῖα τις (οἷον ἢ $\alpha\delta$)
 ἐλάσσων τῆς $\alpha\beta$ λόγον ἔξει πρὸς $\gamma\zeta$, ὅν $\eta\mu$ πρὸς $\nu\pi$ · οὐδὲν δὲ ἦττον
 σαφές, ὅτι καί τι τῶν ἐπὶ τῆς $\gamma\zeta$ μορίων (οἷον εἰπεῖν φέρε τὸ τριακὸς ὄν),
 ἔλαττον τῆς διαφορᾶς $\delta\beta$. Ἐς δὲ ἢ γε τριακὸς ὄν τῆς $\gamma\zeta$, καὶ ἀφαιρεθῇ τῷ
 ἀπὸ τῆς $\alpha\beta$ ὁσάκις ἂν ἐξῇ, οἷον χιλιάκις, ἔσω δὲ ὅλον τὸ ἀφαιρεθὲν $\alpha\beta$.

καὶ ἐπεὶ αὖ εἶναι τίθεται 1000 πρὸς 1 τὴν γε, ἡ δὲ γζ 30 πρὸς μονάδα τὴν γε, ἔσαι αὖ : γζ :: 1000 : 30.

κ. 320.

Ἦδη οὖν ληφθήτω καὶ ἀπὸ τῆς νπ μέρος τὸ νρ ὁμοιον τῷ ληφθέντι γε, ἡλικὸν τριακῶν· καὶ ἐπεὶ καὶ ὑπόθεσιν αἱ γε καὶ νρ ἰσαριθμῶς ἐν ταῖς αβ, ἡμ περιεχόμεναί εἰσιν, ἐκείνων τε ἡ γε ἀπὸ τῆς αβ ὅσας ἐξῆν ἀφαιρεται, ὅσον χιλιάκις, καὶ αὐτὴ δὲ ἡ νρ ἀπὸ τῆς ἡμ χιλιάκις ἂν ἔχοι ἀφαιρεθῆναι. Ἐπεὶ δὲ τοι τὸ ὅλον ἀφαιρεθὲν ἡκ ἐστὶ 1000 πρὸς 1 τὴν νρ, καὶ νπ ἐστὶ 30 πρὸς τὴν αὐτὴν νρ, ἔσαι δὲ ἡκ : νπ :: 1000 : 30, τατέσιν ὡς αὖ πρὸς γζ. Ἦδη δὲ τῆς γε ἀφαιρέσεως ὅσας ἐξῆν ἀπὸ τῆς αβ, καὶ καταλιπέσθης τὴν ξβ, τῆς τε ξβ ἐλάττωτος ἔτω τῆς γε ὑποτιθεμένης, ἡ γε τριακοσημόριον ἔσα τῆς γζ ἐλάττων ἐλήφθη τῆς δβ· τοιγαρὺν ἡ ξβ πολλῷ ἐλάττων τῆς δβ, ὥς ἡ αὖ μείζων τῆς αδ, καὶ ἐπομένως αὖ : γζ > αδ : γζ. ἐτίθετο δὲ αδ : γζ :: ἡμ : νπ, ἄρα αὖ : γζ > ἡμ : νπ, τατέσι πολλῷ μείζων τῷ ἡκ πρὸς νπ· ἄτοπον δὲ, εἰδείχθη καὶ γὰρ αὖ : γζ :: ἡκ : νπ. Ἀδύνατον ἄρα τὰς δοθέντας λόγους αβ πρὸς γζ καὶ ἡμ πρὸς νπ εἶναι ἀνίστους, ὥς ἐστι εἰσὶν. Ο. Ε. Δ.

Θ ε ὡ ρ η μ α ζ'.

„Ἐὰν ᾖτοι τὰ ἐπόμενα (γζ, νπ), ἡ τῶν ἐπομένων ὁποιαδήποτε μόρια ὁμοία (οἷον δεκατημόρια), μὴ ἰσαριθμῶς ἐν τοῖς ἡγαμένοις (αβ, ἡμ) περιεχόμενα ᾖ, οἱ λόγοι (αβ : γζ, καὶ ἡμ : νπ) ἀνιστοὶ ἔσονται, καὶ τήτων μείζων, καὶ τὸ τῷ ἐπομένῳ μόριον πλεονάκις ἐμπεριέχεται.

κ. 321.

Ἐς ὧ δὲ περιεχόμενον τὸ γε, δεκατημόριον φέρεται τῷ γζ, ἐν τῷ αβ χιλιάκις, καὶ ἔσω αὖ 1000 πρὸς 1 τὴν γε, τὸ δὲ λοιπὸν ξβ ἐλάττον τῷ γε. Εἴτα δὲ νρ δεκατημόριον τῷ νπ περιεχέσθω ἐν τῷ ἡμ 997κις, ὡς εἶναι τὸ ἡκ 997 πρὸς 1 τὴν νρ, καὶ δῆλον ὡς τὸ λοιπὸν ἡμ ἐλάττον τῷ νρ, ἀντεῦθεν 1000κις τὸ νρ μείζον τῷ ἡμ. Ἀλλὰ γὰρ ἔσω ἡσ 1000 πρὸς 1 τὴν νρ, καὶ ἐπεὶ αὖ ἐστὶ 1000 πρὸς 1 τὴν γε, καὶ ἡσ 1000 πρὸς 1 τὴν νρ, καὶ δὲ καὶ γζ 10 πρὸς γε, καὶ νπ 10 πρὸς νρ, ἔσαι αὖ : γζ :: ἡσ : νπ, ἄρα αβ : γζ ἐν μείζονι λόγῳ, ἢ περ ἡσ : νπ, καὶ ἐπομένως ἐν πολλῷ μείζονι, ἢ ἡμ πρὸς νπ. Ο. Ε. Δ.

Καὶ ἔστιν ἄρα ἡμῖν ἀναμφίριον καὶ ῥᾶρον νοηθῆναι τεκμήριον, πρὸς τὴν τῶν ἴσων τε καὶ ἀνίσων λόγων ἐπίκρισιν. Ἐξ οὗ καὶ πάσας, ὅποσας μὴ αὐτόπιστοι εἰσιν, ἔχομεν ἂν τὰς τῷ Ε'. Βιβλίῳ Προτάσεις, καὶ διὰ ἴσοπολλαπλασίων ὁ Στοιχειωτής ἐπεχείρησεν, ἀποδείξαι, εἰμὴ πρῶτον ἔσεσθαι τοῖς μαθητιώσιν ἐγνώκειμεν, κατὰ τὴν ἐν τῷ Α'. μέρει μέθοδον αὐτὰς ὑποδέσθαι.

Μ Ε Ρ Ο Σ Γ.

Περὶ τῶν κατὰ τῆς λόγου Παρανομασιῶν, καὶ τέτων Ἀλγορίθμου,
καὶ Συνθέσεως.

§. Α'.

Διαίρεσις τῶν λόγων.

Διαιρεῖται δὴ πρὸ πάντων ὁ λόγος εἰς λογικὸν καὶ ἄλογον, ὡς εἴρηται ἐν Ὁρ. Δ., ὁ δὲ λογικὸς εἰς τὸν κατ' ἰσότητα καὶ ἀνισότητα, ὅς ἐστι ὑποδιαιρεῖται εἰς τὸν κατὰ τὴν μείζονα ἀνισότητα, ἔνθα τὸ ἡγούμενον μείζον τῷ ἐπομένῳ, καὶ εἰς τὸν κατ' ἐλάσσονα ἀνισότητα, ἔνθα τὸ ἡγούμενον ἐλάττον τῷ ἐπομένῳ.

Τῷ δὲ δὴ λογικῷ λόγῳ τῷ κατὰ τὴν μείζονα τῶν ἀνισοτήτων εἶδη πέντε. Ὁ μὲν γὰρ Πολλαπλάσιος, ὁ δ' Ἐπιμόριος, ὁ δ' Ἐπιμερής, ὁ δὲ πολλαπλάσιος Ἐπιμόριος, ὁ δὲ πολλαπλάσιος Ἐπιμερής.

Καὶ Πολλαπλάσιος μὲν, ὅτε ὁ μείζων τὸν ἐλάττονα τῶν ὄρων πλεονάκις περιέχων ἐστίν, οἷον δις, τρίς, τετράκις, κξ., ὅς ἐστι φερωνύμως ἀπὸ τῆς περιοχῆς διπλάσιος ἀκύνει, καὶ τριπλάσιος, καὶ τετραπλάσιος, κξ.

Ἐπιμόριος δὲ λόγος, ὅτε ὁ μείζων τὸν ἐλάττονα τῶν ὄρων ἅπαξ περιέχει, καὶ μόριόν τι τῶν ἐν αὐτῷ, οἷος ὁ λόγος 3 πρὸς 2, ἢ 6 πρὸς 4, ὅς ἐστι καλεῖται καὶ Ἡμιόλειος· ὁ γάρ τοι μείζων τὸν ἐλάττονα ἅπαξ περιέχει, καὶ τέτα ἡμίσειαν· καὶ ὁ λόγος 4 πρὸς 3, ἢ 16 πρὸς 12, ὅς ἐστι Ἐπίτριτος λέγεται, τῷ μείζονος τὸν ἐλάττονα ἅπαξ, καὶ τέτα πρὸς τριτημόριον περιέχοντες, καὶ ὕτως ἐφεξῆς.

Λόγος δὲ ἐπιμερής ἐστίν, ὅτε ὁ μείζων τὸν ἐλάττονα τῶν ὄρων ἅπαξ περιέχει, καὶ τέτα μέρη μὴ μόριον συναποτελόντα. Τοιοῦτος ὁ λόγος 8 πρὸς 5, καὶ 14 πρὸς 10, τὸ γὰρ 8 περιέχει τὸ 5 ἅπαξ, καὶ ἔτι πρὸς 3, αὐτὸν ἐστὶν τρία πεμπτημόρια τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ 5, ἅπερ ἅμα ληφθέντα μόριον ἐν τῷ πενταδικῷ ἁδαμῶς δίδωσιν· ὡσαύτως δὲ καὶ 14 περιέχει τὰ 10 ἅπαξ, καὶ δις 2, τετέστι δύο πεμπτημόρια τῷ ἀριθμῷ 10, αὐτὰ ἅμα ληφθέντα (ἤτοι 4) ἐντι μόριον τῷ 10 ἡκιστα συναποτελεῖ. Προστέθει γὰρ τὸ μόριον μὴ συναποτελεῖν, εἴη γὰρ ἂν εἴπερ ἄλλως ὁ λόγος Ἐπιμόριος.

Λόγος δὲ πολλαπλάσιος ἐπιμόριος ἐστίν, ὅτε ὁ μείζων τὸν ἐλάττονα

πλεονάκις περιέχει, ἔτι πρὸς αὐτῇ μόριον, ὅς ἐστι ὁ λόγος 5 πρὸς 2, ἢ 10 πρὸς 4 κξ.

Λόγος δὲ πολλαπλάσιος ἐπιμερὴς ἐστίν, ὅτε ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα πλεονάκις περιέχει, ἔτι μέρη τῇ αὐτῇ, μηδέν τι μόριον συναποτελεῖντα· τοιοῦτος ὁ λόγος 8 πρὸς 3, ἢ 16 πρὸς 6, κξ.

§. Β'.

Περὶ Παρονομασί᾽ τῶ λόγου τῆ λογικῆς.

Παρονομασίης τῆ λογικῆς λόγου ἐστίν, ὁ σαφῶς τε ἢ εὐκρινῶς ἐκδηλῶν τὴν διατέρε των ἀριθμῶν χέσιν πρὸς δι᾽ ἄτερον, ἀμέλειται ὁ ἕτως ἔχων πρὸς τὴν μονάδα, ὡς ὁ μείζων τῶν ὄρων πρὸς τὸν ἐλάσσονα, ἢ παραδεικνύς ὅσάκις ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα περιέχει, ἢ (ὁ ταυτὸν ἐστίν) ὅσάκις ὁ ἐλάσσων ἐν τῷ μείζονι περιέχεται. Τῷ γὰρ λόγῳ 27 πρὸς 9 Παρονομασίης ἐστίν ὁ 3, ἐπεὶ γὰρ τὰ 3 πρὸς τὴν μονάδα, ὡς 27 πρὸς 9· ὅθεν δείκνυται διὰ τῆ 3, ὅτι τρεῖς ἐν τῷ ἡγυμένῳ τὸ ἐπόμενον περιέχεται.

Λόγος δὲ παντὸς ὁ Παρονομασίης ἐξευρίσκειται, τῷ μείζονος τῶν ὄρων διαιρεμένης διὰ τῆ ἐλάσσονος, οὕτω γάρτοι τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως Πηλίκον, τῷ λόγῳ Παρονομασίης ἔσται, καθότι γὰρ τὸ Πηλίκον ἐστὶ πρὸς τὴν Μονάδα, ὡς ὁ Διαιρετέος πρὸς τὸν Διαιρετήν, ταυτὸν εἰπεῖν, ὡς τῶν ὄρων ὁ μείζων πρὸς τὸν ἐλάσσονα.

Οἷον δὴ κείῳ λόγῳ 60 πρὸς 6· διαιρείῳ δὲ τὰ 60 διὰ 6, ἢ Πηλίκον ἀνακύψει τὸ 10, ὃ ὁ τῷ λόγῳ τυγχάνει Παρονομασίης. Ἀλλὰ κείῳ λόγῳ 60 πρὸς 16, διαιρείῳ δὲ 60 διὰ 16, Πηλίκον ἀνακύψει $3\frac{3}{4}$, ὅς ἐστιν ὁ Παρονομασίης.

§. Γ'.

Περὶ Παρονομασιῶν τῶν λόγων τῶν ἀλόγων.

Τῶν ἀλόγων λόγων ἐφ' ἑντι κοινὸν ἐπόμενον ἀναχθέντων, τὰ τῇ κοινῇ ἐπόμενα ἡγύμενα, οἱ Παρονομασίαι αὐτῶν ἐσονται, τὸ δὲ τοι κοινὸν ἐπόμενον ἔργον τε, ἢ τάξιν Μονάδας πληρώσει.

Λόγος δὲ ἕδενός, ὅς ἐστιν ἄλογος ἢ, μόνον ἐκκειμένη τὸν Παρονομασίην δυνατόν παρασῆσαι. Ἐὰν δὲ δύο ἢ πλείους τύχωσι καθ' ἑτερόν τινα νῦν, οἱ τῶν Παρονομασιῶν παρασῆαι δεικνύντες δηλονότι, ὅπως τῶν λόγων ὁ ἕτερος ἔχει πρὸς δι᾽ ἄτερον, ὃ δὴ περ' ἀρις σεσημειωκῶς φέρεται Γρηγόριος ὁ παρὰ τῷ

Α' γὰρ βικεντίε ἐν Βιβλ. Η'. τῷ Γεωμετρικῷ πονήματος αὐτῇ Ο'ρ. Β'. Οὗτος οὖν πολλοῖς τε καὶ ἐπισήμοις εὐρήμασι τὴν Γεωμετρικὴν ἐπαυξήσας, ἐν τῷ Η'. μάλις Βιβλίῳ τῷ εἰρημένῳ Συγγραμματος, ὡς καινὴν τινα χαρὸν ἐπισήμην περὶ Ἀναλογιῶν δειμάμενος εἰκότως γεραίρεται.

Κεῖθωσαν οὖν ἄλλοι λόγοι Α πρὸς Β, καὶ Γ πρὸς Δ, καὶ ἀναχθῆτωσαν πρὸς τὰς λόγους Ζ : Ψ, καὶ η : Ψ κοινὸν ἔχοντες ἐπόμενον τὸ Ψ, ὥστε εἶναι τὸν λόγον Ζ : Ψ = Α : Β, καὶ τὸν λόγον η : Ψ = Γ : Δ. Ἐπὶ δὲ τούτων τὸ κοινὸν ἐπόμενον Ψ, τὸ ἔργον ἐκτελέσει τὸ τῆς Μονάδος, τὰ δὲ ἡγόμενα Ζ καὶ η ἔσονται οἱ Παρονομασίαι τῶν λόγων Ζ πρὸς Ψ, καὶ η πρὸς Ψ (τετέσι τῶν λόγων Α πρὸς Β, καὶ Γ πρὸς Δ)· παραδεικνύουσι γὰρ ὅπως ὁ ἕτερος τῶν λόγων ἔχει πρὸς ἑαυτὸν, καὶ γὰρ Ζ : η, ὡς ὁ λόγος Ζ : Ψ πρὸς τὸν λόγον η : Ψ, ἥτοι ὁ Α : Β πρὸς τὸν Γ : Δ.

§. Δ'.

Ἀξιώματα:

Οἱ λόγοι (Ζ : Ψ καὶ η : Ψ), οἷς κοινὸν ἐστὶν ἐπόμενον (τὸ Ψ), λόγον ἔχουσι Α'. πρὸς ἀλλήλους, ἡλικὸν τὰ ἡγόμενα (Ζ καὶ η)· ἐστὶ δὲ ἡ Β'. τῶν ἐν τῷ Η'. Βιβλ. παρὰ Γρηγ. τῷ εἰρημένῳ.

Τετέσι δὲ ὁ λόγος η : Ψ τοσούτῳ μείζων ἐστὶ τῷ Ζ : Ψ, ὅσῳ τὸ η μείζον τυγχάνει τῷ Ζ.

Οἱ λόγοι (ι : λ, καὶ ι : μ) οἷς κοινὸν ἐστὶ τὸ ἡγόμενον, τὸν κατὰ τὰ ἐπόμενα λόγων ἀντιπεπόνθασιν· ἐστὶ δὲ Πρὸτ. Ζ'. τῶν ἐν τῷ Η'. Βιβλ. παρὰ Γρηγ.

Τούτο δὲ ἐστίν, ὅτι ὁ λόγος ι : λ ἐστὶ πρὸς τὸν λόγον ι : μ, ὡς ἀντιερρόφως μ ἐπόμενον πρὸς λ ἐπόμενον, ἥτοι ὁ λόγος ι : λ τοσούτῳ μείζων τῷ ι : μ, ὅσῳ τὸ μ μείζον τῷ λ.

Οἱ λογικοὶ τῶν λόγων εἰσὶ πρὸς ἀλλήλους ὡς οἱ τάτων Παρονομασίαι. Γ'.

Οἷον κεῖθωσαν λόγοι 12 πρὸς 3, καὶ 15 πρὸς 6, ὧν Παρονομασίαι 4 καὶ 2½· καὶ κατὰ τὸν Ὅρισμόν (1) 12 : 3 = 4 : 1, ὁ δὲ λόγος 15 : 6 = 2½ : 1· ἀλλὰ μὲν 4 : 1 ἐστὶ πρὸς τὸν λόγον 2½ : 1, ὡς (2) 4 : 2½, ἄρα καὶ ὁ λόγος 12 : 3 ἐστὶ πρὸς τὸν λόγον 15 : 6, ὡς ὁ Παρονομασίης 4 πρὸς τὸν Παρονομασίην 2½.

Ἡ τῶν ἀλόγων λόγων προδιεσεις καὶ ἀφαίρεσις.

Οἱ δοθέντες λόγοι (A : B καὶ Γ : Δ) ἀναχθῆναι ἐπὶ τὰς τὸ αὐτὸ ἔχοντας ἐπόμενον (Ζ : θ καὶ η : ζ), τὸ θ· τῶν γένῃ ἡγυμένων Ζ καὶ η πρὸς θίνων ἀλλήλους, ἔσται τὸ ἀξιοισμα ζη πρὸς τὸ ἐπόμενον θ, ἴσον τοῖς λόγοις Ζ : θ καὶ η : ζ, ταῦτά τοῖς λόγοις A : B καὶ Γ : Δ.

Ἡ δὲ τῆτων ἀφαίρεσις τελεῖται τῶν δοθέντων λόγων ἐπὶ τὸ αὐτὸ κοινὸν ἐπόμενον ἀναγνομένων, καὶ τῷ ἐλάχιστος ἡγυμένῃ, ὅσον τῇ η, ἀπὸ τῷ μέλειοις φέρε Ζ ἀφαιρουμένῃ· ὁ γάρτοι τῷ λοιπῷ πρὸς θ, ἔστιν ὁ λοιπός, μετὰ τὸ τὸν λόγον η : θ, ἦτοι τὸν Γ : Δ ἀφαιρουμένην ἀπὸ τῷ λόγῳ Ζ : θ, ἦτοι τῷ A : B. Δηλον ἐκ τῷ Α'. Ἀξιωματος.

§. 7.

Οἱ τῶν λογικῶν λόγων πολλαπλασιασμός, καὶ ἡ τῆτων διαιρέσις.

Οἱ τῶν λόγων Περὶομασαι ἐπὶ ἀλλήλους πολλαπλασιασθέντες, δύν-

S. E.

Ἡ τῶν λογικῶν λόγων πρόδεις καὶ ἀφαίρεσις.

Προσδίδεται οἱ λόγοι τῶν κατ' αὐτῆς Παρονομασιῶν προσιδισμένων· ὁ γάρτοι λόγος, ὃν τὸ τῶν Παρονομασιῶν ἀΐσθησιμα ἔχει πρὸς τὴν μονάδα, τὸ τῶν δοθέντων λόγων τυγχάνει ἀΐσθησιμα.

Κείσθωσαν λόγοι 12 : 3 καὶ 15 : 6, καὶ τῶν Παρονομασιῶν 4 καὶ 2 $\frac{1}{2}$ προσιδισμένοι ἀλλήλοις καὶ 6 $\frac{1}{2}$ συναποτελῶντες· ὁ τοῦτον λόγος 6 $\frac{1}{3}$ πρὸς 1, ἵσος κείνεται τοῖς λόγοις 12 : 3 καὶ 15 : 6· Διήλων δὲ ἐκ τῶν Ἀξιῶμ. τῆ Α καὶ τῆ Γ· Ἀφαιρῶνται δὲ ἀφαιρημέναι τῇ ἐλάσσονος τῶν Παρονομασιῶν ἀπὸ τῆ μέζονος, ὅν γὰρ ἔχει λόγον τὸ λοιπὸν πρὸς τὴν μονάδα, τοῦτον ἔχει τὸ λοιπὸν, μετὰ τὸ τὸν ἐλάσσονα τῶν λόγων ἀπὸ τῆ μέζονος ἀφαιρεσθῆναι. Διήλων καὶ τῷτο ἔκτε τῆ Α· καὶ τῆ Γ· Ἀξιῶμ.

Κείσθωσαν οἱ λόγοι 12 : 3 καὶ 15 : 6, ὧν Παρονομασιῶν 4 καὶ 2 $\frac{1}{2}$, ἀφαιρεσθῆτω δὲ ὁ ἐλάσσων 2 $\frac{1}{2}$ ἀπὸ τῆ μέζονος 4, ὥστε λοιπὸν εἶναι $\frac{1}{2}$. Ταῦ γυναικὶ πρὸς τὴν 1, ἐστὶν ὡς ὁ λοιπὸς λόγος, μετὰ τὴν γενομένην ἀφαίρεσιν τῆ 15 : 6 ἥτοι τῆ 2 $\frac{1}{2}$: 1, ἀπὸ τῆ λόγου 12 : 3, ἥτοι 4 : 1.

εστι τὸν Παρονομαζήν τῷ λόγῳ, τῷ ἐκ τῶν δοθέντων διὰ πολλαπλασιασμῷ παρακύπτοντος.

Τατέστιν ὁ λόγος, ὃν πρὸς τὴν μονάδα ἔχει ὁ διὰ πολλαπλασιασμῷ ἐπ' ἀλλήλοις τῶν Παρονομαζῶν παρηγμένος ἀριθμός, αὐτὸς ὁ ἐκ τῷ πολλαπλασιασμῷ τῶν λόγων ἐστὶ γινόμενος. Δῆλον δὲ ἐκ τῶν Α' ξιώμ. Α'. ἢ Γ'. ὁ γὰρ τῶν λόγων πολλαπλασιασμός, ἔδεν ὅτι μὴ θατέρῃ ἐπὶ θατέρῳ ἐπανειλημμένη τις πολλακὶς προόδους ἐστὶ· τῆτον δὲ τελεῖσθαι ἐπαναληφθείσης πολλακὶς τῆς τῶν ἡγεμένων προόδου, προδήλόν ἐστιν ἔκτε τῷ Α'. ἢ τῷ Γ'. Α' ξιώματος.

Οἷον δὴ κείθωσαν λόγοι 9 : 3 ἢ 20 : 4, ἢ τῶν Παρονομαζῶν 3 ἢ 5, οἱ ἢ ἐπ' ἀλλήλοις πολλαπλασιαζόμενοι παρέχουσι 15. Ο' τοίνυν λόγος 15 : 1, ἡλικὸς ἐστὶν ὁ διὰ πολλαπλασιασμῷ τῶν λόγων 9 : 3, ἦτοι (3 : 1), καὶ 20 : 4 (ἦτοι 5 : 1) παραγόμενος.

Ἡ δὲ δὴ τῶν διαίρεσις τελεῖται, τῷ Παρονομαζῷ τῷ μείζονος λόγου διαιρημένῳ διὰ τῷ Παρονομαζῷ τῷ λόγῳ τῷ ἐλάσσονος. Ο' γὰρ τῷ πηλίκῳ λόγῳ πρὸς τὴν μονάδα, ἐστὶν ἡλικὸς ὁ ἐκ τῆς διαίρεσεως τῷ μείζονος τῶν δοθέντων λόγῳ διὰ τῷ ἐλάσσονος· Δῆλον ἐκ τῷ Α'. ἢ Γ'. τῶν Α' ξιώματων· ἢ γὰρ λόγῳ διὰ λόγῳ ἑτέρῃ διαίρεσις, οὐδὲν ὅτι μὴ ἀφαίρεσις ἐστὶ θατέρου ἀπὸ θατέρῃ πολλακὶς ἐπανειλημμένη.

§. Η'.

Ο' τῶν ἀλόγων λόγων πολλαπλασιασμός.

Κείθωσαν λόγοι Α : Β ἢ Γ : Δ ἐπ' ἀλλήλοις πολλαπλασιαστέοι, καὶ γινέσθω Α : Β :: Δ : Ε. Ο' τοίνυν λόγος Γ : Ε ἐστὶν ὁ παραγόμενος διὰ πολλαπλασιασμῷ τῶν λόγων Α : Β ἢ Γ : Δ.

Ἡ μὲν οὖν Πράξις τῇ παρὰ τῷ ἀγίῳ Βικεντίῳ ἐπὶ κλην Γρηγορίῳ ἐστὶν ἐν Η'. Βιβλ. Πρωτ. ΟΕ', ἢ Δ' ὑπ' αὐτῷ μέντοιγε, ἢ Δ' ὑφ' ἑτέρῃ τινὸς δεδειγμένη, ἣν αὐτὸς ἔτω δείκνυμι.

Ο' λόγος Γ : Ε παράγεται πολλαπλασιασμῷ τῶν λόγων Γ : Δ, καὶ Δ : Ε, ὡς δῆλον ἐκ τῆς ἀποδείξεως τῷ §. ΙΒ'. τῆς ἐντεῦθεν μηδαμῶς ἡρητημένης. Α' ξ' οἱ λόγοι Γ : Δ ἢ Δ : Ε, ἐκ κατασκευῆς, οἱ αὐτοὶ εἰσι τοῖς Γ : Δ καὶ Α : Β, ἄρα ὁ λόγος Γ : Ε, ἐστὶν ἡλικὸς ὁ ἐκ πολλαπλασιασμῷ τῶν λόγων Α : Β ἢ Γ : Δ ἀναφορῶν. Ο. Ε. Δ.

§. Θ'.

Ἡ τῶν ἀλόγων λόγων Διαίρεσις.

Κεῖσθω λόγος ὁ $\Gamma : E$ διαιρετέος διὰ τῆς λόγου $A : B$, καὶ δὴ γινέσθω $A : B :: \Gamma : \Delta$. Οἱ γὰρ λόγος $\Delta : E$ τὸ Πηλίκον ἐστὶ.

Οἱ γάρτοι λόγος $\Gamma : \Delta$ (ταῦτέσιν ἐκ κατασκευῆς ὁ $A : B$) πολλαπλασιασθεὶς διὰ τῆς λόγου $\Delta : E$, παράγει τὸν λόγον $\Gamma : E$, ὡς δῆλον ἐκ τῆς ἀποδείξεως τῆς ἐν §. IB'. τῆς ἐντεῦθεν μηδαμῶς ἡρτημένης, ὁ ἄρα λόγος $\Delta : E$ ἐστὶ τὸ Πηλίκον, πολλαπλασιασθέν γὰρ ἐπὶ τῷ διαιρέτῃ, ὅς ἐστιν ὁ λόγος $A : B$, ἀποκαθίστησι τὸν λόγον $\Gamma : E$, ὅστις ἦν ὁ διαιρετέος.

§. I'.

Περὶ Συνθέσεως τῶν λόγων, καὶ ταύτης Ὁρίσμός.

Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅτε τῶν κατὰ τὰς λόγους πηλικοτήτων (ἢτοι τῶν Παρονομασιῶν) ἐπ' ἀλλήλαις πολλαπλασιαζομένων, λόγον τινὰ συνισῶσιν· ἐστὶ δὲ παρ' Εὐκλείδῃ ὁ Ε'. τῶν τῷ ε'. Βιβλ. Ὁρίσμων.

Κεῖσθωσαν λόγοι ὅποιοι, καὶ τῶν Παρονομασιῶν 2, 3, 1½. Πολλαπλασιαζέσθωσαν δὲ ἐπ' ἀλλήλοις οἱ Παρονομασῆαι 2 καὶ 3, τότε παραγόμενον 6, Παρονομασῆς τῆς λόγου ἔσται, τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν ἀπλυστέρων λόγων, ὧν Παρονομασῆαι οἱ ἐπ' ἀλλήλοις πολλαπλασιασθέντες. Ἀμέλειτοι ὁ λόγος 6 : 1 σύνθετός ἐστιν ἐκ τῶν λόγων 6 : 3 καὶ 12 : 4· ὡς εἶγε καὶ τὸν Παρονομασῆν 6 πολλαπλασιάσται περαιτέρω, καὶ διὰ τῆς τρίτης τῶν ἐκτεθέντων ἀπλυστέρων Παρονομασιῶν, οἷον διὰ 1½, ἀνακύψει δὴ ὁ 7½ Παρονομασῆς τῆς λόγου τῆς συνθέτου ἐκ τῶν τριῶν δοθέντων λόγων, ὧν Παρονομασῆαι ἦσαν 2, 3, 1½.

§. ΙΑ'.

Ἡ τῶν λόγων σύνθεσις πολλαπλασιασμός τῶν αὐτῶν ἀντικρὺς ἐστὶ· καὶ πᾶς δὲ λόγος ἐκ τῶν αὐτῶν ἐκείνων λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ἐξ ὧν περ διὰ πολλαπλασιασμῶν παράγεται.

Ὡς γὰρ ἐκ τῆς Α'ξιωμ. τῆς Δ'. καὶ §. Ζ'. δῆλον ἐστὶ, λόγος ἐκ λόγων πλειόνων πολλαπλασιασμῶν παραγόμενος ἐστίν, ὃν τὸ ἐκ τῶν Παρονομασιῶν τῶν ἀλλήλοις ἐπιπολλαπλασιαζομένων γινόμενον, ἔχει πρὸς τὴν μονάδα,

ἤτοι πρὸς τὸ κοινῇ ἐπόμενον· ἀλλὰ καὶ κατὰ γε τὸν παρ' Εὐκλείδῃ ὀρισμὸν, λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὃν τὸ ἐκ τῆ πολλαπλασιασμῇ τῶν Παρονομασῶν γινόμενον ἔχει πρὸς τὴν μονάδα, ἤτοι πρὸς τὸ κοινῇ ἐπόμενον. Οὗ ἄρα λόγος ἐκ τῶν αὐτῶν συντίθεται, ἐξ ὧν καὶ διὰ πολλαπλασιασμῶν παράγεται.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν .

Πρὸς ῥητοτέραν τῆς ἐφεξῆς ἀποδείξεως σύνεσιν παρατηρητέον, ὡς τὰ Μεγέθη ἐπιδέχεται τὸν ἐπ' ἀλλήλοις πολλαπλασιασμὸν, καὶ τὴν δι' ἀλλήλων διαίρεσιν κατὰ τινα πρὸς τῆς ἀριθμικῆς ἀναλογίαν. Καθάπερ γὰρ ἀριθμὸς δι' ἀριθμῷ πολλαπλασιάζεται λέγεται, ὅταν ὡς ἡ μονὰς ἔχει πρὸς τὸν ἕτερον, ἔτω ὁ λοιπὸς πρὸς τρίτον ἀριθμὸν, ὃς τὸ παραγόμενον εἶναι λέγεται, ἔτω δὲ καὶ Μέγεθος διὰ Μεγέθους πολλαπλασιάζεται λέγεται, ὅταν ὡς ὅποιαδήποτε Εὐθεῖα ἀντὶ μονάδος ληφθεῖσα πρὸς τὴν ἑτέραν τῶν δοθεῖσῶν ἔχει, ἔτω ἡ ἑτέρα πρὸς ἄλλην τινὰ τετάρτην, ἣτις καὶ αὐτὴ τὸ παραγόμενον εἶναι ἀκύσεται. Παραπλησίως δὲ, ὥσπερ ἀριθμὸς δι' ἀριθμῷ διαιρεῖσθαι λέγεται, ὅταν ὡς θάτερος ἔχει πρὸς θάτερον, ἔτω ἡ μονὰς πρὸς τρίτον, ὃς τὸ Πηλίκον καλεῖται, οὕτω τοι καὶ Μέγεθος διὰ Μεγέθους διαιρεῖσθαι εἰρήσεται, ὅταν ληφθεῖσθαι τινὸς πηλικιότητος ἀντὶ μονάδος, ὡς θάτερον ἔχει πρὸς θάτερον, ἔτω τοι ἡ μονὰς πρὸς τι ἄλλο, ὃ δὲ Πηλίκον ὁμοίως κληθήσεται.

§. IB'.

Εἰ ἂν ὧσιν ὅποιοιδηποτὲν καὶ ὅσοιδηποτὲν ἦτοι ἀριθμοὶ, ἢ Μεγέθη, ὃ τῇ Α'. λόγος πρὸς τὸν ἐλάχιστον, συγκεῖμενός ἐστιν ἐκ τῶν λόγων τῶν μεταξύ.

Εἰ μὲν ἀριθμοῖς Θεωρίτε καὶ Εὐτοκίῳ καὶ τῷ Οὐίτελλῳ ἀποδεδεικται, ἐπὶ δὲ τῶν Μεγεθῶν ὅς τις ἔδειξεν ὅς τις ἐκ τῶν κατασκευάσας τὸ προτεθέν. Ταύτη τοι καὶ ὁ ῥηθεὶς ἀνωτέρω Γρηγόριος Γεωμετρῶν τὰ πρῶτα γενόμενος, ἐν τῷ Η'. Βιβλ. ἐν ἀρχ. Β'. ταῖς ἀρχαῖς ὑπέλιπε δεῖν τὸ τοιοῦτο συγκαταλέγεσθαι, εἰς ὃ τις ἀποδείξει αὐτὸ κρατύνας. τοῖς Θεωρήμασιν ἐναρμόμιον τάξεις.

Αὐτοὶ γὰρ τὴν ἐν γίνεσθαι τῇ τοιοῦδε ἀπόδειξιν παραχεῖν ὥδε ἐπιχειροῦμεν.

Δείκνυται ἐν τοῖς Μεγέθεσι.

Κεῖσθαι Μεγέθη ὅποιαῦν καὶ ὅποσαῦν τὰ Α, Β, Γ, Δ· δεικτέον τὸν Α : Δ λόγον συγκεῖμενον εἶναι ἐκ τῶν λόγων Α : Β, καὶ Β : Γ, καὶ Γ : Δ.

Γινέσθω ὡς $B : \Gamma$, οὕτω $X : B$, καὶ ἔσονται οἱ λόγοι $A : B$ καὶ $B : \Gamma$ ἐπὶ τῆς λόγους ἀνηγμένοι $A : B$ καὶ $X : B$, τὰς ἔχοντας ἐπόμενον τὸ αὐτὸ τὸ B . Εὐθεντοὶ καὶ τῶν τοιῶνδε λόγων Παρονομασαι ἔσονται A καὶ X , τὸ δὲ ἐπόμενον B (1) ἔργον πληρώσει μονάδος, ἣ δὲ πρὸς πάντας τὰς ἀριθμητικὰς Παρονομασὰς κοινόντι τίθεται εἶναι ἐπόμενον.

Βεληθέντας τοίνυν τὰ μεγέθη A καὶ X δι' ἀλλήλων πολλαπλασιάζεται, λαβεῖν δεῖ (2) ὡς B ἢ μονὰς ἐς πρὸς X , ἥτως A πρὸς ἄλλοτι τὸ Z , ὃ ἐστὶ τὸ παραγόμενον ἔσαι πολλαπλασιασμῷ τῷ τῷ A διὰ τῷ X , ἣ (ὃ ταυτὸν ἐστὶ) τῷ τῷ X διὰ τῷ A . Οἷον εἰ καὶ ἀριθμὸς ἐπ' ἀλλήλοις πολλαπλασιάζεται θελήσας τῆς P , Σ , σχοίης ἂν τὴν μονάδα πρὸς τὸν ἕτερον τὸν Σ , ὡς τὸν ἕτερον P πρὸς τὸ ἀπ' ἐντεῦθεν διὰ τῷ πολλαπλασιασμῷ παραγόμενον, φέρε τὸ Γ .

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Z , τὸ παρηγμένον εἶναι ἐτέθη πολλαπλασιασμῷ τῷ τῶν Παρονομασῶν A καὶ X , ἔσαι δὲ ὁ λόγος (3) τὰδε τῷ γενομένῳ Z πρὸς τὴν μονάδα B , ὃ τὸ κοινὸν εἶναι ἐπόμενον εἴρηται, ἡλικὸς ὁ πολλαπλασιασμῷ τῶν λόγων $A : B$ καὶ $X : B$ γινόμενος, ὡς καὶ τῇ τῶν Ἀριθμητικῶν λόγων πολλαπλασιάσει ἐν $\S$. Ζ' συμβαίνειν δέδεικται, καὶ ἢν εἰάν οἱ Παρονομασαι ἐπ' ἀλλήλοις πολλαπλασιασθῶσιν, ὃ τῷ παραγόμενῳ λόγῳ πρὸς τὴν μονάδα, ἡλικὸς ὁ ἐκ τῷ τῶν λόγων πολλαπλασιασμῷ τυγχάνει γε ὢν.

Ἀλλὰ μὲν ἐκ κατασκ. ὁ λόγος $X : B$, αὐτόχρημα ἐστὶν ὁ $B : \Gamma$, ἄρα καὶ ὁ λόγος $Z : B$ παράγεται πολλαπλασιασμῷ τῶν λόγων $A : B$ καὶ $B : \Gamma$. Ἐπεὶ δέτοι ἐκ κατασκ. ὡς $B : X$, ἥτως ἐστὶ καὶ $A : Z$, καὶ ἀνέπαλιν $Z : A :: X : B$, τετέστιν ἐκ κατασκ. ὡς $B : \Gamma$ τοιγαρὲν καὶ ἐναλλάξ $Z : B :: A : \Gamma$. Δέδεικται δὲ ὅτι $Z : B$ παράγεται πολλαπλασιασμῷ τῶν λόγων $A : B$ καὶ $B : \Gamma$, ἄρα καὶ ὁ λόγος $A : \Gamma$ παράγεται πολλαπλασιασμῷ τῶν λόγων $A : B$ καὶ $B : \Gamma$. Ἀλλὰ γὰρ ἐν $\S$. ΙΑ'. εἰδείχθη τὸν λόγον συγκείμενον εἶναι ἐκ τῶν αὐτῶν λόγων, ἐξ ὧν καὶ πολλαπλασιασμῷ παράγεται. Οἱ ἄρα λόγοι $A : \Gamma$ σύνδετος ὢν τυγχάνει ἐκ τῶν λόγων $A : B$ καὶ $B : \Gamma$.

Τὸν αὐτὸν δὴ πᾶν τρόπον δειχθήσεται, ὅτι καὶ ὁ λόγος $A : \Delta$ σύνδετος ἐστὶν ἐκ τῶν λόγων $A : \Gamma$ καὶ $\Gamma : \Delta$. Οἱ ἄρα λόγοι $A : \Delta$ σύνδετος ὢν τυγχάνει ἐκ τῶν λόγων $A : B$, καὶ $B : \Gamma$, καὶ $\Gamma : \Delta$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς ἐς ἄπειρον. Ο. Ε. Δ.

(1) §. Γ'. (2) Σχόλ. πρὸ ἀνωτ. (3) §. Ι. Ο'.

Δείκνυται καὶ πὶ τῶν ἀριθμῶν.

Τὴν αὐτὴν πάντῃ δεῖξιν χάραν ἔχειν καὶ πὶ τῶν Αῤιθμῶν ἡδὴ δεῖξω, 8 2 $\frac{3}{4}$
ὅθεν δὴ καὶ πὶ τῆς τῶν ἀληθῆς καὶ εὐραίων μᾶλλον ἀναφανήσεται. 4 1 $\frac{1}{2}$

Κεῖσθωσαν ἀριθμοὶ ὁποιοῖσθε ποτὲν τρεῖς 8, 4, 3, καὶ γινέσθω 4 : 8 :: 3 $\frac{1}{2}$ 1
1 : 2, καὶ 4 : 3 :: 1 : $\frac{3}{4}$ · καὶ δὴτα ἔσονται οἱ λόγοι 8 : 4 καὶ 2 : 1, καὶ δὴ
καὶ οἱ 4 : 3 καὶ 1 : $\frac{3}{4}$, ἀλλήλοισι ἴσοι· καὶ δι' ἴσα δὲ (1) 8 : 3 :: 2 : $\frac{1}{2}$.

Εἴτα γινέσθω ὡς $\frac{1}{2}$: 1 :: 1 : $\frac{2}{3}$ · καὶ ἔσονται οἱ λόγοι 2 : 1 καὶ 1 : $\frac{2}{3}$
(ταυτέσιν οἱ λόγοι 8 : 4 καὶ 4 : 3) ἀναγόμενοι ἐπὶ τῆς δύο λόγῃς 2 : 1 καὶ
 $\frac{2}{3}$: 1, κοινὸν ἔχοντας ἐπόμενον τὴν μονάδα· εὐθεντοὶ 2 καὶ $\frac{2}{3}$ ἔσονται (2)
τῶν λόγων 8 : 4 καὶ 4 : 3 Παρονομασαι. Πεπολλαπλασιασάσθωσαν οὖν δι' ἀλ-
λήλων οἱ Παρονομασαι 2 καὶ $\frac{2}{3}$, γινέσθω δηλονότι 1 : $\frac{2}{3}$:: 2 : $\frac{4}{3}$, καὶ ἔσαι
 $\frac{1}{3}$ τὸ παραγόμενον ἐκ 2 καὶ $\frac{2}{3}$, οἱ παρονομασαι εἰσι τῶν λόγων 8 : 4 καὶ 4 : 3
ἐπ' ἀλλήλοισι πολλαπλασιασθέντων. Ὁ ἄρα λόγος τῆς τοῦ παραγομένου $\frac{1}{3}$
πρὸς 1, ἡλικος ἐστὶν (3) ὁ παραγόμενος ἐκ τῆς πολλαπλασιασμῆς τῶν λόγων
8 : 4 καὶ 4 : 3· ἀλλὰ γὰρ ἐπεὶ ἐκ τῆς κατασκευ. 1 : $\frac{2}{3}$ = 2 : $\frac{4}{3}$, ἔσαι καὶ ἀνά-
παλιν $\frac{2}{3}$: 2 = $\frac{1}{3}$: 1· πάλιν δὲ ἐκ τῆς κατασκευ. $\frac{2}{3}$: 1 = 1 : $\frac{3}{2}$, ἄρα $\frac{1}{3}$: 2
= 1 : $\frac{6}{3}$, καὶ δὴ καὶ ἐναλλάξ $\frac{1}{3}$: 1 = 2 : $\frac{3}{2}$. Εἰδείχθη δὲ ὡς ὁ λόγος 1 :
1 ἐστὶν ὁ παραγόμενος ἐκ τῆς πολλαπλασιασμῆς τῶν λόγων 8 : 4 καὶ 4 : 3,
ἄρα καὶ ὁ λόγος 2 : $\frac{2}{3}$ ἐστὶν ὁ παραγόμενος ἐκ τῆς πολλαπλασιασμῆς τῶν
λόγων 8 : 4 καὶ 4 : 3· δέδεικται δὲ ἀνωτέρω τὸν λόγον 2 : $\frac{1}{2}$ ἴσον εἶναι
τῷ λόγῳ 8 : 3, ἄρα καὶ ὁ λόγος 8 : 3 παράγεται καὶ αὐτὸς ἐκ τῆς πολ-
λαπλασιασμῆς τῶν λόγων 8 : 4 καὶ 4 : 3. Καὶ τοίνυν διὰ τὰ ἐν §. ΙΑ', ὁ
λόγος 8 : 3 ἐκ τῶν λόγων 8 : 4 καὶ 4 : 3 συγκαίμενος ἐστίν. Ο. Ε. Δ.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται, καὶ πλείονων ἢ τρεῖς προκειμένων
ἀριθμῶν, τὸν λόγον 8 : 25 συγκαίμενον εἶναι ἐκ τῶν λόγων 8 : 3 (οὗ-
τος γὰρ ἐστὶν ἐκ τῶν 8 : 4 καὶ 4 : 3) καὶ 3 : 25· τόντε λόγον 8 : 73 συγ-
κεῖσθαι ἐκ τῶν λόγων 8 : 25 (οὗτος γὰρ ἐστὶν ἐκ τῶν 8 : 4, καὶ 4 : 3, καὶ
3 : 25) καὶ 25 πρὸς 73, καὶ ἔτις εἰς ἀπειρον.

8
3
25
73

(1) KB. αὐτ. (2) §. B. (3) §. Z.

§. ΙΓ'.

Ὅποσωνῦν λόγων δοθέντων $A : B$, ἢ $\Gamma : \Delta$, ἢ $E : Z$, λόγον παραχρῆν τὸν ἐξ ἁπάντων συγκείμενον.

Ἐὰν γένηται ὡς $A : B$, ἔτω δὲ, τι τύχοι $H : \Theta$ · καὶ ὡς $\Gamma : \Delta$, ἔτω $\Theta : I$ · ἢ ὡς $E : Z$, ἔτω $I : K$, ὁ λόγος $H : K$ συγκείμενος ἔσαι ἐκ τῶν λόγων $H : \Theta$, ἢ $\Theta : I$, ἢ $I : K$, ὡς ἐν §. ἄνωτ. ἀποδεδεικται· ἀμέλειτοι διὰ τὴν κατασκευ. ἐκ τῶν δοθέντων λόγων $A : B$, $\Gamma : \Delta$, $E : Z$.

§. ΙΔ'.

Ὁ λόγος ἕκ ἐξιν ἴσος τοῖς λόγοις ἐξ ὧν περὶ συντίθεται.

Δυσὲν μεταξὺ πηλικότητων H , K πηλικότητες ἄλλαι παρεμβεβλήσθωσαν, εἴτε συνεχῶς ἀνάλογοι αὗται εἶεν, εἴτε ἢ μή. Ὁ γὰρ λόγος τῆς πρώτης H πρὸς τὴν ἐσχάτην K ἕκ ἐξιν ἴσος τοῖς λόγοις τοῖς μεταξὺ $H : \Theta$, $\Theta : I$, $I : K$, καί τοι ἐξ αὐτῶν δὴ τῶν συγκείμενος.

Τὸ γὰρ ἐξ αὐτῶν συγκείσθαι ἕδεν ἕτερον σημαίνει, ἢ τὸ ἐξ ἐκείνων ἐπαλλήλοισι τοῖς πολλαπλασιασμοῖς παράγεσθαι, ὡς δεδεικται ἐν §. ΙΑ'. Ἐπεὶ οὖν ὁ λόγος $H : K$, ἐκ τῶν λόγων $H : \Theta$, ἢ $\Theta : I$, ἢ $I : K$ παρῆκται ἐπαλλήλως πολλαπλασιασθέντων, ὡς ἐκ τῆς ἀποδείξεως τῆς ἐν §. ΙΒ'. δῆλον, ἀδύνατον τὰς λόγους $H : \Theta$, $\Theta : I$, $I : K$, ἴσας τυγχάνειν ἅμα ληφθέντας τῷ λόγῳ $H : K$, εἰ μήπε κατὰ συμβεβηκός, ἥτε τῶν λόγων πρόδοσις καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς τὸν αὐτὸν λόγον συστήσειαν. Ἐφ' ᾧ δὲ τοῖς εἰρημένοις λόγοις λόγον ἴσον λαβεῖν, δεόν αὐτὰς προσιδέναι, ὡς εἴρηται ἐν §. Ε'. ἢ ζ'. ἐκ γὰρ τῆς τοιαύτης προσθέσεως, λόγος ἀνακύψει ἴσος τοῖς δοθείσιν ἅπασιν. Ὅς δὴ περὶ λόγος, ἥπερ ἔφην, αἰεὶ διοίσει τῷ κατὰ σύνθεσιν, εἴτεν πολλαπλασιασμὸν ἀνακύπτοντος.

Τῶν σοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

ΒΙΒΛΙΟΝ ε'.

Η ἐν τῷ ἀνωτέρῳ Ε'. Βιβλίῳ ἐν γένει ἐκτεθεῖσα τῶν ἀναλογιῶν διδασκαλία, ἐπὶ τῷ ἐν χερσίν ε'. τοῖς ἐπιπέδοις τῶν Σχημάτων προσεφευγόμεται. Εἴς δὲ οὕτως ἀναγκαῖα ἢ τῶν ἐνταῦθα παραδιδόμενων γνῶσις, ὥς τούτων ἄνευ ἐς τὰ ἄδυστα τῆς Γεωμετρίας χωρεῖν, καὶ τὰς ἀπὸ τῶν μαθημάτων ἡδίστης καρπὸς δρέπεσθαι, μὴ ἐξεῖναι. Ἐκαστὸν τῶν Προτάσεων ἰδίᾳ εἶδει ἐξηφαίνουσιν ἐγκώμιον, τοσαύτη ἢ ἐξ ἀκασῶν ἀποφερομένη ὠφέλεια.

Ἐπιχειροῖ δὲ ταῦτ' ὁ ε'. Βιβλ. τὴν καλλίστην περὶ τῆς Γεωμετρικῆς ἀναλογίας διδασκαλίαν, τὴν προσφάτως ἐκτεθεῖσαν, παντοίαις τε καὶ πάντῃ ἐπισημωτάταις προσάπτειν ταῖς χρήσεσιν, ἀπὸ τε τῶν ἐν σχήματι ἀπλῶν τῶν Τριγῶνων τὴν καταρχὴν ποιῶμενον, τάς τε ἐν αὐτοῖς πλευράς καὶ τὰ χωρία, ὅπως ἔχουσιν ἀναλογίας πρὸς ἄλληλα ἐξετάζει· εἶτα καὶ τῶν Γραμμῶν τὰς ἀναλόγους, καὶ τὰς τῶν Σχημάτων αὐξήσεις τε καὶ μειώσεις, τὰς κατ' ἰσότητά λόγων ὀρίζει, καὶ ὅτῳ δὴ ποτε τρόπῳ ἐκεῖνα αὐξῆσιν ἢ μείωσιν κατὰ λόγον τὸν δοθέντα κατασκευάζει· ἔτι τε μὴν καὶ τὴν Ἀναλογικὴν μέθοδον, ἣτις Χρυσὴ γεραίρεται, καὶ ἥς δι' ὅλης τῆς Ἀριθμητικῆς πυκνοτάτη ἢ χρῆσις, ἐκτίθησιν τε καὶ ἀναπτύσσεται κατὰ τὸ ὀρθογώνιον Τριγῶνον, ἔχ' ὅπως τὸ Τετράγωνον, ἀλλὰ καὶ τὸ Πεντάγωνον καὶ τὸ Ἑξάγωνον, καὶ ἀπλῶς τῶν Πολυγώνων ὅποιον, τὰ ἀπὸ τῆς Ὑποτεινύτης, τοῖς δυσὶν ἔχ' ὅπως Τετραγώνοις, ἀλλὰ καὶ Πενταγώνοις καὶ Ἑξαγώνοις, καὶ ἀπλῶς τῶν Πολυγώνων ὅποιοις τῶν ὁμοίων, καὶ ἀπὸ τῶν δύο Πλευρῶν τῶν τὴν Ὀρθὴν περιεχουσῶν Γωνίαν συνισταμένοις ἅμα ληφθεῖσι συνεξιστάσθαι ἀποδείκνυσιν· τελευτῶν δὲ ῥάσας τινὰς καὶ ἀσφαλεσάτας προτίθησιν τὰς ἀρχάς, αἷς ἂν δι' ἀπάσης Μαθηματικῆς ἐπιστήμης ἐξείη τῶν τε Γραμμῶν καὶ τῶν Ἐπιφανειῶν, καὶ τῶν στερεῶν Σωμάτων λαμβάνειν τὴν καταμέτρησιν.

Ὅμοιοι.

Ὅμοια Σχήματα εὐθύγραμμά εἰσιν, ὅσα τὰς τε Γωνίας ἴσας ἔχει καὶ ἄ.

τὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας Γωνίας Πλευράς ἀνάλογον, ἢ (ὃ ταυτόν ἐστι) τὰς μεταξὺ τῶν ἴσων, ἢ καὶ τὰς Ὑποτείνουσας τὰς ἴσας.

κ. 322.

Οἷον τὰ Τρίγωνα χ , ψ ὅμοια εἰρήσεται, εἰάν ἡ Γωνία α ἴση ἢ τῇ Γωνίᾳ ζ , καὶ ἡ β τῇ ι , καὶ ἡ γ τῇ λ . καὶ μὴν καὶ εἰάν ἡ $\alpha\beta : \zeta\iota :: \beta\gamma : \lambda\iota$, καὶ $\beta\gamma : \lambda\iota :: \gamma\alpha : \lambda\zeta$, καὶ $\gamma\alpha : \lambda\zeta :: \alpha\beta : \zeta\iota$, ἢ γὰρ καὶ ἐναλλαξ (1) εἰάν ἡ $\alpha\beta : \beta\gamma :: \zeta\iota : \lambda\iota$, καὶ $\beta\gamma : \gamma\alpha :: \iota\lambda : \lambda\zeta$, καὶ $\gamma\alpha : \alpha\beta :: \lambda\zeta : \zeta\iota$. γινωσκόμενης οὖν τῆς παραδέσεως μεταξὺ τῶν Πλευρῶν τῶν περὶ τὰς ἴσας Γωνίας, ἢ (ὃ ταυτόν ἐστι) τῶν μεταξὺ τῶν ἴσων, ἢ τῶν τὰς ἴσας Ὑποτείνουσων.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ ἡ τῶν λοιπῶν εὐθυγράμμων Σχημάτων ἀπάντων ὁμοιότης ἀναπτυχθήσεται.

κ. 323. Ἀντιπεπονδῶτα δὲ Σχήματα ἐστίν, ὅταν ἑκατέρῳ τῶν Σχημάτων ἡ γόμενοι τε καὶ ἐπόμενοι ὅροι (ἀντιστρόφως) ὦσι.

κ. 323.

Οἷον ἐπὶ τῶν Παραλληλογράμμων χ καὶ ψ , εἰάν ἡ $\alpha\gamma : \gamma\beta :: \zeta\gamma : \gamma\lambda$. Ἡ γόμενοι τοῖον ἐστὶν ὅροι $\alpha\gamma$ καὶ $\zeta\gamma$, ὧν ἐν ἑτέρῳ τῶν Σχημάτων ἑτερος, ὁ μὲν $\alpha\gamma$ ἐν τῷ χ , ὁ δὲ $\zeta\gamma$ ἐν τῷ ψ . ἐπόμενοι δὲ οἱ $\gamma\beta$ καὶ $\gamma\lambda$, ὧν ὁμοίως ἐν τῷ ἑτέρῳ τῶν Σχημάτων ὁ ἑτερος, ἀλλ' ἀντιστροφείσης τῆς τάξεως, ὁ μὲν γὰρ $\gamma\beta$ ἐν τῷ ψ , ὁ δὲ $\gamma\lambda$ ἐν τῷ χ . ἐντεῦθεν γὰρ καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα χ , ψ ἀντιπεπονδῶτα ἦκυσεν. Τὸ δ' αὐτόμοι νοεῖ καὶ περὶ τῶν ἄλλων Σχημάτων.

Πηλικότερες δὲ τέσσαρες πρὸς ἀναλογίαν ἀντιπεπόνθασιν, τῆς A' πρὸς τὴν Γ' , ὅν ἡ Δ' πρὸς τὴν B' . λόγον ἐχούσης, ἢ τῆς A' πρὸς τὴν Δ' , ὅν ἡ Γ' πρὸς τὴν B' . Οἷον εἰάν ἡ $A : \Gamma :: \Delta : B$, ἢ γὰρ $A : \Delta :: \Gamma : B$, ἔσονται αἱ A , B , Γ , Δ ἀντιπεπονδεῖαι ἀνάλογον.

κ. 324. Γ.

Τῷ φος ἐπὶ παντός Σχήματος ἐστίν ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς A ἐπὶ τὴν βάσιν Κάθετος ἀγομένη AP . ἐστὶ δὲ παρ' Εὐκλείδῃ ὅρος δ'.

Οἷον τῷ Τριγώνῳ $AB\Gamma$ ὁ φος ἐστίν ἡ Κάθετος AP , ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἀγομένη ἐπὶ τὴν βάσιν $B\Gamma$, ἥτοι ἐντός τοῦ Τριγώνου, ἢ καὶ ἐκτός ἢν δέοι προαχθεῖται. Ἡ δὲ δὴ Βάσις καὶ ἡ κορυφή κατὰ τὸ δοκὺν μεταλαμβάνονται.

Δ.

Τόξα ὁμοιῶν Κύκλων λέγεται, τὰ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον πρὸς τὰς ἑλὰς Περιφερείας.

Οἷον εἰάν ἑκάτερον ἢ τῆς ἰδίας Περιφερείας τριτημόριον, ἢ τεταρτημόριον, καὶ. Καὶ Τμήματα δὲ Κύκλων ὁμοιά ἐστιν, οἷς Τόξα ὁμοία ἐστὶ. Τὸ δ' αὐτόμοι νοεῖσθαι καὶ περὶ τῶν ὁμοίων Τομέων.

(1) Ἰς. σθ'.

Λόγος ἐκ λόγων συγκαίῳται λέγεται, ὅταν οἱ τήτων Ἐκδέται ἐπ' ἄλ- Β'.
λήλοις πολλαπλασιασθέντες, τὸν ἐκείνου Ἐκδέτην παράγωσι· τὸ δὲ τῷ λόγῳ
Ἐκδέτην λαμβάνειν, ἐπὶ διαιρῶντας διὰ τῆ ἐπομένῃς τὸ ἡγόμενον.

Οὕτως ἐκ τῶν λόγων $\alpha : \beta \text{ ἔ } \rho : \sigma$, σύγκειται ὁ λόγος $\alpha \times \rho$ πρὸς β
 $\times \sigma$, καὶ γὰρ $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\rho}{\sigma} = \frac{\alpha \times \rho}{\beta \times \sigma}$. ἢ εἰν γένηται $\rho : \sigma = \beta : \gamma$, ἐκ τῶν
λόγων $\alpha : \beta \text{ ἔ } \rho : \sigma$, σύγκειται ὁ λόγος $\alpha : \gamma$. Τηνικαῦτα γὰρ $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\rho}{\sigma}$
 $= (1) \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha \times \beta}{\beta \times \gamma} = (2) \frac{\alpha}{\gamma}$.

Οὕτωτοι ἔ τὸ διπλοῦν τῷ τριπλῷ ἐξαπλῶν ἐσίν· οὐκ ἄλλως δὲ ἔ ὁ λό-
γος 4 : 3 σύγκειται ἐκ τῶν λόγων 4 πρὸς ὀντιναῦν ἀριθμὸν (οἷον πρὸς 7), ἔ
τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ (φέρει τῷ 7) πρὸς 3, καὶ γὰρ $\frac{4}{3} \times \frac{7}{7} = \frac{4}{3}$.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δηλόν, ἔ ὅτι λόγος ὅποισιν ἐκ πλειόνων λόγων
συγκαίῳται δύναται· οὕτως ὁ λόγος $\alpha : \epsilon$ συγκαίῳται δύναται ἐκ τῶν λόγων
 $\alpha : \beta$, ἔ $\beta : \gamma$, ἔ $\gamma : \delta$, ἔ $\delta : \epsilon$.

Π ρ ό τ α σ ι ς Α.

„Τὰ Τρίγωνα (αβγ, δεζ), ἔ τὰ Παραλληλόγραμμα (αεφγ, δπρζ)
,, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, τετέσι τὰ ἐν ταῖς αὐταῖς ὄντα παραλλήλοις,
,, πρὸς ἄλληλα ἐσίν ὡς αἱ Βάσεις (αγ, δζ).

Ἐκ τῶδε ὅλον τὸ ε'. Βιβλ. ἐξήπται τῷ Θεωρήματος, καὶ εἴτι ἀπλῶς κ. 325.
ἐπὶ Σχημάτων εἴτε ἐπιπέδων, εἴτε ἔ σφαιρῶν, διὰ τῆς ἀναλογίας φέρεται
ἀποδεδειγμένον· Ὁ μὲν οὖν Εὐκλείδης διὰ τῶν πολλαπλασίων τὸ προτεθεὶν
ἀποδείκνυσιν, ἐξ ὧν πολλῇ ἐκ πρώτης τῷ Βιβλίῳ ἀφετηρίας τοῖς πρωτοπει-
ροῖς συμβαίνει δυσχέρεια· καὶ τοίνυν ἄλλην ἡμῖν ἀποδοτέον δεῖξιν εὐχρεσέ-
ραν, ἐκ τῷ Ε'. λαβῶσι ταύτην Θεωρήματος τῷ Β'. μέρος τῷ Ε'. Βιβλίῳ, ἢ γυν ἐκ
τῷ ἐτέρῳ ἐκείνου τῶν ἴσων λόγων τεκμηρίῳ τῷ πρώτῳ ἔ ἀπταίσε, ὁ μεταξὺ
τῶν ὄρων τῷ Ε', πρὸ τῷ Ζ'. δηλ. Ὁρίσμη, παρετέθη, ὡδε.

Ληφθήτω δὴ τῆς Βάσεως δζ μόνιον ἡλικονῶν, οἷον τὸ διη τεταρτημόριον,
ἔ ἀχθήτω εη, ἔ ἔσαι τὸ δεη τεταρτημόριον τῷ Τρίγωνῳ δεζ. (3). Διόπερ
ἦτε διη Εὐδεία, ἔ τὸ δεη Τρίγωνον εἰσὶ τῶν ἐπομένων ὁμοία μόνια (4). Α'-
φαιρεθήτω τοίνυν διη ἀπὸ τῆς Βάσεως αγ, ὅσάκις ἂν ἐξῇ, οἷον ὀκτάκις· καὶ
ἐπειδὴ αἱ γδ, δι, κ, ἔ αἱ λοιπαὶ ἴσαι εἰσὶ τῇ διη ἐκάσῃ, ἔσαι δὴ καὶ τὰ

(1) ΑΑ. τῷ ε'. (2) ΙΕ. τῷ ε'. (3) ΑΗ. Βιβλ. ε'. (4) Σφ. Ζ. τῷ ε'.

ὁπῶ Τρίγωνα γβδ, δβι, ιβκ καὶ τὰ λοιπὰ, τῷ Τριγώνῳ δὲ ἴσα ἔκαστον (1). καὶ ὁσάκις ἄρα ἡ δὴ περιέχεται ἐν τῷ ἡγαμένῳ αγ, τοσάκις τὸ Τρίγωνον δὲ περιέχεται ἐν τῷ ἡγαμένῳ αβγ. Τῷ αὐτῷ δὲ λόγῳ δείξω, καὶ ἡλικασθὲν τῶν ἐπομένων (τῆς τε Βάσεως φημι δζ, καὶ τῷ Τριγώνῳ δεζ) ὁμοίως μερίδας, ἐν τοῖς ἡγαμένοις (λέγω τῇ Βάσει αγ, καὶ τῷ Τριγώνῳ αβγ) ἰσαριθμῶς αἰεὶ περιέχεσθαι. Ἄρα διὰ τὸ Ε'. Θεώρ. τῇ Β'. μέρος τῇ Ε'. Βιβλίῳ, τιτέσι διὰ τὸ ἕτερον ἐκείνο τῶν ἰσῶν λόγων τεκμήριον, ὡς Βάσις αγ πρὸς Βάσιν δζ, οὕτω καὶ Τρίγωνον τὸ αβγ πρὸς Τρίγωνον ἐστὶ τὸ δεζ. Ο. Ε. Δ.

Εἴπερ δὲ τὰ Παραλληλόγραμμα αφ καὶ δρ διπλασίονα ἐστὶ (2) τῶν Τριγώνων αβγ, δεζ, ἔστι δὴ καὶ αὐτὰ πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ Βάσεις.

Πορίσματα.

κ. 326. Α. Τὰ Τρίγωνα (αβγ, ζιλ) καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα, τὰ ἴσας ἔχοντα τὰς Βάσεις αγ, ζλ, ἢ τὴν αὐτήν, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ ὕψη βξ, ιφ. Ἐςωσαν καὶ γὰρ φσ καὶ ξρ ἴσαι ταῖς ἰσαῖς βάσεσι ζλ, αγ, καὶ ἔσονται φσ, ξρ ἀλλήλαις ἴσαι. ἀχθήτωσαν οὖν αἱ σι, ρβ, καὶ ἐὰν ἐπὶ τῶν Τριγώνων ξβρ, φισ ληφθῶσιν αἱ βξ, ιφ ὡς Βάσεις, ἔσονται αἱ ξρ, σφ τῶν αὐτῶν ὕψη. Εἴπερ δὲ ταῦτα ἴσα εἰσὶν, ἔσονται ξβρ, φισ πρὸς ἄλληλα (3) ὡς αἱ Βάσεις βξ, ιφ. ἀλλ' ἐκ κατασκευ. ξρ ἴση τῇ αγ ἐστὶ, καὶ φσ ἴση τῇ ζλ, ἐνδείκνται καὶ τὰ Τρίγωνα ξβρ, φισ, ἴσα ἐστὶ (4) τοῖς Τριγώνοις αβγ, ζιλ. Ἄρα καὶ τὰ Τρίγωνα αβγ, ζιλ, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς βξ πρὸς ιφ.

κ. 325. Β. Τὰ Τρίγωνα (αβγ, δεζ), καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα (αφ, δρ), αἵτινα ἐστὶν ὡς αἱ Βάσεις αγ, δζ, τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχουσιν, ἐν ταῖς αὐταῖς δηλονότι Παραλληλοῖς σαθῆναι δυνήσονται. Ἐστὶ δὲ τὸ ἀντίστροφον τῆς Α. Προτάσεως.

Εἰ μὴ γὰρ, ὅδε ἡ βε Παράλληλος πρὸς τὴν αζ. Ἀχθῆτω δὴ διὰ τῆς Σημεῖς ἡ εσ Παράλληλος πρὸς τὴν αζ, τέμνεται τὴν γβ κατὰ τὸ σ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ασ. Τὰ τοίνυν Τρίγωνα ασγ, δεζ ἐν ταῖς αὐταῖς ὄντα Παραλληλοῖς, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα (5) ὡς αἱ Βάσεις αγ, δζ. ἀλλὰ καὶ τὰ Τρίγωνα αβγ, δεζ εἰσὶ (6) καὶ αὐτὰ ὡς αἱ Βάσεις αγ, δζ, ἄρα τὸ Τρίγωνον ασγ (7) ἴσον ἐστὶ τῷ Τριγώνῳ αβγ, τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἄτοπον. Οὐκ ἄρα διὰ τῆς Σημεῖς Εὐδείκται πρὸς τὴν αζ Παράλληλος ἀχθῆναι δυνήσεται ἄλ-

(1) ΔΗ. Βιβ. α'. (2) ΜΑ τῷ α'. (3) Α. τῷ ε'. (4) ΔΗ. τῷ α'. (5) Διὰ τὴν Πράτ. (6) Εξ ὑποθ. (7) Διὰ τὴν ΙΑ. καὶ Θ. τῷ ε'.

λη παρὰ τὴν βε. Καὶ ἐπομένως τὰ ἔχοντα πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις Τρίγωνα αβγ, δεζ, ἐν ταῖς αὐταῖς Παραλλήλοις εἰσί.

Εἰπεὶ δὲ καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα αφ, δε, τὰ τῶν Τριγώνων αβγ, δεζ (1) διπλάσια, ἐπὶ ταῖς αὐταῖς μὲν βάσεσι, ταῖς αὐταῖς δὲ παραλλήλοις εἰσιν, αἷς καὶ τὰ Τρίγωνα, φανερόν ὅτι καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα (2), ἅτινα εἰσιν ὡς αἱ βάσεις, ἐν ταῖς αὐταῖς καὶ ταῦτα Παραλλήλοις εἰσί.

Τὰ Τρίγωνα (αβγ, ζιλ) καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα, ἃ εἰσι πρὸς ἄλληλα Γ'. κ. 327. ὡς ὕψη τὰ βε, ιφ, τὰς Βάσεις αγ, ζλ ἴσαι ἔχει. Ἐστὶ δὲ ἀντίστροφον τῷ Α'. Πορίσματι.

Κατασκευαθέντων γὰρ τῶν Τριγώνων ξβρ, φισ, ὡς ἐν τῷ Α'. Πορίσμ., δειχθήσεται ὡς ἀνωτ. τὸ Τρίγωνον αβγ = Τριγ. ξβρ, καὶ τὸ ζιλ = φισ. Ἀλλὰ μὴν ἐξ ὑποθ. αβγ : ζιλ :: βε : ιφ, ἄρα ξβρ : φισ :: βε : ιφ. Ἐὰν ὅν ληφθῶσιν αἱ βε, ιφ, ὡς Βάσεις τῶν Τριγώνων ξβρ, φισ, ἔσονται ξρ, φσ, τὰ τέτων ὕψη. Καὶ ἐπειδὴ τὰ Τρίγωνα εἰσιν ὡς αἱ βάσεις, τὰ ὕψη ξρ, φσ (3) ἴσα ἔσται. Ἄλλ' ἐκ κατασκ. ξρ = αγ καὶ φσ = ζλ, ἄρα αγ καὶ ζλ ἔσονται ἴσαι.

Π ρ ό τ α σ ι ς Β.

„Εἰ ἂν Τριγώνη παρὰ μίαν τῶν Πλευρῶν (βγ) ἀχθῇτις Εὐθεῖα παράλληλος (ζλ), ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τῷ Τριγώνῳ Πλευράς (τετέστιν αζ : ζβ :: αλ : γλ).

„Καὶ ἐὰν αἱ τῷ Τριγώνῳ Πλευραὶ (βα, γα) ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἢ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη Εὐθεῖα (ζλ), παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσαι τῷ Τριγώνῳ Πλευρᾷ (βγ) παράλληλος.

Μέρος Α'. Εἰπεὶ ζεύχθωσαν αἱ βλ, γζ. Εἰπεὶ οὖν ἡ ζλ τίθεται Παράλληλος εἶναι πρὸς τὴν βγ, ἔσαι τὰ Τρίγωνα ζβλ, λγζ ὡς ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως ζλ, ἄλλήλοις (4) ἴσα, ὥς τε τὸ Τρίγωνον χ πρὸς ἐκάτερον, λόγον ἔξει (5) τὸν αὐτόν, τετέστι χ : ζβλ :: χ : λγζ. Ἄλλα τὸ Τρίγωνον χ εἰς πρὸς τὸ Τρίγωνον ζβλ, ὡς αζ (6) πρὸς ζβ. καὶ πάλιν τὸ Τρίγωνον χ εἰς πρὸς τὸ Τρίγωνον λγζ, ὡς (7) αλ πρὸς λγ, ἄρα (8) αζ : ζβ :: αλ : λγ. Ο. Η. τὸ Α'.

Μέρος Β'. Ὡς αζ πρὸς ζβ, οὕτω (9) τὸ Τρίγωνον χ πρὸς τὸ Τρίγωνον

(1) Μ. Α. τῷ α'. (2) Ι. Ε. τῷ ε'. (3) Διὰ τὸ Β'. Πόρ. τῆς παρήσης. (4) Α. Ζ. τῷ α'. (5) Ζ. τῷ ε'. (6) Διὰ τὴν ἀνωτ. (7) Διὰ τὴν αὐτήν. (8) Ι. Α. τῷ ε'. (9) Διὰ τὴν ἀνωτ.

ζβλ. Πάλιν ὡς αλ πρὸς λγ, οὕτω (1) τὸ Τρίγωνον χ πρὸς τὸ Τρίγωνον λγζ· τίθεται δὲ αζ : ζβ :: αλ : λγ, ἄρα (2) Τρίγωνον χ πρὸς Τρίγωνον ζβλ, ὡς Τρίγωνον χ πρὸς Τρίγωνον λγζ· Ὡς τε τὰ Τρίγωνα (3) ζβλ καὶ λγζ, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως ὄντα, ἴσα ἄλληλοις εἰσὶ· καὶ ἐπομένως (4) αὐτὰ ζλ, βγ Παράλληλοι εἰσὶν. Ο. Η. τὸ Β'.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

κ. 329. Α'. Ἐὰν παρὰ μίαν τῇ Τριγώνῃ Πλευρὰν (βγ) πλείονες ἀχθῶσι Παράλληλοι (ιξ, ζλ), ἔσαι ἅπαντα τὰ τῶν Πλευρῶν Τμήματα ἄλληλοις ἀνάλογον. Ἀχθῆτω γὰρ ἡ ζπ Παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ· Αἱ γὼν Εὐθεῖαι ζσ, σπ ἴσαι εἰσὶ (5) ταῖς λξ, ξλ· ἄλλα (6) βι : ιζ :: πσ : σζ, ἄρα καὶ βι : ιζ :: γξ : ξλ.

κ. 330. Β'. Ἐὰν ὥσι Κύκλοι δύο ἔνδοθεν ἀπτόμενοι, ἀπὸ δὲ τῇ Σημεῖν τῆς ἐπαφῆς ἀχθῇ αβ ἡ τῇ μεζονος τῶν Κύκλων Διάμετροι, τέμνυστα τὸν ἐλάσσονα κατὰ τὸ γ, ἀχθῇ δὲ καὶ ὁποιαδήποτε ἄλλη ἡ αδ, τέμνυστα τὸν ἐλάσσονα κατὰ τὸ ε, ἔσαι μὲν ἡ αγ Διάμετρος (7) τῇ ἐλάσσονος τῶν Κύκλων, ἔσονται δὲ αἱ Διάμετροι ταῖς Ὑποτείνουσιν ἀνάλογον, καὶ ἡ διαφορὰ τῶν Διαμέτρων πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν Ὑποτείνουσιν ὡσαύτως· τυτέσιν αβ : αδ :: αγ : αε :: βγ : δε, ἡ καὶ ἐναλλάξ αγ : γβ :: αε : εδ, καὶ αβ : βγ :: αδ : αε. Ἐὰν γὰρ ἀχθῶσιν αἱ Εὐθεῖαι βδ, γε, διὰ τὰς ὑπὸ αδβ, αεγ Ὀρθὰς (8) ἔσας, καὶ διὰ τὸ ἴσας, αἱ βδ, γε (9) Παράλληλοι ἔσονται· Ἄρα (10) αγ : γβ :: αε : εδ. Ο. Η. τὸ Α'.

Καὶ ἐν συνθέσει (11) αβ : βγ :: αδ : δε. Ο. Η. τὸ Β'.

Καὶ ἐν ἀντιστροφῇ (12) βα : αγ :: δα : αε. Ο. Η. τὸ Γ'.

Π ρ ό τ α σ ι ς Γ.

„Ἐὰν Τριγώνῃ Γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνυστα τὴν Γωνίαν Εὐθεῖα (βζ), τέμνη καὶ τὴν Βάσιν (αγ), τὰ τῆς Βάσεως Τμήματα (αζ, ζγ), τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τῇ Τριγώνῃ Πλευραῖς (αβ, γβ).“

„Καὶ εἰὰν τὰ Βάσεως Τμήματα (αζ, ζγ), τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον ταῖς λοιπαῖς τῇ Τριγώνῃ Πλευραῖς (αβ, γβ), ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν το-

(1) Διὰ τὴν αὐτήν. (2) ΙΑ. τῷ ε'. (3) Θ. τῷ ε'. (4) ΙΘ. τῷ α'. (5) ΑΔ. τῷ α'. (6) Β. τῷ ε'. (7) Πόρισμα τῆς ΙΒ. τῷ γ'. (8) ΑΔ. τῷ γ'. (9) ΚΘ. τῷ α'. (10) Διὰ τὴν παρῶν. (11) ΙΗ. τῷ ε'. (12) Διὰ τὸ Α'. Πόρ. τῆς ΙΗ. τῷ ε'.

„μὴν ἐπιζευγνυμένη Εὐθεία (βζ), δίχα τέμνει τὴν τῷ Τριγώνου Γωνίαν (ὕπὸ αβγ).

Μέρος Α'. Προαχθῆτω ἡ γβ, ὥστε τὴν προεκβληθεῖσαν βγ ἴσην εἶναι τῇ βα· καὶ ἐπειδὴ ἐν τῷ Τριγώνῳ ψ, αἱ Πλευραὶ λβ, αβ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ αἱ Γωνίαι (1) αἱ κατὰ τὸ λ καὶ ξ ἴσαι ἔσονται· Ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ ἐκτὸς ὑπὸ αβγ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση (2) ἐστίν, ἡ Γωνία ι, ἣτις ἐξ ὑποθέσεως, τῆς ὑπὸ αβγ ἡμίσεια ἐστὶ, τῇ κατὰ τὸ λ Γωνίᾳ ἴση ἔσται, ὥστε αἱ αλ καὶ ζβ Παράλληλοι (3) εἰσὶ· Καὶ τοίνυν ἐπὶ τῷ Τριγώνῳ αγλ (4), αζ: ζγ :: λβ (τετέστιν αβ) : βγ. Ο. Η. τὸ Α'.

Μέρος Β'. Προεκβληθείσης ὡς ἀνωτέρω τῆς γβ, ὡς τὴν λβ ἴσην εἶναι τῇ αβ, ἐπειδὴ τίθεται εἶναι αζ: ζγ :: αβ (ταυτὸν εἰπεῖν λβ) βγ, ἔσονται αἱ αλ, ζβ (5) Παράλληλοι, καὶ ἔτι καὶ ἡ ἐκτὸς Γωνία ι ἐστίν ἴση (6) τῇ ἐντὸς λ, ἥτε ἐναλλαξ π, ἴση τῇ ξ· Ἀλλὰ γὰρ τῶν λβ, αβ ἴσων ἑσῶν, καὶ αἱ Γωνίαι (7) λ καὶ ξ ἴσαι εἰσὶν· ἄρα καὶ αἱ ι καὶ π ἴσαι Γωνίαι εἰσὶ, καὶ δίχα ἄρα τέμνεται ἡ ὑπὸ αβγ Ο. Η. τὸ Β'.

Π ό ρ ι σ μ α.

Εἰάν ἡ τὴν Γωνίαν τῷ Τριγώνῳ δίχα τέμνουσα Εὐθεία, καὶ τὴν Βάσιν δίχα τέμνη, τὸ Τρίγωνον τῇ δυνάμει τῆς ἐν χειρὶ Προτάσεως, ἴσοσκελὲς ἔσται, καὶ ἡ διχοτομοῦσα Εὐθεία ἐπὶ τὴν Βάσιν πρὸς ὀρθὰς (8) στήσεται.

Π ρ ό τ α σ ι ς Δ.

„Τῶν ἴσογωνίων Τριγώνων ἀνάλογον εἰσὶν αἱ Πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας Γωνίας, καὶ ὁμολογοὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας Γωνίας ὑποτείνεσθαι Πλευραὶ, τετέστιν ὅτι τὰ ἴσογώνια Τρίγωνα ὁμοία (9) ἐστὶ.

Ἐπὶ τῶν Τριγώνων χ, ψ, ἔστω ἡ Γωνία α ἴση τῇ ζ, καὶ ἡ γ τῇ λ, καὶ ἡ β τῇ ι. Φημὶ δὴ ὅτι αβ: ζι :: αγ: ζλ, καὶ αγ: ζλ :: γβ: λι, καὶ γβ: λι :: βα: ιζ· καὶ ὁμοίως αβ: αγ :: ζι: ζλ, καὶ αγ: γβ :: ζλ: λι, καὶ γβ: βα :: λι: ιζ.

Εἰάν γάρ ἡ ζ Γωνία τῇ ταύτης ἴση α ἐπιτεθῇ, αἱ Πλευραὶ ζι, ζλ, ταῖς αβ, αγ Πλευραῖς ἐφαρμόσασθαι· καὶ ἐπειδὴ ἡ ἐκτὸς ὑπὸ αιλ, καθ' ὑπόθεσιν,

(1) Ε. τῷ α'. (2) ΑΒ, τῷ α'. (3) ΚΘ. τῷ α'. (4) Β. τῷ ε'. (5) Β. τῷ ε'. (6) ΚΖ. τῷ α'. (7) Ε. τῷ α'. (8) Διὰ τὸν Γ'. Ἀρίθμ. τῷ Σχολ. τῷ μετὰ τὴν Κε. τῷ α'. (9) Ο'ρ. Α. τῷ ε'.

ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς β, ἔσονται (1) ιλ, βγ Παράλληλοι· ἄρα (2) βι : ια :: γλ : λα, καὶ ἐν συνδέσει βα : ιζ :: γα : λζ. Ἐὰν δὲ ἡ λ Γωνία τῇ ἴση γ ἐπιτεθῇ, ὡσαύτως δείξω, ὅτι καὶ αγ : ζλ :: βγ : ιλ· καὶ τελευταῖον εἰάν ἡ ι Γωνία τῇ ἴση β ἐπιτεθῇ, δείξω παρὰ πλησίον, ὅτι καὶ βγ : ιλ :: αβ : ζι. Ἐπεὶ δὲ τοὶ τὰ ὑγόμενα βα, αγ, γβ, πρὸς τὰ ἐπόμενα ιζ, ζλ, λι, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα ἐσὶν, ἔσαι δὴ καὶ ἐναλλάξ (3) βα : αγ :: ιζ : ζλ, καὶ αγ : γβ :: ζλ : λι, καὶ γβ : βα :: λι : ιζ. Ὡς δὲ δῆλον ἐστὶ τὸ προτεθέν.

Π ο ρ ῖ σ μ α τ α .

α. 333. Α. Ἐὰν Τριγώνῳ παρὰ μίαν τῶν Πλευρῶν βγ, Παράλληλος ἀχθῇ ἡ ιλ, συζησέται Τρίγωνον τὸ ιζλ ὅμοιον τῷ ὀλοσχερεῖ Τριγώνῳ βζγ. Ὅθεν δὴ γζ ἔσαι πρὸς λζ, ὡς βγ πρὸς λι, καὶ ἐναλλάξ γζ : βγ :: λζ : λι· καὶ πάλιν ζβ : ζγ :: ζι : ζλ.

Ἐπειδὴ γὰρ αἱ λι, βγ παράλληλοι εἰσὶν, ἔσονται αἱ ἐκτὸς (4) ὑπὸ ζιλ, ζλι, ἴσαι ταῖς ἐντὸς β καὶ γ, ἑκάτερα ἑκατέρῃ, ἡ δὲ κατὰ τὸ ζ κοινὴ· ὥςτε Ἰσογώνια ἔσαι τὰ Τρίγωνα, καὶ τὰς ὑποτείνουσας ὑπὸ τὰς ἴσας Γωνίας β, καὶ ὑπὸ ζιλ, τετέσι τὰς γζ, λζ, πρὸς τὰς βγ, λι, αἱ ὑποτείνουσιν ὑπὸ τὴν κοινὴν Γωνίαν ζ, ἀνάλογον ἔχοντα· ὁμοίως δὲ καὶ τὰς περὶ τὴν κοινὴν (5) Γωνίαν ζ, τετέσι ζβ : ζγ :: ζι : ζλ.

α. 334. Β. Ἐὰν Τριγώνῳ τὰς Παραλλήλους αγ, λξ τέμνηται Εὐθεῖα ἡ βζ, ἡ ἀπὸ τῆς ἀντιθέτου Γωνίας β ὑγμένη, τεμεῖ αὐτὰς ἀνάλογον.

Κατὰ γὰρ τὸ Α'. Πόρισμα, αζ : λι :: ζβ : ιβ, καὶ ζγ : ιξ :: ζβ : ιβ· ὥςτε αζ : λι :: ζγ : ιξ, καὶ ἐναλλάξ αζ : ζγ :: λι : ιξ (6).

α. 335. Γ. Καὶ μεταξὺ δυεῖν Παραλλήλων αβ, γδ, εἰάν Εὐθεῖαι δύο εζ, ηθ διατέμνωσιν ἄλλήλας κατὰ τὸ ι, τὰ τῶν Τμήματα εἰ, ιζ, ηι, ιθ, ἔσαι ἀνάλογον. Τὰ γὰρ εἰη, ζιθ Τρίγωνα διὰ τὰς ἐν τῷ ι κατὰ κορυφὴν (7) ἴσας ἔσας, καὶ τὰς ἐναλλάξ (8) κατὰ ε καὶ ζ, καὶ η καὶ θ, αἱ καὶ αὐταὶ ἴσαι εἰσὶν, Ἰσογώνια ἔσαι καὶ ὅμοια. Ἀρα εἰ : ιζ :: ηι : ιθ.

Δ. Ἐκ δὲ δὴ τῇ Α'. Πόρισματος, καὶ πύργου, ἡ τῇ τυχόντος ἄλλῃ μετεώρου σημείῳ τὸ ὕψος, μόνῃ τῇ ὑπὸ τῆς σφριχθείσης βακτηρίας πεμπομένη σκιᾷ, καταμετρεῖν παιδεύομεθα.

α. 336. Πήξας γὰρ πρὸς ὀρθὰς τὴν βακτηρίαν ζλ ἐπὶ τῇ ἐδάφει, ἕτως ὥς

(1) ΚΘ. τῷ α'. (2) Β. τῷ ε'. (3) Ις. τῷ ε'. (4) ΚΖ. τῷ α'. (5) Α. Ος. τῷ ε'. (6) Ις. τῷ ε'. (7) ΙΕ. τῷ α'. (8) ΚΖ. τῷ α'.

τὴν ἀρ' ἡλὶν κατὰ βα, τὸ τῆ πύργου περατῶσαν σκίασμα, καὶ διὰ τῆ λ χωρεῖν, ἔξεις ἐπὶ τῷ τριγώνῳ αββ, τὴν ζλ πρὸς τὸ ψβ ὕψωμα τῆ πύργου παρὰ θηλον. Ἐνδεῦντο καὶ ὡς αζ ἡ τῆς βακτηρίας ἀπ' ἄκρας τῆ σκιάσματος ἀπόστασις, πρὸς ζλ τὸ τῆς βακτηρίας ὑπὲρ γῆν μῆκος, ὥτως αψ ἡ τῆ πύργου ἀπ' ἄκρας τῆ σκιάσματος ἀπόστασις, πρὸς ψβ τὸ τῆ πύργου αὐτῆ ὕψος. Εὐχερῆς δὲ ἥσως τῆς τῶν τριῶν πρώτων καταμετρήσεως, βᾶσα καὶ τὸ Δ', τατέσι τὸ ζητούμενον ὕψος εὐρεθήσεται. Ο. Ε. Ε.

Ἐντεῦθεν δὲ καὶ τῶν Κανονίων, τῶν τὰ Ἡμίτονα, καὶ τὰς Ἀπτομένας, καὶ Ε. κ 337. τὰς Τεμνάσας περιεχόντων, τὴν ἀρχὴν λαμβάνομεν. Ἐς ω γὰρ Κύκλῳ Ἡμιδιαμέτρος ἡ αγ, μερῶν φέρε 100000, καὶ Γωνία ἡ ὑπὸ ΒαΔ μοιρῶν 80° καὶ ἐπεὶ ἡ μοιρῶν 60 Ὑποτείνουσα (1) ἴση ἐστὶ τῇ Ἡμιδιαμέτρῳ αγ, ἡ ΔΒ, ἥτις ἐστὶ τὸ Ἡμίτονον μοιρῶν 30, τῇ ἡμισείᾳ τῆς Ἡμιδιαμέτρου, ἥτοι $\frac{1}{2}$ αγ ἴση ἔσται (2), καὶ μέρη 50000 περιέξει. Ἐπὶ γὰρ τῷ ὀρθογώνῳ Τριγώνῳ αδβ, τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ αβ (3) ἴσον ἐστὶ τοῖς δυσὶ Τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ αδ καὶ βδ. Τετραγωνοιδήτω τοῖνον ἡ Διάμετρος αβ, διὰ πολλαπλασιασμῶ 100000 x 100000, καὶ ἀπὸ τῆ ἐντεῦθεν ἀνακύπτουτας Τετραγῶνα, τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ βδ ἀφαιρεθήτω, καὶ λοιπὸν ἔσται Τετράγωνον τὸ ἀπὸ αδ, ἥτοι τὸ ἀπὸ τῆ Συνημιτόνου ζβ, τῇ τῇ αδ ἴση (4), ἐξ ἧ δὲ ἔξαχθεΐσης τῆς ῥίζης, δηλὴ ἔσται ἡ βζ, εἴταν ἡ αδ. Ἀφαιρεθεῖσα δὲ καὶ αὕτη ἀπὸ τῆς Ἡμιδιαμέτρου αγ = 100000, τὸ πλάγιον Ἡμίτονον δγ καταλείπει. Εἴτα διὰ τῆς ἐξῆς ἀναλογίας (5) αδ : βδ :: αγ : εγ, δηλὴ ἔσται καὶ ἡ Ἐφαπτομένη εγ. ἐπειδὴ δὲ (6) ἐστὶν αδ : αβ :: αγ : αε, δηλὴ ἔσται καὶ ἡ Τέμνουσα αε. Τῇ δ' αὐτῇ μεθόδῳ καὶ ἐκ τῆς βζ, ἥτις ἐστὶ τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον τῆς ὑπὸ βαη μοιρ. 60, ληφθήσεται τὸ τῆς αὐτῆς Γωνίας πλάγιον Ἡμίτονον, καὶ ἡ Ἀπτομένη, καὶ ἡ Τέμνουσα. Ἡ δὲ ἐπεὶ (7) τὸ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένον Τετράγωνον (8), διπλάσιον ἐστὶ τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς Ἡμιδιαμέτρου, εἰάν ἡ Ἡμιδιάμετρος ὑποτεθῇ 100000, ἔσται ἡ Πλευρὰ τῷ Τετραγώνῳ τῷ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένῳ (τατέσιν ἡ μοιρ. 90 ὑποτείνουσα) ἴση τῇ τετραγωνεῖᾳ ῥίζῃ τῇ ἀριθμῶ 100000 x 100000 x 2. ὁθεν δὴ γινώσκειται καὶ ἡ ἡμίσεια Πλευρὰ, τατέσι τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον (9) μοιρ. 45, καὶ ἐπομένως καὶ τὸ πλάγιον Ἡμίτονον, καὶ ἡ Ἀπτομένη, καὶ ἡ Τέμνουσα. Καὶ ἐν γένει εἰάν δοθῇ ὁ τῆς Ὑποτείνουσης οὐτινοσὴν τόξου λόγος, ἐν ἔχει πρὸς τὴν

κ 338.

(1) Α. Πόρ. τῆς ΙΕ. τῷ Δ'. (2) Α. Πόρ. τῆς Γ. τῷ γ'. (3) ΜΖ. τῷ α'. (4) ΑΔ. τῷ α'. (5) Α. Πόρ. τῆς Δ. τῷ ε'. (6) Διὰ τὴν αὐτὴν. (7) Ὑφα Σχημ. (8) Σχολ. πρὸ μετὰ τὴν ε. καὶ Ζ. τῷ δ'. (9) Διὰ τὸ Α'. Πόρ. τῆς Γ. τῷ γ'.

Ἡμιδιάμετρον, εὐρεθήσεται τῆς τῆ τόξε ἡμισείας τὸ ὀρθὸν Ἡμίτονον, καὶ τὸ πλάγιον, καὶ ἡ Ἀπτομένη, καὶ ἡ Τέμνουσα. Ὅς δ' αὖ πλειόνων ἐφοίτο, μετῴτω τὸ τῆ περικλεῖς Οὐαλλισία πόνημα, τὸ περὶ τῶν τομῶν τῆς Γωνίας, ἐν τῷ Β'. τεύχει τῶν ἐκείνη συγγραμμάτων, Σελ. 533—601.

κ. 339. ζ'. Καντεῦθεν εἰς ἀπὸ ἡξισοσῶν Γωνίας α τῷ Τρίγωνον αβγ τῷ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένον, Κάθετος ἐπὶ τὴν Βάσιν ἀχθῇ ἡ αε, ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ τῷ Κύκλῳ Διάμετρος αδ, ἔσται δὲ ἡ Κάθετος αε, πρὸς τὴν ἑτέραν τῶν Πλευρῶν τῶν περὶ τὴν Γωνίαν, φέρε πρὸς τὴν αγ, ὡς ἡ ἑτέρα Πλευρὰ αβ, πρὸς τὴν τῷ Κύκλῳ Διάμετρον αδ. Ἀχθείσης γὰρ τῆς βδ, τὰ Τρίγωνα αεγ, αβδ, Ἰσογώνια ἐστί, καὶ γὰρ αἱ γ καὶ δ Γωνίαι (1) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσιν, ὡς ἐπὶ τῆς αὐτῆς Περιφερείας βα βεβηκεῖται· αἱ δὲ Γωνίαι ἥτε (2) ὑπὸ αβδ καὶ ἡ (3) ὑπὸ αεγ ὀρθαὶ καὶ ἴσαι· ὥστε καὶ αἱ ὑπὸ βαδ καὶ αεγ ἀλλήλαις (4) ἴσαι εἰσιν. Τὰ ἄρα Τρίγωνα διὰ τὴν ἐν χερσὶ Προτ. ὁμοία, καὶ ἥτως αε : αγ :: αβ : αδ. Ο. Ε. Δ.

κ. 340. ζ'. Τὴν τῷ Κύκλῳ Διάμετρον αβ (προεκβληθεῖσαν ἢν δέοι) τεμνέτω πρὸς ὀρθὰς Εὐθεία ἀπειρος ἡ εζ κατὰ τὸ γ, ἐπὶ δὲ τῆς Εὐθείας εζ, ληφθέντος τῷ τυχόντος σημείου ε ἐκτὸς τῷ Κύκλῳ, ἐπεξεύχθω ἡ αε τέμνουσα τὸν Κύκλον κατὰ τὸ δ· ἔσται γὰρ ἥτως ἡ Ὑποτείνουσα αδ πρὸς τὴν τῷ Κύκλῳ Διάμετρον αβ, ὡς αγ πρὸς αε· Ἐπιξευχθείσης γὰρ τῆς Εὐθείας εδ, τὰ Τρίγωνα αδβ καὶ αεγ Ἰσογώνια ἐσίν· ἡ μὲν γὰρ α ἐκατέροις κοινὴ, αἱ δὲ κατὰ τὸ γ καὶ δ Γωνίαι ὀρθαὶ (5) εἰσιν· ἐνθεντοι καὶ ἡ τρίτη ἴση ἔσται (6) τῇ τρίτῃ· Τσιγαρῶν διὰ τὴν ἀνὰ χεῖρας Πρότασιν, τὰ Τρίγωνα ὁμοία ἐστί, καὶ αδ : αβ :: αγ : αε.

Τῶν δὲ τοι σημείων β καὶ γ συμπίπτοντων, ἡ τῷ Κύκλῳ Διάμετρος μέση ἀνάλογος ἐστί τῶν αδ καὶ αε· ἔσται γὰρ δὴ αδ : αβ = αβ : αε.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ε.

„Εἰάν δύο Τρίγωνα τὰς Πλευρὰς ἀπάσας ἔχῃ ἀνάλογον, Ἰσογώνια ἔσται τὰ Τρίγωνα.

κ. 341. Τατέσιν εἰάν αβ ἢ πρὸς εζ ὡς αγ πρὸς ρπ, καὶ αγ : ρπ :: γβ : πζ, καὶ γβ : πζ :: αβ : εζ, λέγω δὲ ὅτι αἱ Γωνίαι αἱ ἀπεναντίον τοῖς ἡγμένοις, ταῖς Γωνίαις ταῖς ἀπεναντίον τοῖς ἐπομένοις ἴσαι εἰσιν· τατέσιν ἡ μὲν γ τῇ ι, ἡ δὲ β τῇ ζ, ἡ δὲ α τῇ ξ.

(1) Κ.Α. τῷ γ. (2) Λ.Α. τῷ γ. (3) Εξ ὑποθ. (4) Θ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τῷ α. (5) Ἡ μὲν ἐξ ὑποθ. ἡ δὲ διὰ τὴν Λ.Α. τῷ γ. (6) Διὰ τὸ Θ. Πόρ. τῆς ΛΒ. τῷ α.

Γωνίαι	Η' γ' μ.	Ε' π' ο' μ.	Γωνίαι.
γ	αβ	ρζ	ι
β	αγ	ρπ	ζ
α	γβ	πζ	ξ

Ταῖς Γωνίαις α καὶ γ ποιεῖ ἴσας τὰς χ καὶ ψ, ὥςτε τὰς Πλευρὰς συνελθεῖν κατὰ τὸ ν· οὕτω δέ τοι καὶ αὐτὴ β καὶ ν (1) ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. Ἐπειδὴ οὖν τὰ Τρίγωνα Φ καὶ Τ Ἰσογώνια ἔσιν, ἔχει $\alpha\beta : \rho\nu :: \alpha\gamma : \rho\pi$ (2), ἄρα $\alpha\beta : \rho\zeta :: \alpha\beta : \rho\nu$, καὶ ἐπομένως αὐτὴ ρν, ρζ (3) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Ὡς αὐτῶς δείξω ἴσας εἶναι καὶ τὰς πν, πζ· κἀντεῦθεν τὰ Τρίγωνα Φ καὶ Σ Ἰσόπλευρα εἶσιν, ἀπολήθως δέ καὶ αὐτὴ Γωνία ι, ζ, ξ ἴσαι εἰσὶ (4) ταῖς χ, ν, ψ, τατέστι (5) ταῖς γ, β, α Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ς.

„Εἰάν δύο Τρίγωνα Τ καὶ Σ, μίαν μιᾷ Γωνίᾳ ἴσην ἔχει (τὴν α τῇ ξ), περὶ δὲ τὰς ἴσας Γωνίας τὰς Πλευρὰς ἀνάλογον ($\alpha\beta : \alpha\gamma :: \rho\zeta : \rho\pi$), τὰ Τρίγωνα ἔσαι ὅμοια.

Ταῖς Γωνίαις α καὶ γ ἴσαι γινέσθωσαν αὐτὴ χ καὶ ψ, ὥςτε τὰς Πλευρὰς συνελθεῖν κατὰ τὸ ν, καὶ Γωνίαι γοῦν (6) β καὶ ν ἴσαι ἔσονται καὶ αὐταί· Οὕτω δέ τοι δεῖξαι βῆδιν, ὡς ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω, ἴσας εἶναι καὶ τὰς ρζ, ρν, ἡ δὲ ρπ ἐπ' ἀμφοῖν, τῷ τε Φ καὶ τῷ Σ κοινῇ· ἀλλὰ γὰρ καὶ αὐτὴ Γωνία ξ καὶ χ ἀλλήλαις ἴσαι, ὡς συνεξιστέμεναι τῇ αὐτῇ α, ἡ μὲν χ ἐκ κατασκευῆς, ἡ δὲ ξ ἐξ ὑποθέσεως, ἄρα καὶ αὐτὴ ι καὶ ζ (7) ἴσαι καὶ αὐταί εἰσὶ ταῖς ψ καὶ ν· Ὡς τε τὸ Σ Τρίγωνον Ἰσογώνιον ὃν ἐστὶ τῷ Φ Τριγώνῳ, τατέστιν ἐκ κατασκευῆς τῷ Τ· Ἀρ' οὖν τὰ Τρίγωνα Σ καὶ Τ (8) ὅμοια εἶσι. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ζ.

„Εἰάν δύο Τρίγωνα (αβγ, ζηλ), μίαν Γωνίαν (β) μιᾷ Γωνίᾳ ἴσην ἔχει, περὶ δὲ τὰς ἄλλας Γωνίας (α, ζ) τὰς Πλευρὰς ἀνάλογον (ὡς εἶναι $\beta\alpha :: \alpha\gamma :: \iota\zeta :: \zeta\eta$), τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέρωθεν, ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα, ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς, ὅμοια ἔσαι τὰ Τρίγωνα.

Εἰπερ αὐτὴ γ καὶ λ ὀρθαί, διὰ τὰς β καὶ ι τὰς ἴσας εἶναι τιθεμένας, Ἰσογώνια (9) ἔσαι τὰ Τρίγωνα, καὶ δὴ (10) καὶ ὅμοια. κ. 342.

(1) Πόρ. Θ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (2) Διὰ τὴν ἀνωτ. (3) Θ. τῷ ε'. (4) Η. τῷ α'. (5) Διὰ τὴν κατασκευ. (6) Θ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (7) Δ. τῷ α'. (8) Δ. τῷ ε'. (9) Θ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (10) Δ. τῷ ε'.

Εάν δὲ αἱ Γωνίαι γ ἢ λ μὴ ὀρθαὶ ὦσιν, ὁμογενεῖς δὲ (τὸτο δὲ ἐστίν, ἥτοι ἅμα Ὄρθῃς ἐλάχιστοι, ἢ μείζονες), αἵτε α ἢ ζ Γωνίαι τύχωσιν ἴσαι, διὰ τὰς συνιστῆσθαι ὑποτιθεμένης β ἢ ι , ἔδεν ἦττον τὰ Τρίγωνα (1) Ἰσογώνια ἔσθαι, ἢ δὴ (2) ἢ ὁμοία. Κείσθωσαν γεμὴν αἱ α ἢ ζ μὴ ἴσαι, καὶ ἔστω ἡ α μείζων, πρὸς δὲ τῷ α σημείῳ τῆς $\alpha\beta$ Εὐθείας, τῇ Γωνίᾳ ζ ἴση συνεστήθω ἡ ὑπὸ $\beta\alpha\delta$ · καὶ διὰ τὰς β ἢ ι τὰς ἴσας, ἢ λοιπαὶ αἱ ὑπὸ $\alpha\delta\beta$ ἢ λ ἴσαι (3) ἔσονται, τὰ τε Τρίγωνα $\alpha\beta\delta$, $\zeta\iota\lambda$ (4) ὁμοία, καὶ $\iota\zeta : \zeta\lambda :: \beta\alpha : \alpha\delta$ · ἀλλὰ $\iota\zeta : \zeta\lambda$ (5) :: $\beta\alpha : \alpha\gamma$, ἄρα (6) $\alpha\gamma = \alpha\delta$. Καὶ οὕτως ἐπὶ τῇ Ἰσοσκελεῖ $\alpha\gamma\delta$, αἱ πρὸς τὴν Βάσιν Γωνίαι γ ἢ ὑπὸ $\alpha\delta\gamma$ (7) ὀξεῖαι, ἦτοι Ὄρθῃς ἐλάχιστοι εἰσὶ· Τοῖον ἡ ὑπὸ $\alpha\delta\beta$ ἀμβλεία (8) ἐστὶ, καὶ ἐκ τῆ ἀκκλιδῆς ἢ κατὰ τὸ λ · ἀλλ' ἡ κατὰ τὸ λ αὐτῇ ὁμογενὴς εἶναι ἐτέδη τῇ γ , ἢ ἐπομένως ὀξεῖα, ἢ αὐτῇ ἄρα ἐκύτερον, ἥπερ ἀδύνατον· Οὐκ ἄρα ἡ ὑπὸ $\beta\alpha\gamma$ τῇ Γωνίᾳ ζ ἄνιστος ἐστίν· ἐπεὶ δὲ ἴσαι, τὰ $\alpha\beta\gamma$, $\zeta\iota\lambda$ Τρίγωνα Ἰσογώνια τε ἐστὶ ἢ ὁμοία. Ο. Ε. Δ.

Ταύτην δὲ τὴν Πρότασιν ὑπὸ Τακτικῆς ἢ καλῶς παραλειφθεῖσαν, ἐπάναγκες εἶναι ἔγνω ἀποκαταστῆται ὁ Οὐρίων, ὡς πάνυ οὖσαν πολὺχρησον.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

- Α'. Τῶν αὐτῶν τεθέντων, ἔσθαι ἡ Γωνία $\alpha =$ τῇ Γων. ζ , ἢ ἡ $\gamma = \lambda$.
 Β'. Εάν δύο Τρίγωνα Σ , Φ (ὅρα ἐν Σχήμ. τῆς Ε'. ἀνωτ.), μίαν μὲν Γωνίαν ἴσην ἔχῃ, τὴν ζ τῇ ν , τὰς δὲ περὶ τὰς ἄλλας Γωνίας ξ ἢ χ Πλευρὰς ἴσας, τὰς τε λοιπὰς Γωνίας ι ἢ ψ , ἦτοι ἅμα ὀρθὰς, ἢ ἅμα ὀξείας, ἢ ἅμα ἀμβλείας, τὰ Τρίγωνα ἴσα ἔσθαι. Ὅμοια γὰρ ἐστὶ διὰ τὴν παρῶσαν, ἢ τὸ Σχολ. τῆς Ζ'. τῇ Ε'. , ἢ ἄρα $\chi = \xi$ (9), καὶ ἐπομένως (10) ἢ Τρίγωνον Τριγώνω.

Π ρ ό τ α σ ι ς Η.

„Εάν ἐν ὀρθογώνῳ Τριγώνῳ ($\alpha\beta\zeta$), ἀπὸ τῆς ὀρθῆς Γωνίας ἐπὶ τὴν Βάσιν Κἀθετοὶ ἀχθῇ ($\beta\gamma$), τὰ πρὸς τῇ Κἀθέτῳ Τρίγωνα, ὁμοία ἐστὶ τῷ „τε ὅλῳ ἢ ἀλλήλοις.

κ. 343. Ἐπὶ τῶν Τριγώνων $\alpha\beta\zeta$ ἢ Λ , ἡ μὲν κατὰ τὸ ζ Γωνία κοινὴ, αἱ δὲ ὑπὸ $\alpha\beta\zeta$ ἢ χ ἐξ ὑποθέσ. ὀρθαί, ἢ διὰ τὸτο ἴσαι· ἄρα ἢ αἱ λοιπαὶ α ἢ ξ (11)

(1) Θ. Πόρ. τῆς AB , τῇ α . (2) Δ. τῇ ζ . (3) Θ. Πόρ. τῆς AB , τῇ α . (4) Δ. τῇ ζ . (5) Εξ ὑποθ. (6) Θ. ἢ IA , τῇ ι . (7) Πόρ. IA τῆς AB , τῇ α . (8) HN , τῇ α . (9) Ὑε. Δ. τῇ ζ . (10) Δ. τῇ α . (11) Θ. Πόρ. τῆς AB , τῇ α .

ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται, ὅτι τὰ Τρίγωνα $\alpha\beta\gamma$ καὶ P ὅμοια εἶναι, ἥτε Γωνίαι ἴση τῇ ζ . Καὶ τεύθει δὴλον ἔσθαι, ὅτι καὶ τὰ P καὶ Λ ἀλλήλοις ὅμοια, αἱ γὰρ Γωνίαι ι καὶ ζ , α καὶ ξ , υ καὶ χ ἴσαι ἀλλήλαις.
Ο. Ε. Δ.

Π ο ρ ί σ μ α τ α .

Η' βγ μέση ἀνάλογος ἐστὶ τῶν αγ, γζ.

Α'.

Ἐπειδὴ γὰρ ἐπὶ τῶν Τριγώνων P καὶ Λ , ἴσαι εἰσὶν αἱ Γωνίαι καὶ ζ , ὧν ἡ μὲν ἀπεναντίον ἐστὶ τῆς Πλευρᾶς αγ, ἡ δὲ τῆς γβ, ἴσαι δὲ καὶ αἱ α καὶ ξ , ὧν ἡ μὲν ἀπεναντίον ἐστὶ τῆς Πλευρᾶς γβ, ἡ δὲ τῆς γζ, φανερόν (1) ὅτι αγ : γβ :: γβ : γζ.

Η' βζ μέση ἀνάλογος ἐστὶ τῶν αζ, γζ· ἡ δὲ αβ μέση τῶν ζα καὶ γα.

Β'.

Ἐπὶ γὰρ τῶν Τριγώνων $\alpha\beta\gamma$ καὶ Λ , ἴσαι μὲν αἱ Γωνίαι ὑπὸ $\alpha\beta\gamma$, καὶ ἡ κατὰ τὸ χ , ὧν τὴν μὲν ὑποτείνει ἡ αζ, τὴν δὲ ἡ βζ· ἴσαι δὲ καὶ αἱ α καὶ ξ , ὧν τὴν μὲν ὑποτείνει ἡ βζ, τὴν δὲ ἡ γζ· ὥστε (2) αζ : βζ :: βζ : γζ.

Παραπλησίως, ἐπεὶ ἐν τοῖς Τριγώνοις $\alpha\beta\gamma$ καὶ P , ἴσαι μὲν αἱ Γωνίαι ὑπὸ $\alpha\beta\gamma$ καὶ υ , ὧν τὴν μὲν ὑποτείνει ἡ αζ, τὴν δὲ ἡ αβ, ἴσαι δὲ καὶ αἱ κατὰ τὸ ζ καὶ ι , ὧν τὴν μὲν ὑποτείνει ἡ αβ, τὴν δὲ ἡ αγ, ἔσθαι πάλιν αζ : αβ :: αβ : αγ.

Ἐπὶ τῶν τριῶν τετῶν Τριγώνων $\alpha\beta\gamma$, καὶ P , καὶ Λ , αἱ τὰς ἴσαι Γωνίαι ὑποτείνεσθαι ἀνάλογον (3) εἰσὶν. Ὅθεν ἐὰν τῇ Α'. λόγῳ οἱ ὄροι ἀπὸ τῶν Τριγώνων $\alpha\beta\gamma$, οἱ δὲ τῇ Β'. ἀπὸ τῆς P , οἱ δὲ τῇ Γ'. ἀπὸ τῆς Λ ληφθῶσιν, ἔσθαι αβ : βζ :: αγ : γβ :: βγ : γζ· καὶ πάλιν βα : αζ :: γα : αβ :: γβ : βζ· καὶ τελευταῖον αζ : ζβ :: αβ : βγ :: βζ : ζγ. Τέτω γὰρ τῷ τρόπῳ ἀναλογιζομένοις, οἱ ὁμόλογοι τῶν ὁρῶν ταῖς ἴσαις τῶν Γωνιῶν πανταχῇ ὑποκρίσονται.

Π ρ ό τ α σ ι ς Θ.

„Τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν (αβ) κατὰ τὸν δοθέντα λόγον (ζι : ιλ) τεμεῖν.

Ἀρχθῆτω ἄπειρος ἡ αψ, καὶ ἐπ' αὐτῆς ληφθῆτωσαν απ, πρὶ ἴσαι ταῖς ζι, ιλ· ἀπὸ δὲ τῆς εἰς ἐπεξεύχθω ἡ θβ, καὶ πρὸς αὐτὴν διὰ τῆς π ἤχθω Παράλληλος ἡ πγ. Φημὶ δὴ ὡς οὕτως ἐγένετο τὸ ἐπιταχθέν· δὴλον δὲ ἐκ τῆς Β'. Προτάς. τῆς Β. Βέλμ.

κ. 344.

(1) Α. τῆς ε. (2) Α. τῆς ε. (3) Α. τῆς ε.

Πορίσματα.

- Α'. Ἐντεῦθεν τὴν δοθεῖσαν Εὐθείαν $\alpha\beta$ οὕτω τεμεῖς, ὥς εἶναι τὴν ὅλην πρὸς τὴν ἀποτμηθεῖσαν $\beta\gamma$, ἐν λόγῳ δοθέντι τῷ κατὰ μείζονα ἀνισότητα· τετέσιν ὡς ἡ $\zeta\lambda$ πρὸς τὴν $\lambda\iota$, εἰς ἐπίτινος μὴ πεπερασμένης Εὐθείας τῆς $\alpha\psi$, λάβης μὲν τὴν $\alpha\rho = \zeta\lambda$, λάβης δὲ ἐπὶ τῆς $\rho\alpha$ τὴν $\rho\pi = \lambda\iota$, καὶ ἐπιζεύξης τὴν $\rho\beta$, ἢ πρὸς αὐτὴν Παράλληλον ἀγάγῃς τὴν $\pi\gamma$.
- Β'. Κἀντεῦθεν αὖτις, τὴν δοθεῖσαν Εὐθείαν $\alpha\gamma$ οὕτω προεκβάλλειν δυνήσῃ ἐπὶ τὸ β , ὥς τὴν ὅλην προαχθεῖσαν $\alpha\beta$ εἶναι πρὸς τὴν προσκειμένην $\beta\gamma$, ἐν λόγῳ δοθέντι τῷ κατὰ μείζονα ἀνισότητα, τετέσιν ὡς $\zeta\lambda$ πρὸς $\lambda\iota$, λαβὼν ἀμέλειτοι ἐπὶ Εὐθείας μὴ πεπερασμένης τῆς $\alpha\psi$, τὴν μὲν $\alpha\rho = \zeta\lambda$, τὴν δὲ $\rho\pi$ ἐπὶ τῆς $\rho\alpha$ ἴσην τῇ $\lambda\iota$, ἢ ἐπιζεύξας τὴν $\pi\gamma$, ἢ Παράλληλον ἀγαγὼν πρὸς αὐτὴν τὴν $\rho\beta$, ἥτις ἐπὶ τῆς $\alpha\gamma$ προεκβληθείσης, τὸ Σημεῖον β διορίσει.
- Γ'. Κἀντεῦθεν τέως τὴν δοθεῖσαν Εὐθείαν $\alpha\gamma$ οὕτω προεκβαλεῖν ἔξεις, ὥς εἶναι τὴν $\alpha\gamma$ πρὸς τὴν ὅλην προεκβληθεῖσαν, ἐν λόγῳ δοθέντι τῷ κατ' ἐλάσσονα ἀνισότητα, τετέσιν ὡς ἔχει ἡ $\zeta\iota$ πρὸς τὴν $\zeta\lambda$, ἀμέλειτοι λαβὼν ἐπὶ Εὐθείας μὴ πεπερασμένης τῆς $\alpha\psi$, Εὐθείας τὰς $\alpha\pi$, $\alpha\rho$, ταῖς $\zeta\iota$, $\zeta\lambda$. ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρῃ, ἢ ἐπιζεύξας τὴν $\pi\gamma$, ἢ πρὸς αὐτὴν Παράλληλον ἀγαγὼν τὴν $\rho\beta$, ἥτις ἐπὶ τῆς Εὐθείας $\alpha\gamma$ προεκβληθείσης, τὸ Σημεῖον β διορίσει.

Πρότασις Ι.

„Τὴν δοθεῖσαν Εὐθείαν ἄτμητον ($\alpha\beta$), τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ ($\alpha\iota$) τετμη-
„μένη ὁμοίως τεμεῖν (κατὰ λ ἢ π).

- κ. 345. Ἐπεξεύχθω ἡ $\beta\iota$ ἐπὶ τὰ πέρατα τῶν δοθεισῶν Εὐθειῶν, ἀπὸ τῷ αὐτῷ Σημεῖο α κατὰ γωνίαν ἡγμένων, παρὰ δὲ τὴν ἐπιζευχθεῖσαν, ἀπὸ τῶν Σημεῖων ζ ἢ γ ἤχθωσαν Παράλληλοι πρὸς τὴν $\alpha\beta$, ἣν χρὴ τεμεῖν, προσπίπτειν κατὰ Σημεῖα τὰ λ ἢ π . Φημὶ δὲ ὥς ἐγένετο τὸ ἐπιταχθέν.

Δῆλον δὲ ἐκ τῷ Α'. Πορίσμ. τῆς Β'. τῷ ε'.

- κ. 346. Καὶ ἄλλως δέπως, εἰάν ἡ τετμημένη Εὐθεῖα $\iota\alpha$ μείζων ᾗ τῆς ἣν χρὴ τεμεῖν, $\beta\pi$, ἔσωσαν Κύκλοι τρεῖς ἀλλήλων ἐφαπτόμενοι περὶ Διαμέτρους τὰς $\iota\zeta$, $\iota\gamma$, $\iota\alpha$, ἐνηρμόσθω δὲ ἢ ἡ $\beta\pi$ ὑποτείνουσα, ἀπὸ τῷ ι Σημεῖο εἰς τὴν τῷ μείζονος τῶν Κύκλων προσπίπτουσα Περιφέρειαν. Οὕτω γὰρ οἱ δύο ἐλάσσονες Κύκλοι, κατὰ τὰ Σημεῖα λ ἢ π , τὴν $\beta\pi$ Εὐθείαν τεμεῖσι, κατὰ λόγους

(1) τῶν τομῶν τῶν τῆς Διαμέτρου. ια. Ἐὰν δὲ ἡ ια Εὐθεΐα τετμημένη ἢ εἰς μέρη τέτταρα, τεσσάρων Κύκλων δεῖξει, καὶ εἰάν εἰς πέντε, πέντε, καὶ οὕτως εἰς ἄπειρον.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Ἐκ δὲ ταύτης τῆς Προτάσεως, καὶ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεΐαν εἰς ὅσαδῆποτε μέρη ἀλλήλοις ἴσα διαιρεῖν παιδευόμεθα, συνάπτοντες μὲν κατὰ γωνίαν τῇ Εὐθεΐᾳ αβ (ὡς ἐν τῷ Σχήμ. τῆς Προτ.), ἣν χρὴ τεμεῖν, Εὐθεΐαν μὴ πεπερασμένην τὴν αἰ, καὶ ταύτην εἰς μέρη ὅσα ἂν δέξῃ ἴσα ἀλλήλοις διαιρῶντες τῇ διαβήτη, οἷον εἰς αγ, γζ, ζι, κξ., καὶ τὴν ιβ ἐπιζευγύνοντες, καὶ πρὸς αὐτὴν Παραλλήλους τὰς ζλ, γπ ἄγοντες.

Ἄλλως δὲ καὶ ῥάδιον, ὡς παρὰ τῷ Μαυρολύκῳ. Ἐςω ἡ αβ τριχοτομητέα, καὶ ἀχθήτω ἡτοι αὐτῆς ὑπερθεῖν ἢ ἑνερθεῖν, παράλληλος ἡ ισ μὴ πεπερασμένη, ἀπὸ δὲ τῆς ισ ὑπὸ τὴν αβ κειμένης, ληφθήτωσαν τῷ διαβήτη μέρη τρία ἴσα τὰ ιπ, πρ, ρσ, ἅπερ ἂν ἅμα μείζονα ἢ τῆς αβ, ἐλάσσονα δὲ, εἰάν ἡ ισ ὑπὲρ τὴν αβ τεθῇ· διὰ δὲ ι καὶ α, καὶ διὰ καὶ σ καὶ β, ἀχθήτωσαν Εὐθεΐαι συμπίπτουσαι κατὰ τὸ γ (2). Αἱ γὰρ ἀπὸ τῆ γ διὰ π καὶ ρ ἀγόμεναι Εὐθεΐαι, τὴν δοθεῖσαν αβ τριχοτομήσουσιν. Ἡ δὲ δεῖξις σαφὴς ἐκ τῆ β'. Πορίσμ. τῆς Δ'. Προτ.

Ἄλλως ἔτι σὺν Μαυρολύκῳ τὸ αὐτὸ τῷτο ἐκπεραννόμεν. Οἷον κείσθω αβ, ἣν εἰς τέτταρα δεῖ τεμεῖν, καὶ ἀχθήτω Εὐθεΐα μὴ πεπερασμένη ἡ αχ, καὶ πρὸς αὐτὴν Παράλληλος ἡ βψ, ἐδ' αὐτὴ πέρας ἔχουσα· Ἐκ δὲ τούτων ληφθήτωσαν τῷ διαβήτη μέρη ἴσα τὰ αλ, λξ, ξπ, καὶ βυ, υτ, σρ, ἐφ' ἑκατέρας δηλ. μονάδι ἐλάσσονα τῶν α' χρὴ ἐπὶ τῆς αβ λαβεῖν. αἱ γὰρ διὰ τούτων ἀγόμεναι Εὐθεΐαι λρ, ξσ, πυ, εἰς τέτταρα τὴν δοθεῖσαν αβ τεμεῖσι. Ἐπειδὴ γὰρ ἐκ κατασκ. αἱ λξ καὶ ρσ ἴσαι τε εἰσὶ καὶ Παράλληλοι, καὶ αἱ ταύτας ἐπιζευγύνουσαι λρ καὶ ξσ (3) ἴσαι ἔσονται καὶ αὐταὶ καὶ Παράλληλοι· ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ ξσ καὶ πυ Παράλληλοι εἰσίν. Ἐπειδὴ τοίνυν ἡ απ εἰς μέρη τρία ἴσα ἀλλήλοις τέτμηται, εἰς τρία ἴσα καὶ ἡ αἰ (4) τετμημένη ἔσται· παραπλησίως δὲ καὶ ἡ βγ εἰς τρία ἴσα· ἡ τοίνυν ὅλη αβ εἰς ἴσα τέτταρα.

Αὗται δὲ αἱ δύο πράξεις εὐχερέστεραι τῆς κατ' Εὐκλείδην εἰσὶ, ὡς ἐφ' ὧν ἐλάσσονες αἱ ἀγόμεναι Παράλληλοι.

(1) Β. Πόρ. τῆς Β'. τῷ ε'. (2) Σχόλ. ΑΓ. τῷ α'. (3) ΑΓ. τῷ α'. (4) Δ. Πόρ. τῆς Β'. τῷ ε'.

Π ό ρ ι σ μ α .

- κ. 349. Ἐντεῦθεν δὴ τὸ Τραπεζίον αβγδ, ἔπερ αἱ αδ καὶ βγ Πλευραὶ παράλληλοι εἰσὶν, εἰς μέρη ὅποσων ἀλλήλοις ἴσα διαμερίζειν μανθάνομεν. Προεκβεβλήσω γὰρ ἡ βγ εἰς τὸ ε, εἰς ὃ τὴν γε ἴσην εἶναι τῇ αδ. Διὰ γυν τὰς ἐναλλάξ Γωνίας ὑπὸ δαζ καὶ ζεγ, καὶ τὰς αδζ καὶ εγζ (1) ἴσας ἔστας, καὶ δὴ καὶ διὰ τὰς Βάσεις αδ, γε τὰς ἐκ κατασκευῆς ἴσας, τὰ Τρίγωνα αδζ καὶ ζγε (2) ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶν· ἐνθεντοὶ καὶ τὸ Τρίγωνον αβε τῷ Τραπεζίῳ αβγδ ἴσον εἶσι. Καὶ διαιρεθείσης τοίνυν τῆς Βάσεως (3) εἰς ἴσα ὁσαδιποτὲν μέρη, οἷον εἰς τρία βη, ηρ, ρε, καὶ ἐπιζευχθεῖσιν τῶν αη, αρ, ἔσται τὸ αβη Τρίγωνον, καὶ τὸ αηρ, καὶ τὸ αρε, τὰ Τραπεζία τριτημόρια. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΑ.

- „Δυσὲν δοθεῖσων Εὐθειῶν (αβ, βγ) τρίτην ἀνάλογον προτευρεῖν.
κ. 350. Ἐπεξεύχσω ἡ αγ, ἀπὸ δὲ τῆς βα προεκβληθείσης ληφθῆτω ἡ αζ = βγ, διὰ δὲ ζ παρὰ τὴν αγ παράλληλος ἀχθῆτω ἡ ζχ μὴ πεπερατμένη, πρὸς ἣν κατὰ τὸ λ ἡ βγ προεκβληθεῖσα καὶ αὐτὴ προσπιπτέτω. Φημί δὴ ὅτι $\alpha\beta : \beta\gamma :: \beta\gamma : \gamma\lambda$. Καὶ γὰρ $\alpha\beta : \alpha\zeta :: \beta\gamma : \gamma\lambda$ (4)· ἀλλὰ (5) $\alpha\zeta = \beta\gamma$, ἄρα $\alpha\beta : \beta\gamma :: \beta\gamma : \gamma\lambda$. ἢ τε γλ ἡ τρίτη οὕτως εἰσὶν ἀνάλογος. Ο. Η. Ε.

Α' λ λ ω ς .

- κ. 351. Συνεσάδωσαν αἱ αβ, βγ πρὸς ὁρθάς, καὶ ἐπεξεύχσω ἡ αγ, ἀπὸ δὲ τῆς γ ἀχθῆτω μὴ πεπερασμένη ἡ γχ, πρὸς ὁρθάς ἐπὶ τῆς αγ, ἥπερ κατὰ τὸ λ προσαντάτω ἡ αβ προεκβληθεῖσα. Φημί δὴ τὴν αβ εἶναι πρὸς τὴν βγ, ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν βλ. Δῆλον δὲ ἐκ τῆς Α'. Πορίσματος τῆς Η'. Προτάσεως.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Δυνατὸν δὲ τὴν δοθεῖσαν ἀναλογίαν, μὴ μόνον διὰ τριῶν ὄρων, ἀλλ' ἐπὶ καὶ δι' ἄλλων ὑπὲρ ἀριθμὸν πλείονων περάσασθαι, καὶ τό γε ἀποδεικνύεται τῆς τῶν ἐξ ἄπειρος ἀναλογημάτων ὄρων προόδου ὑπὸ ὀφθαλμοῖς τίσθαι. Περὶ τὰς ἀριστὰς τῷ Γρηγορίῳ τῷ ἀπὸ τοῦ ἁγίου Βικεντίου, ἐν Β'. Βιβλ. τὸ αὐτὸ πονήματος διεύληπται, τὴν τῆς Γεωμετρικῆς προόδου εἰσήγησιν ἀκριβῶς ὑποσημείω. Ταύ-

(1) ἤΖ. τῷ α'. (2) Κε. τῷ α'. (3) Διὰ τὸ πρὸς ἑνὶ χῆρας Σχόλ. (4) Β. τῷ ε'. (5) Ἐκ κατ.

τητοι κ' ἡμῶν ἐπιτεταμμένην τῷ προκειμένῳ τὴν κατασκευὴν κ' ἀποδείξιν ἐν-
ταῦθα ἀποδοτέον.

Λ ἦ μ μ α Α'.

„Τῷ κατὰ τὴν ἐλάχιστον ἀνισότητα λόγῳ λξ πρὸς πρ αἰ συνεχιζό- κ. 352.
„μέν, εἰς Μέγεθος παντὸς τῷ δοθέντος μείζον ἤκειν συμβαίνει.

Ἐςω λξ : λρ :: λρ : πλ, κξ : εσαι δὴ κ' ἀνάπαλιν (1) πλ : ρλ :: ρλ :
ξλ· ἄρα κ' ἐν διαιρέσει (2) πρ : ρλ :: ρξ : ξλ, καὶ ἐναλλάξ (3) πρ : ρξ ::
ρλ : ξλ. Ἀλλὰ μὲν ρλ μείζον ἐστὶ τῆς ξλ, ἄρα κ' πρ μείζον τῆς ρξ· Ὡς ταύ-
τως δείξω κ' τὴν ιπ μείζονα εἶναι τῆς πρ, κ' ὅτως ἐφεξῆς· Ἐπειδὴ τοίνυν
συνεχιζομένη τῷ λόγῳ λξ πρὸς λρ, τῷ πρώτῳ λξ αἰ προτεπιγίνεται τὰ
μέρη ξρ, ρπ, πι, κξ: διηνεκῇ τὴν αὐξητικὴν ἀπεργαζόμενα, φανερόν ὡς οὕτως
ἤκειν συμβαίνει πρὸς τι Μέγεθος, ὅπερ ἂν παντὸς τῷ δοθέντος μείζον εἴη.
Ο. Ε. Δ.

Λ ἦ μ μ α Β'.

„Τῷ κατὰ τὴν μείζονα ἀνισότητα λόγῳ αβ πρὸς γβ διηνεκῶς συνεχι-
„ζομένη, εἰς Μέγεθος παντὸς τῷ δοθέντος ἔλαττον ἤκειν συμβαίνει.

Κεῖσθω ἡ λξ, ὅσον ἂν βάλῃοι βραχυτάτη, καὶ γινέσθω (4) βγ : βα : κ. 353.
: λξ : λρ. Δυνατὸν οὖν τὸν λόγον λξ πρὸς λρ ἐπὶ τοῦτον συνεχίζεσθαι,
ὥς ὅρον τινὰ ἐμπεσεῖν (αἶον φέρε τὸν λι), ὅς μείζον εἴη τῷ αβ (5). Ἀλλὰ
γὰρ ἰσαριθμῶς τῷ λόγῳ λξ πρὸς λρ, κατὰ ὅρους τὰς γβ, εβ, ζβ, συνεχι-
ζέσθω κ' ὁ λόγος αβ πρὸς γβ, κ' εσαι ἡ ζβ ἐλάττω τῆς ξλ.

Ἐκ γὰρ δὴ τῆς κατασκευῆς φανερόν, ὅτι ιλ, πλ, ρλ, ξλ ἀνάλογον
εἰσὶ ταῖς αβ, γβ, εβ, ζβ· Τοιγαρὲν δι' ἴσιν (6) ιλ : ξλ :: αβ : ζβ, καὶ
ἐναλλάξ (7) ιλ : αβ :: ξλ : ζβ. Ἀλλὰ γὰρ (8) ἡ ιλ μείζον τῆς αβ, ἄρα κ'
ἡ ξλ μείζον τῆς ζβ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό β λ η μ α :

„Τὸν δοθέντα λόγον τὸν κατὰ μείζονα ἀνισότητα αβ πρὸς βγ, δι' α-
„πείρων συνεχῶς ὁρων προαγαγεῖν, κ' τῶν ἀπάντων τὸ ἄθροισμα προθέσθαι.

(1) Σχόλ. τῆς Ις. τῷ ε'. (2) ΙΖ. τῷ ε'. (3) Ις. τῷ ε'. (4) Πόρ. Γ. τῆς Θ. τῷ
ε'. (5) Αἴμ. δ'. (6) ΚΒ. τῷ ε'. (7) Ις. τῷ ε'. (8) Ἐκ κατ.

α. 354.

Α' χθήτωσαν Κάθετοι αὐ αλ, βξ, ἴσαι ταῖς δοθείσαις αβ, βγ, διὰ δὲ λ καὶ ξ ἀχθήτω Εὐθεῖα συνῆστα (1) τῇ αβγ προεκβληθείσῃ κατὰ τὸ ψ· Φημί δὲ Α', ὡς εἴαν ἀπὸ τῆ γ πρὸς ὀρθὰς ἀγαγῆς τὴν γπ, ἔσαι ἡ γπ τρίτη ἀνάλογος. Μεταχθήτω δὲ ἡ γπ εἰς τὴν γε, ἀπὸ δὲ τῆ ε Κάθετος ἀπῆχθω ἡ ερ, καὶ ἔσαι ἡ τετάρτη· μετینهχθω ἡ ερ εἰς τὴν εζ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡχθω ἡ ζσ, καὶ ἔσαι ἡ πέμπτη· καὶ οὕτω τοῖνυν ὁ λόγος αβ : βγ, τετέστιν ὁ αλ πρὸς βξ, διὰ τῶν ὁρῶν αλ, βξ, γπ, ερ, ζσ, κξ : εἴτ' οὖν διὰ τῶν αβ, βγ, γε, εζ, ζι, κξ : ἐς ἄπειρον προαχθήσεται· Ἀπας γὰρ ὁρος, οἷον ὁ ζσ, ἀφαιρεθῆναι δυνήσεται ἀπὸ τῆ λοιπῆ ζψ· ἐπεὶ γὰρ ἡ λα, ἦτοι ἡ αβ, ἐλάσσων τῆς αψ, καὶ ἡ ζσ ἐλάσσων ἔσαι καὶ αὐτὴ τῆς ζψ (2).

Λέγω δὲ Β', ὡς ἡ αψ ἴση ἐστὶ τῷ ὅλῳ ἄθροισματι τῶν ἐς ἄπειρον ἀναλογουσῶν.

Α'. Μέρος. αψ : βψ :: αλ : βξ (3), τετέστιν ὡς αβ : βγ· καὶ τοῖνυν ἐναλλάξ καὶ ἀνάπαλιν (4) αβ : αψ :: βγ : βψ· ἄρα (5) αψ : βψ :: βψ : γψ· Ἀλλὰ μὲν (6) αψ : βψ :: λα : ξβ, καὶ βψ : γψ :: ξβ : πγ, ἄρα λα : ξβ :: ξβ : πγ. Ὡσαύτως δείξω ξβ : πγ :: πγ : ρε, καὶ ἐφεξῆς ἐς ἄπειρον.

Β'. Μέρος. Ἀπαν τὸ τῶν ἀπειροπληθῶν ὁρῶν ἄθροισμα, εἰς ἔλαττον ἐστὶ τῆς αψ, ὅδε γε μείζων, ἴσον ἄρα· Καὶ μείζων μὲν ἐχθί, δέδεικται γὰρ ἀνωτέρω ὡς ἡ πγ ἐλάσσων τῆς γψ, ἦτε ρε τῆς εψ, καὶ ἡ σζ τῆς ζψ, καὶ ὕτως ἐφεξῆς τέρματος ἀνευ· δυνήσονται ἄρα ἅπαντες οἱ ὅροι πγ, ρε, σζ, κξ : πέρας ἀνευ, ἐπ' Εὐθείας τῆς αψ ἀλλήλων ἐχόμενοι συσπῆναι, ὅπως ὥστε μηδέποτε τῇ σημείῳ ψ ἐφικνεῖσθαι, ἐπὶ παντός οὐτινοσῆν ἀριθμῷ πέρας ἔχοντος πληθυνόμενος· Ὅτι δὲ ὅδε εἰ ὑπὲρ ἀριθμὸν ἡ τῶν ὁρῶν πρόοδος συνεχίζοιτο, τὴν Εὐθεῖαν αψ ὑπερβαλέσθαι δυνήσεται, ἐκ τούτου ἂν εἴη φανερόν, ὅτι ἅπαντα ἡ ἐπ' ἄπειρον προήκοντα τῶν ὁρῶν πρόοδος, ἐπ' αὐτὴν τὴν αψ ἔχει μετενεχθῆναι, ὥστε ὅδε ποτ' ἂν τῆς Εὐθείας αψ μείζων γένοιτο ἡ τοιαύτη πρόοδος· ἀλλὰ γὰρ ὅδε ἐλάσσων ἂν εἴη τῆς αψ, ἥδη καὶ γὰρ εἰδείχθη τὰς αψ, βψ, γψ συνεχῶς εἶναι ἀνάλογον· Καὶ ὡσαύτως ἂν δειχθεῖν καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν εψ, ζψ, ιψ, κξ : Ἐπεὶ γὰρ τοῖνυν μεταγομένων τῶν ἀνάλογον ὄντων πγ, ερ, ζσ, κξ : εἰς τὰς γε, εζ, ζι, κξ : τὰ λοιπὰ εψ, ζψ, ιψ, κξ : αὖτε συνεχῶς ἀνάλογον ἐσὶν, ὡς δέδεικται· ἐφικ-

(1) Σχ. μετὰ τὴν ΑΓ. τῷ α'. (2) Ἐκ τῆ Α. Πόρ. τῆς Δ. τῷ ε'. καὶ ἐκ τῆς ΙΔ. τῷ ε'. (3) Διὰ τὸ αὐτὸ Πόρισμα. (4) Ις. τῷ ε'. μετὰ τῷ Σχολίῳ. (5) Β. Πόρ. τῆς ΙΒ. τῷ ε'. (6) Α. Πόρ. τῆς Δ. τῷ ε'.

τὸν τῶς ἐςὶ πρός τι λοιπὸν (1), ὃ ἂν τῷ δοθέντος παντὸς εἰς ἔλαττον· ταύτητοι ἐ τῶν ἀναλόγων τὸ ἄθροισμα, ἅπαν ὑπερβάλλει μέγεθος, ὅπερ ἂν τῆς αψ ἔλαττον εἴη. Ἐπεὶ δὲ δὴ ἤτε μείζον τυγχάνει ὄν, ὅτε ἔλαττον τῆς αψ, τῇ αὐτῇ ἴση εἶσαι. Ο. Ε. Δ.

Θ ε ώ ρ η μ α.

„Ἡ τῶν πρώτων ὄρων διαφορὰ, ἐ ὁ ὅρος ὁ πρώτος, ἐ ὅλον τὸ τῶν ἀπείρων ἀναλογιῶν ἄθροισμα συνεχῶς ἀνάλογον ἐςί.

Ἐν τῷ ἀνωτ. Σχήματι ἀχθήτω ἡ ξχ Παράλληλος τῇ αψ, ἐ λχ εἶσαι ἡ διαφορὰ τῷ Α'. ὄρε αλ, τυτέσι τοῦ αβ, ἐ τῷ Β'. βξ, ἡτοι βγ. Παράλληλοι τοίνυν ὅσῃς τῆς χξ πρὸς τὴν αψ, εἶσαι λχ : χξ :: λα : αψ (2). Ἀλλὰ μὲν χξ = αβ, ἐ λα = αβ, ἄρα ἡ λχ διαφορὰ ἐςὶ πρὸς αβ τὸν πρώτον ὄρον, ὡς αβ ὁ πρώτος ὄρος πρὸς αψ τὸ ὅλον ἄθροισμα. Ο. Ε. Δ.

Τὸ δ' αὐτὸ καθέλιπτε ἐ συντόμως δειχθήσεται ἐν οἰωδῇ ποτε ποσῷ γένει τοιῷδε τρόπῳ. Ἐςω συνεχῶς ἀνάλογον ὅποιαν (καὶν ἀριθμοὶ ὧτιν) αψ, βψ, γψ, κξ:· τὰ δὲ πάντα ἐπὶ τὸν πρώτον μετηνέχσω τὸ αψ· καὶ ὅτως εἶσονται αβ, βγ, γε, εζ, κξ: τῶν ἀναλόγων διαφοραὶ, αἵτινες ἀπασαι συνάμα τῇ ἐσχάτῃ πηλικότητι ιψ συνεξιστύνονται τῇ πρώτῃ αψ· Ἐπειδὴ τοίνυν τῶν ἀναλόγων ἐς ἀπείρον συνεχιζομένων, ἡ ἐσχάτη ποσότης διὰ τῇ Β'. Λήμματος οἴχεται, σαφεὲς ἂν εἴη, τῶν ἐς ἀπείρον ἀναλόγων τὰς διαφορὰς συνισθῆσαι τῷ πρώτῳ ὄρῳ αψ· Εἴτα ἐπειδὴ αψ : βψ :: βψ : γψ, ἐ (3) κατ' ἀντιστροφὴν, ὡς αβ διαφορὰ πρὸς αψ πρώτον ὄρον, ὅτω βγ ἡ δευτέρα διαφορὰ πρὸς βψ τὸν ὄρον τὸν Β'., ἐ ἐφεξῆς ὁμοίως. Ἀρα ὡς αβ πρώτη διαφορὰ πρὸς αψ πρώτον ὄρον, ὅτως (4) ἀπασαι αἱ διαφοραὶ (τυτέσιν ὡς ἤδη δίδεικται τὸν πρώτον ποσὸν αψ) πρὸς τὸ ὅλον ἄθροισμα τῶν ἀπείρων. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς IB.

„Τριῶν δοθειῶν Εὐθειῶν (αβ, βγ, αζ), τετάρτην ἀνάλογον προσσευρεῖν.

Διατετάχθωσαν αἱ δοθεῖσαι Εὐθεῖαι ὡς ἐπὶ τῷ Σχήματι· ἀχθήτω δὲ ἐ Εὐθεῖα ἡ βζ, πρὸς ἣν Παράλληλοι ἡ γψ, μὴ πεπερασμένη, ἥ δὴ-

(1) Ἰ. μ. Β'. (2) Α. Πόρ. τῆς Δ. τῷ ε'. (3) Α. Πόρ. τῆς ΙΒ. τῷ ε'. (4) ΙΒ. τῷ ε'.

πε γψ προσαντάτω ή αζ προεκβληθεΐσα κατὰ τὸ λ. Φημι δὲ δὴ ὡς αβ : βγ :: αζ : ζλ· δῆλον δὲ ἐκ τῆς Β'. τῷ Παρόντος· ὥστε ή ζλ ή ζητεμένη ἐστὶ τετάρτη ἀνάλογος.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Καλῶς ὁ ήμέτερος Βεττινός, ἐν τοῖς αὐτῷ Διηγουροῖς τῆς Μαθηματικῆς φιλοσοφίας, ἐκ τῆς ΔΕ'. τῷ Γ'. ἐκ τῆς ΙΔ'. τῷ ἀνὰ χεΐρας, ή τῆς παρήσης ἐξόλως ἐξήρηται, τριῶν δοθεισῶν τὴν τετάρτην, ἐκ δυεῖν τὴν τρίτην παρήρησιν ὡδὲ πως.

κ. 357. Ἐὰν ὥσι τρεῖς Εὐθεΐαι, ή δευτέρα γβ, ἐκ ή τρίτη βδ ἐπ' εὐθείας ἐκκείσθωσαν, ἐκ τῶν ή πρώτη βα ἀπτεύω κατὰ τὸ β ὑπὸ τῇ τυχήσῃ Γωνίᾳ· εἴτα διὰ τῶν Σημείων γ, α, ἐκ (1), Κύκλος γεγράφθω, οὗ τῇ Περιφέρειᾳ ή αβ πρώτη προεκβληθεΐσα προσαντάτω κατὰ τὸ ψ· Η' γὰρ βψ ή τετάρτη ἐστὶ ἀνάλογος.

Ἐπειδὴ γὰρ τὰ Ὀρθογώνια αβψ, γβδ (2) ἴσα ἀλλήλοις ἐσὶν, ἐστὶ αβ : βγ :: βδ : βψ διὰ τὴν ΙΔ'. τῷ Παρόντος, τὴν ἐκ ταύτης ὥσπερ εἴρηται, μηδόλως ἐξηρημένην.

κ. 358. Ἐὰν δὲ ὥσι δύο Εὐθεΐαι αβ, βγ, τῇ δευτέρᾳ βγ ἐπ' εὐθείας προσκείσθω ή βδ ἴση τῇ βγ· εἴτα πρὸς τὴν γδ προσπίπτειτω ή πρώτη αβ κατὰ τὸ β ἐν οἰαδήποτε Γωνίᾳ· Καὶ τὰ λοιπὰ ὡς ἀνωτέρω· Ἐστὶ γὰρ ή βψ ή ζητεμένη τρίτη ἀνάλογος.

Η' ἀποδείξει παραπλησίᾳ ἐστὶν· Ἰσῶν γὰρ ὄντων τῶν ὑπὸ αβψ, γβδ Ὀρθογωνίων, ἐστὶ αβ : βγ :: βδ = βγ : βψ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΓ.

„Δυεῖν δοθεισῶν Εὐθειῶν (αγ, γβ), μέσσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

κ. 359. Η' ἐκ τῶν δύο τῶν δοθεισῶν συγχειμένη αβ δίχα τεμήσθω κατὰ τὸ ξ, ἐκ Κέντρω τῷ ξ γεγράφθω Κύκλος διὰ α ἐκ β· Εἴτα ἀπὸ τῷ γ πρὸς Ὁρθῆς ήχθω ή γζ, πρὸς τὴν Περιφέρειαν κατὰ τὸ ζ προσπίπτουσα.

Λέγω δὴ ὡς αγ : γζ :: γζ : γβ.

Ἀρχήτωςαν γὰρ αἱ αζ, βζ, ἐκ τὸ (3) αζβ Τρίγωνον ἐστὶ ὀρθογώνιον, ἀπὸ δὲ τῆς τέτα ὀρθῆς Γωνίας ή Κάθετος ζγ ἐπὶ τὴν Βάσιν, ὥστε αγ : γζ :: γζ : γβ (4)

(1) Ε. τῷ γ'. (2) ΔΕ. τῷ γ'. (3) ΔΔ. τῷ γ'. (4) Δ. Πόρ. τῆς Η. τῷ ε'.

Π ο ρ ί σ μ α τ α .

Κάντεῦθεν δῆλον, ὡς εἶγε ἐξ οὐτινοσῶν τῶν κατὰ τὴν περιφέρειαν Ση- Α'.
μείων ζ, ἐπὶ τὴν Διάμετρον κάθετος ἀχθεῖν ἢ ζγ, ἢ τοιαύτη μέση εἶσαι ἀνά-
λογον, μεταξύ τῶν τῆς Διαμέτρου τμημάτων αγ ἢ γβ.

Δῆλον δέ, ἔτι ὅτι ἡ μέση ἀνάλογον γζ τὸ τῶν ἄκρων ἡμιάθροισμα αξ ἢ Β'.
δέποτε ὑπερβαλέσθαι δυνήσεται· ἀλλὰ τῶν ἀκροτήτων ἀνίσων ἐσῶν, ἡ μέση
γζ τῇ ἡμιαθροίσματος ἐλάσσων εἶσαι, τῷδ' ὅπερ κἀκτῆς ΚΕ'. τῷ Ε'. Βιβλίῳ
ἐν εἰδει πορίσματος ἐπεφέρετο.

Σχόλιον περὶ τὸ Β'. Πόρισμα.

Π ρ ό β λ η μ α .

Ἐπὶ τῶν Τριῶν ἀναλόγων, δοθέντος τῷ ἀθροίσματος τῶν ἄκρων αβ, ἢ τῆς
μέτης δε, τὰς ἀκρότητας αὐτὰς προσευρεῖν. Δοτὶ δὲ τὴν μέσσην δε τῆς ἡμισείας
τῷ ἀθροίσμ. αβ μὴ εἶναι μείζονα (κατὰ τὸ Β'. Πόρ.).

Περὶ τὴν αβ ὡς περὶ Διάμετρον Κύκλος γεγράφθω· τῇ δὲ θῇ Κύκλου κα-
τὰ τὸ β (ὃ θάτερον ἐστὶν ὑποτερουῶν τῶν τῆς Διαμέτρου περάτων) ἀπτεύσθω
ἡ Εὐθεῖα ηβ τῇ δοθείσῃ δε ἴση, ἢ διὰ τῷ η ἀχθήτω ηζ τῇ αβ Παράλλη-
λος, ἥτις διὰ τὸ τὴν δε, ἥτοι τὴν ηβ τῆς τῷ Κύκλῳ Ἡμιαμέτρου μὴ μείζονα
εἶναι, προσπτεῖται τῷ Κύκλῳ κατὰ τὸ ζ· ἀπὸ δὲ τῷ ζ Σημεῖον ἐπὶ τὴν Διά-
μετρον αβ, καθεύσθω Κάθετος ἢ ζγ, αὕτη γὰρ τὴν αβ τεμεῖ κατὰ τὰς ζη-
τημένας ἀκρότητας αγ, γβ.

Ἡ γὰρ ζγ (διὰ τὸ Α'. Πόρ. τῶν ἐνταῦθα) ἡ μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν
αγ, γβ· διὰ δὲ τὴν ΛΔ'. τῷ Α'. ζγ = ηβ, τατέσιν (ἐκ κατασκευ.) ζγ = δε·
ὥς περὶ ἀντιθέμενον.

Ἀριθμητικῶς δὲ εὐρεθήσονται αἱ αγ, γβ, τῶν αὐτῶν ὡς ἀνωτέρω δο-
θέντων, εἰάν ἀχθεῖσθαι τῆς ζξ. ἐκ τῇ αὐτῆς Τετραγώνῃ = $\frac{1}{2}$ αβ² = Τετραγ.
τῷ ἀπὸ $\frac{1}{2}$ αβ, ἀφαιρεθῇ ζγ² = δε², καταλειφθῇ δὲ ξγ². Ἡ γὰρ ἐκ τέ-
τα Τετραγωνικῇ ρίζῃ ξγ προσεδείξα μὲν τῇ ἡμισείᾳ τῆς αβ, ἀφαιρεθείσα δὲ
ἀπὸ τῆς αὐτῆς ἡμισείας, τῇ μὲν θάτεραν τὴν αγ, τῇ δὲ θάτεραν τὴν γβ τῶν
ζητούμενων ἀκροτήτων παρεξοται.

Κάντεῦθεν δὴ ἢ τρεῖς, ἢ ἑπτὰ, ἢ πεντεκαθεκα μέσαι ἀνάλογον ρῆμα Γ'.
προσευρεθήσονται, κατ' ἀριθμοὺς δηλονότι τηλικούτους, ἡλίκοι ἐκ τῆς συνεχῆς
ἀναλογίας 1, 2, 4, 8, 16 κξ· προδέσει ἀνακύπτωσιν· ἥτοι γὰρ μία = 1,
ἢ τρεῖς = 1 + 2, ἢ ἑπτὰ = 1 + 2 + 4, ἢ ὕτως ἐξῆς.

Εἴωσαν δοθεῖσαι πηλικότητες α ε, ε, ε, τῶν μέση ή μ ή διά τήν ἀνά-
 χείρας Πρότασιν ἐξευρισκομένη. Εἴτα μεταξύ α ε μ ληφθῆτω μέση ή λ,
 μεταξύ δέ μ ε μέση ή ν, εἴονται λ, μ, ν, τρεῖς αἱ εὐρεθεῖται μέσαι
 μεταξύ α ε. Ὡς εἶγε εἴφεξῆς μέσαι ληφθῶσι τῶν α ε λ, λ ε μ, μ
 ε ν, ν ε ε, εἴονται δὴ ἑπτὰ αἱ πᾶσαι μεταξύ τῶν α ε, αἱ δέ αὖτις καὶ
 μεταξύ τῶν μέσαι, συνάμα ταῖς ἑπτὰ προτέραις, μέσας τὰς πάσας μετα-
 ξὺ τῶν α ε παρέξουσιν πεντεκαίδεκα. Καὶ ὕτως εἰς ἄπειρον.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Πρὸς γὰρ δ' ἂν εἴη ἐνταῦθα, εἰ περὶ τῆς τῶν δυεῖν μέσων εὐρέσεως, δυεῖν
 δοθεισῶν ἀκροτήτων, βραχὺ ἄττα ἡμᾶς διελθεῖν. Εἰς μὲν οὖν τὴν τῷ Προ-
 βλήματος τῷ δὲ ἐπίλυσιν, τῷ Πλάτωνος προτρεψαμένη, τῶν ἀν' Ἐλλάδα γεω-
 μετρησάντων, οἱ τις ὕδαίς τὴν παρ' ἐαυτῷ σπουδὴν εἰσενέγκας ἢ ἐξὶ νεανικώτα-
 τα. Κεῖνται δὲ παρ' Εὐτοκίῳ ἐν Ὑπομνήμασι (1) τοῖς εἰς τὰ Ἀρχιμήδους ποι-
 κίλοι τρόποι καταλεγόμενοι, λεπτῆς ἐπιγεννήματα φρενός, Πλάτωνος, εἰ
 Ἀρχύτα τῷ Παραντινῷ, εἰ Μεναίχμῳ, εἰ Ἐρατοσθένει, εἰ Φίλωνος τῷ Βυζαν-
 τίνῃ, εἰ Ἡρώνος, εἰ Ἀπολλωνίου τῷ περγαίῃ, εἰ Νικομήδῃ, εἰ Διοκλέει, εἰ
 Σπόρον, εἰ Πάππῳ. Οἱ δὲ εἰς ἄλλης ἐστὶ προσέδεκτο ὅτε Οὐερνέρος, εἰ ὁ Γρη-
 γόριος ὁ ἀπὸ ἀγ. Βικεντίου, εἰ Ρενάτος ὁ Καρτέσιος. Ἐξ ὧν δὴ μετέδωκεν
 τρεῖς μόνας τὰς τῶν λοιπῶν εὐχερεστέρας ἔδοξεν ἡμῖν ὑποθέσθαι.

Ἡ Μέθοδος ἡ κατὰ Πλάτωνα.

„Μεταξὺ τῶν δοθεισῶν αβ, βγ, μέσας δύο προσευρεῖν.

π. 360.

Κεῖσθωσαν αἱ αβ, βγ πρὸς ὁρθάς, εἰ προσεβεβλήσθωσαν ἐπ' ἄπειρον
 πρὸς χ καὶ ψ. Εἴτα ληφθήτωσαν γινώμονες δύο (οὕτως ὁ ἡμέτερος Κλαύ-
 διος ὁ Ρίχαρδος· ὁ γάρ τοι Πλάτων ἐνὶ ἐκέχρητο φέροντι ἐν τῇ ἑτέρᾳ τῶν
 Πλευρῶν δὲ πρὸς ὁρθάς ἐνεσηριγμένον τὸν γε, δι' ὅλης τῆς δὲ εἰρημένης Πλευ-
 ρᾶς ἀπαρεγκλίτως ἀγόμενον), καὶ δευτέρα μὲν τῶν γινώμονων ἡ Γωνία δ' ἐ-
 φηρομόσθω τῇ Εὐθείᾳ βχ, οὕτως ἀλλ' οὖν ὥς καὶ τὴν ἑτέραν τῶν Πλευρῶν
 χωρεῖν διὰ τῆ α· κατὰ δὲ τὸ Σημεῖον ε, καδ' ὁ ἡ ἑτέρα τῇ γινώμονος Πλευ-
 ρᾷ τέμνουσα εἴη τῇ Εὐθείᾳ βψ, ἐφαρμοσθέντος τῷ δευτέρῳ γινώμονος, χω-
 ρεῖτω ἡ τέτα ἑτέρα Πλευρὰ διὰ τῇ γ. Φημὶ δὴτα ὥς αἱ βδ, βε, αἱ δύο μέσαι
 εἰσὶ μεταξύ τῶν δοθεισῶν αβ εἰ βγ. Ἐστὶ γὰρ αβ : βδ :: βδ : βε :: βε : βγ.

(1) Ὑπομν. Θεοφ. Α. Βιβ. β'. περὶ Σφαίρας εἰ Κυλίνδρου.

Η' δὲ ἀπόδειξις σαφὲς ἐκ τῆ Α. Πορίσμ. Πρωτ. Β'. Βιβλ. ζ'. Τὸ γὰρ αὐτὸ Ὁρθογώνιον τρίγωνόν ἐστιν, ἀπὸ δὲ τῆς ἐν τούτῳ ὀρθῆς Γωνίας Κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν κατηνέχθη ἡ δβ· ὥςτε κατὰ τὸ εἶρημ. Πόρ. αβ : βδ :: βδ : βε. Διὰ δὲ τὸν αὐτὸν αὐτὸν λόγον ἡ βδ : βε :: βε : βγ. Δοθεῖσιν ἄρα τῶν αβ, βγ, εὕρηται δύο μέσαι συνεχῶς ἀνάλογον βδ, δε. Ο. Ε. Π.

Η' δὲ δὴ μέθοδος αὕτη πρὸ ἀπατῶν τῶν ἄλλων ἐστὶν εὐξύνετος.

Μέθοδος ἡ κατὰ φίλωνα τὸν Βυζάντιον.

Αἱ δύο Εὐδείξει αβ, βγ πρὸς Γωνίαν ὀρθὴν συνεχάρωσαν, ἡ πληρω- κ. 361.
θήτω τὸ Ὁρθογώνιον αβγδ, ἡ προσεβεβλήσθωσαν αἱ δα, δγ ἐπ' ἀπειρον, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ τῷ αβγδ Ὁρθογωνίᾳ Διαγωνίαι βδ, αγ, ἀλλήλας τέμνεται κατὰ τὸ ε· καὶ Κέντρῳ μὲν τῷ ε, Διαστήματι δὲ τῷ εβ, Κύκλος γεγράφθω, ὃς αὐτὸ δὴ Ὁρθογωνίᾳ, ἡ διὰ τῶν λοιπῶν Γωνιῶν διελύσεται τῆς γ, ἡ δ, ἡ α (1). Τῷ γὰρ Κύκλου περὶ τὸ Ὁρθογώνιον περιγράφεται (2) δυναμένη, τὰ μὲν α, β, γ, δ σημεῖα ἐπὶ τῆς Περιφερείας ἔσται, διὰ δὲ τὰς ὀρθὰς ὑπὸ αβγ, βγδ, αἱ αγ ἡ βδ Διάμετροι ἔσονται Κύκλου τῇ αὐτῇ (3), ὧν ἡ κατατομή ε τῷ Κύκλῳ Κέντρον. Εἰδ' ὁ Κανὼν ἦτω προσηρμόσθω ἐπὶ τῷ σημείῳ β, ὥςτε τὰς ἀπολαμβανομένας βη ἡ ξζ ἴσας εἶναι ἀλλήλαις. Φημὶ δὴ τὰς αζ, γη, τὰς δύο μέσας τυγχάνειν μεταξὺ τῶν δοθεῖσιν αβ καὶ βγ· εἶναι γὰρ αβ : αζ :: αζ : γη :: γη : βγ.

Ἐπειδὴ γὰρ βη, ξζ (4) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, ἡ αἱ ξη, βζ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· καὶ ἴσα ἄρα τὰ Ὁρθογωνία ξηβ, βζξ, τετέστι τὰ Ὁρθογωνία (5) δηγ, δζα· καὶ ἔστιν οὕτως ηδ : δζ : ἀντιπεπονδότης (6) αζ : ηγ. Ἀλλ' ἐπὶ τῇ Τριγώνῳ ζηδ (διὰ τὴν βα Παράλληλον τῇ Βάσει ηδ) ηδ : δζ :: βα : αζ (7), ἄρα (8) βα : αζ :: ηδ : δζ. Αὖτις ἐπειδὴ δέδεικται ἡδη αζ : ηγ :: βα : αζ, ἔστι δὲ βα : αζ :: ηδ : δζ, τετέστι (διὰ τὸ Παράλληλον εἶναι τὴν γβ τῇ βάσει δζ, ἐπὶ τῷ ηδζ Τριγώνῳ) ὡς ηγ : γβ· ἔσται δὴ (9) ἡ αζ : ηγ :: ηγ : γβ. Πᾶσαι τοίνυν αἱ τέσσαρες βα, αζ, ηγ, γβ συνεχῶς ἀνάλογον εἰσὶ, ἡ ἐπομένως μεταξὺ τῶν δοθεῖσιν αβ, βγ, εὕρηται αἱ δύο μέσαι. Ο. Ε. Ε.

Αὗται αἱ δύο μέθοδοι, καίτοι εὐφυῶς τε ἡ ῥαδίως τὴν εὕρεσιν ἐπιτη-

(1) ΑΑ. τῷ γ'. (2) Πόρ. τῆς Ε. τῷ δ'. (3) ΑΑ. τῷ γ'. (4) Εκ κατ. (5) Α. Πόρ. τῆς Ας. τῷ γ'. (6) Διὰ τὴν ΙΔ. τὴν ταύτης μὴ ἐξηρημένην. (7) Α. Πόρ. τῆς Δ. τῷ ζ'. (8) ΙΔ. τῷ ε'. (9) Διὰ τὴν αὐτήν.

δεύονται, διὰ γεμένην τὴν κατὰ ἀπόπειραν τῷ τε Γνώμονος καὶ τῷ Κανόνος
χρησίν, Γεωμετρικὰ ἔκ εἰσί.

Η' Μέθοδος ἡ κατὰ Καρτέσιον.

κ. 362.

Παρασκευαζήτω τοιοῦτοι ὄργανον. Κανόνες δύο συμπεπήχθωσαν κατὰ
τὸ αὐτὸ Σημεῖον υ περιεγόμενοι. ὡς ἔχειν εὐχερῶς τῇ περιαγωγῇ ἀνοιγέ-
σθαι, ἢ κλειεσθαι· τοῖς δὲ Κανόνσιν ἐνεσηρισμένοι ἐσώσαν πλείονες γνώμονες,
ἀλλήλοισι συνημμένοι κατὰ τὰ σημεῖα β, γ, δ, ε, ζ, η, τοιῶδε νόμῳ, ὡς
τῶν Κανόνων υχ, υψ ἀπ' ἀλλήλων τῇ ἀνοιγῇ ἀπαγομένων, τὸν γνώμονα
βγ, προωθεῖν τὸν γδ τὸν ἐν τῷ Κανόνι υψ. τὸν δὲ γνώμονα γδ, προωθεῖν
τὸν δε τὸν ἐν τῷ Κανόνι υχ· καὶ ὡσαύτως ὑπὸ μὲν τῇ δε τὸν ἐξ προσελκύ-
νεσθαι, ὑπὸ τῇ δε τῇ ἐξ τὸν ηζ, καὶ ἡτῶς ἐφεξῆς. Ἐν ᾧ δὲ οἱ Κανόνες υχ,
υψ συγκλειόμενοι ἀλλήλοισι προτάγονται, ἅπαντα τὰ Σημεῖα β, γ, δ, ε,
ζ, η, ἐν ἐνὶ καὶ τῷ αὐτῷ Σημεῖῳ τῷ α συμπίπτειν. Διὰ γὰρ τὰ τοιῶδε ὄρ-
γάνη μεταξὺ δυεῖν δοθεισῶν, ἢ μόνον δύο, ἀλλὰ καὶ τέσσαρες, καὶ ἕξι, καὶ ὅ-
πόσας ἀν βέλοιο, ἐξευρίσκονται. Ὅπερ ἔτε διὰ τῶν Κωνικῶν τομῶν, ἔδε καὶ
ἑτερόν τινα τῶν παρὰ τοῖς ῥηθεῖσι Γεωμέτραις εὐρημένων μεθόδων ἀνυστὸν
ὅλως.

Πρὸς εὐρεσιν μέσων δυεῖν, τριῶν δὲ Γνωμόνων, εἰς δὲ τεσσάρων, γνω-
μόνων πέντε, καὶ ἕξις.

Τῶν τοίνυν δοθεισῶν ἢ ἐλάσσων μετηνέχθω ἐπὶ τὸν Κανόνα υχ, καὶ ἔσω
αὕτη ἢ υβ· ἢ δε δὴ μείζων ἐπὶ τὸν ἕτερον Κανόνα τὸν υψ, καὶ ἔσω υε· καὶ
προσηριστόσθω δὴ τῶν Γνωμόνων ὁ Α'. τῷ σημείῳ β, κἀνταυθα σηρισθήτω.
Ἀνοιγέσθωσαν δὲ οἱ Κανόνες, ἕως οὗ ἢ τῷ τρίτῳ Γνώμονος Πλευρὰ διέλθοι
διὰ τῷ ε. Φημί γάρ ὡς ἡτῶς αἱ υγ καὶ υδ, εἰσὶν αἱ δύο ζητούμεναι μέσαι με-
ταξὺ τῶν δοθεισῶν υβ, υε· εἰσὶ γὰρ υβ : υγ :: υγ : υδ :: υδ : υε.

Ἡ δὲ δεῖξις καταδηλὸς ἐκ τῷ Β'. Πορίσματος τῆς Η' Προτάσεως τῷ ε'.
Βιβλίῳ. Ἐκ γὰρ τῆς τῇ ὀργάνῃ κατασκευῆς, ἢ ἐν τῷ υγδ Τριγώνῳ Γωνία
ἢ πρὸς τῷ γ, ὀρθή οὖσα τυγχάνει, ἀφ' ἧς ἢ γβ Κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν
υδ· ἄρα διὰ τὸ εἰρημένον Πόρ. υβ : υγ :: υγ : υδ. Αὐτῆς δὲ καὶ τῷ Τριγώνῳ
υδε, τῆς πρὸς τῷ δ Γωνίας ὀρθῆς ἥσης, καὶ ἀπὸ ταύτης Κάθετος ἐπὶ τὴν Βά-
σιν υε ἀγομένης τῆς δγ, ἔσαι υγ : υδ :: υδ : υε. Καὶ εἰπὶν ἄρα υβ, υγ,
υδ· υε αἱ τέσσαρες συνεχῶς ἀνάλογον· ὥστε μεταξὺ τῶν δύο δοθεισῶν υβ,
υε, εὕρηται μέσαι δύο υγ, υδ. Ο. Ε. Π.

Εἰάν δὲ μεταξὺ τῶν υβ, υη, τέσσαρες ὥσιν αἱ ζητούμεναι μέσαι, ἀνοι-

γέσθωσαν οἱ Κανόνες, ὡς τὴν τῷ Ε'. τῶν γνωμόνων Πλευρὰν ζῆ διέρχεσθαι διὰ τῷ η, καὶ ἕτως ἔσονται αἱ υγ, υδ, υε, υζ, τέσσαρες μέσαι ἀνάλογον μεταξύ τῶν υβ καὶ υη. Ἡ δὲ δεῖξις κατάδηλος ἐκ τῷ αὐτῷ Πορίσματος.

Ἡ δὲ δὴ Μέθοδος αὕτη, καίτοι δι' ὀργάνου περαινομένη, ὃ πολλῷ πλέον τῇ Πλατωνικῇ ἐκείνῃ ἐστὶν ἐργαδέστερον, θαυμασὴ τῷ ὄντι ἐστὶ, καὶ διὰ τὸ μηδὲν ποιεῖν κατ' ἀπόπειραν, καὶ διὰ τὸ μὴ πρὸς εὐρεσιν δυεῖν μόκων, ἀλλὰ καὶ τεσσάρων ἦν δέοι, καὶ ἐξ, καὶ ὁποσωνῶν ἐξαρκεῖν.

Διὰ δὲ τῶν δύο μέσων, τῆς ἐπιλύσεως τυγχάνει καὶ τὸ Δηλιακὸν πρόβλημα, ὃ τῷ Κύβει διπλασιασμός, καὶ Σώματα τὰ τυχόντα κατὰ λόγον τὴν δοθέντα (1) αὔξασθαι, ἢ μειῖσθαι δύναται, καθάπερ τὰ ἐπίπεδα τῶν Σχημάτων (2) διὰ μιᾶς μέσης εὐρισκόμενης. Πρῶτος δὲ ὁ τὴν εἰς τῷτο φέρουσαν τεμὼν φέρεται ὁ Ἰπποκράτης, ὃ καὶ πάντες ἐξῆς οἱ γεωμετρήσαντες παρηκολυθηκότες εἰσι.

Καὶ περὶ μὲν τῆς τῶν δύο μεσοτήτων ἐν δυτὶ δεδομέναις ἀκρότησι θήρας τοσαῦτα. Τῶντις δὲ κατ' ἡμᾶς Γεωμετρίας ἔξιν ἐαυτῷ προσεῖναι οἰόμενος θαυμασίαν, αὐτῆς τῆς νύσσης ἐπ' ἀκριβὲς ῥῆθι ἰσόσαι τῷ σκοπόμενῃ, πρῶτος μὲν αὐτὸς μετὰ τοσούτης, καὶ μόνος, γεωμετρικώτατα τὴν εὐρεσιν ἐπισκευάσασθαι ἠγησάμενος, πολλὰ μὲν τοι παραλογισθεὶς καὶ τὸν παρὰ τοῖς εἰδίῃν ἔλεγχον μὴ διαφυγῶν. Τῷτον οὖν ἀπευθύναι ὑπὸ ἄλλων εἰς τῷτο παρορμηθέντες, αὐτοὶ τὸν ἀγῶνα ἀνεβαλόμεθα, ὅσον δὲ εὐλόγως, αὐτὴν εἴη μετιῶν τὴν ὑφ' ἡμῶν ἐκδοθεῖσαν ἀντίρρῃσιν, ἣν ἐν αὐτῷ τῷ τέλει τῷ ἀνά χειρὸς Βιβλίῳ Σοὶ ὑποθήσομεν.

Π ό ρ ι σ μ α .

Ἐντεῦθεν δὲ λαβεῖν ἐνὶ τὴν μέθοδον τῷ τὸν τυχόντα λόγον τὸν κατὰ ἐλάχιστοια ἀνισότητα, ἕως οὗ δόξῃε, προαγαγεῖν. Κεῖθω λόγος κατ' ἐλάχιστοια ἀνισότητα ὃ αξ πρὸς αγ, ὃν διὰ πλείονων ὄρων δέον προαγαγεῖν. Ἐπὶ τῆς αγ ὡς ἐπὶ διαμέτρου, Ἡμικύκλιον γεγράφω, ὃτινι ἀπὸ τῷ α Σημεῖα ἐνηρμόδω ἢ αβ = αξ. Προαχθήτωσαν δὲ ἐπ' ἀπειρον αἱ αβ, αγ, κατὰ τὰ Σημεῖα φ καὶ π· ἐπιζευχθήτω δὲ ἢ βγ, καὶ πρὸς ὅρθας ἀχθήτωσαν αἱ γδ, δε, εζ, ζη, κξ. Καὶ διὰ τὰς Ὄρθας (3) ὑπὸ αβγ, x 363.

(1) Ὅρα τὸ Σχόλ. τὸ μετὰ τὴν ΙΗ. τῷ ιβ'. (2) Ὅρα τὸ Δ. Πόρ. τῆς Κ. τῷ ε'.
(3) ΔΔ. τῷ γ'. καὶ Ὅρ. ΙΔ. τῷ α'.

αγδ, αδε, αεζ, αζη, κξ: ἔσονται (1) αἱ αβ, αγ, αδ, αε, αζ, αη, κξ: συνεχῶς ἀνάλογον.

κ. 364.

Τὸ δ' αὐτὸ λαβεῖν ἔσαι, ἡ τῆς ὑπὸ αβγ Ὀρθῆς μὴ ἔτης. Συνεσά-
δωσαν γὰρ κατὰ Γωνίαν τὴν τυχεῖαν βαγ αἱ Εὐθείαι αβ, αγ, ἡ προ-
αχθήτωσαν ὡς ἀνωτέρω κατὰ φ ἡ π, ἡ ἐπεξεύχθω ἡ βγ· τῇ δὲ ὑπὸ
αβγ Γωνίᾳ ἴσαι γινέσθωσαν αἱ ὑπὸ αγδ, αδε, αεζ, κξ: Τὰ δὲ Τρίγωνα
αβγ, αγδ, αδε, κτ.: διὰ τὰς Γωνίας τὰςδε, ἡ τὴν κατὰ τὸ α κοινὴν,
Ἰσογώνια (2) ἔσαι, ἡ κατ' ἀκολουθίαν ὁμοία (3). Ἄρα αβ : αγ :: αγ : αδ
:: αδ : αε :: αε : αζ, κξ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΔ.

„Τῶν ἴσων τε, καὶ μίαν (γ) μιᾷ (ξ) ἴσῃν ἐχόντων Γωνίαν Παραλλη-
„λογραμμῶν (X ἡ Ψ), ἀντιπεπόνθασιν αἱ Πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἰσας Γω-
„νίας (τετέστιν αγ : γβ :: ζξ : ξλ). Καὶ ὧν Παραλληλογράμμων μίαν μιᾷ
„ἴσῃν ἐχόντων Γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ Πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἰσας
„Γωνίας, ἴσα ἐσὶν ἐκείναι.

κ. 365.

Κεῖσθωσαν αἱ Πλευραὶ ἄτως ἐπ' εὐθείας, ὥστε τὰς ἰσας Γωνίας γ ἡ
ξ πρὸς τὰ ἀντίθετα εἶναι τῆς αβ Εὐθείας· ἡ διὰ τὰς Γωνίας γ ἡ ὑπὸ
λγβ τὰς δυσὶν Ὀρθαῖς (4) ἴσαι, ἔσονται αἱ ὑπὸ λγβ ἡ ξ δυσὶν Ὀρ-
θαῖς ἴσαι ἡ αὐταί· ἐνθεντοὶ ἡ ζξ, λγ, ἐπ' εὐθείας (5) ἔσονται κείμεναι.

Δεῖν. τὸ Α'. Μέρος. Αἱ ιλ ἡ σβ προεκβαλλόμεναι συμπίπτωσαν
κατὰ τὸ π. Τὸ γὰρ Παραλληλόγρ. X ἐστὶ πρὸς τὸ Παραλληλόγρ. P, ὡς
αγ (6) πρὸς γβ, τότε Ψ ὁμοίως πρὸς τὸ P (7) ὡς ζξ πρὸς ξλ· ἄλλα
καθ' ὑπόθεσιν. X ἡ Ψ ἴσα ἐσὶ, ἡ ἐπομένως (8) X : P :: Ψ : P, ἄρα (9) αγ :
γβ :: ζξ : ξλ.

Τὸ Β'. Μέρος. αγ : γβ :: ζξ : ξλ (10)· ἔστι δὲ αγ : γβ :: X : P (11)·
ἡ πάλιν ζξ : ξλ :: Ψ : P (12)· ἄρα (13) X : P :: Ψ : P· ὁθεν δὴ τὰ X ἡ
Ψ ἴσα (14) ἐσὶ.

Π ό ρ ι σ μ α.

Εἴτε ὅθεν ἡρτήται ἡ τῶν ἀναλογιῶν κανὼνος τῷ κατ' ἀντιπεπόνθασιν

(1) B. Πόρ. τῆς H'. τῷ ε'. (2) Θ. Πόρ. τῆς AB. τῷ α'. (3) Δ. τῷ ε'. (4) IF. τῷ α'. (5) ΙΔ. τῷ α'. (6) Δ. τῷ ε'. (7) Διὰ τὴν αὐτήν. (8) Z. τῷ ε'. (9) ΙΔ. τῷ ε'. (10) Εξ ὑποθέ. (11) Δ. τῷ ε'. (12) Διὰ τὴν αὐτήν. (13) ΙΔ. τῷ ε'. (14) Θ. τῷ ε'.

δείξει, δι' οὗ ἐκ τριῶν ὁρῶν δοθέντων ὁ τέταρτος προσευρίσκεται, πολλαπλασιασμῷ τῶν δύο προτέρων ἐπ' ἄλληλους, καὶ διαιρέσει τῷ γινόμενε διὰ τῆ τρίτης, ὅθεν ἀνακύπτει ὁ ὁρὸς ὁ Δ'. Καθάπερ γὰρ ἐπὶ τῷ κατ' εὐθείαν χωρῶντος Κανόνος ἡ τῶν λόγων θεωρεῖται ἰσότης, οἷον ἐὰν ᾖ $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$, ἔσται $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, ἔνθα τὸ τῷ Α' διὰ τῷ Β' διαιρεθέντος πηλίκον, τῷ τῷ Γ' διὰ τῷ Δ' ἰσον τυγχάνει, ὥτως ἐπὶ τῷ κατ' ἀντιπεπόνθησιν κανόνος θεωρεῖται ἡ τῶν Ὀρθογωνίων ἰσότης, οὕτως ὥστε τὸ Ὀρθογωνίον τὸ ὑπὸ τῷ Α' καὶ τῷ Β' ἰσον εἶναι τῷ Ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῷ Γ' καὶ τῷ Δ'. Οἷον ἐὰν ᾖσιν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ἀντιπεπονδότες ἀνάλογον· τατέσιν (1) ἐὰν $\alpha : \gamma :: \delta : \beta$, ἔσται διὰ τὴν ἀνὰ χεῖρας Πρότασιν $\alpha \times \beta = \gamma \times \delta$. Καὶ τοίνυν ἐὰν τὰ γινόμενα ταῦτα ἴσα ὄντα διὰ τῆ τρίτης γ διαιρεθῶσιν, ἀνακύψει πηλίκον $\frac{\alpha \times \beta}{\gamma} = \delta$, ὅς ἐστι τῶν ὁρῶν ὁ Δ'.

Ἐςωσαν πηλικότητες $\alpha\beta, \beta\gamma, \lambda\iota, \iota\zeta$ ἀντιπεπονδεῖαι ἀνάλογον· ἔσται $\iota\zeta = \frac{\alpha\beta \times \beta\gamma}{\lambda\iota}$. Οἷον ἔσω $\alpha\beta$ Γραμμὴ τις ὀργειῶν 40, καὶ $\beta\gamma$ ὀργειῶν 4, ἔσται $\alpha\beta \times \beta\gamma$ ὀργειῶν 160, ἥτοι πλέθρον Ἀγγλικόν.

Ἀλλὰ προκείτω δὴ πλέθρον ἕτερον ἰσον τὸ ψ , ὃ μῆκος ὀργειῶν 16 τὸ $\iota\lambda$, καὶ ζητείτω ἡ τέτα Πλευρὰ $\iota\zeta$. Διὰ γὰρ τὴν τῶν Ὀρθογωνίων χ, ψ , ἰσότητα, ἐπεὶ τὸ χ ἐπιμηκέστερον ὢν τυγχάνει τῷ ἰσομεγέθους ψ , ἥττον ἔσται τὸ εὖρος. Διὸ τὸ ἔλαττον μῆκος $\lambda\iota$ ἐπὶ τῷ πλέθρῳ ψ μείζον τὸ εὖρος $\iota\zeta$ ἀπαιτεῖ, ὡς ἡ φύσις βάλεται τῷ κατὰ τὴν ἀντιπεπόνθησιν κανόνος. Καὶ τῶν ἴσων τοίνυν Ὀρθογωνίων $\alpha\beta \times \beta\gamma$, καὶ $\lambda\iota \times \iota\zeta$ διὰ τῆς $\lambda\iota$ διαιρεθέντων, ἀνακύψει πηλίκον $\frac{\alpha\beta \times \beta\gamma}{\lambda\iota} (= \frac{40 \times 4}{16} = \frac{160}{16}) = \iota\zeta = 10$. Τὸ ἄρα πλέθρον τὸ ψ εὖρος ἔλαχεν ὀργειῶν 10. Ο. Ε. Ε.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΕ.

„Τῶν ἴσων καὶ μίαν (γ) μιᾶ (ξ) ἴσην ἔχόντων Γωνίαν Τριγώνων (κατὰ $\gamma\beta$), ἀντιπεπόνθασιν αἱ Πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας Γωνίας (τατέσιν $\alpha\gamma : \gamma\beta :: \xi\epsilon : \epsilon\lambda$).

„Καὶ ὢν μίαν μιᾶ ἴσην ἔχόντων Γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ Πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας Γωνίας, ἴσα εἶναι ἐκείνα.

(1) Ὁρ. Β. τῷ ε'.

κ. 367.

Κείδωσαν $\alpha\gamma$, $\xi\beta$ ἐπ' εὐθείας, ὡς ἐν τῇ ἀνωτ. Πρωτ., καὶ ἕτως ἔσονται καὶ αἱ $\lambda\gamma$, $\xi\zeta$ ἐπ' εὐθείας καίμεναι καὶ αὐταὶ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $\lambda\beta$, καὶ τὰ λοιπὰ τῆς δειξέως χωρήσει ὡς καὶ ἀνωτέρω.

Π ό ρ ι σ μ α.

Τὰ Παραλληλόγραμμα καὶ τὰ Τρίγωνα, ὧν αἵτε Βάσεις καὶ τὰ ὕψη ἀντιπεπόνδασιν, ἴσα ἐσὶ, καὶ ἀνάπαλιν.

Δῆλον ἐκ τῶν προηγησαμένων δύο Προτάσεων. Ἐνθα μὲν ἂν τὰ Παραλληλόγραμμα καὶ τὰ Τρίγωνα ὀρθογώνια ἐσὶν ἀντιπεπονδῶτα τὰ ὕψη, καὶ τὰς Βάσεις, ἴσα εἶναι φανερόν· ἐνθα δὲ δὴ πλαγιογώνια, ἐπειδὴ καὶ ταῦτα τοῖς ἑμοσίοις Ὀρθογώνιοις τοῖς ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἡ ἴσης Βάσεως καὶ ἰσοϋψέσιν ἴσα (1) ἐσὶν, ἔσονται δὴ καὶ ταῦτα ἕδεν ἥττον συνιστάμενα, εἰ τὰ ὕψη καὶ τὰς Βάσεις ἀντιπεπόνδασιν.

Καὶ ἀνάπαλιν, ἐπειδὴ τὰ ἴσα Παραλληλόγραμμά τε καὶ Τρίγωνα ὀρθογώνια ὄντα, ἀντιπεπόνδασιν τὰς Βάσεις καὶ τὰ ὕψη, τὰ δέ τοι πλαγιογώνια Παραλληλόγραμμά τε καὶ Τρίγωνα, τοῖς τὴν αὐτὴν ἡ ἴσας ἔχουσι τὰς Βάσεις, καὶ ἰσοϋψέσιν ἐν ὀρθαῖς Γωνίαις ἴσα (2) ἐσὶν, ἔσονται δὴ ἀπλῶς τὰ ἴσα Παραλληλόγραμμά τε καὶ Τρίγωνα, ὁποῖά ποτ' ἂν ᾖ, ἀντιπεπονδῶτα τὰς τε Βάσεις καὶ τὰ ὕψη.

Σ χ ό λ ι ο ν.

κ. 368.

Ἐςω Τρίγωνα δύο $\alpha\beta\gamma$, $\delta\beta\epsilon$, ὧν αἱ πρὸς τῷ β Γωνίαι ἅμα ληφθεῖσαι δυσὶν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ἔςωσαν δὲ καὶ αἱ Πλευραὶ αἱ περὶ τὰς Γωνίας ὑπὸ $\alpha\beta\gamma$, $\delta\beta\epsilon$, ἀντιπεπονθεῖαι· ἔσται τὰ Τρίγωνα ταῦτα ἀλλήλοις ἴσα· Ἐὰν δὲ τὰ Τρίγωνα ἴσα ᾖ, αἱ περὶ τὰς Γωνίας $\alpha\beta\gamma$, $\delta\beta\epsilon$ Πλευραὶ ἀντιπείσονται.

Πληρῶσω γὰρ τὰ Παραλληλόγραμμα $\beta\zeta$, $\beta\eta$, καὶ διὰ τὰς πρὸς τῷ β Γωνίας τὰς δυσὶν Ὀρθαῖς συνεξιστημένας, αἱ Εὐθεῖαι $\gamma\beta$, $\beta\epsilon$ ἐπ' εὐθείας (3) ἔσονται καίμεναι· διὰ δὲ τὰς Παραλλήλους $\gamma\beta\epsilon$ καὶ $\delta\zeta$, αἱ ἐναλλὰξ (4) ὑπὸ $\alpha\beta\gamma$, $\epsilon\delta\zeta$ ἴσαι εἰσὶν· Ἐπειδὴ δὲ (5) $\alpha\beta : \epsilon\delta :: \epsilon\epsilon : \epsilon\gamma$ ἴση δὲ ἡ $\epsilon\epsilon$ τῇ $\delta\zeta$ (6), ἔσται καὶ $\alpha\beta : \epsilon\delta :: \delta\zeta : \epsilon\gamma$. Ὅπερ ἐστὶν, ἐπεὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας Γωνίας $\alpha\beta\gamma$, $\epsilon\delta\zeta$ (7) ἀντιπεπόνδασιν, τὰ Παραλληλόγραμμα (8) $\beta\eta$, $\epsilon\zeta$ ἴσα ἐσὶν, καὶ ἐπομένως καὶ τὰ (9) τέτων ἡμίση $\alpha\beta\gamma$, $\delta\epsilon\epsilon$.

(1) Λι. Λς. ΛΖ. ΛΗ. τῷ α'. καὶ Ὁρ. Γ. τῷ ζ'. (2) ΛΥΓ. (3) ΙΔ. τῷ α'. (4) ΚΖ. τῷ α'. (5) Ε'ξ ὑποθ. (6) ΛΔ. τῷ α'. (7) Ὁρ. Β. τῷ ζ'. (8) ΙΔ. τῷ ζ'. (9) ΛΔ. τῷ α'.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον τῶν Τριγώνων αβγ, δβε, ἴσων ὄντων, ἢ Γωνίας τὰς ὑπὸ αβγ, δβε, δυσὶν Ὁρθαῖς ἰσχυμένων, αβ : βδ :: εβ : βγ. Πληρῶσαι γὰρ δὴ τὰ Παραλλήλογράμματα βδ, βη, ἅτινα ἔσαι (1) τῶν ἴσων Τριγώνων διπλάσια, ἢ διὰ τῆς ἴσας, διὰ δὲ τὰς Παραλλήλους (2) γβε, δβ ἢ ἰσογώνια. Αἱ ἄρα περὶ τὰς ἴσας Γωνίας Πλευραὶ (3) ἀντιπεπόνθασιν, τετέστιν αβ : βδ :: δβ ἢτοι βε : βγ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ις.

„Εάν τέσσαρες Εὐθεῖαι (αβ, ζι, ιλ, βγ) ἀνάλογον ᾧσι (τετέστιν εἰάν ἢ αβ : ζι :: ιλ : βγ), τὸ Ὁρθογώνιον (X) τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον (αβ, βγ), ἴσον εἰς τῷ Ὁρθογωνίῳ (Ψ) τῷ ὑπὸ τῶν μέσων (ζι, ιλ) περιεχομένῳ.

„Καὶ εἰάν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον Ὁρθογώνιον ἴσον ἢ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ Ὁρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες Εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Μέρος Α'. Ἐπὶ τῶν Ὁρθογωνίων X ἢ Ψ, περὶ τὰς ὀρθὰς ἢ ἐπομένως ἴσας Γωνίας τὰς β ἢ ι, ἔσιν ἕξ ὑποβ. αβ : ζι, ὥσπερ κατ' ἀντιπεπόνθασιν ιλ : βγ. Ἄρα τὰ (4) X ἢ Ψ ἴσα εἰσὶ. Ο. Ε. Δ. κ. 369.

Μέρος Β'. Ἐπειδὴ τὰ X καὶ Ψ τίθεται ἴσα, αἱ ἄρα (5) περὶ τὰς ἴσας Γωνίας β ἢ ι ἀντιπεπόνθασιν, αβ : ζι :: ιλ : βγ. Ο. Ε. Δ.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Κἀντεῦθεν πρὸς τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αβ, τὸ δοθέν Ὁρθογώνιον Ψ παραβλεῖν ῥάδιον, ληφθείσης δηλονότι αβ : ζι :: ιλ : βγ (6), καὶ τῷ Ὁρθογωνίῳ X ὑπὸ αβ ἢ βγ (7) κατασκευασθέντος. Οὕτω γάρ τοι τὸ X Ὁρθογώνιον ἴσον ἔσαι (8) τῷ δοθέντι Ψ, πρὸς τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αβ παραβεβλημένον. Τὸ δ' αὐτὸ ἢ ἄλλως ἐκτελείσεις διὰ τῷ Πορίσμ. ἢ τῷ Σχολίῳ τῆς ΜΔ'. Προτάσεως τῇ Α'. Βιβλία.

Εἰντεῦθεν δὲ ἡρτῆται ἢ ἡ τῷ κατ' εὐθεῖαν τῶν ἀναλογιῶν κανόνος ἀπὸδείξις, καδ' ὃν ἐκ τριῶν ὄρων δοθέντων τὸν Δ'. ἀνάλογον ἐξευρίσκομεν, ἐπιπολλαπλασιάζοντες ἐπ' ἀλλήλοις τὸν Β'. ἢ τὸν Γ', ἢ τὸ γινόμενον διαιρῶντες διὰ τῷ Α'. Διὰ γὰρ τὴν ἀνὰ χεῖρας Πρότ., εἰάν ἢ αβ : ζι :: ιλ : βγ,

(1) Διὰ τὴν αὐτήν. (2) ΚΖ. τῇ α'. (3) ΙΔ. τῇ ε'. (4) ΙΔ. τῇ ε'. (5) Διὰ τὴν αὐτήν. (6) ΙΒ. τῇ ε'. (7) Σχολ. τῆς Μς. τῇ α'. (8) Διὰ τὴν παρῶσαν.

ἔσαι $\alpha\beta \times \beta\gamma = \zeta\iota \times \iota\lambda$. καὶ διαιρεμένων τῶν ἴσων διὰ τῆ αὐτῆ αβ, ἔσαι
 $\beta\gamma = \frac{\zeta\iota \times \iota\lambda}{\alpha\beta}$. Οὕτω καὶ ἀριθμοῖς τοῖς κειμένοις 5, 3, 10, τὸν τέταρτον
 εὑρεῖν δεῖσαν ἀνάλογον, ἢ τῆς κατ' εὐθεῖαν ἀναλογίας Μέθοδος ἀπαιτεῖ
 τὸν 3 ἢ 10 τῆς ἀριθμὸς ἐπιπολλαπλασιάζειν ἀλλήλους, ἢ τὸν γινόμενον
 30 διὰ τῆ Α'. 5 διαιρεῖν, ὡς ἐντεῦθεν τῆ ζητούμενη 6 ἀριθμὸς ἀνακύπτωντες.

κ. 370. Γ'.

Ἐντεῦθεν δὲ ἢ ἡ πρακτικὴ Μέθοδος κατασκευάζεται, καὶ ἦν οἱ Θυρο-
 ποιοὶ, ἢ τῶν τεχνιτῶν ὅσοις Ὀρθογώνιων τῶν ἐλασσόνων χωρίων πρόκει-
 ται λαμβάνειν τὴν καταμέτρησιν. Τὸ γὰρ Ὀρθογώνιον χωρίον, Εὐθεῖαν μό-
 νον καταμετρήσαντες, ἢ ἄνευ τῆ ἐκ τῶν Ἀριθμητικῶν ἀναλογισμῶν, ὅσοι
 αὐτὸ ἐσιν ἐγνώσαν. Οἷον εἰ δύοι φέρε, ὅτων ἐστὶ ποδῶν Τετραγώνων τὸ
 Ὀρθογώνιον αβγδ εἰπεῖν, ἀπὸ τῆς β Γωνίας τῇ Πλευρᾷ βγ παραβεβλή-
 θω ποδιαῖον μέτρον τὸ βε, ἀπὸ δὲ τῆς α Γωνίας τῆς ἐπὶ θατέρῳ πέρατι
 τῆς πλευρᾶς αβ, δι' ἣκρη τῆ ποδιαίου μέτρον σπαρτίον τεινέσθω, προσπίπτον
 τῇ Πλευρᾷ δγ (προεβληθείσῃ ἦν δύοι) κατὰ τὸ 2. Ὅσων οὖν ἐστὶ ποδῶν
 τὸ μῆκος, ἢ γὰρ ὅσων δὴ ποτε ὁποιωνῶν ὁμοίων μορίων ποδὸς ἢ Εὐθεῖα δζ,
 τοσούτων ποδῶν Τετραγωνικῶν, ἢ ποδὸς Τετραγωνικῶν ὁμοίων μορίων ἔσαι
 τὸ Ὀρθογώνιον αβγδ. Διὰ γὰρ δὴ τὰς β ἢ δ Ὀρθάς, ἢ τὰς ὑπὸ βαε, δζα,
 τὰς ἐναλλάξ ἐν ταῖς Παραλλήλοις αβ, δζ, ἢ δὴ ἢ διὰ τὰς ὑπὸ βεα, δαζ, τὰς
 ἐναλλάξ ἢ αὐτὰς ἐν ταῖς Παραλλήλοις βε, αδ, τὰ Τρίγωνα εβα, αδζ (1)
 ἔσαι ὁμοία· ἐνθεντοὶ ἢ εβ:εα::αδ:δζ. Καὶ διὰ τὴν ἐν χερσὶ τοίνυν Πρότα-
 σιν, ἔσαι τὸ Ὀρθογ. εα × αδ = Ὀρθογώνιῳ εβ × δζ· ἀλλὰ εα × αδ ἐστὶ τὸ
 καταμετρώμενον Ὀρθογώνιον, ὥπερ ἴσον εὑρηται τὸ Ὀρθογώνιον εβ × δζ,
 οὗ ὕψος εβ τὸ ποδιαῖον, τοσούτους Τετραγωνικὰς περιέχοντος πόδας, ἢ γοῦν
 ποδὸς μόρια Τετραγωνικὰ, ὅτων ποδῶν εἶναι τίθεται τὸ μῆκος, ἢ γὰρ ὅσων
 ποδὸς μερῶν ὁμοίων τὸ τῆς Βάσεως (2) δζ. Ὅσων ἄρα ποδῶν ἢ δζ τῷ μῆ-
 κει, τοσούτων Τετραγωνικῶν ἔσαι ποδῶν ἢ τὸ Ὀρθογώνιον τὸ αβγδ. Ο. Ε. Δ.

Ἐὰν δὲ τὸ βε μέτρον διποδιαῖον τύχη, ἢ τριποδιαῖον, κτ.: τὸ τῷ Ὀρ-
 θογώνιῳ χωρίον ἐν ποσὶ Τετραγωνικοῖς ληφθήσεται, πολλαπλασιαζομένης
 τῆς δζ διὰ 4, ἢ διὰ 9 κξ: κατὰ λόγον, ταῦτέσι διὰ τῶν Τετραγώνων τῶ ἀ-
 ριθμῶ τῶν ποδῶν, ἐξ ὧν τὸ μέτρον αὐτὸ συγκεκρότητα.

Ἐὰν Εὐθεῖαι τέσσαρες αβ, ζι, ιλ, βγ ὡς ἀνάλογον, τὸ Τρίγωνον
 αβγ τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης ὡς Βάσεως, ἢ τῆς τετάρτης ὡς ὕψους, ἴσον ἔσαι

τῷ Τρίγωνῳ ζιλ τῷ ὑπὸ τῆς δευτέρας ὡς Βάσεως, ἢ τῆς τρίτης ὡς ὕψους. Εἰσὶ γὰρ τῶν Ὀρθογωνίων Χ καὶ Ψ (ἂν διὰ ταύτην τὴν ἐν χερσὶ Πρῶτ. ἴσα τυγχάνει) (1) ἡμίσειαι. Ὅρα τὸ Σχήμ. τῷ Πορ. τῆς ΙΔ', ἢ (ὁ ταυτὸν) τὸ τῆς Ιε'.

Ἐὰν δύο Τρίγωνα αγλ, ζξβ, τὰς γ ἢ ξ Γωνίας ἴσας ἔχῃ, ἢ δὲ τὸ Ε. Ὀρθογώνιον αγ x γλ τὸ ὑπὸ τῶν Πλευρῶν τῆς Γωνίας γ, ἴσον τῷ Ὀρθογωνίῳ ζξ x ξβ τῷ ὑπὸ τῶν Πλευρῶν τῆς Γωνίας ξ, τὰ Τρίγωνα αγλ, ζξβ, ἴσα ἔσται. Καὶ ἀνάπλην, εἰ τὰ Τρίγωνα αγλ, ζξβ, αἱ αἱ πρὸς τῷ γ ἢ ξ Γωνίαι ἴσαι εἰσιν, ἴσα ἢ, τὰ Ὀρθογώνια αγ x γλ, ἢ ζξ x ξβ ἴσα ἔσται. Τετο δ' αὐτὲς ἢ τοῖς ἰσογωνίοις τῶν Παραλληλογράμμων συμβαίνει. Διὰ γὰρ τὰ ἴσα Ὀρθογ. αγ x γλ, ζξ x ξβ, ἔσαι κατὰ τὴν ἀνὰ χεῖρας αγ : ζξ :: ξβ : γλ. Ταῦτατοι ἐπειδὴ ἐπὶ τῶν Τρίγωνων αγλ, ζξβ τῶν ἰσογωνίων πρὸς γ ἢ ξ, αἱ περὶ τὰς ἴσας Γωνίας Πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν, τὰ Τρίγωνα αγλ, ζξβ ἔσονται (2) ἴσα. Ο. Η. τὸ Α'.

Εἴτα ἐχέτω τὰ ἴσα Τρίγωνα αγλ, ζξβ, τὰς πρὸς τῷ γ ἢ ξ Γωνίας ἴσας (3), ἢ ἔσονται αἱ περὶ τὰς ἴσας Γωνίας Πλευραὶ ἀντιπεπονθῆναι ἀνάλογον, τετέστιν αγ : ζξ :: ξβ : γλ. ἢ ἐπομένως κατὰ τὴν δε τὴν Πρῶτ., ἔσαι Ὀρθογών. αγ x γλ = Ὀρθογών. ζξ x ξβ. Ο. Η. τὸ ἕτερον, Ὅρα τὰ Σχήμ. τὰ ἐν τῇ ΙΕ'. Πρῶτ.

Αὐτὰ δὲ ταῦτα ἢ περὶ τῶν ἰσογωνίων Παραλληλογράμμων ἢ ὁμοίως ἐχόντων ἀποδειχθήσεται, εἰ μόνον ἀντὶ τῆς ΙΕ'. ἢ ΙΔ'. ληφθῇ. ὅρα ἢ τὰ ἐν αὐτῇ Σχήματα.

Ἐὰν ἢ Α πρὸς Β ἐν μείζονι λόγῳ ἢ Γ πρὸς Δ, ἔσαι τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ε'. Ὀρθογώνιον μείζον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων· εἰ δὲ ἐν ἐλάσσονι ἔλαττον.

Α'. Ἐπειδὴ γὰρ Α μείζονα λόγον ἔχει πρὸς Β, ἢ Γ πρὸς Δ, ἑτερόντι τὸ Ε (τῷ Α ἔλαττον) ἔσαι πρὸς Β, ὡς Γ πρὸς Δ. ὥς διὰ ταύτην $E \times \Delta = B \times \Gamma$. Ἀλλὰ γὰρ $E < A$, ἄρα $A \times \Delta > B \times \Gamma$.

Β'. Εἰ δὲ Α πρὸς Β ἐν ἐλάσσονι λόγῳ ἢ Γ πρὸς Δ, ἔσαι τι ἕτερον τὸ Ζ (τῷ Α μείζον) πρὸς Β = Γ : Δ. ὥς $Z \times \Delta = B \times \Gamma$. Καὶ ἐπομένως $A \times \Delta < B \times \Gamma$.

Ἐνθεντοι εἰ τῶν ἀνίσων Ὀρθογωνίων αἱ Πλευραὶ ἔτω διαταχθῶσιν, ὡς Ζ. τῷ μὲν τῶν Ὀρθογωνίων μείζονας τὰς Πλευράς ἐν ἄκροις, τὰς δὲ τῷ ἐλάσσο-

(1) ΛΔ. τῷ α'. (2) ΙΕ. τῷ ε'. (3) Διὰ τὴν αὐτήν.

νος ἐν μέσοις ἐκκεῖσθαι, ὁ μὲν Α'. πρὸς τὸν Β'. ὅρον μείζονα τὸν λόγον ἔξει, ἢ ὁ τρίτος πρὸς τὸν Δ'.

Ἐὰν δὲ αἱ μὲν τῷ ἐλάττωτος Ὀρθογωνίᾳ Πλευραὶ ἐν ἄκροις, αἱ δὲ τῷ μείζονος ἐν μέσοις, ἔσται ὁ τῷ Α'. πρὸς τὸν Β'. ὅρον λόγος ἐλάττωτος, ὁ δὲ τῷ Γ'. πρὸς τὸν Δ'. μείζων.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Α'λλ' ἐνταῦθα καὶ τὸ θρυλούμενον ἐκεῖνο τῷ Πτολεμαίῳ Θεώρημα, ὡς ἐν ὁπωϋν Τετραπλεύρῳ, ὃ ἂν εἰς Κύκλον ἐγγεγραμμένον ἦ, τὸ ὑπὸ τῶν Διαγωνίων αὐτοῦ καὶ βδ περιεχόμενον Ὀρθογώνιον, ἴσον εἶναι τοῖς δυτίν Ὀρθογωνίοις τοῖς ὑπὸ τῶν ἀντιθέτων τῷ Τετραπλεύρῳ Πλευρῶν, οἷον αβ καὶ γδ, ἢ αδ καὶ βγ, ὡς ἐκ τῆς δε δὴ καὶ τῶν πρὸ ταύτης δειχθέντων ἐξηρητημένον, πρῶτον ἂν εἴη προθεῖσθαι καὶ δεῖξαι.

κ. 371.

Συνεσάδω γὰρ ἡ ὑπὸ βαε ἴση τῇ ὑπὸ γαδ. Διὰ γὰρ ταύτας τὰς ἐκ κατασκευῆς ἰσημένας, καὶ τὰς ὑπὸ αβε, αγδ, τὰς διὰ τὸ τῇ αὐτῇ Περιφερείᾳ αδ βεθιέναι ἰσας (1) ἁλλήλαις, ἔσται τὰ Τρίγωνα αβε, αγδ ἁλλήλοις (2) ὅμοια, καὶ ὥτως αβ : βα :: αγ : γδ. καὶ ἐπομένως (3) Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων αβ καὶ γδ, ἴσον ἔσται τῷ Ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων αγ καὶ βε. Παραπλησίως διὰ τὰς ὑπὸ βαε, γαδ ἰσας ἐκ κατασκευῆς. Γωνίαι, κοινῆς προσδεύσεως τῆς ὑπὸ γαε, ἔσται ἡ ὑπὸ βαγ ἴση τῇ ὑπὸ εαδ. Διὰ δὲ τὰς ὑπὸ αδε, αγβ, τὰς τῇ αὐτῇ Περιφερείᾳ αβ βεθιέναι καὶ διὰ τῆς (4) ἰσας, ἔσται τὰ Τρίγωνα (5) αδε, αγβ ὅμοια, καὶ αδ : δε :: αγ : βγ. Ἐνθεντοὶ καὶ (6) Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων αδ καὶ βγ = Ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων αγ καὶ δε. Ἀλλὰ τὰ Ὀρθογώνια αγ καὶ βε, καὶ αγ καὶ δε, ἰσαὶ εἰς (7) τῷ Ὀρθογωνίῳ αγ καὶ βδ. Ἀρα τὸ Ὀρθογώνιον αγ καὶ βδ τὸ ὑπὸ τῶν Διαγωνίων, ἴσον εἶναι τοῖς δυτίν Ὀρθογωνίοις τοῖς ὑπὸ τῶν ἀντιθέτων Πλευρῶν, τῷ τε ὑπὸ αβ καὶ γδ, καὶ τῷ ὑπὸ αδ καὶ βγ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΖ.

Ἐὰν τρεῖς Εὐθεῖαι (αβ, ζλ, βγ) ἀνάλογον ᾧσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων (αβ, βγ) περιεχόμενον Ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς μέσης (ζλ) Τετραγώνῳ.

(1) ΚΑ. τὸ γ'. (2) Θ. Πόρισμα. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (3) Διὰ τὴν ἀνὰ χεῖρα. (4) ΚΑ. τῷ γ'. (5) Θ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (6) Διὰ τὴν παρεῖσιν. (7) Α. τῷ β'.

„Καὶ εἰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον Ὄρθογώνιον ἴσον ἢ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης Τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς Εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Μέρος Α'. Τῇ μέσῃ ΖΛ ληφθῆτω ἴση ἡ Ξ· καὶ ἐπειδὴ καδ' ὑπόθεσιν αβ : ΖΛ :: ΖΛ : βγ, ἡ δὲ δὴ Ξ = ΖΛ, ἔσαι εἰ αβ : ΖΛ :: Ξ : βγ· Ὡς (1) τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων αβ x βγ Ὄρθογώνιον ἴσον τῷ Ὄρθογώνιῳ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων ΖΛ x Ξ, ταῦτέστι τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ ΖΛ.

x. 372.

Μέρος Β'. Δείκνυται ὁμοίως ἐκ τοῦ δευτέρου μέρους τῆς ἀνωτέρω.

Π ο ρ ῖ σ μ α τ α .

Ἐκ δὲ δὴ ταύτης, εἰ τῆς ΙΓ'. εὐκλειον ἐστίν, ὡς· εἴαν ἐν Κύκλῳ Κάθετος Α'. ἡ Ζγ ἐπὶ τῆς Διαμέτρου σαδῇ αβ, τὸ ὑπὸ αβγ Ὄρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Ζγ Τετραγώνῳ. Ὅρα τὸ ἐν τῇ ΙΓ'. Σχῆμα.

Κἀντεῦθεν πρὸς σὴν δοδεῖσται αβ, τὸ ἀπὸ τῆς δοδεῖστος ΖΛ Τετραγώνον Η. ΖΞ ῥάδιον παραβλεῖν, εὐρόντας τὴν πρὸς τὰς αβ καὶ ΖΛ τρίτην ἀνάλογον βγ (2), καὶ ἐκ τῆς δοδεῖστος εἰ τῆς εὐρεθείσης, Ὄρθογώνιον (3) τὸ ὑπὸ αβγ συστήσαντας. Ταῦτο γὰρ ἔσαι τῷ δοθέντι Τριγώνῳ ΖΞ (4) ἴσον, πρὸς τὴν δοδεῖσται αβ ἡδὴ παραβεβλημένον.

Κἀνθενδε δὴλη ἐστὶ ἡ Μέθοδος τοῦ τὸν δοθέντα λόγον αβ πρὸς ΖΛ Γ'. περαιτέρω προαγαγεῖν, ἥτοι τῷ δυεῖν δοδεῖστων αβ x ΖΛ τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν· εἴαν ἀμέλει τις τὸ ἀπὸ τοῦ ἐπομένου ΖΛ Τετραγώνον πρὸς τὸ ἡγόμενον αβ παραβάλλῃ· τρίτην γὰρ ἔτω λήφεται ἀνάλογον τὴν βγ. Εἴαν δὲ ἐπὶ ἀριθμῶν δοθῇ τις λόγος ὁποιοῦν, ὁ τρίτος ἀνάλογος εὐρεθήσεται, παλλαπλασιασθέντος τοῦ ἐπομένου καδ' ἐαυτὸν καὶ τῷ ἐντεῦθεν ἀνακύψαντος τῷ πολλαπλασιασμῷ διὰ τοῦ ἡγόμενου διαιρεθέντος· Τὸ γάρ ται πηλίκον (5) ἔσαι ὁ ζητούμενος τρίτος ἀνάλογος.

Εἵντεῦθεν δ' αὖθις εἰ Γραμμὴν ἀπρόσβατον, ἢς θάτερον τῶν περάτων αὖ εἰη προσβάσιμον, καταμετρεῖν διδασκόμεθα. Ἐστω γὰρ ἀπρόσβατος Εὐθεῖα ἡ γζ, εἰ προαγέσθω πέρατος ἀνευ πρὸς τὸ Α. Ἀγέσθω δὲ ἀπὸ τοῦ γ Σημεῖον εἰ Κάθετος ἡ γβ, εἰ πρὸς ὅπασον αὖ δόξῃ τῶν ἐπὶ τῆς Κάθετου Σημεῖων β· Γνώμων ἐφημερόδω, ἥτοι Γωνία ὀρθὴ συνεσάσθω ἡ ὑπὸ αβζ, ὡς δι' ἐτέρας μὲν τῶν Πλευρῶν βζ τὸ τῆς δοδεῖστος πέρατος ζ, δι' ἐτέρας δὲ τῆς βα τὸ Σημεῖον τῆς αὐτῆς προαχθείσης διοπτάνεσθαι. Εἴτε μετρεῖσθω ἡ προσβατὴ

Δ. x. 373.

(1) Διὰ τὴν ἀνωτέρω. (2) ΙΔ. τῷ α'. (3) Σχολ. τῆς Μς. τῷ α'. (4) Διὰ τὴν ἀνωτέρω. (5) Διὰ τὸν ἐκ τῆς ΙΖ. τῷ ε'. καὶ τῷ β'. Πορ. αἰς Ις. τῷ ε'.

αγ, εἰς τῆς ἐφεξῆς ἀναλογίας σαφὲς ἔσται (1) ἢ ἀπρόσβατος αγ : γβ :: γδ : γζ. Ἐὰν οὖν τὸ Τετραγώνον τὸ ἀπὸ τῆς γδ διὰ τῆς αγ διαιρεθῇ, τὸ πηλίκον (2) δώσει τὴν ζητημένην Εὐθείαν γζ. Ο. Ε. Ε.

Ἐντεῦθεν τῶς εἰς τὴν δοθῇ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ αγ εἰς γβ, τῶν τμημάτων τῆς δοθείσης αβ, ἴσον τετέστι τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς γζ (ὅρα τὸ Σχῆμ. τῆς ΙΓ'. Πρωτ.), ἣτις μὴ μείζων εἴη τῆς ἡμισείας τῆς αβ, ῥᾷδιον ἔσται ἐξευρεῖν τὰς τῷ Ὀρθογώνιῳ Πλευρὰς αγ εἰς γβ. Τητέστι τὴν δοδεῖται αβ οὕτω διελεῖν ἐξέσται κατὰ τὸ γ, ὥς τὸ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῶν αὐτῆς τμημάτων αγ, γβ, ἴσον εἶναι τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς δοθείσης Εὐθείας γζ, ἣτις μὴ μείζων εἴη τῆς ἡμισείας τῆς αβ. Ἐπειδὴ γὰρ ἡ δοδεῖσα γζ (διὰ τὴν ἐν χειρὶ Πρότασιν) μέση ἀνάλογος ἐστὶ μεταξὺ τῶν αγ εἰς γβ, ἅτινά ἐστι τὰ τμήματα τῆς δοθείσης αβ, τὸ ἐνταῦθα Πρόβλημα εἰς ταυτὸ φέροι ἐκείνῳ, οὐπερ ὑπετέθη ἡ λύσις ἐν τῷ Σχολίῳ τῇ Β'. Παρίσματος τῆς ΙΓ'. Προτάσεως τῇ παρόντος Βιβλίου.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν Α'.

κ. 374.

Ἐὰν Τρίγωνον οὐτινοσὺν (3) τῇ αβγ, ἡ κατὰ κορυφὴν Γωνία ὑπὸ βαγ ἢ διχα τμηθῇ τῇ Εὐθείᾳ δα, ἣτις τὴν Βάσιν βγ τέμνεται εἰς, κατὰ τὰ Τμήματα βδ εἰς δγ, ἔσται ἡ διαφορὰ τῶν Ὀρθογωνίων, τῇ τε ὑπὸ τῶν Πλευρῶν αβ εἰς αγ, εἰς τῇ ὑπὸ τῶν Τμημάτων τῆς Βάσεως βδ εἰς δγ, ἴση τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς αδ τῆς διχοτομήσης τὴν ὑπὸ βγ Γωνίαν· τετέστιν Ὀρθογώνιον ὑπὸ βαγ — Ὀρθογώνιον ὑπὸ βδγ = αδτ.

Γεγραμμένῳ γὰρ Κύκλῳ περὶ τὸ Τρίγωνον αβγ, εἰς περιεβεβλήσω ἡ αδ, ὥςτε εἰς τὴν Περιφέρειαν προσπεσεῖν κατὰ τὸ ε· καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς εγ ἐν τῷ Τρίγωνῳ αεγ, διὰ τῇ Σημεῖν δ ἀχθήτω πρὸς τὴν Βάσιν εγ παράλληλος ἡ δζ· ἔσται γὰρ τὰ αδζ εἰς αεγ Τρίγωνα (4) ὁμοία· Ἀλλὰ γὰρ διὰ τὰς ὑπὸ βαδ, εαγ (5) τὰς ἴσας, εἰς τὰς ὑπὸ αβδ, αεγ, τὰς ἐν τῷ αὐτῷ Τμήματι αβεγ, εἰς ἐπομένως εἰς αὐτὰς (6) ἴσας, εἰς τὰ Τρίγωνα αβδ, αεγ, εἰς αὐτὰ (7) εἰς ὁμοία, τὰ ἄρα Τρίγωνα αβδ, αδζ ὁμοία εἰς, καὶ αβ : αδ :: αδ : αζ· Ταύτητοι διὰ τὴν ἐν χειρὶ Πρότασιν τὸ βαζ Ὀρθογώνιον ἴσας τῇ ἀπὸ αδ Τετραγώνῳ· ἄλλ' (8) αδ : αζ :: δα : ζγ, ἄρα αβ : αδ :: δα : ζγ.

(1) Α. Πόρ. τῆς Η. τῷ ε'. (2) Διὰ τὸ ἀνωτ. Γ. Πόρ. (3) Ὅρα Ἀρισμ. καὶ Σολ. Σελ. 103. τῆς Α' ἐκδοῦς. (4) Α. Πόρ. τῆς Δ. τῷ ε'. (5) Ἐξ ὑποθ. (6) ΕΔ. τῷ γ'. (7) Θ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. καὶ τὴν Η. τῷ ε'. (8) Β. τῷ ε'.

Καὶ (1) Ὁρθογών. βα × ζγ = Ὁρθογ. αδε = (2) Ὁρθογωνίῳ βδγ. Ἀμ-
φω δὲ τὰ Ὁρθογώνια, τό τε ὑπὸ βαζ, καὶ τὸ ὑπὸ βα × ζγ, τετέσι (3) τὸ
ὑπὸ βγγ = αδ^τ + βδγ. Καὶ ἀφαιρεθέντος τοῖνυν ἐκατέρωθεν τῷ Ὁρθογωνίῳ
βδγ, ἔσται βαγ — βδγ = αδ^τ. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α .

Εἰάν τῷ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένῳ Τριγώνῳ αβγ ἡ κατὰ κορυ-
φήν Γωνία α δίχῃ τμηθῇ δι' Εὐθείας τῆς αε τῆς Κύκλῳ μὲν τῷ αὐτῷ
ἐνηρμοσμένης, τὴν δὲ Βάσιν κατὰ τὸ δ τεμνύσης, ἔσται βα : αδ :: εα : αγ.
Τὰ γὰρ βαδ, εαγ Τρίγωνα ὅμοια ἔσιν, ὡς ἐκ τῷ προληφθέντος Σχολίου
κατάλλῃλον ἔσσι.

Σ χ ό λ ι ο ν Β'.

Καὶ τῷ ἐφεξῆς δὲ Προβλήματος, πῶς ἐν τοῖς Σφαιρικοῖς ἐκ ἀχρήσε-
τυγχάνοντος, ἐκ τῶν προαποδοδευμένων ληφθεῖν αὐτὴ ἡ ἐπίλυσις. Ἐς
δὲ τὸ Πρόβλημα τοιοῦτον.

„Κύκλῳ δοθέντος τῷ ζῆμ, διὰ δυοῖν Σημείων β καὶ γ τῶν ἐν αὐτῷ,
„Περιφέρειαν Κύκλῳ ἑτέρῃ ἀγαγεῖν, ἥτις αὐτὴν τῷ δοθέντος Κύκλῳ Περι-
„φέρειαν δίχα τέμνοι.

Διὰ τῷ Κέντρῳ α καὶ τῷ ἑτέρῳ τῶν δοθέντων Σημείων β, ἀχθήτω Εὐ-
θεῖα μὴ πεπερασμένη βαμε· ἀχθήτω δὲ ἀπὸ τῷ Κέντρῳ α Κάθετος αδ, καὶ
ἐπεξεύχθω ἡ βδ. Ἐν δὲ τῷ Τριγώνῳ αβδ, διὰ τὴν ὑπὸ βαδ Ὁρθήν, ἔσται ἡ
ὑπὸ αβδ (4) ὀξεία. Ἐπὶ δὲ τῆς βδ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ δε, ἥτις διὰ τὰς
ὑπὸ αβδ, βδε, τὰς δυεῖν Ὁρθῶν ἔσται (5) ἐλάσσονα, διατεμεῖ τὴν μὴ πε-
περασμένην βαμε, οἷον κατὰ τὸ ε. Διὰ μὲν οὖν τῶν Σημείων εγς, εἰάν Κύκ-
λος γραφῇ ὁ βρε (6), λέγω ὅτι τελεωθήσεται τὸ ζητούμενον.

Ἀχθήτω γὰρ ἡ τῷ ἤδη καταγραφέντος Κύκλῳ εγς ὑποτείνουσα, διὰ τῷ
Κέντρῳ α τῷ δοθέντος Κύκλῳ χωρῶσα, καὶ ἐφ' ἑτέρας τῶν Περιφερειῶν το-
μῆς η, δηλ. ἡ καφ. Ἀχθήτω δὲ καὶ ἡ τῷ δοθέντος Κύκλῳ ζῆμ Διάμετρος
καζ διὰ τῆς αὐτῆς τῶν Περιφερειῶν τομῆς η.

Ἐπειδὴ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς Γωνίας τῷ Τριγώνῳ βδε, ἡ Κάθετος ἤχθῃ διὰ
ἐπὶ τῆς Βάσεως βε, ἔσονται (7) αβ, αδ, αε ::. Ὅθεν διὰ τὴν παρῶσαν

(1) Δε. τῷ ε'. (2) ΔΕ. τῷ γ'. (3) Α. τῷ β'. (4) Β. Πόρ. τῆς ΔΕ. τῷ α'. (5)
Σχόλ. τῆς ΔΕ. τῷ ε'. (6) Ε. τῷ δ'. (7) Α. Πόρ. τῆς Η. τῷ ε'.

Πρότ. Ορθογών. βαε = αδΤ, τετέσι διὰ τὰς τῷ δοθέντος Κύκλου ζῶν ἴσας
 Ημίδιαμέτρους αδ, αη, αζ, ἔσαι τὸ Ορθογών. βαε = Ορθογ. ηαζ. Ἐπει
 δὲ ἐν τῷ Κύκλῳ ερε, αἱ Εὐθείαι βε, ηφ ἀλλήλας τέμνουσι κατὰ τὸ α, ἔσαι
 (1) Ορθογ. βαε = Ορθογ. ηαφ. Ὡς τε τὸ Ορθογ. ηαζ = Ορθογ. ηαφ.
 καὶ ἐπομένως (2) αζ = αφ, τά τε Σημεῖα ζ ἔ φ συμπεσῶνται, καὶ τό γε
 τόξον ζῶν (3) τῷ τόξῳ ζῶν ἴσον ἔσιν. Ο. Ε. Ε.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν Γ.

κ. 376. Ἐν ὁμοῦν Κύκλῳ, οὗ Διάμετρος ἡ αβ, ἡ τῶν τόξων αγ, αδ, ὁρθὰ Η.
 μίτονα ἐς τὰ γε, δζ, Ημίτονα δὲ πλάγια τὰ αε, αζ, Ὑποτείνεσθαι δὲ αἱ αγ,
 αδ, ἔσαι αε πρὸς αζ ὡς αγΤ : αδΤ. Τετέσι τὰ πλάγια τῶν Ημιτόνων εἰ-
 σὶν ὡς τὰ Τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν Ὑποτείνουσῶν.

Ἀχθουσῶν γὰρ τῶν βδ, βγ, ἔσονται (4) βα, αγ, αε :: ἡ (5) πα-
 ραπλησίως βα, αδ, αζ ::, ἄρα (6) βα × αζ = αδΤ, καὶ βα × αε = αγΤ.
 Ἀλλὰ (7) αε : αζ :: βα × αε : βα × αζ, ἄρα αε : αζ :: αγΤ : αδΤ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΗ.

„Απὸ τῆς δοθείσης Εὐθείας (ρσ), τῷ δοθέντι Πολυγώνῳ εὐθυγράμ-
 μῳ (βπ) ὁμοίον τε ἡ ὁμοίως κείμενον Εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

κ. 377. Τὸ δοθὲν Πολύγωνον βπ εἰς Τρίγωνα ἀναλύσας, ἐπὶ τῆς δοθείσης Εὐ-
 θέας ρσ, ποιήσων Γωνίας (8) τὰς ρ ἡ ξ ἴσας ταῖς Γωνίαις β ἡ α· συμπε-
 σῶνται δὲ (9) αἱ Πλευραὶ κατὰ τὸ χ· Πάλιν ἐπὶ τῆς χσ σύζησον Γωνίας τὰς
 υ ἡ ι ἴσας ταῖς Γωνίαις τ ἡ γ, ἡ συνελεύσονται αἱ Πλευραὶ κατὰ τὸ
 ψ· Λέγω κτ.

Ἐπειδὴ γὰρ αἱ Γωνιαί ρ ἡ ξ ἴσαι ταῖς β ἡ α ἑκατέρω ἑκατέρω, ἡ
 αἱ ε ἡ κ (10) ἴσαι ἔσονται ἀλλήλαις. Ἐπειδὴ δὲ (11) ἡ υ ἡ τ συνισθῶ-
 νται, ἔσαι ἡ ὅλη ἡ ευ = ὅλη τῇ κτ. Ὡσαύτως δὲ ἐπὶ ξ ἡ ι = ταῖς α
 ἡ γ ἑκατέρω ἑκατέρω, ἡ ἡ ὅλη ξι τῇ ὅλῃ αγ ἴση ἔσαι. Καὶ ἐπειδὴ αἱ
 υ ἡ ι ταῖς τ ἡ γ ἴσαι εἰσὶ, ἡ αἱ (12) ψ ἡ π ἴσαι ἔσονται ἀλλήλαις.
 Τὰ ἄρα Πολύγωνα ρψ καὶ βπ ἰσογώνια ἐσὶ· Λοιπὸν οὖν δεῖξαι, ὅτι καὶ

(1) ΑΒ. τῷ γ'. (2) Α. τῷ ε'. (3) Ορ. Κ. τῷ α'. (4) Β. Πόρ. τῆς Η. τῷ ε'. (5) Διὰ τὸ αὐτό. (6) Διὰ τὴν ἀνὰ χείρας. (7) Α. τῷ ε'. (8) ΚΓ. τῷ α'. (9) ΙΖ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. ἡ τὸ Σχόλ. τῆς ΑΑ. τῷ αὐτῷ. (10) Θ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (11) Εὐ κατὰ. (12) Θ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'.

τὰς Πλευρὰς ἀνάλογον· ρσ:σχ :: (1) βζ:ζλ· καὶ πάλιν σχ:σψ :: ζλ:ζπ (2). Ἄρα καὶ δι' ἴσου (3) ρσ:σψ :: βζ:ζπ, κτ.

Π ό ρ ι σ μ α .

Ἐντεῦθεν δὴ καὶ τὰς Γεωγραφικὰς, καὶ Χωρογραφικὰς, καὶ Γεωδαιτικὰς πί-
νακας, καὶ τὰς ἀγρῶν, καὶ χωρῶν, καὶ οἰκοδομημάτων ἰχνογραφίας διαγράφειν
μεθοδεύομεθα· Οὐδὲν γὰρ ἄλλο οἱ τῶν τοιούτων καταγραφεῖς ποιῦντες εἰσὶν,
ἢ τὰ μεγάλα τῶν Σχημάτων πρὸς τὰ βραχυτέρα μὲν, ὅμοια δὲ ἀνάγοντες·
τῷ δ' ὅπερ ἢ ἐν Χερσὶ Πρότασις ποιεῖν ὑποτίθησι.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΘ.

„Τὰ ὅμοια Τρίγωνα (Χ, Ψ) ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων
(τετέστι τῶν τὰς ἴσας Γωνίας ὑποτεινυσῶν) Πλευρῶν ἀγ καὶ ζι.

Τετέστιν εἰάν (4) ἢ ἀγ:ζι :: ζι:απ τρίτην, τὸ Τρίγωνον Χ ἐστὶ πρὸς τὸ
Τρίγωνον Ψ, ὡς ἀγ πρώτη πρὸς απ τὴν τρίτην ἀνάλογον. Ὅρα τὸν Ι'. Ὅρισμ.
τῷ Ε'. Βιβλία.

κ. 378.

Ἐπειδὴ τὰ Χ καὶ Ψ ὅμοια ἐστὶ, (5) βα:ιλ :: αγ:ιζ· Ἀλλ' ἐκ κατα-
σκευῆς αγ:ιζ :: ιζ:απ, ἄρα (6) βα:λι :: ιζ:απ· Ἀρα (τῆς βπ ἐπιζευχ-
θείσης) ἐπὶ τῶν Τριγώνων πβα καὶ Ψ, αἱ Πλευραὶ αἱ περὶ τὰς Γωνίας α καὶ ι
τὰς (διὰ τὸν Ὅρισμ. τῶν ὁμοίων Τριγώνων) ἴσας, ἀντιπεπόνθασιν, ὥστε (7)
τὰ παβ καὶ Ψ ἴσα ἐστὶν· Ἀλλὰ τὸ Χ πρὸς τὸ πβι ἐστὶν (8) ὡς Βάσις αγ πρὸς
Βάσιν απ, ἄρα καὶ Χ πρὸς Ψ, ὡς αγ πρὸς απ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Κ.

„Τὰ ὅμοια Πολύγωνα (αβγδε, ζηδικ) διαιρεῖται Α'. εἰς τε ὅμοια Τρί-
γωνα (Φ, Σ καὶ Π, Τ καὶ Ρ, Υ) καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος· Β'. καὶ ὁμόλογα
στοῖς ἑλλοις· Καὶ Γ'. Πολύγωνον πρὸς Πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔ-
χει, ἢ περὶ ἢ ὁμόλογος Πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον Πλευρὰν (αβ, ζη),
τετέστιν ἢ περ αἱ μεταξὺ τῶν ἴσων Γωνιῶν β, η, καὶ βαε, ηζκ ἔχουσι πρὸς
ἄλληλας.

κ. 379.

Μέρος Α'. Ἐπειδὴ τὰ Πολύγωνα ὅμοια ἐστὶ (9), πάντως καὶ ἴσογώνια·

(1) Δ. τῷ ε'. (2) Διὰ τὴν αὐτὴν. (3) ΕΒ. τῷ ε'. (4) ΙΑ. τῷ ε'. (5) Δ. τῷ ε'.
(6) ΙΑ. τῷ ε'. (7) ΙΒ. τῷ ε'. (8) Α. τῷ ε'. (9) Δ. Ὅρ. τῷ ε'.

καὶ τῶν ἐν ταῖς Γωνίαις ἢ μὲν α ἰσὴ τῇ ζ , ἢ δὲ β τῇ η , ἢ δὲ γ τῇ θ , ἢ δὲ δ τῇ α , ἢ δὲ ϵ τῇ κ . Ἐπεὶ δὲ (1) $\alpha\beta : \beta\gamma :: \zeta\eta : \eta\theta$. αἵ τε β καὶ η Γωνίαι ἰσαι, δῆλον (2) ὡς ὅμοια εἰς τὰ Τρίγωνα ϕ καὶ σ . Παραπλησίως ὅμοια δειχθήσονται εἶναι καὶ τὰ P καὶ Y . Εἴτα ἔπει αἱ ὑπὸ $\beta\gamma\delta$, καὶ ὁλοχερεῖς, καὶ δὴ καὶ αἱ ἀπ' αὐτῶν ἀφαιρέμεναι ὑπὸ $\beta\gamma\alpha$, καὶ $\theta\zeta$ ἰσαὶ εἰσὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ ἀγὰρ καὶ $\zeta\theta$ ἴσαι δὴ πᾶς ἔσονται. Ὡς αὐτως δείξω καὶ τὰς ὑπὸ $\alpha\delta\gamma$ καὶ $\zeta\iota\theta$ συνισθῆναι ἀλλήλαις· ὥστε καὶ ἡ τρίτη (3) ὑπὸ γὰρ τῇ τρίτῃ ὑπὸ $\theta\zeta$ ἰσὴ ἔσται. Καὶ τοῖον (4) καὶ τὰ π καὶ τ Τρίγωνα ὅμοια εἰς καὶ αὐτά. Δῆλον ἄρα τὸ A' .

Μέρος B' . Ἐπειδὴ ὅμοια τὰ Φ καὶ Σ , ὁ λόγος τῷ Φ πρὸς τὸ Σ διπλασίων (5) ἔσται τῷ λόγῳ τῆς $\gamma\alpha$ πρὸς τὴν $\theta\zeta$. Διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ὁ λόγος τῷ Π πρὸς τὸ T διπλασίον ἔσται τῷ λόγῳ τῆς $\gamma\alpha$ πρὸς τὴν $\theta\zeta$. Ἄρα (6) $\Phi : \Sigma :: \Pi : T$. Ὡς αὐτως δείξω $\Pi : T :: P : Y$. Τοιγαρὲν (7) ὡς ἐν τῶν ἡγεμένων Φ πρὸς ἓν τῶν ἐπομένων Σ , οὕτω πάντα ἅμα τὰ ἡγεμένα Φ , Π , P πρὸς πάντα τὰ ἐπόμενα Σ , T , Y ἅμα, ὅπερ ἐστίν, ἔτω τὸ Πολύγωνον πρὸς τὸ Πολύγωνον. O . H . τὸ B' .

Μέρος Γ' . Ὁ λόγος τῷ Φ πρὸς τὸ Σ (8) διπλασίον εἰς τῷ λόγῳ $\alpha\beta$ πρὸς $\zeta\eta$. Ἀλλ' ὁ λόγος τῷ Πολυγώνῳ πρὸς τὸ Πολύγωνον φθάσαι εἰδείχθη ἴσος τῷ λόγῳ τῷ Φ πρὸς τὸ Σ . Ἄρα καὶ ὁ λόγος τῷ Πολυγώνῳ πρὸς τὸ Πολύγωνον διπλασίον εἰς τῷ λόγῳ τῆς $\alpha\beta$ πρὸς τὴν $\zeta\eta$. O . H . τὸ Γ' .

Π ο ρ ῖ σ μ α τ α.

1'. Ἀπαντα τὰ κανονικὰ τῶν Σχημάτων, οἷα τὰ ἰσόπλευρα Τρίγωνα, καὶ τὰ Τετράγωνα, καὶ τὰ Πεντάγωνα, καὶ εἰς πρὸς ἀλλήλα ἐν λόγῳ διπλασίονι τῶν Πλευρῶν. Τὰ γὰρ κανονικὰ πάντα ἀλλήλοις ὅμοια, ὡς δῆλον ἐκ τῶ A' . Ὁρ. τῇ ϵ' .

B. Καὶ ἐὰν ὥς τρεῖς Εὐθεῖαι ἀνάλογον, ἔσται ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, ὡς τὸ τυχὸν ἐπίπεδον Σχήμα (εἴτε Τρίγωνον ἢ, εἴτε Τετράπλευρον, εἴτε Πολύγωνον ὅποιον) τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης, πρὸς τὸ ὅμοιον Σχήμα καὶ ὁμοίως καταγεγραμμένον τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. Ἡ γὰρ ἔσται τῶν ἀναλογῶν Εὐθειῶν ἡ A' πρὸς τὴν Γ' , ὡς ὅποιον τῶν ἐπιπέδων Σχημάτων τὸ ἀπὸ τῆς B' , πρὸς τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως καταγεγραμμένον τὸ ἀπὸ τῆς Γ' . Κατὰ γὰρ τὸν 1'. τῷ E . Ὁρισμὸν, τῶν τριῶν ἀναλόγων ἡ A' εἰς πρὸς τὴν Γ' ἐν λόγῳ διπλα-

(1) Διὰ τὸν αὐτὸν. (2) ϵ' . τῇ ϵ' . (3) Θ . Πόρ. τῆς AB . τῇ α' . (4) Δ . τῇ ϵ' . (5) Διὰ τὴν ἀντίρρ. (6) $\Delta\theta$. τῇ ϵ' . (7) IB . τῇ ϵ' . (8) Διὰ τὴν ἀντίρρ.

σίνοι τῆς Α'. πρὸς τὴν Β', ἢ τῆς Β' πρὸς τὴν Γ'. Ὅθεν διὰ τὴν ΙΘ'. εἰ τὴν παρῶσαν Κ'. δῆλον τὸ προτεθέν.

Εἰν ἐφ' οἰοισθῆναι Σχήμασιν ὁμοίοις, αἱ Πλευραὶ αβ, ζη (ὄρα τὸ Γ. Σχ. τῆς Προτ.) αἱ μεταξύ τῶν ἴσων Γωνιῶν δῆλαι ὡς, καὶ ὁ λόγος ὁ τῶν Σχημάτων ἔσαι κατὰ διπλόν. Οἷον ἔσω αβ δυοῖν ποδῶν, καὶ ζη πρὸς ἑξ, καὶ γινέσθω 2 : 6 :: 6 : 18. Ἐσαι γάρτοι τὸ ἑλαττον (1) τῶν Σχημάτων πρὸς τὸ μείζον ὡς 2 πρὸς 18, ταῦτέστιν ὡς 1 πρὸς 9. Ἐξευρίσκεται δὲ ὁ τρίτος ἀνάλογον ἀριθμὸς (2), τὸ δευτέρου τῶν δοθέντων κατ' αὐτὸν πολλαπλασιαζόμενος, καὶ τὸ γινόμενον διὰ τῆ Α'. διαιρούμενον.

Ἐκ τῆς αὐτῆς δὲ ταύτης Προτάσεως καὶ ἡ ἀρίστη μέθοδος ἐπιφέρεται, τῇ Δ. τὸ δοθέν ὁποιοῦν εὐθύγραμμον Σχῆμα προσάψειν, ἢ ἀπομεινῶν κατὰ λόγον τὸν δοθέντα.

Οἷον ἐδελήτας Πενταγώνου οὗ Πλευρὰ ἡ αβ, ἕτερον συστήσασθαι πενταπλάσιον Πεντάγωνον, μεταξύ τῶν ὁρῶν τῷ δοθέντος λόγῳ αβ πρὸς βγ εὐρεῖ (3) μέσσην ἀνάλογον τὴν βχ, καὶ ἀπ' αὐτῆς ποιήσῃ (4) Πεντάγωνον τῷ δοθέντι ὁμοιον· τὸ γὰρ τοιοῦτο πενταπλῆν ἔσαι τῷ δοθέντος.

Διὰ γὰρ τὸ Β'. Πόρ. τῆς ἐν χειρὶ, τὸ ἀπὸ τῆς αβ Πεντάγωνον ἐς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βχ, ὡς ἡ αβ πρώτη πρὸς τὴν βγ τρίτην.

Ἡ δὲ ἐπεὶ καὶ τῶν Κύκλων λόγος διπλασίον ἐστὶ τῷ λόγῳ τῶν Διαμέτρων, ὡς δειχθήσεται ἐν τῇ Β'. Προτ. τῇ ΙΒ'. Βιβλίῳ, αὕτη ἡ πράξις καὶ πρὸς τὰς Κύκλους αὐτὰς ἐπαρκέσει.

Τῶν ὁποιοῦν ὁμοίων Σχημάτων εἰδὼς τὸν λόγον, εἴσῃ δὴ καὶ τὸν λόγον ὃν ἔχουσιν αἱ τέτων Πλευραὶ, αἱ μεταξύ τῶν ἴσων Γωνιῶν προτεινόμεναι. Αὗται γὰρ ἐν ὑποδιπλασίονι λόγῳ εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας τῷ ὃν ἔχει τὰ Σχήματα.

Οἷον ἔσω τὸ Φ, Π, Ρ πρὸς τὸ Σ, Τ, Υ (ὄρα τὸ Σχ. τῆς Κ'). ὡς 4 πρὸς 9. Μεταξὺ δὲ 4 καὶ 9 ἀριθμὸς μέσος ἀνάλογον εὐρεθήτω ὁ 6, ὁ τελείται (5) τῆς Τετραγωνικῆς ὑπεξαγομένης ῥίζης ἀπὸ τῆ ἀριθμοῦ $36 = 4 \times 9$. Καὶ ἐπειδὴ 4, 6, 9 —, τὰ δὲ τοιαῦτα Σχήματα Φ, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας ὡς 4 πρὸς 9, ἔσονται αἱ ἐκείνων ὁμόλογοι Πλευραὶ (6) ὡς 4 πρὸς 6. ταυτὸν εἰπεῖν ὡς 2 πρὸς 3.

Κἀντεῦθεν εὐδύνειν ἐς τὰς ἀπαιδεύτως οἰομένους, τὰς τῶν ὁμοίων Σχημα-

(1) Β. Πόρ. ταύτης. (2) Γ. Πόρισμ. τῆς ΙΖ. τῷ ε'. (3) ΙΓ. τῷ ε'. (4) ΙΗ. τῷ ε'. (5) Δῆλον ἐκ τῆς ΙΖ. τῷ ε'. (6) Πόρ. Β. τῆς παρῶσ.

μάτων λόγους επίσης χωρεῖν τοῖς λόγοις τῶν ἐν ἐκείνοις Πλευρῶν. Ἐὰν γὰρ δυοῖν ἢ μόνον Τριγῶνων ὁμοίων, ἀλλὰ καὶ Τετραγῶνων, Πενταγῶνων, Ἑξαγῶνων, κξ: (ἢ καὶ Κύκλων), αἱ Πλευραὶ (εἰτ' οὖν αἱ Διάμετροι) ὥτι πρὸς ἀλλήλας ὡς 2 πρὸς 1, τὰ Σχήματα αὐτὰ, τετέσι τὰ ὑπὸ τῶν Σχημάτων περιειλημμένα χωρῖα ἔσονται ὡς 4 πρὸς 1. Καὶ ἐὰν αἱ Πλευραὶ ὥσιν ὡς 3 πρὸς 1, τὰ Σχήματα ἔσαι ὡς 9 πρὸς 1, ἐν διπλασίονι δηλονότι λόγῳ τῶν Πλευρῶν ἢ τῶν Διαμέτρων. Εἰσὶ γὰρ 4, 2 1 $\div$ ὁμοίως δὲ καὶ 9, 3, 1 $\div$.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

- κ. 381. Ἐπειδὴ τῶν Τετραγῶνων Ε, Κ ὁ λόγος διπλασίων ἐστὶ τῷ λόγῳ τῶν Πλευρῶν ξρ, συ, ταύτητοι ὁ λόγος ὁ διπλασίων τῶν ξρ φέρε καὶ συ, διὰ τῷ λόγῳ ξρ^Τ πρὸς συ^Τ συνεχῶς εἴωθεν ἐπισημαίνεσθαι. Οἷον ἐὰν ἐπὶ τῶν Πλευρῶν ξρ καὶ συ, συσθεῶσιν ὅποιονδήποτε Σχήματα, ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα, ἐπειδὴ αὐτὰ ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων Πλευρῶν ξρ, συ, ἔσονται πρὸς ἀλλήλας ὡς Τετράγωνον τὸ Ε πρὸς Τετράγωνον τὸ Κ, ὅπερ ἔστιν ὡς ξρ^Τ πρὸς συ^Τ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΑ.

- κ. 382. „Τὰ τῷ αὐτῷ Εὐθύγραμμῳ (γ) ὁμοία, καὶ ἀλλήλοις ὁμοία (α, β) εἰσὶ. Δῆλον ἐκ τῷ Α'. Ὄρισμ. τῷ ε', καὶ τῷ Α'. Α'ξιῶμ. τῷ Α', καὶ τῆς ΙΑ'. τῷ Ε'.

Ἐπειδὴ γὰρ τότε α καὶ τὸ β, ἑκατέρῳ δηλονότι τῷ Σχήματι τῷ αὐτῷ γ ὁμοίῳ ἔσόν, ἑκατέρῳ δὴπε ἔσεσθον τῷ αὐτῷ καὶ ἰσογωνίῳ ἀνάλογον ἔχοντε, καὶ τὰς περὶ τὰς ἰσας Γωνίας Πλευρὰς ταῖς τῷ γ. Καὶ ἰσογωνίῳ ἄρα τῷ α καὶ β Τριγῶνῳ καὶ ἀλλήλοιν, καὶ ἀνάλογον ἔχοντε τὰς περὶ τὰς ἰσας Γωνίας Πλευρὰς, καὶ δὴ καὶ ὁμοίῳ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΒ.

„Ἐὰν τέσσαρες (ἢ πλεῖς) Εὐθεῖαι (ζι, λπ, καὶ ξρ, συ) ἀνάλογον ᾖσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν Εὐθύγραμμα ὁμοιά τε, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα καὶ (Α, Β, καὶ Ε, Κ) ἀνάλογον ἔσαι καὶ ἀνάπαλιν

καὶ ἂν τὰ ἀπ' αὐτῶν Εὐθύγραμμα (Α, Β, καὶ Ε, Κ) ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ Εὐθεῖαι (ζι, λπ, καὶ ξρ, συ) ἀνάλογον ἔσονται.

- κ. 383. Ἡ διῃσις τῷ Α, Μέρος ἐκ τῆς ΛΔ'. τῷ Ε'. ἐστὶ σαφές. Ἐπειδὴ γὰρ

οἱ λόγοι $A : B$ ἢ $E : K$ (1) εἰσὶ διπλασίονες τῶν λόγων $\zeta : \lambda\pi$ ἢ $\xi\rho$: συ· οἱ δὲ (2) ἴσοι, κακείνοι ἄρα.

Τὸ δέ τοι B' . Μέρος, ἢ αὐτὸ δῆλον ἐκ τῆς $\Delta E'$. τῆ E' . Ἐπειδὴ γὰρ ἴσοι οἱ λόγοι ὅτε $A : B$ ἢ ὁ $E : K$ · διπλασίονες δὲ (3) οὗτοι εἰσὶ τῶν λόγων $\zeta : \lambda\pi$ ἢ $\xi\rho$: συ, ἔσονται δὴ ἢ ἐκεῖνοι ἀλλήλοις ἴσοι.

Πορίσματα.

Κάντεῦθεν τὴν ἀρχὴν οἶδεν ἡ μέθοδος τῇ πολλαπλασιάζειν τε, ἢ διαι- 4.
ρεῖν τὰς ρίζας τὰς τετραγωνεῖς. Ἐὰν γὰρ ἐπ' ἀλλήλαις πολλαπλασιασθῶ-
σιν αἱ ποσότητες, αἷς τὰ ἐπίσημα τῶν ριζῶν προσῆπται, τῷ δέ τοι γινο-
μένῳ ἐπισημειωθῇ τὸ τῆς αὐτῆς ρίζης Σημεῖον, τῶν δοθεισῶν ἔτω ριζῶν
ἀνακύψει τὸ παραγόμενον. Οἷον κείδωσαν $\sqrt{5}$ ἢ $\sqrt{3}$, ἄς χρῇ ἐπιπολλα-
πλασιάσαι, φημί δὴ ὡς τὸ γινόμενον ἐστὶ $\sqrt{15}$. ὅροι γὰρ δὴ πολλαπλα-
σιασμῷ οὗτος, τὸ τὴν μονάδα εἶναι πρὸς τὸν πολλαπλασιάζοντα (φέρει $1 : \sqrt{3}$), ὡς ὁ πολλαπλασιαστέος ($\sqrt{5}$) πρὸς τὸ παραγόμενον. Ὡς τε διὰ τὴν
ἀνὰ χειρὸς Πρότασιν, τὸ ἀπὸ μονάδος Τετράγωνον ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆ
πολλαπλασιασῆς, ὡς τὸ ἀπὸ τῆ πολλαπλασιαστέου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆ παρα-
γομένης. Τῆτο δὲ ἐστίν, εἴπερ ἀντὶ τῆ Παραγομένη ἀριθμῇ τεθῇ τὸ π , ἔσαι
 $1 : 3 :: 5 : \pi^T$. ἄλλ' $1 : 3 :: 5 : 15$, ἄρα $\pi^T = 15$, καὶ ἐπομένως $\pi = \sqrt{15}$.

Λύθις εἰ δέοι $\sqrt{15}$ διελθεῖν διὰ $\sqrt{5}$, πηλίκον ἔσαι $\sqrt{3}$, διαιρούμενον
δηλονότι τῷ 15 διὰ 5 , ἢ πρὸ τῆ πηλίκου 3 τῷ ἐπισημῇ τῆς ρίζης προτασσο-
μένῳ· ὅροι γὰρ διαιρέσεως τὸν διαιρέτην ἔχειν πρὸς τὸν διαιρετέον, ὡς ἡ μο-
νὰς πρὸς τὸ πηλίκον· Ὡς τε διὰ τὴν παρῶσαν Πρότασιν, τὸ Τετράγωνον τὸ
ἀπὸ τῆ διαιρέτου, ἐστὶ πρὸς τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆ διαιρετέου, ὡς τὸ ἀπὸ
μονάδος Τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆ πηλίκου. Τετέστιν εἰάν ἀντὶ τῆ πηλίκου
τεθῇ λ , ἔσαι $5 : 15 :: 1 : \lambda^T$. ἄλλ' $5 : 15 :: 1 : 3$, ἄρα $\lambda^T = 3$, ἢ ἐπο-
μένως $\lambda = \sqrt{3}$.

Ἐὰν εὐθεία Γραμμὴ $αβ$ τμηθῇ ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ γ , τὸ Ὄρθογών. τὸ 8.
ὑπὸ τῶν Τμημάτων $αγ$, $γβ$ περιεχόμενον, μέσον ἀνάλογον ἐστὶ μεταξὺ τῶν
ἀπὸ τῶν Τμημάτων αὐτῶν Τετραγώνων. Καὶ πάλιν τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης $αβ$ ἢ
τῷ ἑτέρῳ τῶν Τμημάτων $αγ$, ἢ $γβ$ περιεχόμενον Ὄρθογώνιον, μέσον ἀνά-
λογον ἐστὶ μεταξὺ τῶν Τετραγώνων, τῶ τε ἀπὸ τῆς ὅλης $αβ$, ἢ τῷ ἀπὸ
τῆ εἰρημένου Τμήματος $αγ$ ἢ $γβ$. Καταγραφέντος γὰρ ὡς ἐπὶ Διαμέτρου τῆς

(1) IO . ἢ K . τῆ ϵ . (2) $E\epsilon$. ὑποθ. (3) $\Delta\iota\alpha\sigma\tau\epsilon\iota\varsigma$ ἀντι.

$\alpha\beta$, τῇ Ἡμικυκλίᾳ $\alpha\zeta\beta$, καὶ ἀχθείσης ἐπὶ τὴν Διάμετρον Καθεύου τῆς $\gamma\zeta$, εἰάν πληρωθῇ τὸ ὀρθογώνιον Τρίγωνον $\alpha\zeta\beta$, εὐδὴλον ὅτι (1) $\alpha\gamma : \gamma\zeta :: \gamma\zeta : \gamma\beta$, ἄρα διὰ ταύτην $\alpha\gamma^T : \gamma\zeta^T :: \gamma\zeta^T : \gamma\beta^T$. Τατέσιν (2) $\alpha\gamma^T : \alpha\gamma\beta :: \alpha\gamma\beta : \gamma\beta^T$.

Ἀλλὰ γὰρ (3) $\beta\alpha : \alpha\zeta :: \alpha\zeta : \alpha\gamma$ ὥς τε $\beta\alpha^T : \alpha\zeta^T :: \alpha\zeta^T : \alpha\gamma^T$. Ἀρα (4) $\beta\alpha^T : \beta\alpha\gamma :: \beta\alpha\gamma : \alpha\gamma^T$. Τον αὐτὸν δὲ δῆπε τρόπον καὶ $\alpha\beta^T : \alpha\beta\gamma :: \alpha\beta\gamma : \beta\gamma^T$.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΓ.

„Τὰ ἰσογώνια Παραλληλόγραμμα (X, Ψ) λόγον ἔχει τὸν συγκεείμενον ἐκ τῶν Πλευρῶν (τατέσιν τὸν συγκεείμενον ἐκ τῶν λόγων τῶν Πλευρῶν $\alpha\gamma : \gamma\beta$, καὶ $\lambda\gamma : \gamma\zeta$).

κ. 385.

Ὅπερ ἐστίν, εἰάν γένηται $\gamma\beta : \Xi :: \lambda\gamma : \gamma\zeta$, ἔσται (5) $X : \Psi :: \alpha\gamma : \Xi$. Ὅρα τὰ ἡμῖν ἀποδεδειγμένα Βιβλ. Ε'. Μέρ. Γ'. Ἀριθ. ΙΓ', καὶ τὰ ἐν Ὁρ. Ε'. τῇ ε'. Βιβλίῳ.

Κεῖσθωσαν γὰρ αἱ $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ οὕτως ἐπ' εὐθείας, ὥς τε αἱ ἰσαὶ Γωνίαι ὑπὸ $\alpha\gamma\lambda$, $\beta\gamma\zeta$ ἐπὶ τὰ ἀντίθετα τῆς $\alpha\beta$ Εὐθείας ἀφορᾶν, καὶ οὕτως (6) ἔσονται αἱ $\gamma\lambda$, $\gamma\zeta$ ἐπ' εὐθείας καὶ αὐταὶ κοίμεναι.

Συμπιπτεύωσαν οὖν αἱ $\iota\lambda$, $\sigma\beta$ κατὰ τὸ π'. Καὶ τοίνυν τὸ X Παραλληλόγραμμον (7) ἐστὶ πρὸς τὸ Παραλληλόγραμμον P, ὡς $\alpha\gamma$ πρὸς $\gamma\beta$, τὸ δὲ P πρὸς τὸ Ψ (8) ὡς $\lambda\gamma$ πρὸς $\gamma\zeta$ (τατέσιν ὡς $\gamma\beta$ πρὸς Ξ). Ὡς τε (9) δι' ἴσου $X : \Psi :: \alpha\gamma : \Xi$. Ο. Ε. Δ.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Α'. Ἐκ ταύτης οὖν καὶ τῆς ΑΔ' τῇ Α'. δῆλον, ὅτι τὰ Τρίγωνα τὰ μίαν (εἶον τὴν πρὸς τῷ γ) ἰσην Γωνίαν ἔχοντα, λόγον ἔχει συγκεείμενον ἐκ τῶν λόγων τῶν Πλευρῶν $\alpha\gamma : \gamma\beta$, καὶ $\lambda\gamma : \gamma\zeta$ τῶν περὶ τὰς ἰσαὶ Γωνίας.

Β'. Ὅτι τὰ ὀρθογώνια, καὶ διὰ (10) καὶ τὰ ὁποιαδήποτε Παραλληλόγραμμα, λόγον ἔχει συγκεείμενον ἐκ τῶν λόγων Βάσεως πρὸς Βάσιν, καὶ ὕψους πρὸς ὕψος. Ὡς αὐτως δ' ἄντις εἰσβαλεῖν ἔχει καὶ περὶ τῶν Τρίγωνων (11) τῶν τε ὀρθογωνίων καὶ ὁποίων ἄλλων.

(1) Α. Πόρ. τῆς Η. τῇ ε'. (2) Α. Πόρ. τῆς ΙΖ. τῇ ε'. (3) Β. Πόρ. τῆς Η. τῇ ε'. (4) Διὰ τὴν ΙΖ. τῇ ε'. (5) Διὰ τὸν Ε. Ὅρισμ. τῇ ε'. (6) ΙΓ. ΙΔ. τῇ α'. (7) Α. τῇ ε'. (8) Διὰ τὴν αὐτήν. (9) ΚΒ. τῇ ε'. (10) ΑΒ. καὶ Ας. τῇ α', καὶ Ὁρ. Γ. τῇ ε'. (11) Ὅρισμ. Γ. τῇ ε'. καὶ ΑΖ. καὶ ΑΗ. τῇ α'.

Δῆλον δὲ ὅτι ὡς ἡ τῶν Τριγώνων ἡ τῶν Παραλληλογράμμων ἀναλογία παρίσταται. Ἐώρασαν γὰρ Παραλληλόγραμμα τὰ Χ ἡ Ψ, ἡ τούτων Βάσεις αἱ αγ, γβ, ὕψη δὲ τὰ γλ, γζ. Καὶ γινέσθω (1) ὡς γλ ὕψος, πρὸς ὕψος τὸ γζ, οὕτω τῶν Βάσεων ἡ ἑτέρα γβ πρὸς Ξ. Ἐσται γὰρ δὴ τὸ Παραλληλόγραμμον Χ πρὸς τὸ Παραλληλόγραμμον Ψ, ὡς αγ πρὸς Ξ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΔ.

„Παντὸς Παραλληλογράμμου (σζ) τὰ περὶ τὴν Διάμετρον (αβ) Παραλληλόγραμμα (γλ, ξι), ὁμοία ἐστὶ τῷ τε ὅλῳ ἡ ἀλλήλοις, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀμείλονται τὰς ὁμολόγους Πλευράς, ἤτοι ἐπ' εὐθείας κειμέναις, ἡ παράλληλως γυν ἔχοντα.

Διὰ τὴν ΚΖ'. τῷ Α'. ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ ὑπὸ βγε, βσα, καὶ αἱ ὑπὸ βλε, βζα. Διὰ τὴν αὐτὴν δὲ ἡ ὑπὸ γελ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γιζ, τατέ- ρι (διὰ τὴν αὐτ.) τῇ ὑπὸ σαζ. ἡ δὲ δὴ κατὰ τὸ β ἡ τῷ ὅλῳ σζ, ἡ τῷ μέ- ρει γλ κοινὴ ὕψα ἐστὶ. Ὡς οὖν τότε ὅλον σζ, ἡ τὸ μέρος γλ, ἰσογώνια ἀλ- λήλοις ἐστὶ. Λοιπὸν δ' ἂν εἴη καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας Πλευράς ἔχειν ἀνάλογον. κ. 386.

Ἐπειδὴ τοῖσιν ἐπὶ τῶν Τριγώνων βγε, βσα, παράλληλός ἐστιν ἡ γε πρὸς τὴν σα, ἔσται (2) βγ : γε :: βσ : σα, καὶ γε : εβ :: σα : αβ. Ἐπειδὴ δὲ καὶ τοῖς Τριγώνοις ελβ, αζβ, ἡ ελ παράλληλός ἐστι πρὸς τὴν αζ, ἔσται εβ : ελ :: αβ : αζ, καὶ (3) δι' ἴσου ἄρα γε : ελ :: σα : αζ. Τὰ ἄρα (4) γλ ἡ σζ, τότε μέρος δηλαδὴ ἡ τὸ ὅλον ὁμοία ἐστὶ. Ὡς αὐτῶς δὲ δείξω ἡ τὸ ξι ὁμοιον τυγχάνειν τῷ ὅλῳ σζ. Ἄρα (5) τὰ γλ ἡ ξι ἡ ἀλλήλοις ὁμοία ἐστὶ.

Ἐπεὶ δὲ ἡ τῶν Πλευρῶν αἱ ὁμόλογοι, ἤτοι ἐπ' εὐθείας κείμεναι εἰσὶν ὡς αἱ βγ ἡ βσ, αἴτε βλ ἡ βζ, ἡ γυν πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι εἰσὶν, ὡς αἱ γε ἡ σα, αἴτε ελ ἡ αζ, δῆλον ὅτι τὰ Παραλληλόγραμμα γλ ἡ σζ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἐστὶ. Καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον ἡ τὰ ξι ἡ σζ Παραλληλόγραμμα ὁμοίως ἀναγεγράφθαι, ἡ ἐπομένως ἡ τὰ γλ ἡ ξι, δειχθήσεται. Α. Η. Δ.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Ἐξέσω δὴ τῇ ἐκτεθείσῃ προτάσει Προβλήματα δύο παρασυνάψαι,

(1) ΙΒ. τῷ ε'. (2) Α. Πόρισμ. τῆς Δ. τῷ ε'. (3) ΚΒ. τῷ ε'. (4) Οφ. Α. τῷ ε'. (5) ΚΑ. τῷ ε'.

ἡ πολλὴν ἔχοντα εἶναι ἐν τοῖς Κωνικοῖς τὴν συντέλειαν. Τέτων τὸ μὲν Α' πρὸς τὴν Ε' ἄλλοις τείνει, τὸ δὲ Β' πρὸς τὴν Υ' περβολήν.

Π ρ ό β λ η μ α Α'.

κ. 387. „Τριῶν δοθεισῶν Εὐθειῶν α , β , γ , ὧν ἡ τρίτη γ τῆς πρώτης α ἐλάσσων ἐστὶ, καὶ Ὁρθογωνίᾳ τῇ δευτέρᾳ συζυγέσθαι ὑπὸ τε τῆς πρώτης $\alpha = \delta\epsilon$, καὶ τῆς δευτέρας $\beta = \epsilon\zeta$, τῇ δευτέρᾳ ἕτερον Ὁρθογώνιον παραβαλεῖν, εὖρος ἔχον τῇ τρίτῃ γ ἴσον, καὶ ἐλλείπον Ὁρθογωνίῳ ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένῳ, τῷ ὑπὸ τε τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας συζυγέσθαι Ὁρθογωνίῳ.

Ἀρχαίως τῷ Ὁρθογωνίῳ ἐκ τῆς Διαμέτρου $\delta\zeta$, ἀπὸ τῆς δε Πλευρῆς, ἣτις τῇ πρώτῃ α ἴση ἐστίν, ἀφαιρεθῆτω ἐν ἴσῃ τῇ τρίτῃ γ . Διὰ δὲ τῆς ἀρχαίας καὶ παράλληλος τῇ Πλευρᾷ $\epsilon\zeta$, συμπέπτωσα τῇ Διαμέτρῳ κατὰ τὸ θ. Διὰ δὲ τῆς ἀρχαίας διὰ παράλληλος τῇ Πλευρᾷ $\delta\epsilon$, συμπέπτωσα τῇ $\epsilon\zeta$ κατὰ τὸ ι. Λέγω δὴ ὡς οὕτως ἐτελέσθαι τὸ ἐπιταχθέν. τὸ γὰρ καὶ Ὁρθογών. τὸ ζητούμενον ἦν. Ἐὰν γὰρ προεκβληθῶσιν αἱ καὶ ιθ, ιθ, ὡς συντελεσθῆναι τὰ Ὁρθογώνια ιλ, ημ. ἐπεὶ τὰ ἐκ καὶ ιλ Ὁρθογώνια περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον ὄντα εἰσιν, ὁμοιάτε (1) εἶναι ἀλλήλοις, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα. Συζυγέσθαι τοίνυν τῇ Ὁρθογωνίᾳ ἐκ ὑπὸ τε τῆς πρώτης α , καὶ τῆς δευτέρας β τῶν δεδομένων, ἥτοι τῇ ὑπὸ δε καὶ $\epsilon\zeta$, παραβέβληται δὲ τῇ δευτέρᾳ $\epsilon\zeta$ ἕτερον Ὁρθογώνιον. τῷτο δὲ ἦν τὸ καὶ ἔχον μὲν εὖρος τὸ καὶ τῇ τρίτῃ γ ἴσον, ἐλλείπον δὲ Ὁρθογωνίῳ τῷ ιλ, ὁμοίῳ τε ὄντι καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένῳ αὐτῷ τῷ ἐκ, τῷ ὑπὸ τε τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας τῶν δοθεισῶν συζυγέσθαι. Ο. Ε. Π.

Π ρ ό β λ η μ α Β'.

κ. 388. „Τριῶν δοθεισῶν Εὐθειῶν α , β , γ , καὶ Ὁρθογωνίᾳ συζυγέσθαι τῇ δευτέρᾳ ὑπὸ τε τῆς πρώτης α ἥτοι δε, καὶ τῆς δευτέρας β ἥτοι $\epsilon\zeta$, τῇ δευτέρᾳ ἕτερον Ὁρθογώνιον παραβαλεῖν, εὖρος μὲν ἔχον τῇ τρίτῃ γ ἴσον, ὑπερέχον δὲ Ὁρθογωνίῳ, ὃ ἂν ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον ἦ, τῷ ὑπὸ τε τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας συζυγέσθαι.

Ἀρχαίως τῷ Ὁρθογωνίῳ ἐκ τῆς Διαμέτρου $\delta\zeta$, προεκβληθῶ ἡ δε ἐς γε τὸ καὶ, ὥστε εἶναι τὴν προσκειμένην ἐν τῇ τρίτῃ τῶν δοθεισῶν γ ἴσην. Καὶ διὰ τῆς ἀρχαίας καὶ τῇ Πλευρᾷ $\epsilon\zeta$ παράλληλος, συμπέπτωσα τῇ Δια-

(1) Διὰ ταύτην τὴν ἐν χειρὶ.

μέτρῳ δὲ προεκβληθείσῃ καὶ αὐτῇ κατὰ τὸ Δ, καὶ συμπληρώσω τὸ Ὀρθογώνιον εἰς Δι. Φημί δὲ ὡς αὐτως ἔσκι τετελεσμένον τὸ ἐπιταχθέν· προεκβληθείσων γὰρ τῶν Δι, δι, κζ, πληρωθέντων τε τῶν Ὀρθογωνίων ημ, λι, ἐπειδὴ τὰ εκ, λι Ὀρθογώνια περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον εἰσι, ἔσονται (1) ὁμοιά τε ἀλλήλοις καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα. Ὡς συζαθέντος τῷ Ὀρθογωνίῳ εκ ὑπό τε τῆς πρώτης δε, καὶ τῆς δευτέρας εζ τῶν δεδομένων, τῇ δευτέρᾳ εζ Ὀρθογώνιον ἕτερον παρεβλήθη τὸ ηι, ὃ εὖρος μὲν τὸ εἰ ἴσον τῇ τρίτῃ γ, ὑπεροχὴ δὲ ἡ κατὰ τὸ Ὀρθογώνιον λι, ὅπερ ὁμοιόν τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον εἰς τῷ Ὀρθογωνίῳ εκ, τῷ ὑπό τε τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας τῶν δοθεισῶν συζαθέντι. Ο. Ε. Π.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΕ.

„Τῷ δοθέντι Εὐθύγραμμῳ (Β) ὁμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι (Α) ἴσον
„τὸ αὐτὸ συζήσασθαι.

„Τατέσι δυοῖν εἰδῶν δοθέντων (Α καὶ Β), τρίτον παραβαλεῖν τῷ μὲν ἴσον
„(ἴσον τῷ Α), τῷ δ' ὁμοιον (ἴσον τῷ Β).

„Καὶ πάλιν δὲ δοθέντων εἰδῶν, οὐ χαλεπὸν παραβαλεῖν εἶδος πᾶσι
„μὲν ἴσον, ἐνὶ δε τῷ τυχόντι ἐξ αὐτῶν ὁμοιον.

Ἐπὶ τῆς γζ πλευρᾷ τῷ Εὐθύγραμμῳ Β, ὃ τὸ ὁμοιον ζητούμενον εἰς, κ. 389.
συνεσάσθω Ὀρθογώνιον τὸ Π (2) ἴσον τῷ Β· εἴτα ἐπὶ τῆς ζτ (3) Ὀρθογώνιον τὸ Ρ ἴσον τῷ Α· Καὶ δῆλον ὅτι (4) γζ καὶ ζι ἐπ' εὐθείας καίμεναι εἰσι. Μεταξὺ δὲ τῶν γζ καὶ ζι μέση εὐρεθῇτω (5) ἀνάλογος ἡ ζλ, καὶ ἐπ' αὐτῆς (6) Εὐθύγραμμον ὁμοιον τῷ δοθέντι Β· ἔσκι δὲ τὸ αὐτὸ καὶ ἴσον τῷ δοθέντι Α.

Ἐπειδὴ γὰρ ἐκ κατασκευῆς αἱ τρεῖς γζ, ζλ, ζι ἀνάλογον εἰσι, τὸ Εὐθύγραμμον Β ἐστὶ πρὸς τὸ αὐτῷ ὁμοιον, τὸ ἀπὸ τῆς ζλ (7), ὡς γζ πρὸς ζι, τατέσιν (8) ὡς Π πρὸς Ρ· Καὶ ἐναλλάξ τοίνυν ὡς Εὐθύγραμμον Β πρὸς Εὐθύγραμμον Π, οὕτως Εὐθύγραμμον τὸ ἀπὸ ζλ πρὸς Εὐθύγραμμον Ρ. Ἀλλὰ γὰρ ἐκ κατασκ. τὸ Β Εὐθύγραμμον ἴσον τῷ Π, ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ζλ, ὃ τῷ Β ὁμοιον ἦ, ἴσον τῷ Ρ, ἥτοι (ἐκ κατασκ.) τῷ δοθέντι Α. Ο. Ε. Π.

Π ρ ό τ α σ ι ς Κς.

„Ἐὰν ἀπὸ Παραλλήλογράμμου (βδ) Παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ (τὸ

(1) Διὰ τὴν Πρότ. (2) ΜΕ. τῷ α'. (3) Διὰ τὴν αὐτήν. (4) ΙΔ. τῷ α'. (5) ΙΓ. τῷ ε'. (6) ΙΗ. τῷ ε'. (7) Β. Πόρ. τῆς Κ. τῷ ε'. (8) Α. τῷ ε'.

„ζν) ὁμοίῳ τε τῷ ὅλῳ, καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν Γωνίαν ἔχον (τὴν α) αὐτῷ,
 „περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον ἐστὶ τῷ ὅλῳ.

κ. 390.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ αε, γβ· καὶ εἰμὴ ἡ αεγ μία Διάμετρος ἐστὶ κοινὴ τῶν
 βδ καὶ ζν, ἔσω δὲ τῷ βδ Διάμετρος Εὐθεία ἄλλη ἡ αηγ, τέμνουσα τὴν ζε κα-
 τὰ τὸ η· ἢ χθω δὲ καὶ τῇ Εὐθείᾳ αζ παράλληλος ἡ ηδ. Τὰ τοίνυν Παραλ-
 ληλόγραμμα ζδ· καὶ βδ ἔσονται περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον αηγ, καὶ ταύτη δὲ
 τοι (1) καὶ ὁμοία καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα· Καὶ ὥσπερ ἄρα βα πρὸς αδ (2),
 οὕτω τοι καὶ ζα πρὸς αδ· Ἀλλὰ γὰρ καὶ βα : αδ :: αζ : αν, ἐπεὶ τὰ βδ καὶ ζν
 ὁμοία (3) ἐσίν· ἄρα ζα : αδ :: ζα : αν. Ὅπερ ἄτοπον.

Π ο ρ ι σ μ α τ α .

κ. 391. Α.

Ἐντεῦθεν δὴ τὴν σύνθεσιν τῶν κινήσεων, ἣτις ἐστὶν ἀναλογιζόμεθα. Κινεί-
 ῳ γὰρ κατὰ τὸ αὐτὸ τῷ χρόνῳ Σῶμα τὸ α, δυνάμει μὲν τῇ αζ πρὸς Εὐ-
 θεϊαν τὴν αζ, δυνάμει δὲ τῇ ασ πρὸς Εὐθεϊαν τὴν ασ (οὕτω δηλ. ὡς μόνῃ
 μὲν τῇ αζ δυνάμει μόνῃν Εὐθεϊαν βαίνειν ἂν τὴν αζ, μόνῃ δὲ αὐτῇ ασ τὴν
 ασ, ἐν χρόνῳ τῷ δοθέντι), πληρόσῳ δὲ τὸ Παραλληλόγραμμον ασβζ· Τῇ
 τοίνυν τῶν δυνάμεων εἰς ταυτὸ συνελεύσει, τὸ Σῶμα α τὴν Διαγώνιον αβ,
 κατὰ χρόνον τὸν δοθέντα φανερόν ὅτι διελεύσεται. Γενήσεται γὰρ τῷ Σῶ-
 ματι α παραπλησίως τὰ τῆς κινήσεως, καθάπερ εἶγε, ἐν ᾧ ὁμαλῇ τῇ κι-
 νήσει ἀπὸ τῆ α ἐπὶ τὸ σ σπεύδει μεταφερόμενον, κατ' Εὐθεϊαν τὴν ασ, προίει
 δὲ καὶ αὐτὴ ἡ ασ Εὐθεῖα, αἰεὶ παράλληλος ἑαυτῇ χωρῆσα, κατὰ κίνησιν ὡ-
 σαύτως ὁμαλὴν ἐν τῷ αὐτῷ τῷ χρόνῳ, τῷ ἐφ' ἑαυτῆς Σημεῖον α τὴν αζ Εὐ-
 θεϊαν περαίνουσα. Οὕτω γὰρ τοι ἑκάτερος τῶν κινήματων ὁ διορισμός, ὁ μὲν
 κατὰ σβ, ὁ δὲ κατὰ ζβ ἅμα διχσώδητονται. Ταύτη τοι ἐν ᾧ τὸ Σῶμα α,
 ἐν πηλίκῳ τῷ χρόνῳ (οἷον τεταρτημόριῳ) ἐξ' ὧ ἐπὶ τὸ ξ ἀφίξεται, τηλικῶτον
 καὶ τῆς ασ (τατέσι τεταρτημόριον) διερχόμενον, ἐν τῷ αὐτῷ ἡ ασ ἐπὶ τὴν δέ-
 σιν ιγ μετενεχθήσεται, καὶ τὸ ἐπ' αὐτῆς Σημεῖον α τεταρτημόριον ἐπίσης
 διαδραμεῖται ἀπὸ τῆς Εὐθείας αζ, ἐν ἴσῳ (τεταρτημορικῷ δηλ.) τῷ δοθέντι
 χρόνῳ τῷ Διαστήματι, ὥς (4) εἶναι σα : αζ :: ξα : αδ· Οὐ χάριν καὶ τῆς ἐλ-
 παραλλήλου ἀχθείσης τῇ αζ, καὶ τεμνύσης τὴν ιγ κατὰ τὸ ε, τὰ Παραλλη-
 λόγραμμα σζ καὶ ξ ὁμοία (5) τυγχάνειν ἄλλήλοισι καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμέ-
 να, τὸ δὲ Σῶμα α ὡφ' ἑκατέρας τῆς κινήσεως, ἐν πέρατι τῷ αὐτῷ τεταρτη-
 μορίῳ τῷ δοθέντι χρόνῳ, ἐπὶ τὸ Σημεῖον ε ἀφικνεῖσθαι. Ἐπεὶ δὲ τοι τὰ Πα-

(1) ΚΔ. τῷ ε'. (2) Ορ. Α. τῷ ε'. (3) ΚΔ. ὑπό. (4) ΙΕ. τῷ ε'. (5) Ορ. Α. τῷ ε'.

ραλλήλογράμμη ταῦτα ἔχει Γωνίαν ἔχει κοινὴν τὴν α, δυνάμει τῆς ἐν χειρὶ Προτάσεως, περὶ τὴν αὐτὴν Διέμετρον εἰσὶ τὴν αβ, τότε κατὰ τὸ ἐγεγνημένον Σῶμα ἐπὶ τῆς Διαγωνίᾳ αβ ταύτης ἐστί. Καὶ τὸν αὐτὸν ταύτον τρόπον τὸ Σῶμα, ἐν πηλικιώσιν ἄλλω τῷ δοθέντος χρόνῳ μορίῳ, εὐρεθήσεται πρὸς τῆς Εὐθείας αβ, κατὰ δὲ τὸ τῷ χρόνῳ πέραν ἐν τῷ Σημείῳ κέλεται β. Ὡς ἐπὶ τῶν ἔτι εἰς ἐχαστῶν δυνάμεων συνελεύσει, τὸ Σῶμα α τὴν Διαγώνιον αβ βήσεται, καθ' ὃν αὖ χρόνον, μόνῃ μὲν τῇ ας δυνάμει Εὐθεῖαν τὴν ας, μόνῃ δὲ τῇ αζ τὴν αζ ἰδίᾳ καθιεύσεις.

Χωρεῖτω τοίνυν Σῶμα τὸ τυχὸν ἐν χρόνῳ τῷ τυχόντι Εὐθεῖαν τὴν δα, δυνάμει τῇ δα. Τὸ γὰρ αὐτὸ ἰσοχρονίως τὴν αξ = δα κατὰ τὸν αὐτὸν αὖ δῆπερ διορισμὸν χωρήσειεν, εἰμήτινι ἑτέρᾳ δυνάμει ἀπήγετο διεργόμενον. Ὡς ἐπὶ εἰς τὸ κατὰ τὸ α Σῶμα ἀπὸ τῆς κατὰ τὸν αξ διορισμὸν κινήσεως ἐκτρέπομενον, ἐν χρόνῳ τῷ αὐτῷ Εὐθεῖαν τὴν αε διαγράφει, ἀχθείσης τῆς ξε ἢ τῇ Παραλλήλογράμμῃ ξι πληρωθέντος, φανερόν (1) ὅτι τὸ Σῶμα τὴν αε Εὐθεῖαν ἀχθήσεται, τῇ συνελεύσει δυεῖν δυνάμεων, τῆς μὲν ἐνέσης δα ἢ αξ, τῆς δὲ ἐπιγίγνομένης αὐτῇ τῷ Σώματι ὄντι ἐν τῷ α, κατὰ διορισμὸν τὸν τῆς Εὐθείας αὐ.

Διὸ ἔτι ἀνάπαλιν, εἰάντι Σῶμα δυνάμει τῇ αβ διαγράφον εἰς Εὐθεῖαν τὴν αβ, παραπλήσιον αὖ εἴη, ὥς εἴγε ἢ τὴν αὐτὴν ἐβρίκειν αβ ἐν χρόνῳ τῷ αὐτῷ, τῇ συνελεύσει δυεῖν δυνάμεων, αἱ ἀνάλογοι εἴεν ταῖς Πλευραῖς αζ, ας Παραλλήλογράμμῃ τινὸς τῷ σζ, οὗ Διαγώνιος αὖ εἴη ἢ αβ, ἢ αἵτινες κατ' αὐτὰς τὰς Πλευράς αζ, ας τύχοιεν διευθυνόμεναι.

Ἐντεῦθεν δὲ μετὰ τὴν περιπερὶ Νεύτωνος εἰσβάλλομεν, ὥς τὰ ὑπὸ τῶν Δ'. κ. 392 περὶ Κέντρα τινὰ ἀκίνητα τῶν δυνάμεων περιεγόμενων Σωμάτων καταγραφόμενα χωρία, ἴσεται μὲν ἐν ἐπιπέδοις ἀκινήτοις, ἐπὶ δὲ ἢ τοῖς χρόνοις ἀνάλογον. Διαίρειθω γὰρ δὴ ὁ χρόνος εἰς μέρη ἴσα, ἢ κατὰ μὲν τὸ Α'. τῷ χρόνῳ μέρος διερχέθω τὸ Σῶμα τῇ ἐνέσῃ οἱ δυνάμει Εὐθεῖαν τὴν αβ. Τὸ αὐτὸ οὖν Σῶμα, κατὰ γὰρ τὸ Β'. μέρος τῷ χρόνῳ, εἰ μηδὲν ἦν τὸ προσιστάμενον, εὐθὺ πρὸς τὸ κ ἐχώρησεν αὖ, Εὐθεῖαν καταγράφαν τὴν βι ἴσην τῇ αβ, ἔτι δὲ ὥς τῶν ἀκτῶν ἐπὶ τὸ κέντρον ἀχθείσων, ἴσα (2) εἶναι τὰ ἐμβυχθὲν πρὸς β, σβ. Ἀλλὰ γὰρ τῷ Σώματι κατὰ τὸ β γεγονότι ἐπενεργεῖτω ἐπίκεντρος τῇ δυνάμει προσβολῇ μιᾷ, ἀλλ' εὐτόνῳ, ἀπὸ μὲν τῆς βι ἐκκλίνει, τὴν δὲ βγ ἀχθῆναι αὐτὸ ἐπέλυσεν· καὶ φανερόν ὅτι τῆς ἐπικέντρου ἐνταῦθα δυ-

(1) Α. Πόρ. ταύτ. (2) ΑΗ. Βιβλ. α'.

νάμεως πρὸς τὴν ἐνῆσαν ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν βκ ἐχάσης, τῇ Παραλλήλογράμμῃ βγδκ τὸ Σῶμα βῆται τὴν βδ (1) τὴν Διαγωνίον, καὶ τῇ δευτέρῃ χρονικῇ παραρρέυσαντος μορίου, κείται κατὰ τὸ δ, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ μετὰ τῇ προτέρῃ Τριγώνῳ σαβ. Ἀλλ' ἐπεξεύχθω ἡ σδ, ἢ τὸ χωρίον, τῆς ἀκτίνος ἐπὶ τὸ κέντρον ἀχθείσης, τῆς τῇ τὸ Τρίγωνον σβδ (2) ἴσον ἔσαι τῷ Τριγώνῳ σβκ, τῆς τῇ (3) τῷ Τριγώνῳ τῷ πρώτῳ σαβ. Παραπλησίῳ τῷ λόγῳ ἐν τῷ τρίτῳ τῇ χρόνῃ μορίῳ, τὸ Σῶμα ἀπὸ τῆ δ ἐπὶ τὸ ε ἂν μετασκή τῇ αὐτῷ περιήσῃ δυνάμει κινούμενον, ὡς εἶναι τὴν δε ἴσην τῇ δβ· ἀλλ' εἴγε δυνάμεις ἐπικέντροι, εἴτε μείζων, εἴτε οὖν ἐλάττων ἐπενεργήσασα αὐτῇ κατὰ τὸ δ πρὸς τὸ σ ὥτειν, εὐρεθεῖν ἂν αὐτῇ τὸ Σῶμα ἐπὶ τι Σημεῖον θ τῆς δε παραλλήλου ἥσης τῇ σδ, τὴν Διαγωνίον ὁμοίως δθ κατὰ τὸ τρίτον τῇ χρόνῃ διαπεραιούμενον· καὶ τῆς ἀκτίνος θσ ἐπὶ τὸ κέντρον ἀχθείσης, ἔσαι τὸ Τρίγωνον σθδ, ἐπὶ τῇ αὐτῇ ἐπιπέδῳ μετὰ τῇ Τετραπλεύρῃ σαβδ, τῷ Τριγώνῳ σδε (4), καθὰ ἢ τοῖς λοιποῖς σβδ, σαβ ἴσον. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον, τῆς ἐπικέντρον δυνάμεως κατ' ἀκολουθίαν ἐπιδρᾶν νοημένης καπὶ τῶν Σημεῖων θ, ο, μ, ξ, τὸ Σῶμα ἐν ἐκάσῳ τῶν χρονικῶν μορίων τὰς Διαγωνίους θο, ομ, μξ διαδραμεῖται, τὰς ἐπὶ τῇ αὐτῇ ἐπιπέδῳ ἥσας, ἢ αἰεὶ τὰ Τρίγωνα τοῖς προτέροις Τριγώνοις ἴσα καταγραφίσεται, ἢ ἥτως ἐν ἴσοις μὲν τοῖς χρόνοις, ἐπιπέδῳ δὲ τῷ αὐτῷ, χωρία ἴσα διαπεραιωθήσεται, ὡς εἶναι τὰ ἀδροίσματα τῶν χωρίων σαδσ, σαετ τοῖς τῶν χρόνων ἀνάλογον. Αὐξημένη τοίνυν τῇ ἀρίθμῳ, ἢ μειωμένη τῇ εὐρεῖ τῇ τῶν Τριγώνων ἐπ' ἄπειρον, ἢ τέτων ἐσχάτη περίμετρος αβδθμξ κξ· Γραμμῆτις ἔσαι καμπυλῇ, ἀφ' ἧς τὰ ἐν τῷ ἀκίνητῳ ἐπιπέδῳ περιγυφόμενα χωρία, τοῖς χρόνοις αἰεὶ χωρήσει ἀνάλογον. Ο. Ε. Δ.

Ε. Ἐντεῦθεν ἐτι μετὰ τῇ αὐτῇ Νεύτωνος ἐπιφέρομεν, πάντα τὰ κατὰ καμπύλην τινὰ κινούμενα Σώματα, ἢ τὰ περίτι Κέντρον οἶον τὸ σ χωρία (ὅρα τὸ ἄνωτ. Σχῆμα) τοῖς χρόνοις ἀνάλογον καταγράφοντα, ὑπότινος ἐπικέντρον δυνάμεως ἐπὶ αὐτὸ δὴ τὸ Κέντρον σπευδήσης διηνεκῶς ἐπείγεται. Εἴπει δὲ γὰρ τὸ Σῶμα τῇ ἐνέσῃ δυνάμει, ἴσας τὰς Εὐθείας αβ, βκ, ἐν ἴσοις τοῖς χρόνοις διαδύειν οἶον εἶναι, ἐπιζευχθεῖσιν τῶν σα, σβ, σκ, ἴσα ἔσαι (5) τὰ Τρίγωνα βτα, σβκ. Εἴπει δέτοι τὸ Σῶμα ἐξ ὑποθέσεως ἴσα τὰ ἐμβυδὸν σαβ, σδβ ἰσοχρονίως καταγράφει, συνεξισωδήσεται ἀλλήλοις καὶ τὰ Τρίγωνα σαβ, σδβ. Ταύτητοι ἢ τὰ Τρίγωνα σβκ, σβδ ἴσα ἀλλήλοις

(1) Διὰ τὸ Α. Πόρ. ταύτ. (2) ΑΖ. τῷ α'. (3) ΑΞ. Α. τῷ α'. (4) ΑΖ. τῷ α'. (5) ΑΗ. τῷ α'.

ἔσαι, καὶ ὡς ἐπὶ τῆς βάρους ἰσάμενα τῆς αὐτῆς σβ, τὰ Σημεῖα δ ἐ κ, ἐπὶ Εὐθείας κείμενα ἔξει τῆς αὐτῆς δη (1), ἥτις ἂν εἴη αὐτῇ τῇ βάρει παρὰλληλος. Ἐνθεντοὶ ἀχθείσης τῆς δγ Παραλλήλου πρὸς τὴν κβ. ἔσονται μὲν αἱ βκ, βγ τῷ Παραλληλογράμμῳ κγ Πλευραὶ, ἔσαι δὲ ἡ βδ Διαγώνιος. Ὡς τε τὸ Σῶμα ἀπὸ τῆς Εὐθείας αβκ ἐκκλίνειν κατὰ τὸ Σημεῖον β, ἐκ τὴν Διαγώνιον βδ καταγράφον, ἐν ᾧ ἂν χρόνῳ τὴν Πλευρὰν βκ διήλθον, εἰμή τις καινὴ αὐτῷ κατὰ τὸ β ὄντι ἐνεγίνετο δύναμις, ἐπειχθήσεται δὴ κατ' αὐτὸ τὸ β Σημεῖον (2) δυνάμει τῇ βγ, τῇ σπευδῶσῃ ἐπὶ τὸ σ, ὃ τὸ κέντρον εἶναι τίθεται τῶν δυνάμεων. Καὶ ὕτως ἐφεξῆς κἂν τοῖς λοιποῖς τῶν Σημεῖων δ, θ, ο, μ, ξ. Ο. Ε. Δ.

Ἐπειδὴ τοίνυν ἐπὶ τῷ τῶν πρωτευόντων πλανητῶν συστήματος, τῶν ἀκτίνων πρὸς τὸν ἥλιον ἀγόμενων, αἱ τὰ χωρία τοῖς χρόνοις ἐσὶν ἀνάλογον, οἷα δὴ περ τοῖς ἀστρονομῶσιν ἐστὶ προδηλότατον, φανερόν ὡς οἱ πλάνητες πρὸς αὐτὸν τυγχάνουσιν τὸν ἥλιον ἐπειγόμενοι δυνάμει διήνεκεν πρὸς τὸν φασγῆρα σπευδῶσῃ. Ὡσαύτως δὲ καὶ περὶ τῶν δευτερευόντων ἐν πλάνησι συλλογιστέον, ὡς γε πρὸς τῆς αὐτῶν ἐκάστης προέχοντας.

Κεῖσθω τῷ Παραλληλογράμμῳ βγελ Διάμετρος ἡ βε, ἐκ προεκβληθεῖ. Ζ. κ. 394. σῶν τῶν γε, λε, γινέσθω Παραλληλόγραμμα τὸ αξεῖ, τῷ Παραλληλογράμμῳ βλσγ ὁμοίον τε, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον, διάμετρον ἔχον τὴν κε. Φημί δὲ ὅτι τῶν Παραλληλογράμμων γλ, ξι, αἱ Διάμετροι βε, αε ἐπ' εὐθείας κείμεναι εἰσὶ. Προεκβληθεῖσιν γὰρ ἐκ τῶν βγ, αξ, καὶ τῶν βλ, αι, πληρέσθω Παραλληλόγραμμα τὸ σζ. καὶ ἐπειδὴ (3) γε:αι::λε:εξ, ἔσαι (4) ἐκ γι:ισ::λε:ξε, ἐκ (5) ἐναλλάξ γι:λε::ισ:ξε, ταῦτεσι (6) σα:αζ::ξα:αι. Τὰ τοίνυν Παραλληλόγραμμα σζ, ξι, ἀλλήλοισι τε (7) ὅμοια ἐστὶ, ἐκ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἐκ κοινὴν ἔχοντα Γωνίαν τὴν πρὸς τῷ α, ὡς τε (8) ἐκ περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον ἴσεται. Ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται ἐκ τὰ σζ, γλ Παραλληλόγραμμα περὶ τὴν αὐτὴν εἶναι Διάμετρον ἐκ αὐτά. Ὡς τε δὴλον τὰς αε, εβ Διαμέτρους μέρη τῆς ὀλικῆς Διαμέτρου αβ τυγχάνειν, ἐκ ἐπομένως ἐπ' εὐθείας κεῖσθαι.

H.

Ἐὰν Τρίγωνον δύο αξε, εγβ, τὰς δύο Πλευρὰς αξ, ξε, ταῖς δυο Πλευραῖς εγ, γβ ἀνάλογον ἔχοντα, κατὰ μίαν Γωνίαν τὴν ὑπὸ ξεγ ἔστω συσπῶσιν, ὡς τὰς ὁμολόγους Πλευρὰς παραλλήλους ἔχειν κειμένας, τε-

(1) ΑΘ. τῷ α'. (2) Α. Πόρ. τῆς παρὸς. (3) Εξ ὑποδ. (4) ΙΗ. τῷ ε'. (5) Ις. τῷ ε'. (6) ΑΔ. τῷ α'. (7) Ος. Α. τῷ ε'. (8) Διὰ ταύτην τὴν ἐν χειρὶ.

τίς· τὴν μὲν αὖ τῇ εγ, τὴν δὲ ξς τῇ γβ, ἔξει καὶ τὰς λοιπὰς τῶν Πλευρῶν ας καὶ εβ ἐπ' εὐθείας κειμένας. Προεκβληθεῖσιν γὰρ τῶν ξς καὶ γε, καὶ ταύταις Παραλλήλων ἀχθεῖσιν τῶν αι, βλ, πληρώσω δὴ τὰ Παραλλήλογράμματα, γλ, αὐτὰς τὰς Παραλλήλους ξκ, γι, βλ, καὶ αι, ξλ, γβ, ἔσται (1) ἰσογώνια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, διὰ δὲ τὰς ἀνάλογον αἰ : ξς :: εγ : γβ, καὶ ὁμοία (2). Εὐνδεται διὰ τὸ πρὸ τῆς Πόρισμα, καὶ τούτου αὐτὸ Διαιγώνισμα, εβ ἐπ' εὐθείας κείμενα εἶσιν. Ο. Ε. Δ.

Τὸ δὲ Πόρισμα τοῦτο τὴν ΔΒ'. τῷ ε'. ἡμῖν παρίσχηται, ἣν τῷ Συγγραφέως ὑπεδράματοις, αὐτοὶ ἐκ τῆς ἐν χειρὶ ταύτης Κς', καὶ τῷ Ζ'. τῶν μετ' αὐτὴν Πορισμάτων, ἀμέσως ἐπιφερομένην ἀποκαταστήσαι ἐνταῦθα ἐναικνίσμεν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΖ.

„ Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν Εὐδείαν (αβ) παραβλεχόμενων Παραλλήλογράμμων (αδ, αζ), καὶ ἐκλείποντων εἶδαι Παραλλήλογράμμοις (γε, ιδ) ὁμοιοῖτε, καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας (τῆς αβ) ἀναγεγραμμένῳ (αδ), μέγιστον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβλεχόμενον Παραλλήλογράμμον (αδ), ὁμοιον δὲ τῷ ἐκλείματι (γε).

9. 395.

Παραβεβλήδωσαν παρὰ τὴν Εὐδείαν αβ δίχα τετμημένην κατὰ τὸ γ, Παραλλήλόγραμμα τότε αγδλ, καὶ ὁποιονδήποτε τὸ αὐτὸ αὐτῇ, ἐκλείποντα εἶδαι Παραλλήλογράμμοις, τὸ μὲν γβεδ, τὸ δὲ ιβδζ, ὁμοιοῖτε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ αδ, τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς αβ. Λέγω δὲ ὅτι τὸ Παραλλήλόγραμμον αδ τῷ Παραλλήλογράμμῳ αζ μῆζον ἐστ.

Τῆς δὲ διὰ Προτάσεως ταύτης δύο αὖ εἶεν αἱ διαφοραὶ, ἥτοι γὰρ τῷ Παραλλήλογράμμῳ αζ ἡ Βίσις αι τῆς αγ ἡμισείας μείζων, ἢ γυνελάσσων. Κείδω δὲ μείζων (ὡς ἐπὶ τῷ ἀνωτ. καταγεγραμμένου Σχήματος). Καὶ ἐπειδὴ τὰ Παραλλήλόγραμματα γε, ιδ, κοινὴν ἔχει Γωνίαν τὴν ὑπὸ γβε, εἴτ' οὖν τὴν ὑπὸ ιβδ, ὁμοιοῖτε (3) καὶ ὁμοίως κείμενα εἶναι, εἰσὶ δὴ πρὸς (4) καὶ περὶ τὴν αὐτὴν Διαμετρον βδ. Διὸ προσβληθείσης τῆς ιζ ἐπὶ τὸ καὶ ἔσται τὸ γζ = τῷ (5) ζε. Κοινῇ γὰρ προσβληθείτω τὸ ιδ, καὶ ἔσται γδ = ιε. Ἀλλὰ διὰ τὴν δίχα κατὰ τὸ γ τετμημένην αβ, ἔσιν ηγ = γδ (6), ἄρα καὶ ηγ = ιε. Προσεθείδω κοινὸν τὸ γζ, καὶ ἔσται αζ = γζ + ιε.

(1) ΚΖ. τῷ α'. (2) Α. Ο'φ. τῷ ε'. (3) Ε'ε ὑποδ. (4) Διὰ τὴν αὐτῃ. (5) ΜΓ. τῷ α'. (6) Ας. τῷ α'.

ἀλλὰ γε (τετέστιν (1) αδ, διὰ τὰς ἴσας Βάσεις αγ, γβ) μείζον τῆς γζι + ιε, ἄρα αδ μείζον τῆ αζ.

Αἱ δὲ ἔσω δὴ ἢ αἱ ἐλάσσων τῆς αγ. Καὶ ἐπειδὴ τὰ Παραλληλόγραμμα κ. 396. μα γε, ιθ, κοινὴν ἔχει Γωνίαν τὴν ὑπὸ γβε, εἴτ' οὖν τὴν ὑπὸ ιβθ, καὶ ὁμοία (2) ἐστὶ καὶ ὁμοίως κείμενα, περὶ τὴν αὐτὴν (3) Διάμετρον ἐστὶ βδζ. Αἰχθήτω τοίνυν ἡ Διάμετρος, καὶ καταγραφῆτω τὸ Σχήμα, καὶ διὰ τὰς ἴσας αγ, γβ (4) ἴσαι ἔσονται αἱ λδ, δε. Ὅθεν δὴ καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα (5) ηδ, δθ ἴσα καὶ αὐτὰ ἔσαι. Ὡς το Παραλληλόγραμμον δθ ἐστὶ τῷ Παραλληλογράμμῳ ηκ μείζον. Αἱ δὲ (6) δθ = δι, ἄρα τὸ δι μείζον ἐστὶ τῷ ηκ. Κοινῇ προσεθείδω τὸ ακ, καὶ ἔστω τὸ Παραλληλόγραμμον αδ τῷ Παραλληλογράμμῳ αζ μείζον ἔσαι.

Πάντων τοίνυν τῶν παρὰ τὴν Εὐθείαν παραβαλλομένων Παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἶδεναι Παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγεγραφομένῳ, μέγιστον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον Παραλληλόγραμμον, ὁμοιον οὖν τῷ ἐλλείμματι. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἐςω παρὰ τὴν αὐτὴν Εὐθείαν αβ παραβεβλημένα Παραλληλόγραμμα κ. 397. μα τὰ αζ, ατ, ἐλλείποντα Παραλληλογράμμοις τοῖς ιθ, πε, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ αδ ἢ γε, τῷ παρὰ τὴν ἡμίσειαν τῆς αβ, οὕτως ἀλλ' οὖν ὥς εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν Εὐθειῶν ιβ + πβ = αβ, τετέστιν ὥς εἶναι ακ = ιβ, καὶ γι = γπ. Φημὶ δὴ ὅτι τὰ Παραλληλόγραμμα αζ, ατ ἴσα ἐστὶ.

Διὰ γὰρ τὰς ἴσας αγ, γβ, καὶ τὰς ἴσας ὁμοίως πγ, γι, ἔσονται καὶ (7) ην = ιθ, καὶ ξν = ιζ. Καὶ πὶ τῷ Τριγώνῳ ζξτ, διὰ τὰς Εὐθείας ιθ, δλ τὰς ταῖς Πλευραῖς τξ, ζξ Παραλλήλους, ἔσαι (8) ζδ = δτ, καὶ ξλ = λτ. Ἐνθεντοὶ διὰ τὴν τῶν Βάσεων ἰσότητα (9) ἔσαι νλ = νε, καὶ νλ = νκ, καὶ ἐπομένως ξλ = ζε = (10) ζγ = (11) ξγ, καὶ 2ξλ, τετέστι ξΓ = 2ξγ, τετέστι ξι. Κοινῇ προσεθείδω τὸ αξ, καὶ ἔσαι ατ = αζ. Ο. Ε. Δ.

Εἰν παρὰ τὴν Εὐθείαν αβ παραβληθῇ Παραλληλόγραμμα ἴσα τὰ β.

(1) Διὰ τὴν αὐτ. (2) Διὰ τὴν ὑπόδ. (3) Διὰ τὴν ἀνωτ. (4) ΛΔ. τῷ α'. (5) Λς. τῷ α'. (6) ΜΓ. τῷ α'. (7) Διὰ τὴν ΛΔ. τῷ α'. (8) Β. τῷ ε'. (9) Λς. τῷ α'. (10) ΜΓ. τῷ α'. (11) Λς. τῷ α'.

ατ, αζ, ἐλλείποντα Παραλληλογράμμοις ιθ, πζ, τῷ Παραλληλογράμμῳ αδ, εἴτ' οὖν γε, τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς αβ ἀναγραφομένῳ ὁμοίοις τε ἔ
ὁμοίως κειμένοις, ἔσαι ιβ + πβ = αβ, τετέστιν απ = ιβ. Προεκβληθείσης
γὰρ τῆς ικ ἐπὶ τὸ μ, διότι (1) ατ = αζ, ἀφαιρεθέντος τῷ κοινῷ αξ, ἔσαι
τὸ ητ = πζ = (2) θμ. ἄρα (3) εἰ ηξ = ζθ, καὶ (4) ἐπομένως απ = ιβ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΗ.

„Παρά τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν (αβ), τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ (γ) ἴσον
„Παραλληλόγραμμον (αι) παραβαλεῖν, ἐλλείπον εἶδει Παραλληλογράμμῳ
„(ξν) ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι (δ). Δεῖ δὴ τὸ διδόμενον Εὐθύγραμμον (γ),
„ὃ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ (ς) μείζον εἶναι (τῷ αη) τῷ ἀπὸ τῆς ἡμι-
„σεύας (τῆς αβ δηλ.) παραβαλλομένῳ, ὁμοίων ὄντων, τῷ τε ἀπὸ τῆς ἡμι-
„σεύας παραβαλλομένῳ (αη), ἔ τῷ ἐλλείμματός τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας (εζ),
„εἰ τῷ (δ), ὃ δεῖ ὅμοιον (ξν) ἐλλείπειν τ, Παραλληλογράμμῳ.

κ. 398.

Δίχα τετμήσω ἡ αβ κατὰ τὸ ε, ἔ ἐπὶ τῆς αε (6) συνεχίσω τῷ
δοθέντι Παραλληλογράμμῳ δ ὅμοιον Παραλληλόγραμμον τὸ αη, ἔ πλη-
ρῶσω τὸ Παραλληλόγραμμον αζ. ἔτω δὲ ἔσαι ἔ τὸ εζ τῷ αη, ἔ ἐπο-
μένως τῷ δοθέντι δ ὅμοιον. ἔσαι δὲ τὸ αὐτὸ εζ τῷ αη ἔ ὁμοίως κεί-
μενον ἔ ἴσον. Ἐπεὶ δέ τοι ὡς ὁ διορισμὸς βέλεται, τὸ αη ἔκ ἔλαττον ἐστὶ
τῇ Εὐθυγράμμῳ γ, ἔσαι δὴ πῶς ἦτοι ἴσον αὐτῷ ἢ αὐτῷ μείζον. Καὶ εἰ μὲν
αη = γ, ἐγένετο ἤδη τὸ ζητηθέν. Παρὰ γὰρ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αβ,
τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ γ ἴσον παρεβλήθη Παραλληλόγραμμον τὸ αη,
ἐλλείπον εἶδει Παραλληλογράμμῳ τῷ εζ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι δ.

Εἰ δὲ τὸ αη Παραλληλόγραμμον τῷ Εὐθυγράμμῳ γ μείζον εἴη, εὐρε-
θήτω δὴ (7) ἡ ὑπεροχὴ τῷ αη ἢ τῷ εζ ἡ ὑπὲρ τὸ γ. ἔ τῇ μὲν ὑπεροχῇ
ἴσον, τῷ δὲ εζ ὁμοιόν τε ἔ ὁμοίως κείμενον συνεχίσω (8) Παραλληλόγραμ-
μον τὸ κλ, κοινὴν ἔχον Γωνίαν μετὰ τῷ εζ τὴν πρὸς τῷ η. ἔ οὕτω τὰ Πα-
ραλληλόγραμμα εζ, κλ, περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον ηιβ (9) εἰσί. Προεκ-
βληθήτω δὴ ἡ κι πρὸς τὸ μ ἔ ν, ἡ δὲ λι πρὸς τὸ ξ, καὶ ἔσαι τὰ Παραλλη-
λόγραμμα ξν, εζ, περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον ηιβ, ἔ ἐπομένως (10) ὅμοια, ὥσε
(11) ἔ τὸ ξν ὅμοιον ἐστὶ τῷ δοθέντι δ. Ἐπειδὴ δὲ κλ ἐστὶν ἡ ὑπεροχὴ τῷ

(1) Εξ ὅ. (2) ΜΓ. τῷ α. (3) Α. τῷ ε. (4) ΑΔ. τῷ α. (5) Διὰ τὴν πρὸ
ταύτ. (6) ΙΗ. τῷ ε. (7) Διὰ τὸ Πόρ. τῆς ΜΕ. τῷ α. (8) Διὰ τὴν ΚΕ. τῷ ε. (9)
Κς. τῷ ε. (10) ΚΔ. τῷ ε. (11) ΚΔ. τῷ ε.

Παραλληλογράμμη εζ, ὑπὲρ τὸ δοθέν Εὐθύγραμμον γ, ἐὰν ἀπὸ τῆ Παραλληλογράμμης εζ ἀφαιρεθῇ τὸ κλ, ἔσται τὸ λοιπὸν ἴσον τῷ γ. Καὶ ἔσται τοῦτον τὸ Εὐθύγραμμον γ ἴσον τοῖς Παραλληλογράμμοις εν, ιζ ἅμα ληφθεῖσι, τῆτέσι (1) τὸ εν = ακ, καὶ (2) ιζ = ει ἴσον τῷ Παραλληλογράμμῳ αι. Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα Εὐθεῖαν αβ, τῷ δοθέντι Εὐθύγραμμῳ γ ἴσον Παραλληλόγραμμον παρεβλήθη τὸ αι, ἐλλείπον εἶδει Παραλληλογράμμῳ τῷ ξν, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι δ. Ο. Ε. Π.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Εἰς τῆς δευτέρας ὑποθέσεως καὶ τῇ Α'. τῶν Πορισμάτων τῆς ἀνωτέρω κ. 399.
Προτ., καὶ ἄλλῃτις μέθοδος ἀνακύπτει τῆς κατασκευῆς τῇ Προβλήματι. Α' μέλειται ἐὰν ἐπὶ τῆς δοθείσης αβ, συσχεσθῶσι ὡς πρότερον τῶν αη, εζ τῷ δοθέντι δ ὁμοίων, παρεβληθῶσιν ἥτε τῇ εζ Πλευρᾷ εη, καὶ ἡ Διαγώνιος βη, καὶ περὶ ταύτην ἐν Γωνίᾳ, ἥτις ἂν εἴη τῇ ὑπὸ εηζ ἀντίθετος κατὰ κορυφήν, γένηται (3) Παραλληλόγραμμον σηπ, ἴσον τῇ ὑπεροχῇ τῇ αη, εἴτ' οὖν τῷ εζ ὑπὲρ τὸ Εὐθύγραμμον γ, καὶ τῷ εηζβ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον· ἐνθεντοὶ γὰρ τὸ στ ὅμοιον ἔσται καὶ ὁμοίως κείμενον, καὶ δὴ (4) καὶ ἴσον τῷ κλ ἐν τῇ κατασκευῇ τῇ ἀνωτέρω. Προεβληθεῖσιν τοῖσιν τῶν αθ, βζ, πσ, πτ, πληρέσθω τὰ Παραλληλόγραμμα απ, φρ, καὶ ἔσται (5) φρ ὅμοιον τῷ εζ, καὶ ἐπομένως καὶ τῷ δοθέντι δ, διὰ δὲ τὰ στ καὶ κλ ὅμοια ὄντα, καὶ ὁμοίως κείμενα καὶ ἴσα, ἔσται ση = ηλ, τῆτέσι (6) φρ = εξ· ὅθεν δὴ (7) αφ = ξβ, καὶ (8) απ = αι = γ. Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα Εὐθεῖαν αβ, τῷ δοθέντι Εὐθύγραμμῳ γ ἴσον Παραλληλόγραμμον παρεβλήθη τὸ απ, ἐλλείπον εἶδει Παραλληλογράμμῳ τῷ φρ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι δ.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Τ Α.

Εἰς τὸ δοθέν Παραλληλόγραμμον δ Τετράγωνον η̄, τὸ Πρόβλημα οὕτως ἐξενεχθήσεται. Δ. κ. 400.

„Παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αβ, τῷ δοθέντι Εὐθύγραμμῳ γ ἴσον „Ὄρθογώνιον παραβαλεῖν ἐλλείπον Τετραγώνῳ· Καὶ παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν παρεβληθήσεται Ὄρθογώνιον τὸ αι, ἐλλείπον Τετραγώνῳ τῷ ξν, ἡ

(1) Ας. τῷ α. (2) ΜΓ. τῷ α. (3) ΚΕ. τῷ ε. (4) Αξ. Δ. τῷ α. (5) ΚΔ. τῷ ε. (6) ΛΔ. τῷ ε. (7) Αξ. Γ. τῷ α. (8) Δ. Πόρ. τῆς ἀντα.

Ορθογώνιον τὸ ἀπ' ἐλλείπον Τετραγώνω τῷ φρ'. Εὐθδεῖται ἐπεὶ διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς Πρωτ. ταύτης, ἢ γὰρ τὴν ἐν τῷ Σχολίῳ, τὸ Ορθογώνιον αἰ συνάμα τῷ Τετραγώνῳ κλ, ἢ (ὁ ταυτὸν ἐστὶ) τὸ Ορθογώνιον ἀπ' συνάμα τῷ Τετραγώνῳ στ, ἴσον ἐστὶ τῷ Τετραγώνῳ αη, ἢ τῷ εζ, φανερὸν ὅτι ἡ Ε'. Πρώτασις τῆς Β'. Βιβλίου, ἐκ ταύτης τῆς ΚΗ'. τῆς ε'. ἀμέσως ἐπιφέρεται. Οὕτω γὰρ ἐστὶ προτιθεμένη ἡ τῆς Β'. πέμπτη.

„Εἰάν ἡ Εὐθεία ἡ αβ εἰς ἴσα τετμημένη αε, εβ, καὶ εἰς ἀνίστα αξ, ξβ, „ἡ αφ, φβ, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίστων Τμημάτων περιεχόμενον Ορθογώνιον αἰ, „ἡ απ, μετὰ τῇ ἀπὸ τῆς μεταξὺ εζ, ἢ εφ Τετραγώνῳ κλ, ἢ στ, ἴσον „ἐστὶ τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας αε, ἢ εβ. Αὕτη γὰρ δὴ ἡ Πρώτασις τῆς ἐν χερσὶν ΚΗ'. ἡ ἐν μέρει ληφθεῖσα ὑπόθ. δηλ. τῇ τὸ δοθέν Παραλληλόγρ. εἶναι Τετράγρ. ἐστὶ, περὶ ἧς ἐν τῷ Πορίσματι εἰρηται.

Β'. Δοθείσης τῆς Εὐθείας αβ καὶ τῆς Εὐδυσγράμμου γ, διὰ ταύτης τῆς ΚΗ'. καὶ τῇ μετ' αὐτὴν Σχολίῳ, ληφθήσεται ἡ ξβ, ἢ φβ Πλευρὰ τῆς Τετραγώνου, ᾧ ἐλλείπει τὸ Ορθογώνιον αἰ, ἢ απ, τὸ τῷ Εὐδυσγράμμῳ γ ἴσον, καὶ παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αβ παραβεβλημένον. Ἀντὶ γὰρ τῆς ἀγνοουμένης πηλικόκητος κείδω υ, καὶ αν = αβ × υ, καὶ ξν = υ^Τ. ὥστε αἰ = αν — ξν = αβ × υ — υ^Τ = γ. Τὸ δ' αὐτὸ ἐπαχθήσεται καὶ ἢν ὑποτεθῇ υ = φβ, ἔστι γὰρ απ = αρ — φρ = αβ × υ — υ^Τ = γ. Καὶ τῆτο δὴ τὸ πρῶτον τυγχάνει (1) τῶν διατεθειμένων Τετραγωνικῶν ἐξισώσεων εἶδος, ὅπερ ἐκ τῆς ΚΗ'. ταύτης οἱ πάλαι τῶν Γεωμετρῶν ἐπελύοντο, πηλικότητα ἐξευρίσκοντες ἀγνοουμένην τὴν ξβ, ἢ φβ παρὰ τὴν Ορθογώνιῳ τῷ δοθέντι Εὐδυσγράμμῳ γ ἴση, παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθεῖαν αβ, εἶδει Τετραγώνῳ ἐλλείποντος. Πράδηλον δὲ ὡς τὸ πρῶτον τιτὶ εἶδος διττῆς ἐστὶν ἐπιδεκτικὸν ἐπιλύσεως, τὸ γάρτοι υ ἢτοι διὰ τῆς ξβ, ἢ διὰ τῆς φβ ἔχει ἀν' ἀναπτύσσεσθαι, ὧν ἡ μὲν ξβ διὰ τῆς ἐν τῇ προτάσει, ἡ δὲ φβ διὰ τῆς ἐν τῷ Σχολίῳ κατασκευῆς ἐξευρεθήσεται. Δῆλον δὲ καὶ ἐκ τῆς Β'. Πορίσματ. τῆς ΚΖ'. Πρωτ., ὡς αἱ δύο ἐκεῖναι πηλικότητες ἀμα ληφθεῖσαι ξβ + φβ, τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ αβ ἴσαι εἰσὶ. Διὸ ἐὰν εἰς εὐρεσὶν ἑκατέρας διττῆς ἐστὶ κατασκευῆς χρεῖα, θάττερας γὰρ εὐρεθείσης, οἷον τῆς ξβ, καὶ ἡ ἑτέρα, τατέσιν ἡ αξ, εἴτ' οὖν ἡ φβ ἔσται κατάδηλος.

Γ'. Καὶ ἡ Μεθοδος δὲ, ἢ χρηθεῖσαι εἰώθασιν οἱ νεώτεροι εἰς τὴν τῶν ἐξισώσεων τῇ τοιαύτῃ εἰδῆς ἐπιλύσιν, ἐκ τῆς κατασκευῆς καὶ αὐτῇ τῆς ἐν χερσὶν

(1) Ὁρμ. Οὐγγεῖδου κλειδὸν Μαθηματ. Κ. 15. ἀριθμ. 2.

„Παρά τῆν διδίσταν Εὐδίειαν (αβ), τῷ διδίστι Εὐδισγρήμω (γ) ἴσον
„Παραλλήλογράμμον (αι) παραβλάπῃ, ὑπερβάλλον εἶδει Παραλλήλογράμ-
„μω (μλ) ὁμοίω τῷ διδίστι (δ).
κ. 402.

Δίχως τετμήδιω ἡ αβ κατὰ τὸ ε, εἰπὶ τῆς εβ Εὐδίειας (5) συνενάδιω
Παραλλήλογράμμον τῷ διδίστι δ ὁμοιον τὸ βεζγ· τοῖς δε δη γ ε εν αμ
ληφθεῖσιν ἴσον, τῷ δε ζεβη ὁμοιον, εἰ ὁμοίως κείμενον γινέδιω (6) Παραλ-
λήλογράμμον τὸ ζκσι, καινὴ ἔχον συν ἐκείνῳ Γωίαν τὴν πρὸς τῷ ζ Ε'σον-
ται (7) τσίβιν τὰ Παραλλήλόγραμματα εν, δικ περι τὴν αὐτὴν Διάμετρον ζβσι.
Προεβλάψθῃ τωσαν δη αἱ αβ, ηβ, ἐπὶ λ εἰ μ· καὶ ἐπειδὴ ὁμοιον τὸ εν τῷ δ
ἐκ κατασκευῆς, εἰ μὴν (8) εἰ τῷ μλ, ὅτι περι τὴν αὐτὴν Διάμετρον εἰπὶ τῷ
εν, μλ, ἐπεται διήκασ (9) εἰ τὸ μλ αὐτὸ τῷ δ ὁμοιον εἴηαι. Προεβλάψθῃς
ὄν τῆς εκ, πληρέδιω τὸ Παραλλήλογράμμον αμ, εἰ ἔσαι ακ (10) = κβ =

- (1) Γ. Πόμω τῆς Δ. τῷ β. (2) ΙΔ. τῷ β. (3) Γ. Πόμ. τῆς παρίσ. (4) ΜΖ. τῷ α.
(5) ΙΗ. τῷ ε. (6) ΚΕ. τῷ ε. (7) Ης. τῷ ε. (8) Ηα. τῷ ε. (9) ΚΔ. τῷ ε. (10) Δς. τῷ α.

ΚΗ'. ἐπαύραται· Ἐπεὶ γὰρ $υ$ ἦται $φβ = αξ ἐς υ$, ἢ $ξβ$, $ε$ $αξ = \frac{1}{2} αβ + εξ$, $ε$ $εξ = κ$, καὶ διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς ΚΗ', Πρωτ. κ' $τ = εβ^T - γ = (1)$

$\frac{1}{2} αβ^T - γ$, ἔσται κ, ἢ $εξ = \sqrt{\frac{1}{4} αβ^T} - γ$. Καὶ $υ$ ἄρα ἔσται:

$$Η' ται αξ = \frac{1}{2} αβ + \sqrt{\frac{1}{4} αβ^T} - γ.$$

$$Η'' ξβ = \frac{1}{2} αβ - \sqrt{\frac{1}{4} αβ} - γ.$$

Ὡς ἐπὶ τῇ ἐξισώσει $αβ \times υ - υ^T = γ$, ἢ μέσος ἐστὶ $\frac{1}{2} αβ \pm \sqrt{\frac{1}{4} αβ^T} - γ = υ$. Ὁρα Οὐ γερτίον ἐνταύτῃ.

Ἐνδοτοι ἐπὶ τῇ ἐξισώσει $αβ \times υ - υ^T = γ$, δοθείσης τῆς Εὐθείας Δ. κ. 401. $αβ$, $ε$ τῇ Εὐθύγραμμῃ $γ$, εὐχερέστερον εὐρεθήσεται ἢ $υ$, εἰν τῷ Εὐθύγραμμῳ $γ$ ἴσων (2) Τετραγώνων συζυγῶν, οὗτος Πλευρὰ ἐκ τῆς τοιαύτης κατασκευῆς εὐρεσκειν εἴη $ω$, ἢ διήπερ ἀπὸ τῆς εἰς μεσότητος τῆς δοθείσης $αβ$ Κείστος ἀγχείν ἴση ἢ $εχ$, $ε$ Κέντρώ μὲν τῷ $χ$, Διαστήματι δὲ τῷ $χξ = \frac{1}{2} αβ$, τῶν Κύνων καταγραφείη τέμνων τὴν $αβ$ κατὰ τὸ $ξ$. Τημεύοντα γὰρ αἱ $αξ$, $ξβ$, ἔσονται αἰθυαίμει τῆς $υ$. Καὶ γὰρ $υ = (3) \frac{1}{2} αβ \pm \sqrt{\frac{1}{4} αβ^T} - γ$. Αἱ $αξ$, ἐκ κατασκευῆς $ε$ $αξ^T = \frac{1}{4} αβ^T$, $ε$ $χξ^T = γ$, ἄρα $εξ^T$ ἦτοι (4) $αξ^T - χξ^T = \frac{1}{4} αβ^T - γ$. Ἀρα $εξ = \sqrt{\frac{1}{4} αβ} - γ$, $ε$ $αξ = \frac{1}{2} αβ + εξ = \frac{1}{2} αβ + \sqrt{\frac{1}{4} αβ^T} - γ$, ὡς περ διή $ε$ $ξβ = \frac{1}{2} αβ - εξ = \frac{1}{2} αβ - \sqrt{\frac{1}{4} αβ^T} - γ$.

(1) βθ. Ἐὰν οὖν τοῖς ἴσοις $\alpha\kappa$, $\beta\theta$, κοινὸν προσεθῇ τὸ $\kappa\lambda$, ἔσαι αἱ Παραλληλόγραφοι ἴσων τοῖς Παραλληλογράμμοις $\kappa\lambda$ καὶ $\beta\theta$ ἅμα ληφθεῖσι. Τὸ δέ τοι $\kappa\theta$ (τετάρτῃ $\epsilon\eta + \kappa\lambda + \beta\theta$) ἴσον ἐστὶ τοῖς $\epsilon\eta + \gamma$ ἐκ κατασκευῆς, ἀφαιρέθεντος ἄρα τῷ κοινῷ $\epsilon\eta$, ἔσαι $\gamma = \eta\lambda + \beta\theta = \alpha\iota$. Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα Εὐθείαν $\alpha\beta$, τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ γ ἴσον Παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ $\alpha\iota$, ὑπερβάλλον εἶδει Παραλληλογράμμῳ τῷ $\mu\lambda$, ὁμοίῳ τῷ δοθέντι δ. Ο. Ε. Π.

Π ο ρ ῖ σ μ α τ α .

α. 403. Α'. Ἐὰν ἡ τὸ Παραλληλόγραμμον δ Τετραγώνων, αἰτεῖται τὸ Πρόβλημα, „παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθείαν $\alpha\beta$, τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ γ ἴσον Ὀρθογώνιον παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον Τετραγώνῳ.“ Ἐπεὶ δὲ διὰ τὴν κατασκευὴν Ὀρθογώνιον τὸ $\alpha\iota$ συνάμα τῷ Τετραγώνῳ $\epsilon\eta$, ἴσον ἐστὶ τῷ Τετραγ. $\kappa\theta$, εὐδελον ὡς ἡ ζ'. τῶν τῷ Β'. Βιβλίου Προτάσεων, ἐκ ταύτης τῇ ΚΘ'. τῇ ζ'. ἀμέσως ἂν ἐπαχθεῖ. Αὕτη γὰρ ἐκείνη. „Ἐὰν Εὐθεῖα ἡ $\alpha\beta$ δίχα ἢ τετμημένη κατὰ τὸ ϵ , προσεθῇ δέ τις αὐτῇ Εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ $\beta\lambda$, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης, σὺν τῇ προσκειμένῃ $\alpha\lambda$ καὶ τῆς προσκειμένης $\beta\lambda$ περιχόμενον Ὀρθογώνιον, ἦτοι τὸ $\alpha\iota$, μετὰ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας Τετραγώνῳ $\epsilon\eta$, ἴσον ἐστὶ τῷ Τετραγώνῳ $\kappa\theta$, τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ ματρ. ελ. ἢ καὶ ἀναγραφέντι.“ Οὐδὲν οὖν ἕτερον ἢ τῷ Β'. ἐκτῇ προτίθηται Πρότασις, ἢ τὸν κατὰ τὴν ΚΘ'. τῇ ζ'. διορισμὸν, ὃν ἡ ἐν τῷ Πορίσματι ὑπόθεσις βέλεται.

Β'. Δοθείσης τῆς $\alpha\beta$ καὶ τῷ Εὐθυγράμμῳ γ , διὰ τῆς ἐν χειρὶ Προτάσεως οἱ πάλαι τῶν Γεωμετρῶν τὰς $\alpha\lambda$, $\lambda\iota$, ὑφ' ὧν τὸ $\alpha\iota$ Ὀρθογώνιον τὸ ἴσον τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ γ περιέχεται, καὶ ὃ παρὰ τὴν δοθεῖσαν $\alpha\beta$ οὕτω παραβαλεῖν δεῖ, ὡς ὑπερβάλλειν εἶδει Τετραγώνῳ. Αἱ γε μὴν Πλευραὶ αὗται παρὰ τοῖς ὑπερὸν ἀναλυσταῖς (2) διὰ τῆς ἀναλύσεως τῶν κατὰ τὸ Β'. καὶ Γ'. εἶδος διατεθειμένων Τετραγωνικῶν ἐξισώσεων ἐξευρίσκονται. Ἐὰν γὰρ ἀντὶ τῆς Πλευρᾶς $\lambda\iota$ τεθῇ ϵ , ἔσαι $\mu\lambda = \epsilon^2$, καὶ $\alpha\mu = \epsilon \times \alpha\beta$. ὡς αἱ τετάρτῃ τὸ $\gamma = \epsilon^2 + \epsilon \times \alpha\beta$, ὃ τὸ τρίτον ἐστὶ τῶν Τετραγωνικῶν ἐξισώσεων εἶδος, καὶ ὃ διὰ τῆς παρήσης Προτάσεως ἐξευρίσκεται τὸ ϵ , τετάρτῃ ἢ $\beta\lambda$. ἦτοι ἢ $\lambda\iota$, παραβολῇ Ὀρθογωνίου τῷ δοθέντι Εὐθυγράμμῳ γ ἴσον παρὰ τὴν δοθεῖσαν Εὐθείαν $\alpha\beta$, καὶ ὑπερβάλλοντος Τετραγώνῳ. Εὐραθείας δὲ τῆς Πλευρᾶς $\lambda\iota$, ἦτοι ϵ , δῆλη ἅμα ἔσαι καὶ ἡ ἑτέρα Πλευρὰ $\alpha\lambda = \alpha\beta \times \epsilon$, ἣν οἱ νεώτεροι εὐρεῖν ἐπιτηδεύονται τῇ κατὰ τὸ Β'. εἶδος ἀναλύσει τῆς ἐξισώσεως.

(1) ΜΓ. τῇ α'. (2) Ὡς Οὐγγερίδης ἐν Κληθ' Κ'. 15. Ἀρσεν. Θ.

Καὶ τὸτο δὲ τὸ Β'. εἶδος τῶν διατεθειμένων Τετραγωνικῶν ἐξισώσεων, Γ'. εὐρεθεῖσων διὰ τὸ ἀνωτ. Πόρ. τῶν τῇ Ὀρθογωνίᾳ αὐ (τῷ Εὐθυγράμμῳ γ ἴσῃ, παρὰ τὴν δοθεῖσαν αβ παραβεβλημένα, καὶ ὑπερβαλλόντες εἶδει Τετραγώνῳ) Πλευρῶν αλ, λι, οὕτω κατασκευάζονται δύναται.

Ἀναγεγράφω δὴ (1) τὸ ἀπὸ τῆς αλ, εἴτ' ἐν τῇ ἰφ Τετράγωνον ἰφρ, οὗ ἂν μέρος εἴη τὸ Ὀρθογώνιον αὐ. Καὶ ἐπειδὴ αλ = ιρ, καὶ βλ = λι, ἔσαι (2) λρ = αβ. Ἐὰν οὖν ἀντὶ τῆς αλ τεθῇ α, ἔσαι τὸ φρ = α^Τ, καὶ αρ = α × αβ. Ἐνθεντοί αὐ, εἴτ' οὖν γ = (φρ — αρ =) α^Τ — α × αβ. Καὶ τὸτο τὸ τῶν Τετραγωνικῶν ἐξισώσεων Β'. εἶδος, ὃ δεῖ διὰ τῆ παρόντος Πορίσματος κατασκευάζειν.

Καὶ τῶν Νεωτέρων δὲ αἱ μέθοδοι (3) (ταῦτέσι $\sqrt{\frac{1}{2}} \alpha \beta^T + \gamma + \frac{1}{2} \alpha \beta = \Delta$, α, καὶ $\sqrt{\frac{1}{2}} \alpha \beta + \gamma - \frac{1}{2} \alpha \beta = \epsilon$), δι' ὧν ἕκ μὲν τῆς ἐξισώσεως α^Τ — α × αβ = γ εὐρίσκεται τὸ α, ἕκ δὲ τῆς ἐξισώσεως ε^Τ + ε × αβ = γ εὐρίσκεται τὸ ε, κατασκευῇ τῆς ἀνά χεῖρας Προτάσ. ἐπαχθῆναι δύνανται. Ἐπειδὴ γὰρ εβ = $\frac{1}{2} \alpha \beta$, ἔσαι εη = (4) $\frac{1}{2} \alpha \beta^T$, διὰ δὲ τὴν τῆς παρόντος κατασκευὴν κδ = εη + γ = $\frac{1}{2} \alpha \beta^T + \gamma$, καὶ τότε ἡ Πλευρὰ κι, εἴτ' οὖν ἡ ελ = $\sqrt{\frac{1}{2}} \alpha \beta^T + \gamma$, ἥπερ εἰν ἡ κε, ἡ γὰρ $\frac{1}{2} \alpha \beta$ προστεθῇ, ἔσαι αλ ἥτοι α = $\sqrt{\frac{1}{2}} \alpha \beta^T + \gamma + \frac{1}{2} \alpha \beta$. Ἐὰν οὖν ἀπὸ ελ = $\sqrt{\frac{1}{2}} \alpha \beta^T + \gamma$ ἀφαιρεθῇ εβ, ἥτοι $\frac{1}{2} \alpha \beta$, ὑπολειφθήσεται βλ, εἴτ' οὖν ε = $\sqrt{\frac{1}{2}} \alpha \beta^T + \gamma - \frac{1}{2} \alpha \beta$.

Ἐκ τούτων δὲ τῶν μεθόδων ἐφ' ἐκαστῇ τῇ ἐξισώσεως, εἴτε τῆς α^Τ — Ε'. α. 404. α × αβ = γ, εἴτε τῆς ε^Τ + ε × αβ = γ, δεθείσης τῆς Εὐθείας αβ, καὶ τῷ Εὐθυγράμμῳ γ, εὐχερέστερον ἐξευρίσκονται αἱ α καὶ ε, εἰν τῷ Εὐθυγράμμῳ γ Τετράγωνον ἴσον (5) κατασκευασθῇ, ἥπερ ἡ ἐντεῦθεν εὐρισκόμενη Πλευρὰ εἴη ν, ἥπερ ἀπὸ τῆ μεσαιτάτης τῆς Εὐθείας αβ Κάθετος ἀχθείη εξ, καὶ ἐπιζευχθείη ξβ, ἥ δὴπερ ἴση ἐπὶ τῆς εβ προσεβληθείσης ληφθείη ἡ ελ. ἔσαι γὰρ αλ = α, καὶ βλ = ε. Ἐπειδὴ γὰρ εξ^Τ = (6) γ, ἔσαι εβ^Τ + εξ^Τ = $\frac{1}{2} \alpha \beta^T + \gamma$ = (7) ξβ^Τ = ελ^Τ. Ὡς ελ (8) = $\sqrt{\frac{1}{2}} \alpha \beta^T + \gamma$, καὶ αλ = (9) $\frac{1}{2} \alpha \beta + \sqrt{\frac{1}{2}} \alpha \beta^T + \gamma = \alpha$, καὶ βλ = (10) $\sqrt{\frac{1}{2}} \alpha \beta^T + \gamma - \frac{1}{2} \alpha \beta = \epsilon$.

(1) Μς. τῷ α'. (2) Λξ. Γ. τῷ α'. (3) Ὁρα Οὐγγριδ. ἔσθα ἀνωτ. (4) Γ. Πόρ. τῆς Δ. τῷ β'. (5) ΙΔ. τῷ β'. (6) Εκ κατ. (7) ΜΓ. τῷ α'. (8) Δξ. μ'. (9) Δξ. β'. (10) Δξ. γ'.

Π ρ ό τ α σ ι ς Λ.

„Τὴν δοθεῖσαν Εὐθείαν (αβ) ἔγω τεμεῖν, ὡς εἶναι τὴν ὅλην αβ πρὸς
 „τὸ ἕτερον τῶν Τμημάτων αγ, ὡς τὸ αὐτὸ εἰς Τμήμα πρὸς τὸ λοιπὸν (γβ).
 „Τυτέσιν (ὡς οἱ Γεωμέτραι φατὶ) τὴν δοθεῖσαν Εὐθείαν πεπερασμένην
 „ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

κ. 405.

Εἰπὶ τῆς Εὐθείας αβ ἀναγραφῆτω Τετράγωνον τὸ αβτζ, καὶ παρὰ τὴν
 Εὐθείαν ζα, τῷ Τετραγώνῳ ζβ παραβληθῆτω (1) ἴσον Ὁρθογώνιον τὸ ζξι,
 ὑπερβάλλον εἶδει αλ τῷ ζβ ὁμοίῳ· τὸ γὰρ αλ Τετράγωνον εἶναι· Ἐπεὶ δὲ
 $\zeta\lambda = \zeta\beta$, κοινὰ ἀφαιρέσαντες τὰ ζγ, ἔσται $\alpha\lambda = \xi\beta$, διὰ δὲ τὰς Ὁρθὰς
 καὶ ἐπομένως ἴσας Γωνίας ὑπὸ ξγβ, αγλ (2), ἔσται $\xi\gamma : \gamma\lambda :: \alpha\gamma : \gamma\beta$.
 Ἀλλὰ (3) $\xi\gamma = \alpha\zeta = \alpha\beta$, καὶ $\gamma\lambda = \alpha\gamma$, ἄρα $\alpha\beta : \alpha\gamma :: \alpha\gamma : \gamma\beta$. Γέγονε
 τοῖνον τὸ ζητούμενον.

Α' λ λ ω ς.

κ. 406.

Διὰ τὴν ΙΑ'. τῇ Β'. ἔγω τέμνω τὴν αβ κατὰ τὸ γ, ὡς τὸ Ὁρθογώνιον
 τὸ ὑπὸ αβ, γβ, ἴσον εἶναι τῷ Τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ αγ· Οὕτω γὰρ ἔσται τε-
 τελεσμένον κτ.

Ἐσται γὰρ διὰ τὴν ΙΖ'. $\alpha\beta : \alpha\gamma :: \alpha\gamma : \gamma\beta$.

Τῆς δὲ τομῆς ταύτης θαυμασία ἡ δύναμις εἰς τὴν τῶν Κανονικῶν σχη-
 μάτων ἐγγραφὴν καὶ παράθεσιν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΑ.

κ. 407.

„Εἰν τοῖς Ὁρθογώνοις Τριγώνοις (αγβ), τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν Γωνίαν
 „ὑποτείνουσας Πλευρᾶς εἶδος (ζ) ἴσον εἰς τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν Γωνίαν πε-
 „ριεχουσῶν Πλευρῶν εἶδεσι, τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις (κ καὶ λ).
 „Ἡ κατὰ τὸ Α'. Βιβλίον ΜΖ'. ἐπὶ τῇ παρόντος καθολικεύεται.

Ἀπὸ τῆς ὀρθῆς Γωνίας γ καθεῖσθω Κάθετος ἡ γξ· ἐπεὶ δὲ αἱ τρεῖς
 αβ, βγ, βξ (4) ἀνάλογον εἰσιν, ἔσται ζ πρὸς τὸ αὐτῷ ὁμοιον κ, ὡς (5)
 αβ πρῶτη πρὸς βξ τρίτην. Πάλιν ἐπειδὴ (6) βα, αγ, αξ, τρεῖς ἀνάλογον
 εἰσιν, ἔσται ζ πρὸς τὸ αὐτῷ ὁμοιον λ, ὡς βα πρῶτη πρὸς αξ τρίτην· Ἐπεὶ
 τοῖνον ζ πρὸς κ ὡς αβ πρὸς βξ, καὶ ζ πρὸς λ ὡς αβ πρὸς αξ, ἔσται καὶ ζ πρὸς

(1) ΚΘ. τῷ ε'. (2) ΙΔ. τῷ ε'. (3) ΙΔ. τῷ α'. (4) Πόρ. Β. τῆς Η. τῷ ε'. (5)
 Β. Πόρ. τῆς Κ. τῷ ε'. (6) Β. Πόρ. τῆς Κ. τῷ ε'.

κ & λ ἅμα ληφθέντα, ὡς $\alpha\beta$ (1) πρὸς $\beta\zeta$ & $\alpha\zeta$ ἅμα ληφθείσαι. Ἀλλὰ μὴν ἢ $\alpha\beta$ ταῖς δυοσὶ $\beta\zeta$, $\alpha\zeta$ ἴση ἐστίν, ἄρα καὶ τὸ ζ τοῖς δυοσὶ κ καὶ λ ἴσον ἐστίν. Ο. Ε. Δ.

Π ο ρ ί σ μ α τ α .

Ἐκ ταύτης δὲ τῆς Προτάσεως & Σχημάτων ὁποσωνῶν & ὁποιωνῶν ὁμοίων πλήθει, ἐντι ληφθήσεται ἴσον τε & ὁμοιον παραπλησίᾳ μεθόσω τῇ κατὰ τὸ Α'. Πρόβλημα τὸ ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν ΜΖ'. τῷ Α', δι' ὃ ὁποσοισὺν Τετραγώνοις ἴσον ἐν ἀνεγράφετο, πλὴν ὅσον ἐν τῇ ἀποδείξει ἀντὶ τῆς ΜΖ'. τῷ Α'. ληπτέον τὴν ΛΑ'. τῷ ε'.

Τῷ δ' αὐτῷ λόγῳ, & διὰ τῷ Β'. Προβλήματος τῷ ἐν τῷ αὐτῷ ἐκείνῳ Σχολίῳ, δοθήσεται & ἡ τῶν ὁμοίων Σχημάτων ὁμοία ὅσα διαφορά· τε- τέστιν & μένον συνάπτεσθαι δύναται, ἀλλὰ & ἀφαιρεῖσθαι τὰ Σχήματα τὰ ὁμοία ἀπ' ἀλλήλων, ὅποια ποτ' ἂν ᾖ, τὸ ἔλαττον δηλονότι ἀπὸ τῷ μείζονος, καθάπερ ἐν τῷ εἰρημένῳ Σχολίῳ & τὰ Τετράγωνα ἀλλήλοισ τε συνάπτεται & ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρεῖται.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΑΒ.

Οὐδὲν ὑδὲ χρήσιμον ἐστίν ἐν αὐτῇ, ὑδὲ λόγος ἄξιον· Ὑπετέδη δὲ ὁμοιᾶς ἡμῖν ἀνωτέρω ἐν τῷ Η'. Πορίσματος τῶν μετὰ τὴν Κε'. Πρότασιν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΑΓ.

„Ἐν τοῖς ἴσοις Κύκλοις, ἡ τῷ αὐτῷ, αἱ Γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι, ὡς αἱ αβγ, ζηδ, εἴαντε πρὸς τοῖς Κέντροις (ὡς αἱ αβγ, ζηδ), εἴαντε πρὸς ταῖς Περιφερείαις (ὡς αἱ αργ, ζαδ) ὡς βεβηκεῖται· ἐτι δὲ & οἱ Τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς Κέντροις συνιστάμενοι.

Τὸ γὰρ περὶ τῶν πρὸς τοῖς Κέντροις Γωνιῶν, & δὴ & τὸ περὶ τῶν Τομέων παραπλησίῳ λόγῳ δευχθήσεται, ὥ καὶ πρὸς τῇ Α'. Προτάσει τῷ παρόντος· Βεβλήσιν εἰδείχθη τὰ τὸ αὐτὸ ἔχοντα ὕψος Τρίγωνον εἶναι πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ Βάσεις, εἰμὴ ὅτι ἀντὶ τῆς ἐκείσε ληφθείσης ΛΗ'. Προτάσει τῷ Δ'. Βεβλήσιν ληπτέον ἐνταῦθα τὴν ΚΘ'. τῷ Γ', καὶ ἀντὶ δὲ τῷ ε' ἐκείσε τῷ ἐπὶ τῆς κορυφῆς τῷ Τρίγωνον δεξ, δετέον ἐνταῦθα ξ, ὅπερ ἡ κατὰ κορυφὴν Γωνία ἐπίσημα μάλιστα τῆς τε Γωνίας & τῷ Τομέως δεξ, ἀντὶ δὲ τῶν ἐν ἐκείνοις Τρίγωνων.

(1) ΚΔ. τῷ ε'.

ληφθήτωσαν ὥδε αἱ πρὸς τοῖς Κέντροις β ἔξ Γωνίαι, καὶ δὴ καὶ οἱ Τομεῖς, καὶ τελευταῖον αὐτὴ τῶν ἐν ἐκείνοις Βάσεων, ὥδε αἱ Περιφέρειαι.

Ὅσάκις γὰρ μῦριον ὁποιοῦν τρίτημόριον φέρε τὸ δι, τῆς Περιφέρειας δζ, περιέχεται ἐν τῇ Περιφερείᾳ αγ, τοσάκις τὸ ὅμοιον μῦριον, οἷον τὸ ὑπὸ δξη, τῆς ὑπὸ δξζ Γωνίας ἔσαι περιεχόμενον ἐν τῇ Γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αβγ. Διήλουν δὲ ὅτι καὶ ὁποιοῦν ποτε ἕτερον μῦριον τῆς Περιφέρειας δζ, καὶ τῆς Γωνίας ὑπὸ δξζ, ἐν τῇ Περιφερείᾳ αγ, καὶ τῇ Γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αβγ ἰσαριθμῶς αἰεὶ περιέχεται. Κατὰ ἄρα τὸ γινώσκον τῶν ἰσῶν λόγων τὸ παρὰ Ταπουετίῳ, ἔσαι ἡ ὑπὸ αβγ Γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ δξζ Γωνίαν, ὡς ἡ Περιφέρεια αγ πρὸς τὴν Περιφέρειαν δζ. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δεῖχθήσεται καὶ τὸν Τομεα αβγ εἶναι πρὸς τὸν Τομέα δξζ, ὡς ἡ Περιφέρεια αγ πρὸς τὴν Περιφέρειαν δζ.

Εἰπεὶ δὲ αἱ πρὸς τῇ Περιφερείᾳ Γωνίαι ρ καὶ σ ἡμίσειαι (1) εἰσὶ τῶν πρὸς τῷ Κέντρῳ Γωνιῶν ὑπὸ αβγ, ζξδ, τὸ περὶ τούτων δεδειγμένον καὶ περὶ ἐκείνων ἔσαι.

Π ο ρ ῖ σ μ α τ α.

κ. 409. Α'. Η' πρὸς τῷ Κέντρῳ Γωνία ὑπὸ βαγ ἐστὶ πρὸς τὰς τέσσαρας Ὄρθας, ὡς ἡ Περιφέρεια βγ ἐφ' ἣ βέβηκε, πρὸς τὴν ὅλην Περιφέρειαν.

Εἰπεὶ γὰρ τὰς τέσσαρας Ὄρθας, τετέσι (2) πάσας τὰς περὶ τὸ αὐτὸ Κέντρον α Γωνίας καταμετρεῖ ὅλη ἡ τῷ Κύκλῳ Περιφέρεια, τὴν μίαν ἄρα ὀρθὴν Γωνίαν, ἥτοι τὴν ὑπὸ βαζ, καταμετρήσει τῆς ὅλης Περιφέρειας τὸ τεταρτημόριον βζ. Ἀλλὰ γὰρ ὡς ἔχει ἡ ὑπὸ βαγ Γωνία πρὸς τὴν Ὄρθὴν ὑπὸ βαζ, ὅτω (διὰ ταύτην τὴν ΛΓ') καὶ ἡ Περιφέρεια βγ πρὸς τὸ τεταρτημόριον βζ, ἄρα (3) ἡ ὑπὸ βαγ ἐστὶ πρὸς τὰς τέσσαρας Ὄρθας, ὡς τὸ τόξον βγ ἐστὶ πρὸς τὰ τέτταρα τεταρτημόρια, τετέσι πρὸς τὴν ὅλην Περιφέρειαν.

κ. 410. Β'. Τῶν ἀνίσων Κύκλων αἱ Περιφέρειαι ιλ, βγ, αἱ ἰσας ὑποτείνεσθαι τὰς Γωνίας, εἴτε τὰς πρὸς τῷ Κέντρῳ, εἴαι αἱ ὑπὸ ιαλ καὶ βαγ, εἴτε τὰς πρὸς τῇ Περιφερείᾳ ὅμοιαι εἰσὶ καὶ ἀνάπαλιν.

Πρῶτον γὰρ κειθώσαν αἱ ἰσαι Γωνίαι πρὸς τοῖς Κέντροις καὶ ἡ Περιφέρεια ιλ ἐστὶ πρὸς τὴν ἰδίαν ὅλην Περιφέρειαν, ὡς (4) ἡ ὑπὸ ιαλ Γωνία, τετέσιν ἡ ὑπὸ βαγ πρὸς τέτταρας Ὄρθας· ἥτε Περιφέρεια βγ ἐστὶ πρὸς τὴν ἰδίαν αὐτῆς ὅλην Περιφέρειαν (5), ὡς ἡ αὐτὴ Γωνία ἡ ὑπὸ βαγ πρὸς τέτταρας

(1) Κ. τῷ γ'. (2) Διὰ τὸ Γ'. Πόρ. τῆς ΙΓ. τῷ δ. μετὰ τῷ Σχολ. τῆς ΚΓ. τῷ δ.
(3) ΚΔ. τῷ ε'. (4) Διὰ τὸ Α'. Πόρ. (5) Διὰ τὸ Α'. Πόρ.

Ορθάς· Ἄρα ἡ ιλ (1) ἐστὶ πρὸς τὴν ἰδίαν ὅλην Περιφέρειαν, ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν ἰδίαν, καὶ ἐπομένως (2) αἱ Περιφέρειαι ιλ καὶ βγ ὅμοιαι εἰσὶ.

Εἰν δὲ αἱ ἴσαι Γωνίαι ξ καὶ κ πρὸς ταῖς Περιφερείαις ὥσι, καὶ ὥσαν δὴ ἐπὶ τῶν αὐτῶν Περιφερειῶν βεβηκεῖται, καὶ Γωνίαι πρὸς τοῖς κέντροις ἦσαι αἱ ὑπὸ ιαλ, βαγ, καὶ (3) ἔσονται καὶ αὗται ἴσαι. Ὅθεν (διὰ τὸ Α'. μέρος) τὰ τόξα, τετέστιν αἱ Περιφέρειαι ιλ καὶ βγ ὅμοιαι εἰσὶ.

Καὶ ἀνάπαλιν. Τῶν ἀνίσων Κύκλων αἱ ὅμοιαι Περιφέρειαι βγ καὶ ιλ ὑποτείνουσι Γωνίας ἴσας, καὶ πρὸς τοῖς Κέντροις αὗται ὥσι, καὶ πρὸς ταῖς Περιφερείαις· Ὡς ἐξ αὐτῶν δὴ τὸ Σχήματος, καὶ τῆς Κ'. τῷ Γ'. Βιβλίῳ κατάδηλον ἐστὶ.

Ἡμιδιάμετροι δύο αβ καὶ αγ, ἀπὸ τῶν ὁμοκέντρων Περιφερειῶν τόξα α- γ. πολλαπλανῶσιν ὁμοια τὰ ιλ, βγ. Τῷ θ' ὅπερ εὐδὴλον ἐστὶν ἐκ τῷ Β'. Πόρισματος.

Ἡγμένων τῶν Εὐθειῶν βγ, ιλ, τὰ Τμήματα βγκ, ιξλ, α' δεκτικά δ. κ. 412. ἴσων ἐστὶ Γωνιῶν τῶν κ, ξ, ὁμοια ἐστὶ· καὶ ἀνάπαλιν.

Διὰ γὰρ τὸ Β'. Πόρισμα, αἱ Περιφέρειαι βγ, ιλ, καὶ ἐπομένως καὶ αἱ βγκ καὶ ιξλ ὁμοια εἰσὶ. Ἄρα (4) καὶ τὰ Τμήματα βγκ, ιξλ ὁμοια ἐστὶ.

Εἴτι καὶ τὰ ἀπεναντίον Τμήματα, διὰ τὰς βγ καὶ ιλ ὁμοίας Περιφερείας, καὶ αὐτὰ ὁμοια ἐστὶ.

Ἀνάπαλιν δὲ, τὰ ὁμοια Τμήματα βγκ, ιξλ, δεκτικά ἐστὶ Γωνιῶν ἴσων τῶν κ καὶ ξ. Διὰ γὰρ (5) τὰς ὁμοίας Περιφερείας βγκ, ιξλ, αἱ ἀπεναντίον Περιφέρειαι βγ, ιλ ὁμοια ἔσονται, αἵτε Γωνίαι κ καὶ ξ αἱ ἐπ' αὐταῖς βεβηκεῖται ταῖς Περιφερείαις (6) ἀλλήλαις ἴσαι.

Εἴτι αἱ ἐν τοῖς Τμήμασι βγ, ιλ Γωνίαι, τῶν ἴσων Γωνιῶν κ καὶ ξ (7) παραπληρώματα ἐστὶ πρὸς δύο Ὄρθας, καὶ διὰ τῆτο ἴσαι.

Τὰ ὁμοια Τμήματα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Εὐθείας, ἢ τῶν ἴσων, ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶ. Δὴλον ἐκ τῷ ἀνωτ. Πόρισματος, καὶ ἐκ τῷ Σχολίῳ τῆς ΚΑ'. τῷ Γ'. καὶ ἐκ τῷ Ζ'. Ἀξιῶμ. τῷ Α'. Βιβλίῳ· Περιέχει δὲ τετὶ τὸ Πόρισμα τὰς Προτάσεις, τήν τε ΚΓ'. καὶ ΚΔ'. τῷ Γ'. Βιβλίῳ, ὅς ὁ μὲν Τακτικὸς παρῆλπεν, αὐτοὶ δὲ ἀνειλήμμεθα· Ἡ γὰρ τοι ἐν ἐκείνοις ΚΓ'. ὥτως ἐκφέρεσθαι, εἶωθεν. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς Εὐθείας δύο Τμήματα Κύκλου ὁμοια καὶ ἄνισα οὐ συζυγίζονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· Ἡ δὲ ΚΔ'. ὥτω· „Τὰ ἐπὶ ἴσων Εὐθειῶν ὁμοια Τμήματα Κύκλων ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ.

(1) Διὰ τὴν ΙΑ. τῷ ε'. (2) Ὅρ. Δ. τῷ ε'. (3) Διὰ τὴν Κ. τῷ γ'. καὶ τὸ ε'. Δ' ε. τῷ κ'. (4) Δ. Ὅρισμ. Βιβλ. ε'. (5) Ὅρ. Δ. τῷ ε'. (6) Β. Πόρ. τῶν ἀνωτ. (7) ΚΒ. τῷ γ'.

ς. Ἐκ ταύτης δ' ἐστὶ τῆς Προτάσ. ἡ τῶν ἐξ αὐτῆς Πορισμάτων, ἥδε αὖτε λαμβάνεται τὰ τῆς πράξεως τῷ συνισθῆναι, ἡ καταμετρεῖν τὰς Γωνίας, ὅπερ ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν ΚΓ'. τῷ Α'. Βιβλίῳ πλατύτερον ἀνεπτύχθη.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν .

Ἐνταῦθα δὲ γενομένους, τὸ ἐν τῷ Δ'. Βιβλίῳ ἡμῖν ὑποχρεθὲν ἀποτι-
τεόν· ἐπηγγέλλετο γὰρ ἐν ἐκείνοις ἡ τῆς Γ. Προτάσεως τῷ ΙΓ'. τῶν σοι-
χίων ἀπόδειξις. Ἐχει γὰρ τὸ θεώρημα ὕτω.

„Εἴαν εἰς Κύκλον Πεντάγωνον ἰσοπλευρον ἐγγραφεῖ (τὸ αβγδα), ἡ τῷ
„Πενταγώνῳ Πλευρὰ (αβ) δύναται τῇ τε τῷ Ἑξαγώνῳ, ἡ τῇ τῷ Δεκαγώνῳ,
„τῶν εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγραφομένων.

κ. 413.

Ἀχθεῖσθαι γὰρ τῆς Διαμέτρου αη, ἡ τῆς Ἡμιδιαμέτρου ζβ, ἀπὸ τῷ Κέν-
τρῳ ζ ἀχθῆτω Κάθετος πρὸς αβ ἡ ζθ, ἥτις προεκβληθεῖσα προσπιπτε-
τῷ τῇ τῷ Κύκλῳ Περιφερείᾳ κατὰ τὸ κ. Αὕτη δὲ ἡ τὸ τόξον ακβ (τετέσι (1)
τὸ πεμπτημέριον τῆς ὅλης Περιφερείας) δίχα τεμεῖ (2) κατὰ τὸ κ'. Ἐπιζευχ-
θῆτωσαν αἱ βκ, κα, ἡ ἐπειδὴ ακ τῆς ὅλης Περιφερείας δεκατημέριον ἐστίν,
ἔσαι ἡ ακ Εὐθεῖα (3) πλευρὰ τῷ Δεκαγώνῳ τῷ κανονικῷ (τετέσι τῷ ἰσο-
πλεύρῳ τε καὶ ἰσογωνίῳ) τῷ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγράφεσθαι δυναμένῳ. Ἀπὸ
γὰρ τῷ Κέντρῳ ζ Κάθετος ἀχθῆτω ἐπὶ τὴν ακ ἡ ζν, ἥτις προεκβαλλομένη
προσπιπτετῷ τῇ Περιφερείᾳ τῷ Κύκλῳ κατὰ τὸ μ. Αὕτη δὲ τὸ τόξον ακμ
δίχα τέμνεται ἔσαι κατὰ τὸ μ, ἡ τεμεῖ δὲ ἡ τὴν τῷ Πενταγώνῳ Πλευρὰν
βα κατὰ τὸ λ'. Ἐπιζευχθῆτω ἡ κλ' διὰ γὰρ τὰς Ἡμιπεριφερείας αβη ἡ
αση, αἱ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ μὴν ἡ διὰ τὰ τόξα αβγ, αεδ τὰ ἀλλήλοισ
ἡ αὐτὰ ἴσα, ἔσαι τὸ τόξον γη τῷ τόξῳ γηδ ἡμίσεια, ἡ γὰρ καὶ τῷ ακβ.
Ἐνθεντοὶ Τόξ: γη = Τόξ: ακ = 2 Τόξ: κμ· ὁμοίως δὲ ἡ Τόξ: γβ = Τόξ:
αβ = 2 Τόξ: βκ· Ἀρα γη + γβ τὰ συναμφοτέρω Τόξα = 2 Τόξ: κμ +
2 Τόξ: βκ, τετέσι τὸ Τόξον βγη = 2 Τόξ: βκμ· ὥστε ἡ Γωνία ἡ ὑπὸ βζη
= (4) 2 Γωνίαι βζμ. Ἀλλὰ γὰρ ἐπὶ τῷ Τριγώνῳ αβζ, ἡ ἐκτὸς Γωνία ἡ ὑπὸ
βζη = (5) ταῖς ὑπὸ αβζ ἡ βαζ ἀμὰ ληφθεῖσαι, τετέσι (διὰ τὰς αζ ἡ βζ ἴ-
σας ἥσας) (6) = 2 Γων: αβζ = 2 Γων: βαζ, ἥτοι (διὰ τὰ ἀνωτ.) = 2 Γω-
νίαις βζμ, ἡ λζβ· ἐν ἄρα τοῖς Τριγώνοις λζβ, ζαβ, διὰ τὰς ὑπὸ βζλ ἡ
βαζ ἴσας ἥσας, ἡ τὴν πρὸς τῷ β κοινὴν, ἔσαι δὲ (7) ἡ ἡ ὑπὸ βλζ = βζα.

(1) Κς. τῷ γ'. (2) Α. τῷ γ'. (3) ΚΖ. τῷ γ'. (4) ΑΓ. τῷ ε'. (5) ΑΒ. τῷ α'.
(6) Ε. τῷ α'. (7) Θ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'.

καὶ ἐπομένως (1) $\alpha\beta : \beta\zeta :: \zeta\beta : \beta\lambda$. ταύτητοι (2) καὶ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ $\alpha\beta\lambda = \beta\zeta\tau$. Ἦδη οὖν ἐπὶ τῶν Τριγώνων $\alpha\lambda\nu$, $\kappa\lambda\nu$, διὰ τὰς πρὸς τῷ ν Ὀρθῆς, ἢ τὰς $\alpha\nu$, $\nu\kappa$ (3) ἴσας ἔσας, ἢ διὰ τὴν $\lambda\nu$ κοινὴν τυγχάνουσιν, ἔστιν (4) $\alpha\lambda = \lambda\kappa$, ἢ ἡ ὑπὸ $\lambda\alpha\kappa = \alpha\kappa\lambda$, ἄρα ἐπὶ τῶν Τριγώνων $\beta\alpha\kappa$, $\kappa\alpha\lambda$, διὰ τε τὴν πρὸς τῷ α κοινὴν, ἢ τὰς ὑπὸ $\alpha\beta\kappa$ ἢ $\alpha\kappa\lambda$ ἴσας ἔσας, ἔσται (5) ἢ ἡ ὑπὸ $\alpha\kappa\beta = \alpha\lambda\kappa$, καὶ τὰ Τρίγωνα $\beta\alpha\kappa$, $\kappa\alpha\lambda$ ἔσται ὅμοια. Ὅθεν $\beta\alpha : \alpha\kappa : \kappa\alpha : \alpha\lambda$, καὶ Ὀρθογώνιον τὸ $\beta\alpha\lambda = \alpha\kappa\tau$. Ἀλλ' Ὀρθογών. $\alpha\beta\lambda +$ Ὀρθογών. $\beta\alpha\lambda =$ (6) $\alpha\beta\tau$, ἄρα $\alpha\beta\tau = \beta\zeta\tau + \alpha\kappa\tau$. Ἀλλὰ $\beta\zeta$ τῷ Κύκλῳ Ἡμιδιάμετρος ἐστὶ, ἢ ἐπομένως (7) Πλευρὰ τῆ κανονικῆς Ἑξαγώνου τῆ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένη, ἢ τε $\alpha\kappa$ Πλευρὰ τῆ κανονικῆς Δεκαγώνου τῆ εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένη. Ἄρα τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς τῆ Πενταγώνου τῆ κανονικῆς, ἴσον τοῖς Τετραγώνοις, τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς τῆ κανονικῆς Ἑξαγώνου, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς τῆ Δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγράφεισθαι νομμένων, ἅμα ληφθεῖσιν. Ο. Ε. Δ.

Τῶν χοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

BIBLION IB'.

Ἡμῖν δὲ Ζ.

Τοῖς ἐξ προεκτεθεισῶν Βιβλίοις τρία ἔτι τὰ χοιχεῖα τῶν Ἀριθμῶν περιέχοντα, τὸ Ζ', ἢ Η', ἢ Θ', ὃ Εὐκλείδης παρασυνάπτει, προσιδεῖς ἢ Ι'. ἐν ᾧ περὶ τῶν ἀσυμμέτρων αὐτῷ πλημοτήτων γίνεται λόγος. Αὐτοὶ δὲ ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων ἀμέσως ἐπὶ τὰ στερεὰ μεταβαίνουσι, τὴν περὶ Ἀριθμῶν ἐν μέτρῳ ἐνσησάμενοι πραγματεῖαν· ἵνα καὶ ταῖς μαθητιώσιν φήδηται εὐχερὲς εἶναι ἅτω τὴν τάξιν εἰσεῖναι τῆς διδασκαλίας, εἰ μὴ οὐκ αὐτοῖς τὰ πρὸς τὴν τῶν Γεωμετρικῶν προεξεστη χοιχείωσιν, μὴ ὑφ' ἑτέρας μεταξὺ θεωρίας τῆς ἐκεί-

(1) Α. τῷ ζ. (2) ΙΖ. τῷ ζ. (3) Γ. τῷ γ. (4) Δ. τῷ δ. (5) Θ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α. (6) Β. τῷ β. (7) Δ. Πόρ. τῆς ΙΕ. τῷ δ.

νων εισηγήσεως διακοπτομένης. Τὰς μέντοι ἐν τῷ παρόντι καὶ τῷ ἑφεξῆς Βιβλίῳ Προτάσεις ἀνακαλήμενοι, ἔχ' ἑβδομον ἔδε ὄγδον τὰ Βιβλία ἐπιγραφόμεθα, ἐνδέκατον δὲ καὶ δωδέκατον, ὡς ἂν μή τις σύγχυσις ἐπακολουθεῖ ἐν ταῖς τῶν Προτάσεων ἀνακλήσεσι, τῆς κατ' Εὐκλείδην (συνήθως ἡδὲ κατὰ τῆς ἀπασί) τάξεως ἡμῖν διασπρεφομένης.

Διμερές δὲ πως ἐστὶ τὸ παρὸν Βιβλίον· ἐν αὐτῷ γὰρ πρὸ πάντων οἱ πρῶτοι οἰοεὶ θεμέλιοι προκαταβάλλονται, οἷς ἅπαντα ἡ περὶ τῶν Στερεῶν, τετέσι τῶν Σωμάτων ἐφύδρασαι διδασκαλία, μετὰ ταῦτα δὲ ὡς ἐν μέρει Β'. τῶν Παραλλήλεπιπέδων τὰ πάθη προτίθενται.

Τὰς γὰρ πρωτίστας τῶν στερεῶν ἀρχὰς ἡ ΙΑ'. τῶν κοιχείων ὑποτίθῃσι Βίβλος, ὧν ἄνευ τὰ πάθη τῶν Σωμάτων ἀγνοῦντας, τινάλλως μοχθεῖν εἰκὸς περὶ πολλὰ τῶν μαθηματικῶν πραγματειῶν εἶδη. Τὰ τε γὰρ κατὰ τὸν Θεοδόσιον Σφαιρικά, καὶ τὰ τῆς σφαιρικῆς ὡσαύτως Τριγωνομετρίας, ναιμὴν καὶ τῆς πρακτικῆς Γεωμετρίας τὰ πλείστα, καὶ τὰ τῆς Στατικῆς, καὶ τὰ τῆς Γεωγραφίας, τῇ θεωρίᾳ τῶν στερεῶν ἐπερὶδεται, καὶ ὅσα δὲ μικρὸν ἀπαντᾷ δυσχερέστερα, ἔντε τοῖς Γνωμμωνικοῖς καὶ ταῖς τῷ Κώνῃ τομαῖς, καὶ τοῖς Ἀστρονομικοῖς, καὶ Διοπτρικοῖς, καὶ Ὀπτικοῖς, τῶν κατὰ τὰ στερεὰ ἀρχῶν ἀκριβῶς νομμένων, ῥαδίῳ καθίσταται καὶ μᾶλλον εὐξύνετα. Ὡς οἱ ἐν τῷ πραγματευομένοι περὶ τῶν Γεωμετρικῶν κοιχείων τὸ ἀνά χειρὸς καὶ τὸ μετ' αὐτὸ Βιβλίον παρατρέχοντες, κολοβὴν καὶ πάντῃ ἀτελὴ τῆς Γεωμετρίας δῆλοι εἰσι ποιοῦμενοι τὴν εἰσηγήσιν.

Ὁ ρ ι σ μ ο ι.

- Α'. Στερεὸν ἐστὶ τὸ μήκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον.
- Β'. Στερεὸν δὲ πέρας ἐπιφάνεια.
- κ. 414. Γ'. Εὐθεία (αβ) πρὸς ἐπίπεδον (γγ) ὀρθὴ ἐστὶ (τετέσι Κάθετος), ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς Εὐθείας (γα), καὶ ἔσται ἐν τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ (γγ) πρὸς ὀρθὰς (ὑπὸ βαγ, βαγ) ἡ.
- κ. 415. Δ'. Εἰς ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν (τετέσι Κάθετον) ἐστὶν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι (λπ) Εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων, τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι.
- κ. 416. Ε'. Εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστὶν, ὅταν ἀπὸ τῷ μετωρῳ πέρατος τῆς Εὐθείας (λ) ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Κάθετος ἀχθῇ ἡ λξ, καὶ ἀπὸ τῷ γενομένῳ σημείῳ ξ, καὶ ἀπὸ τῷ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρατος ζ τῆς Εὐθείας λξ, Εὐθεῖα ἐπι-

Ζευχθῆ ἢ ΕΞ, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα Γωνία ὑπὸ ΛΞ, ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ τῆς ἐφεσώσης, ταῦται ἢ ὑπὸ ΕΞΛ.

Ἐπίπεδα (ρε) πρὸς ἐπίπεδον λπ κλίσις ἐστίν, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα Γωνία (αβγ) ὑπὸ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ (ξε) ἀγομένων (αβ καὶ γβ) πρὸς τῷ αὐτῷ Σημείῳ (β) ἐν ἐκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων.

Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλῖσθαι λέγεται, καὶ ἕτερον πρὸς Ζ'. ἕτερον, ὅταν αἱ εἰρημέναι τῶν κλίσεων Γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾖσι.

Παραπλησίως δὲ, Εὐθεῖα πρὸς ἐπίπεδον, καὶ ἕτερα πρὸς ἕτερον, ἢ τὸ αὐτὸ, εἰάν αἱ εἰρημέναι (ἐν τῷ Ε'. Ὁρίσ.) τῶν κλίσεων Γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾖσι.

Παραλλήλα ἐπίπεδα ἐστὶ τὰ, ὅσον ἂν καὶ προαχθεῖν, ἴσοις ᾖσι ποτε Η'. ἀπ' ἀλλήλων ἀφεσώτα τοῖς διαστήματι.

Η" (ὡς Εὐκλείδ. ὥριστο) τὰ ἀσύμπτωτα.

Ὅμοια στερεὰ Σχήματα (εὐθύγραμμα) ἐστὶ, τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων Θ'. περιεχόμενα ἴσων τὸ πλήθος.

Στερεὰ γωνία ἐστίν ἡ ὑπὸ πλειόνων, ἢ δύο ἐπιπέδων Γωνιῶν (βαγ, γ. κ. 418. γαξ, βαξ) περιεχομένη, μὴ ἔσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, πρὸς ἐνὶ Σημείῳ συνισαμένων.

Ἰσαὶ δὲ Γωνίαι στερεαὶ εἰσὶν αἱ (ἢν ἐν ἀλλήλοις ἐντεθῶσιν) ἐφαρμόζεσθαι. ΙΔ.

Καθάπερ γὰρ Γωνία ἐπίπεδος ἐστὶ ἡ τῶν Γραμμῶν κλίσις, οὕτως οἱ στερεαὶ ἐστὶ Γωνία ἡ τῶν Γωνιῶν κλίσις τῶν ἐπιπέδων. Καὶ περὶ ἀμφοῖν τοίνυν ἐπίσης συλλογιστέον. Ὅρα τὸ Σχολ. τὸ μετὰ τὴν Ιζ'. τῇ Γ'.

Πρίσμα ἐστὶ Σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο τὰ ἀπὸ ΙΒ. κ. 419.ναντίον ΕΞε, αβγ παραλλήλα τε ἐστὶ, καὶ ἴσα, καὶ ὅμοια.

Παραλληλεπίπεδον ἐστὶ Σχῆμα στερεόν, ὑπὸ Τετραπλευρῶν ἀπεναν. ΙΓ'. κ. 420.τίον παραλλήλων περιεχόμενον.

Εἰάν ὑπὸ δύο ἐπιπέδων ἀπεναντίον παραλλήλων Τετραγώνων τὸ στερεὸν ΙΔ'. ἢ περιεχόμενον, Κύβος ἐστὶ.

Ἰσατε καὶ ὅμοια στερεὰ Σχήματα ἐστὶ, τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει.

Τῆτον δὲ τὸν Ὁρισμὸν, ὃς δέκατος ἐστὶ τὸν ἀριθμὸν παρ' Εὐκλείδει παρελελείπει μὴ καλῶς ποιήσας ὁ Τακτέτιος, καὶ διὰ τῆτο μὴ πάντοτε ἀκριβῶς τὰς ἀποδείξεις τῆς ΚΕ'. καὶ ΚΗ'. τῶν προτάσεων ἀποδεδωκώς.

Π ρ ό τ α σ ι ς Α.

- κ. 421. „Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέντι (τὸ αγ) ἢ ἐσιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ
 „ἐπιπέδῳ (ξε), μέρος δέτι (γβ) ἐν τῷ μετεώρῳ.
 Ἐς καὶ αὐτὸ τὸ λεγόμενον ἐκφανές, ἐνόησας τι δὴ ποτε ἐσιν ἐπι-
 πεδον, καὶ τὴ εὐθεῖα Γραμμῇ. Ὅρα Ὅρισμ. Ζ. καὶ Δ. τῇ Α. Βιβλίῳ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Β.

- „Πᾶν Τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἐσιν ἐπιπέδῳ. Καὶ δύο Εὐθεῖαι τέμνησαι ἀλ-
 „λήλας ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ.
 κ. 422. Τὸ Α. μέρος καὶ αὐτὸ δῆλον, ἂν γὰρ ἄλλο τὸ Τρίγωνον, ἢ ἐπί-
 πεδος Εἰπιφάνεια ὑπὸ τριῶν Εὐθειῶν περιεχομένη. Καντεῦθεν δὲ καὶ ἐκ τῆς
 ἄνωτ. Προτ. εὐδῆλον καὶ τὸ Β’.

Π ρ ό τ α σ ι ς Γ.

- κ. 423. „Εἰ δὲ δύο ἐπίπεδα (αβ, γδ) τέμνηται ἀλλήλας, ἡ (εζ) κοινὴ αὐτῶν το-
 „μὴ Εὐθεῖα ἐστίν.
 Φανερόν ἐκ τῆ ὁρισμῶ τῇ ἐπιπέδῳ. Ἐςιν ἄλλ’ οὖν καὶ ὅτω δεικνύσαν-
 εἰ μὴ γὰρ Εὐθεῖα ἡ κοινὴ τομὴ εζ, ἀγέσθω ἐπὶ τῇ ἐπιπέδῳ γδ Εὐθεῖα
 επζ, ἐπὶ δὲ τῇ αβ Εὐθεῖα εξζ. καὶ αἱ δύο τοῖνον εξζ, επζ Εὐθεῖαι πε-
 ριέξουσιν χωρίον, ὅπερ ἄτοπον.

Π ρ ό τ α σ ι ς Δ.

- κ. 424. „Εἰ δὲ Εὐθεῖα (βα) δύο Εὐθείαις (γαχ, ζασ) τεμνέσθαι ἀλλήλας,
 „πρὸς ὁρθὰς ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι’ αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς
 „ὁρθὰς ἐσται.

Ἀλλ’ εἰμὴ, ἑτέρας αἶρα Εὐθεῖα ἡ βπ τῷ διὰ τῶν Εὐθειῶν χαγ, σαζ
 πρὸς ὁρθὰς ἐφιστάθω, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ απ, καὶ ταύτη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ζαγ ἀ-
 γέσθω κάθετος ἡ ξπ, ἡ δὲ πρὸς ἐκβληθεῖσα ἐξ ἀνάγκης τεμεῖ τινὰ τῶν Εὐ-
 θειῶν γαχ, ζασ, ἢ ἑκατέραν, ὅπῃ ποτ’ ἂν ἡ τέως τὸ Σημεῖον π. Εἰ δὲ γὰρ
 ἡ Εὐθεῖα πξ τῇ ἑτέρᾳ τῶν Εὐθειῶν, οἷον τῇ ζασ παρὰ ἄλλῃς ἢ, ἡ πξ τὴν
 ἑτέραν (1) τεμεῖ γαχ· εἰ δὲ ἄδωτέρᾳ παρὰ ἄλλῃς ἢ, τεμεῖ (2) ἑκατέραν. Τε-

(1) Β. Πόρ. τῇ Σχολ. τῇ μετὰ τὴν ΔΑ. τῇ α’. (2) Α. Πόρισμα ἢ Σχολ. μετὰ τὴν
 ΔΑ. τῇ α’.

μέντω τοῖσιν τὴν γωνίαν κατὰ τὸ ξ, ἐπιζευχθήτω ἡ βξ· ἐπεὶ δὲ ἡ ὑπὸ
βαξ γωνία (ἐξ ὑποθ.) ὀρθή ᾖσα ἐστὶ,

Ἔσται Τετράγ. βξ = (1) Τετραγ. βα }
Τετραγ. αξ }

Α'λλ' ἐπεὶ δὲ ἡ βπ ὀρθή τίθεται ἐπὶ τῷ ἐπιπέδῳ ζαγ, ἐπομένως (2)
Ὁρθὴν συνίστησι μετὰ τῆς απ τὴν ὑπὸ βπα,

Ἔσιν ἄρα Τετράγ. βα = (3) Τετραγ. βπ }
Τετραγ. απ }

Ἐπὶ δὲ ἐπὶ ὑπὸ απξ ἐκ κατασκ. Ὁρθή ᾖσα ἐστὶ.

Τετράγ. αξ = (4) Τετραγ. ξπ }
Τετραγ. απ }

Ἀρα Τετράγ. βξ = Τετραγ. βπ }
Τετραγ. ξπ }
Τετραγ. απ }

Ἀρα Τετράγ. βξ μῖζον ἐστὶ τῶν Τετραγ. βπ καὶ ξπ, ἐπομένως
(5) ἡ ὑπὸ βπξ ἐκ ἑσιν Ὁρθή. Οὐκ ἄρα ἡ βπ ὀρθή ἐσιν (6) ἐπὶ τῷ ἐ-
πιπέδῳ γαζ· ὥςτε δὴλον τὸ προτεθέν.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Ἐκ τῷ τεθέντος ὡς ἡ βπ ὀρθή ἐσιν ἐπὶ τῷ ἐπιπέδῳ ζαγ, ὀρθῶς
ἐδείχθη τὴν βπ μὴ εἶναι ὀρθὴν ἐπὶ τῷ ἐπιπέδῳ τέτα. Ἐνθεντοὶ καὶ τῇ ἀ-
ποφάνει τῷ θεωρήματος, ἡ τῷ θεωρήματος αὐτῷ ἀλήθεια κατ' ὀρθὴν
δείξιν κατασκευάσθη. Ἡ δὲδείξις αὕτη κατὰ γὰρ τὸ ὑσιῶδες Ἰωάννου Κλερ-
μαντίου ἐστὶ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ε.

„Ἐὰν Εὐθεῖα (αρ) τρισὶν Εὐθείαις (βα, γα, ζα) ἀπτομέναις ἀλλή-
λων, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς (τῷ Σημεῖοι δηλ. α) ἐπισαθῇ, αἱ
τρεῖς Εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Ἐστω γὰρ εἰ δυνατόν, ἡ μία τούτων βα ἐν ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ ρξ, τῷ
τέμνοντι τὸ λα ἐπίπεδον, ἐν ᾧ αἱ λοιπαὶ δύο γα, ζα, Εὐθεῖαι τῇ αξ· Ε- κ. 425.

(1) MZ. τῷ α'. (2) Ο'ρ. Γ. τῷ ια'. (3) Διὰ τὴν MZ. τῷ α'. (4) MZ. τῷ α'. (5)
Δ. Πόρ. τῆς MZ. τῷ α'. (6) Δῆλον ἐκ τῷ Γ. Ὁρίσμ. τῷ ια'.

πειδὴ τοίνυν ἡ ρα (ἐξ ὑποθ.) πρὸς ὀρθὰς ἐφίσταται ἐπὶ τῶν δύο γα, ζα, ἐπὶ τῇ ἐπιπέδῳ λπ ὀρθῇ (1) ἔσαι. Ὡς ἐπειδὴ ἡ αξ ὀρθὴν συνέχησι (2) τῇ ὑπο ραξ. ἔσι δὲ (ἐξ ὑποθ.) καὶ ἡ ὑπο ραβ ὀρθῇ, αἱ ἄρα ὑπο ραβ, ραξ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὅπερ ἄτοπον.

Π ρ ό τ α σ ι ς ς.

α. 426. „Εἴαν δύο Εὐθεῖαι (αβ, γδ) τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (εζ) πρὸς ὀρθὰς ᾧτι, παράλληλοι ἔσονται αἱ Εὐθεῖαι.

Αἰτεῖσθαι εἶχεν ὡς καὶ αὐτὸ δῆλον, ἀλλ' ἔμπης καὶ ἔτις ἂν ἀποδειχθεῖν. Ἐπιζευχθείσης τῆς βδ, ἀγέσθω ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ζε ἡ δὴ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς βδ, καὶ ἴση τῇ βα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δα, ηα, ηβ. Αἱ μὲν οὖν Εὐθεῖαι βδ, δὴ ταῖς βδ, ρα (3) ἴσαι εἰσίν. αἵ τε ὑπὸ βδγ (4), δβα εἰσὶν ὀρθαί. Ἀρα (5) αἱ αδ καὶ βη ἴσαι εἰσὶν. Τὰ τοίνυν Τρίγωνα αβη, ηδα ἰσόπλευρα εἰσὶ, καὶ ἐπομένως αἱ ὑπὸ αβη, αδη (6) ἴσαι. Ἀλλ' αβη Ὀρθῇ (7) εἰσὶν, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αδη Ἀλλὰ γὰρ εἰσὶν Ὀρθαὶ καὶ ἡ ὑπὸ βδγ, καὶ ἡ ὑπὸ γδγ, ἡ μὲν ἐκ κατασκευῆς, ἡ δὲ ἐκ τῆ Γ'. Ὁρίσμη. Ἀρα ἡ Εὐθεῖα ηδ ταῖς τρισὶ γδ, αδ, βδ πρὸς ὀρθὰς ἐφίσταται. Ὡς αἱ γδ, καὶ αδ, καὶ βδ, ἐν ἐνὶ καὶ τῷ αὐτῷ (8) εἰσὶν ἐπιπέδῳ. Ἀλλὰ μὲν καὶ αἱ αβ, καὶ αδ, καὶ βδ (9) ἐν ἐνὶ εἰσὶν ἐπιπέδῳ, ἄρα αἱ αβ, γδ, ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ εἰσὶν. Ἐπειδὴ δὲ αἱ ὑπὸ αβδ, γδβ εἰσὶν (10) Ὀρθαί, ἔσονται (11) αἱ αβ, γδ παράλληλοι. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ζ.

α. 427. „Ἡ τὰς ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ Εὐθεῖας (αβ, γδ) τέμνουσα (εζ) ἐν τῷ αὐτῷ, ἐν ᾧ καὶ αὐταί, εἰσὶν ἐπιπέδῳ.

Δειχθεῖν δ' ἂν καὶ διὰ τῆς Αἰτεῖσθαι δύναται, δειχθεῖν δ' ἂν τῷ βυλομένῳ ᾧδε.

Εἰμὴ γὰρ, ἐπεζεύχθω ἡ εηζ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐκείνῳ, καὶ δὴ αἱ δύο εζ, εηζ χωρὶον περιέξουσιν. ὅπερ (12) ἄτοπον.

Ἀλλως: Τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ αἱ Εὐθεῖαι αβ, γδ, τεμνέσθω ὑφ' ἑτέρας ἐπιπέδου διὰ τῶν Σημείων ε καὶ ζ. Καὶ εἰ μὴ εἰσὶν ἡ Εὐθεῖα εζ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν αβ, γδ, ἔκ ἔσαι ἡ εζ κοινὴ τομὴ. Ἐς τοίνυν ἡ εηζ καὶ δὴ εηζ (13) Εὐθεῖα τις ἔσαι, καὶ αἱ δύο Εὐθεῖαι εζ καὶ εηζ περιέξουσιν χωρὶον. ὅπερ ἄτοπον.

(1) Διὰ τὴν ἀνωτ. (2) Γ. Ὁρ. ια'. (3) Ἐκ κατ. (4) Ὁρ. Γ. ιβ' ια'. (5) Δ. ιβ' ια'. (6) Η. ιβ' ια'. (7) Γ. Ὁρ. ιβ'. ιβ' ια'. (8) Διὰ τὴν ἀνωτ. (9) Β. ιβ' ια'. (10) Ὁρ. Γ. ιβ' ια'. (11) ΚΘ. ιβ' ια'. καὶ Ὁρ. Ας. ιβ' ια'. (12) Δε. ιγ'. (13) Γ. ιβ' ια'.

Π ό ρ ι σ μ α .

Εντεῦθεν ἔπεται ὡς ἡ εζ ἢ τὰς παραλλήλους αβ, γδ τέμνουσα, ἐν τῷ αὐτῷ σὺν αὐταῖς ἐσιν ἐπιπέδῳ. Αἰεὶ γὰρ αἱ παράλληλοι (1) ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ εἰσὶ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Η.

„Εἴαν ἡ ἑτέρα (αβ) τῶν παραλλήλων (αβ, γδ) ἐπιπέδῳ τινὶ (τῷ εζ) πρὸς ὀρθὰς ἦ, καὶ ἡ λοιπὴ (γδ) τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. κ. 428.

Εἶχε μὲν αἰτεῖσθαι, δεῖσαν δὲ, ἢ τω δειχθεῖν, καθάπερ ἡ ς'. Ἐπιζευχθεῖσιν γὰρ τῶν βδ, αδ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ εζ, ἀχθήτω ἡδ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς βδ, καὶ ἰσὴ τῇ βα, καὶ ἐπιζευχθεῖσιν καὶ τῶν ηα, ηβ, δειχθήσεται ὡς ἐπὶ τῆς ς'. Προτάς., ὡς ἡδ καὶ τῇ αδ πρὸς ὀρθὰς ἐσιν· ὥς ἡ ἡδ (2) πρὸς ὀρθὰς ἐπιστήσεται ἐπὶ τῇ ἐπιπέδῳ αβδ, ταύταις (3) ἐπὶ τῇ γδβα· ἐνθεντοὶ ἡ ὑπὸ γδῃ (4) ὀρθὴ ἔσται ἐσιν· Ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ γδβ ὀρθὴ ἐσιν (ἐπεὶ μετὰ τῆς ὑπὸ αβδ ὀρθῆς Ὀρθὰς δύο (5) συνίστησιν), ἡ ἄρα γδ (6) πρὸς ὀρθὰς ἐσιν ἐπὶ τῇ ἐπιπέδῳ ηδβ, ἦτοι τῇ εζ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Θ.

„Αἱ τῇ Εὐθείᾳ (γδ) τῇ αὐτῇ παράλληλοι (αβ, εζ), καὶ μὴ ἔσσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. κ. 429.

Ἐχοι μὲν ἂν αἰτεῖσθαι, δεικτέα γεμῆν.

Ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν παραλλήλων αβ, γδ, ἀχθήτω ἡκ κἀθετος ἐπὶ τῆς γδ· ὡσαύτως δὲ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν παραλλήλων εζ, γδ, ἀχθήτω θκ κἀθετος ἐπὶ τὴν γδ, καὶ ἐπιζευχθήτω ἡ ηδ· Ἀρ' οὖν (7) ἡ Εὐθεῖα γκ ὀρθὴ ἐσιν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ηκδ· καὶ ἐπειδὴ αἱ αη, εθ, παράλληλοι εἰσὶ πρὸς τὴν γκ, ἔσονται δὴ (8) αἱ αη, εθ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῇ ἐπιπέδῳ ηκδ· Ἀρα (9) αἱ αη, εθ παράλληλοι εἰσὶν. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ι.

„Εἴαν δύο Εὐθεῖαι (αγ, βγ) ἀπτόμεναι ἀλλήλων, παρὰ δύο Εὐθείαις (δζ, εζ) ἀπτομέναις ἀλλήλων ὥσι (παράλληλοι αἱ Α'. ταῖς Β'. δηλ.) μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας Γωνίας (τὰς γ καὶ ζ) περιέξωσι. κ. 430.

(1) Ορ. Αε. τῷ α. (2) Δ. τῷ ια. (3) Διὰ τὸ ἀνωτ. Πορ. (4) Γ. Ορ. ια. (5) ΚΖ. τῷ α. (6) Δ. τῷ ια. (7) Δ. τῷ ια. (8) Η. τῷ ια. (9) ς. τῷ ια.

Γινέσθωσαν αἱ γα, γβ ἴσαι ταῖς ζδ, ζε, εἰς ἐπεξεύχθωσαν αἱ δε, αβ, εἰς αἱ δα, ζγ, εβ· ἐπειδὴ τοίνυν αἱ αγ, ζδ παράλληλοι εἰσὶ, εἰς ἴσαι, εἰς αἱ αδ, γζ (1) ἴσαι τε εἰσὶ εἰς παράλληλοι· Ὡσαύτως δὲ εἰς αἱ βε, γζ. παράλληλοί τε εἶναι εἰς ἴσαι ἀποδεικνύονται· ὥς τε εἰς αἱ αδ, βε (2) παράλληλοί τε εἰσὶ εἰς (3) ἴσαι· τοιγαρὲν (4) ἴσαι αἱ αβ, δε. Ἐπεὶ οὖν ἐπὶ τῶν Τριγώνων βαγ, εδζ, αἱ τρεῖς ταῖς τρισὶ Πλευραῖς ἴσαι εἰσὶν ἐκάστη ἐκάστη, φανερόν ὅτι αἱ Γωνίαι γ εἰς ζ (5) ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΑ.

κ. 431.

„ Ἀπὸ τῆς δοθέντος Σημεῖου μετεώρου (γ) ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον (αβ), ὃ μὴ ἔχει πέρας, κάθετον εὐθείαν Γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἐπὶ τῆς ἐπιπέδου αβ ἀχθήτω ἄπειρος ἡ τυχεύουσα δζ, πρὸς ἣν κάθετος ἀπὸ τῆς γ καθείδω (6) ἡ γε, ἐπὶ τὴν αὐτὴν δὲ κάθετος ἀφείδω ἀπὸ τῆς ἐπ' αὐτῆς ε (7) ἡ εμ· Εἴτα ἐπὶ τὴν αμ πρὸς ὀρθὰς (8) καθείδω ἀπὸ τῆς γ ἡ γη· λέγω δὴ τὴν γη πρὸς ὀρθὰς ἐφίστασθαι ἐπὶ τῆς ἐπιπέδου αβ.

Διὰ τῆς ἡ ἀχθήτω καὶ παράλληλος τῇ δζ.

Ἐκ τῆς κατασκευῆς οὖν ἡ δε πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν ἐπὶ τὰς γε εἰς εμ· ὥς τε ἡ δε (9) ὀρθὴ ἐστὶν ἐπὶ τῆς ἐπιπέδου γεμ, καὶ δὴ (10) εἰς ἡ δη· Ἄρα ἡ γη (11) πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν ἐπὶ δη· Ἀλλ' ἐκ τῆς κατασκευῆς ἡ γη πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκε καὶ ἐπὶ τὴν εμ, ἡ ἄρα γη (12) ὀρθὴ ἐστὶν ἐπὶ τῆς ἐπιπέδου αβ. Ο. Η. τὸ προτεθέν.

Π ό ρ ι σ μ α .

Ἡ ὀρθὴ γη ἀπὸ τῆς μετεώρου Σημεῖου γ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον αβ, ἐστὶν ἡ ἀπασῶν ἐλαχίστη τῶν Εὐθειῶν, ὅσαι δὴ ποτε ἀπὸ τῆς αὐτῆς Σημεῖου ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἀγέσθαι δύνανται. Ἀχθήτω εἰς γὰρ ἀπὸ τῆς αὐτῆς Σημεῖου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὅποιαδήποτε Εὐθεῖα ἄλλη, φέρε ἡ γε, εἰς ἐπεξεύχθω ἡ εη· Ἐπὶ γὰρ τῆς γε Τριγώνου, ἡ ὑπὸ εηγ (13) ὀρθὴ Γωνία ἐστὶν· ὥς τε ἡ ὑπὸ γηι ἐστὶν (14) ὀξεῖα· ἐνθεντοὶ ἡ γε Πλευρὰ τῆς Πλευρᾶς γη μείζων (15) ἐστὶ· Καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον δεικνύσθεται εἰς ὅ-

(1) ΑΓ. τῆς δ. (2) Διὰ τὴν ἀνωτ. (3) ΑΓ. δ. (4) ΑΓ. τῆς δ. (5) Η. τῆς δ. (6) ΙΒ. τῆς δ. (7) ΙΑ. τῆς δ. (8) ΙΒ. τῆς δ. (9) Δ. τῆς ια. (10) Η. τῆς ια. (11) Ο. Γ. τῆς ια. (12) Δ. τῆς ια. (13) Ο. Γ. τῆς ια. (14) Ε. Πόρο. τῆς ΑΒ. τῆς δ. (15) ΙΘ. τῆς δ.

γοισαυὲν ἄλλης Πλευρᾶς, τῆς ἀπὸ τῷ μετεώρῳ Σημεῖς γ ἐπὶ τὸ ὑποκείμε-
ον ἐπίπεδον ἀγομένης, τὴν Ὀρθὴν γη εἶναι ἐλάχιστον.

Π ρ ο τ α σ ι ς ΙΒ.

„Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ (εζ) ἀπὸ τῷ πρὸς αὐτῷ δοθέντος Σημεῖς (α) κ. 432.
„πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν Γραμμὴν ἀναστήσαι.

Α'πὸ τῷ τυχόντος μετεώρῳ Σημεῖς δ, ὃ τῷ ὑποκειμένῳ εζ ἐπιπέδῳ ὑ-
ποκείμενον ἦ, καθείδω ἡ δβ (1) ἐπ' αὐτὸ τὸ ἐπίπεδον ὀρθῇ, καὶ ἐπιζευχ-
θεῖσης τῆς βα, ἀχθήτω ἡ αγ παράλληλος τῇ δβ· φημί δὴ ὡς ἔτως ἐτελέ-
θη τὸ ἐπιταχθέν· Ἡ δὲ δεῖξις σαφὴς ἐκ τῆς Η'.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Πρακτικῶς δὲ ἀπὸ τῷ δοθέντος Σημεῖς κ, ἐπὶ τῷ ἐπιπέδῳ εζ, κάθετος ἀνί-
σταται, εἴαν ὁ Γνώμων ξκν, τῇ μὲν κατ' αὐτὸν ὀρθῇ Γωνία κ, τῷ δοθέντι Ση-
μεῖω, τῇ δὲ Πλευρᾷ ξκ, τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἔτω προσαρμοδῇ, ὡς ἐπὶ τῷ
ἐπιπέδῳ τὴν ξκ Πλευρὰν τῷ Γνώμονος περὶ τὴν κν ἀκινήτους περιάγεσθαι
ἔχειν. Ἡ γάρτοι κατὰ τὴν Πλευρὰν κν ἀγομένη Εὐθεῖα, τῷ ὑποκειμένῳ ἐ-
πιπέδῳ ἀπὸ τῷ πρὸς αὐτῷ δοθέντος Σημεῖς κ ἔσαι (2) ὀρθῇ.

Π ρ ο τ α σ ι ς ΙΓ.

„Α'πὸ τῷ Σημεῖς (γ) τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (αβ) δύο Εὐθεῖαι (3γ, εγ) κ. 433.
„πρὸς ὀρθὰς ἐκ ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἶεν γὰρ ἂν ἄλλως (διὰ τὴν ε') παράλληλοι, ὅπερ ἀδύνατον.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Ἐκ ταύτης οὖν τῆς Προτάσεως δειχθῆναι δύναται καὶ ἡ ΛΗ'. τῷ πα-
ρόντος ΙΑ', ἣν ὁ Τακυστίος παρέδραμεν, ἥτως ἔχουσιν.

„Εἴαν ἐπίπεδον (ζρ) πρὸς ἐπίπεδον (βε) ἕτερον ὀρθόν ἦ, ἡ ἀπότι-
„νος Σημεῖς (λ) τῶν ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων (ζρ), ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον (βε)
„κάθετος ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς (χρ) πεσεῖται τῶν ἐπιπέδων ἡ ἀγο-
„μένη Κάθετος. κ. 434.

Α'χθήτω γὰρ ἀπὸ τῷ λ Σημεῖς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς χρ κάθετος ἡ
λπ, ἔσαι δὴ (3) αὕτη τῷ ἐπιπέδῳ βε ὀρθῇ· ἀλλὰ διὰ τὴν παρῶσαν Πρότ.

(1) Διὰ τὴν αὐτ. (2) Δ. τῷ κ. (3) Ὁρ. Δ. τῷ ε'.

ἀπὸ τῆ αὐτῆς Σημεῖα λ, τῷ αὐτῷ ἐπίπεδῳ βξ δύο Εὐδεῖαι πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἀναζητούνται, ἄρα ἡ λπ Εὐδεῖα, ἥτις μόνη ἀπὸ τῆ λ Σημεῖα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ξβ πρὸς ὀρθὰς ἀχθῆναι δύναται, περσεῖται (1) ἐπὶ τῆς κοινῆς τῶν ἐπίπεδων τομῆς χρ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΔ.

σε. 435.

᾽, Πρὸς ἃ ἐπίπεδα (ζη, λπ) ἡ αὐτὴ Εὐδεῖα (αβ) ὀρθή ἐστι, παράλληλα ἐστὶ τὰ ἐπίπεδα.

Εἰπὶ διατέρεται τῶν ἐπίπεδων ζη ληφθῆτω Σημεῖον τὸ τυχόν γ, εἰ δὲ αὐτὸ ἀχθῆτω γε παράλληλος πρὸς τὴν αβ, ἀπαντῶσα τῷ ἐπίπεδῳ λπ κατὰ τὸ ε. Ἐστὶ γὰρ ἡ γε (2) ὀρθὴ πρὸς ἄμφω τὰ ἐπίπεδα ζη εἰ λπ. Ἐὰν ὅν ἐπιζευχθῶσιν αἱ Εὐδεῖαι αγ, βε, ἔσονται αἱ Γωνίαι α εἰ β (3) ὀρθαί. Ἄρα αἱ αγ, βε (4) παράλληλοι εἰσὶ, τὸ δὲ αγεβ Παραλληλόγραμμον, ἡ δὲ γε, ἥτις ἐδεύχθη πρὸς ἄμφω τὰ ἐπίπεδα ὀρθή ἔσται, ἴση ἐστὶ (5) τῇ αβ. Ὡσαύτως δεῖξω, εἰ ὅσαι ἀν ἀχθῶσι πρὸς ἄμφω τὰ ἐπίπεδα ὀρθαί, ἀπάσαι ἴσαι εἶναι. Τοιγαρὶν (6) τὰ ἐπίπεδα εἰσὶ παράλληλα. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΕ.

ἢ ἐν δύο εὐθείαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων (β, γ), παρὰ δύο εὐθείαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων (εδ, ζδ) παράλληλοι ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὄνσαι, παράλληλα ἐστὶ τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα.

Ἀπὸ τῆς ἀρχήτης αὐτῆς πρὸς τὸ εἰς ἐπίπεδον (7), ἀγέμεσαν δεξὴ αἰ γδ, ηἱ παράλληλοι πρὸς τὰς δεξ, δζ· καὶ ἔσονται αἱ αὐταὶ παράλληλοι (8) καὶ πρὸς τὰς αβ, αγ· Ἐπειδὴ τοῖσιν αἱ ὑπὸ ια, ζη εἰσὶν (9) ὀρθαί, ἔσονται καὶ αἱ ὑπὸ γαη (10) βαη ὀρθαί· Ἡ ἄρα ηα ἢ πρὸς τὸ εἰς ἐπίπεδον ὀρθή ἦσα, καὶ πρὸς τὸ βγ (11) ὀρθὴ ἐστὶ· Τὰ ἄρα βγ, εζ (12) ἐπίπεδα παράλληλα ἐστίν. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ι ε.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα (αβ, γδ) ὑπὸ ἐπίπεδον τινὸς τέμνηται, (τῷ εζζη), αἱ κοιναὶ αὐτῶν τοιμαὶ (εθ, ηζ) παράλληλοι εἰσὶ.

-
- (1) Ε' κατασκ. (2) Η τῷ ια'. (3) Γ. Ὁρισμ. τῷ ια'. (4) ΚΘ. τῷ ια'. (5) ΛΔ. τῷ ια'. (6) Η. Ὁρισμ. τῷ ια'. (7) ΙΔ. τῷ ια'. (8) Θ. τῷ ια'. (9) Γ. Ὁρισμ. τῷ ια'. (10) ΚΖ. τῷ ια'. (11) Δ. τῷ ια'. (12) Διὰ τὴν ἀνωτ.

Α'λλ' εἰμὴ, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ τέμνοντι ἔσται, συμπεσύνται κατὰ τὴν σημείον τὸ 1 (1). Ὡς ἐπειδὴ ἔλαι θει, ζη εἰσὶν (2) ἐν τοῖς ἐπιπέδοις αβ; γδ προεκβληθεῖσι, καὶ τὰ γε ἐπίπεδα προεκβληθέντα συμπεσύνται κατὰ τὸ 1· ὅπερ ἄτοπον ἐστίν, ἄτε κατὰ τὴν Η'. τῶν ὀρισμῶν τῷ παρόντος φερόμενον.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Ἐάν δύο ἐπιπέδων αζ, βζ, αἱ μετὰ τρίτῃ ἐπίπεδον τῇ αε κοινῇ τομαὶ αδ, βε ὡς παραλλήλοι, ἔσαι καὶ ἡ δι' ἀλλήλων τῶν αζ, βζ κοινὴ τομὴ γζ ταῖς αδ, βε παραλλήλος. Τεμνέσθωσαν γὰρ τὰ τρία ταῦτα ἐπίπεδα ἐπιπέδοις παραλλήλοις τοῖς αβγ, δεζ, καὶ ἔσονται (3) αβ, βγ, γα, ταῖς δὲ, εζ, ζδ παραλλήλοι τῶν τριῶν ἐκάσῃ ἐκάσῃ· ὡς (4) ἡ ὑπὸ αβγ = δεζ, καὶ βγγ = εδζ· Ἀλλὰ γὰρ (διὰ τὸ Παραλλήλογραμμον αε) αβ = δε (5), τοιγαρὶν (6) βγ = εζ, καὶ γα = ζδ· Παραλλήλως δὲ τυγχάνειν τὰς βγ, εζ, καὶ τὰς γα, ζδ φθάσαν ἐδείχθη, ἄρα (7) ἡ γζ καὶ ταῖς αδ καὶ βε παραλλήλος ἐστίν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΖ.

„Ἐάν δύο Εὐθεῖαι βδ, ηθ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνονται, εἰς αὐτὰς αὐτὰς λόγους τμηθῇσονται. κ. 439.

„Ἀ'χθήτωσαν ἐν τοῖς ἐπιπέδοις φξ καὶ τυ, αἱ Εὐθεῖαι βη, θδ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ βθ διήκυσσα διὰ τῷ ἐπίπεδον ρσ κατὰ τὸ ζ, ἐπεξεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ ζγ, ζι. Τὸ γὰρ διὰ τῷ Τριγώνῳ βθδ ἐπίπεδον τέμνον τὰ παραλλήλα τῶν ἐπιπέδων, κοινὰς τομὰς ποιεῖται τὰς ζγ, δθ (8) παραλλήλως· ὡς βγ : γδ : : βζ : ζθ (9). Πάλιν τὸ Τριγώνον βηθ τέμνον τὰ παραλλήλα τῶν ἐπιπέδων, τομὰς ποιεῖται (10) τὰς βη, ζι παραλλήλως· ἄρα ηι : ιθ : : βζ : ζθ (11), τατέστιν (ὡς δέδεικται) ὡς βγ : γδ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΗ.

„Ἐάν Εὐθεῖα (ζε) ἐπίπεδον τινὶ (αβ) πρὸς ὀρθὰς ᾗ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπίπεδῳ (αβ) πρὸς ὀρθὰς ἔσαι. κ. 440.

Ἀ'γέσθω διὰ τῆς ζε ἐπίπεδον, οἷον τὸ ηγ, κοινὴν ἔχον τομὴν μετὰ τῇ αβ τὴν γδ· ἐν αὐτῷ δὲ ἀ'χθήτωσαν κάθετοι πρὸς τὴν γδ κοινὴν το-

(1) Α. Πόρ. μετὰ τὴν ΑΑ τῷ α'. (2) Α. τῷ ια'. (3) Διὰ ταύτην. (4) Ι. τῷ ια'. (5) ΑΔ. τῷ α'. (6) Ης. τῷ α'. (7) ΑΓ. τῷ α'. (8) Διὰ τὴν ἀνωτ. (9) Β. τῷ ε'. (10) Διὰ τὴν ἀνωτ. (11) Β. τῷ ε'.

μὴν αἱ κθ· καὶ ἐπεὶ ἡ ζε (1) ὀρθῇ ἐστὶ πρὸς τὴν γδ, ἔσονται αἱ κθ (2) παράλληλοι πρὸς τὴν ζε· τίθεται δὲ ἡ ζε ὀρθῇ εἶναι τῷ ἐπιπέδῳ αβ· ἄρα καὶ αἱ κθ ὀρθαὶ (3) εἰσὶ τῷ ἐπιπέδῳ αβ· ὥστε τὸ ἐπίπεδον γη (4) τῷ ἐπιπέδῳ αβ ὀρθὸν ἐστὶ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΘ.

κ. 441.

„Εὖν δύο ἐπίπεδα (μζ, ηδ) τέμνοντα ἄλληλα, ἐπιπέδῳ τινὶ (αβ) πρὸς ὀρθὰς εἶναι, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ (κλ) τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (αβ) πρὸς ὀρθὰς εἶναι. Ἐπειδὴ τὸ μζ ἐπίπεδον ὀρθὸν ἔχει λαχὸν τὴν θέτιν ἐπὶ τῷ ἐπιπέδῳ αβ, δῆλον (5) ὡς ἀπὸ τῆς λ δυνατόν Κάθετον ἀχθεῖναι ἐπὶ τῷ ἐπιπέδῳ αβ, ἐν ἐπιπέδῳ τῷ μζ, ἥτις ἂν ἀμέλει ἐν τῷ μζ ἐπιπέδῳ ἀχθεῖται, κάθετος εἶη ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς εζ. Ὡσαύτως δὲ διὰ τὸ ὀρθὸν τίθεσθαι καὶ τὸ ηδ τῷ αβ (6) ἀχθεῖν ἂν καὶ τῷ ηδ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τῆς αὐτῆς σημείᾳ λ, Κάθετος ἐπὶ τῷ ἐπιπέδῳ τῷ ὑποκειμένῳ αβ. Ἀλλὰ γὰρ ἀπὸ τῆς λ σημείᾳ (7), μία ἂν ἀχθεῖν μόνῃ ὀρθῇ τῷ αβ. Ἀρ' ἐπ' ἀνάγκῃ τὴν ἀπὸ λ ὀρθὴν τῷ αβ, ἐν ἀμφοῖν εἶναι τοῖς ἐπιπέδοις τῷ τε μζ, καὶ τῷ ηδ, καὶ ταύτην εἶναι ἐπομένως τὴν τέτων κοινὴν τομὴν, τατέσι τὴν λκ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Κ.

κ. 442.

„Εὖν τρεῖς Γωνίαι (α) ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων Γωνιῶν περιέχεται (βαγ, γαδ, δαβ), δύο ὅποιας τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσὶ πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. Ἐὰν αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι ἴται ἄλληλαις ὥσι, δῆλον τὸ εἰρημένον. Ἐὰν δὲ ἄνισοι, ἔστω δὴ μεγίστη τῶν ἢ ὑπὸ βαδ, καὶ ἔσται καὶ οὕτω δυσὶν τῶν λοιπῶν ἐλάσσων ἅμα εἰλημμένων. Ἀφαιρέσω γὰρ ἀπὸ τῆς μεγίστης ὑπὸ βαδ ἢ ὑπὸ βαε ἰση τῇ ὑπὸ βαγ, γινέσθωσάν τε ἴσαι αἱ αγ, αε, διὰ δὲ τῶν εὐθείων Εὐθεῖα, ἀπαντῶσα ταῖς αβ, αδ κατὰ τὰ β καὶ δ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ βγ, δγ. Καὶ ἐπεὶ (8) αἱ ὑπὸ βαε, βαγ ἴσαι εἰσὶ, καὶ αἱ Πλευραὶ βε, αε ἴσαι ταῖς Πλευραῖς βα, αγ, καὶ αἱ Βάσεις βε, βγ ἴσαι (9) ἔσονται καὶ αὐταί. Ἀλλὰ γὰρ βγ, γδ μείζονες (10) εἰσὶ τῆς βδ, ἀφαιρεθειῶν ἄρα τῶν ἴσων βε, βγ, ἢ γδ μείζων τῆς εδ. Ἀλλ' αἱ Πλευραὶ εα, αδ, ἴσαι ταῖς Πλευραῖς (11) γα, αδ· ἄρα ἡ ὑπὸ γαδ (12) μείζων τῆς ὑπὸ εαδ. Ἐδείχθη δὲ ἡ ὑπὸ βαγ

(1) Ἐξ ὑποθ. καὶ διὰ τὸν Γ. Ὁρίσθ. τῷ ια'. (2) ΚΘ. τῇ κ'. (3) Η. τῷ ια'. (4) Δ. Ὁρίσθ. τῷ ια'. (5) Ὑπὸ Δ. τῷ ια'. (6) Διὰ τὸν αὐτ. (7) ΗΓ. τῷ ια'. (8) Ἐκ κατὰ τας. (9) Δ. τῷ κ'. (10) Κ. τῷ α'. (11) Ἐκ κατ. (12) ΑΕ. τῷ κ'.

ιση ἔσται τῇ ὑπὸ βαγ. Αἱ δύο ἄρα ἄμα βαγ, γαδ, μείζονες εἰσι τῆς ὅλης ὑπὸ βεδ. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΑ.

„Αἵ πᾶσαι σκευαὶ Γωνία ὑπὸ ἐλάσσωνων, ἢ τεσσάρων Ὀρθῶν περιέχεται.

Ἐξω Γωνία σκευὰ ἢ α, ταῖς δὲ Γωνίαις ταῖς ἐπιπέδοις ὑφ' ὧν αὐτὴ περιέχεται, ὑποτεινέωσαν αἱ Εὐθείαι βγ, γδ, δε, εζ, ζβ, ἐν ἐνὶ ἧ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ αἱ πᾶσαι εἶναι ὑποτιθέμεναι. Τότε οὖν γινομένη, Πυραμὶς συ-
καθίσταται (1), ἧς ἡ Βάσις ἐστὶ τὸ Πολύγωνον βγδεζ, κορυφὴ δὲ ἡ α, πλευ-
ραὶ δὲ τοσαῦτα Τρίγωνα η, θ, ι, κ, λ, ὅσαι αἱ ἐπίπεδοι Γωνίαι αἱ συνι-
σῶσαι τὴν σκευάν α. Ἡ δὲ μὲν ἂν ἐπειδὴ αἱ δύο Γωνίαι ὑπὸ αβζ ἢ αβγ (2)
μείζονες εἰσι τῆς ὑπὸ ζβγ, καὶ αἱ δύο αγγβ, αγγδ μείζονες τῆς ὑπὸ βγδ, ἢ
ἔτιω εφεξῆς, ἔσονται τῶν Τριγώνων η, θ, ι, κ, λ, αἱ περὶ τὴν Βάσιν Γω-
νίαι ἄμα ληφθεῖσαι, ἅπασων ἄμα τῶν Γωνιῶν τῆς Βάσεως β, γ, δ, ε, ζ
μείζονες. Ἀλλ' αἱ τῆς Βάσεως Γωνίαι συνάμα τέσσαρσιν Ὀρθαῖς, δις τοσαύ-
της συναποτελῆσιν (3) Ὀρθάς, ὅσαι εἰσιν αἱ Πλευραὶ, ἢ (ὅ ταυτὴν ἔστιν)
ὅσα τὰ Τρίγωνα. Ἄρα πᾶσαι αἱ τῶν Τριγώνων περὶ τὴν Βάσιν Γωνίαι συνά-
μα τέσσαρσιν Ὀρθαῖς, συναποτελῆσιν Ὀρθάς πλέον, ἢ δις τοσαύτας, ὅσα
τὰ Τρίγωνα. Ἀλλ' αἱ αὐταὶ Γωνίαι αἱ περὶ τὴν Βάσιν, συνάμα ταῖς Γωνίαις
ὑφ' ὧν περιέχεται ἡ σκευὰ, συναποτελῆσι δις τοσαύτας Ὀρθάς (4), ὅσα τὰ
Τρίγωνα. Αἱ ἄρα Γωνίαι ὑφ' ὧν ἡ σκευὰ Γωνία α περιέχεται Ὀρθῶν τεσ-
τάρων ἐλάσσονες εἰσὶ. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α .

Ἐκ ταύτης τε ἢ τῆς πρὸ αὐτῆς ἀπόχρη εἰσβαλεῖν, ὡς ἐκ τριῶν ἐπιπέ-
δων Γωνιῶν, αἱ ἂν ὧσιν Ὀρθῶν τεσσάρων ἐλάσσονες, εἰ μόνον αἱ δύο τῆς λοι-
πῆς μείζονες ὧσι πάντα μεταλαμβάνοντι, Γωνία σκευὰ συνίστασθαι δύναται.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Ἐκ δὲ τῆς αὐτῆς ταύτης κατασκευάζεται ἢ τὸ διαβόητον Θεώρημα, ὅτι
τῶν ἐπιπέδων Σχημάτων κανονικῶν ὄντων καὶ ἰσῶν, τρία μόνον ἔστιν ἅττα
Σῶμα κανονικὸν περιέχειν δύναται· ἀρέλονται τῶν μὲν ἰσοπλευρῶν Τριγώ-

(1) Ὡς Α. Ὡς τῇ 18. (2) Διὰ τὴν ἀνωτ. (3) Β. Θεώρ. τῶ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν
ΑΒ. τῷ α. (4) Διὰ τὴν ΑΒ. τῷ α.

νων, ἤτοι 4, ἢ 8, ἢ 20, τῶν δὲ Τετραγώνων 6, τῶν δὲ Πενταγώνων 12· ὥςτε πέντε μόνᾳ ἀριθμεῖσθαι τὰ κανονικὰ Σώματα, ἢ Πυραμίδας ἢ ὑπὸ 4, τὸ Ὀκτάεδρον τὸ ὑπὸ 8, τὸ Εἰκοσάεδρον τὸ ὑπὸ 20 ἰσοπλεύρων Τριγώνων περιεχόμενον, ὅτε Κυβὸς ὁ ὑπὸ Τετραγώνων 6, καὶ τὸ Δωδεκάεδρον τὸ ὑπὸ 12 Πενταγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον. Ὅτι δὲ Σῶμα τεταγμένον τε καὶ κανονικὸν λέγεται τὸ ὑπὸ ἐπιπέδων κανονικῶν καὶ ἀλλήλοις ἴσων περιοριζόμενον, φανερόν.

Δείκν. Ἐκ δυοῖν ἰσοπλεύρων Τριγώνων, Γωνία σφραγίσθῃται ἢ δύναιται. Τρία γὰρ ἐπὶ τῷ τετράλχιον (1) ἀπαιτεῖται.

Ὑπὸ τριῶν οὖν ἰσοπλεύρων Τριγώνων εἰς ἓν σημεῖον συνιόντων, Γωνία σφραγίσθῃται δύναται ἢ τῆς Πυραμίδος, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἢ τῷ Ὀκτάεδρῳ, ὑπὸ δὲ πέντε ἢ τῷ Εἰκοσάεδρῳ, ἐπεὶ τῶν τῷ ἰσοπλεύρῳ Τριγώνῳ Γωνιῶν, 3 ληφθεῖσαι, καὶ 4, καὶ 5. ὁρῶν τεσσάρων ἐλάττωσες εἰσὶν, ὡς ἐκ τῷ IB'. Πορίσματος τῆς AB'. τῇ Α'. συνάγεται.

Ἐπεὶ δέ τοι τρεῖς πενταγωνικαὶ Γωνίαι (2) τεσσάρων ὁρῶν ἐλάττωσες εἰσὶ, Πεντάγωνον τρία εἰς ταυτὸ συνιόντα σημεῖον, Γωνίαν σφραγίσθῃ τῇ τῷ Δωδεκάεδρῳ συναποτελεῖν δύναται.

Ὡς δὲ καὶ ὑπὸ τριῶν Τετραγώνων εἰς ἓν σημεῖον συνιόντων Γωνίαν κυβικὴν σφραγίσθῃται δυνατόν, καθ' αὐτὸ δῆλον· ὥςτε πέντε τὰ συνιστάμενα κανονικὰ Σώματα.

Ὅτι δὲ παρὰ ταῦτα ἄλλο ἂν σφραγίσθῃ κανονικὸν Σῶμα, ἢ τω δεικνύται.

Αἱ ἔξ τῷ ἰσοπλεύρῳ Τριγώνῳ Γωνίαι συναποτελεῖσι 4 Ὀρθάς, ἢ γὰρ μία τριτημόρια δύο (3) Ὀρθάς, καὶ ἐκ τῇ ἀκολούθῃ αἱ ἔξ δυσκαίτεκα τριτημόρια Ὀρθάς δώσῃσι, ταυτὸν εἰπεῖν Ὀρθάς τέσσαρας. Τριῦντοι ὑπὸ ἔξ ἰσοπλεύρων Τριγώνων Γωνία σφραγίσθῃ ἢ ἂν σφραγίσθῃ· πολλῶν δὲ μᾶλλον ἢ ἂν ἐκ πλείονων.

Ὑπὸ τεσσάρων Τετραγώνων Γωνίαν σφραγίσθῃ μὴ ἔχειν ἂν σφραγίσθῃ καθ' αὐτὸ δῆλον, πολλῶν δὲ μᾶλλον μὴ ἐκ πλείονων.

Γωνίαι πενταγωνικαὶ 4 Ὀρθῶν τεσσάρων μείζονες εἰσὶ, τῶν γὰρ ἑκάστη ἔξ πεμπτημέρια ὁρθῆς (4) περιεχόμεναι. Ὑπὸ ἄρα τεσσάρων Πενταγώνων Γωνία σφραγίσθῃται ἀδυνατεῖ, πολλῶν δὲ μᾶλλον ὑπὸ πλείονων.

Ἀλλ' ἢ ἔξ ἄλλων ὁποιονῶν κανονικῶν Σχημάτων, Γωνία ἂν σφραγίσθῃ

(1) Ὁρ. I. τῷ ια'. (2) Ὡς δῆλον ἐκ τῷ Α. Πορ. τῆς ΙΑ. τῷ δ'. (3) IB. Πορ. τῆς AB. τῷ α'. (4) Α. Πορ. τῆς ΙΑ. τῷ δ'.

συζαίη· Τρεῖς γὰρ ἑξαγωνικαὶ Γωνίαι, τέσσαρσιν Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· ἡ γὰρ μία τέσσαρα τριτημόρια Ὀρθῆς περιείληφεν (1)· ὥςτε αἱ τρεῖς τριτημόρ. Ὀρθῆς 12, ταυτὸν εἰπεῖν Ὀρθὰς 4· Οὐκ ἄρα ἐκ τριῶν ἑξαγώνων συζαίη ἄντις Γωνία σερεᾶ· πολλῶ οὖν μᾶλλον ἐκ ἂν ἐκ πλειόνων.

Ἐπεὶ δὲ αἱ τρεῖς ἑξαγωνικαὶ Γωνίαι 4 Ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, αἱ τρεῖς ἄρα Γωνίαι ἐποιωνῇ ἄλλων Σχημάτων τῷ ἑξαγώνῳ μείζονων ὄντων, οἷον αἱ τρεῖς τῇ ἑπταγώνῳ, ἢ τῷ ὀκταγώνῳ, κβ: ὀρθῶν τεσσάρων μείζονες ἔσονται· Καὶ δῆλον ἄρα ὡς τῶν κανονικῶν Σχημάτων τὰ λοιπὰ πάντα, ἀνεπιτηδεῖως ἔχει πρὸς τὴν τῆς σερεᾶ Γωνίας σύστασιν, καὶ παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε ἔθεν ἄλλο Σῶμα κανονικὸν δοθήσεται.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΒ.

„Ἐὰν ᾖσι τρεῖς Γωνίαι ἐπίπεδοι (α, β, γ), ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσὶ πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι Εὐθεΐαι (αδ κ. 444.
„= αε = βζ = βη = γθ = γι), δυνατόν ἔσται ἐκ τῶν ἐπιζευγνυσθῶν (δε, ζη, θι) τὰς ἴσας Εὐθεΐας Τρίγωνον συζησασθαι.

Ἐὰν αἱ ἐπιζευγνύσασθαι Εὐθεΐαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾖσιν, εὐδὴλον ἔστιν ἐξ αὐτῶν Τρίγωνον δυνατόν εἶναι συζησασθαι· Ἐὰν δὲ ἄνισοι, ἢ τῶν μεγίστη μὲν ἢ δε ἐλάσσων εἴη τῶν λοιπῶν δύο ζη + θι, δυνατόν ἢ ἔτις ἐξ αὐτῶν Τρίγωνον (2) συζησασθαι. Ἐς δὲ ἐλάσσων· ἐπὶ γὰρ τῆς γθ συνεχέσθω Γωνία ἢ ὑπὸ θγκ ἴση τῇ β, ἢ ἔσω γκ = γθ, ἢ ἐπὶ ζεύχθωσαν αἱ κθ, κι· διὰ γῆν τὰς κγ, γθ, αἱ ταῖς βζ, βη ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω, ἢ τὴν ὑπὸ κγθ = β, ἔσται (3) ἢ κθ = ζη. Ἐπεὶ δὲ β + θγι, ταυτὸν εἰπεῖν ἢ ὑπὸ κγι (4) μείζων τυγχάνει (5) τῆς Γωνίας α, αἱ δὲ Πλευραὶ κγ, γι, ταῖς Πλευραῖς δα, αε ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω, ἄρα ἢ Βάσις κι τῆς Βάσεως δε μείζων (6) ἢ τα εἰσὶν· Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν Πλευρῶν κθ + θι (τετάρτεσι ζη + θι) μείζων ἐστὶ (7) τῆς κι, ἢ ἐπομένως πολλῶ μείζων τῆς δε. Ἀρα κτ:

Σ χ ό λ ι ο ν .

Ἐσω Τρίγωνα τρία ἰσοσκελῆ (ὡς ἐπὶ τῇ ἀνωτ. Σχήμ.) αδε, βζη, γθι, κ. 445.
ὧν τὰ σκέλη αδ, αε, βζ, βη, γθ, γι ἀλλήλοις ἴσα εἰσι, ἢ αἱ κατὰ κορυφὴν Γωνίαι α, β, γ ἅμα ληφθεῖσαι τεσσάρων Ὀρθῶν ἐλάσσονες, ἀλλ’

(1) B. Πόρ τῆς 12. τῷ δ. (2) KB. τῷ α. (3) Δ. τῷ α. (4) Ἐκ κατ. (5) Ἐξ ὑποθ. (6) ΚΔ. τῷ α. (7) Κ. τῷ α.

ἔτως ὥστε τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντα μεταλαμβανομένας, ὑπὸ δὲ τῶν βάσεων αὐτῶν δε, ζη, δι Τρίγωνον (1) τὸ λμν συνιστάσθαι, ἔχον ἐν αὐτῷ τὴν μὲν λμ = δε, τὴν δὲ μν = ζη, τὴν δὲ νλ = δι· ἐφ' ᾧ ἂν νοῶντο δύο τῶν ἰσοσκελῶν Πλευρᾶι αἱ προστεχθεῖς ἀλλήλαις εἰς Εὐθείαν μίαν συνίστασθαι, ἀμελείτοι τὰς μὲν γι εἰς τὴν φλ, τὰς δὲ αε εἰς βζ εἰς τὴν φμ, τὰς δὲ βη εἰς γθ εἰς τὴν φν, συνισχυμένης τῆς κατὰ τὸ φ σφραγῆς Γωνίας ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων Γωνιῶν α, β, γ, εἰς συνεξισχυμένων ἀλλήλαις τῶν φλ, φμ, φν. Τῶν οὕτω προτεθέντων, εἰς περὶ τὸ Τρίγωνον λμν (2) Κύκλος περιγραφῆ, ἡ κέντρος φξ, ἡ ἀπὸ τῆς σφραγῆς Γωνίας ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον τῷ Κύκλῳ καταγομένη, ἐπ' αὐτὸ τὸ Κέντρον πεσεῖται.

Τῶν γὰρ ξλ, ξμ, ξν ἡγμένων, ἐπὶ τῶν ὀρθογωνίων Τριγώνων ξφλ, ξφμ, ξφν, ἔσσι (3) $\phi\lambda^T = \phi\xi^T + \lambda\xi^T$, καὶ $\phi\mu^T = \phi\xi^T + \mu\xi^T$, καὶ $\phi\nu^T = \phi\xi^T + \nu\xi^T$. Καὶ εἰς τοῖνον ἀπὸ ἐκάστου τῶν ἰσῶν Τετραγώνων (4) $\phi\lambda^T$, εἰς $\phi\mu^T$, εἰς $\phi\nu^T$, ἀφαιρεθῇ τὸ $\phi\xi^T$, καταλειφθήσεται τὰ $\lambda\xi^T$, καὶ $\mu\xi^T$, εἰς $\nu\xi^T$ ἀλλήλοισι ἴσα, ὥστε καὶ αἱ ξλ, ξμ, ξν ἴσαι ἔσονται Εὐθεῖαι· καὶ ἐπομένως ὁ διὰ λ, εἰς μ, εἰς ν διπλὸν κύκλος, τὸ Κέντρον ἔχει (5) κατὰ τὸ ξ.

Ἡ δὲ τῆς Προτάσεως ἀλήθεια σαφής, καὶ ὁξυγώνιον ἢ τὸ λμν Τρίγωνον, καὶ ὀρθογώνιον, καὶ τέως ἀμβλυγώνιον. Ὅρα τὸ Σχόλι. τῆς Ε' Προτ. τῷ Δ'. Βιβλίῳ, εἰς παράδειγμα τὰ ἐκείνη ἐν ἀριθμ. Β'. Σχήματα τοῖς ἐν ταῦτα προκείμενοις τριπλ.

Π ό ρ ι σ μ α .

Τῶν τοιούτων ἰσοσκελῶν Τριγώνων αδε, βζη, γδι τεθέντων, εἰς ἐκ τῶν κατ' αὐτὰ βάσεων Τρίγωνον τὸ λμν συσταθῇ, ἔσσι τῶν ἰσῶν σκελῶν ὅποιον ὣν εἶεν τὸ αδ, ἢ τὸ αε, ἢ τὸ βζ, κξ: μείζον τῆς ἡμιδιαμέτρου τῷ Κύκλῳ τῷ περὶ τὸ Τρίγωνον τὸ λμν περιγεγραμμένῳ. Καὶ γὰρ αδ (6) = φλ, εἰς ἐπὶ τῷ ὀρθογωνίῳ Τριγώνῳ ξφλ, ἡ πλευρὰ φλ ἡ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν Γωνίαν, μείζον ἐστὶ (7) τῆς ξλ τῆς ὑποτείνουσας (8) τὴν ὀξείαν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΓ.

κ. 444.445. „Εἰς τριῶν Γωνιῶν ἐπιπέδων (α, β, γ), ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες

(1) Διὰ τὴν ἐν χειρὶ ταύτην εἰς τὴν ΚΒ. τῷ α'. (2) Ε. τῷ δ'. (3) ΜΕ τῷ α'. (4) Α'Ε. ΙΕ. τῷ α'. (5) Θ. τῷ γ'. (6) Ε'κ κατ. (7) ΙΘ. τῷ α'. (8) Ε. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'.

„εἰς πάντα μεταλαμβανόμεναι (1), κερεῶν Γωνίαν συστήσασθαι. Δεῖ δὲ (2)
„τὰς τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι.

Γινέσθωσαν ἅπασαι αἱ τῶν Γωνιῶν Πλευραὶ (τετέστιν αἱ αδ, αε, βδ, βη, γδ, γι) ἀλλήλαις ἴσαι· καὶ ἐπιζευχθεῖσιν τῶν δε, ζη, δι, συνεσχύσθω (3) Τρίγωνον τὸ λμν, ὅστις ἂν αἱ Πλευραὶ λμ, μν, νλ, ταῖς δε, ζη, δι ἴσαι εἶεν, ἐκάστη ἐκάσῃ, καὶ περὶ τὸ Τρίγωνον (4) Κύκλος γεγράφθω, οὗ Ἡμιδιάμετρος ἡ ξλ. Καὶ ἐπειδὴ τῶν Γωνιῶν α, β, γ ἐκάστη τῶν Πλευρῶν τῆς Ἡμιδιαμέτρου ξλ (5) μείζων ὅσα ἐστὶν, ἔσαι ἔξ τὸ αδ^τ μείζον τῆ ξλ^τ. Εὐρεθήτω τοῖνον (6) Πλευρά τις ξφ Τετραγώνου, ᾧ ἂν τὸ αδ^τ ὑπερέχῃ τὸ ξλ^τ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κέντρου ξ ἀνισχύσθω (7) ξφ, τῷ ἐπιπέδῳ τῆ Κύκλου ὀρθῇ, ἐπεξεύχθωσαν τε αἱ φλ, φμ, φν. Δέγω δὲ ὡς ἐγένετο τὸ ζητούμενον.

Εἵπειδὴ γὰρ ἡ ξ Γωνία ἐπὶ τῇ ξφλ Τριγώνῳ ὀρθή, ἔσαι φλ^τ = (8) φξ^τ + ξλ^τ = αδ^τ (9), καὶ φλ = αδ. Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται, ὅτι ἔξ φμ = αε. Εἵπει δὲ ἔξ λμ = δε, ἔσαι (10) ἡ ὑπὸ λφμ Γωνία = Γωνία τῇ α. Ὡσαύτως δειχθήσεται ὡς ἔξ ὑπὸ μφν = β, καὶ ἡ ὑπὸ νφλ = γ. Γέγονε τοῖνον τὸ ζητούμενον.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΔ.

„Τὰ ἐπίπεδα τὰ τὸ Παραλληλεπίπεδον περιέχοντα, Α'. Παραλληλό-
„γραμμα εἰσὶ. Β'. τὰ ἀπεναντίον ὅμοια. Γ'. καὶ ἴσα.

Μέρος Α'. Τὸ ἐπίπεδον αζ τὸ τέμνον τὰ ἐπίπεδα βδ, ζθ, τὰ ἐκ τῆ κ. 446.
ΙΓ. Ὄρισμ. παράλληλα, ποιεῖ (11) τὰς βα, ζε τομαὶς παραλλήλους. Πά-
λιν τὸ ἐπίπεδον αζ τὸ τέμνον τὰ ἐπίπεδα αδ, βη, τὰ ἐκ τῆ ΙΓ'. Ὄρι-
σμὸς παράλληλα, ποιεῖται τὰς τομαὶς (12) αε, βδ παραλλήλους· ὥστε τὸ
βασεζ παραλληλόγραμμον εἶσι. Τῷ δ' αὐτῷ τέτῳ λόγῳ ἔξ τὰ λοιπὰ τῶ
Παραλληλεπιπέδου ἐπίπεδα παραλληλόγραμμα ὄντα δειχθήσεται.

Μέρος Β'. Εἵπειδὴ κατὰ τὸ Α'. Μέρος αἱ αβ, βγ, παράλληλοι εἰσὶ
ταῖς εζ, ζη, ὅνουνται δὲ (13) αἱ ὑπὸ αβγ ἔξ εζη ἴσαι ἀλλήλαις. Τὰ ἄρα
Παραλληλόγραμμα βδ ἔξ ζθ ἰσογώνια (14) εἰσὶ. Ταύτητοι ἐπεὶ ἔξ αἱ Πλευ-
ραι τέτοις ἐναλλάξ ἴσαι εἰσὶ (15), τετέστιν ἡ μὲν αβ = εζ, ἡ δὲ βγ =

(1) Ἐκ τῆς Κ. τῷ ια'. (2) Ἐκ τῆς ΚΑ. τῷ ια'. (3) ΚΒ. τῷ ια'. ἔξ ΚΒ. τῷ α'. (4) Ε. τῷ δ'. (5) Διὰ τὸ Πόρ. τὸ τῷ ἀντ. Σχολίον. (6) Κατὰ τὸ Β. Πρόβλημα τῷ Σχο-
λίῳ τῷ μετὰ τὴν ΜΖ. τῷ α'. (7) ΙΒ. τῷ ια'. (8) ΜΖ. τῷ α'. (9) Ἐκ κατασκευ. (10)
Η. τῷ α'. (11) Ιε. τῷ ια'. (12) Διὰ τὴν αὐτ. (13) Ι. τῷ ια'. (14) ΚΖ. ἔξ ΛΔ. τῷ α'.
(15) ΛΔ. τῷ α'.

ζη, ἡ δὲ γδ = ηδ, καὶ ἡ δα = δε, ὅμοια δὴ πῦ (1) ἔσαι τὰ ἀπεναντίον Παραλληλόγραμμα βδ, ζθ. Ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται καὶ τῶν ἀπεναντίον τὰ λοιπὰ εἶναι ὅμοια.

Μέρος Γ'. Δῆλον αὐτὸ ἔκτε τῶν Α'. Μέρους, καὶ τῆς Δ'. ἢ τῆς Η'. τῶν Α'.

Ἐπιζευχθεῖσων γὰρ τῶν αγ, εη, ἐπειδὴ ἐπὶ τῶν Τριγώνων αβγ, εζη, αἱ Πλευραὶ αβ, βγ, ταῖς Πλευραῖς εζ, ζη, ἐτέρᾳ τῇ ἐτέρᾳ ἴσαι εἰσὶν (2), ἥτε ὑπὸ αβγ τῇ ὑπὸ εζη (3) ἴση, καὶ Βάσις αγ Βάσει εη ἴση (4) ἔσαι, καὶ Τρίγωνον τὸ αβγ Τρίγωνῳ τῷ εζη ἴσον. Ἀλλὰ τὰ ἀπεναντίον Παραλληλόγραμμα βδ, ζθ τῶν Τριγώνων (5) ἐκείνων διπλασίονα εἰσι, ἔσαι τὰ Παραλληλόγραμμα ἴσα. Ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται καὶ δύο ὁποιαῦν τῶν ἀπεναντίον Παραλληλόγραμμα ἴσα ἀλλήλοις εἶναι.

Π ο ρ ί σ μ α τ α .

α. 447. Α'. Τὸ Παραλληλεπίπεδον αβ, ἡ καὶ Πρίσμα ὁποιοῦν ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων γδ τεμνόμενον τῇ τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις ασ, ρβ παραλλήλῳ, τομὴν ποιεῖται τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις ὅμοιαν τε καὶ ἴσην. Δειχθήσεται δὲ ὥσπερ ἐδείκνυται τῆς Προτάσ. ἄνωτ. τὸ Β'. καὶ τὸ Γ'.

Β'. Τῇ δ' αὐτῇ τομῇ τὰ περατῶντα Παραλληλόγραμμα αζ, σζ, κτ., διαιρεθήσεται εἰς μέρη (6) Παραλληλόγραμμα τὰ αν, γζ, καὶ σν, δζ, κξ: ὅμοια (7) τοῖς μέρεσι σδ, δβ, εἰς αὐτὰ πᾶσα Εὐθεῖα τῶν κατὰ τὰς Πλευρὰς, οἷον ἡ σβ, τῇ αὐτῇ τομῇ κατατέμνεται.

Καὶ παρὰ ταῦτα, εἰάν τὸ σρεθὲν τὸ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλῳ τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τμηθῇ, παραλληλεπίπεδον ᾗ, τὰ Παραλληλόγραμμα μέρη τὰ ἀλλήλοις ἀντίθετα, εἰς αὐτὰ διατέμνονται τὰ ἀπεναντίον πλευρικὰ Ἐπίπεδα, ὅμοιά τε (8) ἔσονται καὶ ἴσα.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΕ.

α. 448. „Εἰάν σρεθὲν Παραλληλεπίπεδον (αβ), ἡ καὶ Πρίσμα ὁποιοῦν, ἐπιπέδῳ (γδ) τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσαι ὡς ἡ Βάσις εδ πρὸς τὴν Βάσιν δζ, ἥτω τὸ σρεθὲν αδ πρὸς τὸ σρεθὲν γβ.

Δείκνυται τὸν αὐτὸν τρόπον ὡς καὶ ἡ Α'. τῶν ζ'.

(1) Σχόλ. τῆς Ζ. τῶν ε', καὶ Ὁρ. Α. τῶν ζ'. (2) ΑΔ. τῶν α'. (3) Ι. τῶν ια'. (4) Α. τῶν α'. (5) ΑΔ. τῶν α'. (6) Εκ τῶν Α. Μέρους τῆς Προτ. (7) Α. τῶν ζ'. καὶ Ὁρ. Ζ. τῶν ε'. (8) Β. καὶ Γ. Μέρους τῆς Προτ.

Διαιρεθήτω ἡ δβ Εὐθεΐα εἰς ἴσα ὅποσαδήποτε μέρη, ὅον εἰς τέττα-
 ρα δη, κδ, δι, ιβ· καὶ ἐπὶ τῆς Βάσεως δζ, διὰ τῶν σημείων τῶν διαιρέ-
 σεων η, θ, ι, ἀχθήτωσαν Εὐθεΐαι ηκ, θλ, ιμ, ταῖς τῆς Βάσεως δζ ἀ-
 πεναντίον Πλευραῖς δν, βζ, παράλληλοι. Καὶ ἔτως ἡ Βάσις εἰς τέτταρα
 (1) ὁμοιά τε, κ ἴσα (2) Παραλληλόγραμμα διαιρεθήσεται τὰ δκ, ηλ, θμ,
 ιζ, δι ὧν δὴ τῶν Πλευρῶν ηκ, θλ, ιμ, διερχέσθωσαν τὰ ἐπίπεδα κξ,
 θφ, ιπ, τοῖς τῷ σερεῦ ἐπιπέδῳ γβ ἀπεναντίον ἐπιπέδοις γδ, ρβ παράλ-
 ληλα. Καὶ ἡτω διαιρεθήσεται ἐκεῖνο εἰς ἐπίπεδα σερεῦ τέτταρα, τὰ δξ, ηφ,
 θπ, ιρ, ὧν ἕκασον (3) ὁμοίοις τε, κ ἴσοις πλήθει τε κ μεγέθει ἐπιπέδοις
 περιεχόμενον ἐστὶ, κ διὰ τῆτο ἀλλήλοισι (4) ἴσα τυγχάνει. Ταύτητοι τὸ
 ἐπίπεδον δκ, κ τὸ σερεῖον δξ εἰσὶ τῶν ἐπομένων τῶν δζ κ γβ μόρια (5)
 ὁμοία. Ἀφηρήσθω τοίνυν ἡ Εὐθεΐα δη ἀπὸ τῆς δσ ὁσάκις ἂν ἐξῇ, ὅον
 δις, κ ὑπολειφθήσεται στ τῆς δη ἐλάσσων· ἀπὸ δὲ δὴ τῶν σημείων τῶν
 διαιρέσεων υ κ τ, ἀχθήτωσαν Εὐθεΐαι, ταῖς τῆς Βάσεως ἐδ Πλευραῖς ταῖς
 ἀπεναντίον εσ, ιδ παράλληλοι, κ δι αὐτῶν ἀχθήτω τὰ ἐπίπεδα τοῖς ἀ-
 πεναντίον τῷ σερεῦ ἀδ ἐπιπέδοις ασ, γδ παράλληλα. Καὶ ἐπειδὴ αἱ δυ,
 υτ, τῇ δη ἑκατέρᾳ ἴση ἐστὶν, ἔσαι (6) κ τὰ Παραλληλόγραμμα νυ, υχ,
 τῷ Παραλληλογράμμῳ δλ ὁμοιόν τε, κ ἴσον ἑκάτερον· καὶ δὴ κ ἑκάτερον
 τῶν σερεῶν γυ, υψ, τῷ σερεῖ δξ (ἅτε δὴ ὁμοίοις (7) τε κ ἴσοις πλή-
 θει τε κ μεγέθει ἐπιπέδοις περιεχόμενα) (8) ἴσον. Ἀλλὰ γὰρ διὰ τὴν στ
 Εὐθεΐαν, ἣτις τῆς δη ἐλάσσων ἐστὶν, ἔσαι κ ἡ Βάσις ετ τῆς Βάσεως δκ
 ἐλάσσων (9), κ τὸ σερεῖον ατ τῷ σερεῖ δξ ἐλάττον (εἰν γὰρ τῶν σερεῶν
 τῶν, ἐπὶ ἐπιπέδων ἴσων ὄντων τῶν ασ, γδ, ἐντὸς δατέρῃ δατέρῃ συ-
 σταθῆναι ὑποτεθῇ, διὰ τὴν στ ἐλάσσονα ἔσαν τῆς δη, τὸ σερεῖον ατ μέρει
 τινὶ μόνον τῷ σερεῖ δξ συνεξισωθήσεται). Ὅσάκις τοίνυν τὸ ἐπίπεδον δκ
 περιέχεται ἐν τῷ ἡγμένῳ δε, τοσάκις κ τὸ σερεῖον δξ ἐν τῷ ἡγμένῳ
 εα ἔσαι περιεχόμενον. Καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον δεῖξαι δυνατόν, ὅσα δὴ ποτε
 τῶν ἐπομένων (τῆς τε βάσεως δζ κ τῷ σερεῖ γβ) ὁμοία μόρια ἐν τοῖς ἡ-
 γμένοις (τῇ τε βάσει ἐδ κ τῷ σερεῖ ἀδ) ἰσαριθμῶς ἐμπεριέχεσθαι. Ἄρα
 (10) βάσις ἐδ πρὸς βάσιν δζ, ὡς τὸ σερεῖον ἀδ πρὸς τὸ σερεῖον γβ. Ο. Ε. Δ.

(1) ΚΖ. τῷ α'. κ Σχόλ. τῆς Ζ. τῷ ε'. μετὰ τῷ Δ'. Ὁρ. τῷ ε'. (2) Ας. τῷ α'. (3)
 ΚΔ. τῷ ια', μετὰ τῶν Πορ. (4) ΙΕ. Ὅρισ. τῷ ια'. (5) Ζ. Ὅρ. τῷ ε'. (6) Διὰ τὰ ἐν
 (1) κ (2) ἀνωτ. σημείωδ. (7) Διὰ τὴν ἀνωτ. μετὰ τῶν Πορ. (8) Ὅρ. ΙΕ. τῷ ια'. (9)
 Α. τῷ ε'. (10) Διὰ τὸ τῶν ἴσων λόγων γινώρισμ. τὸ ἐν τοῖς Ὅρισμ. τῷ ε'.

Π ρ ό τ α σ ι ς Κς.

α. 450.

„Πρὸς τῇ δοθείσῃ Εὐθείᾳ (αβ), ἡ τῷ· πρὸς αὐτῇ Σημείῳ (α), τῇ „δοθείσῃ σερρεᾷ Γωνίᾳ (γδεζ) ἴσην σερρεάν Γωνίαν συζηήσασθαι (τὴν αθιλ).

Σημείωσαι ὅτι τῶν γραμμάτων δι' ὧν ἡ σερρεᾷ Γωνία εἰώθεν ἐπισημαίνεσθαι, τὸ πρῶτον τασσόμενον εἰς τὸ κατὰ τὸ Σημεῖον, ἐν ᾧ ἡ Γωνία καίται· οὕτως ἡ σερρεᾷ Γωνία αθιλ εἰς πρὸς τῷ α, ἡ ἡ γδεζ εἰς πρὸς τῷ γ.

Α'πὸ τῷ τυχόντος σημείῳ ζ τῶν ἐπὶ τῆς Εὐθείας γζ, ἄγε (1) τὴν ζη, τῷ ἐπιπέδῳ δγβ ὀρθήν, καὶ ἐπίζευξον Εὐθείας τὰς δζ, ζε, εη, ηδ, ηγ, καὶ ποίησον τὴν αδ = γδ, ἡ Γωνίαν τὴν ὑπὸ θαι = δγε, ἡ τὴν αι = γε· ἐν δὲ τῷ θαι ἐπιπέδῳ ποίησον Γωνίαν τὴν ὑπὸ θαι = Γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δγη, ἡ ακ = γη. Εἴτα ἀνάστησον (2) τὴν κλ ὀρθὴν τῷ ἐπιπέδῳ θαι, ἡ ἔσω κλ = ηζ, ἡ ἐπεζεύχῃς ἡ αλ. Οὕτω γὰρ ἔσαι ἡ σερρεᾷ Γωνία αθιλ ἴση τῇ δοθείσῃ γδεζ· ἐπιζευχθεῖσιν γὰρ τῶν θκ, ικ, δλ, ιλ, διὰ τὰς θα, ακ, αὐταῖς δγ, γη ἴσαι εἰσὶν ἑτέρα τῇ ἑτέρᾳ, ἡ τὰς ὑπὸ θαι ἡ δγη ἴσαι ὕσαι, ἔσαι (3) ἡ ἡ θκ = δη. Παραπλησίως δὲ τῇ παραδέσει τῶν Τριγώνων ιακ, εγη, δειχθήσεται (4) κι = ηε· καὶ ἐπὶ τῶν Τριγώνων θκλ, δηζ (5) δειχθήσεται θλ = δζ· καὶ ἐπὶ τῶν Τριγώνων ικλ, εηζ, ἡ ιλ = εζ· καὶ ἐπὶ τῶν Τριγώνων αελ, γηζ, ἡ αλ = γζ· Τὰ τοῖνυν Τρίγωνα αθλ, γδζ ἀλλήλοις ἰσόπλευρα εἰσι, ἡ δὲ (6) ἡ ἰσογώνια· ὅθεν ἡ ὑπὸ θαι = δγζ. Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον, καὶ τοῖς ἰσοπλευροῖς Τριγώνοις αελ, γεζ, ἡ ὑπὸ λαι = ζγε, ἀλλὰ ἡ ἡ ὑπὸ βαι = δγε (7). Εὔχρηστον ἄρα τὸ ζητούμενον.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΖ.

α. 451.

„Α'πὸ τῆς δοθείσης Εὐθείας (αβ), τῷ δοθέντι σερρεῷ Παραλληλεπίπεδῳ „(γδ) ὁμοίον τε, ἡ ὁμοίως κείμενον σερρεὸν Παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Ἐν Γωνίαις ἐπιπέδοις βαθ, θαι, βαι, αὐταῖς εἶναι ταῖς ζγε, εγη, ζγη, συνεσχίσθω Γωνία σερρεᾷ ἡ α (8) τῇ σερρεᾷ Γωνίᾳ γ ἴση. Ἔτι δὲ ἔσω (9) ζγ : γε :: βα : αθ, καὶ γε : γη :: αθ : αι· Καὶ οὕτως ἔσαι δι' ἴση (10) ζγ : γη :: βα : αι. Πληρῶσω δὲ τὸ Παραλληλεπίπεδον ακ· τῷ γὰρ ὁμοίον ἔσαι τῷ δοθέντι.

(1) Διὰ τὴν ΙΔ. τῷ ια'. (2) ΙΒ. τῷ ια'. (3) Δ. τῷ α'. (4) ΔΕ. Γ. ἡ Δ. Πρὸς τῷ α'. (5) Διὰ τὸν Γ. Οε. τῷ ια'. ἡ Δ. Πρὸς τῷ λ'. (6) Η. τῷ α'. (7) Εὐκ. κατασκευ. (8) Διὰ τὴν ἀναγ. (9) ΙΒ. τῷ ε'. (10) ΚΒ. τῷ ε'.

Ἐκ γὰρ τῆς κατασκευῆς τὰ Παραλληλόγραμμα βθ, ζε, ε, δι, εη, ε, βι, ζι ὅμοια ἐσὶ, καὶ τῶν τὰ ἀπεναντίον (1) ἐκείνων τοῖς ἀπεναντίον· Ὡς τὰ ἐξ ἐπίπεδα τῷ σερεῦ ακ, τοῖς ἐξ ἐπιπέδοις τῷ σερεῦ γδ ὅμοια ὄντα ἐσὶ, καὶ ἐπομένως (2) τὰ σερεῖ ακ, γδ ὅμοια ἐσὶ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΗ.

„Εἰν σερεὺν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ κατὰ τὰς Διαγωνίους (αγ, εη) τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ σερεὺν ὑπὸ τῷ ἐπιπέδῳ.

κ. 452.

Ἐπειδὴ (3) βη καὶ βε Παραλληλόγραμμα ἐσὶν, αἱ γη, αε παράλληλοι εἰσὶ τῇ αὐτῇ βζ· ἄρα καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι εἰσὶ (4), καὶ ἐπομένως ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἔσται εἰσὶν· ὥς αἱ Εὐθεῖαι αγ, εη (5) ἐν ἐνὶ καὶ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ εἰσὶ. Ἦδη δὲ ὡς τῷ δι αὐτῶν ἐπιπέδῳ, τέμνεται τὸ παραλληλεπίπεδον εἰς δύο Πρίσματα ἴσα, ὥς πως δεικνυμι.

Νοεῖδω τὸ Πρίσμα σεηγδθ, ἐπὶ τῷ ἰδίῳ ἐπιπέδῳ εαγη ἥτω κείμενον, ὡς τὰς Γωνίας δ, θ, ἔχειν ἀποκλινέσας πρὸς τὰς Γωνίας β, ζ, καὶ φανερόν ὡς ἔτι μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων βαδγ, ζεδθ κείσεται, καὶ τέως δὴ μετὰ τὴν ἐφάρμοσιν συμπεσεῖται μὲν τὸ δ τῷ β, συμπεσεῖται δὲ τὸ θ τῷ ζ, ἐπὶ τὸ αὐτό· Πιπτετω γὰρ εἰ δυνατόν τὸ δ ἐξω τῷ β, εἶον κατὰ τὸ ν· ἢ μὲν οὖν ὑπὸ βαγ = (6) δγα· ἀλλ' ἢ ὑπὸ δγα = ναγ (ἢ γὰρ αὕτη Γωνία ἐστίν)· Ἄρα αἱ βαγ καὶ ναγ ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις, ὅπερ ἄτοπον. Συμπεσεῖται τοίνυν τὸ θ σημεῖον τῷ β, καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὸ θ τῷ ζ, ὥς τὸ Πρίσμα σεηγδθ προσεφαρμόζεται τῷ Πρίσματι αγηεζβ, καὶ ἐπομένως (7) ἴσα ἐσὶ.

Αὕτη ἡ κατὰ Τακτικὸν δειξις, τοῖς μὲν ὀρθαῖς τῶν Παραλληλεπιπέδων, ὧν ἀμέλει τὰ κατὰ πλευρὰν ἐπίπεδα ταῖς βάσεσι πρὸς ὀρθὰς ἵσταται, προσήκισα ἐστὶ· τυχὸν δὲ καὶ ἐνός τινος, ἢ δευτέρῃ εἰδῆς τῶν πλαγίων ἐκ ἀλλοτρίως ἔχει· Ἐπειδὴ μὲντοι ἐν ταῖς ἐφεξῆς Προτάσεσι τῷδετε, καὶ τῷ μετὰ τούτῳ Βιβλίῳ, ἐπὶ τὰ Παραλληλεπίπεδα καθόλου ὅπως ἂν καὶ ἔχοι, ὑποτίθεται ἡ δειξις ἐκτεταμένη, ἐπ' ἀναγκῆς ἐστὶν ἐπὶ τὸν κατ' Εὐκλείδην σωλογισμὸν ἀναδραμεῖν, δι' οὗ ἐπ' ἀκριβὲς ἀποδείκνυται, πάντα πάντῃ τὰ παραλληλεπίπεδα, τὰ ἐπιπέδῳ τῷ αη, κατὰ τὰς Διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων

(1) ΚΔ. τῷ ια'. (2) Ὅρισμ. Θ. τῷ ια'. (3) ΚΔ. τῷ ια'. (4) Διὰ τὴν Θ. τῷ ια'. (5) Ζ. τῷ ια'. (6) ΚΖ. τῷ α'. (7) Α'ε. ζ'.

αγ, εη τεμνόμενα, δίχα (ὅπερ εἰς Πρίσματα δύο ἴσα τε ἀλλήλοις ὄντα, καὶ δὴ καὶ ὁμοία) διατέμεσθαι.

Τρίγωνον γὰρ Τριγώνω ἴσον τὸ αβγ τῷ αδγ (1), καὶ (διὰ τὴν ἰσότη-
τα τῶν Γωνιῶν (2) β καὶ δ, καὶ τῶν (3) βαγ, δγκ, καὶ τῶν βγα, δαγ) ὁμοιον
(4). Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον καὶ τὰ εζη, εδη Τρίγωνα ἴσα τε καὶ ὁμοία εἰσιν·
ἴσα δὲ δὴ καὶ ὁμοία (5) καὶ τὰ ἀπεναντίον Παραλληλόγραμμα αζ καὶ γδ, καὶ εἴ-
τα βη καὶ αδ· τὸ δὲ αη ἀμφοῖν κοινόν· Τὰ ἄρα Πρίσματα αβγhez καὶ αδγhez,
ὑπὸ ὁμοίων τε καὶ ἴσων πλήθειτε καὶ μεγέθει ἐπιπέδων περιεχόμενα, ὁμοία τε
εἰσιν (6) ἀλλήλοις καὶ ἴσα. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΘ. καὶ Λ.

κ. 453.

„Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς Βάσεως ὄντα (εζιμ), καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ διὰ
„τῆτο ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις (εζιμ, ηαξλ) τυγχάνοντα σερεῖα Παραλ-
„ληλεπίπεδα (ζεσηκιμγ καὶ ζεβδλεξιμ), ἴσα ἀλλήλοις εἰσιν.

Ἦτοι γὰρ μεταξὺ τῶν κατὰ πλευρὰν παραλλήλων ἐπιπέδων εαξμ καὶ
ζηλι ὕψιζαται, ἢ ὅχι· Ἐςω δὴ τὸ Α'. ἐκ γυν τῆς ΚΔ'. τῇ παρόντος καὶ τῆς
Η'. τῇ Α'. Βιβλίῳ, δῆλον ὅτι τὰ Τρίγωνα αεβ, γμξ, καὶ τὰ ηδδ, κλ ἰσο-
πλευρά τε εἰσιν ἀλλήλοις καὶ ἰσογώνια· Ταύτητοι ὡς ἐπὶ τῆς προλαβύσης,
δειχθήσεται τὰ Πρίσματα γμξλικ, αεβδζη ἀλλήλοις ἐπιτιθέμενα συνεφαρ-
μόζειν τε, καὶ ἴσα (7) τυγχάνειν· Καὶ κοινὴ ἄρα τῇ σερεῖ ζεβδλαγμ προσε-
θέντος, τὰ ὅλα Παραλληλεπίπεδα ζεσηκιμγ, ζεβδλεξιμ ἴσα εἶναι. Ο. Ε. Δ.

Ἄλλως. Ἐν τοῖς Παραλληλογράμμοις αεμγ, βεμξ αἱ ἀπεναντίον Πλευ-
ραὶ (8) ἴσαι ἀλλήλαις, τετέστιν αε = γμ, βε = ξμ, αγ = εμ = βξ, καὶ ἀρ-
θείσης τῆς κοινῆς βγ, αβ = γξ· ἄρα τὰ αβε. γξμ Τρίγωνα, ἀλλήλοις
ἰσόπλευρα εἰσιν, καὶ ἐπομένως (9) ἴσα. Ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται καὶ τὰ Τρίγω-
να ζηδ, κλ ἴσα ἀλλήλοις εἶναι, τὰ δὲ ἀπεναντίον τῶν Παραλληλεπιπέδων
ἐπίπεδα ἴσα (10) καὶ αὐτά, τετέστιν αζ = γι, καὶ βζ = ξι, καὶ ακ = ει = βλ·
διὸ καὶ τῇ κοινῇ βκ ἀφαιρεμένῃ, ἔσται αδ = γλ. Τοιγαρὺν τὰ Πρίσματα αεβ
δζη καὶ γμξλικ, ὡς ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων καὶ ἴσων πλήθειτε καὶ μεγέθει πε-
ριεχόμενα (11), ἴσα ὄντα εἰσιν· κοινὴ δὲ τέτοις προσεθέντος τῇ σερεῖ, ἢ Βά-
σις ἢ ζμ, καὶ ἐπίπεδον ταύτῃ ἀπεναντίον τὸ βκ, τὰ ὅλα Παραλληλεπίπεδα
ζεσηκιμγ, ζεβδλεξιμ ἴσα εἶναι. Ο. Ε. Δ.

(1) ΑΔ. τῷ α'. (2) Διὰ τὴν αὐτ. (3) ΚΖ. τῷ α'. (4) Δ. τῷ ε'. (5) ΚΔ. τῷ ια'. (6)
Ορ. ΙΒ. τῷ ια'. (7) Αξ. ζ. (8) ΑΔ. τῷ α'. (9) Η. τῷ α'. (10) ΚΔ. τῷ ια'. (11) ΙΒ. Ορ. τῷ ια'.

Α'λ' εἴπερ ἄρα τὸ Παραλληλεπίπεδον ζῆπεμιφρ, μὴ μεταξὺ εἴη τῶν αὐτῶν πλευρικῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῷ Παραλληλεπίπῳ ζεσηκγμι, ἐπεὶ ἐξ ὑποθ. ηκ, αγ, ρπ, χφ, ἐν τῷ αὐτῷ εἰσιν ἐπιπέδω παραλλήλῳ ὄντι πρὸς τὴν Βάσιν εζιμ, αἱ ρφ ἔχ' πχ τεμνέτωσαν τὴν μὲν ηκ κατὰ θ καὶ λ, τὴν δὲ αγ κατὰ β ἔχ' ξ, ἐπεξούχθωσαν δὲ εβ, μξ, ζθ, ιλ. Καὶ ἦτω ῥᾶσα δειχθήσεται, ὡς τὰ ἐπίπεδα οἷς τὸ σρεὸν ζεβθλξιμ περιέχεται Παραλληλόγραμμα, εἰς ἀπεναντίον ἀλλήλοις παράλληλα· τὰ γὰρ ἀπεναντίον ἐπίπεδα τὰ Τετράπλευρα τῇ σρεεὺ τέτω, ἐν τοῖς αὐτοῖς εἰσιν ἐπιπέδοις, ἐν οἷς ἔχ' τὰ ἀπεναντίον τῶν παραλληλεπιπέδων αζιγ ἔχ' πζιρ, ἔχ' ἐπομένως (1) παράλληλα ἐςί. Τῇ γὰρ σρεεὺ βζιξ τὰ ἀπεναντίον Τετράπλευρα βεμξ, θζιλ, ἐν τοῖς αὐτοῖς εἰσιν ἐπιπέδοις, ἐν οἷς τὰ ἀντίθετα αγμε ἔχ' ηκιζ ἐπίπεδα τῷ Παραλληλεπίπῳ αζιγ. Καὶ πάλιν τῇ αὐτῇ σρεεὺ βζιξ τὰ ἀπεναντίον Τετράπλευρα βεζθ ἔχ' μελι, εἰσιν ἐν τοῖς αὐτοῖς ἐπιπέδοις, ἐν οἷς ἔχ' τὰ ἀντίθετα πεζχ ἔχ' μιφρ τῇ Παραλληλεπίπῳ πζιρ. Ἐςί δὲ τὸ Παραλληλόγραμμα εἰ τῷ τε σρεεὺ ἐκείνῳ ἔχ' τοῖς παραλληλεπιπέδοις κοινόν· τὸ δὲ Τετράπλευρον βξλθ εἰς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, ὃ τῷ εἰ (ἐξ ὑποθ.) παράλληλον ἐςί, δῆλον ἄρα ὅτι τὸ σρεὸν βζιξ ὑπὸ ἐπιπέδων Τετραπλεύρων, ὧν τὰ ἀπεναντίον ἀλλήλοις παράλληλα, περιεχόμενον. Καὶ τοίνυν παραλληλεπιπέδω τυγχάνοντι (2) τῷ σρεεὺ ἐκείνῳ, ἐπεὶ (διὰ τὸ Α'. μέρος) τὰ Παραλληλεπίπεδα ζῆπεμιφρ ἔχ' ζεσηκγμι ἴσα ἐςί, φανερόν ὅτι ἔχ' ἀλλήλοις ταῦτα ἴσα ἐςί. Ο. Ε. Δ.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Παραπλησίᾳ ἐστὶν ἡ Πρότασις αὕτη τῇ ΔΕ'. τῇ Α'. Βιβλίῳ, ταῦτα περὶ τῶν σρεεῶν, οἷς ἐκείνη περὶ τῶν ἐπιπέδων κατασκευάζουσα. Ἐνδυντοὶ ἔχ' κατὰ τὰς λοιπὰς διαφορὰς παραπλησίως ἐκείνη ἀποδειχθήσεται.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΔΑ.

„Τὰ ἐπὶ ἰσῶν Βάσεων ὄντα τῶν (αξ ἔχ' εη) σρεεῶν Παραλληλεπίπεδα, ἔχ' ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος (σ), ἴσα ἀλλήλοις ἐςί. κ. 455.

Ἐχέτω δὴ τὰ Παραλληλεπίπεδα πρῶτον τὰς Πλευρὰς καθέτης ταῖς βάσεσι· καὶ τοίνυν παρὰ τὴν ζη Πλευρὰν προσεβεβλημένην, παραβληθῆτω Παραλληλόγραμμα ηκκθ τῷ Παραλληλογράμῳ αξ ἴσον τε ἔχ' ὁμοιον· καὶ πληρεμέ-

(1) ΚΔ. τῇ ια'. (2) Θρ. ΙΓ. τῇ ια'.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν .

Τὸ ἐνταῦθα περὶ τῶν Παραλληλεπίπεδων ἀποδειχθέν, ἐν τῷ ἐφεξῆς IB'. Βιβλ. Πρωτ. ε'. περὶ τῶν Πυραμίδων, καὶ ἐν τῷ Α'. Πορίσμ. μετὰ τὴν Θ'. Πρωτ. περὶ παντὸς Πρίσματος, καὶ ἐν τῇ ΙΑ. Πρωτάτῃ περὶ τῶν Κώλων, καὶ τῶν Κυλίνδρων ἀποδειχθήσεται.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ΔΓ.

„Τὰ ὅμοια σερρεὰ Παραλληλεπίπεδα (θα καὶ γμ) πρὸς ἄλληλα ἐν τρι- α. 457.
γ, πλαστοῖσι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων Πλευρῶν (αβ, βγ).

Εἴσω Παραλληλεπίπεδα αθ, γμ ὅμοια, καὶ πάντα δῆπερ τὰ ἐπ' αὐτῶν ἐπίπεδα ὅμοια (1) εἶναι, καὶ ἐπομένως αβ : βγ :: εβ : βξ (2), καὶ ζβ : βη :: εβ : βξ· ἔτι δὲ καὶ αἱ Γωνίαι (3) τῶν ἐπιπέδων ἔσονται ἴσαι. Ταχθῆτωσαν οὖν ἡτω τὰ σερρεὰ αθ, γμ, ὡς τὰς μὲν ἴσας Γωνίας ὑπὸ γβξ, αβε, ἀντιθέτως κατὰ κορυφὴν κείσθαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, τὰς δὲ Πλευράς αβ, γβ ἐπ' εὐθείας, καὶ δὴ (4) καὶ τὰς εβ, ξβ, καὶ τὰς ζβ, ηβ, ὁμοίως αὐτὰς ἐπ' εὐθείας. Ἐπὶ γυν τῶν ἐπιπέδων εγ καὶ γξ νοείσθω σερρεὰ ἐφεσώτα, τὸ μὲν κβ συνιστῶν μετὰ τῇ σερρεῇ θα ἐν παραλληλεπίπεδον, τὸ δὲ φξ συνιστῶν ὁμοίως καὶ αὐτὸ μετὰ τῇ κβ ἐν παραλληλεπίπεδον, τό τε φξ καὶ αὐτὸ μετὰ τῇ γμ συνιστῶν ἐν παραλληλεπίπεδον. Τὸ τοίνυν σερρεὸν θα εἰς πρὸς τὸ σερρεὸν κβ (5), ὡς αε πρὸς εγ, τατέσιν (6) ὡς αβ πρὸς βγ, τατέσιν (ὡς εἴξ ὑποθ. ἀνωτέρω δέδεικται) ὡς εβ πρὸς βξ, ἥτοι (7) ὡς εγ πρὸς γξ· ὁπέρ εἰσιν (8) ὡς τὸ αὐτὸ σερρεὸν κβ, πρὸς τὸ σερρεὸν φξ· ὥς συνεχίζεται ὁ αὐτὸς λόγος ἐπὶ τῶν τριῶν σερρεῶν θα, κβ, φξ· Ἡδὴ δὲ τὸ σερρεὸν κβ εἰς πρὸς τὸ σερρεὸν φξ, ὡς Βάσις εγ πρὸς Βάσιν γξ, τατέσιν ὡς εβ πρὸς βξ, ὁ ταυτὸν εἰσιν, ὡς ζβ πρὸς βη (9), ἥτοι ὡς τὸ ἐπίπεδον ζγ πρὸς τὸ ἐπίπεδον γη, ταῦτο δὲ εἰσιν, ὡς τὸ αὐτὸ αὐδὲς σερρεὸν φξ πρὸς τὸ σερρεὸν γμ· Τὰ ἄρα τέτταρα σερρεὰ θα, κβ, φξ, γμ συνεχῶς ἀνάλογον εἰσὶ καὶ τοίνυν ὁ λόγος τῇ Α'. θα πρὸς τὸ Δ'. γμ, τριπλασίον (10) εἰς τῇ λόγῳ τῇ Α'. θα, πρὸς τὸ Β'. κβ, τατέσι (11) τῇ λόγῳ αε πρὸς εγ, τατέσι τῇ λόγῳ (12) τῶν ὁμολόγων Πλευρῶν αβ : βγ. Ο. Ε. Δ.

(1) Θ. Οἱ. ια'. (2) Οἱ. Α. τῷ ε'. (3) Αὐτ. (4) ΙΓ. καὶ ΙΔ. τῷ α'. (5) ΚΕ. τῷ ια'. (6) Α. τῷ ε'. (7) Διὰ τὴν αὐτήν. (8) ΚΕ. τῷ ια'. (9) Αὐτ. ἐδείχθη εἴς ὑποθ. (10) Οἱ. Ι. τῷ ε'. (11) ΚΕ. τῷ ια'. (12) Α. τῷ ε'.

Α λ λ ω ς.

κ. 458. Τῶν ὁμοίων Παραλληλογράμμων $\Delta\alpha$, $\pi\sigma$, ἔσῳσαν ὁμόλογοι Πλευραὶ αὐτῶν $\alpha\beta$ καὶ $\rho\sigma$, $\epsilon\beta$ καὶ $\tau\sigma$, $\zeta\beta$ καὶ $\upsilon\sigma$. Φημί δὴ ὅτι τὸ $\sigma\epsilon\sigma\tau\epsilon\sigma\sigma$ $\Delta\alpha$ ἐστὶ πρὸς τὸ $\sigma\epsilon\sigma\tau\epsilon\sigma\sigma$ $\pi\sigma$, ἐν τριπλασίονι λόγῳ τῆς $\alpha\beta$ πρὸς τὴν $\rho\sigma$.

κ. 459. Προεκβληθήτωσαν αὐτῶν $\alpha\beta$, $\epsilon\beta$, $\zeta\beta$, ἐπὶ γ , ξ , η , ὥστε εἶναι τὰς $\beta\gamma$, $\beta\xi$, $\beta\eta$, ἰσας ταῖς $\rho\sigma$, $\tau\sigma$, $\upsilon\sigma$ ἵται ἐκάστην ἐκάστη, καὶ πληρέσω τὸ Παραλληλόγραμμα $\gamma\xi$, καὶ τὸ Παραλληλεπίπεδον $\gamma\mu$. καὶ διὰ τὴν ὑπὸ $\xi\beta\gamma = (1)$ $\alpha\beta\epsilon = (2)$ $\rho\sigma\tau$, καὶ διὰ τὰς $\beta\gamma$, $\xi\beta$, τὰς ταῖς Πλευραῖς $\rho\sigma$, $\tau\sigma$ ἰσας (3) ἐτέραν ἐτέραν, τὰ Παραλληλόγραμμα $\xi\gamma$, $\rho\tau$, ὁμοιάτε ἔσται καὶ (4) ἰσα. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ὁμοιάτε ἔσται καὶ ἰσα, καὶ τὰ Παραλληλόγραμμα $\gamma\eta$ καὶ $\rho\upsilon$, καὶ μὴν καὶ τὰ $\xi\eta$, $\tau\upsilon$. ἔνθεντοι καὶ τὰ τέτοις ἀπεναντίον Παραλληλόγραμμα (ἤτοι τὰ τοῖς ὁμοίοις καὶ ἰσοῖς ἀντίθετα ἐπ' ἀμφοῖν τῶν Παραλληλεπίπεδων) (5) ὁμοιάτε ἀλλήλοις καὶ ἴσα ἔσται. Καὶ εἰσὶν ἄρα τὰ $\sigma\epsilon\sigma\tau\epsilon\sigma\sigma$ $\pi\sigma$, $\gamma\mu$ (6) ὁμοιάτε καὶ ἰσα. διὸ δὴ τὰ $\sigma\epsilon\sigma\tau\epsilon\sigma\sigma$ $\Delta\alpha$, $\gamma\mu$ (7) ὁμοία καὶ αὐτὰ ἔσται, ὥστε $\alpha\beta : \beta\gamma :: \epsilon\beta : \beta\xi :: \zeta\beta : \beta\eta$. Ἐπὶ τοίνυν τῶν Βάσεων $\epsilon\gamma$, $\gamma\xi$, πληρέσω τὰ Παραλληλεπίπεδα $\beta\kappa$, $\phi\xi$, ἰσοῦψή τῷ παραλληλεπίπῳ $\alpha\delta$, καὶ ἔσται $\alpha\beta : \beta\gamma$ ἢ πρὸς $\rho\sigma$ (8) :: $\epsilon\beta : \beta\xi$, ἢ $\sigma\tau ::$ καὶ $\zeta\beta : \beta\eta$, ἢ $\sigma\upsilon$. τετέστιν (9) $\alpha\epsilon : \epsilon\gamma :: \epsilon\gamma : \gamma\xi :: \zeta\gamma : \gamma\eta$. ἤτοι (10) $\alpha\delta : \beta\kappa :: \beta\kappa : \phi\xi :: \phi\xi : \gamma\mu$, ἤτοι $\pi\sigma$. Ἄρα (11) $\alpha\delta$ ἐστὶ πρὸς $\pi\sigma$, ἐν λόγῳ τριπλασίονι τῷ $\alpha\delta$ πρὸς τὸ $\beta\kappa$. Ἀλλὰ μὴν $\alpha\delta : \beta\kappa :: (12)$ $\alpha\epsilon : \epsilon\gamma :: (13)$ $\alpha\beta : \beta\gamma$, ἢ $\rho\sigma$. ἄρα (14) τὸ $\sigma\epsilon\sigma\tau\epsilon\sigma\sigma$ $\alpha\delta$ ἐστὶ πρὸς τὸ ὁμοιον $\sigma\epsilon\sigma\tau\epsilon\sigma\sigma$ $\pi\sigma$, ἐν τριπλασίονι λόγῳ τῆς Πλευρᾶς $\alpha\beta$ πρὸς τὴν αὐτῆς ὁμόλογον Πλευρὰν $\rho\sigma$. Ο. Ε. Δ.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Α'. Ἐνθεντοι εἰάν τιςσάρες ὧσιν εὐθεῖαι συνεχῶς ἀνάλογον, ὥς ἔχει ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, ὅπως ἔχει καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α'. Παραλληλεπίπεδον, πρὸς τὸ Παραλληλεπίπεδον τὸ ὁμοιόν τε, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον τὸ ἀπὸ τῆς Β'. Διὸ ἐπὶ τῶν ὁμοίων Παραλληλεπίπεδων $\alpha\delta$, $\gamma\mu$, δοθεισῶν τῶν ὁμολόγων Πλευρῶν $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, εὐρεθήσεται ὁ ἐκείνων πρὸς ἀλλήλα λόγος. εἰάν γὰρ γένηται $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, χ , ψ ::, ἔσται $\Delta\alpha : \gamma\mu :: \alpha\beta : \psi$. Ταύτητοι καὶ τῶν

(1) $\text{IB. } \tau\tilde{\alpha} \alpha'$. (2) $\text{E}\xi \text{ } \upsilon\pi\omicron\sigma\delta. \text{ καὶ } \text{O}\rho. \text{ A. } \tau\tilde{\alpha} \zeta'$. (3) $\text{E}\kappa \text{ κατασ. } (4) \text{ A}\xi. \zeta'$. (5) $\text{KA. } \tau\tilde{\alpha} \iota\alpha'$. (6) $\text{IB. } \text{O}\rho. \iota\alpha'$. (7) $\text{E}\xi \text{ } \upsilon\pi\omicron\sigma\delta. \text{ καὶ } \text{O}\rho. \Theta. \tau\tilde{\alpha} \iota\alpha'$. (8) $\text{E}\kappa \text{ κατ. } (9) \text{ A. } \tau\tilde{\alpha} \zeta'$. (10) $\text{KE. } \tau\tilde{\alpha} \iota\alpha'$. (11) $\text{O}\rho. \text{ I. } \tau\tilde{\alpha} \delta'$. (12) $\text{KE. } \tau\tilde{\alpha} \iota\alpha'$. (13) $\text{A. } \tau\tilde{\alpha} \zeta'$. (14) $\text{IA. } \tau\tilde{\alpha} \epsilon'$.

σερεῶν $\Delta\alpha$, γμ δοθέντων, ἡ τῷ $\Delta\alpha$ τῆς τυχέσεως Πλευρᾶς ταχθείσης $\alpha\beta$, ἡ $\Delta\alpha\tau\epsilon\rho\alpha$ τῶν σερεῶν ὁμόλογος Πλευρᾶ $\beta\gamma$, ἐστὶν ἡ τῶν δύο μέσων (1) ἀναλόγων προτέρα, τῶν μεταξὺ $\alpha\beta$ ἢ ψ .

B'.

Κάντεῦθεν λίαν σφαλλόμενοι ἀπελέγχονται, οἱ τῶν ὁμοίων σερεῶν τὸν λόγον ἶσον εἶναι ἡγόμενοι τῷ τῶν Πλευρῶν. Οὐ γὰρ δὴ ὁ ἀπὸ τῆς διπλασίας Γραμμῆς κύβος διπλασίος ἐστίν, δεκαπλάσιος δὲ τῷ ἀπὸ τῆς ἀπλῆς· οὐδὲ ὁ ἀπὸ τῆς τριπλῆς τριπλῆς, εἰκοσάπλος δὲ ἢ ἑπταπλῆς· ἐπεὶ 1, 2, 4, 8 $\vdots$, καὶ 1, 3, 9, 27 $\vdots$. Ομοίως δὲ ἢ περὶ πάντων τῶν ὁμοίων σερεῶν ὑποληπτέον, ὡς ἐφεξῆς δῆλον ἔσται.

Γ'.

Ἐκ τέτων δὲ ἡρτηται ἡ τὸ τεθρυλλημένον ἐκείνο περὶ τῷ διπλασιασμῷ τῷ κύβῳ Πρόβλημα, περὶ ὃ κατωτέρω ἐν τέρματι τῷ IB'. Βιβλίῳ, ἐν οἷς ἢ ἡ μέθοδος ὑποτεθείσεται, ἢ περὶ ἡ τῷ Κύβῳ, ἢ ἡ τῶν ὁποιωνῶν ἀπλῶς ὁμοίων σερεῶν αὐξησις ἢ μείωσις, κατὰ τὸν δοθέντα λόγον τελεῖται.

Σ χ ό λ ι ο ν Α'.

Τῶν Κύβων σερεῶν ὄντων παραλληλεπιπέδων ὁμοίων ἀλλήλοις, ἢ ἐπομένως ἐν τριπλασίονι λόγῳ τῶν ἰσίων Πλευρῶν εἶναι νομένων, ἀπας λόγος, ἐν ὁποιασδήποτε πηλικότησι τριπλασίων ὦν, διὰ τῶν Κύβων τῶν αὐτῶν ἐκείνων πηλικότητων ἐπισημαίνεσθαι εἴωθεν, οἷον ὁ τριπλασίων λόγος τῷ Δ πρὸς B, ἔτως ἐκτίθεσθαι φιλεῖ $\Delta K : BK$.

Σ χ ό λ ι ο ν Β'.

Τὸ ἐνταῦθα περὶ τῶν παραλληλεπιπέδων δειχθέν ἐν τῷ IB'. Βιβλ. Πρωτ. Η'. περὶ τῶν Πυραμίδων, καὶ ἐν τῷ Β'. Πορίσματος τῆς Θ'. τῷ αὐτῷ περὶ τῶν Πρισμαίων, καὶ ἐν τῇ IB'. Πρωτ. περὶ τῶν Κώνων ἢ τῶν Κυλίνδρων, καὶ ἐν τῇ IH'. περὶ τῶν Σφαιρῶν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΔ.

„τῶν ἴσων σερεῶν παραλληλεπιπέδων (πσ, γκ) ἀντιπεπόνθασιν αἱ Βάσεις τοῖς ὕψεσι (τετέθη ὡς ἔχει βάσις ρτ πρὸς βάσιν ζκ, ἔτως ἀντιστρόφως ὕψος τὸ ζγ πρὸς ὕψος τὸ συ)· καὶ ὦν σερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκείνα.

κ. 460.

(1) Ὅρα τὴν ΙΓ. σὺ ε'.

Μέρος Α'. Εἰς ὧσαν δὴ πρῶτον αἱ πρὸς τὴν βάσιν Πλευραὶ ὀρθαί· Καὶ εἰ τῶν σφερῶν πσ, γκ τὰ ὕψη ἴσα τεθῇ, τὸ προτεθέν δῆλον· ἰσοῦσῃ γὰρ ὄντα, ἔσαι (1) τὰ παραλληλεπίπεδα ὡς αἱ βάσεις. Ἐκεῖνα δὲ (2) ἴσα, καὶ αἱ βάσεις ἄρα, καὶ ὁ αὐτὸς ἔτις ἔστι λόγος ὁ κατ' ἰσότητα τῶν ὕψων Α'. καὶ Β', τῷ κατ' ἰσότητα τῶν Βάσεων Β' τε καὶ Α'.

Εἰ δὲ ἄνισα, ἀπὸ τῆς μείζονος ζγ ἀποτετμήσθω ἡ ζε ἴση τῇ συ, καὶ διὰ τῆς εἰς ἀχθῆτω τὸ ἐπίπεδον ελ παραλληλον τῷ ζκ· Ἡ μὲν οὖν Βάσις ρτ ἐστὶ πρὸς τὴν Βάσιν ζκ, ὡς τὸ σφερόν (3) πσ πρὸς τὸ σφερόν εκ· τῷ τῆς εἰς ἀπὸ ἴσα ἐξ ὑποθ. ἐστὶ τὰ σφερά πσ, γκ ὡς τὸ σφερόν γκ πρὸς τὸ σφερόν εκ, ἦτοι (4) ὡς γη πρὸς εη, τῷ τὸ δὲ ἐστὶν (5) ὡς γζ πρὸς εζ, καὶ ἐπομένως (6) ὡς γζ ἀντιστρόφως πρὸς τὴν υσ. Ο. Ε. Δ.

Α' καὶ Β' εἰς ὧσαν δὴ αἱ Πλευραὶ πρὸς τὰς βάσεις πλαγιάζουσαι, καὶ ἐπὶ τῶν αὐτῶν Βάσεων ἀνισάθωσαν ἐν ὕψει τῷ αὐτῷ Παραλληλεπίπεδα ὀρθὰ, καὶ τῷ τῆς (7) ἴσα ἔσαι τὰ Παραλληλεπίπεδα τὰ πλάγια· ἐπεὶ δὲ τὰ ὀρθὰ (διὰ τὸ ἄνωτ.) ἀντιπεπόνθασιν τὰς βάσεις καὶ τὰ ὕψη, ἀντιπίσονται δὴ καὶ κεῖνα. Ο. Ε. Δ.

Μέρος Β'. Εἰς ὧσαν αἱ πλευραὶ ταῖς βάσεσιν ὀρθαί, καὶ τὰ ὕψη ἴσα· Καὶ ἐπειδὴ αἱ βάσεις καὶ τὰ ὕψη (8) ἀντιπεπόνθασιν, διὰ γε τὴν τῶν τῶν ἰσότητα συνισωθήσονται καὶ κεῖνα, καὶ (9) ἐπομένως καὶ αὐτὰ Παραλληλεπίπεδα.

Εἴτα ἔσω τὰ ὕψη ἄνισα, καὶ αἱ πλευραὶ ταῖς βάσεσιν ὀρθαί, καὶ ἀπὸ τῆς μείζονος γζ ληφθῆτω ἴση τῇ υσ ἡ εζ. Τὸ γὰρ σφερόν πσ ἐστὶ πρὸς τὸ σφερόν εκ, ὡς (10) ρτ πρὸς ζκ, τῷ τῆς (11) ὡς γζ πρὸς υσ, ἦτοι (12) ὡς γζ πρὸς εζ· ὅπερ ἐστὶν (13) ὡς γη πρὸς εη, ἦτοι (14) ὡς σφερόν γκ πρὸς τὸ αὐτὸ σφερόν εκ· Τὰ ἄρα σφερά πσ καὶ γκ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον πρὸς τὸ αὐτὸ εκ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Ο. Ε. Δ.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ πλάγια τῶν Παραλληλεπιπέδων, τοῖς ἐπὶ ἴσων βάσεων ἰσοῦσῃσιν ὀρθοῖς (15) ἴσα ὄντα ἐστὶ, καὶ κεῖνα ἄρα, εἰ ἀντιπεπόνθασιν τὰς βάσεις καὶ τὰ ὕψη, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Π ο ρ ῖ σ μ α τ α.

Τὰ περὶ τῶν Παραλληλεπιπέδων ἀποδείχθέντα ἐν Πρωτ. ΚΘ. Λ. ΛΑ.

(1) ΑΒ. τῷ ια'. (2) Ε' ἐξ ὑποθ. (3) ΑΒ. τῷ ια'. (4) ΚΕ. τῷ ια'. (5) Α. τῷ ε'. (6) Ε' κατ. (7) Α. τῷ ια'. (8) Ε' ἐξ ὑποθ. (9) ΑΑ. τῷ ια'. (10) ΑΒ. τῷ ια'. (11) Ε' ἐξ ὑποθ. (12) Ε' κατ. (13) Α. τῷ ε'. (14) ΚΕ. τῷ ια'. (15) Α. τῷ ια'.

ΛΒ. ΛΓ. ΛΔ. αὐτὰ ταῦτα προσήκοντα ἐς τὰς τοῖς τριγωνικοῖς Πρίσματιν, ἅττα ἡμίση τῶν παραλληλεπιπέδων ὄντα ἐσὶν, ὡς δὴλον ἐκ τῆς ΚΗ'. Προτάσεως· Καὶ τοίνυν

Τὰ Τριγωνικὰ πρίσματα, ὧν ἴσα τὰ ὕψη, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ Βά- Δ'. κ. 461.
σεις· καὶ ἐπομένως εἰς ἴσας ἔχοντα ἢ τὰς βάσεις καὶ τὰ ὕψη, καὶ ἀλλή-
λοις αὐτὰ ἴσα ἔσται.

Εἰ ἂν ᾖ ὁμοία, τότε ὁ λόγος τριπλασίον ἔσται τῷ λόγῳ τῶν πλευρῶν Β.
τῶν ἀπεναντίον, τῶν ἰσῶν Γωνιῶν· καὶ ἐπομένως τὰ τῆς ΛΓ'. Πρωτ. Πρίσ-
ματα καὶ κείνοις προσεπαινήκοντα ἐσὶ.

Καὶ εἰ ἂν ἴσα, ἀντιπεπόνθασιν τὰς Βάσεις καὶ τὰ ὕψη· καὶ εἰ ἀντιπεπόνθασιν Γ'.
τὰς Βάσεις καὶ τὰ ὕψη, ἴσα ἐσὶ.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Τὸ δὲ τοι ἐνταῦθα ἐν Πρωτ. ΛΔ'. περὶ τῶν Παραλληλεπιπέδων ἀπο-
δειχθὲν, δειχθήσεται ἐν τῷ ΙΒ'. Βιβλ. Πρωτ. Θ'. καὶ περὶ τῶν Πυραμί-
δων, καὶ ἐν τῷ Γ'. Πορίσματ. τῆς Θ'. περὶ παντός Πρίσματος, καὶ ἐν τῇ
ΙΕ'. Πρωτ. περὶ τῶν Κώνων, καὶ τῶν Κυλίνδρων.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΕ.

Διεξοδικωτάτη οὕσα ὑπεργεῖ εἰς δεῖξιν τῇ ἐφεξῆς, ἣν αὐτοὶ καὶ
ταύτης χωρὶς ἀποδείξομεν.

Π ρ ό τ α σ ι ς Λς.

„Εἰ ἂν τρεῖς Εὐθεῖαι ἀνίλογον ὦσιν (α, β, γ), τὸ ἐκ τῶν τριῶν σφαιρῶν κ. 462.
„Παραλληλεπίπεδον (δδ), ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης (β) σφαιρῷ παραλληλε-
„πιπέδῳ (ιν), ἰσοπλευρῶ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἡ τῷ Παραλληλεπιπέδῳ δδ βάσις ζδ, ἐχέτω Πλευρὰν τὴν εζ = α, καὶ
τὴν ἑτέραν Πλευρὰν εδ = γ, τὴν δὲ δὴ τῇ βάσει ἐφισταμένην Πλευρὰν εη =
τῇ μέσῃ β, καὶ ὅτως ἔσται τὸ δδ Παραλληλεπίπεδον ἐκ τῶν τριῶν α, β, γ.
Εἴτα τῷ Παραλληλεπιπέδῳ ιν αἱ τρεῖς πλευраὶ λχ, ιχ, χμ (καὶ ἐπομένως καὶ
αἱ λοιπαὶ) ἴσαι ἔσωσαν τῇ μέσῃ β· ἡ δὲ κατὰ τὸ χ σφαιρὰ Γωνία τέττα τῇ
κατὰ τὸ ε σφαιρῇ Γωνίᾳ ἐκείνῃ ἴση γινέσθω, καὶ ὅτως ἔσται τὸ ιν παραλληλε-
πίπεδον ἀπὸ τῆς μέσης β, καὶ ἰσογώνιον τῷ προτέρῳ· φημὶ δὲ ὅτι καὶ ἴσον.

Επειδὴ γὰρ ἐξ ὑποδ. καὶ κατασκ. ὡς ζε : λχ, ὅτως ἀντιστρόφως ιχ :

δε, ἔσονται αἱ Βάσεις (1) δὲ καὶ ἰσάι ἀλλήλαις. Ἀλλὰ γὰρ καὶ αἱ σερεαὶ Γωνίαι αἱ πρὸς τῷ ε, καὶ τῷ χ ἰσάι εἰσὶν, ἐὰν ἄρα ἐντὸς ἀλλήλων τεθῶσι, προσεφραμόσῃσι (2), καὶ διὰ τὴν ἰσότητά των Εὐθειῶν εη καὶ χμ, τὰ Σημεῖα μ καὶ η εἰς ταυτὸ συμπεσῇνται. Καὶ τὸ αὐτὸ ἄρα ἔσαι ἑκατέρω των σερεῶν πρὸς κάθετον ὕψος, ἀμέλειτοι ἀπὸ των συνιόντων σημείων μ καὶ η ἐπὶ τὴν ὑποκειμένην βάσιν· ὥστε (3) τὰ σερεὰ δθ, ἰσά ἐσὶ. Ο. Ε. Δ.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Σημειώτεον δὲ ἐνταῦθα τῇθ' ὁ μέγιστον τυγχάνει τὴν χρῆσιν, ὡς ἐκ τριῶν Εὐθειῶν ἡπερ ἔτυχεν ἐπ' ἀλλήλαις (4) ἀγομένων, ἰσομέγεθες αἶτι τὸ σερεὸν Παραλληλεπίπεδον ὀρθὸν ὄν (τετέστιν ὑπὸ ὀρθογωνίων ἐπιπέδων περιεχόμενον) ἀνακύπτει.

αβγ

γαβ.

βγα.

1

2

3

Εἴνθα των χοιχείων τὰ μὲν πρῶτα δύο τὴν Βάσιν παρίσῃσι, τὸ δὲ τρίτον τὸ ὕψος. Παραδῶμεν οὖν τὸ πρῶτον των Σχημάτων τῷ δευτέρῳ.

Βάσις αβ πρὸς βάσιν γα (διὰ τὴν Α': τῷ ε'), ὡς β Πλευρὰ πρὸς γ Πλευράν, τετέστιν ἀντιστρόφως ὡς β ὕψος πρὸς γ ὕψος. Ἀρα διὰ τὴν ΔΔ'.

$$\alpha\beta\gamma = \gamma\alpha\beta.$$

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δείξῃς, καὶ τὸ Α'. τῷ Γ', καὶ τὸ Γ'. τῷ Β'. ἴσα τυγχάνειν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΖ.

„Εὰν τέσσαρες Εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾶσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν Παραλληλεπίπεδα ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀνάλογον ἔσαι. Καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν σερεὰ Παραλληλεπίπεδα ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνέλογον ᾦ, καὶ αὐταὶ αἱ Εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Δήλον ἐκ τῆς ΔΔ'. τῷ Ε'. Βιβλίῳ. Οἱ γὰρ των Παραλληλεπιπέδων λόγοι, διὰ τὴν ΛΓ'. τῷ παρόντος, ἔσονται τριπλασίονες των λόγων, οὓς αἱ Εὐθεῖαι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, καὶ οἱ (ἐξ ὑποθ.) ἴσοι εἰσὶ.

Τὸ δὲ ἀνάπαλιν δήλον αὖτις ἐκ τῆς ΛΕ'. τῷ Ε'. Οἱ γὰρ λόγοι των Παραλληλεπιπέδων (ἐξ ὑποθ.) ἴσοι εἰσὶ, τριπλασίονες (5) ὅντες των αὖς ἔχουσι

(1) ΔΔ. τῷ ε'. (2) ΔΔ. ὀρθ. ια'. (3) ΔΔ. τῷ ια'. (4) Ὅρα τὸ Α. Σχόλ. τῆς Μ. τῷ ια'. (5) ΛΓ. τῷ ια'.

λόγους αἱ ὁμόλογοι τῶν Πλευρῶν, ἀφ' ὧν τὰ ὅμοια Παραλληλεπίπεδα ὁμοίως ἀναγράφεται· καὶ ἐπομένως τῶν τοιούτων Πλευρῶν οἱ λόγοι (1) ἔσονται ἴσοι.

Ἡ δὲ Πρότασις ἀληθεύει, ἐφ' ὁποίων ἐν σφαιρῶν ὁμοίων καθόλου ἐκτείνουμένη· πάντα γὰρ τριπλασίονα ἔχει τὸν λόγον τῷ λόγῳ τῶν κατ' αὐτὰ πλευρῶν, ὡς ἐν τῷ Β'. Βιβλ. δῆλον γενήσεται.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἐντεῦθεν τὴν μέθοδον ἀρνούμεθα τῷ τὰς Κυβικῆς τῶν ριζῶν πολλαπλασιάζειν ἢ διαιρεῖν. Ἐὰν γὰρ ἐπ' ἀλλήλαις πολλαπλασιασθῶσιν αἱ ὑπὸ τοῖς Κυβικοῖς ριζικοῖς σημείοις πηλικότητες, ἢ τῷ γινομένῳ σημείῳ Κυβικῆς ρίζης προταχθῇ, δοθήσεται ἔτι τὸ ὑπὸ τῶν δοθεῖσῶν Κυβικῶν ριζῶν παραγόμενον. Οἷον ἔσω $\sqrt{5}^3$ πολλαπλασιαστέα ἐν $\sqrt{4}^3$, ἢ παραγόμενα $\sqrt{20}^3$. ὡς γὰρ ὁ τῷ πολλαπλασιασμῷ βέλεται λόγος, ἢ μονὰς ἐστὶ πρὸς τὸν πολλαπλασιασθῆν, ἦτοι $1 : \sqrt{4}^3$, ὡς ὁ πολλαπλασιαστέος (τετέστι $\sqrt{5}^3$) πρὸς τὸ ἀνακύπτειν. Ἄρα (διὰ τὴν ἀνὰ χειρὸς Πρότ.) ὁ τῆς μονάδος Κυβος ἔσται πρὸς τὸν Κύβον τῷ πολλαπλασιασθῆν, ὡς ὁ τῷ πολλαπλασιαστέῳ Κυβος πρὸς τὸν τῷ παραγόμενῳ· τετέστιν ἐὰν ἀντὶ τῷ γινομένῳ ὑποτεθῇ Γ, ἔσται δὴ $1 : 4 :: 5 : \Gamma K$, ἀλλὰ $1 : 4 :: 5 : 20$, ἄρα $\Gamma K = 20$, ἢ $\Gamma = \sqrt{20}^3$.

Παραπλησίως κατὰ τὸν τῆς διαιρέσεως ὅρον δειχθήσεται, ὅτι $\sqrt{20}^3$ ἐὰν διαιρεθῇ διὰ $\sqrt{5}^3$, πηλίκον δώσει $\sqrt{4}^3$. Ὅρα τὸ Α'. Πόρ. τῆς ΚΒ'. τῷ ε'.

Καὶ ἐν γένει τῶν ριζικῶν πηλικότητων, ὁποιασὺν ἂν εἴεν τέξεως, ἢ τοι εἶδους, τὰ γινόμενα ἢ τὰ πηλίκα λαμβάνεται πολλαπλασιασμῷ, ἢ διαιρέσει τῶν ὑπὸ τοῖς ριζικοῖς σημείοις πηλικότητων, ἢ προσεπισημειώσῃ τῶν αὐτῶν ριζικῶν σημείων, ἐπὶ τοῖς γινομένοις αὐτοῖς διὰ τῷ πολλαπλασιασμῷ, ἢ τοῖς πηλικοῖς διὰ τῆς διαιρέσεως.

Π ό ρ ο τ α σ ι ς ΛΗ.

Ταύτην φθάσαντες ἀνωτέρω ἀπεδείξαμεν, ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν ΙΓ'. τῷ παρόντος Βιβλίου Πρότασιν.

Π ό ρ ο τ α σ ι ς ΛΘ.

„Ἐὰν σφαιρῶν Παραλληλεπιπέδων (αβ) τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων (αγ, δβ), κ. 463.

(1) ΔΕ. τῷ ε'.

„αὶ Πλευρὰι (αε, ζγ, αζ, εγ, ε δθ, ηβ, δη, θβ) δίχα τμηθῶσι, διὰ
 „δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα (ιλπε, φκμρ) ἐκβληθῇ, ἡ κοινὴ τομὴ (στ) τῶν
 „ἐπιπέδων, εἰ ἢ τὰ ερεῖα παραλληλεπιπέδα Διάμετροι (αβ) δίχα τέμνε-
 „σιν ἀλλήλας.

Ἀρχήτωσαν Εὐθεῖαι αὶ σα, σγ, τδ, τβ, εἰ διὰ τὰς δίχα τετμημένας
 δη, θβ, ε δθ, ηβ, ε τὴν ρφ Εὐθεῖαν τὴν ταῖς δη, θβ παράλληλον, ε
 τὴν Εὐθεῖαν ξπ τὴν ταῖς δθ, ηβ (1), διαιρεθήσεται τὸ ηθ Παραλληλό-
 γραμμον εἰς τέσσαρα Παραλληλόγραμμα ἴσα, τῶ τε δλω ε ἀλλήλοισ
 (2) ὁμοιά τε, ε ὁμοίως ἀναγεγραμμένα· διὸ τὰ ξρ ε φπ ἐπιτεθέντα ἀλ-
 λήλοισ ἐφαρμόσται, ε δτ = τβ (3). Ἔτι τὰ Παραλληλόγραμμα ξρ, φπ,
 ἔχοντα Γωνίας τὰς ὑπὸ ξδρ, φβπ κοινὰς, μετὰ τῷ ηθ ὁμοίᾳ αὐτοῖς ὄντος
 Παραλληλογράμμου, περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον (4) εἰσὶν· ὅθεν ἡ δτβ (5)
 Γραμμὴ εὐθεῖα ἐστίν· ὡσαύτως εἰ ἡ ασγ εὐθεῖα ἐστίν, ε ασ = σγ· Ἡδη
 μὲν οὖν ἡ αδ παράλληλός τε ε ἰση ἐστὶ τῇ ζη (6), ἥ τε ζη παράλληλός τε
 ε ἰση ἐστὶ τῇ γβ, ἄρα (7) αὶ αδ, γβ παράλληλοί τε εἰσὶν ἀλλήλαις καὶ
 ἴσαι· ταῦται τοι ε αὶ αγ, δβ, αὶ ταύτας ἐπιζευγνύουσαι, παράλληλοί τε
 εἰσὶ (8) ε ἴσαι ἀλλήλαις· διὸ ε αὐτῶν ἡμίσειαι ασ, βτ ἴσαι ἔσονται.
 Παρὰ ταῦτα δὲ αὐτῶν εἰσὶν ἐπιπέδω (9) αγβδ· ὥστε ἐπὶ
 τῶν Τριγώνων ασυ, βτυ, διὰ τὰς ὑπὸ αυσ, βυτ, τὰς κατὰ κορυφῆς ἀντι-
 κειμένας, ε κατ' ἀκολουθίαν (10) ἴσαι, ε διὰ τὰς ἐναλλάξ ὑπὸ αυτ, βτυ
 ἴσας ε αὐτὰς (11) ἔσας, ε διὰ τὰς ασ, βτ Πλευράς, ἴσας ε αὐτὰς ἀ-
 ποδείχθεις, καὶ τὰ λοιπὰ πάντα (12) ἴσα ἔσται, καὶ συ = υτ, καὶ αυ
 = υβ· Ἡ ἄρα κοινὴ τομὴ στ, ε ἡ Διάμετρος αβ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας.
 Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἐπὶ παντός οὖν Παραλληλεπιπέδου, ἅπασαι αὐτῆς Διάμετροι δίχα τέμ-
 νουσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον υ.

Π ρ ο τ α σ ι ς Μ.

κ. 464.

„Ἐὰν ᾖ δύο Πρίσματα τριγωνικά ἰσοϋψῇ (αβζηξγ ε ικλφχπ), καὶ

(1) ΑΓ. τῷ α. (2) ΚΖ. ε ΑΔ. τῷ α., ε Ορ. Α. τῷ ε. (3) ΑΕ. Ζ'. ε Α. (4)
 Κε. τῷ ε. (5) Ορ. ΑΖ. τῷ α. (6) ΚΔ. τῷ ια. ε ΑΔ. τῷ α. (7) Θ. τῷ ια. ε ΑΕ.
 α. (8) ΑΓ. τῷ α. (9) Πόρ. τῆς Ζ. τῷ ια. (10) ΙΕ. τῷ α. (11) ΕΖ. τῷ α. (12)
 Κε. τῷ α.

„τὸ μὲν ἔχει βάσιν Παραλληλόγραμμον (ΞΒ), τὸ δὲ Τρίγωνον (ικλ), διπλάσιον δὲ ἢ τὸ Παραλληλόγραμμον τῷ Τριγώνῳ, ἴσα ἔσσι τὰ Πρίσματα.

Εἰν γὰρ πληρωθῇ τὰ Παραλληλεπίπεδα κρ κ γδ, ἔσσι (1) αὐτὰ ἴσα, διὰ τὴν τῶν βάσεων γα, με, κ τὴν τῶν ὑψῶν ἰσότητα· τοιγαρὺν κ τὰ καδ' ἡμίσειαν (2) αὐτῶν Πρίσματα ἔσονται ἴσα. Ο. Ε. Δ.

Εἰσι γὰρ τὰ δύο ταῦτα τριγωνικὰ Πρίσματα, παραλληλεπίπεδων ἰσῶν, ταῖς διαγωνίαις τετμημένων, ἡμίσειαι, τοσῆτ' ὅσον μόνον διαφέροντα, ὅτι ἐπὶ θατέρῃ ἢ τομῇ κατὰ τὴν Διαγώνιον τῆς βάσεως τελεῖται, ἐπὶ δὲ θατέρῃ ἔχεται.

Σ Χ ό λ ι ο ν Α'.

Εκ τῶν εἰς τὸ δε ἀποδεδειγμένων, σαφές ἡ τῶν τριγωνικῶν Πρισμάτων καταμέτρησις, κ τῶν τετραγωνικῶν, ὧν τὰ ἀπεναντίον τετραγωνικὰ ἐπίπεδα παράλληλα εἰσι, τατέσι τῶν Παραλληλεπίπεδων, τῷ ὕψει δηλονότι διὰ τῆς βάσεως πολλαπλασιασμῷ ἀγομένε. Οἶον ἐάν ἡ τὸ ὕψος ποδ. 10, ἡ δὲ βάσις ποδ. τετραγ. 100 (καταμετρηθῇσεται δὲ ἡ βάσις διὰ τῷ Σχολ. τῆς Λς'. ἢ τῆς ΜΑ' τῷ Α'), πολλαπλασιαζέσθω 10 διὰ 100, κ ἀνακύψει 1000, οἷτινες εἰσὶ πύδ. κυβικοί, ἐξ ὧν τὸ σερρόν τῷ Πρίσματι συγκεκρότηται.

Ἡ δὲ δεῖξις προχειροτάτη. Καθάπερ γὰρ τὸ Ὀρθογώνιον, ἔτῳτοι καὶ τὸ ὀρθόν Παραλληλεπίπεδον παράγεται ἐκ τῷ ὕψει ἐπιπολλαπλασιαζομένῃ τῇ βάσει· τοιγαρὺν κ ἅπαν ὅποιονᾶν Παραλληλεπίπεδον παράγεται ἐκ τῷ ὕψει ἐπιπολλαπλασιαζομένῃ τῇ βάσει, ὅτι (διὰ τὴν ΛΑ') ἴσον ἐστὶ τῷ ὀρθῷ Παραλληλεπίπεδῳ, τῷ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως καθισταμένῳ, κ ἐν τῷ ἴσῳ ὕψωματι.

Εἰτα ἐπεὶ τὸ ὅλον Παραλληλεπίπεδον παράγεται ἐκ τῷ ὕψει τῇ ὅλῃ βάσει ἐπιπολλαπλασιαζομένῃ, φανερόν ὡς ἡ τῷ Παραλληλεπίπεδῳ ἡμίσεια (τὸ τριγωνικὸν δηλονότι Πρίσμα διὰ τὴν ΚΗ') παραγόμενον ἔσσι ἐκ τῷ ὕψει τῷ ἐπιπολλαπλασιαζομένῃ τῇ ἡμίσειᾳ τῆς βάσεως, τατέσι τῷ Τριγώνῳ ιλε (ὄρα τὸ ἀνωτ. Σχῆμα).

Σ Χ ό λ ι ο ν Β'.

Διὰ τὸ τὰ πολύγωνα Πρίσματα εἰς τριγωνικὰ ἀναλύεσθαι ἔχειν, ἢ γὰρ κ εἰς Τριγωνικὰ, ὧν ἡ τε βάσις κ τὸ ὕψος ἴσα (3) ἀποκαθίστασθαι, ὅσα

(1) ΛΑ. τῷ ια'. (2) ΚΗ. τῷ ια'. (3) ΚΒ. τῷ ε'.

δή ποτε περί τῶν τριγωνικῶν Πρισμαίων ἐν τοῖς Πρίσμασι τῆς ΛΔ'. Πρωτ. παραδίδεται, ἡ ἐν τῷ Α'. Σχολ. τῆς δε τῆς Μ'. Πρωτάσ., ἅπαντα ἀληθεύει περί ὁποιωνῶν πολυγωνίων Πρισμαίων λεγόμενα. Δόξαν μέντοι τῷ Τακκετιῳ, ἐκ τῶν ἐν τῷ ΙΒ'. Βιβλ. περί Πυραμίδων ἀποδεικνυμένων, ἅπαντα ἐπιφέρειν ἐκεῖνα, περιττόν ἡμᾶς ἀλλοτρίως ταῦτα πειρωμένους ἐπάγειν, τοῖς πρωτοπείροις βραδύτερον ἀσχολεῖν.

Τῶν στοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΙΒ'.

Η' μὲν δὲ Η'.

Οπερ ἐν τοῖς πρὸς τῷδε βιβλίοις διὰ φροντίδος ἡμῶν ἐγένετο, τὴν τῶν μαθηματικῶν στοιχείων ἔκθεσιν, ῥητοτέραν τε παραχρῆν ἡ ἐπιτομωτέραν, τῆς μάλιστα ἐπιμελητέον ἡμῶν ἂν εἴη ἐπὶ τῷ ἐν χειρὶ ΙΒ', ἐν ᾧ τὰ πραγματευόμενα τῶν ἀναγκαιωτάτων τυγχάνοντα, ἀπαγορεύειν πολλὰς τὰς πρωτοπείρας, παρὰ τὸ τῶνδείξεων διεξοδικὴν ἡ ἐργώδες παραίτια γίνεται, εἰς ἀπόγνωσιν μονονυχὶ τῆς ἐμβάλλοντα· πρόσθεσις δὲ ἡμῶν τὸ τραχὺ ἐξομαλῶνται τῆς εἰσηγήσεως, μηδὲ τῆς κατὰ τὰς Γεωμετρίας ἀκριβοῦς τῶνδείξεων ἀποσῆσθαι. Πότερον δ' ἄρα κατὰ σκοπὸν πρῆβη χωρῆσαν ἡμῶν τὸ ἐγχειρήμα, ὃ μετιῶν ἐπιγνώσεται, εἰ ταῦτα δὲ τὰ ἡμέτερα πρὸς τὰ ὑπὸ τῷ Εὐκλείδῃ εἰς πλάτος ἐκτεταμένα, παραδέσθαι μὴ κατοκνήσεις.

Υποθέμενος οὖν ὁ Εὐκλείδης ἐν τῷ πρὸς τῷδε Βιβλ. τὰ τῶν στερεῶν στοιχεία, ἡ τῶν εὐχερεστέρων ἐν σώμασιν, ὡς ἐπιφανείαις ἐπιπέδοις πεπερατωμένων ὀρίσασθαι τὰ μέτρα, ἐπὶ τῷ παρόντι ΙΒ', τὰ ὑπὸ κυρτῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα στερεά, οἷοι Κύλινδροις εἰσὶ ἡ Κῶνοι, ἡ Σφαῖραι διασκέπτεται, ἡ ταῦτα πρὸς ἄλληλα παρατίθησι, ἡ τῶν τὰ μέτρα προσδιορίζεται. Ἀνυσιμώτατον δὲ τὸ παρὸν Βιβλίον ὁμολογεῖται, ὡς περιέχον τὰς ἀρχαίς, αἷς οἱ ἐνδοξότατοι τῶν Γεωμετρῶν ἡ πρὸ πάντων ὁ Ἀρχιμήδης τὰς συλλεβμένας ἐκεῖνας περίτε Κυλίνδρου, ἡ Κῶνου, ἡ Σφαίρας ἀποδείξεις ἐπιποδοῖν.

Ὁ ρ ι σ μ ο ς .

Πυραμὶς ἐστὶ σχῆμα σφαιρὸν (ψλ) ἐπιπέδοις τριγωνικοῖς (αλγ, γλζ, Α. κ 465. ζλβ, βλα) περιεχόμενον, ἀπὸ ἐνὸς ἐπιπέδου (ψ) πρὸς ἐνὶ σημείῳ (λ) συνεσῶς.

Τὸ μὲν οὖν ἐπίπεδον ψ, Βάσις λέγεται· ἐστὶ δὲ ἦτοι Τρίγωνον, ἢ Τετράγωνον, ἢ ὅποιον ἄλλο Εὐθύγραμμον, ἀφ' οὗ τῶν Πλευρῶν ἐκάστη τὰ Τρίγωνα ἀνυγείρεται, τὰ εἰς τὸ αὐτὸ συνιόντα σημεῖον τὸ λ, ὃ Κορυφή λέγεται.

Καθάπερ τὸ Τρίγωνον ἐν τοῖς εὐθύγραμμοις τῶν ἐπιπέδων Σχημάτων, ἔτῳτοι ἔξ ἡ τριγωνικῆ Πυραμὶς ἢ ἀπὸ Τριγώνου βάσεως συνεσῶτα, ἐν τοῖς σφαιροῖς τὸ πρῶτισον ἐστὶ ἔξ ἀπλάσκατον.

Εἰάν ἐξω τῷ ἐπιπέδῳ Κύκλῳ τινὸς (γλ) ληφθῇ τι Σημεῖον τὸ (α), ἀφ' Β'. κ. 466. ἧ Εὐθεΐας ἀχθεῖ μὴ πεπερασμένη ἢ αζ, ἀπτομένη τῷ Κύκλῳ κατὰ τὸ γ, ἢ δὴ, μένοντος κατὰ χώραν τῷ α, περὶ τὴν τῷ Κύκλῳ Περιφέρειαν περιεγόμενῃ αγζ, αὐτόσε πάλιν ἐπανελθοί, ὅθεν κινεῖσθαι τὸ πρῶτον ἤρξατο, ἢ μὲν ἐπιφάνεια ἢ ὑπὸ τῆς Εὐθείας αγζ περιγεγραμμένη, Κωνικὴ καλεῖται ἐπιφάνεια, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῆς ἔξ τῷ Κύκλῳ γλ περιελημμένον Σῶμα, Κῶνος.

Κορυφή δὲ τῷ Κῶνῳ ἢ κατὰ τὸ α.

Βάσις δὲ τῷ Κῶνῳ ὁ Κύκλος γλ.

Ἄξων δὲ τῷ Κῶνῳ ἢ Εὐθεῖα αβ, ἢ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ Κέντρον τῆς Βάσεως ἐπιζευγνυμένη.

Πλευρὰ δὲ τῷ Κῶνῳ ἢ αγ, ἢ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν Περιφέρειαν τῆς Βάσεως ἀγόμενῃ, ἣν ἔλιν εἶναι ἐν αὐτῇ τῇ τῷ Κῶνῳ ἐπιφανείᾳ, ἐξ αὐτῆς τῆς τῷ Κῶνῳ γενέσεως δῆλον.

Κῶνος ὀρθός ἐστιν, ἢ ὁ ἄξων (αβ) πρὸς ὀρθὰς ἐφίσταται τῇ Βάσει.

κ. 467.

Κῶνος δὲ σκαληνός, ἦτοι πλαγίος, οὗ ὁ ἄξων αβ ἐφεσῶς ἐστὶ τῇ Βάσει μὴ πρὸς ὀρθὰς.

Γεννάσθαι δὲ ἔτι νοεῖται ὁ ὀρθὸς Κῶνος ὑπὸ Τριγώνου ὀρθογωνίου τῷ γβ, τῷ περὶ τὴν ἐτέραν (αβ) τῶν τὴν ὀρθὴν Γωνίαν περιεχουσῶν Πλευρῶν περιεγόμενον.

Εἰάν περὶ δύο Κύκλους ἴσους τε ἔξ παραλλήλους (γλ, ξπ), Εὐθεῖα μὴ πε- Γ'. κ. 468. περασμένη (ἢ γξζ) περιαχθῇ, ἕως οὗ εἰς τὸ αὐτὸ ἐπανελθοί, ὅθεν κινεῖσθαι τὴν ἀρχὴν ἤρξατο, ἔτως ὥς κινυμένη, ἑαυτῇ τε ἔξ τῇ ἐπιζευγνυσῇ τὰ τῶν Κύκλων κέντρα Εὐθεῖα β, παραλλήλος αεῖ εἶναι, ἢ μὲν ἐπιφάνεια ἢ ὑπὸ τῆς Εὐθείας (γξζ) περιγεγραφομένη, ἐπιφάνεια καλεῖται Κυλινδρική, τὸ δὲ

ὑπὸ ταύτης τῆς ἐπιφανείας, καὶ τῶν δισσων κυκλικῶν Βάσεων περιειλημμένον
 σφαιρὸν, Κύλινδρος.

Βάσεις τῷ Κυλίνδρῳ εἰσὶν οἱ Κύκλοι (γλ, ξπ).

Ἀξων δὲ τῷ Κυλίνδρῳ ἡ Εὐθεΐα (αβ), ἡ τὰ Κέντρα ἐπιζευγνύουσα.

Πλευρὰ δὲ τῷ Κυλίνδρῳ ἡ Εὐθεΐα (ξγ), ἡ ἐν τῇ τῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφανείᾳ
 ὄψα, καὶ τῆς διττῆς Βάσεως ἀπτομένη.

Κύλινδρος δὲ ὀρθός ἐστιν, εἰάν ὁ ἄξων ἐπὶ τῆς βάσεως πρὸς ὀρθὰς ἐφесῶς ᾖ.

Κύλινδρος δὲ σκαληνός, εἰάν ὁ ἄξων αὐτῷ πρὸς τὴν βάσιν μὴ πρὸς ὀρθὰς ᾖ.

Γεννᾶται δὲ ὁ Κύλινδρος ὁ ὀρθὸς ὑπὸ Ὀρθογωνίου (ξγβα), τῷ περὶ τὴν
 μίαν τῶν ἐν αὐτῷ Πλευρῶν (αβ) περιανομένη.

α. 469. Δ'. Κῶνοι καὶ Κύλινδρος ὅμοιοι εἰσὶν, ὧν οἱ ἄξονες ακ, ψξ, καὶ αἱ τῶν βάσεων
 Διάμετροι βζ, πρὸ ἀνάλογον εἰσὶν, ὧν τε οἱ ἄξονες ἐπὶ τῶν βάσεων ἤτοι
 ὀρθοί εἰσὶν, ἢ ἐπίσης ἐγκεκλιμένοι.

Ε'. Σφαῖρα ἐστὶ σφαιρὸν ὑπὸ μιᾶς κυρτῆς ἐπιφανείας περιειλημμένον, πρὸς ἣν
 ἄπασαι αἱ ἀπότινος τῶν ἐντὸς Σημεῖα ἀγόμεναι Εὐθεΐαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ.
 Τὸ δὲ ἐντὸς ἐκεῖνο σημεῖον Κέντρον καλεῖται.

Σφαίρας δὲ Διάμετρος, ἡ διὰ τῷ Κέντρῳ ἀγόμενη καὶ ἐπὶ τὴν ἐπιφά-
 νειαν ἐκατέρωθεν περατευμένη.

Γεννᾶται δὲ ἡ Σφαῖρα, ἡμικυκλίᾳ περὶ τὴν Διάμετρον αὐτῷ μένουσαν
 ἀγόμενη.

ς'. Μεγέθη δὲ εἰς Σχήματα ἅττα ἐγγράφεσθαι, ἢ περιγράφεσθαι λέγο-
 νται, ταῖς εἰς Σχήματα ἐλάσσονα ἢ μείζονα, εἰς σχήματι ἀποτελευτῇν λέ-
 γεται, εἰάν τῷ εἰς ὃ ἀπολήγει ἐγγραφόμενα ἢ περιγραφόμενα, ποσότητι
 τέως, οἷα σὺν δοθείσης ἐλάσσονι, διαφέρειν ἔχωσι.

Εἰάν οὖν τὰ εἰς τι ἐγγραφόμενα ἐλλείπη ἐκεῖνα, ἐλλείψει οἷα σὺν δο-
 θέσης ἐλάσσονι, τὰ ἐγγραφόμενα εἰς ἐκεῖνο ἀπολήγειν εἰρήσεται· καὶ εἰάν
 τὰ περιγραφόμενα ὑπερβάλλῃ ἐκεῖνο ὑπεροχῇ, οἷα σὺν ὁμοίως δοθείσης ἐλάσ-
 σονι, τὰ περιγραφόμενα ὡσαύτως εἰς αὐτὸ ἐκεῖνο ἀποτελευτῇν εἰρήσεται.

α. 470. Ζ'. Εἰάν γένηται Τρίγωνον τὸ βαγ ἐν Ἡμικυκλίῳ βδλγ, ἐπὶ δὲ τῶν Πλευ-
 ρῶν βα, αγ, ὡς ἐπὶ διαμέτρων, ἡμικύκλια ἐλάσσονα καταγραφῇ τὰ βνα,
 αμγ, τὰ καμπυλόγραμμα τῶν Σχημάτων βδαν, αλγμ, τὰ ἐκτὸς μὲν ὑπὸ
 τῆς Ἡμιπεριφερείας τῷ ἐλάσσονος κύκλῳ, ἐντὸς δὲ ὑπὸ τῷ τόξῳ τῷ μείζονος
 περατεύμενα, ἀπὸ τῷ ἐξευρόντος αὐτὰ, Μηνίσκοι σύζυγοι Γαποκράτες τῷ Χίῳ
 κατονομάζονται.

Εἰάν τὰ τόξα βδα, αλγ ἴσα ᾖ, τεταρτημόρια δηλονότι τῆς τῷ μείζο-

νοι Κύκλοι Περιφερείας τυγχάνοντα, καλείδωσαν οἱ τοιοῖδε Μηνίσκοι τεταρτημοριοί.

Ἐὰν ἡ Εὐθεΐα εἰ ἀγομένη, τὰ τῷ τεταρτημορικῷ Μηνίσκῳ τόξα ἀνάλογον τέμνη κατὰ τὰ Σημεῖα ϵ καὶ η , ὥς ἐστιν τὸ τόξον $\beta\epsilon$ πρὸς τὸ τόξον $\epsilon\alpha$, ὡς τὸ τόξον $\beta\eta$ πρὸς τὸ τόξον $\eta\alpha$, καλείδων τὰ ἐμβαδὸν $\alpha\epsilon\eta$, $\beta\epsilon\eta$, ἀπόμοιραι τῷ Μηνίσκῳ τῷ τεταρτημορικῷ.

Τῷ Μηνίσκῳ, ἢ τῷ αὐτῷ Τετραγώνῳ ἀπόμοιρα λέγεται, ἐὰν ταύτη η ἴσον εὐθύγραμμον Σχῆμα συσαθῇται ἔχῃ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Α.

„Τὰ ἐν τοῖς Κύκλοις ὅμοια Πολύγωνα πρὸς ἄλληλα ἐσίν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν Διαμέτρων (αζ, ιγ) Τετράγωνα, καὶ δὴ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν Ἡμιδιαμέτρων (αψ, ιχ), ταῦτέστι τὰ τοιαῦτα Πολύγωνα, ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν Διαμέτρων, ἢ τῶν Ἡμιδιαμέτρων τῶν Κύκλων, ἐν οἷς ἐκεῖνα εἰσὶ.

κ. 471.

Ἀρχήτωσαν αἱ αζ, ζβ, ιρ, λγ· ἐπεὶ οὖν τὰ Πολύγωνα ὑποτίθεται ὅμοια, ἴσαι ἔσονται (1) αἱ ὑπὸ ξβ, ρλι, καὶ αἱ Πλευραὶ ξβ, βα, ταῖς Πλευραῖς ρλ, λι ἀνάλογον· ὥς ἐπὶ τῶν Τριγώνων ξαβ, ριλ, αἱ (2) πρὸς τοῖς ξ καὶ ρ σημεῖοις Γωνίαι ἴσαι εἰσὶν· ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ βζα καὶ λγι, αἱ ταῖς αὐταῖς Περιφερείαις βα, λι βεβηκεῖται, ἴσαι (3) εἰσὶν· Αἱ δὲ ὑπὸ ζβα, γλι, ἐν τοῖς Ἡμικυκλίοις εἰσὶ, καὶ ἐπομένως (4) ὀρθαὶ καὶ ἴσαι· ἄρα καὶ αἱ λοιπαὶ ὑπὸ βαζ, λιγ (5) καὶ αὐταὶ ἴσαι εἰσὶ, καὶ ἰσογώνια ἄρα ὄντα τὰ Τρίγωνα ζαβ, γιλ, ἔσαι (6) καὶ ὅμοια· Ἡδὴ δὲ ἐπεὶ (ἐξ ὑποθ.) τὰ Πολύγωνα ὅμοια ἐσίν, ἔσαι αὐτὰ πρὸς ἄλληλα ἐν λόγῳ διπλασίονι (7) τῷ λόγῳ τῶν Πλευρῶν βα, λι, ὥς ἐστὶν διὰ τὰ δειχθέντα, ἐν διπλασίονι λόγῳ τῷ τῶν Διαμέτρων αζ, ιγ, καὶ ἐπομένως καὶ (8) τῶν Ἡμιδιαμέτρων. Ο. Ε. Δ.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Αἱ τῶν ἐν τοῖς Κύκλοις ὁμοίων Πολυγώνων Περίμετροι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ Διαμέτροι. Α'.

Ἐπειδὴ γὰρ ἐδείχθη $\alpha\beta : \lambda\iota :: \alpha\zeta : \iota\gamma$, καὶ $\xi\beta$ ἔσαι πρὸς $\rho\lambda :: \alpha\zeta : \iota\gamma$, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων Πλευρῶν ὁμοίως. Καὶ τοίνυν (9) πᾶσαι ἅμα αἱ

(1) Ο. ε. Α. τῷ ε. (2) ε. τῷ ε. (3) ΚΑ. τῷ γ. (4) ΑΑ. τῷ γ. (5) Θ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α. (6) Α. τῷ ε. (7) Κ. τῷ ε. (8) ΙΕ. τῷ ε. (9) ΙΒ. τῷ ε.

πλευραὶ πρὸς πάσας ἄμα, ταῖς Περιμέτρος πρὸς Περίμετρον, ἔσονται ὡς αζ πρὸς ιγ.

π. Τῶν ἐν τοῖς Κύκλοις ὁμοίων Εὐθυγράμμων, αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ εἰσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς αἱ τῶν Κύκλων Διάμετροι.

Λ ἦ μ μ α :

„Τὰ ἐν τῷ Κύκλῳ Πολύγωνα εἰς τὸν Κύκλον ἀποτελευτᾷ.

κ. 472.

Εὐγγραφῆτω Τετράγωνον τὸ αβγδ, καὶ ἐγγραφέν, ἐπεὶ ἡμίσεια (1) ἐστὶ τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ τὸν Κύκλον, μείζον ἔσαι δὴπε τῆς ἡμισείας τῷ Κύκλῳ· καὶ εἰ τοίνυν αὐτὸ ἀπὸ τῷ Κύκλῳ ἀφαιρεθῇ, πλέοντι τῆς ἡμισείας ἀφαιρεθήσεται. Εἴτα ἡ τῶν τόξων δίχα τετμημένων κατὰ ε, κ, ι, θ, ἐγγραφῆτω Οκτάγωνον, καὶ κατὰ τὸ ε ἀπτεῖτω τῷ Κύκλῳ ἡ ζη, ἡ πρὸς αὐτὴν προεκβαλλόμεναι προσπιπτέτωσαν αἱ βγ ἡ δα, κατὰ τὰ Σημεῖα η ἡ ζ· καὶ ἔσαι δὴ τὸ γζ παραλλήλογραμμον (2), ἢ ἐπεὶ τὸ Τρίγωνον γεα (3) ἡμίσεια ἐστίν, ἔσαι αὐτὸ πλέοντι τῆς ἡμισείας τῷ τμήματος γεα· Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ἡ τὰ Τρίγωνα ακδ, διβ, κξ: τῶν κατ' αὐτὰ τμημάτων, πλέοντι τῆς ἡμισείας εἰσὶν ἕκασον μὲν ἑκάστῳ, πάντα δὲ πάντων· καὶ τῶν ἄρα Τριγῶνων ἀπὸ τῶν τμημάτων ἐκείνων, ταυτὸν δ' εἰπεῖν ἀπὸ τῷ λοιπῷ τῷ Κύκλῳ ἀφαιρεθέντων, πλέοντι τῆς ἡμισείας ἀφαιρεθήσεται. Παραπλησίῳ δὲ τῷ λόγῳ, ἡ εἰπερ ἐφεξῆς τῷ Κύκλῳ Πολύγωνα ἐγγραφείη, διπλῷ τῷ ἀριθμῷ τῶν Γωνιῶν πληθυνόμενα, ἀπὸ τῷ λοιπῷ τῷ Κύκλῳ, ὑπὲρ τὴν ἡμίσειαν ἔξει ἀφαιρεῖσθαι ἀποδειχθήσεται· καὶ ἔσαι ἄρα τελευταῖον τὸ λοιπὸν (4) παντὸς τῷ δοθέντος ἔλαττον. Εὐδέντοι τὰ ἐγγραφόμενα Πολύγωνα ἐλλείψει τῷ Κύκλῳ, πληκίότητι οἷα σὴν δοθείσης ἐλάσσονι· ὅπερ ἔστιν, εἰς τὸν Κύκλον τέως ἀποτελευτήσασσι (5). Ο. Ε. Δ.

Μεθίδω δὲ ἡδὲν τῆς ἐκτεθείσης διαφερέση ἔχει ἂν ἀποδειχθῆναι, ὅτι ἡ τὰ εἰς τὸν Κύκλον περιγραφόμενα Πολύγωνα, εἰς αὐτὸν ἐκείνον τέως ἡ ἀπολήξουσιν· ἐπεὶ μέντοι ἡ τόδε πρὸς τοῖς ἄλλοις, ἡ δὴ ἡ τὸ προληφθὲν Λήμμα ἔχ ἥττον, ἐν τῇ Γ'. Προτάσει τῶν ἀρχιμειδίων Θεωρημάτων διελήπται, περιττὸν ἐνταῦθα περὶ τῆς τὸ πλείω ὑποσυνάψαι ἐκρίναμεν.

Π ρ ό τ α σ ι ς Β. .

„Οἱ Κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν Διαμέτρων Τετρά-

(1) Σχολ. ε. ἡ ζ. τῷ δ'. (2) Πόρ. ΚΖ. ΚΗ. ἡ ΚΘ τῷ γ'. (3) ΜΑ. τῷ α'. (4) ἄλλοις ἐκ τῷ Α. Λήμμ. τῷ Σχολ. τῷ μετὰ τὴν ΙΑ. τῷ ε'. (5) Σφ. ε. τῷ ιθ'.

„γωνα, ἢ ὡς ἂν τῷ αὐτῷ ἰσοδυναμῶς ἐξείποις, ὁ τῶν Κύκλων λόγος διπλασίῳ ἐστὶ τῷ τῶν Διαμέτρων.

Τῶν ὁμοίων Πολυγώνων τῶν εἰς τὰς Κύκλους αἰεὶ καὶ αἰεὶ ἐγγεγραφομένων, ὁ λόγος διπλασίῳ ἐστὶ (1) τῷ τῶν Διαμέτρων, τὰ δ' ὅπως ἐγγεγραφομένα τοῖς Κύκλοις Πολύγωνα, εἰς αὐτοὺς τέως (2) καὶ ἀπολήγουσιν· ἄρα (διὰ τὸ ἐπόμενον καθόλου Πόρισμα) καὶ ὁ τῶν Κύκλων λόγος τῷ τῶν Διαμέτρων διπλασίῳ ἐστὶ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα καθόλου.

„Εἰ τὰ ἐν δυτίσι Σχήματι (Α, Β) ἐγγεγραφομένα εἰς αὐτὰ τέως καὶ ἀπολήγουσιν, ὃν ἂν λόγον ἔχουσιν πρὸς ἀλλήλα τὰ ἐγγεγραφομένα, τὸν αὐτὸν τέτον ἐξοὶ καὶ τὰ ἐν οἷς Σχήματα.

Ἐστω λόγος Χ πρὸς Ψ, ὃν τὰ ἐγγεγραφομένα αἰεὶ ἔχει πρὸς ἀλλήλα. Εἰ Ρ μὴ τοῖον ὁ τῶν σχημάτων Α, Β λόγος ὁ αὐτός ἐστὶ τῷ Χ πρὸς Ψ, ὃν αἰεὶ ἔχει τὰ τοῖς σχήμασιν ἐγγεγραφομένα, ἔστω δὲ Α'. ὁ λόγος τῷ Α πρὸς τὸ Β, μείζων τῷ λόγῳ Χ πρὸς Ψ· καὶ ἄλλη τις ἄρα Πηλικότης ἢ Ρ ἐλάττω ἔσται τῷ σχήματι Α, ἔσται πρὸς τὸ σχῆμα Β ὡς Χ πρὸς Ψ· καὶ ἐπειδὴ τὰ ἐγγεγραφομένα (ἐξ ὑποθ.) εἰς τὰ Α καὶ Β ἀπολήγουσι τελευτῶντα, ἔσονται τινα τοῖς Α καὶ Β σχήμασιν ἐγγεγραφομένα, ἅττα ἂν τῶν ἐλπίποι (3) ἐλάττωσιν πηλικότητι, ἢ τὸ Ρ ἐλπίπον ἐστὶ τῷ Σχήματι Α. Ἐσώσαν οὖν ἐκεῖνα Γ καὶ Ζ· τοιγαρὶν τὸ Γ μείζων ἔσται τῷ Ρ· καὶ δὴ τὸ Γ ἔσται πρὸς τὸ Β, ἐν λόγῳ μείζονι (4) ἢ τὸ Ρ πρὸς τὸ Β, ταύτης (καθ' ἑκάστην ἐτίθετο) ἢ τὸ Χ πρὸς τὸ Ψ, ἥτοι (διὰ τὴν ὑπόθ.) τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ· Ἐπειδὴ τοῖον τὸ Γ πρὸς τὸ Β, ἐν μείζονι λόγῳ ἐστὶν ἢ πρὸς τὸ Ζ, ἔσται τὸ Β σχῆμα ἐλάττω τῷ αὐτῷ (5) ἐγγεγραφομένῳ Ζ, τὸ ὅλον τῷ ἰδίῳ μέρει. Ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ὁ λόγος Β πρὸς Α, μείζων ἐκ ἂν εἴη τῷ Ψ πρὸς Χ, (ταύτης ὅτι (6) ἀδύνατον εἶναι τὸν λόγον Α πρὸς Β ἐλάττωσιν τῷ λόγῳ Χ πρὸς Ψ)· ὁ ἄρα λόγος Α πρὸς Β, ἴσος ἐστὶ τῷ λόγῳ Χ πρὸς Ψ. Ο. Ε. Δ.

Παραπλησίᾳ δὲ τῇ μεθόδῳ ἀποδειχθήσεται, καὶ Σχήματα δύο τὸν αὐτὸν πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχειν, ὃν αἰεὶ ἔχει τὰ περιγεγραφομένα, καὶ εἰς ἐκεῖνα τέως ἀπολήγουσιν· οὕτως

(1) Α. τῷ ἱβ'. (2) Διὰ τὸ ἴση. (3) Ο. ε. τῷ ἱβ'. (4) Η. τῷ ε'. (5) Ι. τῷ ε'. (6) Ε. τῷ ε'.

ΓΖ Εἰς ὁ λόγος Χ πρὸς Ψ, ὃν τὰ περιγραφόμενα αἰεὶ ἔχει πρὸς ἄλλη-
 ΑΒΧΨ λα· Εἰ μὴ οὖν ὁ λόγος τῶν σχημάτων Α πρὸς Β, ὁ αὐτὸς εἴη τῷ Χ πρὸς
 Ρ Ψ, ὃν αἰεὶ ἔχειν νοεῖται τὰ εἰς τὰ σχήματα περιγραφόμενα, ἔσω ὁ λόγος
 Α πρὸς Β πρῶτον μείζων τῷ λόγῳ Χ πρὸς Ψ· Καὶ ἔσαι τοίνυν τὸ Α πρὸς
 ἄλλοτι Μέγεθος τὸ Ρ, ὃ μείζον εἴη ἐκεῖνα, ὡς Χ πρὸς Ψ· καὶ ἐπειδὴ τὰ
 περιγραφόμενα καὶ ὑπὸ Α εἰς τὰ σχήματα Α καὶ Β ἀπολήγοντα τελευτᾷ,
 ἔσονται τινα τοῖς σχήμασιν Α καὶ Β περιγραφόμενα, ἅττα αὐτὰ ὑπερέχει
 πληκτότητι (1) ἐλάσσονι, ἢς τὸ Ρ ὑπερέχει τὸ σχῆμα Β· Εἰς γὰρ ἐκεῖ-
 να τὰ Γ καὶ Ζ, καὶ τὸ ἄρα Ζ ἐλαττον ἔσαι τῷ Ρ· ὥς (2) ὁ λόγος Α πρὸς
 Ζ, μείζων ἔσαι τῷ λόγῳ Α πρὸς Ρ, τῷ τε τῷ λόγῳ Χ πρὸς Ψ, ἦτοι Γ
 πρὸς Ζ· Ἐπειδὴ τοιγαρὴν ὁ λόγος Α πρὸς Ζ, μείζων ἐστὶ τῷ λόγῳ Γ πρὸς Ζ,
 τὸ σχῆμα Α μείζον (3) ἔσαι τῷ εἰς αὐτὸ περιγραφόμενῳ Γ, τὸ μέρος τῷ
 ὅλῳ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ λόγος τῷ Α πρὸς Β μείζων ἂν εἴη τῷ λό-
 γῳ Χ πρὸς Ψ· Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δευχθήσεται καὶ τὸν λόγον Β πρὸς Α,
 μὴ εἶναι τῷ Ψ πρὸς Χ μείζονα, καὶ ἐπομένως (4) τὸν λόγον Α πρὸς Β, μὴ
 ἐλάσσονα εἶναι τῷ λόγῳ Χ πρὸς Ψ· Εἴπερ τοίνυν ὁ λόγος τῷ Α πρὸς Β,
 ὃδὲ μείζων ἐστίν, ὃδὲ ἐλάσσων τῷ λόγῳ Χ πρὸς Ψ, ἔσαι αὐτῷ ἴσος. Ο. Ε. Δ.

Πορίσματα τῆς Β.

Προτάσεως.

- Α. Ὡς οὖν Κύκλος πρὸς Κύκλον, ἔτω Πολύγωνον τὸ ἐν ἐκείνῳ πρὸς Πο-
 λύγωνον τὸ ἐν τῷ, ἐκάτερα γὰρ ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν Διαμέτρων εἰσὶ
 τῶν Κύκλων.
- Β. Ἐστὶ οἱ Κύκλοι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλους ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν οἰκείων (5)
 ἡμιδιαμέτρων, τῷ τε (6) ὡς τὰ Τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἀκτίνων.
- Γ. Καὶ τῶν Κύκλων δὲ, ὧν αἱ Διάμετροι, ἢ αἱ ἡμιδιάμετροι δῆλαι, ἐν-
 τεῦθεν ὁ λόγος ἐπιγνωσθήσεται, τῇ εὐρέσει δηλονότι (7) τῆς ἐπὶ τῶν δο-
 θεῖσων Διαμέτρων τρίτης ἀνάλογον, πρὸς ἣν ἢ τῷ Α'. Κύκλῳ Διάμετρος τὸν
 αὐτὸν (8) ἔξει λόγον, ὃν ὁ Α'. αὐτὸς Κύκλος πρὸς τὸν Β'. Οἷον ἔσω δὴ ἢ
 τῷ Α' Κύκλῳ Διάμετρος ποδ. 4, ἢ δὲ τῷ Β'. ποδ. 6, καὶ ἐπεὶ 4, 6, 9 συνε-
 χῶς ἀνάλογον (9) εἰσὶν, ἔσαι ὁ Α'. Κύκλος πρὸς τὸν Β', ὡς 4 πρὸς 9.

(1) Ὅφ. ε. τῷ 18. (2) Η. τῷ 1. (3) Ι. τῷ 1. (4) Κε. τῷ 1. (5) ΙΕ. καὶ ΙΔ. το
 ε. (6) Σχόλιον μετὰ τὴν Κ. τῷ 1. (7) ΙΔ. τῷ 1. (8) Διὰ ταύτ. καὶ τὸν Ι. Ὅφ. τῷ 1.
 (9) Γ. Πορ. τῆς ΙΖ. τῷ 1.

Εντεῦθεν δέ τοι ἐ τὸν τυχόντα Κύκλον, κατὰ λόγον τὸν δοθέντα αὐ- 4.
 ξειν, ἢ μείων ἐξέσαι, ὡς ἀνωτέρω (1) σεσημειώται. Οἷον προκείδω δὲ Κύ-
 κλον καταγράψειν, ὅς ἂν εἴη θατέρη δοθέντος πενταπλάσιος· ἔσω δέ τοι ἡ
 τῷ δοθέντος Ἡμιδιάμετροι αβ· Ταύτης οὖν μεταξὺ ἐ τῆς Εὐθείας βγ, ἣτις
 ἂν εἴη πενταπλάσιον τῆς αβ, εὗρεθῇτω δὲ μέση ἀνάλογος ἡ βχ· Οἷ τοίνυν
 Κύκλος, ὅς ἂν Διασήματι τῷ κατὰ τὴν βχ καταγραφείη, ἔσαι τῷ δοθέντος
 Κύκλου πενταπλάσιος.

Εἰ ἂν τέτταρες εὐθεῖαι ὥσιν ἀνάλογον, τὰ εὐδύγραμμα τῶν Σχημάτων Ε'.
 τὰ ὁμοίαι τε ἐ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀπὸ τῶν δύο προτέρων, τοῖς ἐπὶ τῶν
 δύο ὑσέρων, ὡς ἐπὶ διαμέτρων ἢ ἡμιδιαμέτρων Κύκλοις ἀνάλογον εἰσὶ. Τῶν
 γὰρ δοθεισῶν ἀνάλογον ἔσων, καὶ δὴ ἐ τῶν εὐθυγραμμῶν Σχημάτων, ἐ
 τῶν Κύκλων (2) ἐν λόγῳ ὄντων διπλασίονι τῷ λόγῳ τῷ τῶν αὐτῶν Εὐθειῶν,
 ἔσονται δὴ περὶ τὰ Εὐδύγραμμα (3) τοῖς Κύκλοις ἀνάλογον.

Εἴ τι δὲ ἀνάπαλιν, εἰ ἂν Σχήματα δύο εὐδύγραμμα ὁμοία δυτὶ Κύκ- 5'.
 λοις ἀνάλογον ἢ, ἔσονται αἱ τῶν Εὐθυγραμμῶν ὁμόλογοι πλευραὶ ταῖς
 τῶν Κύκλων διαμέτροις ἀνάλογον· Εἴπειδὴ γὰρ οἱ τῶν Σχημάτων, καὶ τῶν
 Κύκλων λόγοι ἴσοι ἀλλήλοις τυγχάνουσι, διπλασίονες (4) ὄντες τῶν λό-
 γων, ἢς ἔχουσιν αἵτε ὁμόλογοι πλευραὶ, ἐ αἱ διάμετροι πρὸς ἀλλήλας, ἔ-
 σονται δὴ (5) ἐ οἱ λόγοι ἕτοι ἀλλήλοις ἴσοι.

Εἴδονται εἰ ἂν τῷ δοθέντι Κύκλῳ Α ἴσον Τετραγώνον δοθῇ τὸ Π, εὐ- Z'.
 ρεθῇσεται Τετραγώνον ἕτερον τὸ Χ, ὅπερ ἂν ἐτέρῳ ὁτῶν Κύκλῳ Γ ἴσον
 εἴη. Εἴπειδὴ γὰρ ἐξ ὑποθ. Α πρὸς Π, ὡς Γ πρὸς Χ, ἔσαι ἐ ἐναλλὰξ Α:
 Γ :: Π : Χ· καὶ ἐπομένως (6) ἡ Ἡμιδιάμετρος τῷ Κύκλῳ Α πρὸς τὴν Ἡμι-
 διάμετρον τῷ Γ, ὡς ἡ Πλευρὰ τῷ Τετραγώνῳ Π πρὸς τὴν τῷ Χ. Εἴπερ δὲ αἱ
 τῶν Κύκλων Ἡμιδιάμετροι, ἐ ἡ τῷ Τετραγώνῳ Π Πλευρὰ δέδονται, εὗρεθῇ-
 σεται δὴ (7) ἡ Πλευρὰ τῷ Τετραγώνῳ Χ, ἐ ἐπομένως (8) ἐ αὐτὸ τὸ Χ Τε-
 τραγώνον. Τοῦ δ' ἐν τῷ δε τῷ Πορίσματι περὶ τῶν Τετραγώνων ῥηθὲν, τὸ αὐ-
 τὸ ἐ περὶ ὁποίων ἄλλων σχημάτων ἀλλήλοις ὁμοίων (9) εἰρημένον ἔσω.

Οἷ ἐπὶ τῆς Ὑποτεινύσης αβ τῷ ὀρθογωνίῳ Τριγώνῳ αβγ Κύκλος, ἴσος Η'. κ. 473.
 ἐστὶ τοῖς δυτὶ Κύκλοις, τοῖς ἐπὶ τῶν αγ, βγ Πλευρῶν τῶν περιεχουσῶν τὴν
 ὀρθὴν Γωνίαν· Εἰ ἂν γὰρ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς Γωνίας γ, ἐπὶ τὴν Ὑποτεινύσαν κά-

(1) Ὅρα Δ. Πόρ. τῆς Κ. τῷ ε'. (2) Κ. τῷ ε'. ἐ Β. τῷ ιβ'. (3) ΔΔ. τῷ ε'. (4)
 Κ. τῷ ε'. ἐ Β. τῷ ιβ'. (5) ΔΕ. τῷ ε'. (6) Διὰ τὸ Ε. Πόρ. (7) ΙΒ. τῷ ε'. (8) Μς.
 τῷ α'. (9) ΙΒ. ἐ Ι. τῷ ε'.

δετος κατενεχθῇ ἢ γξ, ἔσονται αβ, αγ, αξ (1) $\equiv$, καὶ ὡσαύτως αβ, γβ, βξ (2) $\equiv$, ὥς ὁ ἐπὶ τῆς αβ Κύκλος πρὸς τῆς ἐπὶ αγ, γβ, ὡς ὁ (3) ἐπὶ αβ πρὸς τῆς αξ, βξ· καὶ ἐπομένως ὁ Κύκλος ὁ ἐπὶ αβ (4) πρὸς τῆς λοιπῆς Κύκλου ἅμα ληφθέντας, ἐσὶν ὡς αβ πρὸς αξ + ξβ· ἐπεὶ δὲ αβ = αξ + ξβ, ἔσαι καὶ ὁ ἐπὶ τῆς αβ Κύκλος δυτὶ τοῖς λοιποῖς ἅμα ληφθεῖται ἴσος.

θ'. Ἐνθεντοι δοθεισῶν τῶν Διαμέτρων κύκλων ὠντινωνῶν, ῥᾶδιον ἐστὶ τότε ἄθροισμα, καὶ τὴν διαφορὰν τῶν Κύκλων ἀποδῆναι, τατέσι Κύκλον εὐρεῖν, ὃς ἂν ὁποσοισθῇ πλήθειτε καὶ μεγέθει δοθεῖσι Κύκλοις ἴσος ἢ, ἢ γὰρ Κύκλον καταγράψαι, ὃ τὸ ἐμβαλὸν τῇ ὠντινωνῶν ἀνίσων Κύκλων διαφορᾷ ἴσον εἶη· τῇ αὐτῇ ἐκεῖνη δηλονότι μεθόψω, δι' ἧς τῶν Τετραγώνων τότε ἄθροισμα, καὶ ἡ διαφορὰ παρίσταται, ἐν τῷ Σχολίῳ τῆς ΜΖ'. Πρωτ. τῷ Α'. Βιβλίου· πλὴν ὅσον ἐν τῇ ἀποδείξει ἀντὶ τῆς ΜΖ'. τῷ Α', ληπτέον τὸ Η'. Πόρ. τῆς Β'. τῷ ΙΒ'.

κ. 474. Γ'. Κἀντεῦθεν καὶ τὸν τῶν συζύγων Μηνίσκων τετραγωνισμόν, ὃν πρῶτος Ἀπποκράτης ὁ Χῖος διδάξας φέρεται, δυνατόν λαβεῖν· ἔσω γὰρ γαβ Τρίγ. ὀρθογών., καὶ βαγ Η'μικύκλιον ἐπὶ τῆς Διαμέτρου βγ, καὶ βνα Η'μικύκλ. ἐπὶ τῆς αβ, καὶ αμγ ἐπὶ τῆς αγ, καὶ ἔσαι τοῖνον τὸ Η'μικύκλ. βαγ, τοῖς Η'μικυκλ. βνα καὶ αμγ (5) ἅμα ληφθεῖσιν ἴσον. Ἐὰν οὖν τὸ ἀμφοτέρωστε κοινὸν χωρὶς ἀφαιρεθῇ, τατέσι τὰ Τμήματα βα, αγ, ὑπολειφθήσονται οἱ δύο Μηνίσκοι βνα, αμγ, οἱ ὑπὸ τῶν κυκλικῶν γραμμῶν περατάμενοι, τῷ εὐθυγραμμῷ Τριγώνῳ βαγ ἴσοι. Ἐὰν δὲ ἡ βα εὐθεῖα ἴση ἢ τῇ αγ, τατέσιν εἰς ὧν οἱ Μηνίσκοι τεταρτημοριοὶ, ἀχθείσης καδέτε τῆς αξ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν βγ, ἔσαι τὸ μὲν βαξ Τρίγωνον ἴσον τῷ Μηνίσκῳ βνα, τὸ δὲ γξα ἴσον τῷ Μηνίσκῳ γμα. Ο. Ε. Ε.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν Α'.

κ. 475. Τὰ τῶν Κύκλων ὅμοια Τμήματα αβξ, ιλρ, εἰσὶν ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν Διαμέτρων, καὶ δὴ καὶ ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν εὐθειῶν αξ, ιρ, αἱ τὰ τῶν Τμημάτων ὑποτείνουσι τόξα. Τῶν γὰρ τόξων αβξ, ιλρ, δίχα τμηθέντων κατὰ τὰ β καὶ λ, ἐπιζευχθεισῶν τε τῶν αβ, βξ, καὶ ιλ, λρ, διὰ τὰ διχοτομηθέντα τόξα, αἱ ὑποτείνουσαι (6) ἔσονται ἴσαι, τατέσιν αβ = ξβ, καὶ ιλ = ρλ, ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ αβξ (7) = ιλρ· ὥς τε τὰ Τρίγωνα (8) αβξ, ιλρ ὁ-

(1) Α. Πόρ. τῆς Η. τῷ ε'. (2) Αὐτ. (3) Διὰ ταύτ. τὴν Πρωτ. καὶ Ο. Γ. τῷ ε'. (4) ΚΔ. τῷ ε'. (5) Η. Πόρ. ταύτ. (6) ΚΖ. τῷ γ'. (7) Β. Πόρ. τῆς ΛΓ. τῷ ε'. (8) ε. τῷ ε'.

μοια ἐσίν· ἐπομένως δὲ (1) ἐν λόγῳ διπλασίονι εἰσι τῶν Πλευρῶν αβ καὶ ιλ, ἢ γὰρ (2) τῶν διαμέτρων αζ, ιγ, τῶν ἐν τοῖς Κύκλοις, ἢ καὶ τῶν ὑποτείνουσων αξ, ιρ. Τῷ δὲ συνεχεῖ τῶν τόξων αβ, βξ, καὶ ιλ, λρ διχασμῷ, πολυγώνων Σχήματα ὁμοια αἰ ἐγγραφήσεται τοῖς τμήμασι, καὶ ἐπὶ βάσεων τῶν αὐτῶν αξ, ιρ, ἃ τέως εἰς αὐτὰ τὰ τόξα ἀπολήγει· Τοιγαρὺν καὶ τὰ τόξα αὐτὰ (3) αβξ, ιλρ εἰσὶν ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν διαμέτρων αζ, ιγ, ἢ τῶν ὑποτείνουσων αξ, ιρ. Ο. Ε. Δ.

Σ Χ ό λ ι ο ν Β'.

Τὸ τετραγωνισμῷ τῶν ἐποιωνῶν μὲν συζύγων Μηνίσκων ἅμα, τῶν δὲ τεταρτημορικῶν καὶ χωρὶς, ἐν τῷ Ι'. Πορίσματι ὑποτίθεντος, ἐξέσω δὴ καὶ ἅλ' ἅττα περὶ τοῦ τεταρτημορικῷ Μηνίσκου, περίτε τοῦ τετραγωνισμοῦ τῆς ἀπομοίρας τοῦ αὐτοῦ, καὶ περὶ τῆς μεθόδου τῆς κατατομῆς αὐτοῦ, κατὰ τὸν δοθέντα λόγον ὑποσυνάψαι.

Πληρώσω ἐ τοῦ τεταρτημορικῷ Μηνίσκου ἐλάσσων Κύκλος, καὶ τέτα ἡ Περιφέρεια διελεύσεται διὰ τοῦ Κέντρου καὶ τοῦ μείζονος Κύκλου. Ἐὰν οὖν κατὰ τὸ ἐξώτερον τοῦ Μηνίσκου τόξον βνα, ληφθῇ τυχὸν σημεῖον τὸ ε, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ ξε, αὕτη τεμεῖ τὰ τοῦ Μηνίσκου ἐκάτερα τόξα ἀνάλογον, κατὰ τὰ σημεῖα ε καὶ δ, καὶ διὰ τούτου τὸν Μηνίσκον τεμεῖ κατὰ διττὴν ἀπόμοιραν (4) τὴν μὲν αεδ, τὴν δὲ βεδ. Ἐπειδὴ γὰρ ἡ ὑπὸ βξε Γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ μὲν τοῦ μείζονος κύκλου ἐστὶ, πρὸς δὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ ἐλάσσονος, τὸ τόξον βε (5) ἔσται δις τοσάτων μοιρῶν, ὅσων τὸ βδ· καὶ ἐπομένως ἡ Ἡμιπεριφέρεια βεα ἐστὶ πρὸς τὸ τεταρτημόριον βδα, ὡς τὸ τόξον βε πρὸς τὸ τόξον βδ, τετέστιν (6) ὡς τόξον εα πρὸς τόξον δα· καὶ ἐναλλάξ τόξον βε πρὸς τόξον εα, ὡς τόξον βδ πρὸς τόξον δα.

Ἐὰν τὰ τόξα εβ, εα ἴσα ᾖ, τετέστιν ἐὰν τὸ σημεῖον ε συμπίσῃ τῷ ν, Β'. κ. 477. τῷ μεταίτατῳ σημείῳ τοῦ ἡμικυκλίου βνα, αἱ εὐθεῖαι νβ, να ἐπιζευγνύμεναι, πληρώσασιν τὸ Τετράγωνον ναξβ, τὸ εἰς τὸν ἐλάσσονα κύκλον ἐγγεγραμμένον, τῷ δὲ μείζονος Κύκλου ἐφάπτονται κατὰ τὰ σημεῖα α καὶ β. Ἐπειδὴ γὰρ ἡ βνα Ἡμιπεριφέρεια τοῦ ἐλάσσονος κύκλου, δίχα τέμνεται κατὰ τὸ ν, ἔσονται αἱ Εὐθεῖαι νβ, να, τεταρτημορικῶν τόξων ὑποτείνεσαι, ἥτοι (7) πλευ-

(1) ΙΘ. τῷ ε'. (2) Β. Πόρ. τῆς Α. τῷ β'. (3) Διὰ τὸ κατὰ τὴν Πόρ. (4) Ο. Ε. Ζ. τῷ β'. (5) Ἐπιτεταρτ. ἐκ τοῦ Δ. Πορίσμ. τῆς Ε. Πρὸς. τῷ δ'. (6) Ις. καὶ Ζ. τῷ ε'. (7) ε. τῷ δ'.

γαὶ τῇ Τετραγώνῳ, ὃ ἐν τῷ ἐλάχιστῳ κύκλῳ ῥυθίζεται· διὰ δὲ τῆς ἰσῆς τῆς μεγέθους κύκλῳ ἡμεινόμενος βξ, αξ, ἔσονται ζυ αὐταὶ αἱ ἡμεινόμεναι ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ βξα, αἱ λοιπαὶ δύο τῇ Τετραγώνῳ πλευραὶ, τῇ ἐν τῷ ἐλάχιστῳ Κύκλῳ δυναμένη γυράφεισθαι. Ἐπεὶ δὲ ᾤπαν Τετραγώνου (ε) ἐστὶν ὀρθογώνιον, αἱ ὑπὸ νβξ, νξξ ὀρθαὶ ἔσονται, καὶ ἐπομένως αἱ εὐθείαι νβ, να, τῇ μεγέθους Κύκλῳ (α) ἐφάπτονται.

Γ'. Ἐὰν δὲ τὰ τόξα εβ, εα (ὅρα τὸ Σχ. τῇ Α'. Πόρ.) ἦνσαν η̄, ζυ αἱ ὑποτείνουσαι εβ, εα ἄνισοι ἔσονται· ζυ ἔαν μὲν ἡ εα μείζων ἢ τῆς εβ, διὰ τὴν ὑπὸ βεα τὴν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ ὀρθὴν ἦσαν, ἡ ὑπὸ εβα (3) ἡμίσειας ὀρθῆς μείζων ἔσται, ἡ δὲ ὑπὸ εαβ ἡμίσειας ὀρθῆς ἐλάχιστων. Ἐνδεστοὶ ἡ ὑπὸ εαξ (πυτέειν ἡ ὑπὸ εαβ ἡμίσεια ὀρθῆς τῇ βαξ ἐπαυξήσεια) ἔσται ὀρθῆς ἐλάχιστων· καὶ τοῖον ἡ εα τεμείπῃς τὸ τεταρτημορίον τόξον βδα τῇ μεγέθους Κύκλῳ (4), οἷον κατὰ τὸ η̄.

Δ'. Ἐπιτευχθεῖσα οὖν ἡ Εὐθεία βη, αὕτη τῇ ὀρθογωνίᾳ Τριγώνῳ βην βᾶσις ἡ αὕτη, ζυ τῇ βῃν τόξῳ ὑποτείνεσθαι ἔσται, ὡς δηλόν· αἱ δὲ ὑπὸ εηβ, εβη ἔσονται ἴσαι, πυτέειν ἐκατέρω ἡμίσειας ὀρθῆς· διὰ γὰρ τὰς ὑπὸ εηβ, εηβ, τὰς (5) δύο τῇ ὀρθῇ ἰσῆς, ζυ τὴν ὑπὸ εηβ τὴν ἐν τῷ τεταρτημορίῳ πημίαντ (6) ἡμεινόμεν ἔσαν ὀρθῆς, ἔσται ἡ ὑπὸ εηβ ἡμίσεια ὀρθῆς, καὶ διὰ τὴν ὑπὸ νεβ ὀρθὴν τυγχανύσαν, ἔσται (7) ζυ ἡ ὑπὸ εβη ἡμίσεια ζυ αὕτη ὀρθῆς.

Ε'. Βᾶσις βη τῇ ὀρθογωνίᾳ ἰσοσκελὲς Τριγώνῳ εβη, ὑπὸ τῆς εξ εὐθείας διχατς ζυ πρὸς ὀρθᾶς τεύμεται· ἡ γὰρ ὑπὸ βεξ τῇ ἐπὶ τῇ τεταρτημορίῳ τόξῳ βξ τῇ ἐλάχιστῳ Κύκλῳ (8) ἡμίσεια ἐστὶν ὀρθῆς· διὸ ἡ ὑπὸ βην ὀρθὴ ὑπὸ τῆς εὐθείας βξ δίχα τεύμεται. Ἀλλὰ γὰρ ἡ ὑπὸ βην ἐστὶν ἡ τῇ ἰσοσκελὲς κατὰ κορυφὴν Γωνία, ταύτητοι ἡ ἐκείνην διχοτομήσας Εὐθεία (9), ἡ αὕτη ζυ τὴν Βᾶσιν βη κατὰ τὸ ζ δίχα τεμεῖ, καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς δὲ ζ κἀκείτος ἔσται. Τὰ τοῖον Τριγώνῳ βξε, νξε, ἀλλήλαις τε ζυ τῷ ὀλῳ βην, ζυ δὴ ζυ τῷ βξα Τριγώνῳ ὁμοια ἐστὶν· ᾤπαντα γὰρ ἐστὶ Τριγώνῳ ὀρθογωνίᾳ τε ζυ ἰσοσκελῇ, οἷα Τετραγώνῳ ἡμίον.

Ζ'. Ἐπειδὴ ἡ βξ ἐπὶ τῆς δξ (ἥτις τῇ μεγέθους κύκλῳ ἡμεινόμετος τυγχανύει) πρὸς ὀρθᾶς ἐστὶν, ἔσται (10) αὕτη ὀρθὴν ἡμίτονον τῇ τόξῳ βξ, ζυ ἐπομένως (11) ἡ διπλασίως τῆς βξ, ἦτοι ἡ βη, ἔσται ὑποτείνεσθαι τῇ διπλασίῳ τῷ

(1) Οἱ ΑΒ. τῷ α'. (2) Ιε. τῷ γ'. (3) ΙΗ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (4) Ιε. τῷ γ'. (5) ΙΓ. τῷ α'. (6) Δ. Πόρ. τῆς Η. ζυ τῆς Θ. τῷ δ'. (7) ε. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. (8) Δ. Πόρ. τῆς Η. ζυ τῆς Θ. τῷ δ'. (9) Δφδ. Γ. τῇ Σχολεῖ τῆς Κε. τῷ α'. (10) Οἱ. Ι. τῷ γ'. (11) Πόρ. τῆς Δ. τῷ γ'.

ἐν τῇ βδ, τετέστι τῇ βδῃ. Ἀνωτέρω δὲ (ἐν ἀριθμ. Α΄.) ἐδείκνυτο, ὅτι τὸ βε τόξον τὸ ἐν τῷ ἐλάσσονι Κύκλῳ, δις τοσούτων μοιρῶν ἐσιν, ὥσων τὸ βδ τὸ ἐν τῷ μείζονι. Τὸ ἄρα βδῃ τόξον (τὸ διπλάσ. δηλον. τῇ βδ), ὁμοίον ἐς (1) τῷ τόξῳ βε, καὶ τὸ Τμήμα βῃ, ὁμοιον τῷ Τμήματι βε.

Ἡ δὲ τῷ Μηνίσκῳ ἀπόμοιρα βεδ, ἴση ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ Τριγώνῳ βεζ. Η΄. Τὰ γὰρ ὅμοια Τμήματα βε, βῃ εἰσὶν (2) ἐν λόγῳ διπλασίονι τῶν Διαμέτρων βα, βγ· τετέστιν (3) ὡς 1 : πρὸς 2· ἐνθεντοὶ ἡ ἡμίσεια τῇ Τμήματος βδζ τῷ τμήματι βε ἴση ἔσται. Ἐάν τοίνυν ἀπὸ τῆς βεδ ἀπομοίρας ἀφαιρεθῇ τὸ Τμήμα βε, καὶ τὸ τάτῳ ἴσον, προσεθῇ ἡ τῇ Τμήματος ἡμίσεια βδζ, συζησεται Τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ βεζ τῇ ἀπομοίρᾳ βεδ ἴσον, καὶ ἐπομένως (4) τετραγωνίζεται ἡ ἀπόμοιρα βεδ τῷ τεταρτημορίῳ Μηνίσκῳ.

„Τὸν τεταρτημορικὸν Μηνίσκον αδβν, κατὰ τὸν δοθέντα λόγον (εἶον Γ. „τὸν φπ πρὸς πρ) εἰς ἀπομοίρας διελθεῖν τὰς αεδ, βεδ, ἐκατέρωστε τῶν „μερίδων τὸν τετραγωνισμὸν ἀποδύειν.

Ἡ Διάμετρος αβ τῷ ἐλάσσονος Ἡμικυκλίου αεβ, διαιρεῖσθω (5) κατὰ τὸν δοθέντα λόγον κατὰ τὸ 1, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἡμικυκλίῳ, ἀπὸ τῆ σημείω 1 ἀνιστάσθω τῇ Διαμέτρῳ βα κάθετος ἡ ιε, ἀπὸ δὲ τῆ ε ἐπὶ τὸ ξ, ὃ Κέντρον ἐστὶ τῷ μείζονος Κύκλῳ, ἐπιζευχθεῖσα ἡ εξ, κατατεμεῖ τὸν Μηνίσκον ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ· τὰ γὰρ ὅμοια Τρίγωνα (6) βαξ, βεζ, εἰσὶν ἐν διπλασίονι (7) λόγῳ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν αβ, βε, τετέστι (διὰ τὰς αβ, βε, βι --- (8)) ὡς (9) αβ : βι· καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ιε, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ (10) ἔσται τὸ βαξ Τρίγωνον πρὸς τὸ Τρίγωνον βιε, διὰ τὸ αὐτὸ ὁψος τὸ πρὸς τὸ ξ. Ἐπειδὴ τοίνυν τὸ Τρίγωνον βαξ, πρὸς ἐκάτερον τῶν Τριγώνων βεζ, βιε τὸν αὐτὸν (11) ἔχει λόγον, ἔσται τὸ Τρίγων. (12) βιε = τῷ Τριγ. βεζ = (13) τῇ ἀπομοίρᾳ βεδ· ἄλλ’ ὅλος ὁ Μηνίσκος τῷ Τριγώνῳ βαξ (14) ἴσος ἐστὶ, καὶ ὅτως ἡ ἀπόμοιρα αεδ τῷ Τριγώνῳ (15) αιε ἴσεται· τὸ δέ τοι Τρίγωνον αιε πρὸς τὸ Τρίγωνον βιε (16), ὡς αἱ πρὸς βι, τετέστιν ὡς φπ πρὸς πρ. Ο’ ἄρα Μηνίσκος ὁ τεταρτημορικός ἐν τῷ δοθέντι διατέμενεται λόγῳ, καὶ ἄλλῳ τρόπῳ ὁ τῆς μερίδος βεδ τετραγωνισμὸς

(1) Ορ. Δ. τῷ ε΄. (2) Σχόλ. τῆς Α. τῷ παρ. (3) Διὰ τὸ Σχόλ. τῆς Κ. τῷ ε΄., καὶ τὸ Α. Πόρ. τῆς ΜΖ. τῷ α΄. (4) Η. Ορ. τῷ ιβ΄. (5) Θ. τῷ ε΄. (6) Αρ. ε. τῆς παρ. (7) ΙΘ. τῷ ε΄. (8) Β. Πόρ. Η. τῷ ε΄. (9) Ι. Ορ. τῷ ε΄. (10) Α. τῷ ε. (11) ΙΑ. τῷ ε΄. (12) Θ. τῷ ε΄. (13) Αρ. Η. τῷ παρ. (14) Πόρ. Ι. ταύτῃ. (15) Αξ. Γ. τῷ α΄. (16) Δ. τῷ ε΄.

ἀποδεδόται. Ὁθεν δὴ τὴν αὐτὴν μερίδα καὶ τῷ Τριγώνῳ βίξ, καὶ δὴ καὶ τὴν μερίδα τὴν ἑτέραν ἀπὸ τῷ τριγώνῳ αἰξ ἴσην τυγχάνειν, δῆλον ἐγένετο, καὶ δίδεται ἄρα ἀμφοῖν τῶν μερίδων ὁ τετραγωνισμός.

α. 478. Γ'. Ἀμφοῖν δὲ τῶν Κύκλων πληρωθέντων αβγ καὶ αξβν, ἀχθήτω πρὸς τὴν Διάμετρον τῷ ἐλάχιστονος αβ, παράλληλος ἡ Διάμετρος τῷ μείζονος εζ, καὶ ταύτῃ πρὸς ὁρθὰς ἑτέρα αὖτις Διάμετρος τῷ αὐτῷ μείζονος Κύκλῳ ἡ γδ, ἣτις προσεβληθεῖσα, τόν τε Μηνίσκον ανβ δίχα τεμεῖ εἰς τὰς μερίδας ανδ καὶ βνδ, τὰς ἀλλήλαις ἴσας, καὶ τὸ Τρίγωνον αξβ εἰς δύο ἴσα Τρίγωνα τὰ αδξ, βδξ, τὰ τῷ ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις ὅμοια. Φημὶ δὴ ὅτι τῷ μηνιοειδὲς χωρίῳ ἀξιβεγδα τὰ κέρατα ανξζ καὶ βίξε, τοῖς τριγώνοις αδξ, βδξ, καὶ (1) ἐπομένως ταῖς τῷ τεταρτημορίῳ Μηνίσκου μερίσιν ανδ, βνδ, ἴσα εἰσὶν ἑκάτερον ἑκατέρῳ. Ἐπειδὴ γὰρ $\alpha\beta\Gamma = (2) \alpha\zeta\Gamma + \beta\delta\Gamma = 2 \alpha\zeta\Gamma$, ἔσται (3) τὸ Τμήμα αδβ τῷ Τμήματι ανξ διπλῆν, τὸ δ' ἡμισυ ἐκείνου αδβ ἴσον τῷ Τμήματι ανξ. τὰ δὲ εἶν ἀπὸ τῶν ὀκνημορίων τῷ μείζονος κύκλου ἀφαιρεθῇ, τετέσιν ἀπὸ τῷ αξδ καὶ αξζ, καταλειφθήσεται ἴσα τὰ αδξ καὶ ανξζ. ὁμοίως δὲ δεῖξω ὅτι καὶ τὸ βδξ = βίξε. καὶ τετραγωνίζεται ἄρα τὰ τῷ ρηθέντος μηνιοειδὲς χωρίῳ κέρατα ανξζ καὶ βίξε.

ΙΔ'. Τῶν αὐτῶν τεθέντων, ἐν τῷ ἐλάχιστονι Κύκλῳ πληρώσω τὸ Τετράγωνον βναξ. καὶ Κέντρῳ τῷ ν, Διαζήματι δὲ τῷ νβ, ἢ τῷ να = (4) ξβ ἢ ξα, γεγράφω Τόξον τεταρτημορικόν τὸ βλα, καὶ ἔσχι βλαξ Μηνίσκος τεταρτημορικός, τῷ Μηνίσκῳ βναδ ὁμοίός τε καὶ ἴσος. ἔνθεντοι καὶ τῷ Τριγώνῳ βνα ἢ βξά (5) ἐξισωθήσεται. Ἀλλὰ τὰ κέρατα βίξε καὶ ανξζ ἅμα ληφθέντα, τῷ αὐτῷ Τριγώνῳ (6) συνεξισῶνται. τὸ ἄρα μικτόγραμμον χωρίον βλαζε, τῷ διττῷ Τριγώνῳ βξα, ταυτὸν εἶπείν τῷ Τετραγώνῳ βναξ, ἴσον ἐστί.

Π ρ ό τ α σ ι ς Γ. καὶ Δ.

Διεξοδικαί τε εἰσὶ καὶ τοῖς Νεανίσκοις δυσχερεῖς, καὶ πρὸς ἑδὴν εὐχρησῆσαι, ἢ πρὸς τὸ δι' αὐτῶν τὴν Ε'. ἀποδειχθῆναι, ἣν αὐτοὶ καὶ τέτων ἄνευ πολλῷ ῥᾶδιον ἀποδείξομεν.

(1) Ἀρ. Θ. τῷ παρόντι. Σχολ. (2) ΜΖ. τῷ α'. (3) Διὰ τὸ Α. Σχόλ. ταύτ. καὶ Σχόλ. τῆς Κ. τῷ ζ'. (4) Ὁρ. ΑΒ. τῷ α'. (5) Ι. Πόρ. ταύτ. (6) Ἀρ. Γ.

Πρὸς τὴν Ε'. Πρότασιν.

Λ η μ μ α Α'.

„Εὖν δύο Πυραμίδες τριγωνικαί, ἐπιπέδοις τηθῶσι (τοῖς ξσε, ρχψ) κ. 479.
 „πρὸς τὰς βάσεις (αβγ, ιυπ) παραλλήλοις, ἀνάλογον (κατὰ ε καὶ ψ), ἔ-
 „σονται (ξσε, ρχψ) πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ βάσεις (αγβ, ιπυ).

Ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα ξσε, αβγ παράλληλα εἰσὶ, τέμνονται δὲ ὑπὸ ἐπι-
 πέδων βζγ, αζβ, αζγ, ἔσονται αἱ κοιναὶ τομαὶ σε, βγ, καὶ ξσ, αβ, καὶ ξε,
 αγ (1) παράλληλοι. Ἄρα αἱ ὑπὸ ξσε, αβγ, καὶ σε, βαγ, καὶ ξεσ, αγβ,
 ἐκάστη ἐκάστη (2) ἴται εἰσὶ. διὸ αἱ τομαὶ ξσε, αβγ, εἰσὶν (3) ὅμοιαι. τὸν
 αὐτὸν τρόπον ὁμοίως εἶναι δείξω καὶ τὰς τομὰς ρχψ, ιυπ. Ὡς οὖν ὁ λόγος τῆς
 τομῆς αβγ πρὸς τὴν ξσε, διπλασίων (4) ἐστὶ τῷ λόγῳ τῆς πλευρᾶς βγ πρὸς
 τὴν πλευρὰν σε, καὶ ὁ λόγος τῆς τομῆς ιυπ πρὸς τὴν ρχψ, διπλασίων ἐστὶ
 τῷ λόγῳ τῶν Πλευρῶν υπ πρὸς χψ. Ἀλλ' οἱ λόγοι βγ : σε, καὶ υπ : χψ,
 οἱ αὐτοὶ εἰσὶν (ἐστὶ γὰρ βγ : σε :: γζ : εζ (5), ταῖς ἐξ ὑποθ. ὡς πλ
 πρὸς ψλ, ἦτοι (6) ὡς υπ πρὸς ψχ), ταιγερὺν ὁ λόγος αβγ πρὸς ξσε (7)
 ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ ιυπ πρὸς ρχψ. Ο. Ε. Δ.

Λ η μ μ α Β'.

„Τὰ ἐν τῇ Πυραμίδι (ψγαζ) τριγωνον ἐχέσῃ τὴν βάσιν εἰς ἄπειρον ἐγ- κ. 480.
 „γραφόμενα Πρίσματα, εἰς αὐτὴν τὴν Πυραμίδα ἀποτελεῦται.

Διαιρεθῇτω ἡ τῆς Πυραμίδος πλευρὰ εἰς ὅσαῦν μέρη ἴσα ἀλλήλοις αβ,
 βη. καὶ διὰ δὲ β καὶ η, γενομένων τῶν τομῶν βεπ καὶ ηδν τῇ βάσει ψαγ πα-
 ραλλήλων, ἐγγεγραμμένα νοείδω τῇ Πυραμίδι Πρίσματα τριγωνικά τὰ βεπ
 μαξ καὶ ηδνβφ, ὧν ἕξω τῆς Πυραμίδος προεκβληθέντων, νοείδω περὶ τὴν
 Πυραμίδα περιγεγραμμένα Πρίσματα γιβα, πχηβ, νδζη. Ὑπεροχαὶ δὲ τῶν
 περιγεγραμμένων ὑπὲρ τὰ ἐγγεγραμμένα, εἰσὶ τὰ ζερεὰ ιμ, χκ, δη, ἅπερ
 ἅμα ληφθέντα ἴσα ἐστὶ τῷ Πρίσματι γιβα. καὶ γὰρ τὸ μὲν ηδ = δβ (8),
 καὶ ἐπομένως δη + χκ = πχηβ, ταῖς (9) μεβα. τὰ ἄρα τρία δη + χκ +
 ιμ = γιβα. Ἐὰν οὖν ἡ αζ Πλευρὰ εἰς ἄπειρον διαιρεθῇ, καὶ ὁ τῶν Πρισμάτων
 ἀριθμὸς ἐπ' ἄπειρον πληθυνθῇ, ἡ αβ γενήσεται (10) ὁμασὺν δοθείσης ἐλάτ-

(1) Ιε. τῷ ια'. (2) Ι. τῷ ια'. (3) Δ. τῷ ε'. (4) Ιθ. τῷ ε'. (5) Α. Πόρ. τῆς Δ.
 τῷ ε'. (6) Αὐτ. (7) ΑΔ. τῷ ε'. (8) ΚΕ. τῷ ια'. (9) Διὰ τὴν αὐτ. (10) Εκ τῷ Β.
 Λήμ. τῷ Σχολ. μετὰ τὴν ΙΑ. τῷ ε'.

σων· ἄρα ἡ τὸ Πρίσμα γίββα γενήσεται τέως παντὸς τῷ δοθέντος ἑλάττον (1). Τῶν ἄρα περιγεγραμμένων Πρισμαμάτων (πολλῶν δὲ μᾶλλον τῆς Πυραμίδος ψγαζ, ἥτις μέρος ἔσται ἐξ τῶν περὶ αὐτὴν περιγεγραφομένων Πρισμαμάτων) ἡ ὑπεροχὴ ὑπὲρ τὰ ἐγγεγραμμένα Πρίσματα, γενήσεται παντὸς δοθέντος ἐλάσσων· καὶ ἐπομένως τὰ ἐγγεγραμμένα Πρίσματα εἰς αὐτὴν τέως (2) τὴν Πυραμίδα ἀποτελευτῶντα λήξουσιν. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ε.

κ. 481.

„Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔσσαι Πυραμίδες, ἡ τριγώνως ἔχουσαι Βάσεις, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ Βάσεις (απρ, σχ).

Κεῖσθω δὴ τὰ ἴσα ὕψη τῶν Πυραμίδων εἶναι τὰ αφ, εψ, ὧν εἰς μέρη ἴσα μεγέθει τε ἡ πληθεὶ τμηθέντων, καὶ διὰ τῶν κατὰ τὰς διαιρέσεις σημείων, γενομένων τομῶν παραλλήλων ταῖς βάσεσι, νοεῖσθω ἑκατέρω τῶν Πυραμίδων Πρίσματα ἐγγεγραφεῖν τριγωνικὰ ἰσοπληθῆ τε, ἡ ἰσοῦψῃ· Ἡ δὲ μὲν οὖν ἐπεὶ τὰ Πρίσματα λα, ιε, ἰσοῦψῃ ὄντα εἰσὶν, ἔσται τὸ λα Πρίσμα πρὸς τὸ ιε, ὡς Βάσις (3) λξβ πρὸς Βάσιν ινκ, τετέστιν (4) ὡς Βάσις πρα πρὸς Βάσιν σχ· Τὸν αὐτὸν τρόπον δείξω ἑκάστα τῶν Πρισμαμάτων τῶν ἐν τῇ Πυραμίδι παρ ἐγγεγραμμένων, εἶναι πρὸς ἑκάστα τῶν ἐν τῇ σφειχ, ὡς ἡ Βάσις παρ πρὸς τὴν Βάσιν σεχ· Ἀρα (5) καὶ ἅμα πάντα πρὸς ἅμα πάντα, ὡς Βάσις πρὸς Βάσιν· καὶ ἐπειδὴ αὐτὰ (6) ἀπολήγει τέως εἰς αὐτὰς τὰς Πυραμίδας, ἔσονται ἡ αὐταὶ (7) ὡς αἱ Βάσεις. Ο. Ε. Δ.

Ἡ μὲν οὖν ἀποδοθεῖσα δεῖξις ὑποτίθῃσι τὰς αφ ἡ εψ Πλευρὰς ἴσας ἔσσαι, αὐτὰ τῶν Πυραμίδων τὰ ὕψη παρισχῶν, ἡ ἐπομένως ταῖς Βάσεσι παρ, σεχ εἶναι ὁρθάς· Τὰ ἴσα δὲ ἡ δεῖξις αὐτὴ δυνήσεται, ἡ ὅπως ἂν ἔχειν πλαγιασμὸν πρὸς τὰς Βάσεις αἱ ἴσαι Πλευραὶ ὑποτεθεῖεν, νοημένων δηλονότι ἀφ ἑκατέρω τῶν κορυφῶν φ ἡ ψ καθέτων ἐπὶ τὰς βάσεις, ἡ τότεων εἰς ἴσα πληθεῖ τε ἡ μεγέθει τεμνομένων, καὶ διὰ τῶν διαιρέσεων ἐπιπέδων ἀγομένων παραλλήλων ταῖς Βάσεσιν, ἡ δὲ ἡ τὰς Εὐθείας φα, ψε διατεμῶσιν (8) εἰς μέρη τοῖς ἐν ταῖς Καθέτοις ὁμοιά τε, ἡ ἰσάριθμα· καὶ ἅττα ἡ Βάσεις Πρισμαμάτων γενήσονται ἰσάριθμων τε ἡ ἰσοῦψῶν, τῶν ἐν ἑκατέρω τῇ Πυραμίδι ἐγγεγραμμένων· διὸ δὲ ἡ τὸν αὐτὸν τρόπον τὰ τῆς δεξιως προελεύσεται, ὡς εἴπερ αἱ Εὐθεῖαι φα, ψε, ταῖς Βάσεσι παρ, σεχ κάθετοι εἶεν.

(1) Ἀλλοι ἐκ τῆς ΚΕ. τῷ ια'. (2) Ο'ρ. ε. τῷ ιβ'. (3) Α. Πόρ. τῆς ΑΔ. τῷ ια'. (4) Αἴμ. Α'. (5) ΙΒ. τῷ ε'. (6) Διὰ τὸ Αἴμ. (7) Καθόλου Πόρσμ. μετὰ τὴν Β. τῷ ιβ'. (8) ΙΖ. τῷ ια'.

Π ρ ό τ α σ ι ς 5.

„Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔσται Πυραμίδες, καὶ πολυγώνους ἔχεται Βά- κ. 482.
σεις, πρὸς ἀλλήλαις εἰσὶν ὡς αἱ Βάσεις (αβ, γζξ).

Ἀναλυθήτωσαν αἱ Βάσεις εἰς τὰ α, β καὶ γ, ζ, ξ, Τρίγωνα, αἱ δὲ Πυραμίδες εἰς τριγωνικὰς Πυραμίδας· καὶ δὴ ἡ Πυραμὶς αχ εἰς πρὸς τὴν Πυραμ. ξψ, ὡς (1) α πρὸς ξ, καὶ ἡ Πυραμὶς βχ πρὸς τὴν Πυραμίδα ξψ, ὡς β (2) πρὸς ξ· Ἄρα αἱ Πυραμίδες ἅμα αχ καὶ βχ, τατέσιν ἡ ὅλη αβχ πρὸς τὴν Πυραμίδα ξψ, ὡς α καὶ β ἅμα (3) πρὸς ξ. Παραπλησίω τῷ λόγῳ ἡ Πυραμὶς αβχ εἰς πρὸς τὴν Πυραμίδα ζψ, ὡς α, β (4) πρὸς ζ, καὶ πάλιν ἡ αβχ εἰς πρὸς τὴν γψ (5), ὡς α, β πρὸς γ· Ἄρα ἡ αβχ (6) εἰς πρὸς τὰς τρεῖς ἅμα ξψ, ζψ, γψ, τατέσι πρὸς ὅλην τὴν Πυραμίδα ξζγψ, ὡς α, β πρὸς ξ, ζ, γ. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α .

Εὐτεῦθεν ἔπεται τὰς Πυραμίδας, ὧν ἴσαι αἱ βάσεις, καὶ τὰ ὕψη, ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ζ.

„Πᾶσα Πυραμὶς τριτημόριον εἰς Πρίσματος, ἔχοντος τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος ἴσα,

Ἡ κατ' Εὐκλείδην εἶπεῖν „πᾶν Πρίσμα τρίγωνον ἔχον Βάσιν, διαι-
ρεῖται εἰς τρεῖς Πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τρίγωνους βάσεις ἔχοντας.

Ἐς πρῶτον Πυραμὶς τριγωνικὴ ἡ βγαγ ἴση τήν τε βάσιν καὶ τὸ ὕψος κ. 483.
τῷ Πρίσματι βαγζεξ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ βζ, αξ, αζ· τὰ τοίνυν Τρί-
γωνα βζγ, βζξ (7) ἴσα· Ἄρα ἡ πυραμὶς βζγα, τῇ πυραμίδι βξζα (8)
ἴση εἰς· Διὰ τὴν αὐτὴν δὲ αἰτίαν καὶ ἡ Πυραμὶς ξεαζ ἴση εἰς τῇ Πυραμίδι
ξεβαζ, τατέσι τῇ Πυραμίδι βξζα, εἰσὶ γὰρ ἄμφω ἡ αὐτὴ· τοίνυν καὶ αἱ βζ
γα καὶ ξεαζ ἴσαι εἰσὶ, καὶ αἱ τρεῖς ἄρα βζγα, ξεαζ, ξεβαζ, ἦτοι βξζα,
ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ· καὶ ἐπομένως αἱ τρεῖς ἅμα τῆς μιᾶς, τατέσι τῆς βζγα
εἰσὶ τριπλασίονες. Ἀλλὰ μὲν αἱ τρεῖς συγκροτοῦσι τὸ Πρίσμα βαγζεξ, τὸ
ἄρα Πρίσμα τῆς Πυραμίδος βζγα, τατέσι (9) τῆς βγαγ εἰς τριπλάσιον. Ο. Ε. Δ.

(1) Διὰ τὴν ἀνωτ. (2) Διὰ τὴν ἀνωτ. (3) ΚΔ. τῷ ε. (4) Διὰ τὴν ἀνωτ. καὶ τὴν
ΚΔ. τῷ ε. (5) Διὰ τὰς ἡν. (6) ΚΔ. τῷ ε. (7) ΛΔ. τῷ ε. (8) Πόρ. ἀνωτ. (9) Πόρ. ἀνωτ.

κ. 484. Α'λ' ἔσω Πυραμίδας ὁποιαδήποτε, ἔχουσα βάσιν τε καὶ ὕψος τὰ αὐτὰ σὺν τῷ Πρίσματι αεζθ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ βγ, βξ, βε, καὶ αἱ νι, νη, νθ. Ἀναλύτας οὖν τὸ μὲν Πρίσμα εἰς τριγωνικὰ Πρίσματα, τὴν δὲ Πυραμίδα εἰς τριγωνικὰς Πυραμίδας, ὅφει τὸ προτεθὲν ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀποδείξεως. Ἐκαστον γὰρ τῶν μερῶν τῇ πολυγωνίᾳ Πρίσματος, τριπλάσιον ἔσται ἐκάστης μερὸς τῆς πολυγωνίᾳ Πυραμίδος (ταῖτέστιν ἕκαστον τριγωνικὸν Πρίσμα ἐκάστης τριγωνικῆς Πυραμίδος ἔσται τριπλάσιον), καὶ ὅλον ἄρα τὸ πολυγώνιον Πρίσμα, ὅλης τῆς πολυγωνίᾳ Πυραμίδος τριπλάσιον ἐστί. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Η.

κ. 485. Αἱ ὁμοίαι Πυραμίδες (ξαγβ, κθιν) ἐν τριπλατίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (αβ, θν).

Ἐχέτωσαν Α'. τὴν βάσιν τρίγωνον, καὶ δὴ τῶν Παραλληλογράμμων αμ καὶ θπ πληρημένων, ἐπὶ τήτων ἀνιστάθω Παραλληλεπίπεδα τὰ αη, θλ, ἐν ὑψώματι τῷ τῶν Πυραμίδων, ἅττα, τῶν πυραμίδων ὁμοίων ὑποτιθεμένων, καὶ αὐτὰ ὁμοία (1) εἰσὶν· ἀχθῆτωσαν δὲ καὶ εζ, ρφ, καὶ διὰ τῶν εζ, γβ, καὶ τῶν ρφ, ιν, τμηθῆσεται (2) τὰ Παραλληλεπίπεδα εἰς Πρίσματα δύο ἀλλήλοις ἴσα, ὧν ἑκάτερον χωρὶς τριπλάσιον (3) εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν Πυραμίδων ξαγβ, κθιν· ὥστε ἑκάτερον ἅμα, ταῖτέστιν ὅλα τὰ Παραλληλεπίπεδα αη, θλ, ἐξαπλάσια εἶναι τῶν Πυραμίδων. Αἱ τοίνυν Πυραμίδες τοῖς παραλληλεπιπέδοις ἀνάλογον εἰσὶν· ἀλλὰ τήτων ὁ λόγος (4) τριπλασίον ἐστὶ τῷ λόγῳ τῶν πλευρῶν αβ, θν, ἄρα καὶ κείνων. Ο. Ε. Δ.

κ. 486. Ὡς εἴπερ αἱ ὁμοίαι Πυραμίδες τῶν πολυγωνίων τύχωσιν, ἀναλυέσθωσαν εἰς τριγώνους αρ, βρ, γρ, καὶ ξκ, εκ, ζκ, καὶ ῥᾶς αὖτε δειχθήσεται τὴν μὲν (5) αρ ὁμοίαν εἶναι τῇ ξκ, τὴν δὲ βρ τῇ εκ, τὴν δὲ γρ τῇ ζκ. Διὰ γὰρ τὰ ὁμοία Τρίγωνα (6) α καὶ ξ, καὶ μρ, ψφκ (7), ἔσται (8) δμ : μι :: ψυ : ψφ, καὶ μι : μρ :: ψφ : ψκ· ἄρα (9) δμ : μρ :: ψυ : ψκ, καὶ ἀνὰ πάλιν (10) μρ : μδ :: ψκ : ψυ· τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται καὶ μδ : ρδ :: ψυ : υκ, ἄρα (11) μρ : ρδ :: ψκ : υκ, καὶ (12) ὁμοία ἄρα εἰσὶ τὰ Τρίγωνα μρδ, ψκυ· ἐνθεντοὶ καὶ αἱ πυραμίδες αρ, ξκ αἱ ὑπὸ τῶν ὁμοίων Τριγώνων τῷ πλήθει ἴσων περιεχόμεναι, ὁμοίαι (13) εἰσὶν. Ὡσαύτως διὰ τὰ ὁ-

(1) Θ. Οφ. ια'. (2) ΕΗ. τῷ ια'. (3) Διὰ τὴν ἀνωτ. (4) ΑΓ. τῷ ια'. (5) Εκ τῆς Κ. καὶ Ε. τῷ ε'. (6) Κ. τῷ ε'. (7) Οφ. Θ. τῷ ια'. (8) Οφ. Α. τῷ ε'. (9) ΚΒ. τῷ ε'. (10) Σχόλ. τῆς ΙΒ. τῷ ε'. (11) ΚΒ. τῷ ε'. (12) Ε. τῷ ε'. (13) Οφ. Θ. τῷ ια'.

μοια Τρίγωνα β ε, ή γ ε ζ, δειχθήσεται τὰ Τρίγωνα δχρ, υσκ, ὁμοια ἀλλήλοις εἶναι, κἀντεῦθεν εἰς τὴν Πυραμίδα βρ ὁμοίαν τῇ εκ, καὶ τέως εἰς τὴν γρ ὁμοίαν τῇ ζκ. Ἀρ' οὖν διὰ τὸ Α'. μέρος ὁ λόγος τῶν Πυραμίδων αρ. ξκ, τριπλασίων εἰς τὴν λόγῳ τῆς ιμ πρὸς τὴν ψφ· καὶ ὁ λόγος τῶν Πυραμίδων βρ, εκ, τριπλασίων εἰς τὴν λόγῳ τῆς μχ πρὸς τὴν ψσ, τετέστιν αὖτις τὴν λόγῳ ιμ πρὸς φψ· εἰς ὁ λόγος τῶν πυραμίδων γρ, ζκ τριπλασίων εἰς τὴν λόγῳ χπ πρὸς στ, τετέστιν αὖτις τὴν ιμ πρὸς φψ· καὶ ἐπεὶ τοίνυν ὁ λόγος ἐκάστης πρὸς ἐκάστην, τριπλασίων εἰς τὴν λόγῳ ιμ πρὸς φψ, εἰς ὁ λόγος ἄρα (1) ἀπασῶν πρὸς ἀπάσας (τετέστιν ὁ λόγος τῆς ὅλης Πυραμίδος αβγρ πρὸς τὴν ὅλην Πυραμίδα ξεζκ) τριπλασίων εἶσαι τὴν λόγῳ τῆς πλευρᾶς ιμ πρὸς τὴν πλευρὰν φψ. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α .

Καὶ εἰς ἄρα ὥσι τέτταρες Εὐθεΐαι συνεχῶς ἀνάλογον, εἶσαι ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, ὡς ἡ ἐπὶ τῆς πρώτης Πυραμὶς πρὸς τὴν ἐπὶ τῆς δευτέρας ὁμοίαντε, εἰς ὁμοίως ἀναγεγραμμένην· Καὶ εἰς ἄρα δεδομέναι ὥσι τῶν ὁμοίων πυραμίδων αβγρ, ξεζκ, αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ μχ, ψσ, γενόμενων (ὄρα τὸ ἀνωτ. Σχημ.) συνεχῶς ἀνάλογον τῶν μχ, ψσ, η, θ, εἶσαι Πυραμὶς ἡ αβγρ πρὸς Πυραμίδα τὴν ξεζκ, ὡς ἡ μχ πρὸς τὴν θ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Θ .

„Τῶν ἰσων Πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἐκείναι ἴσαι εἰσὶ.

Μέρος Α'. Ἐςωσαν πρῶτον αἱ ἴσαι Πυραμίδες τρίγωνοι βαγξ, θνλ, καὶ πληρωθέντων τῶν Παραλληλογράμμων βε, θρ, ἐπὶ τούτων ἀνιστόθω Παραλληλεπίπεδα τὰ βζ, θφ· εἰσονται δὲ ταῦτα (ὡς ἐπὶ τῆς Η'. ἡμῖν ἀποδεδεικται) τῶν ἐξ ὑποθ. ἰσων Πυραμίδων ἐξαπλασίονα, εἰς ἐπομένως ἀλλήλοις ἴσα. Εἰσὶ δὲ τῶν Παραλληλεπιπέδων τούτων ὕψη τὰ βα, θκ, ἅττα καὶ τῶν Πυραμίδων, βάσεις δὲ αἱ βε, θρ διπλασίονες (2) τῶν βάσεων τῶν Πυραμίδων βαγξ, θνλ, διὸ δὴ εἰς πρὸς ταύτας ἀνάλογον· ἐπεὶ δὴ ἔστιν διὰ τὴν τῶν Παραλληλεπιπέδων ἰσότητα, εἰςιν ὡς βε πρὸς θρ, ὣτως (3) ἀντιστρόφως θκ πρὸς βε, εἶσαι δὴ πρὸς εἰς βάσεις βαγξ πρὸς βάσιν θνλ, ὡς θκ ὕψος πρὸς βα ὕψος. Ο. Ε. Δ.

Ὡς εἴπερ αἱ ἴσαι Πυραμίδες πολυγωνίαι τὰς Βάσεις ἔχουσι, τῶν αὐτῶν

(1) IB. τῷ ε. (2) AD. τῷ δ. (3) AD. τῷ ιε.

μενόντων ὑψών (1), μεταμορφώσωσαν εἰς τριγώνους, καὶ ἔσονται αὐταὶ (2) ἐκείναις ἴσαι· ἀλλ' αἱ ἤτω μεταμορφωθεῖσαι Πυραμίδες, διὰ τὰ ἤδη δειχθέντα, ἀντιπεπόνθασιν τὰς βάσεις καὶ τὰ ὑψη· ἄρα καὶ ὥσι πολύγωνοι αἱ Πυραμίδες, ἀντιπεπονθείας ἔξει τὰς βάσεις τοῖς ὑψέσιν. Ο. Ε. Δ.

Μέρος Β'. Ἐὰν αἱ βάσεις τριγωνικαὶ ᾖσιν, ἐπεὶ ἤδη τίθεται βγξ : θνλ : : θκ : βα, ἔσαι καὶ βε : θρ : : θκ : βα· ὥς τὰ Παραλληλεπίπεδα βζ, θρ (3) ἴσα εἰσὶ, καὶ ἐπομένως καὶ τὰ τέτων ἐκτιμόρια ἀλλήλοις ἴσα ἐσὶ, ταῦτέσιν αἱ πυραμίδες βαγξ, θνλ. Ο. Ε. Δ.

Ἐὰν δὲ Πυραμίσι πολυγωνίαις τὰς βάσεις ἐχέσαις, ἀντιπεπονθεῖαι ᾖσιν αἱ βάσεις τοῖς ὑψέσιν, μεταμορφώσωσαν ἐκεῖναι εἰς βάσεις τριγώνους (4) τὰς βγξ, θνλ, ἴσας ταῖς πολυγωνοῖς, καὶ ἔσαι δὴ βγξ πρὸς θνλ, ὥς θκ πρὸς βα. Οὕτω δέ τοι αἱ τριγωνικαὶ Πυραμίδες, κατὰ τὴν δεδομένην, ἔσονται ἴσαι· τοιγαρὴν καὶ αἱ πολύγωνοι Πυραμίδες, αἱ ταῖς τριγωνικαῖς (5) ἴσαι εἰσὶ, καὶ αὐταὶ ἀλλήλαις ἐκ τῆ ἀκολούθου ἔσονται ἴσαι.

Π ο ρ ῖ σ μ α τ α .

Τὰ κατὰ τῶν Πυραμίδων ἀποδειχθέντα ἐν Προτ. ε', καὶ Η', καὶ Θ', αὐτὰ ταῦτα προσήκοντα ἐσὶ καὶ οἰοισθῆποτε Πρίσμασι, διὰ τὸ ταῦτα (6) τριπλασίονα εἶναι τῶν Πυραμίδων, τῶν βάσιν τε καὶ ὑψος τὰ αὐτὰ ἐχουσῶν.

Α'. Τὰ ἰσοῦψῃ Πρίσματα ἀναλόγως ἔχει ταῖς βάσεσι, τῦτο γὰρ δὴ περὶ τῶν Πυραμίδων ἐδείχθη Προτ. ε'.

Β'. Τῶν ὁμοίων Πρισμάτων ὁ λόγος τριπλασίων ἐστὶ τῷ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· τῦτο γὰρ δὴ καὶ περὶ τῶν Πυραμίδων ἐδείκνυτο ἐν Προτ. Η', καὶ δοθείσων τοίνυν τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τῶν ὁμοίων Πρισμάτων, εὐρεθήσεται τῶν Πρισμάτων αὐτῶν ὁ πρὸς ἄλληλα λόγος, ὃν τρόπον ἀνωτ. καὶ περὶ τῶν Πυραμίδ. ἐλέγγο (7).

Γ'. Τῶν ἴσων Πρισμάτων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὑψέσιν, καὶ οἷς δὲ ἀντιπεπόνθασιν, ἐκεῖνα ἴσα· τὸ αὐτὸ γὰρ καὶ περὶ τῶν Πυραμ. δέδεικται Προτ. Θ'.

Θαυμάζειν δέ μοι ἐπεισιν, ὅτι ταῦτα ὁ Εὐκλείδης παρέδραμεν, ἃ τῶν περὶ τὰ εὐθύγραμμα Στερεὰ θεωρημένων ἐσὶ τὰ κυριώτατα.

(1) ΚΕ. τῷ ε'. (2) Πόρ. τῆς ε'. Προτ. τῷ ιβ'. (3) ΑΔ. τῷ ια'. (4) ΚΕ. τῷ ε'.
(5) Πόρ. τῆς ε'. τῷ ιβ'. (6) Ζ. τῷ ιβ'. (7) Προτ. τῆς Η.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν Α'.

Ἐκ τῶν ἄχρι τῷδε ἀποδειχθέντων ἐπαχθήσεται ἡ καταμέτρησις οἰων-
δήποτε Πρίσματος καὶ Πυραμίδων.

Τὸ γάρτοι σρεόν τῷ Πρίσματι παράγεται, ὑπό γε τῷ ὕψει ἐπὶ τὴν
Βάσιν πολλαπλασιαζομένῃ· τὸ δὲ τῆς Πυραμίδος, ὑπὸ τῷ τριτημορίῳ τῷ ὕψει
ἐπὶ τὴν βάσιν πολλαπλασιαζομένῃ.

Ἐὰν τῷ Πρίσματι ὕψος τεθῇ ποδ. εἶναι 5, ἡ δὲ Βάσις ᾗ 25 ποδ.
τετραγ., πολλαπλασιασθέντων τῶν 25 διὰ τῶν 5, ἀνακύψουσι ποδ. 125
κυβικοί, ἐξ ὧν τὸ τῷ Πρίσματι σρεόν συγκεκρότηται.

Ἐςω γὰρ δὴ Πρίσμα πολύγωνον τὸ αβ, οὗ τῇ βάσει αε, νοείτω ἴσον κ. 488.
τὸ Τρίγωνον βγ, ἐφ' ᾧ Πρίσμα τὸ βε ἰσοῦς τῷ αβ· ἔσονται οὖν (1)
τὰ βε, αβ Πρίσματα ἀλλήλοις ἴσα· Ἀλλὰ τὸ βε πρίσμα παράγεται (2) ὑ-
πὸ τῷ κατ' αὐτὸ ὕψει αε, διὰ τῆς βάσεως βγ πολλαπλασιαζομένῃ· ἄρα καὶ
τὸ αβ Πρίσμα, ὑπὸ τῷ κατ' αὐτὸ ὕψει (ὅπερ ἴσον τίθεται τῷ τῷ Πρίσματος
βε) παράγεται διὰ τῆς βάσεως αε πολλαπλασιαζομένῃ.

Κἀντεῦθεν δὲ, καὶ ἐκ τῆς Ζ'. δῆλον καὶ ἑτέρον· τῷτο δὲ ἦν ὅτι τὸ σρεόν
τῆς Πυραμίδος συνίσταται ὑπὸ τῷ τριτημορίῳ τῷ ὕψει πολλαπλασιαζομένῃ διὰ
τῆς βάσεως.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν Β'.

Ἦ τῆς κορυφῆς Πυραμίδος ἀγρεσο καταμέτρησις ἕκτε τῷ ὕψει γε, καὶ κ. 489.
τῶν παραλλήλων βάσεων αβγ, ξε, καὶ τῶν ἐπ' αὐταῖς ὁμολόγων Πλευρῶν
βγ, σε.

Γνα ληφθῇ τὸ εζ ὕψος τῷ ἐλλείποντος μέρει εσξζ, διὰ τὴν ὁμοιότητα
τῶν Τριγώνων βγζ, σεζ, ἔσαι βγ : σε :: γζ : εζ, καὶ ἐν διαιρ. βγ — σε =
σε :: γζ — εζ : εζ· καὶ ὁμοεισῶν τοίνυν τῶν βγ, σε, καὶ γε, εὐρεθήσεται ἡ
εζ· καὶ αὕτη μὲν ἡ δεῖξις τὸ ὕψος ὑποτίθῃσι κάθετον ὃν τῇ Πλευρᾷ τῆς
πυραμίδος εἰς ταυτὸ συμπέπτειν· Ἀλλ' ὅπως ἂν καὶ πίπτειν ὑποτεθεῖν ἡ Κά-
θετος, τὸ ἐπίπεδον ξε (προεκβληθὲν εἰ δεοί), τότε ὕψος τῆς Πυραμίδος, καὶ
τὴν πλευρὰν αὐτῆς ζγ ὁμοίως τομεῖ, ὥς καὶ εἶναι βγ — σε : σε, ὥς τὸ
τῆς κορυφῆς ὕψος Πυραμίδος, πρὸς τὸ τῷ μέρει ὕψος τῷ ἐλλείποντος· Καὶ τί-
τε τοίνυν τῷ ὕψει οὕτως εὐρεθέντος τὸ τριτημόριον, τῇ βάσει ἐπιπολλα-

(1) Α. Πόρ. ταύτ. (2) Σχόλ. Α. τῆς Μ. τῷ κ.

πλασιασθέν τῇ ἐλάττωσι ξτε, δώσει τὸ σρεόν τῷ μέρει ξτε τῷ ἐλλείπον-
τος. Ἡν δὲ τῷ ὕψει τῷ ἐλλείποντος μέρει τῆς κολῆς Πυραμίδος προσεθῇ, τὸ
ὑψος αὐτῆς τῆς κολῆς τό γε ὄν, παρέσαι δὴ τὸ τῆς ὀλοχρεῆς Πυραμίδος ὕ-
ψωμα, οὗ τὸ τριτημόριον ἐπὶ τῇ μείζονι βάσει αβγ ἐπιπολλαπλασιασθέν,
τῆς ὅλης πυραμίδος παρέξει τὸ σρεόν, ἀφ' οὗ, τῷ ἐλλείποντος ἀφαιρημένον, τὸ
τῆς Κολῆς μόνον ὑπολειφθήσεται.

Λήμμα πρὸς τὴν ἐφεξῆς Γ'.

„Αἱ τε Πυραμίδες καὶ τὰ Πρίσματα, τὰ τοῖς Κώνοις καὶ τοῖς Κυλίνδροις εἰς
„ἀπειρον ἐγγραφόμενα, εἰς τὰς Κῶνας αὐτῆς καὶ τὰς Κυλίνδρους ἀποτελεστωσιν.

Δείκνυται ὡς περ τὸ Λήμμα τὸ πρὸ τῆς Β'. Προτάσεως, διὰ τε τῆς ε'.
Προτ. δηλονότι, καὶ τῇ Α' Πορίσμ. τῷ μετὰ τὴν Θ'. εἴπερ ἀμέλει καθάπερ ἐν
ἐκείνοις τὰ τῷ Κύκλῳ ἐγγεγραμμένα ἐπίπεδα, ὅτως ἐν τέτοις τάς τε Πυρα-
μίδας καὶ τὰ Πρίσματα, ἅττα ἐπὶ τῶν τοιούτων ἐπιπέδων, ὡς ἐπὶ βάσεων ἐφι-
σάμενα ἦ, ἀπότε τῷ Κῶνι καὶ τῷ Κυλίνδρῳ ἀφαιρεθῆναι.

Πρότασις Ι.

„Πᾶς Κῶνος Κυλίνδρος τρίτον μέρος εἰς, τῷ τὴν αὐτὴν Βάσιν ἔχον-
„τος αὐτῷ, καὶ ὕψος ἴσον.

κ. 490.

Εἰπὶ τῆς Βάσεως γλ, ἐγγεγραμμένον νοείτω Πολύγωνον κανονικὸν
ὁποσωνῶν πλευρῶν, καὶ ἐπ' αὐτῷ ὡς ἐπὶ Βάσεως, τῷ μὲν Κῶνι Πυραμὶς,
τῷ δὲ Κυλίνδρῳ Πρίσμα· καὶ ἔσαι δὴ (1) ἡ Πυραμὶς τριτημόριον τῷ Πρίσ-
ματος. Εἰ δὲ αὖτις ἐγγραφῇ τῷ Κύκλῳ Πολύγωνον διπλάσιον τὰς πλευ-
ρας, ἐπ' αὐτῷ δὲ τῷ Πολυγώνῳ ἐγγραφῇ Πυραμὶς μὲν τῷ Κῶνι, Πρίσ-
μα δὲ τῷ Κυλίνδρῳ, ἔσαι αὖτις ἡ Πυραμὶς τριτημόριον ἥσα τῷ Πρίσμα-
τος. τῷ δὲ ἔτω δὲ γενήσεται ἐς αἰεί. Καὶ ἐπεὶ οὖν αἱ μὲν Πυραμίδες εἰς τὸν
Κῶνον (2), τὰ δὲ Πρίσματα εἰς τὸν Κύλινδρον ἀποτελεστωσιν, ἔσαι δὴ καὶ
ἡ Κῶνος τριτημόριον τῷ Κυλίνδρῳ (3). Ο. Ε. Δ.

Σχόλιον.

Σημειωτέον δὲ, ὡς αὐτὴ τε καὶ αἱ μετ' αὐτὴν δύο Προτάσεις, ὁ μόνος
τοῖς ὀρθοῖς Κῶνοις καὶ Κυλίνδροις, ἀλλὰ καὶ τοῖς ὁπῶν πλαγίοις ἀνήκα-

(1) Ζ. τῷ 18. (2) Διὰ τὸ αὐτ. Λήμμα. (3) Διὰ τὸ καθόλου Πόρισμ.

σαι εἰσιν, εἰ καὶ τὰ σχήματα ὁρθὰς μόνον παρίσθῃσι· ἐπιφέρονται γὰρ ἐξ ὧν ἔχουσιν πᾶσι αἵτε Πυραμίδες, καὶ τὰ Πρίσματα, οὐ τὰ ὁρθὰ μόνον, ἀλλὰ καὶ τὰ οἰονδήποτε τρόπον πλαγιάζοντα.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΑ.

„Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος (βαζ, πχρ) ὄντες Κῶνοι καὶ Κύλινδροι, πρὸς ἄλληλους εἰσιν, ὡς αἱ βάσεις (γλ, σε).

κ. 491.

Αἱ Πυραμίδες, αἱ τοῖς ἰσοῦσιν Κῶνοις ἐγγεγραμμέναι, εἰσιν (1) ὡς αἱ βάσεις. Ἀλλ' αἱ Πυραμίδες εἰς τὰς Κῶνας τέως ἀποτελεωμέναι (2). ἄρα καὶ οἱ Κῶνοι (3) εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. Ἐπειδὴ δὲ οἱ τῶν Κῶνων Κύλινδροι, τῶν τὴν αὐτὴν Βάσιν ἔχόντων, καὶ ὕψος ἴσον, τριπλάσιοι εἰσιν, ἔσονται δὴ καὶ αὐτοὶ ὡς αἱ Βάσεις. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α.

Τὸν αὐτὸν δὲ δειχθήσεται τρόπον, καὶ τὰ Πρίσματα, καὶ τὰς Κυλίνδρους, ὧν ἴσον τὸ ὕψος, τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον ταῖς Βάσεσι· μᾶλλον δὲ καὶ ὁποιαδήποτε Σώματα κυλινδροειδῆ, ἀλλήλοις ἰσοῦσιν, ἢ ἴσως δηλ. ἐξ ὁποιωνδήποτε ἐπιπέδων, ἐπὶ τῷ αὐτῷ πολλαπλασιαζομένων ὕψει παραγόμενα, εἶναι πρὸς ἀλλήλα ὡς αἱ Βάσεις. Ὡσαύτως δὲ καὶ περὶ τῶν Πυραμίδων καὶ τῶν Κῶνων τῶν ἰσοῦσιν, ναιμὴν καὶ τῶν ὁποίωνδήποτε Κωνοειδῶν συλλογιστέον.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΒ.

„Οἱ ὅμοιοι Κῶνοι καὶ Κύλινδροι (βαζ, πφρ) πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλαστοῖσι λόγοις εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι Διαμέτρων (βζ, πρ).

Ὅρα τὰ ἐν τῇ Γ. καὶ ΙΑ'. Πρὸτ. Σχήματα.

Ταῖς τῶν ὁμοίων Κῶνων βάσεσιν ἐγγεγραφῶς Πολύγωνα κανονικὰ ὁμώνυμα, καὶ διὰ τῆς ὁμοιοῦς (εἰ δὲ οἱ ὅμοιοι Κῶνοι τῶν σκαληνῶν τύχῳσιν, εἰ τῷ ταῖς κατ' αὐτὰς βάσεσι τὰ Πολύγωνα ἐγγεγραφῶς, ὡς τὴν κλίσιν τῶν Ἀξόνων τὴν αὐτὴν ἔχειν θέσιν, ὡς πρὸς τὰς πλευράς, ἢ τὰς Γωνίας ἑκατέρου τῶν Πολυγώνων), ἐπὶ δὲ ταύτῃ τῶν Πολυγώνων Πυραμίδες ἀνεσάδωσαν τοῖς Κῶνοις ἐγγεγραμμέναι· λέγω δὲ ὅτι καὶ αὐταὶ ὅμοιοι ἔσονται, ὃ καὶ δείξει οὐ δυσχερές· ὥς τε τῶν ὁ λόγος τριπλασίων ἀν εἴη (4) τῷ λόγῳ τῶν Πλευρῶν

(1) ε. τῷ βζ. (2) Λήμμα τὸ πρὸ τῆς Γ. (3) Καθόλου Πόρισμα. (4) Η. τῷ βζ.

βλ, πε, τετέσι (1) τῷ λόγῳ τῶν Διαμέτρων βζ, πρ· Εὐθεντοὶ ἐπὶ αἱ Πυραμίδες (2) εἰς τὰς Κῶνας ἀποτελευτῶσιν, ἔσαι ὁ τῶν Κῶνων λόγος (3) τριπλασίων τῷ λόγῳ τῶν Διαμέτρων βζ, πρ. Ο. Ε. Δ.

Περὶ δὲ τῶν Κυλίνδρων ἔδεν ἦττον σαφὲς τὸ λεγόμενον, ὧν οἱ Κῶνοι τὸ τρίτον μέρος εἰσὶ.

Π ό ρ ι σ μ α .

Προαγομένῃ δὲ τῷ λόγῳ τῶν Διαμέτρων βζ, πρ, τῶν ἐν ταῖς βάσεσι τῶν ὁμοίων Κῶνων, ἢ Κυλίνδρων, διὰ τῶν ὄρων η, θ, ὥς εἶναι βζ: πρ :: η: θ, ἔσαι (4) ὡς βζ πρὸς θ, ἕτως ὁ Κῶνος βαζ πρὸς τὸν Κῶνον πψρ, καὶ ἕτως ὁ Κύλινδρος βμ πρὸς τὸν Κύλινδρον ρι.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΓ.

κ 492.

„Εὐὰν Κύλινδρος (βι) ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι (τῷ ρλ) τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις (βπ, γι), ἔσαι ὡς ὁ Κύλινδρος (βλ) πρὸς τὸν Κύλινδρον (ρι), ἕτως ὁ Αἴξων (αξ) πρὸς τὸν Αἴξωνα (εξ).“

Δείκνυται ὡς ἡ Α. τῷ ε΄.

Τὸ δὲ Θεώρημα εἶχ ἦκιστα καὶ περὶ τῆς Εἰπιφάνειας ἀληθεύον ἐστὶ.

Εὐὰν γὰρ ὁ Αἴξων εξ εἰς ὁσαύτη ποτε μέρη ἴσα διαιρεθῇ, καὶ διὰ τῶν διαιρέσεων ἐπίπεδα ἀχθῇ ταῖς βάσεσι ρλ, γι παράλληλα, διαιρεθῇ δὲ καὶ ὁ Κύλινδρος, καὶ δὴ καὶ ἡ κυλινδρική Εἰπιφάνεια ρι, εἰς μέρη ἰσάριθμα τοῖς εἰς ἄπασιν ὁ Αἴξων εξ διήρηται, ὧν ἕκαστον ἐντι τῶν τῷ εξ ἄξονος μερῶν ἀντὶ ἄξονος ἔχοι, ἔσονται οἱ ἰσοῦφεις Κύλινδροι, καὶ ἐκ τῷ ἀκολέθε, οἱ εἰς ἕκαστον διήρηται ὁ Κύλινδρος ρι (ς), ὡς αἱ Βάσεις, τετέσιν ἀλλήλοις ἴσοι. Ὅτι δὲ δὴ καὶ αἱ κυλινδρिकाὶ Εἰπιφάνειαι, εἰς αἷς ἡ τῷ ρι Κυλίνδρου Εἰπιφάνεια διαιρεῖται, ἴσαι καὶ αὐταὶ ἀλλήλαις εἰσὶ, φανερόν ἐκ τῆς ἀκριβοῦς ἐφαρμοσέως, ἐξ ἧς ἔδεν ἦττον καὶ ἡ τῶν Κυλινδρῶν ἰσότης ἐλέγχεται. Τοιγαρὲν ὅτε Κύλινδρος, καὶ ἡ κατ' αὐτὸν Εἰπιφάνεια, εἰς μόρια κατατέμενεται τοῖς εἰς ἄπασιν διαιρεῖται ὁ Αἴξων εξ ὁμοία. Εὐὰν τοίνυν καὶ ἀπὸ τῷ Αἴξονος ξα, τὸ τῷ Αἴξονος εξ ὑποτεθὲν μόριον ἀφαιρεθῇ ὅσάκις ἂν ἐξῇ, διὰ δὲ τῶν σημείων τῶν ἐπιζευγνύμενων τὰ μόρια, ἐπίπεδα ἀχθῇ τοῖς ἀπεναντίον βπ, ρλ παράλληλα, πρὸς δὲ ὅσον ὅτι τοσάκις ἐν τῷ ἡγμένῳ Αἴξονι αξ, τὸ μόριον τῷ ἐπομένῳ Αἴξονος εξ περιεχόμενον

(1) Β. Πόρ. τῆς Α. τῷ ιβ'. (2) Δῆμ. τὸ πρὸ τῆς Ι. τῷ ιβ'. (3) Πόρ. καθόλου. (4) Ὁρισμ. Ι. τῷ ε'. (5) ΙΔ. τῷ ιβ'.

κείσεται, ὅσῳ ἐν τῷ ἡγυμένῳ βλ Κυλίνδρῳ, ἢ τῇ κυλινδρικῇ Ἐπιφανείᾳ, τὸ ὅμοιον μῶριον τῷ ἐπομένῳ Κυλίνδρῳ, ἢ τῇ κυλινδρικῇ Ἐπιφανείᾳ ρι. Ἀ'ρα ὁ Α'ξων αξ(1) εἰς πρὸς τὸν Α'ξωνα ξζ, ὡς ὁ Κύλινδρος βλ πρὸς τὸν Κύλινδρον ρι, ἢ εἰς ὡς ἡ κυλινδρικὴ Ἐπιφάνεια βλ πρὸς τὴν κυλινδρικὴν Ἐπιφάνειαν ρι. Ο. Ε. Δ.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Ἡ δὲ Πρότασις οὐδὲν ἦτον χώραν ἔχει κατὰ τῶν πλαγίων Κυλίνδρων, ἢ ἐπὶ τῶν ὀρθῶν. Κατ' ἐκείνων γὰρ τὰ τῷ Α'ξονος μῶρια ξζ, ὅμοιαν ἔχουσι τὴν ἐπὶ τὰς ἰδίας Βάσεις κλίσιν, ἐν τοῖς Κυλίνδροις, εἰς αὐτὰ κατατέμενεσθαι ὑποτίθεται ὁ Κύλινδρος ρι ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων τῶν ταῖς βάσεσι παραλλήλων. Ταύτητοι εἰ δὴ τὰ τυχόντα ἐντεθέντα ἀλλήλοις προσεφαρμόσει, εἰ εἴπω τὰ τε Κυλίνδρια ταῦτα, εἰ τήτων εἰσι αἱ Ἐπιφάνειαι, μῶρια εἶσαι ὅμοια τῷ τε Κυλίνδρῳ, εἰ τῇ κατ' αὐτὸν Ἐπιφανείᾳ ρι, τοῖς μορίοις τῷ Α'ξονος ξζ ἰσάρισμα· καὶ ἐπομένως ἀπὸ τῷ Κυλίνδρῳ, ἢ τῇ κυλινδρικῇ Ἐπιφανείᾳ βλ, τοσάκις ληφθῆναι δυνάμενα, ὅσῳ εἰς τὰ τῷ Α'ξονος μῶρια τῷ ξζ, ἀπὸ τῷ ἄξονος ξα· ἔνθεντοι ἡ αὐτὴ ὅλως εἶσαι ἀπόδειξις εἰ τῷ Κυλίνδρῳ μὴ ὀρθῷ, πλαγιωτέρῃ δὲ τυγχάνοντος.

Π ό ρ ι σ μ α.

Κάντεῦθεν τῷ Κυλίνδρῳ δι' ἐπιπέδων τεμνομένα παραλλήλων ταῖς βάσεσι, εἶσαι τὰ μέρη βλ, ρι, τοῖς αὐτῶν ὕψεσιν ἀνάλογον. Ἐὰν γὰρ ὁ Κύλινδρος τῶν ὀρθῶν ἢ, τὸ πρᾶγμα κατ' αὐτὸ δῆλον, τὰ γὰρ ὕψη εἴτως αὐτὰ τῷ Α'ξονος τυγχάνει τὰ Τμήματα αξ, ξζ· εἰ δὲ δὴ πλαγίως, ἀγέσθω Εὐθεία ταῖς βάσεσι κείσθαι, εἰ φανερόν ἐστι ὁμοίως τῷ Α'ξονι εἰς αὐτὴ ὑπὸ τῷ παραλλήλῳ ταῖς βάσεσιν ἐπιπέδῳ κατατμηθήσεται (2). Καὶ ἐπομένως ἐπεὶ τὰ μέρη βλ, ρι εἰσιν (3) ὡς τὰ Τμήματα τῷ Α'ξονος, ἔσονται δὴ εἰς ὡς τὰ Τμήματα τῇ Καδέτῃ, τατέσιν ὡς τὰ αὐτῶν ἐκείνων ὕψη. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΔ.

Οἱ ἐπὶ ἴσων Βάσεων (ηθ, μπ) ὄντες Κῶνοι τε εἰς Κύλινδρους, πρὸς ἀλλήλους εἰσιν ὡς τὰ ὕψη (σζ, λψ). κ. 493.

Ἀποτετμήσθω ἀπὸ τῷ ὑψηλοτέρῳ Κυλίνδρῳ αρ, Κύλινδρος ὁ αξ, ἔ-

(1) Διὰ τὸ τῶν ἴσων λόγῳ γινώρισμα. (2) ΙΖ. τῷ ια'. (3) Διὰ τὸ Σχόλ. τῇ παραρ.

Τῶν ἰσῶν Κώνων ἐ Κύνωνδρον, ἀντιπεπώνδασιν αἱ Βάσεις τοῖς ὕψε-
σι, καὶ ἀνάπαλιν.

Δείκν. ὁμοίως τῇ ΔΔ τῇ ΙΑ', εἰμὴ ὅτι, ἀντὶ τῆς ΑΒ'. ἐ ΚΕ'. τῶν ἐ-
κείσε ἀναφερομένων, ληπτέον ἀναῦδαι τὴν ΙΑ' ἐ ΙΓ', ἢ τὴν ΙΔ' τῇ ΙΒ'.

Μέρος Α'. Ὁρθοὶ παύται οἱ Κύνωνδροι ὑποτιθέμενοι, εἰς ὧσαν ἰσοῦ-
φείς, φανερόν ὅτι αὐτοῖς καὶ αἱ Βάσεις (διὰ τὴν τῶν Κύνωνδρων καθ' ὑπόθ.-
ἰστάτηα) ἔσονται (5) ἰσῶι Ὁδου ὅπως ἀληθεύει τὸ προπεθεῖν.

Εἶδε δὴ τέτων τὰ ὕψη ἀνίσως ἔχει, ἀπὸ τῆς μετρίουος λψ ληπτέον τὸ
λε, ἴσων τῷ πυ ἐλίσσον, διὰ δὲ τῶ α ἀκτίον τὸ ἐπιπλέον χξ, παρὰ δὴ η-
λον πρὸς τὸ μπ. καὶ τότε δι' ἡ Βάσις μπ ἐστὶ πρὸς τὴν Βάσιν υτ (6), καὶ ἐ-
κύνωνδρος αἰς πρὸς τὸν Κύνωνδρον εἰ, περὶ εἰν (ἰσπεὶ οἱ Κύνωνδρος αἰ, εἰ, ἴσων
εἰναι ὑποτίθενται) ὡς ὁ Κύνωνδρος αἰς πρὸς τὸν Κύνωνδρον αἰ, περὶ εἰν (7) ὡς
τὸ ὕψος λε πρὸς τὸ ὕψος λψ. ἐ (διὰ τὰς λε ἐ πυ ἴσων ὅσας) ἀντιγράφως,
ὡς τὸ ὕψωμα πυ πρὸς τὸ ὕψωμα λψ. Ο. Ε. Δ.

Α' δὲ ἔσονται δι' οἱ Κύνωνδροι, ὡς αὖ βέλαιο, πλάγιοι, ἀντιμέσων δι-
ἰσπὶ τῶν αὐτῶν Βάσεων, ἐ ἐ τῷ αὐτῷ ὕψει Κύνωνδροι ὀρθοί, ἐ πύτοις ἰσῶι

(1) ΙΔ. τῇ ΙΒ'. καὶ Σχολ. Γ. τῇ ΙΒ'. (2) Ἰδέ. ἀνωτ. (3) Εἰ κατ. (4) Ι. τῇ ΙΒ'.
(5) ΛΔ. τῇ ΙΒ'. (6) Διὰ τὴν αὐτ. (7) ΙΔ. τῇ ΙΒ'.

χων ὕψος τὸ λεῖπον τῷ σζ, καὶ ἦτως οἱ Κύλινδροι αξ, γι (1) ἔσονται ἴσοι· ἐπεὶ δὲ ὁ Κύλινδρος αξ ἐστὶ πρὸς τὸν Κύλινδρον αη, ὡς (2) λε πρὸς λψ, ἔσται (ἐπεὶ λε (3) καὶ σζ ἴσται εἰσὶν) ὡς σζ πρὸς λψ. Ο. Ε. Δ.

Τὴν τοῖον Κυλίνδρον γι πρὸς τὸν Κύλινδρον αη ἔχοντος, ὡς ἔχει ἡ σζ πρὸς τὴν λψ, καὶ τὸ τρίτημόριον τῆς γι Κυλίνδρον, πρὸς τὸ τρίτημόριον τῆς αη, πᾶσι (4) ὁ γζτ Κῶνος πρὸς τὸν αψβ, ἔσται ὁμοίως ὡς σζ πρὸς λψ.

Παρατηρεῖται δὲ τοῖς νεανίσκοις, ὡς ἡ τῆς Πρωτάσεως τῆς δε ἀπόδειξις, καὶ τοῖς Κῶνοις τε καὶ τοῖς Κυλίνδροις, εἰ ἂν ἐκπετῶκότας εἶεν τῆς ἀρθότητος.

Π ὅ ρ ι σ μ α .

Ἀλμυδαί δὲ τὸ δρώμεμα καὶ πῖ τῶν Πρισμαμάτων, καὶ διῆ καὶ τῶν Πυραμίδων, ἦτε ἀπόδειξις παραπληρωσάτη. Ἀλλὰ περὶ μὲν τῶν Πρισμαμάτων ἐκ τῆς Α΄ Πορίσμ. τῆς Θ΄. Πρωτ. τῆς ΒΒ΄ Βιβλίας, καὶ τῆς ΚΕ΄ Πρωτ., καὶ ἐκ τῆς Α΄. Πρωτ. τῆς ΚΔ΄ τῆς ΙΑ΄. Περί δὲ τῶν Πυραμίδων ἐκ τῆς Ζ΄ τῆς ΒΒ΄.

(1) ἔσονται οἱ πλάγιοι· καὶ ἐπειδὴ οἱ ἴσοι Κύλινδροι ὁρθοὶ τυγχάνοντες, ἀντιπεπονθείας ἔχουσι τὰς Βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ οἱ πλάγιοι ἴσοι ὄντες, ὁμοίως καὶ αὐτοὶ ἀντιπείσονται. Ο. Ε. Δ.

Ἐπειδὴ δὲ καὶ οἱ ἴσοι Κῶνοι τῶν ἰσῶν (2) Κυλίνδρων, οἷς ἴσαι αἱ Βάσεις καὶ τὰ ὕψη, τριτημόρια εἰσὶ, καὶ τούτοις ἄρα αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν ἀντιπείσονται.

Μέρος Β'. Ἀλλὰ γὰρ ἔσω τῶν ὁρθῶν Κυλίνδρων τὰ ὕψη ἄνισα· ἀπὸ δὲ τῆ μερίζονος λψ, ληφθήτω τῷ ἐλάσσονι πρὶς ἰσον τὸ λε, καὶ διὰ τῆ ε ἀχθήτω ἐπίπεδον τὸ χξ τῇ Βάσει παράλληλον· Ὁ μὲν οὖν Κύλινδρος αξ ἐστὶ πρὸς τὸν Κύλινδρον ζδ (3), ὡς μπ πρὸς υτ, τατέσιν ἐξ ὑποθ. ὡς πγ (4), ἢ γυν λε πρὸς λψ, ἢ ὡς (5) αξ πρὸς αρ· ἄρ' οὖν οἱ Κύλινδροι (6) αρ καὶ ζδ ἴσοι εἰσὶ· Καὶ ἐπεὶ οἱ πλάγιοι τῶν Κυλίνδρων τοῖς ὁρθοῖς ἴσοι εἰσὶν, ὧν ἴσα τὰ ὕψη καὶ αἱ Βάσεις (7)· καὶ ἔτσι ἄρα, εἴπερ αὐτοῖς ἀντιπεπόνθασιν αἱ Βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι ἔσονται. Ο. Ε. Δ.

Οἷτε Κῶνοι τριτημόρια ὄντες (8) τῶν Κυλίνδρων τῶν ἰσοῦψῶν τε καὶ ἐπὶ Βάσεων ἰσῶν, εἴγε αὐτοῖς ἀντιπεπόνθασιν αἱ Βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἔσονται δὴ καὶ αὐτοὶ ἀλλήλοις ἴσοι. Ο. Ε. Δ.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Ἐπεὶ μὴδὲ ἡμῖν ὁ Εὐκλείδης περὶ λόγων συνθέτε τῶ ἐν τοῖς Σώμασιν, ὑποθέμενος φέρεται, καὶ τῶτον αὐτοὶ διὰ βραχέων ἐνταῦθα δεῖξαι πρῶτον αὐτὸ εἶναι ἡγόμεθα.

Α'. Κύλινδρος πρὸς Κύλινδρον, καὶ Πρίσμα πρὸς Πρίσμα, λόγων εἰσὶν ἔχοντα σύνθετον ἐκ τῶν λόγων τῶν τε Βάσεων, καὶ τῶν ὕψων.

Ἐξώσαν (ὄρα τὰ ἀνωτ. Σχήμ.) Κύλινδροι ζδ καὶ αρ, ἀπὸ δὲ τῆ ὑψηλοτέρου αρ (ἐπὶ γὰρ τῶν ἰσοῦψῶν αὐτόθεν δῆλον (9)) ἀποτετμήσθω αξ, ἰσοῦψῆς ὧν τῷ ζδ· ἔσω δὲ καὶ ὡς Βάσις υτ πρὸς Βάσιν μπ, ἔτω ζν πρὸς χ, καὶ ὡς ὕψος νδ, ἥτοι βξ πρὸς ὕψος τὸ βρ, ἔτω χ πρὸς ψ· Δεῖ δὴ δεῖξαι ὡς ὁ Κύλινδρος ζδ ἐστὶ πρὸς τὸν Κύλινδρον αρ, ὡς ζν πρὸς τὸν ψ· ὁ γυν Κύλ. ζδ ἐστὶ πρὸς τὸν Κύλ. αξ, ὡς (10) ἡ Βάσις υτ πρὸς τὴν Βάσιν μπ, τατέσιν (11) ὡς ζν πρὸς χ· ὁ δὲ Κύλ. αξ ἐστὶ πρὸς τὸν Κύλ. αρ, ὡς (12) βξ πρὸς βρ, τατέσιν ὡς (13) χ πρὸς ψ· τοιγαρὺν (14) δι' ἴσου Κύλ. ζδ πρὸς Κύλ. αρ, ὡς ζν πρὸς ψ.

(1) ΙΔ. τῷ ιβ'. (2) Ι. τῷ ιβ'. (3) Ι. τῷ ιβ'. (4) Ε'κ κατ. (5) ΙΔ. τῷ ιβ'. (6) Θ. τῷ ε'. (7) ΙΔ. τῷ ιβ'. (8) Ι. τῷ ιβ'. (9) ΙΔ. τῷ ιβ'. (10) ΙΔ. τῷ ιβ'. (11) Ε'κ κατ. (12) ΙΔ. τῷ ιβ'. (13) Ε'κ κατ. (14) ΚΒ. τῷ ε'.

Περὶ δὲ τῶν Πρισμαίων ὡσαύτως δειχθήσεται, ἀλλ' ἐκ τῆ Α' Πορίσματος Θ', καὶ ἐκ τῆ Πορίσματος τῆς ΙΔ' Προτάσεως.

Β'. Καὶ Κῶνος δὲ πρὸς Κῶνον, καὶ Πυραμὶς πρὸς Πυραμίδα, λόγον ἔχει συγκαίμενον ἐκ τῶν λόγων Βάσεως πρὸς Βάσιν, καὶ ὕψους πρὸς ὕψος.

Εἰσὶ γὰρ τῶν τε (1) Κυλίνδρων, καὶ τῶν Πρισμαίων τριτημόρια.

Καὶ ταῦτα δὲ πάντα ἐπὶ τῶν πλαγίων Σωμάτων ἔχῃσι χωρὰν ἔχει, ἢ ἐπὶ τῶν ὀρθῶν, ὡς ἐξ ὧν φθάσαντες εἴρημεν ἐς ἡλὸν.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ις. καὶ ΙΖ.

Αἱ Προτάσεις αὗται ἀπασῶν ἔσσι διεξοδικώταται πρὸς ἕδεν συντελεῖσθαι, ἢ πρὸς τὸ δι' αὐτῶν τὴν ΙΗ'. Πρότασιν δεικνύσθαι, ἣν αὐτοὶ εὐχερὲς ἐρεῖα τινὲ μετόδῳ ἀπαδείξομεν.

Δ ἡ μ μ α π ρ ό ς τ ῆ μ ε φ ε ξ ῆ ς ΙΗ'.

„Οἱ Κύλινδροι οἱ εἰς τὸ Ἡμισφαίριον ἐγγραφόμενοι, εἰς αὐτὸ τῆς
καὶ ἀπολήγουσι.

κ. 495.

Ἐξω φύψι μέγιστον τῶν ἐπὶ τῇ Ἡμισφαίρει Ἡμικύκλιον, καὶ τῆς Ἡμικύκλιου ἡ ἀψ, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς Διαμέτρου φύ· τετμήσθω δὲ ἡ ἀψ εἰς μέρη ἴσα τὰ αμ, μν, νψ, καὶ ἀχθίστων διὰ τῶν κατὰ τὰς διαιρέσεις σημείων μ, ν, καθέτων κξι, ἐγγραφέσθω εἰς τὸ Ἡμικύκλιον Ὀρθογώνια ξβρκ, ελδσ, ὧν ἔπειτα ἔξω τῇ Κύκλῳ προσεκβλλομένων, νοσίδω περὶ τὸ Ἡμικύκλιον περιγεγραμμένα Ὀρθογώνια ζτυφ, λοβξ, πχδε, καὶ ἔσαι πάντα ἰσοῦψῃ. Αἱ δὲ ὑπεροχαὶ τῶν περιγεγραμμένων ὑπὲρ τὰ ἐγγεγραμμένα, εἰσὶ τὰ ἐπίπεδα ζκ, λσ, χσ, οδ, τρ, ἃ δὲ ἅμα ληφθέντα τὰ Ὀρθογώνιον ζτυφ συγκροτεῖ. Ἐπειδὴ γὰρ χσ = δσ, ἔσονται λσ, οδ, χσ ἅμα, ἴσα τῷ Ὀρθογώνιῳ λβ, ταῦτέσι τῷ ξρ· ἐνδεῖντο δὲ ἐκατέρωθεν προδῆς τὰ ἐπίπεδα ζκ, τρ, ἔσονται ἅμα πάντα ζκ, λσ, χσ, οδ, τρ, ἴσα τῷ Ὀρθογώνιῳ ζτυφ. Ἡ δὲ μὲν αὖν εἰς κορυφὴν τὸ Ἡμικύκλιον μετὰ τῶν Ὀρθογώνιων περὶ τὴν Ἡμικύκλιον ἀψ μένουσαν περιάγεσθαι, τὰ ἐγγεγραμμένα Ὀρθογώνια εδ, ξε, Κυλίνδρους ἀποκνήσυσσι εἰς τὸ Ἡμισφαίριον ἐγγεγραμμένους, τὰ δὲ περιγεγραμμένα Κυλίνδρους περιγεγραμμένους, ἀλλήλοις τε ἐπικειμένους. Καὶ ὡς περὶ δὴ ἡ τῶν περιγεγραμμένων ὑπεροχὴ ὑπὲρ τὰ ἐγγεγραμμένα Ὀρθογώνια, ἣν Ὀρθογώνιον τὸ ζυ, ἔστωι καὶ ἡ τῶν περιγεγραμμένων Κυλίνδρων ὑπεροχὴ

(1) Ι. καὶ Ζ. καὶ Η. τῇ μ.

ὑπὲρ τὰς ἐγγεγραμμένους, ὁ Κύλινδρος ἔσαι ὁ ἀπὸ τῆς Ὀρθογωνίας ζυ ἀπο-
κυϊσκόμενος· Ἀλλὰ τὸ τῆς τοιαύτης Κυλίνδρου ὕψος γενήσεται παντὸς δοθέντος
ἐλαττον· διὸ δὴ καὶ ὁ Κύλινδρος αὐτὸς παντὸς δοθέντος (1) κατασῆσεται ἐλάσ-
σων, εἰ τῆς Διαμέτρου εἰς αἰ πλείω πέρατος ἄνευ διαιρουμένης, ὁ τῶν Ὀρ-
θογωνίων, κἄντευθεν ὁ τῶν Κυλίνδρων ἀριθμὸς εἰς ἄπειρον πληθύνοιτο. Ἀρα
ἢ τῶν εἰς τὸ Ἡμισφαίριον περιγραφομένων Κυλίνδρων (πολλῶ δὲ μᾶλλον ἢ
αὐτῇ τῇ Ἡμισφαίρειν, ὃ τῶν περιγραφομένων Κυλίνδρων μέρος τυγχάνει ὄν),
ὑπὲρ τὰς ἐγγεγραφομένας Κυλίνδρους ὑπεροχὴ, παντὸς δοθέντος μεγέθους ἐλάσ-
σων τέως γενήσεται· Ὅθεν οἱ εἰς τὸ Ἡμισφαίριον ἐς ἄπειρον ἐγγεγραφόμενοι
Κύλινδροι, εἰς αὐτὸ τῆτο τέως (2) καὶ ἀπολήγῃσι. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α .

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ἀποδειχθήσεται, καὶ τὰς εἰς τὸν Κῶνον, ἢ τὸ
Κωνοειδές, ἢ τὸ Σφαιροειδές, καὶ ἐγγεγραφομένας Κυλίνδρους, εἰς αὐτὰ ταῦ-
τα τὰ Σχήματα τέως ἀποτελευτᾷν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΗ.

„Αἱ Σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλαστονὶ λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων Διαμέ- α. 496.
τρων (βκ, ρψ).“

Τῶν Ἡμιδιαμέτρων αβ, υρ, εἰς ὅσα ἂν δόξῃ μέρη ἴσα τε καὶ ἰσάριθμα
διαιρουμένων, καὶ διὰ τῶν κατὰ τὰς διαιρέσεις σημείων, καθέτων ἀγομένων, καὶ
νοεῖσθαι ἐν τοῖς μεγέθεσι τῶν Σφαιρῶν Ἡμικυκλίοις ἐγγεγραμμένα εἶναι Ὀρ-
θογωνία ἀριθμῶ ἴσα, περὶ τὰς Ἡμιδιαμέτρους αβ, υρ μενέσας περιηγόμενα,
καὶ Κυλίνδρους ἐν ἑκατέρῳ τῷ Ἡμισφαίρει ἰσοπληθεῖς συνισῶντα, ἀλλήλοις
ἐπικειμένους· καὶ ἐπειδὴ κγ : γζ :: γζ : γβ (3), ἔσαι ὁ λόγος κγ πρὸς γβ,
διπλασίων τῇ λόγῳ (4) κγ πρὸς γζ, ἢ, ὁ ταυτὸν ἔσι, τῇ λόγῳ γζ πρὸς
γβ. Παραπλησίως δὲ καὶ ὁ λόγος ψε : ερ, διπλασίων ἐστὶ τῇ λόγῳ χε πρὸς
ερ ἀλλ' ἐκ κατασκ. κγ : γβ :: ψε : ερ, ἄρα (5) καὶ ζγ : βγ :: χε : ερ·
ἀλλὰ μὲν ἐκ κατασκ. βγ : γξ :: ρε : εσ, τοιγαρὺν δι' ἴσου (6) ζγ : γξ :: χε
: εσ· ὥστε οἱ Κύλινδροι (7) ζλ καὶ χπ ὅμοιοι ἀλλήλοις εἰσὶ, καὶ ἐπομένως (8)
τάτων ὁ λόγος τριπλασίων ἐστὶ τῇ λόγῳ τῶν Διαμέτρων ζι, χο, ἢ γὰρ τῶν
Ἡμιδιαμέτρων ζγ, χε, τῶν ἐν ταῖς βάσεσιν· ἀλλ' ὁ λόγος ζγ πρὸς χε,

(1) Ἄλλοι ἐκ τῆς ΙΔ. τῷ ιβ'. (2) Ὅρ. ε. τῷ ιβ'. (3) Α. Πόρ. τῆς ΙΓ. τῷ ε'. (4)
Ὅρ Ι. τῷ ε'. (5) ΑΕ. τῷ ε'. (6) ΚΒ. τῷ ε'. (7) Ὑρ. Δ. τῷ ιβ'. (8) ΙΒ. τῷ ιβ'.

ἴσος ἐστὶ τῷ λόγῳ τῷ μεταξὺ τῶν Διαμέτρων τῶν Σφαιρῶν βκ, ρψ (ὡς γὰρ φθάσας εἰδείξα ζγ : χε :: γξ : εσ, τετέστι (1) βκ : ρψ, ἃ ἐστὶ τῶν γξ καὶ εσ (ἐκ κατασκ.) ἰσοπολλαπλίσια). ὁ ἄρα λόγος τῶν Κυλίνδρων ζλ, χπ, τριπλασίων ἐστὶ τῷ λόγῳ τῶν Διαμέτρων βκ, ρψ. Ὡσαύτως δὲ ἀποδείξομεν, ὅτι τῶν λοιπῶν Κυλίνδρων ἕκαστον τῶν ἐν τῷ ἐτέρῳ τῶν Ἡμισφαιρίων ἐγγεγραμμένων, πρὸς ἕκαστον τῶν λοιπῶν τῶν ἐν θατέρῳ, τριπλασίονα λόγον ἔχειν τῷ λόγῳ τῶν Διαμέτρων βκ, ρψ, ἄρα καὶ ὁ λόγος ἅμα πάντων πρὸς ἅμα πάντας (2), τριπλασίων ἐστὶ τῷ λόγῳ τῶν Διαμέτρων βκ πρὸς ρψ. ἐνθεν τοι ἐπεὶ τὰ τῶν Κυλίνδρων ἀθροίσματα, εἰς αὐτὰ τέως (3) τὰ Ἡμισφαίρια ἀπολήγησιν, ὁ τῶν Ἡμισφαιρίων, καὶ ἐπομένως καὶ ὁ τῶν Σφαιρῶν λόγος, τριπλασίων ἔσται (4) τῷ λόγῳ τῶν Διαμέτρων. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α .

Καὶ δὴλον ἄρα τῷ τῶν Διαμέτρων λόγῳ τυγχάνοντος, καὶ ὁ τῶν Σφαιρῶν αὐτῶν ἔσται κατάδηλος· ὡς εἶπερ ἡ μὲν τῆς ἐλάττονος Διάμετρος ἡ ποδιαία, ἡ δὲ τῆς μείζονος δεκαποδιαία, προαγομένη τῷ λόγῳ 1 πρὸς 10 εἰς ὅρας τέτταραι, 1 : 10 :: 100 : 1000, ὡς ἔχει ὁ πρῶτος τῶν ὁρῶν 1, πρὸς τὸν τέταρτον 1000, ὅπως ἔσται ἡ ἐλάττω Σφαῖρα πρὸς γε τὴν μείζονα.

Ἡ τῶν Κώνων καὶ τῶν Κυλίνδρων, καὶ δὴ καὶ τῶν Σφαιρῶν καταμέτρησις ὑποτεθείσεται ἐν τῷ ἐφεξῆς Βιβλίῳ ἐκ τῶν τῷ Ἀρχιμήδῃ.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Καθάπερ τὰ ὅμοια τῶν ἐπιπέδων Σχημάτων (5) διὰ μιᾶς μέσης, ἔσονται τὰ ὅμοια τῶν στερεῶν διὰ μέσων δυεῖν, κατὰ τὸν δοθέντα λόγον αὐξῆσθαι, ἢ μειῶσθαι πεφύκασι.

α. 497. Οἷον ἔστω Σφαῖρα, ἡ κύβος, ἡ ἑτερόντι Σῶμα ὅποιον ᾖ, οὐ περ ἀκτῆς, ἡ πλευρὰ εἴη ἡ α, κείθω δὲ καὶ λόγος ὅποιος ᾖ ὁ α πρὸς β, οἷον διπλῆς· δεῖ δὴ τῷ δοθέντος Σῶμα καὶ διπλῆν δύναι καὶ ὅμοιον.

Μεταξὺ τοίνυν τῶν ὁρῶν τῷ δοθέντος λόγῳ α καὶ β, εὐρεθήτωσαν δύο μέσαι ἀνάλογον χ καὶ ψ, ὡς ἐν τῷ Σχολίῳ τῷ μετὰ τὴν ΙΓ'. τῷ ζ'. Βιβλ. ὑπεδέμεθα. Ἡ τοίνυν Σφαῖρα, ἢ ἡ ἡμιδιάμετρος ἐστὶ χ, ἡ τὸ Σῶμα τὸ τῷ δοθέντι ὅμοιον, τὸ ἀπὸ τῆς Πλευρᾶς χ γινόμενον, διπλῆν ἔσται τῷ δοθέντος.

(1) ΙΕ. τῷ ε'. (2) ΙΔ. τῷ ε'. (3) Διὰ τὸ ἀνατ. Λήμ. (4) Καθόλου Πόρ. (5) Α. Πόρ. τῆς Κ. τῷ ζ'.

Τὰ γὰρ ὅμοια Σώματα, ὧν αἱ ἡμιδιάμετροι, ἢ γὰρ αἱ πλευραὶ εἰσὶν α καὶ χ , ἐν λόγῳ εἰπὶ τριπλασίονι τῷ (1) λόγῳ α πρὸς χ , τετέστιν ἐν τῷ αὐτῷ (2) λόγῳ, ὃν ἔχει α πρὸς β .

Καὶ τῆτο ἄρα ἐκεῖνο τὸ πολυδρύλῃτον πρόβλημα εἶναι, ὃ Δηλιακὸν ἦκεσε παρὰ τῇ ἐν Δήλῳ Ἀπόλλωνος, ὃς τοῖς Ἀθηναίοις τότε ἂν τῇ ἐπισκήφαντος Λοιμῇ ἀπαλαχθῆσθαι ἐχρησεν, ἐπειδὴν αὐτῷ τὸν βωμὸν κυβικὸν ὄντα τὸ Σχῆμα διπλασιάσειαν, ὡς Οὐαλέριος ὁ Μάξιμος Βιβλ. Η'. Κεφ. IV'. παρέδωκεν, ἐν οἷς τὸν Πλάτωνα παρίσῃσι, τῆς τὸν βωμὸν ἐπὶ τέτρω κομισαμένης, ὡς τὸν Εὐκλείδην ἀπελθεῖν κελεῦσαι, ἢ μάλλον ὡς τὸν Εὐδοξον, ὃ τῷ Μιναγίῳ σσημαίωται ἐν τοῖς εἰς Διογένην τὸν λαέρτιον Βιβλ. Β'. Τμήμ. ρς'. Εἶδε τις ἀκριβέστερα ἐφίεται μαθεῖν περίτε τῆς ἀφορμῆς τῇ Προβλήματος, καὶ τῆς τῷ αὐτῇ ἐπιλύσεως, καὶ τῶν ἐπισημοτέρων τῇ τὰς δύο μέσας ἀνάλογον, ἐν δυσὶ δεδομέναις ἀκρότησιν ἐξουρίσκειν, μεθόδων, κατὰ τὴν τῶν πάλαι γεωμετρητάντων ἐπίνοιαν, μετιτέα αὐτῷ πρὸ τῶν ἄλλων τὰ τῇ Ἐρατοδένει περὶ τῇ διπλασιασμῷ τῇ Κύβει, τὰ σὺν τοῖς ἄλλοις τῶν αὐτῇ συγγραμμάτων ἐν τέλει τῶν τῇ Ἀράτῃ, ἐν Ὁξιῳ τύποις ἐκδομένα κατὰ τὸ ἀχορ· καὶ τὰ Οὐίτρον Α'ρχιτεκτονικά Βιβλ. Θ'. Κεφ. Γ'· καὶ τὰ Πλυτάρχῃ περὶ τῇ δαιμονίᾳ τῇ Σωκράτους, ἐν τοῖς ἡδικῇ κατὰ τὴν ἐν Φραγκοφρυγίᾳ ἐκδοσιν σελίδι ριθ'. καὶ τὰ τῇ Πάππῃ ἐν τῇ συλλογῇ τῶν Μαθηματικῶν Βιβλ. Γ'. Πρωτ. Ε'· καὶ τὰ τῇ Εὐτοκίᾳ (ὧν ἀνωτ. ἐν τῷ Σχολ. τῷ μετὰ τὴν IG. τῇ ς'. ἐμνήσθημεν) ὑπομνήματα εἰς τὸν Ἀρχιμήδην περὶ Σφαίρας τε καὶ Κυλίνδρου ἐν Θεωρήματ. Α'. Βιβλ. Β'.

Μεταξὺ οὖν δυσὶν ἀριθμῶν δοθέντων, μέσης δύο ἀνάλογον λαβεῖν ἔσαι ὡδέπως· τὰ τῇ προτέρῃ τῶν ἄκρων Τετράγωνον, διὰ τῇ δευτέρῃ πολλαπλασιαστέῳ, καὶ τῇ παραγομένῃ ἡ ῥίζα ἡ Κυβικὴ ἐξαίρεσθαι, αὐτῆς καὶ γὰρ ὁ τῶν δύο μέσων πρότερος ἔσαι· εἴτα τὸ Τετράγωνον τῇ ὑσέρῃ τῶν ἄκρων διὰ τῇ προτέρῃ πολλαπλασιαστέῳ, καὶ οὕτω τῇ παραχθέντος ἡ Κυβικὴ ῥίζα ἐξαίρεσθαι, τῶν μέσων παρέξει τὸν δεύτερον· οἷον ἀριθμοὶ προκεισθώσαν ὅτε 8 καὶ ὁ 27, ὧν μεταξὺ δύο μέσης δεῖον εὑρεῖν. Πεπολλαπλασιάσω δὲ $8 \times 8 = 64$ διὰ τῶν 27, καὶ ἀνακύψει 1728, ὧν ῥίζα Κυβικὴ 12 τῶν δύο μέσων ὁ πρῶτος. Εἴτα πεπολλαπλασιάσω $27 \times 27 = 729$ διὰ 8, καὶ προκύψει 5832, ὧν ῥίζα Κυβικὴ 18 τῶν δύο μέσων ὁ δεύτερος· καὶ γὰρ 8, 12, 18,

(1) Διὰ τὴν Η'. καὶ τὸ Β'. Πόρ. τῆς Θ', καὶ διὰ τὴν IB. καὶ IH. τῇ ιβ'. (2) Ὁμοίως τῇ ε'.

27 $\therefore$ καὶ ἐν γένει, εἰ μεταξὺ α καὶ ε μεσότητος δύο δέοι λαβεῖν τὰς μ καὶ ν , ἔσαι $\mu = \sqrt{\alpha^T \varepsilon^3}$, καὶ ἔσαι $\nu = \sqrt{\varepsilon^T \alpha^3}$.

Ἐπειδὴ γὰρ τὸ ὑπὸ α καὶ ε ὀρθογώνιον, μέσον (1) εἶν ἀνάλογον τῶν ἀπ' αὐτῶν Τετραγώνων, ἔσαι δὴ α^T , $\alpha\varepsilon$, $\varepsilon^T \therefore$. Ἀ'χθήτωσαν οὖν τὰ τρία ταῦτα ἐπίπεδα ἐπὶ τὸ αὐτὸ ὕψος τὸ α , καὶ ἀναφυήσονται (2) σερεὰ συνεχῶς ἀνάλογον τὰ α^K , $\alpha^T \varepsilon$, $\varepsilon^T \alpha \therefore$ (3). Ἀ'χθήτωσαν δὲ πάλιν τὰ αὐτὰ ἐπίπεδα ἐπὶ ὕψος τὸ ε , καὶ ἔσονται $\alpha^T \varepsilon$, $\varepsilon^T \alpha$, $\varepsilon^K \therefore$. τὰ ἄρα τέτταρα σερεὰ α^K , $\alpha^T \varepsilon$, $\varepsilon^T \alpha$, ε^K συνεχῶς ἀνάλογον εἰσὶ, καὶ ἐπομένως αἱ τέτων κυβικαὶ ρίζαι α , $\sqrt{\alpha^T \varepsilon^3}$, $\sqrt{\varepsilon^T \alpha^3}$, ε συνεχῶς (4) ἀνάλογοι εἰσὶ καὶ αὐταί· καὶ ἐπεὶ ἐξ ὑποθ. α , μ , ν , $\varepsilon \therefore$, ἔσαι $\mu = \sqrt{\alpha^T \varepsilon^3}$, καὶ $\nu = \sqrt{\varepsilon^T \alpha^3}$.

Ἐὰν δὲ ὁ Α'. ὅρος ᾗ 1, ἐξαιρεθείης τῆς Κυβικῆς ρίζης ἀπὸ τῆς ἐτέρας τῶν ἄκρων, ληφθήσεται τῶν δύο μεσοτήτων ἡ προτέρα, τὸ δ' ἀπὸ ταύτης Τετραγώνον, ἔσαι τῶν δύο μέσων ἡ ὑστέρα· ἐὰν γὰρ ᾗ $\alpha = 1$, ἔσαι $\alpha^T = 1$. ἔνθεντοι $\alpha^T \varepsilon = 1 \times \varepsilon = \varepsilon$, καὶ $\sqrt{\alpha^T \varepsilon^3}$ (τετάρτοις μ) $= \sqrt{\varepsilon^3}$ · καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον $\sqrt{\varepsilon^T \alpha^3}$ (τετάρτοις ν) $= \sqrt{\varepsilon^T} = (5) \sqrt{\varepsilon^3} \times \sqrt{\varepsilon^3}$.

Οἷον μεταξὺ 1 καὶ 125, μέσοι ἀριθμοὶ εἰσιν οἱ 5 καὶ 25· ἔσι γὰρ $\sqrt{125^3} = 5$, καὶ $5 \times 5 = 25$ · εἰσι δὲ 1, 5, 25, 125 $\therefore$ · ἔνθεντοι ἐὰν ἀντὶ τῆς δοθέντος Κύβου τεθῇ 1, ληφθήσεται ἡ τῆς Κύβου Πλευρὰ, ὅς ἐστι διπλάσιος ᾗ τῆς δοθέντος, τῆς τῆς δυαδικῆς ἀριθμοῦ Κυβικῆς ρίζης ἐξαιρουμένης· ὁ καθ' αὐτὸ μὲν εὐδηλον ἐστίν, εἰς ἣν κίεα καὶ ἐκεῖνη ἐπιφερύμενον, ὅτι $\sqrt{2^3}$ ἐστὶ τῶν μεταξὺ 1 καὶ 2 τῶν μέσων ὁ πρότερος.

(1) Β. Πόρ. τῆς ΚΒ. τῆς ζ'. (2) ΑΒ. τῆς ια'. (3) Σχόλ. τῆς Ας. τῆς ια'. (4) Σχόλ. Α. τῆς ΑΓ. τῆς ια'. καὶ ΑΕ. τῆς δ'. (5) Πόρ. τῆς ΑΖ. τῆς ια'.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΕΚ ΤΩΝ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

ΕΞΑΩΤΕΥΘΕΝΤΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ

ἦτοι

ὄρων τινῶν ἀναπτύξεις.

Εω-δὴ Κύκλος βεγῆ, ἢ Κέντρον α, Διάμετρος δὲ βγ, πρὸς ὁρθὰς ὑπὸ κ. 1.
τῆς εἰς τεμνομένη κατὰ τὸ δ, ἀπὸ δὲ τῷ Κέντρῳ ἀχθῆτωσαν Ἡμιδιάμετροι
αε, αη· Τῆτων ἔτω κοιμένων·

Α'. Τομεὺς τῆς Σφαίρας ἐσὶν, ὁ ὑπὸ τῷ κυκλικῷ Τομέως αεγῆ, ἢ
γῦν αεβῆ, τῇ περὶ τὴν Διάμετρον βγ περιγυμένῃ, γινόμενος.

Β'. Τμῆμα, εἴτ' οὖν μοῖρα Σφαίρας ἐστὶ, τὸ ἀπὸ τῷ κυκλικῷ Τμήμα-
τος εγῆ, ἢ γῦν εβῆ, περὶ τὴν αὐτὴν Διάμετρον βγ περιγυμένῃ, κατα-
γραφόμενον.

Γ'. Τῆς σφαιρικῆς μοίρας εβῆ Κορυφή ἐστὶ, τὸ κατὰ τὴν ἀκίνητον διά-
μετρον πέρας β· Βάσις δὲ ὁ ὑπὸ τῆς εἰς Εὐθείας καταγραφόμενος Κύκ-
λος· Α'ξων δὲ τὸ τμήμα τῆς διαμέτρου βδ, τὸ ἀπὸ τοῦ τῆς κορυφῆς, ε,
εἰς τὸ τῆς βάσεως Κέντρον δ ἀπολαμβάνομενον.

Δ'. Τῆς σφαιρικῆς μοίρας, ἢ τῷ -ἐν αὐτῇ ἐγγεγραμμένῃ Σώματος,
ἢ Κώνῃ ἐπιφάνειαν εἰπὼν, ἄνευ δὲ τῆς βάσεως εἰρηκέναι ἀεὶ δῆλος ἔσομαι·
καὶ Κυλίνδρῳ δὲ ἐπιφάνειαν ἣν εἰπὼ, παραπλησίως ἄνευ τῆς βάσεως νοη-
θήσεται, εἰμὴ τὸ ὅλκιwς προσκείτο, ὡς ἐν οἷς εἰς αἱ βάσεις συμπαρελήφ-
θησαν.

Καὶ περὶ Κυλίνδρων δὲ λέγοντι εἰς Κώνων μένοι οἱ ὁρθοὶ νοηθήσονται.

Α' ΞΙΩΜΑΤΑ.

Α'. Ἡ' τῷ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένῃ Πολυγώνῃ περίμετρος, τῆς κ. 2.
τῷ Κύκλῳ περιφερείας ἐλάττωσιν ἐστὶ.

Β'. Ἡ' τῇ περὶ τὸν Κύκλον περιγεγραμμένῃ Πολυγώνῃ περίμετρος,
τῆς τῷ Κύκλῳ περιφερείας μείζων ἐστὶ.

κ. 3. Γ'. Εἴαν δὲ Πολύγωνον εἰς Κύκλον ἐγγεγραμμένον, περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ, συνάμα τῷ Κύκλῳ περιαχθῇ, ἔσαι ἡ τῆς σφαιρῆς. ὁ ὑπὸ τῷ Πολύγωνῳ γίνεται, ἐπιφάνεια, ἐλάσσων τῆς ἐπιφανείας τῆς Σφαίρας· καὶ εἴαν Πολύγωνον περὶ Κύκλον περιγεγραμμένον, περὶ τὴν διάμετρον συνάμα τῷ Κύκλῳ περιαχθῇ, ἔσαι ὡς ἄνωτ'. ἡ τῆς γινομένης ὑπὸ τῷ Πολύγωνῳ σφαιρῆς ἐπιφάνεια, μείζων τῆς ἐπιφανείας τῆς Σφαίρας.

κ. 4. Δ'. Ὡσαύτως ἡ τῆς Πολύγωνος τῆς εἰς τὸ κυκλικόν Τμήμα ἐγγεγραμμένης περίμετρος, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τῆς Τμήματος περιφερείας διαζ'. καὶ εἴαν τὸ εἰς τὸ Τμήμα ἐγγεγραμμένον Πολύγωνον συνάμα τῷ Τμήματι, περὶ τὸν Ἀξονα τῆς Τμήματος ἀξ περιαχθῇ, ἔσαι ἡ τῆς σφαιρῆς, ὅπερ ὑπὸ τῷ Πολύγωνῳ γίνεται ἐπιφάνεια, ἐλάσσων τῆς καὶ τὸ Τμήμα τῆς Σφαίρας ἐπιφανείας διαζ'.

κ. 5. Ε'. Ἡ δὲ τῆς Πρίσματος ἐπιφάνεια ἐγγεγραμμένη μὲν εἰς τὸν Κύλινδρον, τῆς τῆς Κυλίνδρου ἐλάσσων, περιγεγραμμένη δὲ περὶ αὐτὸν, μείζων.

κ. 6. ς'. Ἡ δὲ τῆς Πυραμίδος ἐγγεγραμμένης μὲν εἰς τὸν Κώνον, τῆς τῆς Κώνου ἐλάσσων, περιγεγραμμένης δὲ, μείζων.

Π ρ ό τ α σ ι ς Α.

„Εἴσω Σχήματα ὁποιαδήποτε ἦτοι τῶν ἐπιπέδων, ἢ τῶν σφαιρῶν,
 „Α, Β· εἴσω δὲ καὶ Μεγέθη αἵματα καὶ ἄλλα, αὐτὰ δοθέντα Α καὶ Β αἰ-
 „περ ἦττον καὶ ἦττον ὑπερέχοντα, εἰς αὐτὰ τέως (1) καὶ ἀπολήγοισιν, ἴσα
 „γεμὴν ἀλλήλοις αἰεὶ τυγχάνοντα.

„Φημί δὲ ὅτι καὶ τὰ Α καὶ Β Σχήματα ἀλλήλοις ἴσα ἐσὶ.

Ε. Ζ. Εἰμὶ γὰρ, θάτερον εἶναι μείζον ἐπ' ἀνάγκης· εἴσω οὖν τὸ Α τῷ Β ὑ-
 Α Β Χ περοχῇ τῇ κατὰ τὸ Χ. Εἰ τοίνυν ὑποτεθῇ Μεγέθη ἴσα ἀλλήλοις τὰ Ε
 καὶ Ζ, ὅπερ ἂν ὑπερέχοι τὰ Α καὶ Β Σχήματα ὑπεροχῇ τῆς κατὰ τὰ Χ,
 καὶ ἦν κεῖται τὸ Α μείζον εἶναι τῷ Β, μείζονι, ἔσαι δὲ τὸ Ζ τῷ Α ἐλατ-
 τον· τίθεται δὲ τὸ Ζ ἴσον εἶναι τῷ Ε, ἔστιν ἄρα τὸ Ε τῷ Α ἐλαττον·
 ἄτοπον δὲ, εἴπερ ἀπαξ τὸ Ε ὑπεροχὴν ἔχειν πρὸς τὸ Α τίθεται.

Ὡσαύτως δεῖξω μηδὲ τὸ Β τῷ Α μείζον εἶναι ἂν· ὥστε θάτερον μὴ
 μείζον ὂν παρὰ θάτερον, ἴσα ἔσαι. Ο. Ε. Δ.

(1) Ὁρ. 5. Βιβλ. 18.

Π ρ ό τ α σ ι ς Β.

„Εςω Σχήματα Α ἢ Β· ἔσω δὲ ἢ Μεγέθη αἰεὶ ἄλλα ἢ ἄλλα, αἱ τῶν δοθέντων αἰεὶ ἦττον ἢ ἦττον ἀπολειπόμενα, εἰς αὐτὰ τέως (1) καὶ ἀπολήγοιεν, ἵνα γεμὴν αἰεὶ ἀλλήλοισι τυγχάνοντα.

„Φημί δὴ, ὅτι ἢ τὰ Α ἢ Β Σχήματα ἴσα ἀλλήλοισι ἐστί.

Α Β Ζ

Ο Π

Εἰμὴ γὰρ, θάτερον εἶναι ἀνάγκη ἔλαττον· ἔσω οὖν τὸ Α τῷ Β, ἐλείψει τῇ κατὰ τὸ Ζ· Εἰ τοίνυν ὑποτεθῇ Μεγέθη ἀλλήλοισι ἴσα τὰ Ο ἢ Π, τῶν δοθέντων Σχημάτων Α ἢ Β, ἐλείψει ἐλάχιστον τῇ κατὰ τὸ Ζ ἀπολείπεσθαι, καθ' ἣν κείται τὸ Α τῷ Β τυγχάνον ἔλαττον, ἔσαι δὴ τὸ Π τῷ Α μεῖζον· ἣν δὲ τὸ Π ἴσον τῷ Ο, καὶ τὸ ἄρα Ο μεῖζον τῷ Α· ὁπερ ἀναιρεῖ τὴν ὑπόθεσιν, ἢ τὸ Ο τῷ Α ἐτέδῃ ἔλαττον.

Ὡσαύτως δεῖξω μὴδὲ τὸ Β τῷ Α εἶναι ἂν ἔλαττον· ὥςθ' θάτερον μὴ ἔλαττον ὂν παρὰ θάτερον, ἵνα ἔσαι. Ο. Ε. Δ.

Ε'παχθεῖεν δ' ἂν ἀμφοτέραι αἱ προληφθεῖσαι Προτάσεις ἀμέσως, ἢ χωρὶς ἐτέρας ἀποδείξεως, ἐκ τῷ καθόλου Πορίσματος τῷ μετὰ τὴν Β'. Πρῶτασιν τῷ ΙΒ'. Βιβλίῳ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Γ.

„Αἱ τῶν εἰς τὸν Κύκλον τε ἢ περὶ τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένων τε, ἢ περιγεγραμμένων Πολυγώνων περίμετροι, εἰς τὴν τῷ Κύκλῳ περιφέρειαν τέως ἀποτελευτῶσιν· ὁμοίως δὲ ἢ τὰ Πολύγωνα αὐτὰ εἰς τὸν Κύκλον τέως ἀπολήγῃσι.

α. 2.

Εἵπερ ἀμέλει τῶν τόξων εἰς ἄπειρον διχοτομυμένων, αἰεὶ πλείονες καὶ πλείους εἰς τὸν Κύκλον τε ἢ περὶ τὸν Κύκλον πλευραὶ ἐγγράφονται τε καὶ περιγράφονται.

Μέρος Α'. Νοεῖδω δὴ εἰς τὸν Κύκλον τε ἢ περὶ τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένα τε ἢ περιγεγραμμένα Πολύγωνα ὁμοία ἀλλήλοισι τῶν κανονικῶν, εἴτε δὲ ὡς ἐπὶ τῆς ΙΒ'. Προτάσεως τῷ Δ'. Βιβλίῳ, εἴτ' οὖν ἢ ὡς ἐπὶ τῷ ὑπ' ὄψιν σχήματος διαφέρει πάντως ἕδεν. Δῆλον δὲ τὴν ζι εἶναι πρὸς τὴν γε (2), (τετέσι (3) τὴν ὅλην περιγεγραμμένην περίμετρον, εἶναι πρὸς ὅλην τὴν ἐγγεγραμμένην ὡς ια πρὸς γα· ἀλλ' ἢ ιγ ὑπεροχὴ τῆς ια ὑπὲρ τὴν γα, γίνεται τέως παντὸς δοθέντος μεγέθους ἐλάσσων, αἰεὶ πλείονων τε ἢ πλείονων εἰς

(1) Ὡς ε. Βιβλ. ΙΒ'. (2) Διὰ τὸ Α. Πόρ. τῆς Δ. τῷ ζ'. (3) ΙΒ. τῷ ε'.

ἄπειρον Πλευρῶν ἐγγράφεσθαι τὰ ἐ περιγράφεσθαι νομμένων· ἄρ' ἔν ἐ ἡ τῆς περιγεγραμμένης περιμέτρου ὑπεροχὴ ὑπὲρ τὴν ἐγγεγραμμένην, παντὸς μεγέθους δοθέντος ἐλάσσων τέως καθίσταται· καὶ πολλῶ δὲ μᾶλλον ἄρα (1) ἡ τῆς περιγεγραμμένης περιμέτρου ὑπὲρ τὴν τῷ Κύκλῳ Περιφέρειαν ὑπεροχὴ· ἢ τε τῆς ἐγγεγραμμένης περιμέτρου ἀπὸ τῆς αὐτῆς περιφέρειας ἔλλειψις, καὶ τὸς δοθέντος μεγέθους ἐλάσσονες ἔσονται. Ὡς ἢ τε ἐγγεγραμμένη ἐ ἡ περιγεγραμμένη, ἀμφοτέραι αἱ περίμετροι, εἰς τὴν περιφέρειαν τέως (2) αὐτῇ ἀπολήγῃσι. Ο. Η. τὸ Α'. Ταῦτα δὲ ἐπὶ πλεον πειρᾶσθαι κατασκευάζειν περιττόν, ὡς αὐτόθεν τὸ δῆλον ἔχοντα.

Μέρος Β'. Ἐπεὶ δὲ τοι δέδεικται τὴν τῆς Πλευρᾶς Ζι ὑπὲρ τὴν ἐν ὑπεροχὴν, παντὸς, ὅπερ ἂν δοθεῖν, μεγέθους γίνεσθαι τέως ἐλάσσονα (καὶ γὰρ Ζι : ἐν = ια : γα)· καὶ ἡ τῷ ἀπὸ Ζι Τετραγώνῳ ὑπὲρ τὸ ἀπὸ τῆς ἐν ὑπεροχῇ, ἔσαι τέως παντὸς δοθέντος ἐλάσσων. Ἀλλὰ γὰρ ὡς τὸ ἀπὸ Ζι Τετραγώνον, πρὸς τὸ ἀπὸ ἐν Τετραγώνον, ὅτως ἔχει (3) ἐ τὸ περιγεγραμμένον Πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον Πολύγωνον· καὶ ἡ τῷ περιγεγραμμένῳ τοῖνον Πολυγώνῳ ὑπὲρ τὸ ἐγγεγραμμένον ὑπεροχὴ, παντὸς ἔσαι τῷ δοθέντος μεγέθους ἐλάσσων· καὶ πολλῶ ἄρα ἐλάσσων ἔσαι ἢ τε τῷ περιγεγραμμένῳ ὑπὲρ τὸν Κύκλον ὑπεροχῇ, ἐ ἡ τῷ ἐγγεγραμμένῳ ἀπὸ τῷ Κύκλῳ ἔλλειψις. Ἐνθεντοὶ ἐ τὰ εἰς τὸν Κύκλον τε ἐ περὶ τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένα τε ἐ περιγεγραμμένα Πολύγωνα, ἐπ' αὐτὸν (4) τέως τὸν Κύκλον ἀποτελεῦται. Ο. Η. τὸ ἕτερον.

Π ρ ό τ α σ ι ς Δ.

α. 2.

„Τὸ περὶ τὸν Κύκλον περιγεγραμμένον κανονικὸν (5) Πολύγωνον ζῆτα, ἴσον ἐστὶ Τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τῷ Πολυγώνῳ περίμετρος, ὕψος δὲ ἡ τῷ Κύκλῳ ἡμιδιάμετρος.

„Τὸ δὲ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένον κανονικὸν Πολύγωνον ἴσον ἐστὶ Τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τῷ ἐγγεγραμμένῳ Πολυγώνῳ περίμετρος, ὕψος δὲ ἡ Κάθετος αο, ἡ ἀπὸ τῷ Κέντρῳ ἐπὶ μιᾷς τῶν πλευρῶν ἡστιστὴν ἀγόμενή.

Μέρος Α'. Ἡ Ἡμιδιάμετρος αβ ἡ πρὸς τὴν ἐπαφὴν ἡγμένη, κάθετος ἐστὶ (6) πρὸς τὴν Ἀπτομένην ιζ. Ἐὰν ἔν ἀχθῶσιν αἱ αζ, αι, αν, κξ:, ἐ τὸ

(1) Α' Ε. Α. ἐ Β'. (2) Ορ. ε. Βιβλ. ιβ'. (3) Κ. τῷ ε'. Βιβλ. ἐ τὸ Σχόλ. τὸ μετ' αὐτῇ. (4) Ὁμομ. ε. τῷ ιβ' Βιβλ. (5) Ορ. Γ. τῷ δ'. (6) ΙΗ. τῷ γ'.

Πολύγωνον εἰς Τρίγωνα ἀναλυθῇ, ἔσαι δὴ ἡ αβ Ἡμιδιάμετρος τῶν Τριγώνων ἀπάντων ὕψος κοινόν, ὅθεν δὴ ἴσα εἶναι φανερόν ἐ τὰ Τρίγωνα· ὥς τὸ Τρίγωνον τὸ τὴν βάσιν ἴσην ἔχον τῷ τῶν Πλευρῶν ζι, ν, ντ, κξ· ἀδροίσματι, ὕψος δὲ τὸ αβ, ἴσον ἀπασιν (1) ἔσαι, τετέστιν ὅλῳ τῷ Πολυγώνῳ, ὃ περιγέγραπται.

Μέρος Β'. Παραπλησίως δὲ ἐ τὸ Β'. δείκνυται.

Τῶν γὰρ δὴ τῷ ἐγγεγραμμένῳ Πλευρῶν ἴσων ἀλλήλαις οὐσῶν, καὶ ἀπὸ τῷ Κέντρῳ α Κάθετοι (2) ἔσονται ἴσαι· ταύτητοι ἐ τὰ εἰς α τὸ ἐγγεγραμμένον Πολύγωνον ἀναλύεται, Τρίγωνα πάντα (3), ἴσα ἀλλήλοις ἐσὶ καὶ παραπλησίως τοῖνον χωρεῖ τὰ τῆς δειξέως, ὥσπερ ἀνωτέρω.

Π ο ρ ῖ σ μ α τ α .

Α'. Ἐντεῦθεν ἐ τὸ τῷ κανονικῷ Πολυγώνῳ, τῷ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένῳ, ἡ περιγεγραμμένη χωρίον εὔρειν ἐς, τὴν ἀπὸ τῷ Κέντρῳ (4) ἐπὶ μίαν ἡντιναῦν τῶν Πλευρῶν κάθετον, διὰ τῆς ἡμιπεριμέτρου πολλαπλασιάζουσι.

Β'. Ἐπεὶ δέ τοι τὰ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένα τε ἐ περιγεγραμμένα Πολύγωνα, ἐπ' αὐτὸν δὴ τὸν κύκλον, αἶτε τῶν Πολυγώνων περίμετροι, ἐπὶ τὴν τῷ Κύκλῳ τέως περιφέρειαν (5) ἀπολήγουσιν, εὔρεθήσεται ἔτω ἐ τὸ ἐμβαδὸν τῷ Κύκλῳ, τῆς ἡμιδιάμετρου διὰ τῆς ἡμιπεριφέρειας πολυπλασιαζομένης.

Γ'. Καὶ ἔστιν ἄρα ὁ Κύκλος ἴσος Τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τῇ τῷ Κύκλῳ περιφέρεια ἴση Εὐθεΐα, ὕψος δέ γε ἡ Ἡμιδιάμετρος· ἀνακύπτει μὲν γὰρ (6) τὸ Τριγώνῳ χωρίον ἐκ τῆς ἡμιβίσεως ἐπὶ τὸ ὕψος πολλαπλασιαζομένης. Ὡσαύτως δὲ δῆλον, ἐ τὸν τῷ Κύκλῳ τομέα ἴσον εἶναι Τριγώνῳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ τῷ Κύκλῳ ἡμιδιάμετρος, βάσις δὲ Εὐθεΐα, ἡ τῷ τῷ τομέως τέξῳ ἴση· τὸ γὰρ δὴ Πόρισμα τόδε ἐκ τῶν αὐτῶν ἀρχῶν, ἐν τῇ ἐφεξῆς Προτάσει πλατύτερον κατασκευαθήσεται.

Δ'. Τῶν ἰσοπεριμέτρων Σχημάτων ὁ Κύκλος τὸ περιεκτικώτατον· ἔσω γὰρ τῷ τυχόντος Πολυγώνῳ (οἷον δὴ Τετραγώνῳ) περίμετρος ἐκδι ἴση τῇ περιφερείᾳ τῷ Κύκλῳ, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ αζ, ἐ οὗ τὸ κέντρον ζ τῷ τῷ Κύκλῳ κέντρῳ εἰς ταυτὸ γίνεταί, ὅς ἂν εἰς τὸ Τετράγωνον ἐγγραφείη, ἡ περὶ αὐτὸ περιγραφείη, τὸ ἐκδι. Φημὶ τοῖνον ὡς τὸ τῷ Κύκλῳ χωρίον τῷ κατὰ τὸ Πολύγωνον μεῖζον ἐσὶ.

κ. 7.

(1) Ἐκ τῆς Α. τῷ ζ. (2) ΙΖ. τῷ γ. (3) ΑΗ. τῷ α. (4) Διὰ τὴν παρῶ. καὶ τὸ Σχολ. τῆς ΜΑ. τῷ α. (5) Διὰ τὴν Γ. (6) Σχολ. τῆς ΜΑ. τῷ α.

Τὸ γὰρ δὴ τῷ Κύκλῳ, ἴσον ἐστὶ (1) Τριγώνῳ, ὃ βάσις μὲν ἡ Περιφέρεια, ὕψος δὲ ἡ Ἡμιδιάμετρος ζα· τὸ δὲ τῷ Πολυγώνῳ, ἴσον ἐστὶ Τριγώνῳ (2), ὃ βάσις μὲν ἡ τῷ Πολυγώνῳ περίμετρος, ἡ τῇ τῷ Κύκλῳ περιφέρεια (καθ' ὑπόθεσιν) ἴση, ὕψος δὲ ἡ Κάθετος ζο, ἡ ἀπὸ τοῦ Κέντρου ἐπὶ τὴν τῷ Πολυγώνῳ πλευρὰν ἀγομένη. Ταύτης οὖν ἐλάσσονος ἔστι τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ Κύκλου ὅσης, εὐδὴλον ὡς τὸ τῷ Πολυγώνῳ χωρίον, τῷ κατὰ τὸν κύκλον τυγχάνει ἐλαττον. Ο. Ε. Δ.

Παραπλησίως δὲ καὶ τῶν ἴσων τὰς ἐπιφανείας σφαιρῶν, ἡ Σφαῖρα δεχθήσεται οὕσα τὸ περιεκτικώτατον.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ε.

„Πᾶς Κύκλος ἴσος ἐστὶ Τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τῷ Κύκλῳ ἐστὶ περιφέρεια, ὕψος δὲ ἡ ἡμιδιάμετρος.

κ. 8.

Τῶν κανονικῶν Πολυγώνων τὰ περὶ τὸν Κύκλον περιγραφόμενα, καὶ τὰ Τρίγωνα, οἷς αἱ μὲν βάσεις ἴσαι ταῖς τῶν Πολυγώνων περιμέτροι εἰσὶ, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ τῷ Κύκλῳ ἡμιδιαμέτρῳ (3), ἔστι ἴσα ἐστὶ. Ἀλλὰ μὲν τὰ περὶ τὸν Κύκλον ἐς ἄπειρον περιγραφόμενα Πολύγωνα, εἰς τὸν Κύκλον τέως αὐτὸν (4) ἀπολήγουσιν· ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ Τρίγωνα (ὡς αὐτίκα δεχθήσεται) τὰ βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν τῷ περιγεγραμμένῳ Πολυγώνῳ περίμετρον, ὕψος δὲ τὴν τῷ Κύκλῳ ἡμιδιάμετρον αβ ἐπίγῃ τὸ Τρίγωνον, ὃ βάσις μὲν ἡ Περιφέρεια, ὕψος δὲ ἡ αβ Ἡμιδιάμετρος· ὁ ἄρα Κύκλος (5) καὶ τὸ Τρίγωνον, ὃ βάσις μὲν ἡ Περιφέρεια, ὕψος δὲ ἡ αβ Ἡμιδιάμετρος, ἴσα ἐστὶ.

Ὡς δὲ τὰ ὑπὸ τε τῆς περιμέτρου τοῦ Πολυγώνου, καὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ Κύκλου Τρίγωνα, ἐπὶ τὸ ὑπὸ τε τῆς περιφέρειας, καὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου ἐστὶν ἀπολήγον, ὥδε δεικνυμι.

Τὰ ὑπὸ τε τῆς περιμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου Πολυγώνου, καὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ Κύκλου αβ Τρίγωνα, ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς περιφέρειας τε καὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου αβ Τρίγωνον, ὡς ἡ βάσις (6) πρὸς τὴν βάσιν, τατέστιν ὡς ἡ τῷ Πολυγώνῳ περίμετρος πρὸς τὴν Περιφέρειαν, κοινῇ τῷ ὕψει αὐτοῖς τυγχάνοντος· ἡ δὲ δὴ τῷ Πολυγώνῳ περίμετρος, ἐπ' αὐτὴν δὴ τὴν περιφέρειαν τέλει (7) ἀποτελεῖται· καὶ τὰ Τρίγωνα ἄρα εἰς τὸ Τρίγωνον αὐτὸ ἀπολήξουσιν.

(1) Πόρ. Γ'. (2) Ἐκ τῆς Προτ. τῆς ἐν χειρὶ (3) Διὰ τὴν τὴν πρὸς αὐτὸν (4) Γ'. Προτ. τῷ παρόντι. (5) Α. τῷ παρόντι. (6) Α. τὸ ε'. (7) Γ. τῷ Ἀρχμ.

Πορίσματα.

Α'. Ἐκ δὴ τῆς παρήσις, καὶ τῆς ΜΑ' τῷ α' Βιβλίῳ, μᾶλλον δὲ ἐκ ταύτης τε, καὶ τῷ Πορίσμ. τῷ μετὰ τὴν ΜΒ' τῷ α' Βιβλ. φανερόν, ὅτι τὸ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου καὶ τῆς ἡμιπεριφερείας, ἢ γυν τὸ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς τεταρτημοριακῆς περιφερείας, ἢ τέως τὸ ὑπὸ τε τῷ τεταρτημορίῳ τῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ὀλοχρῆς περιφερείας, ἴσον τῷ Κύκλῳ ἐστὶ τὸ δὲ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου, καὶ τῆς ὅλης περιφερείας, ἢ γυν τὸ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἡμιπεριφερείας, διπλασίον τῷ Κύκλῳ ἐστὶ τὸ δὲ ὑπὸ τῆς ὅλης διαμέτρου, καὶ τῆς ὅλης περιφερείας, τετραπλασίον τῷ Κύκλῳ ἐστὶ.

Β'. Ἐστὶ δὲ ὁ Κύκλος πρὸς τὸ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένον Τετράγωνον, ὡς ἡ ἡμιπεριφέρεια γδε πρὸς τὴν διάμετρον· πρὸς δὲ δὴ τὸ Τετράγωνον τὸ περὶ αὐτὸν περιγεγραμμένον ἔστιν, ὡς τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον, ἢ γυν ὡς ἡ ἡμιπεριφέρεια πρὸς τὴν δις διάμετρον· πρὸς δὲ τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου, ὡς ἡ περιφέρεια πρὸς τὴν διάμετρον.

κ. 9.

Τὸ γὰρ Ὀρθογώνιον, τὸ ὑπὸ τε τῆς ἡμιπεριφερείας γδε, καὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου γα, ἤτοι γζ (τυτέστιν (1) αὐτὸς ὁ Κύκλος), ἐστὶ πρὸς τὸ Ὀρθογώνιον γζη, τὸ ὑπὸ ζη καὶ ηε (ὁπερ ἐστὶ (2) πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτὸν Τετράγωνον), ὡς (3) ἡ γδε ἡμιπεριφέρεια πρὸς τὴν ζη, ἢ γυν τὴν γε διάμετρον. Ο. Η. τὸ Α.

Ταύτητοι ἔστιν ὁ Κύκλος πρὸς τὸ δις Ὀρθογώνιον ηζγε, τυτέστι πρὸς τὸ ζδ Τετράγωνον τὸ περὶ αὐτὸν περιγεγραμμένον, ὡς ἡ ἡμιπεριφέρεια γδε, πρὸς τὴν δις διάμετρον γε. Ο. Η. τὸ Β'.

Καὶ ὅτως ἔστιν ὁ Κύκλος πρὸς τὸ τεταρτημόριον τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ αὐτὸν Τετράγωνῳ, τυτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου Τετράγωνον, ὡς ἡ ἡμιπεριφέρεια πρὸς τὴν ἡμιδιάμετρον, εἴτεν ὡς ἡ περιφέρεια πρὸς τὴν διάμετρον. Ο. Η. τὸ Γ'.

Γ'. Ἐκ τῷ Α' πορίσματι, διὰ τεταρτημορίῳ μηχανικῶς ἐνι λαβεῖν Ὀρθογώνιον, ἢ Τετράγωνον ἴσον Κύκλῳ, ὃς ἂν ἀπὸ τῆς αὐτῆς τῷ τεταρτημορίῳ ἡμιδιαμέτρου ἢ καταγεγραμμένους· κἀντεῦθεν ὁ Κύκλος παντὸς τετραγωνισμοῦ μηχανικῶς ληφθήσεται. Τὸ γὰρ Ὀρθογώνιον τὸ ἀπὸ τεταρτημοριακῆς τόξου (4), καὶ τῆς διαμέτρου, ὅθεν δὴ καὶ τὸ Τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς μέσης (5)

(1) Α. Πόρ. (2) Σχόλ. τὸ μετὰ τὰς ε' καὶ Ζ. τῷ δ'. (3) Α. τῷ ε'. (4) Πόρ. Α. (5) ΙΓ. καὶ ΙΖ. τῷ ε'.

ἀναλόγῃ, τῆς μεταξὺ τῆς τόξου καὶ τῆς διαμέτρου, τῷ ἀπὸ τῆς αὐτῆς τῷ τεταρτημορίῳ ἡμιδιαμέτρου Κύκλῳ συνεξιστῶται. Διὸ δὴ ἐκ τούτου, καὶ ὁπωσοῦν ἑτέρῳ δοθέντι Κύκλῳ ὀρθογώνιον, ἢ τετράγωνον ἴσον τεθείσεται, διὰ τῷ Ζ' πορίσματος τῆς Β' Πρωτ. τῷ ιβ' Βιβλ.

Μηχανικῶς δὲ ληφθήσεται ἡ τῷ τεταρτημορικῷ τόξῳ ἰση Εὐθεία, νήματος ἢ χάρτε τῷ τόξῳ προσαρμοζομένη, ἢ καὶ τῷ τόξῳ αὐτῷ ἐπί τιμι ἐπιπέδῳ πρὸς κανόνα κυλισμένη.

Π ρ ό τ α σ ι ς . ς .

„Παντὸς Κύκλου ἡ περιφέρεια τὴν κατ' αὐτὸν διάμετρον, ἔλαττον μὲν ἢ τρεῖς σὺν ἐπτημορίῳ (ἤτοι $\frac{7}{8}$), πλέον δὲ ἢ τρεῖς σὺν $\frac{7}{8}$ περιεπλήροισι.

Τούτο δὴ τὸ θεώρημα ἀποδεικνύμενος, πολύγωνα ἅττα τῶν τεταγμένων ὁ Ἀρχιμήδης προτείληψε, τὸ μὲν περὶ τὸν Κύκλον περιγεγραμμένον, τὸ δὲ εἰς τὸν αὐτὸν ἐγγεγραμμένον, πλευρῶν 96 ὃν ἑκάτερον· εἴτ' ἀπέδειξεν, ὡς αἱ μὲν 96 πλευραὶ τῶ περὶ τὸν κύκλον, περιέχονται εἰς τὴν κατ' αὐτὸν διάμετρον ἥττον ἢ τρεῖς καὶ $\frac{7}{8}$, ἐξ οὗ ἐπόμενον ἐστὶ τὴν περιφέρειαν, ὡς ἐκείνων ἡσαν ἐλάσσονα, ἔλαττον ἔτι τῆς διαμέτρου περιεκτικὴν εἶναι ἢ τρεῖς καὶ $\frac{7}{8}$. αἱ δὲ δὴ τῷ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένῳ 96 πλευραὶ (καὶ δὴ καὶ ἡ περιφέρεια, ἥτις ἐκείνων μείζων ἐστὶ) τὴν κατὰ τὸν Κύκλον διάμετρον πλέον ἢ τρεῖς καὶ $\frac{7}{8}$ περιέχουσιν· ἀλλ' ἦγε τῷ τοιοῦτο δείξεις, πλατυτέρα ἢ ὥς ἐπὶ τῷ παρόντι ἐξεπερχθῆναι, δόξειεν ἂν.

Ἀλλὰ γὰρ ἐπεὶ λόγῳ τῷ παντὸς ἀξίον ἐστὶ τὸ θεώρημα, ὡς καὶ βίβλοι περὶ αὐτῆ ὅλην τὸν Ἀρχιμήδην συγγεγραφεῖναι, ἀκατασκευάσον ἔγω τοῖς τῶν Γεωμετρικῶν διασώταις, παραλειφθῆναι ἐν τούτοις, ἔκ ἂν ὀρθῶς ἔχει μοι δοκεῖ. Ταῦτητοι καὶ τὴν ἀρχιμήδειον τέτατα κατασκευῶν, ἣν τοῖς τῷ μεγάλῳ Βαβυρόνι εἰχόντες ἰχνοσιν ἐκτιδέμεθα, λαβὼν ἔχει.

Μέρος Α'. Ἡ παντὸς Κύκλου περίμετρος, τὸ τριπλὴν τῆς αβ διαμέτρου ὑπερέχει ὑπεροχῇ ἐλάσσονι, ἢ κατὰ τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς αὐτῆς διαμέτρου.

Ἐγὼ γὰρ τὸ τῷ Κύκλῳ κέντρον, καὶ αδ (τῇ ἡμιδιαμέτρῳ αὐτῇ ἰση (1)) πλευρὰ τῷ Εἰσαγώνῳ τῷ κανονικῷ, ὥς περ ἂν τῷ Κύκλῳ ἐγγράφοιτο· καὶ ἔσται ἡ ὑπὸ αὐτῷ (2) ἐκτιμέριον τεττάρων ὀρθῶν. Δίχα δὴ τεμήσθω ἡ ὑπὸ αὐτῷ διὰ τῆς γε ἀχθείσης, ὑφ' ἧς καὶ ἡ αδ (3) δίχατε καὶ πρὸς ὀρθὰς κατὰ

(1) Πόρ. Α. τῆς ΙΒ. τῷ δ'. (2) Κς. τῷ γ'. καὶ Α. Πόρ. τῆς ΔΓ. τῷ ε'. (3) Ἀρδ. Γ. τῇ Σχολ. τῆς Κς. τῷ α'.

τὸ σ τμηθήσεται. Προαχθήτω δὲ ἡ γε, εἰς ὃ ἀπαυγήσῃ τῇ εα ἀπομένῃ τῷ Κύκλῳ κατὰ τὸ α· καὶ κατὰ συνεχῇ τῶν πρὸς τῷ γ Γωνιῶν διχοτομίαν, ἀχθήτωσαν πρὸς τὴν ἀπομένην αἱ γζ, γη, γθ, γκ, ὡς εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ αγθ = 2 αγε = 4 αγζ = 8 αγη = 16 αγθ = 32 αγκ. Εἴη δ' ἂν ὅτως ἡ ὑπὸ αγθ (ἦτοι αἱ 2 ὑπὸ αγκ) = $\frac{1}{98}$ (τετάρτην ἐννενηκοσὸν ἐκτιμήριον) τῶν τεσσάρων ὀρθῶν· καὶ εἰς ἐπὶ τῆς ἀπομένης προαχθείσης ληφθῇ αλ = ακ, καὶ ἐπιζευχθῇ γλ, ἔσαι αγκ = αγκ (1). Ταύτητοι καὶ λγκ τῆς αγκ Γωνίας διπλασίων, τετάρτην ἴση τῇ ὑπὸ αγθ, ἦτοι $\frac{1}{98}$ τεττάρων ὀρθῶν. Ἡ δὲ δὴ λκ Εὐθεῖα τῷ τεταγμένῳ σχήματι, οὗ πλευραὶ εἰς ἐπὶ ἐννενηκόντα, ὃ ἂν περὶ τὸν Κύκλον περιγραφείη, Πλευρὰ οὖσα εἰσὶν· ὡς καὶ ἡ λκ ἐννενηκοντάκις ἐξάκις ληφθεῖσα, τῆς τῷ Κύκλῳ περιφερείας (2) μείζων ἔσαι. Εἰ τοίνυν δείχθῃ τὰς 96 λκ ἅμα ἐλάσσονας εἶναι τῆς τρις ληφθείσης διαμέτρου αβ σὺν $\frac{1}{2}$. ἔσαι δὴ πάντως καὶ ἡ τῷ Κύκλῳ περιφέρεια ἐλάσσων τῆς τρις ληφθείσης διαμέτρου αὐτῇ σὺν $\frac{1}{2}$.

Ὁμοίων ὅτων τῶν Τριγώνων γεα, γασ (3), ἔσαι γε : εα :: γα : ασ· ἀλλὰ γα = (4) 2 ασ, ἄρα γε = 2 εα· ἐπεὶ δέ τοι ἡ ὑπὸ αγε δίχα τέμνεται διὰ τῆς γζ (5), ἔσαι εγ : γα :: εζ : ζα· καὶ ἐν συνθέσει εγ + γα : γα :: εα : ζα, καὶ ἐναλλαξ εγ + γα : εα :: γα : ζα· ὡσαύτως δὲ δείχθῃσεται καὶ εγ + γα : ζα :: γα : ηα, καὶ ηγ + γα : ηα :: γα : θα, καὶ τελευταῖον θγ + γα : θα :: γα : κα.

Κεῖθω εγ = 306, ἔσαι εγ^T = 93636, ἡ δὲ δὴ (6) εα = 153· ὡς εα^T = 23409, καὶ γα^T = (εγ^T (7) — εα^T = 93636 — 23409) 70227· ἀλλὰ $\sqrt{70225} = 265$ · ἄρα γα μείζων εἰσὶν ἢ ὅσον 265· καὶ εγ + γα μείζων ἢ 306 + 265 = 571· Ἐπεὶ δέ τοι εγ + γα : εα :: γα : ζα· ὁ δὲ λόγος εγ = γα : εα (8) μείζων εἰς τῷ λόγῳ 571 πρὸς 153· ἔσαι δὴ (9) καὶ ὁ λόγος γα πρὸς ζα, μείζων τῷ λόγῳ 571 πρὸς 153, τετάρτην (εἰς δὲ ἀκέραιον τῶν ἀριθμῶν διὰ 8 πολυπλασιάσαι) τῷ λόγῳ 4568 πρὸς 1224· Ἐὰν οὖν ζα = 1224 ὑποτεθῇ, ἔσαι (10) ἡ γα μείζων ἢ ὅσον 4568.

Κεῖθω τοίνυν ζα = 1224, καὶ ἔσαι ζα^T = 1498176· καὶ ἐπεὶ γα μείζων ἢ 4568, ἔσαι γα^T μείζων ἢ ὁ ἀριθμὸς 20866624· διὸ δὴ γζ^T = ζα^T + αγ^T μείζων ἔσαι, ἢ 1498176 + 20866624, τετάρτην ἢ 22364800· ἀλλὰ-

(1) Δ. τῷ α'. (2) Α' Ε. Β. τῶν Ἀρχιμ. (3) Η. τῷ ε'. (4) Ως ἀνωτ. (5) Γ. τῷ ε'. (6) Ως ἀνωτ. (7) Η. Πρὸβλ. μετὰ τὴν ΜΖ. τῷ α'. (8) Η. τῷ ε'. (9) Σχολ. τῆς ΙΑ. τῷ ε'. (10) Ι. τῷ ε'.

μὴν $\sqrt{22363441} = 4729$ · ἄρα $\zeta\gamma$ μείζων ἢ 4729 , καὶ $\zeta\gamma + \gamma\alpha$ μείζων ἢ $4729 + 4568$, τυχέσιν ἢ 9297 · Καὶ ἐπειδὴ $\zeta\gamma + \gamma\alpha$ πρὸς $\zeta\alpha$ ἐστὶν ὡς $\gamma\epsilon$ πρὸς $\eta\alpha$ · ὁ δέ τοι λόγος $\zeta\gamma + \gamma\alpha$ πρὸς $\zeta\alpha$, μείζων ἐστὶν ἢ 9297 πρὸς 1224 · ἔσαι ϵ ὁ λόγος $\gamma\alpha$ πρὸς $\eta\alpha$, μείζων τῷ 9297 πρὸς 1224 · ὥς ϵ εἶγε $\eta\alpha = 1224$ ὑποτεθεῖν, ἔσαι $\gamma\alpha$ μείζων ἢ 9297 .

Κεῖσθω τοίνυν $\eta\alpha = 1224$, καὶ ἔσαι $\eta\alpha^T = 1498176$ · καὶ ἐπειδὴ $\gamma\alpha$ μείζων ἢ 9297 , ἔσαι $\gamma\alpha^T$ μείζων ἢ 86434209 · καὶ ἔτω $\gamma\eta^T = \eta\alpha^T = \gamma\alpha^T$, μείζων ἔσαι ἢ $1498176 + 86434209$, τυχέσι μείζων ἢ 87932385 · ἄλλὰ $\sqrt{87928129} = 9377$ · ἄρα ἢ $\gamma\eta$ μείζων ἐστὶν ἢ 9377 , καὶ $\eta\gamma + \gamma\alpha$, μείζων ἢ $9377 + 9297$, ἦτοι μείζων ἢ 18674 · Καὶ ἐπεὶ περ $\eta\gamma + \gamma\alpha : \eta\alpha :: \gamma\alpha : \theta\alpha$ · ὁ δὲ δὴ λόγος $\eta\gamma + \gamma\alpha : \eta\alpha$ μείζων τῷ 18674 πρὸς 1224 , τυχέσιν (εἰ τις ἐκατέρῃ τὴν ἡμίσειαν λάβοι) τῷ λόγῳ 9337 πρὸς 612 , ἔσαι ἄρα ϵ ὁ λόγος $\gamma\alpha$ πρὸς $\theta\alpha$, μείζων τῷ λόγῳ 9337 πρὸς 612 · Εἴπερ οὖν τεθεῖν $\theta\alpha = 612$, ἔσαι $\gamma\alpha$ μείζων 9337 .

Κεῖσθω τοίνυν $\theta\alpha = 612$, ϵ ἔσαι $\theta\alpha^T = 374544$ · ἐπεὶ δὲ ἢ $\gamma\alpha$ μείζων 9337 , ἔσαι $\gamma\alpha^T$ μείζων 87179569 , καὶ ἔτω $\gamma\theta^T = \theta\alpha^T + \gamma\alpha^T$ μείζων ἔσαι $374544 + 87179569$, τυχέσι μείζων 87554113 · Ἄλλὰ $\sqrt{87553449} = 9357$ · ἄρα ἢ $\gamma\theta$ μείζων ἐστὶν ἢ 9357 · καὶ $\theta\gamma + \alpha\gamma$ μείζων ἔσαι ἢ $9357 + 9337$ · ἀμέλειτοι μείζων ἢ 18694 · Καὶ ἐπεὶ $\theta\gamma + \gamma\alpha : \theta\alpha :: \gamma\alpha : \kappa\alpha$ · ὁ δὲ λόγος $\theta\gamma + \gamma\alpha : \theta\alpha$ μείζων ἐστὶ τῷ λόγῳ 18694 πρὸς 612 , εἴτ' οὖν (ἐκατέρῃ ἡμισυθέντος) τῷ λόγῳ 9347 πρὸς 306 , ἔσαι δὴ ϵ ὁ λόγος $\gamma\alpha$ πρὸς $\kappa\alpha$ μείζων τῷ λόγῳ 9347 πρὸς 306 · Ἐὰν τοίνυν ὑποτεθεῖν $2\alpha\kappa$ (ὁπέρ ἐστι $\lambda\kappa$) $= 306$, ἔσαι $2\alpha\gamma$ ἦτοι $\alpha\beta$ μείζων 9347 · ὅ,τε λόγος $\alpha\beta$ πρὸς 9347 , μείζων ἔσαι τῷ λόγῳ $\lambda\kappa$ πρὸς 306 · καὶ ἐπομένως ὁ λόγος $3\frac{1}{2}\alpha\beta$ πρὸς $3\frac{1}{2} \times 9347 = 29376\frac{1}{2}$, μείζων ἔσαι (1) τῷ λόγῳ $96\lambda\kappa$, πρὸς $96 \times 306 = 29376$ · Οὗτος δὲ ὁ ἔχματος λόγος ἰσότητος τυγχάνει ὧν, διὰ τὸ εἶναι $96\lambda\kappa = 29376$ · ἄρα $3\frac{1}{2}\alpha\beta$ μείζων ἢ $29376\frac{1}{2}$, ϵ ἔτι δὲ μείζων ἢ 29376 , τυχέσιν ἢ $96\lambda\kappa$ · Ἡ τῷ τεταγμένῳ ἄρα Πολυγώνῳ (ὧ πλευμαὶ 96) τῷ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένῳ περιμέτρῳ, ϵ πολλῶν δὴ μᾶλλον ἢ τῷ Κύκλῳ αὐτῷ (περὶ ὃν τὰ τοιοῦνδε Πολύγωνα περιγέγραπται) περιφέρειαι, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς κατὰ τὸν αὐτὸν κύκλον $3\frac{1}{2}$ διαμέτρῳ. Ο. Ε. Δ.

Μέρος Β'.

„Ἡ τῷ Κύκλου περιφέρεια, τὴν τῷ αὐτῷ Κύκλου διάμετρον $αβ$ τρις „ληφθεῖσαν, ὑπερέχει ὑπερχῶ μείζονι, ἢ ὅσον $\frac{1}{71}$ μέρια τῶν ἐκ τῆς αὐ- „τῆς διαμέτρου.

Ἐςω δὲ τόξον τὸ $αδ$ τῆς ὅλης τῷ Κύκλῳ περιφερείας ἐκτημόριον· συ- κ. ιι.
νεχεῖ δὲ διχοτομήσει γινέσθω τὸ τόξον $αδ = 2 αε, = 4 αζ = 8 αη =$
 $16 αθ$, καὶ ἔσαι τὸ τόξον $αθ \frac{1}{8}$ τῆς ὅλης περιφερείας· ἀχθήτωσαν δὲ
εὐθεῖαι $βδ, βε, βζ, βη, βθ$, καὶ εὐθεῖαι $αδ, αε, αζ, αη, αθ$. Ἐςαι δὲ
 $αθ$ Πλευρὰ τῷ κανονικῷ σχήματος τῷ ἐκ πλευρῶν ἐξ ἐπὶ ἐννεήκοντα, ὅ-
περ ἂν εἰς τὸν κύκλον ἐγγράφοιτο, καὶ ὑπερ ἢ περίμετρος $96 αθ$, τῆς τῷ
Κύκλῳ περιφερείας ἐλάσσων ἐς (1). Τεμνέτωσαν οὖν ἀλλήλας αἱ εὐθεῖαι
 $αδ, βε$ ἐνθα τὸ $κ$ · διὰ δὲ τὰς ὑπὸ $εβα, εαδ$, τὰς ἐπὶ ἴσων τόξων, καὶ ἐ-
πομένως (2) ἴσας, καὶ τὴν πρὸς τῷ $ε$ κοινὴν, τὰ Τρίγωνα $αβε, καε$ (3)
ἔσαι ὅμοια· ἐνθεντοὶ $αβ : ακ :: βε : εα$. Καὶ ἐν τῷ Τριγώνῳ $αβδ$, διὰ τὴν
κατὰ τὸ $β$ Γωνίαν, τὴν δίχα τεμνομένην (4) ὑπὸ τῆς Εὐθείας $βκ$, ἔσαι
(5) $δβ : βα :: δκ : κα$ · καὶ ἐν συνδέσει $δβ + βα : βα :: δα : κα$ · καὶ ἐ-
ναλλὰξ $δβ + βα : δα :: βα : κα ::$ (6) $βε : εα$. Ὡσαύτως δὲ ἀποδειχθή-
σεται $εβ + βα : εα :: βζ : εα$ · καὶ $ζβ + βα : εα :: βη : εα$ · καὶ $ηβ +$
 $βα : εα :: βθ : εα$.

Κείσθω οὖν $βα = 1560$, καὶ ἔσαι $βα^T = 2433600$ · καὶ $δα = τῇ ἡμι-$
διάμετρῳ (7) $αγ = 780$ · ὥστε $δα^T = 608400$, καὶ $δβ^T = βα^T - δα^T =$
 1825200 . Ἀλλὰ $\sqrt{1825201} = 1351$ · καὶ τοίνυν $δβ$ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ 1351 ·
καὶ $δβ + βα$ ἐλάσσων ἢ $1351 + 1560 = 2911$ · Ἐνθεντοὶ ὁ λόγος 2911
πρὸς 780 , τετέστιν (εἰ τῶν ἀριθμῶν ἐκότερος διὰ 100 πολλαπλασιασθῇ)
ὁ λόγος 291100 πρὸς 78000 , μείζων ἐστὶ τῇ λόγῳ $δβ + βα$ πρὸς $δα$, ἦ-
τοι τῷ $βε$ πρὸς $εα$. Ἐὰν ὅν ὑποτεθῇ $εα = 78000$, ἔσαι $βε$ ἐλάσσων 291100 .

Κείσθω τοίνυν $εα = 78000$, καὶ ἔσαι $εα^T = 6084000000$ · καὶ ἐπει-
δὴ $βε$ ἐλάσσων ἢ 291100 , ἔσαι $βε^T$ ἔλαττον ἢ 84739210000 · καὶ $βα^T$
 $= βε^K + εα^T$, ἔλαττον ἢ 90823210000 · Ἀλλὰ μὲν $\sqrt{90823210000} =$
 301375 · ἄρα $βα$ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ 301375 , καὶ $εβ + βα$ ἐλάσσων ἢ 291100
 $+ 301375 = 592475$ · Ταύτητοι ὁ λόγος 592475 πρὸς 78000 , τετέστιν

(1) Ἀ. ε. τῶν Ἀρχιμ. (2) ΚΘ. Βιβλ. Γ. (3) Θ. Πόρ. τῆς ΑΒ. τῷ α. καὶ Πρότ.
Δ. τῷ ε. (4) ΚΘ. τῷ γ. (5) Γ. τῷ ε. (6) Ὡς αὐτ. (7) Α. Πόρισ. τῆς ΙΒ. τῷ δ.

(εἰτις τῆς ἀριθμοῦ διὰ 324 διελόμενος, τὰ ἐντεῦθεν πηλίκᾳ διὰ 11 ἐπιπολλαπλασιάζει) ὁ λόγος 20053 πρὸς 2640, τῷ λόγῳ εβ + βα πρὸς εα, τατέσι τῷ βζ πρὸς ζα μείζων ἔσαι· καὶ εἰ τοῖνυν δεῖήμεν ζα = 2640, ἔσαι δὴ βζ ἐλάσσων ἢ 20053.

Κεῖθω τοῖνυν ζα = 2640, καὶ ἔσαι ζα^T = 6969600· καὶ ἐπειδὴ βζ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ 20053, ἔσαι βζ^T ἔλαττον ἢ 402122809, καὶ βα^T = βζ^T + ζα^T ἔλαττον ἢ 409092409· Ἀλλὰ $\sqrt{409131529} = 20227$ · ἄρα βα ἐλάσσων ἢ 20227, καὶ ζβ + βα ἐλάσσων 40280· ὥς τε ὁ λόγος 40280 πρὸς 2640, τατέσιν (εἰτις ἐκάτερον διέλοι διὰ 40, ἐπιπολλαπλασιάζει δὲ τὰ ἐντεῦθεν ἀνακύπτοντα πηλίκᾳ διὰ 6) ὁ λόγος 6042 πρὸς 396, μείζων ἐστὶ τῷ λόγῳ ζβ + βα πρὸς ζα, τατέσι τῷ βη πρὸς ηα· Ἐὰν οὖν τεθῇ ηα = 396, ἔσαι βη ἐλάσσων ἢ 6042.

Κεῖθω τοῖνυν ηα = 396, καὶ ἔσαι ηα^T = 156816· καὶ ἐπειδὴ βη ἐλάσσων ἐστὶν ἢ 6042, ἔσαι βη^T ἔλαττον ἢ 36505764, καὶ βα^T = βη^T + ηα^T ἔλαττον ἢ 36662580· Ἀλλὰ $\sqrt{36663025} = 6055$ · ἄρα βα ἐλάσσων ἐστὶν ἢ 6055, καὶ βη + ηα ἐλάσσων ἢ 12097· Ἐνθεντοί ὁ λόγος 12097 πρὸς 396, τατέσιν (ἐκαστέρῃ διπλασιασθέντος) ὁ λόγος 24194 πρὸς 792 μείζων ἐστὶ τῷ λόγῳ ηβ + βα πρὸς ηα, ἥτοι τῷ λόγῳ βθ πρὸς θα· Ἐὰν οὖν τεθῇ θα = 792, ἔσαι βθ ἐλάσσων ἢ 24194.

Κεῖθω τοῖνυν θα = 792, καὶ ἔσαι θα^T = 627264, καὶ ἐπειδὴ βθ ἐλάσσων ἢ 24194, ἔσαι βθ^T ἔλαττον ἢ 585349636· καὶ βα^T = βθ^T + θα^T ἔλαττον ἢ 585976900· Ἀλλὰ $\sqrt{585978849} = 24207$ · ἄρα ἡ βα ἐλάσσων ἐστὶν ἢ 24207· ὅς τε λόγος αθ πρὸς αβ, μείζων ἐστὶ τῷ λόγῳ 792 πρὸς 24207· τατέσιν (ἐκαστέρῃ διαιρεθέντος διὰ 3) μείζων τῷ λόγῳ 264 πρὸς 8069· καὶ ἐπομένως ὁ λόγος 96 αθ πρὸς αβ, μείζων ἐστὶ τῷ λόγῳ 96 × 264 = 25344 πρὸς 8069· καὶ ἐπειδὴ 25344, τατέσι 25344 × 1, ὑπερέχει 25343 $\frac{1}{3}$, ὅπερ ἐστὶν 8069 × 3 $\frac{1}{3}$, ἔσαι (1) ὁ λόγος 25344 πρὸς 8069 μείζων τῷ λόγῳ 3 $\frac{1}{3}$ πρὸς 1· ὅθεν δὴ (2) ὁ λόγος 96 αθ πρὸς αβ μείζων ἐστὶ τῷ λόγῳ 3 $\frac{1}{3}$ πρὸς 1· Καὶ τοῖνυν (3) τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων μείζων τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, τατέσιν 96 αθ, ἥτις ἐστὶν ἡ περίμετρος τῆ Πολυγώνου, ὅπερ ἂν εἰς τὸν Κύκλον ἐγγράφαιτο, καὶ ἐπομένως ἡ τῷ Κύκλῳ, εἰς ὃν ἂν ἐγγράφαιτο περιφέρειᾳ, μείζων ἔσαι ἢ 3 $\frac{1}{3}$ ἢ διὰ μέτρος αβ. Ο. Ε. Δ.

(1) Ζ. Πόρ. τῆς Ις. τῷ ζ'. (2) Σχόλ. τῆς ΙΔ. τῷ ε'. (3) ε. Πόρ. τῆς Ις. τῷ ε'.

Ὡς εἴπερ ἤδη εἰς Πολύγωνα τῶν πολυπλευροτέρων ἔτι τὸν κατὰ τὴν Γεωμετρίαν λογισμὸν ἐκτελείοιμεν, τὰ τεθέντα ὅρια ἔτι καὶ ἔτι ἂν μᾶλλον συσεῖλαι ἔχοιμεν πέρας τοῦ ἀνευ, καὶ εἰς ἄπαρον ὕψος τῆς ἀληθοῦς ἀναλογίας ἐγγυὲς εἶναι, ὃ δὲ καὶ γέγονε Λυδάλφῳ τῷ Κεῦσονίῳ, καὶ Γριμβεργέρῳ, καὶ Μετίῳ, καὶ Σνελλίῳ, καὶ ἄλλοις.

Ἐπεὶ δὲ δὴ (ὅρα Σχ. 2) ἡ ἀπτομένη μοιρῶν 36 διὰ 10 πολλαπλασιαζομένη, τὴν τῷ περιγεγραμμένῳ Πενταγώνῳ περίμετρον δίδωσι, τὸ δέ τοι ἡμίτονον μοιρῶν 36 διὰ 10 πολλαπλασιαζόμενον, τὴν τῷ ἐγγεγραμμένου παρέχεται· ὡσαύτως δὲ ἡ μὲν τῆς ἡμιμοίρας ἀπτομένη διὰ 720 πολλαπλασιαζομένη, τὴν τῷ περιγεγραμμένῳ Πολυγώνῳ, οὐ πλευραὶ 360, τὸ δέ τοι ἡμίτονον τῆς ἡμιμοίρας διὰ 720 ἐπιπολλαπλασιαζόμενον τὴν τῷ ἐγγεγραμμένῳ, οὐ ὁμοίως πλευραὶ 360, περίμετρον συγκροτεῖ, καὶ οὕτως ἐπὶ ἄπαρον, εὐδελον ὅπως ἐκ τῶν καταγεγραμμένων ἤδη πινέκων τῶν τε ἡμιτόνων, καὶ τῶν ἀπτομένων, οἱ ἐφεξῆς ἀριθμοὶ εὐρεθῆναι δύνησονται.

Κατάλογος τῶν εἰς τὸδε εὐρημένων ἐπισημοτέρων Ἀναλογιῶν.

Πρώτη γοῦν ἡ κατ' Ἀρχιμήδην οὕτως ἔχουσα.

Διάμετρος 7.

Περιφέρεια 22 μείζων τῆς ἀληθοῦς.

Διάμετρος 71.

Περιφέρεια 223 ἐλάσσων τῆς ἀληθοῦς.

Καὶ γὰρ $7 = 3 \frac{1}{2}$ καὶ $\frac{22}{71} = 8 \frac{1}{7}$.

Οἱ μὲν οὖν λόγοι 22 πρὸς 7, καὶ 223 πρὸς 71, ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπόμενον ἀναγόμενοι (ὃ δὲ γίνεταί, καθ' ὃν δὴ λόγον καὶ τὰ ἀριθμητικὰ τῶν κλασμάτων, ἐπὶ τῶν αὐτῶν παρονομασῆν ἀνακαλεῖται), λόγοι δώσουσι τὰς ἐφεξῆς διὰ τούτοις 1562 πρὸς 497, καὶ 1561 πρὸς 497.

Καὶ τεδείσης τοίνυν τῆς διαμέτρου μερῶν 497.

Ἐσται ἡ ὑπερπίπτουσα τῆς ἀληθοῦς περιφέρεια 1562.

Ἡ δὲ εἴσω πίπτουσα, καὶ τῆς ἀληθοῦς ἐλάσσων 1561.

Ὡς ἐκατέρω τῆς ἀκριβοῦς ἀληθεύουσας δισηήνοχα πληκτικότητι ἐλάσσονι τῆς, ἥπερ ἂν εἴη τῆς ὅλης διαμέτρου $\frac{1}{2}$.

Ἐὰν δὲ οἱ λόγοι 7 πρὸς 22, καὶ 71 πρὸς 223 ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπόμενον ἐπαναχθῶσι, προκύψουσι δὴ οἱ λόγοι οὗτοι 1561 πρὸς 4906, καὶ 1562 πρὸς 4906.

Καὶ τεδείσης τοίνυν τῆς περιφερείας μερῶν 4906.

Ἐσται ἡ μὲν ἐλάττων ἴσα τῆς ἀληθοῦς διάμετρος 1561.

Η' δέ τοι μείζων 1562.

Ὡς ἐκάτερα τῆς ἀκριβῶς ἀληθεύσης διαμέτρου διενήνοχε πηλικότητι ἐλάσσονι τῆς, ἢ περ' αὖ εἴη τῆς ὅλης περιφέρειας 2962.

Ἦν δὲ δὴ Μέτιος παρέδωκεν ἀναλογίαν, μακρῷ τῆς κατ' Ἀρχιμήδην πρὸς ἀκρίβειαν ἐς διαφέρουσα κατ' ἡν,

Η' μὲν Διάμετρος 113.

Η' δὲ Περιφέρεια 355.

Ἀπασῶν γὰρ τῶν ἐν βραχέσιν ἀριθμοῖς παρισταμένων, ἑδμήα τῷ ἀληθῆς γίνεται ἐγγυτέρω. Ταύτη γὰρ τῆς διαμέτρου ὑποτεθείσης 10,000,000 προκύπτει ἡ περιφέρεια 31,415,929, ἡ δὲ τῆς ἀληθῆς κατὰ γινε τὸν πρῶτον χαρακτήρα 9, διαφέρει ὑπεροχῇ μικρόντι μείζονι, ἢ ὅσον ἐς τῆς διαμέτρου δύο δεκατημιλλιομόρια.

Ἀλλὰ γὰρ ἐκότερας μακρῷ τυγχάνει ἀκριβετέρας, ἡ διττὴ ἐκείνη ἡ κατὰ Λερόλφον τὸν Κεϋσόνιον, ὧν τῆς μὲν οἱ ὅροι χαρακτήρσι συγκείμενοι εἰσι 21, τῆς δὲ 36.

Διάμετρος.

100,00000,000000,000000.

Περιφέρεια ἡ μείζων τῆς ἀληθῆς.

314,159265,358979,323847.

Περιφέρεια ἐλάσσων τῆς ἀληθῆς.

314,159265,358979,323846.

Η' δὲ ἀμφοῖν τῶν περιφερειῶν διαφορὰ τῆς διαμέτρου ἐν ἐς μόνιον, οὗ παρονομασῆς ἀριθμὸς ἐκ μονάδος εἰς 20 σημείων τῷ μηδενὸς συγκροτούμενος· ἐνθεντοί εἰς ἐκάτερα τῆς ἀληθῆς περιφέρειας διενήνοχεϊα ἐς, πηλικότητι τῷ ρηθέντος μορίου ἐλάσσονι· ἀμέλειται ἑκατοντάκις μιλλιονάκις μιλλιονάκις μιλλιοσῶ.

Διάμετρος.

100000,000000,000000,000000,000000,000000.

Περιφέρεια μείζων τῆς ἀληθῆς.

314159,265358,979323,846264,338327,950289.

Περιφέρεια ἐλάσσων τῆς ἀληθῆς.

314159,265358,979323,846264,338327,950288.

Ἦ δὲ ἀμφοῖν τῶν περιφερειῶν διαφορὰ, ἐν αἷς ἡ ἀληθῆς μεσιτεύει, τῆς διαμέτρου μόνιον ἐστίν, οὗ παρονομασῆς ἀριθμὸς ἐκ μονάδος εἰς 35 χαρακτήρων μηδενικῶν συγκροτούμενος· ὃ δὲ μόνιον πρόσγε τὴν διάμετρον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ πρὸς τὴν ὅλην γῆν ψάμμε κάκκος· Οὐδὲ γὰρ ἀπὸ τρεῖσιν ἡ τῆς

γῆς Σφαῖρα ψάμμων συνολᾷται, ὅσα δὴ ποτε τῶν τηλικύτων μορίων ἡ διάμετρος περιέχει.

Εἰς κείον ἂρ' ἄντις προσωτέρω χωρήσει, καὶ εἰς ἄπειρον χωρεῖν δυνατόν, εἴτις γεωμετρικῶς συλλογιζόμενοι, κατὰ τὴν ὑπὸ Σινέπλου παραδοθεῖσαν πρόχειρον μέθοδον, τὸν λόγον προαγαγεῖν ἐβελήσαμεν.

Τεθείσης γὰρ δὴ τῆς περιφερείας μερῶν.

1, 000000, 000000, 000000, 000000, 000000, 000000.

Ἔσται δὲ ἡ διάμετρος ὅτι ἔγγιστα μερῶν.

0, 318309, 886183, 790671, 537767, 926745, 028724.

Π ο ρ ῖ σ μ α τ α .

Ἐπειδὴ ἐν ἀριθμοῖς ἦττον ἀκριβέσιν ἐστὶν ἡ τῷ Κύκλῳ περιφέρεια πρὸς τὴν διάμετρον, ὡς 22 πρὸς 7, ἔσται δὲ καὶ ὁ Κύκλος ἐπὶ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, πρὸς τὸ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον τετράγωνον, ὡς 11 πρὸς 7· πρὸς δὲ γε τὸ περιγεγραμμένον, ὡς 11 πρὸς 14· πρὸς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου τετράγωνον, ὡς 22 πρὸς 7· ἂ δὲ πάντα ἐκ τῷ Β'. Πορ. τῆς πρὸ ταύτης Προτ. ἐπόμενα ἐστί.

Ἐπεὶ δὲ ἐν ἀριθμοῖς ἀκριβεστέροις, ἡ τῷ Κύκλῳ περιφέρεια πρὸς τὴν διάμετρον λόγον ἔχει, ὡς 355 πρὸς 113· ἔσται δὲ ἐπὶ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν ὁ Κύκλος πρὸς μὲν τὸ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον τετράγωνον, ὡς 355 πρὸς 226· πρὸς δὲ τὸ περιγεγραμμένον ὡς 355 πρὸς 452· πρὸς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου τετράγωνον, ὡς 355 πρὸς 113.

Ἐὰν δὲ ἀντὶ τῆς περιφερείας ὑποτεθῇ μονάς, πέντε τῶν μηδενικῶν σημείων ἐκτὴ ἐπόμενα φέροισα, ἔσται ὁ Κύκλος πρὸς μὲν τὸ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον τετράγωνον ὡς 100900 πρὸς 63662· πρὸς δὲ τὸ περιγεγραμμένον ὡς 100000 πρὸς 127324· πρὸς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου ὡς 100000 πρὸς 31831 ὡς ἔγγιστα.

Ἐὰν δὲ τελευταῖον ἀντὶ τῆς διαμέτρου ὑποτεθῇ μονάς, πέντε τῶν μηδενικῶν σημείων ἐπόμενα φέροισα, ἔσται ὁ Κύκλος πρὸς μὲν τὸ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον τετράγωνον ὡς 157080 πρὸς 100000· πρὸς δὲ τὸ περιγεγραμμένον ὡς 78540 πρὸς 100000· πρὸς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου ὡς 314159 πρὸς 100000, ὅτι ἔγγιστα.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Αἱ δὲ δὴ τῆς ἐκτεθείσης ἀναλογίας ἐπιστημόταται ἐπικαρφαί, αἰτλήαι δὲ αἱ ἐφεξῆς.

„Εὗρεσις τῆς Διαμέτρου ἐκ τῆς περιφερείας.

Μιάς τινος τῶν ἐκτεθεισῶν ἀναλογιῶν, ὃ τῶν ὄρων μείζων πρῶτος τετάχθω, δεύτερος δὲ ὁ ἐλάττω· κείθω δὲ εἰς τρίτον ὄρον ἡ περιφέρεια· Τῶν δὲ τριῶν τῆτων κειμένων ὄρων, κατὰ τὴν χρυστὴν ἀκρίβειαν μέθοδον, ζητεῖσθω ὁ τέταρτος ἀνάλογον, ὃς δὴ ἡ ζητούμενη εἶσαι διάμετρος.

Οἷον εἰ τεθείη ἡ τῷ μεγίστῳ κατὰ γῆν Κύκλου περιφέρεια, μίλλιον εἶναι τῶν κατὰ Βέλγας ὠρεῶν 8640, ἢ ζητηθεῖν ἡ τῆς γῆς ἐντεῦθεν διάμετρος, ὅτως οἱ ὅροι τετάσσονται.

$$355 : 113 : : 8640 :$$

Καὶ ἐπιπολλαπλασιασθέντος τῷ Β' τῶν ὄρων διὰ τῷ Γ', ἢ τῷ ἀνακύντοντος διὰ τῷ πρῶτῳ διαιρεθέντος, μίλλια πρόεισι Βελγικὰ 2750 $\frac{1}{4}$ εἰς τὴν γῆς διάμετρον.

„Σεσημειώθω, ὅτι ἐξηπατηθῆαι πεφώρεται ὁ Τακυέτιος ἐν τούτοις, „τῇ περιμέτρῳ τῆς γῆς μίλλια Βελγικὰ 8640 ἀποδοῖ. Ἐκ γὰρ τῆς κατὰ „Σινέλλιον καταμετρήσεως, τῆς περιμέτρου μίλλια Βελγικὰ 6840 (ὥς εἶσι μα- „δεῖν παρὰ Οὐαρεν(ῳ) περιεχίσεως, οὗτος ἔλαβε τὰς ἑκατοντάδας ἢ χιλιά- „δας ἀντιμεταστήσας. Ἀλλὰ γὰρ ἐκ τῷ κατὰ Σινέλλιον ἀριθμῷ, ἐξέεισι τοῖς „μαθητιώσι γυμνασίας χάριν καὶ ἑαυτοῖς ἀναλογίσασθαι, ὅση τις ἐξ ἐκεί- „νου δοθέντος ἡ τῆς γῆς ἂν εἴη διάμετρος.

„Εὗρεσις τῆς Περιφερείας ἐκ τῆς Διαμέτρου.

Μιάς τινος τῶν ἐκτεθεισῶν ἀναλογιῶν ὁ ἐλάττω ὄρος πρῶτος τετάχθω, ὁ δὲ μείζων δεύτερος· ἡ δὲ δοθεῖσα διάμετρος εἰς τρίτον ὑποκειθῶ· Καπ- τῆτων δὴ τῶν τριῶν δοθέντων ὁ τέταρτος ἀνάλογον ζητεῖσθω· οὗτος γὰρ δώ- σαι τὴν ζητούμενην περιφέρειαν.

Οἷον εἴπερ ἡ τῆς γῆς διάμετρος μίλλια Βελγικὰ ὠρεῖα περιέχουν ὑπο- τεθείη 2750 $\frac{1}{4}$, ζητηθεῖν δὲ ἡ περίμετρος, οὕτως οἱ ὅροι τετάσσονται.

$$113 : 355 : : 2750 \frac{1}{4}$$

Καὶ ἐπιπολλαπλασιασθέντος μὲν τῷ Β' διὰ τῷ Γ', διαιρεθέντος δὲ τῷ παραγομένῳ διὰ τῷ Α', προελεύεται μίλλια Βελγικὰ 8640, εἰς τὴν γῆς περίμετρον.

Ὡς δὲ βραχύτι λίαν ἡ περίμετρος αὕτη τῆς ἀληθῆς ὑπερπίπτει, εἴρη- ται ἡμῖν ἀνωτέρω· ὑπεροχὴ γὰρ δηλονότι μικρῶ μείζονι, ἢ ὅσον τῆς κατὰ γῆν ἡμιδιαμέτρου δύο εἰς δεκαμυλλιοσημόρια, τατέσιν 9 περίεσσι, ἢ 10 ποσὶ Ρουλανδικῇ, ἐξ ὧν 18000 τὸ ὠρεῖον συνίσταται μίλλιον. Ἐὰν δὲ τῶν κατὰ Λυδέλφον ἀναλογιῶν, ἢ τῇ προτέρᾳ (ἧς οἱ ὅροι ἐκ χαρακτηριστῶν αἰ σύγ-

κείται) χρῆσώμεθα, εὐρεθήσεται ἡ περίμετρος ἀνεπαριστήτως τῆς ἀληθοῦς διαφέρεισα, ὃ μόνον τῆς διαμέτρου τεθείσης μιλίων Βελγικῶν 2750, ὅση ἡ τῆς γῆς, ἀλλὰ καὶ ἦν ἡ διάμετρος αὐτῇ ὑποτεθείη, ἑκατὸν εἶναι μιλιονίων ἐκ μιλίων τῶν αὐτῶν, ὅση τυχὸν ἡ τῷ σφαιρώματος διάμετρος ἐστί. Ταύτης γὰρ δὴ κειμένης προκύψει ἡ περιφέρεια τῆς ἀληθοῦς διανοητοῦ πηλικότητι ἐλάσσονι, ἢ ὅσον ποδὸς Ρύνλανδικῆ ἑκατοσὸν μιλιοσημόριον. Ἐὰν δὲ ἐπὶ τῇ εὐρέσει τῆς περιμέτρου τῆς γῆς, τῇ κατ' Ἀρχιμήδην ἀναλογία χρῆσώμεθα, ἡ τῶν περιφερειῶν διαφορὰ τῆς γε τῆς ἀληθοῦς μείζονος, καὶ τῆς ἐλάσσονος, ὑπὲρ τὰ 5 Βελγικὰ μίλια ἔσται. Διὸ δὴ τῇ κατ' Ἀρχιμήδην ἀναλογίᾳ, ὅτι μὴ ἐπὶ βραχυτάτῃ μεγέθει, ἤκιστα χρῆσέον· χρῆσέον δὲ μᾶλλον τῇ κατὰ Μέτιον ὡς λυσιστελεστέρα, αὐτὴ δὴ καὶ ἐξ ὅρων οὐ πάνυ πολλῶν συγκειμένη, καὶ πλέον ἢ χιλιάκις πρὸς ἀκριβειαν διαφερέση.

„Ἡ τῷ Κύκλῳ καταμέτρησις.

Ἡ ἡμιδιάμετρος τῇ ἡμιπεριφέρειᾳ ἐπιπολλαπλασιαζομένη, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ Κύκλου παρέχεται· ὡς δὴλον ἐκ τοῦ Α' Πόρ. τῆς ε'. τοῦ παρόντος Βιβλ. Προτάσεως.

Οἷον εἰάν τὴν τῆς γῆς ἡμιδιάμετρον μιλίων οὗσαν (τῇ κλάσματος ἀμελημένῃ) Βελγικῶν 1375, διὰ τῆς ἡμιπεριμέτρου τῆς γῆς πολλαπλασιάσωμεν, ταύτῃ διὰ μιλίων Βελγικῶν 4320, προκύψει δὴ μίλια Βελγικὰ τετράγωνα 5,940000, εἰς τὸν τῆς γῆς Κύκλον μέγιστον. Ἡ δὲ διαφορὰ τῇ κυκλικῇ εὐρεθέντος χωρὶς ἀπὸ τῆς ἀληθοῦς λαμβάνεται, εἴπερ ἡ τῆς εὐρεθείσης ἡμιπεριφέρειας ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ἀληθοῦς διαφορὰ, ἐπὶ τὴν δοδεῖταν ἡμιδιάμετρον ἐπιπολλαπλασιάζεται· ἡ γὰρ, εἴπερ ἡ διαφορὰ τῆς εὐρεθείσης ἡμιδιαμέτρου ἀπὸ τῆς ἀληθοῦς, ἐπὶ τὴν δοδεῖταν ἡμιπεριφέρειαν ἐπιπολλαπλασιάζεται.

„Ἡ τῷ Κυκλικῷ τομέως αεβῇ, ἢ αεγῇ,

„Δοθείσης τῆς τῷ Κύκλῳ ἡμιδιαμέτρου αε,

„Καὶ τῇ κατὰ τὸν τομέα τόξῳ εβῇ, εγῇ καταμέτρησις.

Γινέσθω ὡς 113 πρὸς 355, ὥτως (1) ἡ δοδεῖτα ἡμιδιάμετρος πρὸς τὴν τῷ Κύκλῳ ἡμιπεριφέρειαν. Εἴτα ὡς αἱ μοῖραι 360 πρὸς τὰς μοῖρας τοῦ δοθέντος τόξου, ὥτως (2) ἡ ἡμιπεριφέρεια ἢ ἡδη ἐξευρεθείσα, πρὸς τὴν τῇ κατὰ τὸν τομέα τόξῳ ἡμίσειαν εβ, ἢ εγ· Τά τε οὖν διὰ τῆς δοθείσης ἡμιδιαμέτρου πολλαπλασιασθέντος (3), τὸ τῷ ζητούμενῃ τομέως ἐμβαδὸν ἀνακύψει.

(1) ΙΕ. τῷ ε'. (2) Διὰ τὴν αὐτήν. (3) Γ. Πόρ. τῆς Δ. τοῦ παρόντος, καὶ Σχ. τῆς ΜΑ. τῷ α'.

Καὶ ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν τῆ εὐθυγράμμου Τριγώνου αεη, τῷ μείζονι τομῇ αεβη προσεθῇ, ἢ γῶν ἀπὸ τῆ ἐλάσσονος αεγη ἀφαιρεθῇ, παρέσται τὸ τῆ Κύκλου τμήμα ἥτοι τὸ μείζον ἐδηβ, ἢ τὸ ἐλαττον ἐδηγ· τὸ δὲ πρὸς τῇ Τριγώνου ἐμβαδὸν (1) ἐστὶ τὸ ὀρθογώνιον αδ χ δε· ἐστὶ δὲ ἢ ἐδ (2) ἡμίτονον, καὶ αδ συνημίτονον τῇ τόξῳ εβ, εἴτ' οὖν τῇ εγ· Ἐκ τῶν τῆ Τμήματος ἄρα δοθέντων τόξων εβη, ἢ εγη, καὶ τῆς βάσεως εη, ἢ γῶν ἔκτε τῆς ἡμιδιαμέτρου εα, καὶ τῆς βάσεως εη δοθεισῶν, ἢ τέως ἔκτε τῆς ἡμιδιαμέτρου εα, καὶ τῇ τόξῳ εβη, ἢ γῶν εγη, εὐρεθήσονται αἱ ἐδ καὶ δα, ἐξ ὧν δὴ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆ Τριγώνου εαη. Ἀλλὰ γὰρ δὴ τὰ τοιαῦτα παρὰ τῆς Τριγωνομετρίας μάλιστα ζητητέα.

„Η' τῶν Κυλινδρῶν, καὶ τῶν Κῶνων καταμέτρησις.

Ταύτην δὲ ὡς προτίθηναι, ὡς ἐκ τῆς τῆ Κύκλου καταμετρήσεως ἡρτημένην· Ἀπας οὖν Κύλινδρος, καὶ πᾶν Πρίσμα παράγεται ἐκ τῆ ὕψους ἐπὶ τὴν βάσιν πολυπλασιαζομένης, ὁ δέτοι Κῶνος καὶ ἡ Πυραμὶς ἐκ τριτημορίου τῆ ὕψους διὰ τῆς βάσεως πολυπλασιαζομένης· τριτημόρια γὰρ τῶν τε Κυλινδρῶν, καὶ τῶν Πρισμάτων εἰσὶ, τῶν βάσεων καὶ ὕψους ἴσων, κατὰ τὴν Γ' καὶ Ζ' τῆ β'. Βιβλία.

Ἐῶσα τοίνυν βάσις Κυλινδρου, ἢ Κῶνος ποδῶν οὖσα 50 τετραγώνων, τὸ δὲ ὕψος ποδ. 100· καὶ πολλαπλασιασθέντων δὲ 100 διὰ 50, προκύψησι πόδες Κυβικοί 5000 εἰς τὸ τῆ Κυλινδρου σφαιρόν· πολλαπλασιασθέντων διὰ τριτημορίου τῇ ὕψους 100, τῆς τε διὰ 33 $\frac{1}{3}$ τῶν 50, προκύψησι πόδες Κυβικοί 1666 $\frac{2}{3}$ εἰς τὸ σφαιρόν τὸ τῆ Κῶνος.

α. 12.

„Καταμέτρησις Κῶνος κολοβῆς νηξ, δοθεισῶν τῶν παραλλήλων βάσεων ΖΖ καὶ σσ, καὶ τῆ ὕψους υδ.

Εἰς ἐπίλυσιν τῆ προτεθέντος προβλήματος τὸ Λήμμα τὸ ἐφεξῆς προσληπτέον.

Ὅν ἔχει λόγον ἡ τῶν ἐν ταῖς βάσεσιν ἡμιδιαμέτρων διαφορὰ νυ — πδ, πρὸς τὴν ἐλάσσονα ἡμιδιάμετρον πδ, τὸν αὐτὸν καὶ τὸ ὕψος τῆ κολοβῆς Κῶνου νδ, πρὸς τὸ ὕψος τῆ ἐνδεόντος δο. Ἀχθείσης γὰρ ἐπὶ τῇ νυο Τριγώνῳ τῆς δι' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ον, ἐστί (3) υἱ : ιν :: υδ : δο· ἀλλὰ διὰ τὸ παραλλήλογραμμον νδπ, ἐστὶ (4) ιν = πδ, καὶ ἐπομένως υἱ = νυ — πδ· δηλον ἄρα τὸ προτεθέν.

(1) Σχόλ. ΜΔ. τῷ α'. (2) Ο'φ. Γ. τῷ γ'. καὶ Δ. Πόρ. τῆς Γ. τῷ γ'. (3) Β. τῷ ε'.
(4) ΑΔ. τῷ α'.

Καὶ τοίνυν τῶν τριῶν δοθέντων, ῥᾶσα ὁ τέταρτος δο εὐρεθήσεται, ὅπερ ἐστὶ τὸ ὕψος τὸ τῷ ἐνδένοντος πορ· οὗ δὴ ὕψους τριτημόριον, εἴγε ἐπὶ τὴν βάσιν σσ ἐπιπολλαπλασιάσῃ, δώσῃ δὴ πῦρ τὸ ἐνδένον πορ. Εἴτα εἰάν τὸ τριτημόριον τῶν εὐθειῶν $\delta\delta + \delta\upsilon$, ταύτης τῷ ὕψους τριτημόριον τῷ Κῶνι ὀλοχεροῦς, ἐπιπολλαπλασιασθῇ διὰ τῆς βάσεως $\zeta\zeta$, δώσῃ δὴ τὸν Κῶνον ὀλοχερῇ νοξ· ἀφ' οὗ εἰάν ἀφαιρεθῇ τὸ ἐνδένον πορ, ὑπολειφθήσεται ὁ Κῶνος ὁ κολοβὸς υπρξ.

Σημειωτέον ἀλλ' οὖν, ὡς οὐ μόνον ἐπὶ τῆς τῷ ὀρθῷ, ἀλλ' οὐδὲν ἡττον καὶ τῆς τῷ σκαληνῷ κολοβῷ Κῶνι καταμετρήσεως, ἢ ἀπόδειξις συνταλέσει, ὡς δῆλον ἐξ ὧν ἐν τοῖς περὶ τῆς κολοβῆς Πυραμίδος καταμετρήσεως, ἐν τῷ IB' τῶν χοιχείων εἴρηται.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ζ.

„Αἱ τῶν Κύκλων περιφέρειαι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ διάμετροι, ἢ καὶ ἡμιδιάμετροι. κ. 13.

Τῶν γὰρ ὁμοίων πολυγώνων τῶν εἰς τὰς Κύκλους ἐγγράφεσθαι δυναμένων ἐπ' ἀπειρον, αἱ περίμετροι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ διάμετροι (1) αζ, ιγ· Ἀλλὰ μὲν αἱ περίμετροι τέως ἐπ' αὐτὰς δὴ (2) τὰς περιφερείας ἀποτελευτήσιν· ἄρα καὶ αἱ περιφέρειαι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ διάμετροι. Ο. Ε. Δ.

Π ρ ό τ α σ ι ς Η.

„Η' τῷ Πρίσματι ἐπιφάνεια, τῷ τε εἰς τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένην, καὶ τῷ ἐγγεγραμμένῃ, ἴση ἐστὶν ὀρθογωνίῳ, οὗ ὕψος μὲν ἢ τῷ κυλίνδρῳ πλευρᾷ, ἢ δὲ βάσει ἴση τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως τῷ Πρίσματι. κ. 14.

Μέρος Α'. Η' τῷ περιγεγραμμένῃ Πρίσματι ἐπιφάνεια ἀπτεται τῷ κυλίνδρῳ κατὰ τὰς Εὐθείας εα, νζ, κξ, αἵτινες εἰσὶ τῷ κυλίνδρῳ πλευραί· αἱ δὲ (τῷ κυλίνδρῳ ἐξ ὑποθ. ὀρθῷ ὄντος) ἐπὶ τῷ κατὰ τὴν βάσιν ἐπιπέδῳ (3) ὀρθαὶ εἰσὶ, καὶ ἐπομένως καὶ πρὸς τὰς γη, ημ, κξ· εὐθείας (4) πρὸς ὀρθὰς ἐφραγήκατι· εἰσὶ δὲ καὶ ἀλλήλαι ἴσαι, ὥστε μίατις ὅποιαν τῶν τῷ κυλίνδρῳ πλευρῶν ἀπάντων τῶν ὀρθογωνίων γξ, ξμ, μθ, κξ, κοινὸν ὕψωμα ἐστί· καὶ τοίνυν ἢ τῷ περιγεγραμμένῃ Πρίσματι ἐπιφάνεια, ἴση (5) ἐστὶν ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ τε τῆς περιμέτρου τῆς κατὰ τὸ Πρίσμα βάσεως, καὶ τοῦ κατ' αὐτὸ τὸ πρίσμα, ἢ γὰρ τὸν Κύλινδρον ὕψους, εἴτ' οὖν τῆς πλευρᾶς, περιεχομένῳ.

(1) Πόρ. Α. τῆς Α. τῷ ιβ'. (2) Γ. τῷ παρόντι. (3) Ὅρ. Γ. τῷ ιβ'. καὶ Πρώτ. Η. τῷ ια'. (4) Ὅρ. Γ. τῷ ια'. (5) Κατὰ τὴν Α. τῷ ε'.

Ὡς αὐτως δὲ δεικνύται καὶ τὸ Β' Μέρος. Ἡ γὰρ τῷ ἐγγεγραμμένῳ Κυλίνδρῳ πλευρὰ βδ, ἢ κί, ἢ πο, κξ, κοινὸν τυγχάνει παραπλησίως ὕψος τῶν ὀρθογωνίων βδκ, ικπ, αὐτὴν τῷ ἐγγεγραμμένῳ Πρίσματος συνίστησιν ἐπιφάνειαν.

Π ρ ό τ α σ ι ς Θ.

„Ἡ τῆς τεταγμένης πυραμίδος, τῆς περὶ τὸν ὀρθὸν Κῶνον περιγεγραμμένης ἐπιφάνεια, ἴση ἐστὶ Τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τῆς πυραμοειδὸς βάσεως περίμετρος ζβλ, ὕψος δὲ ἡ τῷ Κῶνι πλευρὰ βη.“

„Ἡ δὲ τῆς τεταγμένης πυραμίδος, τῆς εἰς τὸν ὀρθὸν Κῶνον ἐγγεγραμμένης ἐπιφάνεια, ἴση ἐστὶ Τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τῆς πυραμοειδὸς βάσεως περίμετρος, ὕψος δὲ ἡ κάθετος βξ, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τῆς βάσεως ἀγομένη πλευράν.“

κ. 15.

Ἀχθήτωσαν ἐπὶ τὰς ἐπαφάς η, κ, μ, αὐτοὶ εὐθεῖαι βη, βκ, βμ· καὶ ἔσονται αὐτοὶ εὐθεῖαι αὗται τῷ Κῶνι πλευραὶ, καὶ ἐκ τῷ ἀκολούθῳ ἴσαι. Ἐπεὶ δὲ ὁ Ἀΐων βα ὀρθός ἐστι (1) πρὸς τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον ζκδ, ἔσαι δὲ (2) καὶ τὸ ηβα ἐπίπεδον, ἐπὶ τῷ ἐπιπέδῳ ζκδ ὀρθόν· ὥστε ἡ δι (3) κάθετος ἐστὶ πρὸς τὴν αη, ἥτις ἐστὶν ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ζκδ καὶ ηβα· καὶ ἐπομένως ἡ δι (4) ὀρθὴ ἐστὶ καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ηβα, κέντεῦθεν καὶ κάθετος (5) πρὸς τὴν βη καὶ ἡ τῷ Κῶνι ἄρα πλευρὰ ηβ, ὕψος τῷ Τριγώνῳ ζβδ ἴσα ἐστὶ. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ἡ τῷ Κῶνι πλευρὰ, ὕψος ἔσαι καὶ τῶν λοιπῶν δβλ, λβλ, κξ. Ἀρ' οὖν τὸ Τρίγωνον τὸ ὑπὸ τε τῆς περιμέτρου ζβλ, καὶ τῆς τῷ Κῶνι πλευρᾶς συνιστάμενον, ἴσον ἐστὶ (6) τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς πυραμίδος τῆς περὶ τὸν Κῶνον περιγεγραμμένης, ἐξαιρουμένης τῆς βάσεως. Ο. Η. τὸ Α'.

Παραπλησία δὲ καὶ ἡ τῷ Β' Μέρει ἐστὶν ἀπόδειξις.

Κείσθωσαν γὰρ αὐτῇ πλευραὶ τῆς βάσεως, τῆς κατὰ τὴν κανονικὴν ἐγγεγραμμένην πυραμίδα, ταῖς πλευραῖς τῆς περιγεγραμμένης παράλληλοι· καὶ τεμνέτω ἡ πλευρὰ γι τὸ ἐπίπεδον ηβα κατὰ τὸ ο, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ οβ· καὶ ἔσαι ἡ γι πρὸς τὸ ἐπίπεδον αοβ (7) ὀρθή, καὶ ἐπομένως πρὸς γε τὰς εὐθείας αο, βο, τήν τε ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, καὶ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῷ Κῶνι (8) κάθετος· ἀλλ' ἀπασαὶ αὐτοὶ τοιαύτῃ εὐθεῖαι αο, αὐτὴ ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς ὁποιαδήποτε τῶν τῆς πολυγώνου τεταγμένης βάσεως πλευρῶν κάθε-

(1) Εξ ὑποθ. (2) ΙΗ. τῷ α'. (3) ΙΗ. τῷ γ'. (4) Κατὰ τὸν Δ. Ορ. τῷ ια'. (5) Γ. Ορισμ. τῷ ια'. (6) Δῆλον ἐκ τῆς Δ. τῷ ε'. (7) Η. τῷ ια'. (8) Γ. Ορ. τῷ ια'.

τοι, ἴσαι (1) εἰσὶ, καὶ ἐπομένως ἐν ᾧ πασι τοῖς Τρίγωνοις βαο, διὰ τε τὸν ἄξονα βα κοινόν τε ὄντα, καὶ πρὸς τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον ὁρθῶς ἐφασκηκότα, καὶ πᾶσαι αἱ Πλευραὶ αὐτῶν ἀλλήλαις ἴσαι εἰσὶ· (2) ὅσονταί δὲ καὶ αἱ εὐθεῖαι πᾶσαι βὴ ἀλλήλαις ἴσαι· Καὶ πάντα τοῖνον τὰ Τρίγωνα, ἐξ ὧν ἡ τῆς ἐγγεγραμμένης Πυραμίδος συνίσταται ἐπιφάνεια, τὸ αὐτὸ ἔχει ὕψος, τὴν καθετόν ἀμειλιτοὶ βο, τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς β ἐκᾶς Τρίγωνον ἐπὶ τὴν βάσιν· καὶ ἅμα ληφθέντα (3) (ταυτὸν δ' εἰπεῖν ἡ τῆς ἐν τῷ ὁρθῷ Κῶνῳ ἐγγεγραμμένης Πυραμίδος ἐπιφάνεια) ἐξισῶται Τρίγωνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ τῆς κατὰ τὴν ἐγγεγραμμένην Πυραμίδα βάσεως περίμετρος, ὕψος δὲ ἡ καθετός βο. Ο. Η. τὸ Β'.

Αἴτιον. Ἐπειδὴ τὰ Τρίγωνα, ἐξ ὧν ἡ τῆς ἐγγεγραμμένης Πυραμίδος ἐπιφάνεια σύγκειται, ἀντὶ βάσεων ἔχει, τὰς τῷ τεταγμένῳ Πολυγώνῳ, ὃ τῇ τῷ Κῶνῳ βάσει ἐγγράφεται, πλευράς, αἱ ἴσαι εἰσὶν, ἀντὶ δὲ σκελῶν τὰς αὐτῇ τῷ ὁρθῷ Κῶνῳ ἴσας ἀλλήλαις πλευράς, ἔσαι δὲ τὰ τοιαῦτα Τρίγωνα ἀλλήλοισι ἰσοπλευρά (4) καὶ ἰσογώνια, καὶ (ἀτε δὲ ἀλλήλοισι (5) προσεφαρμοζοντα) ἰσοῦψῃ. Ταύτητοι ὡς πρότερον, τὸ τρίγωνον τὸ ὑπὸ τῷ κοινῷ ὕψει, καὶ ταῖς ἀπάντων τῶν Τρίγωνων βάσεσι τὴν βάσιν ἴσην ἔχον, ἐξισημένην δηλονότι τῇ τῷ ἐγγεγραμμένῳ Πολυγώνῳ περιμέτρῳ, τοῖς τοιοῖςδε Τρίγωνοις, ταυτὸν δὲ εἰπεῖν, τῇ τῆς ἐγγεγραμμένης Πυραμίδος ἐπιφανείᾳ (6) ἴσον εἶναι.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ι.

„Ἡ τῷ τεταγμένῳ Πρίσματι, τῷ περὶ τὸν ὁρθὸν Κύλινδρον περιγεγεγραμμένη ἐπιφάνεια, ἀπολήγει (7) τέως εἰς αὐτὴν τῷ Κυλίνδρῳ τὴν ἐπιφάνειαν· καὶ ἡ τῆς τεταγμένης Πυραμίδος, τῆς περὶ τὸν ὁρθὸν Κῶνον περιγεγεγραμμένης ἐπιφάνεια, εἰς αὐτὴν τέως τὴν τῷ Κῶνῳ ἐπιφάνειαν ἀποτελεῖται.“

Μέρος Α'. Αἱ τῶν τεταγμένων Πρισμάτων τῶν περὶ τὸν Κύλινδρον περιγεγεγραμμένων ἀνευ περιγραφομένων, καὶ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραφομένων ἐπιφάνειαι, διαφορὰν τέως ἔξουσιν πρὸς ἀλλήλας, οἷα σὺν δοθείτης ἐλάσσονα, ἢ πᾶσι δὴλον ἐκ τῆς Η', καὶ τῆς Γ' τῷ παρόντος. Πολλὰ οὖν μάλλον ἢ τῷ περιγεγεγραμμένῳ Πρίσματι ἐπιφάνεια, τῆς αὐτῇ τῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφανείας, περὶ ὃν περιγεγράφεται, τῆς τῷ τε περιγεγεγραμμένῳ καὶ τῷ ἐγγεγραμμένῳ μεσιτεύσεως, διαφορὰ διοίσει, οἷα σὺν δοθείτης ἐλάσσονι· καὶ ἀποτελεῖται ἄρα (8) ἡ τῷ Πρίσματι, εἰς τὴν τῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνειαν, αἰετὶ μείον καὶ μείον ταύτην ὑπερέχουσα.

κ. 14.

(1) ΙΔ. τῷ γ'. (2) Δ. τῷ α'. (3) ἄλλον ἐκ τῆς Α. τῷ ε'. (4) Η. τῷ α'. (5) Η. ἄλλο τῷ α'. (6) ἄλλον ἐκ τῆς Α. τῷ ε'. (7) Οφ. ε. τῷ β'. (8) Οφ. ε. τῷ β'.

κ. 15.

Μέρος Β'. Ὡσαύτως δειχθήσεται ἐκ τῆς Θ' ἔκ τῆς Γ' τῷ παρόντος.

Συσημειώσω, ὡς ἐπὶ τῶν σχημάτων αἱ ἡμίσεις τῶν τε Κυλίνδρων καὶ τῶν Κῶνων διχοτομημένων παρίστανται, ἐφ' ᾧ μὴ τὴν τῶν γραμμῶν πληθύν σύγχυσιν ἐμποιεῖν. Νοητέον γὰρ τῆς Κυλίνδρου ἔκ τῆς Κῶνης ὁλοχρεῖς, ὧν τῆς μὲν τὰ Πρίσματα, τῆς δὲ αἱ Πυραμίδες περιγραφόμεναι περιέχουσιν, οὕτω γὰρ ἔκ μᾶλλον σαφεῖς, τὰς ἐπιπέδους ἐπιφανείας περιγραφόμενας, μείζονας εἶναι, ἐκ τῆ Β' τῶν Ἀξιωμάτων.

Σ χ ό λ ι ο ν Α'.

Τῶν ἐφεξῆς τεττάρων προτάσεων, καί τινων τῶν ἐξ ἐκείνων ἐπαγομένων Πορίσμάτων, διεξοδικωτέραν τὴν δεῖξιν ἐπιδεχομένων, καὶ καθ' ὃν δὴ τρόπον διτάχθησαν ἔκ δυσχερεστέραν, ἢ ἀχαρτί ποιήσιν τοῖς νεανίσκοις ἔδοξα, εἰ τάς γε προτάσεις ἐκείνας, ἔκ πάντα τὰ ἐξ ἐκείνων ἐπιφερόμενα πορίσματα, μεθ' ὧν τι κατὰ φύσιν τε ἐχρήσῃ, ἔκ ταύτη δὲ ἔκ προχειροτέρῃ, ἐκ τῆς Ι' ταύτης Προτάσεως ἐπαγάγοιμι.

Πορίσματα ἐκ τοῦ Α' Μέρους

τῆς Ι' Προτ. ἐπαγόμενα.

κ. 16.

Α'. Ἐντεῦθεν ἔπεται, τὴν τῷ ὀρθῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνειαν γδ, ἴσην εἶναι ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ γβ τῆς τῷ Κυλίνδρῳ πλευρᾶς, ἔκ βγδ τῆς περιφερείας τῆς βάσεως· αἱ γὰρ ἐπιφάνειαι τῶν πρισμάτων, τῶν περὶ τὸν Κυλίνδρον πέρατος ἀνευ περιγραφομένων, ἴσαι αἰεὶ εἰσὶν (1) ὀρθογωνίοις, τοῖς ὑπὸ τῆς τῷ Κυλίνδρῳ πλευρᾶς, ἔκ τῶν κατὰ τὰς πρισματικὰς βάσεις περιμέτρων περιχομένοις· Ἀλλ' αἱ τοιαῦται πρισματικαὶ ἐπιφάνειαι, εἰς τὴν κυλινδρικήν (2) τέως ἐπιφάνειαν, αἵτε τῶν πρισματικῶν βάσεων περίμετροι εἰς τὴν περιφέρειαν (3) τῆς τῷ Κυλίνδρῳ βάσεως ἀπολήγασιν· ἄρα ἡ τῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνεια (4) ἴση εἰς τὸν ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ τε τῆς τῷ Κυλίνδρῳ πλευρᾶς, ἔκ τῇ τῆς βάσεως περιφερείᾳ περιχομένη.

Ἀλλως. Προσημολώσω τῇ τῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφανείᾳ χάρτης ὀρθογωνίῳ τὸ σχῆμα, εἴ ὅψος μὲν τὸ τῷ Κυλίνδρῳ, βάσις δὲ ἴση τῇ τῆς βάσεως τῷ Κυλίνδρῳ περιφερείᾳ, ἔκ ὅγε χάρτης ἔκ ἡ τῷ κυλίνδρῳ ἐπιφάνεια ἀλλήλοις προ-

(1) Η. τῷ παρ. (2) Κατὰ τὴν παρ. (3) Γ. τῷ παρ. (4) Α. τῷ παρ.

σφαρμέουσι, διὸ δὴ (1) καὶ ἰσωθήσονται. Ἐς δὲ τὸ Α' πόρ. τῆς ἐφεξῆς Προτάσεως.

Β'. Ἐντεῦθεν τὰ προσήκοντα τοῖς ὀρθογωνίοις, ἢ ταῖς τῶν ὀρθῶν Κυλίνδρων ἐπιφανείαις προσήκει, εἴπερ εἰς ὕψι μὲν τοῖς ὀρθογωνίοις ὑποτεθῶσιν αἱ τῶν Κυλίνδρων πλευραὶ, ἀντὶ δὲ βάσεων αἱ τῶν κυλινδρικῶν βάσεων περιφέρεται, καίποτε δὲ ἢ αἱ διάμετροι, καὶ τῷ κατὰ τὰς περιφερείας τὸν αὐτὸν λόγον (2) σώζουσαι. Ταύτητοι

1. Αἱ κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι αἱ ἰσοῦσαι (3), εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ τῶν βάσεων διάμετροι. Ἐς δὲ τὸ β' Πόρ. τῆς ἐφεξῆς Προτάσεως.

2. Αἱ ἴσας ἔχουσαι τὰς βάσεις, εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας (4), ὡς αἱ τῶν Κυλίνδρων πλευραὶ. Ἐς δὲ τὸ γ' Πόρ. τῆς ἐφεξῆς Προτάσεως.

3. Αἱ ὁμοιοὶ οὔσαι, ἔσονται (5) ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν διαμέτρων τῶν ἐν ταῖς βάσεσιν. Ἐς δὲ τὸ δ' Πόρ. τῆς ἐφεξῆς Προτάσεως.

4. Οἵποια δὲ, εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας (6) ἐν λόγῳ συνθέντῳ ἐκ τῶν λόγων τῶν τε πλευρῶν, καὶ τῶν διαμέτρων. Ἐς δὲ τὸ ε' Πόρ. τῆς ΙΑ' Προτάσεως ἐφεξῆς.

5. Καὶ ἴσαι τυγχάνουσιν, ἀντιπεπόνθασιν (7) τὰς πλευρὰς καὶ τὰς διαμέτρους τῶν βάσεων· καὶ εἴπερ ἀντιπεπόνθασιν, ἴσαι εἰσὶν. Ἐς δὲ τὸ ε' τῆς ἐφεξῆς ΙΑ'.

6. Ἐὰν δὲ ἡ πλευρὰ ἐπὶ τὴν τῆς βάσεως περιφέρειαν πολλαπλασιασθῇ, προκύψει δὴ (8) τὸ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας χωρίον. Ἐς δὲ τὸ ζ' Πόρ. τῆς προτ. τῆς ἐφεξῆς.

Γ'. Ἡ τῇ ὀρθῇ Κυλίνδρου ἐπιφάνεια γδ, εἰς πρὸς τὴν βάσιν βν, ὡς ἡ τῇ Κυλίνδρῳ πλευρὰ βγ πρὸς βο, ὅ τὸ τεταρτημόριον εἰς τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως· ἡ γὰρ τῇ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνεια (9) ἴση ἐστὶν ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς βγ ἢ τῆς περιφερείας τῆς βάσεως περιεχομένῳ. Ἀλλ' ἡ τῇ Κυλίνδρῳ βάσις (10) ἴση ἐστὶν ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ βο, τεταρτημορίῳ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως, ἢ τῆς κατ' αὐτὴν περιφερείας· ἡ ἄρα τῇ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνεια (11) ὡς βγ πρὸς βο. Ἐς δὲ ἡ ιβ' Πρότ. τῶν κατωτέρω.

Δ'. Ἐνθεντοι ἡ τῇ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνεια ηκ, τῇ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένη, οὐπερ ἀμέλει τὸ ὕψος νκ, ἴσον εἰς τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως

α. 17.

(1) Α. Ε. Ζ. τῷ α'. (2) Ζ. τῷ παρ. (3) Α. τῷ ε'. καὶ Ζ. τῷ παρ. (4) Α. Πόρ. τῆς Α. τῷ ε'. (5) Κ. τῷ ε'. ἢ Ζ. τῷ παρ. (6) ΚΓ. τῷ ε'. (7) ΙΔ. τῷ ε'. (8) Σχόλ. τῆς ΑΔ. τῷ α'. (9) Διὰ τὸ Α. Πόρ. ἀνωτ. (10) Διὰ τὸ Α. Πόρ. τῆς Ε. τῷ παρ. (11) Α. τῷ ε'.

νη, τετραπλασίων ἐς τῆς βάσεως, τυχέσι διπλασίων ἀμφοῖν τῶν βάσεων. Διὰ γὰρ τὰς $νη = νη$, ἔσαι ἡ Κυλινδρική ἐπιφάνεια πρὸς τὴν βάσιν, ὡς $νη$ πρὸς $\frac{1}{4} νη$, τυχέσιν ὡς 4 πρὸς 1. ὅπέρ ἐστι τετραπλὴ τῆς βάσεως· καὶ ἐπομένως πρὸς ἀμφοτέρας τὰς βάσεις ὡς 4 πρὸς 2· ὅπέρ ἐστι διπλασίων τῶν βάσεων. Ἡ δὲ ἐπιφάνεια τῆ Κυλίνδρου εκ, τῇ περὶ τὸ ἡμισφαίριον περιγεγραμμένη, διπλασίων ἐς τῆς βάσεως, ἥτοι ἀμφοτέραις ταῖς βάσεσιν ἰση· Ἐὰν δὲ ἡ τῇ Κυλίνδρου πλευρὰ τεταρτημόριον ἢ τῆς κατὰ τὴν βάσιν διαμέτρου, ἡ τῇ Κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἰση ἔσαι τῇ βάσει. Ἐς δὲ τὸ Πόρ. τὸ ἐκ τῆς IB' Προτ. ἐπιφερόμενον.

κ. 18.

Ε'. Ἐς ω θη μέση ἀνάλογος, μεταξὺ τῆς αβ ἡμδιαμέτρου τῆς βάσεως, εἰ τῆς 2 βγ, ἥτοι τῆς τῇ Κυλίνδρου πλευρᾶς δις ληφθείσης, καὶ ἔσαι δὴ ὁ Κύκλος ὁ ἀπὸ ἡμδιαμέτρου τῆς ηθ, ἴσος τῇ τῇ Κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ γδ· διὰ γὰρ τὰς αβ, ηθ, 2 βγ ---, ἔσαι ἡ βήσις βν πρὸς τὸν κύκλον ηπθ, ὡς (1) αβ πρὸς 2 βγ, τυχέσιν ὡς $\frac{1}{2}$ αβ πρὸς βγ· ὅπέρ ἐστιν, ὡς (2) ἡ βήσις βν πρὸς τὴν κυλινδρικήν ἐπιφάνειαν γδ· ἄρ' οὖν (3) ὁ Κύκλος ηπθ τῇ τῇ Κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστίν· Αὕτη δὲ ἡ ἐφεξῆς ἐστὶ Πρότασις.

Πορίσματα ἐκ τῆ Β' Μέρους

τῆς Προτάσ. ἐπιφερόμενα.

κ. 19.

ζ'. Ἡ τῇ ορθῇ Κώνῃ ἐπιφάνεια γβδ, ἐστὶν ἰση Τριγώνῳ, τῷ ὑπὸ βη τῆς τῇ Κώνῃ πλευρᾶς, ὡς ὕψους, εἰ ὑπὸ τῆς κατὰ τὴν βήσιν τῇ Κώνῃ περιφέρειας γη, ὡς βάσεως περιεχομένη· τῶν γὰρ Πυραμίδων τῶν περὶ τὸν κῶνον πέραςτος ἀνευ περιγεγραφομένων αἱ ἐπιφάνειαι, αἱ εἰς ἰσὰς εἰσὶ (4) Τριγώναις, ὧν ἡ μὲν βη τῇ Κώνῃ πλευρὰ τὸ ὕψος, αἱ δὲ τῶν κατὰ τὰς Πυραμίδας βάσεων περίμετροι εζ, αἱ βάσεις εἰσὶν. Ἀλλ' αἱ μὲν τοιαῦτα τῶν Πυραμίδων ἐπιφάνειαι (5), ἐπὶ τὴν κωνικήν ἐπιφάνειαν, αἱ δὲ τῶν κατὰ τὰς Πυραμίδας βάσεων περίμετροι, ἐπὶ τὴν κατὰ τὴν βήσιν τῇ Κώνῃ (6) περιφέρειαν τέως ἀπολήγουσιν· ἡ ἄρα τῇ Κώνῃ ἐπιφάνεια (7) ἰση ἐστὶ Τριγώνῳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ τῇ κώνῃ πλευρὰ, βάσις δὲ ἡ κατὰ τὴν αὐτῇ βάσιν περιφέρεια.

Ἀλλως. Τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ προσηρμόσθω χάρτης, κυκλόθεν πάντῃ ἐκείνην περιαμπέχων, ὃ δέτοι χάρτης κατ' ἐπίπεδον ἐκτανθεῖς, εἶδος εἴξει το-

(1) Β. Πόρ. τῆς IB. τῇ β'. (2) Διὰ τὸ Γ. Πόρ. τῶν ἀνω. (3) Θ. τῇ ε'. (4) Θ. τῇ παρ. (5) Κατὰ ταύτ. (6) Κατὰ τὴν Γ. τῇ παρ. (7) Κατὰ τὴν Α. τῇ παρ.

μέωι Κύκλῳ, οὗ ἡ μὲν ἄκτις τῇ τῷ Κώνῃ πλευρᾷ, τὸ δὲ τόξον τῇ περιφερείᾳ τῆς τῷ Κώνῃ βάσεως (1) ἴση ἔσται. Ἀλλ' ὁ τομεὺς οὗτος (2) ἴσος ἐστὶ Τριγώνῳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ τῷ τομέως ἄκτις, βάσις δὲ σύζευξ, τῷ τῷ τομέως τόξῳ ἴση τυγχάνουσα, ἥ ὁ ταυτόν ἐστιν, οὗ ὕψος μὲν ἡ τῇ Κώνῃ πλευρᾷ, βάσις δὲ ἡ κατὰ τὴν βάσιν τῷ Κώνῃ περιφέρεια· ἡ ἄρα τῷ Κώνῃ ἐπιφάνεια, τῷ αὐτῷ Τριγώνῳ (3) ἴση ἔσται. Ἐστὶ δὲ τὸ Α' Πόρ. τῆς ΙΓ' Πρωτ.

Ζ'. Ἐνθεντοι καὶ τὰ τοῖς τριγώνοις προσήκοντα, ταῖς τῶν ὀρθῶν Κώνων ἐπιφανείαις προσήκει, εἶγε εἰς ὕψη μὲν τῶν τριγώνων, ὑποθεθεῖεν αἱ τῶν Κώνων πλευраὶ, εἰς δὲ βάσεις, αἱ τῶν κωνικῶν βάσεων περιφέρειαι, εἴτ' οὖν (4) αἱ ἡμιδιάμετροι· ὥς

1. Τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν αἱ ἴσαι τὰς πλευρὰς ἔχουσιν (5) ὥς αἱ τῶν βάσεων διάμετροι.

2. Καὶ εἰάν αἱ τῶν Κώνων βάσεις ἴσαι ᾖσιν, ἔσονται (6) αἱ ἐπιφάνειαι ὥς αἱ πλευραί.

3. Καὶ αἱ ὅμοιαι ἐπιφάνειαι, ἐν διπλασίονι (7) λόγῳ εἰσὶ τῶν διαμέτρων τῶν ἐν ταῖς βάσεσι.

4. Καὶ ὅποιαιδήποτε ληφθεῖσιν (8), εἰσὶν ἐν λόγῳ συνδέτω ἕκτε τῷ λόγῳ τῶν πλευρῶν, καὶ τῷ ἐκ τῶν διαμέτρων τῶν ἐν ταῖς βάσεσι.

5. Καὶ αἱ ἴσαι οὖσαι, τὰς τε πλευρὰς (9) καὶ τὰς τῶν διαμέτρων βάσεις ἀντιπεπόνθασιν· Αἱ δὲ ἕτως ἀντιπεπονθεῖσαι ἴσαι εἰσὶ.

6. Τελευταῖον δὲ ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια λαμβάνεται (10), ἐπιπολλὰ πλάσιαζομένης τῆς τῷ Κώνῃ πλευρᾷ διὰ τῆς ἡμιπεριφερείας τῆς βίσεως. Τὰ δὲ εἰσὶ τὰ Πρρισματῖα Β', Γ', Δ', Ε', ς', καὶ Ζ' τῆς ΙΓ' Πρωτάσεως

Η'. Η' τῷ ὀρθῷ Κώνῃ ἐπιφάνεια γβδ ἐστὶ πρὸς τὴν βάσιν, ὥς ἡ τοῦ Κώνῃ πλευρᾷ βγ, πρὸς τὴν τῆς βάσεως διάμετρον αγ· ἔστι μὲν γὰρ ἡ τῷ Κώνῃ ἐπιφάνεια (11) ἴση ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ τῆς πλευρᾷ βγ καὶ τῆς ἡμιπεριφερείας τῆς βάσεως περιεχομένῳ. Ἀλλὰ καὶ ἡ τῷ Κώνῃ βάσις (12) ἴση ἐστὶν ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου αγ, καὶ τῆς αὐτῆς ἡμιπεριφερείας· ἄρα (13) ἡ τῷ Κώνῃ ἐπιφάνεια ἔσται πρὸς τὴν βάσιν τῷ αὐτῷ, ὥς βγ πρὸς αγ. Ἐστὶ δὲ ἡ ΙΔ' τῶν ἐπομένων.

(1) Ἠλὼν ἐκ τῷ ὀρ. τῷ ὀρθῷ Κώνῃ, καὶ τῷ τομέως τῷ Κύκλῳ. (2) Γ. Πόρ. τῆς Δ. τῷ παρ. (3) Α' Ε. Ζ. καὶ Α. τῷ α'. Εἰβλ. (4) Ζ. τῷ παρ. (5) Α. τῷ ς'. (6) Α. Πόρ. τῆς Δ. τῷ ς'. (7) ΙΘ. τῷ ς'. (8) Β. Πόρ. τῆς ΚΓ. τῷ ς'. (9) ΙΒ. τῷ ς'. (10) Σχόλ. τῆς ΜΑ. τῷ α'. (11) Κατὰ τὸ ς. Πόρ. τῶν ἀνωτ. καὶ τὸ Πόρ. τῆς ΜΒ. τῷ α'. (12) Α. ΙΙδ. σημ. τῆς Β. τῷ παρ. (13) Α. τῷ ς'.

- κ. 20. Θ'. Κἀντεῦθεν 1. ἡ τῷ ὀρθῷ Κώνη ἐπιφάνεια, τῷ ὑπὸ ἰσοπλευροῦ Τριγώνου περὶ τὴν κάθετον ακ περιαγομένη, τὴν γένεσιν ἔχοντος, τῆς βάσεως φτ διπλασίῳν ἐστίν· ἡ γὰρ βκ τῷ Κώνη πλευρὰ, τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς βάσεως αβ διπλασίῳν ἐστίν.
- κ. 17. 2. Η' τῷ Κώνη ἐπιφάνεια, τῷ ὑπὸ ὀρθογωνίου ἰσοσκελῆς Τριγώνου εβδ, περὶ τὴν κάθετον αβ περιαγομένη, τὴν γένεσιν ἔχοντος, ἔστι πρὸς τὴν βάσιν, ὡς ἡ ἐν τῷ τετραγώνῳ διαγώνιος βδ, πρὸς τὴν πλευρὰν δα.
- κ. 17. 3. Η' τῷ ὀρθῷ κυλίνδρῳ ἐπιφάνεια ηκ, ἔστι πρὸς τὴν τῷ ὀρθῷ Κώνου ηβν, τῇ ἴσῃ τήν τε βάσιν κὲ τὸ ὕψος ἔχοντος, ὡς ἡ τῷ κυλίνδρῳ πλευρὰ νκ πρὸς $\frac{1}{2}$ βν, τὴν ἡμίσειαν τῷ Κώνη πλευρὰν. Ἐστὶ μὲν γὰρ ἡ ἐπιφάνεια ηβν πρὸς τὴν βάσιν μι (1), ὡς βν πρὸς νφ, τατέστι πρὸς $\frac{1}{2}$ νη, ἥτοι ὡς $\frac{1}{2}$ βν πρὸς $\frac{1}{4}$ νη. Ἀλλ' ἡ βάσις μι ἐστὶ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν ηκ, ὡς (2) $\frac{1}{4}$ νη πρὸς νκ· ἡ ἄρα (3) ἐπιφάνεια ηβν ἐστὶ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν ηκ, ὡς $\frac{1}{2}$ βν πρὸς νκ· καὶ ἀνάπαλιν (4) ἡ τῷ κυλίνδρῳ ἐπιφάνεια ηκ, πρὸς τὴν τῇ Κώνη ηβν, ὡς ἡ τῷ κυλίνδρῳ πλευρὰ νκ, πρὸς τὴν ἡμίσειαν πλευρὰν τῷ Κώνη $\frac{1}{2}$ βν. Ταῦτα δὲ εἰσὶ πορίσμ. Α', Β', καὶ Γ' τῆς ΙΔ' Προτάσεως τῶν ἐφεξῆς.
- κ. 21. Ι'. Ἐΐωσαν αγ, ολ, γβ $\equiv$, καὶ ἔσαι ὁ ἀπὸ τῆς ολ ὡς ἀπὸ ἡμιδιαμέτρου Κύκλος, ἴσος τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ γβδ. Η' γὰρ τῷ Κώνη βάσις γη (5), ἐστὶ πρὸς τὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν γβδ, ὡς αγ πρὸς γβ, τατέστιν (6) ὡς ἡ αὐτὴ βάσις τῷ Κώνη πρὸς τὸν κύκλον οπλ· καὶ τοίνυν (7) ὁ Κύκλος οπλ τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ ἴσος ἔσαι. Ἐστὶ δὲ ἡ τῶν ἐφεξῆς ΙΕ'.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Τύτοις προσίθεμεν προτάσεις δύο ἐκ τῶν τῷ Γαλλιλαίῳ ληφθείσας.

„Α'. Οἱ κύλινδροι, ὧν αἱ ἐπιφάνειαι ἴσαι εἰσὶν, εἰσὶ πρὸς ἀλλήλους ὡς „αἱ διαμέτροι τῶν βάσεων ἐπ' εὐθείας, ἢ γυν ὡς τὰ ὕψη τῶν κυλίνδρων „ἀντιπεπονθότως.

Οἱ γὰρ κύλινδροι (8) εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις κὲ τὰ ὕψη, τατέστιν (9) ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν ἐν ταῖς βάσεσσι διαμέτρων, κὲ ἐν ἀπλῷ λόγῳ τῶν ὕψοτήτων. Ἀλλὰ γὰρ αἱ κυλινδρικοὶ ἐπιφάνειαι εἰσὶν (10) ὡς αἱ διαμέτροι τῶν

(1) Η. Πόρ. τῶν ἀνωτ. (2) Γ. Πόρ. τῶν ἀνωτ. (3) ΚΒ. τῷ ε'. (4) Σχόλ. τῆς Ις. τῷ ε'. (5) Η. Πόρ. τῶν ἀνωτ. (6) Β. Πόρ. τῆς Β. τῷ ιβ'. (7) Θ. τῷ ε'. (8) Δ'. κ. ἐν τῷ Σχολ. τῆς ΙΒ. τῷ ιβ'. (9) Β. τῷ ιβ'. (10) Β. Πόρ. ἀρ. Δ' τῆς Ι. τῷ παρ.

βάσεων, ἡ τὰ ὕψη τῶν κυλίνδρων· οἱ ἄρα κύλινδροι εἰσὶν ὡς αἱ τῶν βάσεων διαμέτροι, ἡ αἱ ἐπιφάνειαι (ἐὰν γὰρ ὁ τῶν διαμέτρων λόγος συντεθῇ τῷ λόγῳ τῷ ἐκ τῶν διαμέτρων ἡ τῶν ὕψων συνθετῷ, ἀνακύψει δὴ ὁ λόγος ὁ σύθετος, ἔκτε τῇ διπλασίονος λόγῳ τῶν διαμέτρων, καὶ ἐκ τῇ ἀπλοῦ τῶν ὕψων). Καίπερ ἴσαι τοίνυν αἱ ἐπιφάνειαι ὑποτιθέμεναι εἰσὶν, ἔσονται οἱ κύλινδροι (1) ὡς αἱ τῶν βάσεων διαμέτροι ἐπ' εὐθείας, ἢ γυν (2) ὡς τὰ ὕψη ἀντιπεπονηδότης.

Ἄλλως. Ἐξω ὕψη τὰ A, a , τῶν δὲ βάσεων διάμετροι B, b , καὶ ἔσονται αἱ ἐπιφάνειαι ὡς (3) AB ἢ ab , αἱ δὲ βάσεις (4) ὡς BB καὶ bb , οἱ δέτοι κύλινδροι (5) ὡς ABB ἢ abb · ἀλλ' ἐξ ὑποθέσε. αἱ κυλινδρικοὶ ἐπιφάνειαι ἴσαι εἰσὶ, τετέστιν $AB = ab$, ἄρα (6) $A : a :: b : B$ · καὶ πολλαπλασιασμῷ τῶν ἡγνημένων διὰ BB , ἡ τῶν ἐπομένων διὰ bb , ἔσαι (7) $ABB : abb :: BBb : Bbb :: (8) B : b$, ἡ (9) $a : A$.

ἢ B . Τῶν ἴσων κυλίνδρων ζ , αἱ ἐπιφάνειαι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ἢ ἐν ὑποδιπλασίονι λόγῳ τῶν ὑψοτήτων· τὸτο δὲ ἐστίν, ἐὰν μεταξὺ τῶν ὑψοτήτων $\nu\delta$, $\beta\rho$, μέση τις ἀνάλογος τεθῇ ἢ π , ἔσαι (10) $\nu\delta$ πρὸς π (ἢ γυν π πρὸς $\beta\rho$), ὡς ἡ τῷ κυλίνδρῳ ἐπιφάνεια $\zeta\delta$, πρὸς τὴν τῷ κυλίνδρῳ ἐπιφάνειαν $\alpha\rho$.

κ. 22.

Διὰ γὰρ τὰς $\beta\rho$, π , $\nu\delta$ ἔσαι $\pi^T : \nu\delta^T$ (11) :: $\beta\rho : \nu\delta$ · ὡς (12) $\nu\tau : \mu\phi :: \zeta\nu^T : \alpha\beta^T$ · καὶ (13) $\pi : \nu\delta :: \zeta\nu : \alpha\beta$, τετέστιν (14) ὡς ἐπιφάν. $\zeta\delta$ πρὸς ἐπιφάνειαν $\alpha\sigma$ · Ἄλλὰ $\nu\delta$ (ἢτοι $\beta\sigma$) ἐστὶ πρὸς $\beta\rho$ (15), ὡς ἡ ἐπιφάνεια $\alpha\sigma$, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν $\alpha\rho$ · ἄρα (16) δι' ἴσου $\pi : \beta\rho$ (ἢτοι $\nu\delta : \pi$) :: ἐπιφάν. $\zeta\delta : \epsilon\pi\iota\phi\alpha\acute{\nu}$. $\alpha\rho$.

Ἄλλως. Ἐὰν μεταξὺ τῶν ὑψοτήτων A, a τεθῇ μ μέση ἀνάλογον, ὥσι δὲ B, b τῶν βάσεων διάμετροι ὡς ἀνωτέρω, ἔσονται αἱ βάσεις ὡς BB , bb , αἱ δὲ ἐπιφάνειαι ὡς AB , ab , οἱ δὲ κύλινδροι ὡς ABB , abb · καὶ ἔγει οἱ κύλινδροι ἴσοι εἰσὶ, τετέστιν $ABB = abb$, ἔσαι $AB : ab :: b : B$ · καὶ ὅτι (17) $\beta\rho : BB :: A : a$, ἔσαι (18) $\beta : B :: A : M$, καὶ $AB : ab :: A : M$. Ο. Ε. Δ.

(1) Γ. Ὅρ. τῷ ε'. ἢ Ὅρ. Ε. τῷ ε'. (2) Ἀρ. 5. τῷ β'. Πορ. τῆς Γ. Προτ. τῷ παρ. (3) Ἀρ. 4. Πορ. Β. τῆς Γ. τῷ παρ. (4) Β. τῷ ιβ'. (5) Ἀρ. Α. ἐν τῷ Σχολ. μετὰ τὴν ΓΕ. τῷ ιβ'. (6) Γς. τῷ ε'. (7) Α. τῷ ε'. ἢ γυν Αἰμ. Α. τῷ β'. μέρος τῷ ε'. Βιβλ. (8) ΓΕ. τῷ ε'. (9) Ὡς ἀνωτ. (10) Ὅρ. Γ. τῷ ε'. (11) Σχολ. τῆς Κ. τῷ ε'. (12) ΓΕ. τῷ ιβ'. (13) ΑΒ. τῷ ε'. (14) Ἀρ. Γ. τῷ β'. Πορ. τῆς Γ. τῷ παρ. (15) Ἀρ. Β. τῷ β'. Πορίσμ. τῆς Γ. τῷ παρ. (16) ΚΒ. τῷ ε'. (17) ΓΕ. τῷ ιβ'. (18) Ὅρ. Γ. τῷ ε'. ἢ Σχολ. τῆς Κ. τῷ ε'.

Π ό ρ ι σ μ α.

Κάντευσεν τὸ ὑπέρβραχυ τῶν μορίων, ἐξ ὧν τὰ φυσικὰ τῶν σωμάτων σύγκειται, ὁπωσὺν τῇ διανοίᾳ ἐφικέσθαι ἐσίν· Ἐξω ζδ κύλινδρος ἀργυρεῖ, περιεχρυσωμένος κατ' ἄκραν τὴν ἐπιφάνειαν, χρυσοῖς ὑμέσι περιεκαλυμμένην· ὃν δὴπε κύλινδρον οἱ χρυσοχοῶντες εἰς χρυσὸν μίτον, ἀμύθητον ὅσου μήκους ἐλαύνουσιν. Ἐς μὲν γὰρ τὸ ὕψος τῆ κυλίνδρου ζδ, πρὸς τὸ μήκος τῆ μίτου, ὡς 1 πρὸς 115600, ἐν οἷς ἡ μέση ἀνάλογον, εἰτ' οὖν 115600 ἐστὶ 340· καὶ οὕτως ὁ χρυσοῖς ὑμῆν, ὅφ' ἡ περικαλύπτεται ἡ τῆ μίτου ἐπιφάνεια, 340κι λεπτοτέρα τῆ χρυσῆ ὑμῆνος, ὅφ' οὗ ἡ τῆ κυλίνδρου ἐπιφάνεια ζδ περιεκαλύπτο. Ὅρα Ρ'ωαελτ. φυσ. μέρ. Α' Κεφ. Θ' Τμήμ. ΙΑ'.

Λήμμα πρὸς τὸ ἐξῆς.

κ. 23. Ἐξωσαν αβ. γδ, εζ ἀνάλογον· καὶ ἔσω ἡ κβ ἡμίσεια τῆς αβ, ἡ δὲ εη διπλασίον τῆς εζ, ἡ ἥτως ἔσονται ἡ αἰ κβ, γδ, εη ἀνάλογον.

Ἡ γὰρ κβ εὐθεῖα ἐστὶ πρὸς τὴν αβ, ὡς (1) ἡ εζ πρὸς τὴν εη· ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ κβ ἡ εη (2), ἴσον ἐστὶ τῷ ὀρθογώνιῳ τῷ ὑπὸ αβ καὶ εζ· Ἀλλὰ γὰρ τόδε (3) ἴσον ἐστὶ τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ γδ, ἄρα ἡ τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ κβ ἡ εη, ἴσον ἐστὶ τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ γδ· καὶ τοίνυν (4) κβ, γδ, εη ἀνάλογον εἰσί.

Ἀλλως. κβ : αβ :: (5) εζ : εη· ἀλλ' αβ : γδ :: (6) γδ : εζ, ἄρα ἐξ ἴσου τετραγμένως (7) κβ : γδ :: γδ : εη.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΑ.

κ. 18. „Ο' Κύκλος ὁ ἀπὸ ἡμιδιαμέτρου τῆς ηδ, ἥτις ἂν μέση ἀνάλογον, εἴη μεταξὺ τῆς τε τῆ ὀρθῆ κυλίνδρου πλευρᾶς βγ, ἡ τῆς διαμέτρου τῆς βδ, ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ κυλινδρική.

Νοεῖσθωσαν τοῖς Κύκλοις αβν, ηπδ περιγεγραμμένα εἶναι ὁμοειδῆ τετραγμένα πολύγωνα, ἡ διὰ τῆτο ὁμοία τὰ νμ ἡ ρσ· ἐπὶ δὲ τῆ νμ πολυγώνου βεβηκέναι τὸ Πρίσμα τὸ περὶ τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένον. Ἐπειδὴ ἂν βδ, ηδ, βγ,

(1) ΙΕ. τῷ ε'. (2) Ιε. τῷ ε'. (3) ΙΖ. τῷ ε'. (4) ΙΖ. τῷ ε'. (5) ΙΕ. τῷ ε'. (6) Εξ. ὑποδ. (7) ΚΓ. τῷ ε'.

ἀνάλογόν εἰσι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἀνάλογον ἔσονται καὶ αἱ αὐτὴν (ἢ αν), Δη, καὶ 2 βγ, διὰ τὸ Λῆμμα· καὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῆς αν, καὶ τῆς περιμέτρου τῆς Παλυνώνου καὶ περιεχόμενον Τρίγωνον ἴσον τῷ περιγεγραμμένῳ Πολυγώνῳ καὶ (1)· τὸ δὲ ὑπὸ τῆς βγ (ἢ εδ), καὶ τῆς αὐτῆς περιμέτρου καὶ Ὁρθογώνιον, ταῦτ' ἔστι (2) τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου καὶ, καὶ τῆς διπλασίας τῆς βγ Τρίγωνον, ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ περὶ τὸν Κύλινδρον περιγεγραμμένῳ Πρίσματι (3). Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῆς αν, καὶ τῆς περιμέτρου καὶ περιεχόμενον Τρίγωνον, ἔστι πρὸς τὸ Τρίγωνον τὸ ὑπὸ τῆς αὐτῆς περιμέτρου καὶ, καὶ τῆς διπλασίας τῆς βγ περιεχόμενον, ὡς ἡ αν πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς βγ· ἄρα καὶ τὸ Πολύγωνον καὶ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῇ περὶ τὸν Κύλινδρον περιγεγραμμένῳ Πρίσματι ἔσται, ὡς ἡ αν πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς βγ (4). Ἐπεὶ δὲ ἤδη δέδεικται, ὅτι αἱ αν, Δη, 2βγ ἀνάλογον εἰσὶν· ὁ λόγος ἄρα τῆς αν πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς βγ, διπλασίῳ ἐστὶ τῷ λόγῳ τῆς αν πρὸς τὴν Δη (5). Τὸ Πολύγωνον ἄρα καὶ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῇ Πρίσματι λόγον ἔχει διπλασίονα τῷ τῆς αν πρὸς τὴν Δη. Διπλασίονα δὲ λόγον τῇ τῆς αν πρὸς τὴν Δη, ἔχει καὶ τὸ Πολύγωνον καὶ πρὸς τὸ αὐτῷ ὁμοιον θρξτ, ὡς ἔαα συνάγεται ἐκ τῆς Α'. τῇ ΙΒ'. (ἀχθείσης γὰρ τῆς εδ, τὰ Τρίγωνα ανκ, Δηξ, ἐπεὶ ἔχει τὰς ὑπὸ ανκ, Δηξ γωνίας ὀρθὰς, καὶ τὰς ὑπὸ ανκ, Δηξ ἡμισείας τῶν ἐν τοῖς ὁμοίοις κανονικοῖς Πολυγώνοις, ἔσται ἰσογώνια τε καὶ ὁμοία· καὶ ἡ αν : Δη :: αν : Δη. Ἀλλὰ τὰ Πολύγωνα λόγον ἔχει διπλασίονα τῶν κατὰ τῆς Κύκλου, εἰς ἣς ἐγγράφεται, ἡμιδιαμέτρων ανκ, Δηξ (6)· διπλασίονα ἄρα ἔξει (7) καὶ τῶν κατὰ τῆς Κύκλου, περὶ ἣς περιγράφεται, ἡμιδιαμέτρων αν, Δη). Ἄρα τὸ Πολύγωνον καὶ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τε τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ Πρίσματος, καὶ πρὸς τὸ Πολύγωνον θρξτ· ἴση ἄρα τῷ Πολυγώνῳ ἢ τῇ Πρίσματι ἐπιφάνεια (8). Τῷ αὐτῷ δὲ τρόπῳ δεῖχθήσεται, ὅτι Πρισματικαὶ ἐπιφάνειαι ἄλλαι ἐπ' ἄλλαις εἰς ἄπειρον περὶ τὸν Κύλινδρον περιγεγραφομέναι, ἔσονται αἰ ἴσαι Πολυγώνοις ἄλλοις ἐπ' ἄλλοις εἰς ἄπειρον περὶ τὸν Κύκλον περιγεγραφομένοις. Ἐπεὶ δὲ τέως ἀπολήγησιν αἱ μὲν Πρισματικαὶ ἐπιφάνειαι εἰς τὴν τῇ Κυλίνδρου ἐπιφάνειαν (9), τὰ δὲ Πολύγωνα εἰς τὸν Κύκλον Δηκ (10)· ἢ τῇ Κυλίνδρου ἄρα ἐπιφάνεια ἔσται ἴση τῇ Κύκλῳ Δηκ. Ο. Ε. Δ.

Ἐκ τῆς ἐξαιρέτου τῆς Θεωρήματος ἐξέειν λαβεῖν Κύκλον Κυλινδρικῇ ἐπιφανείᾳ ἰσόμενον.

(1) Δ. τῇ παρ. (2) Πόρισμ. τῆς ΜΒ. τῇ α'. (3) Η. τῇ παρ. (4) Α. τῇ ε'. (5) Ορισμ. Ι. τῇ ε'. (6) Α. τῇ ιβ'. (7) ΙΔ. τῇ ε'. (8) Θ. τῇ ε'. (9) Α. τῇ παρ. (10) Γ. τῇ παρ.

Πορίσματα.

Α'. Η' τῷ ὀρθῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν Ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπὸ τῆς τῷ Κυλίνδρῳ πλευρᾶς βγ, ἢ τῆς κατὰ τὴν βάσιν περιφερείας περιεχομένη.

Εἴςι γὰρ ὡς δέδεικται ἀνωτέρω ἡ διπλασία τῆς γβ πρὸς τὴν Δη, ὡς ἡ αὐτὴ Δη πρὸς τὴν βα, ἢ αὐ' τῷ τῷ ἐστὶν ὡς ἡ περιφέρεια π, πρὸς τὴν περιφέρειαν βν (1). Τὸ Τρίγωνον ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης, τῷ τῷ ἐστὶ τῆς διπλῆς βγ, καὶ τῆς τετάρτης, τῷ τῷ ἐστὶ τῆς περιφερείας βν περιεχόμενον, ἴσον ἐστὶ τῷ Τριγώνῳ, τῷ ὑπὸ τῆς δευτέρας Δη, καὶ τῆς τρίτης, τῷ τῷ ἐστὶ τῆς περιφερείας π (2). Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῆς Δη ἢ τῆς περιφερείας π Τρίγωνον ἴσται τῷ Δη κύκλῳ, (3) τῷ τῷ ἐστὶ τῇ τῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφανείᾳ (4)· ἄρα ἢ τὸ ὑπὸ τῆς διπλῆς βγ, καὶ τῆς περιφερείας βν Τρίγωνον, τῷ τῷ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῆς βγ, ἢ τῆς περιφερείας βν Ὀρθογωνιον (5), ἴσον ἴσεται τῇ τῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφανείᾳ. Ο. Ε. Δ.

Δήλον ἄρα ἐκ τῷ Πορίσματος τούτου, ὅτι αἱ τῶν Ὀρθογωνίων ιδιότητες κοιναί εἰσι ἢ πρὸς τὰς ἐπιφανείας τῶν ὀρθῶν Κυλίνδρων. Ὁθεν ἔστω
κ. 26. 27. Β'. Αἱ ἰσοῦφει Κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι βμ, ξν, εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ τῶν βάσεων διάμετροι βζ, ξρ.

Τὰ γὰρ ὑπὸ τῶν περιφερειῶν γλ, σε, ἢ τῶν ἀλλήλαις ἴσων εὐθειῶν ζμ, ρν περιεχόμενα Ὀρθογωνία, οἷς ἐξισϋνται αἱ Κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι (6), εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ βάσεις (7), τῷ τῷ ἐστὶν ὡς αἱ περιφέρειαι γλ, σε, ἢτοι ὡς αἱ διάμετροι βζ, ξρ (8).

Γ'. Αἱ Κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι γι, αρ, ὧν αἱ βάσεις ἴσαι, εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς τὰ ὕψη τι, βρ.

Τὰ γὰρ ὑπὸ ἴσων καὶ ὑπόθεσιν περιφερειῶν Δη, μξ, ἢ πλευρῶν τῶν τι, βρ περιεχόμενα Ὀρθογωνία, οἷς αἱ Κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι ἐξισϋνται (9), εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ τι, βρ (10).

κ. 26. 27. Δ'. Αἱ ὁμοίαι Κυλινδρικαὶ ἐπιφάνειαι βμ, ρι, λόγον ἔχουσι διπλασίονα, ὃ περ ἔχουσιν αἱ τῶν βάσεων διάμετροι βε, ξρ.

Εἰαν γὰρ τεθῶσιν οἱ Κύλινδροι ὁμοιοί, ἴσεται ἡ μζ πρὸς τὴν ιξ, ὡς ἡ βζ πρὸς τὴν ξρ (11), τῷ τῷ ἐστὶν ὡς περιφέρεια γλ πρὸς τὴν περιφέρειαν σε (12). Τοιγαρὺν ἢ τὰ Ὀρθογωνία, τὰ ὑπὸ τῶν περιφερειῶν γλ, σε, ἢ τῶν πλευρῶν

(1) Ζ. τῷ παρ. (2) Πόρ. Δ. τῆς Ις. τῷ ε'. (3) Ε. τῷ παρ. (4) Διὰ τὴν παρ. γαν. (5) Πόρ. τῆς ΚΔ. τῷ α'. (6) Πορ. Α'. (7) Δ. τῷ ε'. (8) Προτ. Ζ. ἢ Σχημ. 27 ἢ 28 τῷ ΙΒ'. (9) Πορ. Α'. (10) Α. τῷ ε'. (11) Σμσμ. Δ. τῷ ιβ'. (12) Ζ. τῷ παρ.

μζ, ἡ περιεχόμενα, ὅμοια ἔσται (1), καὶ λόγον ἔξει διπλασίονα, οὐ περ ἔχει ἡ μζ πρὸς τὴν ιξ (2), τὸτ' ἔστιν ἡ βζ πρὸς τὴν ξρ. Ἀρα καὶ αἱ Κυλινδρικοὶ ἐπιφάνειαι, κτ.

Ε'. Αἱ Κυλινδρικοὶ ἐπιφάνειαι (βμ, ρι) λόγον ἔχουσι (3) πρὸς ἀλλήλας καὶ τὸ αὐτὸ τὸν συγκαίμενον ἔκτε τῷ λόγῳ τῶν πλευρῶν (ζμ, ιξ), καὶ τῷ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων (βζ, ξρ).

ς'. Ἐὰν αἱ Κυλινδρικοὶ ἐπιφάνειαι (αρ, ζδ) ὥσιν ἀλλήλαις ἴσαι, ἔσται καὶ 29. 30. ὡς ἡ διάμετρος αβ πρὸς τὴν διάμετρον ζν, ὅπως ἐν ἀντιπεπονθήσει τὸ ὕψος ζη πρὸς τὸ ὕψος ρβ (4), καὶ ἀνάπαλιν.

Ζ'. Ἐκ τῷ αὐτῷ πρώτῳ Πορίσματος πορίζεται τελευταῖον ἡ τῆς Κυλινδρικοῦς ἐπιφανείας καταμέτρησις, ἐὰν δηλονότι τὸ ὕψος ἐπὶ τὴν τῆς βάσεως περιφέρειαν πολλαπλασιασθῇ. Ἐὰν, φέρε, τεθῇ τὸ μὲν ὕψος ποδῶν 20, ἡ δὲ τῆς βάσεως περιφέρεια ποδῶν 6· πολλαπλασιασθέντων τῶν 20 ποδῶν διὰ τῶν 6, προκύψουσι τετραγωνικοὶ πόδες 120 εἰς τὴν τῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνειαν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΒ'.

Η' τῇ ὀρθῇ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνεια ἐστὶ πρὸς τὴν βάσιν αβν, ὡς ἡ τῷ Κυλίνδρῳ 24. 25. πλευρὰ (γβ) πρὸς τὴν βο, τεταρτημόριον ὕσαν τῆς κατὰ τὴν βάσιν διαμέτρου.

Εἴσω ἡ θη μέσον λόγον ἔχουσα τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων βγ καὶ βδ· ἡ τις μέσον λόγον ἔξει (5) (9) καὶ τῶν βα (ἢ αν) αβγ· ὁ κύκλος ἄρα θη ὁ ἀπὸ ἀκτίνος τῆς θη, ἴσος ἐστὶ τῇ καμπύλῃ ἐπιφανείᾳ τῷ Κυλίνδρῳ γδ (6). Ἀλλ' ὁ κύκλος θη πρὸς τὴν τῷ Κυλίνδρῳ βάσιν αβν, λόγον ἔχει διπλασίονα τῷ, ὃν ἔχει ἡ θη πρὸς τὴν αν (7), τὸτ' ἔστι τὸν αὐτὸν, ὃν ἡ διπλασία τῆς βγ πρὸς τὴν ἐκ τῷ κέντρῳ βα (8), ἡτοι ἡ βγ πρὸς τὴν βο, τεταρτημόριον ὕσαν τῆς διαμέτρου· ἄρα καὶ ἡ Κυλινδρική ἐπιφάνεια ἐστὶ πρὸς τὴν βάσιν αβν, ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν βο, τεταρτημόριον ὕσαν τῆς διαμέτρου βδ. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α .

Η' ἐπιφάνεια Κυλίνδρου, ὅς ἔχει τὴν πλευρὰν ἴσην τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως, ἐστὶ τετραπλάσια τῆς βάσεως. Ἐὰν δὲ ἡ τῷ Κυλίνδρῳ πλευρὰ ᾖ τεταρτημορίῳ τῆς βάσεως ἴση, ἡ Κυλινδρική ἐπιφάνεια ἔσται ἴση τῇ βάσει. Διήλυν ἐκάτερον ἐκ τῆς Προτάσεως.

(1) Ὁρισμ. Α. τῷ ε'. (2) Ι. τῷ ε'. (3) ΚΓ. τῷ ε'. καὶ Ζ. τῷ παρόν. (4) ΙΔ. τῷ ε'. (5) Διὰ τὸ Διημ. τὸ εἰς τὴν ΙΑ'. (6) ΙΑ. τῷ παρόντος. (7) Πορ. τῆς Β. τῷ ιβ'. (8) Διὰ τὴν ὑπόθεσιν καὶ τὸν Γ. Ὁρισμ. τῷ ε'.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΓ'.

α. 32. 31.

Ο Κύκλος, ἢ ἡ ἐκ τῆς κέντρος ολ μέσον ἔχει λόγον τῆς τῆς ὀρθῆς Κῶνης πλευρᾶς βγ, ἢ τῆς κατὰ τὴν βάσιν τῆς Κῶνης διαμέτρου αγ, ἴσος ἐστὶ τῇ τοῦ Κῶνης ἐπιφανείᾳ.

Νοεῖσθω περὶ μὲν τὰς κύκλους αγθ, οπλ, Πολύγωνα κανονικὰ, ἢ ὅμοια περιγεγεγραμμένα τὰ εζ, νι· ἐπὶ δὲ τῇ Πολυγῶνι εζ Πυραμίδι ἀνεσταμένη, ἣ-
τις ἔσται περὶ τὸν Κῶνον περιγεγεγραμμένη.

Ἐπειδὴ ἔν ἐξ ὑποθέσεως ἡ αγ, ἢ ἡ αθ ἐστὶ πρὸς τὴν ολ, ὡς ἡ αὐτὴ ολ πρὸς τὴν βγ· ὁ λόγος ἄρα τῆς αθ πρὸς τὴν βγ διπλασίῳ ἔσται τῇ τῆς αθ πρὸς τὴν ολ (1). Ἀλλ' ὡς ἡ αθ πρὸς τὴν βγ, ὅτω τὸ ὑπὸ τῆς αθ, ἢ τῆς περιμέτρου εζ Τρίγωνον, πρὸς τὸ Τρίγωνον τὸ ὑπὸ τῆς βγ ἢ τῆς αὐτῆς περιμέτρου εζ· ὁ λόγος ἄρα τῆς ὑπὸ τῆς αθ, ἢ τῆς περιμέτρου εζ Τρίγωνου, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς βγ, ἢ τῆς αὐτῆς περιμέτρου εζ Τρίγωνον, διπλασίῳ ἐστὶ τῇ τῆς αθ πρὸς τὴν ολ. Ἐστὶ δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῆς αθ, ἢ τῆς εζ περιμέτρου Τρίγωνον, ἴσον τῷ Πολυγῶνι εζ (2)· τὸ δὲ ὑπὸ τῆς βγ, ἢ τῆς αὐτῆς περιμέτρου εζ, ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς περιγεγεγραμμένης Πυραμίδος (3). Ὁ λόγος ἄρα τῆς Πολυγῶνι εζ πρὸς τὴν τῆς Πυραμίδος ἐπιφάνειαν, ἐστὶν ὡσάυτως διπλασίῳ τῇ λόγῳ τῆς αθ πρὸς τὴν ολ. Ἀλλὰ μὲν ἢ ὁ λόγος τῆς Πολυγῶνι εζ πρὸς τὸ ἐκ κατασκευῆς αὐτῷ ὅμοιον Πολύγωνον ιν, διπλασίῳ (4) ἐστὶ τῇ λόγῳ τῆς αθ πρὸς τὴν ολ (ὡς δείκνυται ἐκ τῶν εἰς τὴν δεξιὴν τῆς ΙΑ' τῶν παρόντος παραληφθέντων)· τὸ Πολύγωνον ἄρα εζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Πυραμίδος, ἢ πρὸς τὸ Πολύγωνον ιν· ἴση ἄρα τῷ Πολυγῶνι ἢ τῆς Πυραμίδος ἐπιφάνεια (5). Τῷ αὐτῷ δὲ τρόπῳ δειχθήσεται, ὅτι ἐπιφάνειαι Πυραμίδων ἐπ' ἄπειρον μᾶλλον ἢ μᾶλλον πολυγῶνων περὶ τὸν Κῶνον περιγεγραφομένων, ἔσονται αἰ ἴσαι Πολυγῶνις ἐπ' ἄπειρον περὶ τὸν Κύκλον οπλ περιγεγραφομένοις. Ἐπεὶ δὲ ἔρχατον ἀπολήγουσιν αἱ μὲν τῶν Πυραμίδων ἐπιφάνειαι εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Κῶνης (6)· τὰ δὲ Πολύγωνα εἰς τὸν Κύκλον οπλ (7)· ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τῆς Κῶνης (8) ἴση τῷ Κύκλῳ οπλ. Ο. Ε. Δ.

Ἐκ τῆς ἐξαιρέτε τῆς δὲ Θεωρήματος ἐξέσαι λαβεῖν Κύκλον Κωνικῇ ἐπιφανείᾳ ἰσόμενον.

(1) Ὅρισμ. Ι. τῆς ε'. (2) Δ. τῆς παρόντος. (3) Θ. τῆς παρόντος. (4) Συνάγουσαι εἰς τῆς Α'. τῆς ιβ'. (5) Θ. τῆς ε'. (6) Ι. τῆς παρόντος. (7) Γ. τῆς παρόντος. (8) Α. τῆς παρόντος.

Πορίσματα.

Α'. Ἡ τῷ ὀρθῷ Κώνῃ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ Τριγώνῳ, οὗ ὕψος μὲν ἢ τῷ κ. 31. 32. Κώνῃ πλευρᾷ (βγ), βάσις δὲ ἢ τῆς βάσεως περιφέρεια (γδ).

Ἐξω γὰρ ἢ ολ μέσον ἔχουσα λόγον τῆς τῷ Κώνῃ πλευρᾷ βγ, καὶ τῆς κατὰ τὴν βάσιν ἡμιδιαμέτρου αγ. Καὶ ἐπεὶ ἢ περιφέρεια γδ ἐστὶ πρὸς τὴν περιφέρειαν π, ὡς ἢ ἀκτὺς αγ πρὸς τὴν ολ ἀκτῖνα (1), τῷτ' ἐστὶν ὡς ἢ ολ πρὸς τὴν βγ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν· τὸ Τρίγωνον ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης, τῷτ' ἐστὶ τῆς περιφερείας γδ, καὶ τῆς τετάρτης βγ, ἴσον ἔσται τῷ Τριγώνῳ, τῷ ὑπὸ τῆς δευτέρας, τῷτ' ἐστὶ τῆς περιφερείας π, καὶ τῆς τρίτης ολ (2), τῷτ' ἐστὶ (3) τῷ Κύκλῳ οπλ, τῷτ' ἐστὶ (4) τῇ Κωνικῇ ἐπιφανείᾳ βγδ. Ο. Ε. Δ.

Δήλον ἐκ τῶνδε τῶν Πορίσματος, ὅτι αἱ Κωνικαὶ ἐπιφάνειαι ὑπόκεινται τοῖς τῶν Τριγώνων νόμοις. Οὔθεν

Β'. Αἱ Κωνικαὶ ἐπιφάνειαι (βαζ, ξχρ), ὧν αἱ πλευραὶ (βα, ξχ) ἴσαι, κ. 26. 27. εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ τῶν βάσεων διάμετροι (βζ, ξρ).

Γ'. Καὶ αἱ γζτ, αφβ, ὧν αἱ βάσεις ἴσαι, εἰσὶν ὡς αἱ πλευραὶ (γζ, αφ). κ. 28. 29.

Δ'. Αἱ δὲ ἀλλήλαις ὁμοιαὶ (βαζ, ξρφ) λόγον ἔχουσι διπλασίονα, οὗ κ. 26. 27. περ αἱ τῶν βάσεων διάμετροι.

Ε'. Καὶ οἰαδὴποτε ἐν γένει λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας τὸν συγκεκριμένον Σχ. τὸ αὐτ. ἔκτε τῷ λόγῳ τῶν πλευρῶν (βα, ξφ), καὶ τῷ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων (βζ, ξρ).

ς'. Τῶν ἰσῶν Κωνικῶν ἐπιφανειῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ ταῖς διαμέτροις τῶν βάσεων· καὶ ὧν δὲ ἀντιπεπόνθασιν, ἐκεῖναι ἴσαι.

Δείκνυται ταῦτα πάντα ἐκ τῆς πρώτης Πορίσματος, ὥσπερ δὴ καὶ ἀνωτέρω τὰ περὶ τῆς Κυλινδρικῆς ἐπιφανείας Πορίσματα δέδεικται ἐκ τῆς ἐκείσε πρώτου Πορίσματος.

Ζ'. Μετρηθήσεται τελευταῖον ἢ τῷ Κώνῃ ἐπιφάνεια, εἴαν ἢ πλευρὰ γζ κ. 30. ἐπὶ τὴν ἡμιπεριφέρειαν τῆς βάσεως πολλαπλασιασθῇ. Οἷον εἴαν ὧσιν ἢ μὲν πλευρὰ ποδῶν 5, ἢ δὲ τῆς βάσεως περιφέρεια ποδῶν 20· πολλαπλασιάζοντων 5 διὰ 10, προκύψουσι τετραγωνικοὶ πόδες 50 εἰς τὴν τῷ Κώνῃ ἐπιφάνειαν. Πρόδηλος δὲ ὁ τῆςδείξεως λόγος ἐκ τῆς αὐτῆς πρώτης Πορίσματος.

(1) Ζ. τῷτ' ἀκτῖνα (2) Πόλ. Α. τῷτ' ολ ἀκτῖνα (3) Ε. τῷτ' παρὸν. (4) Ε. τῷτ' ἀκτῖνα.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΔ.

κ. 31. 32. Η' τῇ ὀρθῇ Κώνη ἐπιφάνεια ἐστὶ πρὸς τὴν βάσιν, ὡς ἡ πλευρὰ (βγ) πρὸς τὴν τῆς βάσεως ἡμιδιάμετρον (αγ).

Εἴχεται ἡ λο μέσον λόγον τῆς τε πλευρᾶς βγ, καὶ τῆς κατὰ τὴν βάσιν ἡμιδιαμέτρου αγ· καὶ ἔσται ὁ λόγος τῆς βγ πρὸς τὴν αγ, διπλασίων τῇ τῆς ολ πρὸς τὴν αγ (1). ὁ δὲ κύκλος ὁ ἀπὸ ἀκτῆος τῆς ολ ἐστὶν ἴσος τῇ Κωνικῇ ἐπιφανείᾳ γβδ (2). Ἀλλ' ὁ λόγος τούτου πρὸς τὴν τῇ Κώνη βάσιν αγδ, ἐστὶ διπλασίων τῇ τῆς ολ πρὸς τὴν αγ (3), καὶ ἐπομένως ὁ αὐτὸς τῷ τῆς βγ πρὸς τὴν αγ· καὶ ἡ Κωνικὴ ἄρα ἐπιφάνεια γβδ ἐστὶ πρὸς τὴν βάσιν αγω, ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν αγ. Ο. Ε. Δ.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

κ. 54. Α'. Η' ἐπιφάνεια Κώνη, ὅς ἂν ἐκ Τριγώνου ἰσοπλευροῦ περι κάθεται τῇ κα περιενοχθέντος εἴη γεγενημένος, ἐστὶ διπλασία τῆς βάσεως (ξη).

Εἴςτι καὶ γὰρ ἡ πλευρὰ κβ ἴση τῇ βδ, καὶ ἐπομένως διπλασία τῆς κατ' αὐτὴν ἡμισείας, τῇ τ' ἐστὶ τῆς αβ, ἥτις ἐστὶν ἡμιδιάμετρος τῆς βάσεως.

κ. 48. Β'. Η' ἐπιφάνεια Κώνη, ὅς ἂν ἐκ Τριγώνου ὀρθογωνίου, καὶ ἰσοσκελῆς (τῷ εβδ) εἴη γεγενημένος, ἐστὶ πρὸς τὴν βάσιν, ὡς ἡ ἐν τῷ Τετραγώνῳ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν.

Ἀχθείσης γὰρ τῆς καθεύτου βα, ἡ ὀρθὴ γωνία β δίχα τμηθήσεται (4)· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἡ ὑπὸ αβδ· ἐστὶ δὲ ὀρθῆς ἡμίσεια καὶ ἡ ὑπὸ αδβ (5)· ἡ ἄρα αδ ἴση τῇ βα (6). Τοιγαρὺν ἡ μὲν βδ ἐστὶ διάμετρος, ἡ δὲ αδ πλευρὰ τῷ Τετραγώνῳ ακ· ἐστὶ δὲ ἡ αδ ἡμιδιάμετρος τῆς βάσεως πτ, ἅτε τῆς καθεύτου αβ δίχα τεμνύσης τὴν αδ (7)· ἐκ τούτων ἄρα καὶ τῆς παρούσης ΙΔ'. δῆλον τὸ Πόρισμα.

κ. 48. Γ'. Η' Κυλίνδρου ὀρθῇ ἐπιφάνεια (θκ) πρὸς τὴν Κώνη ὀρθῇ ἐπιφάνειαν (θβν), ἐστὶν ὡς ἡ πλευρὰ τῷ Κυλίνδρου πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς τῷ Κώνη πλευρᾶς.

Η' γὰρ ἐπιφάνεια τῷ ὀρθῷ Κώνη θβν ἐστὶ πρὸς τὴν βάσιν μι, ὡς ἡ πλευρὰ βν πρὸς τὴν τῆς βάσεως ἡμιδιάμετρον ξν (8), τῷ τ' ἐστὶν ὡς ἡ ἡμίσεια τῆς πλευρᾶς βν πρὸς τὸ τεταρτημόριον τῆς διαμέτρου θν. Εἴςτι δὲ ἡ βάσις μι πρὸς

(1) Ο'φ. Ι. τῷ ε'. (2) ΙΓ. τῷ παρόντος. (3) Β. τῷ ιβ'. (4) Σχολ. Α'. τῆς Κε'. τῷ ια'. (5) Πορ. ΙΑ'. τῆς ΔΒ. τῷ ε'. (6) ε'. τῷ α'. (7) Σχολ. Α'. τῆς Κε'. τῷ α'. (8) ΙΔ. τῷ παρόντος.

τὴν ἐπιφάνειαν τῆ Κυλίνδρου $\Delta\kappa$, ὡς τὸ τεταρτημόριον τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν $\nu\kappa$ πλευρὰν τῆ Κυλίνδρου (1)· δι' ἴσου ἄρα ἡ Κωνικὴ ἐπιφάνεια $\Delta\beta\nu$ πρὸς τὴν Κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν $\nu\kappa$, ὡς ἡ ἡμίσεια πλευρὰ τῆ Κῶνις πρὸς τὴν τῆ Κυλίνδρου πλευρὰν $\nu\kappa$. Ο. Ε. Δ.

Λήμμα εἰς τὴν ἐξῆς.

Ἐν Τριγώνῳ τῷ $\nu\pi\upsilon$ ἤχθω παρὰ τὴν $\nu\upsilon$ ἡ $\xi\delta$. Λέγω δὴ, ὅτι τὸ ὑπὸ $\pi\upsilon$, $\nu\upsilon$ Ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $\pi\zeta$, $\xi\delta$, συνάμα τῷ ὑπὸ τῆς $\nu\zeta$, ξ συναμφοτέρου τῆς $\nu\upsilon$, $\xi\delta$. κ. 34.

Ἦχθω ἐπὶ τὴν πλευρὰν $\pi\upsilon$ κάθετος ἡ $\alpha\nu$, ἴση τῇ $\nu\upsilon$, καὶ συμπληρώσω τὸ Ὀρθογώνιον $\nu\theta$ · ἤχθω δὲ ξ ἡ διάμετρος $\pi\alpha$ · ἀπὸ δὲ τῆ σημείας ξ ἤχθω παρὰ τὴν $\alpha\nu$ ἡ $\xi\epsilon$, ξ τεμνέτω τὴν $\pi\alpha$ κατὰ τὸ β · διὰ δὲ τῆ β ἤχθω ἡ $\gamma\zeta$ παράλληλος τῇ $\nu\pi$. Ἐπειδὴ $\alpha\nu$ ἡ $\alpha\nu$ ἐστὶν ἐκ κατασκευῆς ἴση τῇ $\nu\upsilon$ (ξ (2) $\alpha\nu$: $\xi\beta$ (: $\nu\pi$: $\xi\pi$) :: $\nu\upsilon$: $\xi\delta$), δῆλον ὅτι (3) ξ ἡ $\xi\beta$ ἴση ἐστὶ τῇ $\xi\delta$ · διὰ δὲ ταῦτα τὸ Ὀρθογώνιον, $\nu\theta$ ἴσον τῷ $\pi\upsilon\upsilon$ · τότε $\zeta\epsilon$ ἴσον τῷ $\pi\zeta\delta$ · Λέπεται ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὰ Ὀρθογώνια $\nu\theta$, $\epsilon\gamma$, $\beta\nu$ ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς $\nu\zeta$, ξ συναμφοτέρου τῆς $\alpha\nu$, $\xi\beta$, τῶν $\epsilon\sigma$ τῆς $\nu\zeta$, ξ συναμφοτέρου τῆς $\nu\upsilon$, $\xi\delta$ περιεχομένῳ Ὀρθογωνίῳ. Ὅπερ ἐστὶ πρόδηλον· εἴγε τὸ ὑπὸ τῆς $\xi\nu$, ξ συναμφοτέρου τῆς $\nu\epsilon$, $\xi\beta$ περιεχόμενον Ὀρθογώνιον ἐξισῶται τοῖς τρισὶν Ὀρθογωνίοις, λέγω δὴ τῷ τε ὑπὸ τῶν $\nu\zeta$, $\gamma\alpha$ (τῶν $\epsilon\sigma$ τῷ χωρίῳ $\epsilon\gamma$), ξ τῷ ὑπὸ τῶν $\nu\zeta$, $\nu\gamma$ (τῶν $\epsilon\sigma$ τῷ χωρίῳ $\beta\nu$), ξ τῷ ὑπὸ τῶν $\nu\zeta$, $\xi\beta$, τῶν $\epsilon\sigma$ τῷ αὐτῷ χωρίῳ $\beta\nu$, ἰσόμενως δὲ ξ τῷ $\beta\theta$, ὅπερ ἐστὶν ἴσον τῷ $\beta\nu$. Δῆλον ἄρα τὸ προτεθέν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΕ.

Ἐὰν Κῶνος ὀρθός Ἐπιπέδῳ τῷ $\xi\sigma\rho$ παραλλήλῳ τῇ βάσει $\nu\theta$ $\mu\eta\delta\eta$, λέγω ὅτι ὁ Κύκλος $\Delta\eta\mu$, ξ ἡ ἐκ τῆ Κέντρου $\Delta\eta$ μέσον λόγον ἔχει τῆ τῆς πλευρᾶς $\nu\zeta$, ξ συναμφοτέρου τῆς τῶν Κύκλων $\xi\sigma\rho$, $\nu\theta$ ἡμιδιάμετρον $\xi\delta$, $\nu\upsilon$, ἴσος ἐστὶ τῇ Κωνικῇ ἐπιφανείᾳ, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων Κύκλων $\xi\sigma\rho$, $\nu\theta$. κ. 35. 36.

Ἐχέτω δὴ τὸν μέσον λόγον ἡ μὲν $\Delta\zeta$ τῆς $\pi\upsilon$ ξ τῆς $\nu\upsilon$ · ἡ δὲ $\Delta\kappa$ τῆς $\pi\zeta$ ξ τῆς $\xi\delta$ · καὶ διὰ τῶν $\Delta\zeta$, $\Delta\kappa$, καταγεγραμῶσαν Κύκλοι οἱ $\Delta\zeta\lambda$, $\Delta\kappa\tau$. Ἔσται δὴ ὁ μὲν $\Delta\eta\tau$ ἴσος τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ $\xi\sigma\rho$ (4)· ὁ δὲ $\Delta\zeta\lambda$ ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ $\nu\theta$ · τὸ δὲ ὑπὸ τῶν $\pi\upsilon\upsilon$ Ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν $\pi\zeta\delta$ συνάμα

(1) ΙΒ. τῆ παρόντος. (2) Παρ. Α'. τῆς Δ. τῆ ε. (3) ΙΑ. ξ Θ. σὺν τοῖς Σχολ. τῆς Ζ. τῆ δ. (4) ΙΓ. τῆ παρόντος.

τῷ ὑπὸ τῆς νξ, εἰ συναμφοτέρη τῆς νυ, ξδ (1) περιεχομένῳ Ὀρθογωνίῳ. Ἐπεὶ δὲ ἐκ κατασκευῆς ἡ μὲν θζ μέση ἀνάλογόν ἐστιν ἐν ταῖς πν, νυ, ἡ δὲ θκ ἐν ταῖς πε, ξδ· ἄρα τὸ μὲν ὑπὸ τῶν πνυ Ὀρθογωνίον ἐστὶν ἴσον τῷ ὑπὸ τῆς θζ Τετραγώνῳ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν πεδ ἴσον τῷ ὑπὸ τῆς οκ (2). Καὶ ἐπεὶ ἐξ ὑποθέσεως ἡ θη μέσον ἔχει λόγον τῆς τε ξν, εἰ συναμφοτέρη τῆς ξδ, νυ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ξν, εἰ συναμφοτέρη τῆς ξδ, νυ περιεχόμενον Ὀρθογωνίον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς θη Τετραγώνῳ· τὸ ὑπὸ τῆς θζ ἄρα Τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπὸ τῶν θη, θκ Τετραγώνοις· καὶ ἐπεὶ οἱ Κύκλοι εἰσὶν, ὡς τὰ ὑπὸ τῶν ἡμιδιαμέτρων Τετράγωνα (3), ἔσεται δὴ ὁ Κύκλος θλζ τοῖς δυσὶ Κύκλοις θκτ, θημ ἴσος. Ἀλλ' ὁ Κύκλος θλζ ἐστὶν ἴσος τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ νπο (4)· ἄρα εἰ ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια νπο, ἴση τοῖς δυσὶ Κύκλοις θκτ, θημ. Ἀλλὰ τὸ μέρος ξπε τῆς ὅλης ἐπιφανείας νπο ἴσεται τῷ Κύκλῳ θκτ (5)· λοιπὸν ἄρα τὸ μεταξὺ τῶν παραλλήλων Κύκλων φφ, σσ ἐναπολαμβάνομενα τῆς Κωνικῆς ἐπιφανείας, ἴσαν ἐστὶ τῷ λοιπῷ Κύκλῳ θημ. Ο. Ε. Δ.

Π ό ρ ι σ μ α.

Τὸ μέτρον ἄρα τῆς μεταξὺ δύο Κύκλων ἐναπολαμβανομένης Κωνικῆς ἐπιφανείας, ἀποφέρεται ἐκ τῶν κατὰ τῆς παραλλήλης Κύκλης δοθεισῶν ἡμιδιαμέτρων (νυ, ξδ), εἰ τῆς κατὰ τὴν Κωνικὴν ταύτην ἐπιφανείαν πλευρᾶς (νξ)· εἰ δὲ δηλονότι τὸ τῶν ἡμιδιαμέτρων ἄθροισμα νυ+ξδ ἐπὶ τὴν πλευρὰν νξ πολλαπλασιασθῇ, ὑπὸ δὲ τῇ προκύπτοντος ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἐξαχθῇ. Ἔσεται γὰρ δὴ ὡς 113 πρὸς 355, ὅπως ἡ ρίζα πρὸς τὸν τέταρτον ὅρον, ὅστις πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὴν ρίζαν, προκύψει ἡ ζητούμενη ἐπιφάνεια. Δείκνυται δὲ τῆτο ἕκτε τῆς ΙΖ'. τῷ ε', καὶ ἐκ τῆ Σχολίης τῆς ε'. τῷ παρόντος, εἰ δὴ εἰ ἐκ τῆς ΙΕ'. τῷ ιε'. (περὶ δὲ τῶν παραληφθέντων ἀριθμῶν ὅρα τὰ ἐν τῷ σχολίῳ τῆς ε'. εἰρημένα)

Λήμμα εἰς τὴν ἐξήκ.

κ. 37. Αἱ εὐθεῖαι (βη, γθ), αἱ ἴσα τόξα ἐν Κύκλῳ ἐναπολαμβάνουσαι τὰ βγ, ηθ, παράλληλοι εἰσὶ.

Ἀχθείσῃς γὰρ τῆς γη, ἐπεὶ ἐξ ὑποθέσεως τὰ τόξα βγ, ηθ ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, εἰ αἱ ὑπὸ βηγ, θγη ἐναλλάξ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται (6). Αἱ εὐθεῖαι ἄρα βη, γθ, παράλληλοι εἰσὶν (7). Ο. Ε. Δ.

(1) Ἐκ τῆς Λήμματος. (2) ΙΖ. τῷ ε'. (3) Πορ. Β'. τῆς Β. τῷ ια'. (4) ΙΓ. τῷ παρόντος. (5) Διὰ τὴν αὐτὴν ΙΓ. (6) ΚΘ. τῷ γ'. (7) ΚΗ. τῷ α'.

Σχόλιον. Ἐντεῦθεν πορίζεται ῥᾶσι μέθοδος τῇ ἀπό τινος δοθέντος σημείου τῷ β τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ γδ παράλληλον ἀγαγεῖν τὴν βη· ὡς ἐν τῇ ΛΑ'. τῷ Α'. σεσημείωται.

Π ρ ό τ α σ ι ς Ις.

Ἐγγεγράφω εἰς Κύκλον σχῆμα κανονικὸν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον, ὃ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν μετρεῖσθω ὑπὸ τετραῶς (α). καὶ ἀπὸ τῆς διαμέτρου πέρατος ε ἤχθω ἡ εβ τὰς μίαν ἐλάχιστος τῶν ἡμίσεων τῶ πολυγώνου πλευρῶν ὑποτείνουσα· τὰς δ' ἐπίσης τῷ σημείῳ α παρ' ἐκάτερα ἀφισκόμενας γωνίας ἐπιζευγνύτωσαν εὐθεῖαι αἱ βη, γδ, δζ. Λέγω ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῆς διαμέτρου αε καὶ τῆς ὑποτείνουσας εβ περιεχόμενον, ἴσον ἔσται τῷ ὑπομιαστικοῦ τῷ ἐγγεγραμμένῳ χήματι πλευρᾶς (τῆς αβ, ἢ τῆς βδ, ἢ ἡτινοσὺν ἄλλης) καὶ ἀπασῶν τῶν τὰς γωνίας ἐπιζευγνυσῶν εὐθειῶν βη, γδ, δζ ἅμα ληφθεῖσῶν περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Ἦχθωσαν αἱ εὐθεῖαι γη, δθ· καὶ ἐπειδὴ αἱ βη, γδ, δζ τόξα ἴσα ἐκπολαμβάνουσι τὰ βγ, ηδ, γλ, δζ (1). ἔσονται ἀλλήλαις παραλλήλοι (2)· διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ταῦτα παράλληλοί εἰσι καὶ αἱ βα, γη, δθ, εζ. Ἄπαντα ἄρα τὰ Τρίγωνα βακ, κηλ, λγμ, μδν, νδο, οζε ἰσογώνια (3)· ἔνθεντοι ὡς ἡ βκ πρὸς κα, ἔτως ἡ ηκ πρὸς κλ· ὡς δὲ ἡ ηκ πρὸς κλ, ἔτως ἡ γμ πρὸς μλ· ὡς δὲ ἡ γμ πρὸς μλ, ἔτως ἡ δμ πρὸς μν· ὡς δὲ ἡ δμ πρὸς μν, ἔτως ἡ δο πρὸς ον· ὡς δὲ ἡ δο πρὸς ον, ἔτως ἡ ζο πρὸς οε· ὡς ἄρα (4) ἐν τῶν ἡγεμένων, τῶν ἐσιν ἡ βκ πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, τῶν ἐσι τὴν κα, ἔτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα ἦτοι αἱ βκ, κη, γμ, μδ, δο, οζ (τῶν ἐσι πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι βη, γδ, δζ) πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα, ἦτοι τὰς ακ, κλ, λμ, μν, νο, οε τῶν ἐσι πρὸς τὴν διάμετρον αε. Ἀλλ' ὡς ἡ βκ πρὸς κα, ἔτως ἡ εβ πρὸς βα (5)· ὡς ἄρα ἅπασαι αἱ βη, γδ, δζ ἅμα ληφθεῖσαι, πρὸς τὴν αε, ἔτως ἡ εβ

(α) Ὑπὸ τετραῶς βέλεται μετρεῖσθαι τὰς πλευρὰς τοῦ Πολυγώνου, διὰ τὸ τοῦ Κύκλου κινεμένην περὶ τὴν αε διάμετρον πάσας τὰς πλευρὰς κατὰ Κωνικῶν φέρεσθαι ἐπιφανειῶν· χρησάμενος ἰσορίθμῳ αὐτῷ τοιοῦτον ἐν τοῖς ἐξῆς· μὴ γὰρ ὑπὸ τετραῶς μετρεῖσθαι τὰς πλευρὰς τοῦ Πολυγώνου, καὶ ἀρτιόπλευρον ἦν, οὐ πάσας δυνατόν κατὰ Κωνικῶν φέρεσθαι ἐπιφανειῶν, ὡς κατανοῆσαι ἔστιν ἐκ τῶν τοῦ ἑξαγώνου πλευρῶν· δύο γὰρ τὰς ἀπεναντίου πλευρὰς παραλλήλους οὖσας, κατὰ Κυκλινδρικής φέρεσθαι ἐπιφανείας συμβαίνει· περὶ οὐ χρησίμος πρὸς τὰ ἐξῆς.

(1) Κε. τοῦ Γ'. (2) Λημμ. προηγ. (3) ΚΖ. καὶ ΙΒ'. καὶ Πορ. Θ'. τῆς ΛΒ'. τοῦ Α'. (4) ΙΒ'. τοῦ Ε'. (5) Πορ. Γ'. τῆς Η'. τοῦ ε'.

πρὸς τὴν βη. Ἡ (1) ὀρθογώνιον ἔχει τὰς πρὸς τὴν ἐπιζευγνύσων βη, γθ, δὲ ὅμη εἰλημμένων εἰς τῆς βα περιεχόμενον, ἵσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αε, εβ περιεχομένῳ (2) ὀρθογώνῳ (1). (1). Ε. Δ.

Π ο ρ ῖ σ μ α τ α.

Α'. Πᾶσαι αἱ τὰς γωνίας τῇ Πολυγώνῳ ἐπιζευγνύσασαι βη, γθ, δὲ δι-
χῆαι εἰς πρὸς ὁρθὰς τέμνονται ὑπὸ τῆς διαμέτρου αε. Εἰπεὶ γὰρ ἐν τοῖς Τριγώνοις
βαη, ηαη αἱ πλευραὶ βα, αη εἰσιν ἴσαι ταῖς πλευραῖς αη, αη. ἴσαι δὲ καὶ
αἱ πρὸς τῷ α γωνίαι (2). ἔσται δὴ εἰς ἡ βη ἴση τῇ κη (3). καὶ δὴ εἰς αἱ πρὸς
τῷ κ γωνίαι ἀλλήλαις ἴσαι, εἰς διὰ τὰντα ὁρθαί (4). Τῷ αὐτῷ δὲ τρόπῳ δε-
χθήσεται, ὅτι εἰς οἰαδήποτε ἄλλῃ ἐπιζευγνύσασαι γθ διχοτομηθήσεται ὑπὸ τῆς
διαμέτρου κατὰ τὸ μ, ὡς εἶναι τὴν γμ ἴσην τῇ μθ, εἰς τὰς πρὸς τῷ μ γωνίας
ὁρθάς.

Β'. Εἴνυ ἡ τὰς γωνίας ἐπιζευγνύσασαι γθ, διάμετρος ἡ τῇ Κύκλῳ, ἡ ὑ-
πὸ τῆς ἐπιζευγνύσεως εὐθείας, εἰς τῆς προσεχέουσας τῇ διαμέτρῳ πλευρῆς τῇ
ἐγγεγραμμένῃ Σχήματος περιεχομένη Γωνία γθη ἔσται ὀξεία. Ἀχθείσης
γὰρ τῆς γη, ἡ ἐν τῇ Ἡμικυκλίῳ γωνία γηθ ὁρθὴ ἔσται (5). ἡ ὑπὸ γθη ἄρα
ὀξεία (6).

Εἴνυ δὲ ἡ τὰς γωνίας ἐπιζευγνύσασαι ἐλάσσων ἢ τῆς διαμέτρου, οἷον ἡ βη,
ἡ ἐν τῷ ἐλάσσονι Τμήματι ὑπὸ τῆς τῇ ἐγγεγραμμένῃ Σχήματος πλευρῆς
αβ, εἰς τῆς ἐπιζευγνύσεως βη συνισαμένη Γωνία αβη ὀξεία ἔσται (7). ἡ γὰρ ἐ-
πὶ τῇ τόξῳ βη ἐπιβεβηκεῖα γωνία ἐν μείζονι Τμήματι ἔσται τῷ αβη.

Γ'. Εἴσω Τμήμα Κύκλῳ τὸ γαθ ἥτοι Ἡμικύκλιον, ἡ Ἡμικυκλίῳ ἔλασ-
σον, ὑπὸ τῆς ἐπιζευγνύσεως γθ περατῆμενον. Αἱ ἐγγυτάτω τῆς ἐπιζευγνύ-
σεως πλευραὶ τῇ ἐγγεγραμμένῃ Σχήματος γβ, θη, ὅσον ἀπόχρῃ ἐπὶ τὰ πρὸς
τὸ Τμήμα γαθ περαιτέρω τῶν σημείων β εἰς ἡ προεκβληθεῖσαι, συμπεσῶνται
ἀλλήλαις, εἰς Τριγώνον ἰσοσκελὲς ἐπὶ τῆς γθ ὡς βάσως ποιήσασιν, ἡ ἡ κο-
ρυφὴ ἔσται πρὸς τινὶ σημείῳ τῆς διαμέτρου εα, περαιτέρω τῇ α προεκβληθείσης.

Εἰπεὶ γὰρ αἱ ὑπὸ βγθ, γθη, ἐλάσσας εἰσὶ δυεῖν ὁρθῶν (8). αἱ πλευ-
ραὶ γβ, θη, προεκβληθεῖσαι ἐπὶ τὰ πρὸς τὰ β, ἡ, συμπεσῶνται ἀλλή-
λαις (9). Εἰπεὶ δὲ εἰς τὰ τόξα βαηθ, γβαη, ἀλλήλοισι ἴσα, ἴσαι ἀλλήλαις
ἔσονται εἰς αἱ ὑπὸ βγθ, γθη (10). καὶ αἱ πλευραὶ γβ, θη συμπεσῶσαι,

(1) Ις. τοῦ ε. (2) ΚΘ. τοῦ γ. (3) Δ. τοῦ α. (4) Ορίσμ. ΙΔ. τοῦ α. (5) ΑΛ.
τῇ γ. (6) Πορ. Δ. τῆς λβ. τῇ α. (7) ΑΛ. τῇ γ. (8) Πορ. Β. τῆς παρῆσης. (9) Σχόλ.
τῆς ΑΛ. τῇ α. (10) ΚΘ. τῇ γ.

Τριγώνον ἰσοσκελὲς ἐπὶ βάσει τῆς γθ ποιήσῃσι (1). Καὶ ἐπειδὴ ἡ βάση δίχα, εἰς πρὸς ὁρθὰς τεμνεται ὑπὸ τῆς αμ (2)· προεκβληθεῖσα ἄρα ἡ μα, διὰ τῆς τῇ Τριγώνῳ κορυφῆς διελεύσεται (3).

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΖ.

Εἴαν ἐν Κύκλῳ τμήματι τῷ δαζ, ἡ ἡ βάση δζ κέντρος ἔσκηκεν ἐπὶ τὴν α. 38.
 διάμετρον αοβ. Σχήμα ἰσοπλευρον, εἰς ἄρτιόπλευρον ἐγγραφή, ἢ χθῆ δὲ ὡς ἐν τῇ προηγουμένῃ εἰς ἡ εὐθεία εβ· τὸ ὑπὸ τῆς εβ, εἰς τῆς διαμέτρου μέρους πο, ὁ εἰς ἡ ἄξων τῇ τμήματος, περιεχόμενον (Ὁρθογώνιον, ἴσον ἔσαι τῷ ὑπὸ μῆς τῶν τῇ ἐγγεγραμμένῃ Σχήματος πλευρῶν, εἰς ἀπασῶν τῶν τὰς γωνίας ἐπιζευγυσῶν βη. γθ μετὰ τῆς αο ἡμισείας τῆς βάσεως δζ ἅμα ληφθεῖσῶν περιεχομένῳ Ὁρθογώνῳ.

Ἡ δὲ δεῖξις ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ τῆς προηγουμένης (ἐστὶ γὰρ αβ:βε::ακ:κβ::λκ:κχ::λμ:μγ::νμ:μδ::νο:οδ. Ἀρα αβ:βε::ακ+κλ+λμ+μν+νο:βκ+κχ+χμ+μδ+οδ· τῷτ' ἐστὶν αβ:βε::αο:βη+γθ+δο· καὶ βε x αο = αβ x (βη+γθ+δο.)

Σχόλιον. Εἴαν Τμήμα Κύκλῳ τὸ δαζ, Σχήμα ἄρτιόπλευρόν τε, εἰς ἰσο- α. 41.
 πλευρον ἐγγεγραμμένον τὸ δαδζ δέχεται ἥτως, ὡς τὰς δύο ἀπεναντίον πλευρὰς δη, ζθ, παραλλήλους εἶναι ἀλλήλαις τε, εἰς τῷ Ἀξονι αο, δηλονότι τὸ τοιαύτον Σχήμα περὶ τὸν Ἀξονα αο (κατὰ τὰ ἐφεξῆς Λήμματα) Περιεχθὲν, Κυλινδρικήν ἀπογεννήσει ἐπιφάνειαν, ἢ Κωνικήν.

Λήμματα εἰς τὴν ἐξῆς.

Α. Εἴαν εἰς μέγιστον Κύκλον Σφαῖρας σχῆμα κανονικὸν περὶ τὸν Ἀξονα αε συνιστάμενον ἐγγραφῇ (ἢ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν μετρεῖσθαι ὑπὸ τε- α. 37.
 τράδος), τῇ δὲ Ἀξονος μένους, ὁ Κύκλος μετὰ τῇ Σχήματος περιεγόμενος αὐτῷσε πάλιν ἐπανελθῇ, ἔθεν ἤρξατο κινεῖσθαι· λέγω ὅτι εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγραφήσεται Σῶμα ἐπιφανείας ὁρθῶν Κῶνων περιελημμένον.

Αἱ μὲν γὰρ Εὐθεῖαι βα, ηα, εἰς δε, ζε, ὁλοχερεῖς ἐπιφανείας Κῶνων ὁρθῶν καταγράφουσιν (4), αἱ δὲ γβ, δη εἰς θζ, γδ προεκβληθεῖσαι, κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς Διαμέτρου αε ἐφ' ἑκάτερα προεκβληθείσης, εἰς πρὸς ὁρθάς τε εἰς δίχα τὰς ἐπιζευγυσῶν τεμνύσης, συμπεσῶνται (5)· καὶ κατα-

(1) ε. τῇ α'. (2) Πορ. Α. τῆς παρούσης. (3) Σχολ. Δ. τῆς κς. τῇ α'. (4) Ὁρισμ. Β. τῇ ιβ'. (5) Πορισμ. Γ. τῆς ις. τῇ παρόντος.

γράφουσιν ἄρα ἔς αὐταὶ ὀρθῶν Κώνων ἐπιφανείας, ἐναπολαμβανομένας μεταξὺ παραλλήλων Κύκλων, ὧν τὰς περιφερείας αἱ τῶν Γωνιῶν β, γ, δ κορυφαί ἐν τῇ τῆς Σφαίρας ἐπιφανείᾳ καταγράφουσι.

Β. Σφαιρικῷ Τμήματος, ἢ Ἀΐων ἡ αο, ἔσω τομὴ μεγίστη ἡ δαζ· ἐν ἡ Σχήμα ἀρτιόπλευρόν τε, ἢ ἰσόπλευρον πλὴν τῆς βάσεως, ἐγγεγραμμένον ἔστω, ὡς μηδεμίαν τῶν αὐτῶν πλευρῶν παράλληλον εἶναι τῷ Ἀΐονι αο. Ἐὰν οὖν τὸ τοιοῦτο Σχήμα μετὰ τῷ Τμήματος, εἰς ὃ ἐγγέγραπται, περὶ τὸν Ἀΐον αο περιεγεχθῇ, λέγω ὅτι εἰς τὸ σφαιρικὸν Τμήμα ἐγγραφήσεται Σωμὰ ὑπὸ Κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον.

Δείκνυται δὲ ὡς ἐν τῷ προτέρῳ Λήμματι.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΗ΄.

κ. 37. Τῶν αὐτῶν κειμένων τῷ πρώτῳ Λήμματι· ἐὰν ἀπὸ τῆς πέρας τῆς διαμέτρου ἐπὶ τὸ τῆς πλευρᾶς τῷ ἐγγεγραμμένῳ Σχήματος τῆς προσεχεσάτης τῇ διαμέτρῳ εὐθεΐα ἡ εβ ἀχθῇ, λέγω ὅτι πάσαις ταῖς Κωνικαῖς ἐπιφανείαις ταῖς εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμέναις ἴσος ἐστὶ Κύκλος, ἢ ἡ ἐκ τῆς κέντρου (I) δύναται τὸ Ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῆς διαμέτρου αε ἢ τῆς ὑποτευνέσης εβ περιεχόμενον, τῷ εἶναι, ἢ ἡ ἐκ τῆς κέντρου (I) μέση εἶναι ἀνάλογον τῆς τε Διαμέτρου αε, ἢ τῆς Ὑποτευνέσης εβ.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ εὐθεΐαι βη, γδ, δζ ἴσαι εἰσὶ ταῖς εὐθείαις βκ, γμ, δο δις ληφθείσαις (1)· τὸ Ὀρθογώνιον ἄρα τὸ ὑπὸ μιᾶς τῶν τῶν εἰς τὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένῳ Σχήματος πλευρῶν (τῆς αβ δηλονότι, ἢ βγ, ἢ γδ, ἢ δε) καὶ ἀπασῶν τῶν τὰς γωνίας ἐπιζευγνυσσῶν βη, γδ, δζ ἅμα ληφθεισῶν περιεχόμενον, ἴσον ἔσται τῷ ὑπὸ τῶν αβ, βκ, τῷ τε ὑπὸ τῆς βγ, ἢ τῆς συγχειμένης ἐκ τῶν βκ, ἢ γμ, ἢ τῷ ὑπὸ τῆς γδ, ἢ τῆς συγχειμένης ἐκ τῆς γμ, ἢ δο, ἢ τῷ ὑπὸ τῶν δε, δο περιεχομένῳ Ὀρθογώνιῳ (2)· οὕτω γὰρ ληφθήσεται δις ἐκάστη τῶν εὐθειῶν βκ, γμ, δο. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῆς αβ, ἢ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυσσῶν ἅμα ληφθεισῶν βη, γδ, δζ περιεχόμενον Ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αββ περιεχομένῳ Ὀρθογώνιῳ (3), τῷ εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς I τετραγώνῳ (4)· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς I τετραγώνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπὸ τῆς αβ, ἢ βκ, ὑπὸ τῆς βγ, ἢ τῆς συγχειμένης ἐκ τῶν βκ, γμ, ὑπὸ τῆς γδ, ἢ τῆς συγχειμένης ἐκ τῶν γμ, δο· ὑπὸ τῆς δε, ἢ τῆς δο περιεχομένοις ὀρθογώνιοις. Ἐὰν

(1) Πορισμ. Α. τῆς ις. τῆς πρώτης. (2) Ποστ. Β. εἰς β. (3) Ις. τῆς πρώτης.
(4) Εἰς ὑποθέσεως.

δὲ γένωνται ἤδη τῶν μὲν $\alpha\beta$, ϵ $\beta\kappa$, μέση ἀνάλογον ἢ Π . τῆς δὲ $\beta\gamma$ καὶ τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν $\beta\kappa$, $\gamma\mu$, ἢ Ξ . τῆς τε $\gamma\delta$ ϵ τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν $\gamma\mu$, $\delta\sigma$, ἢ P . ϵ τῶν $\delta\epsilon$, $\delta\sigma$, ἢ Σ . ἔσεται δὲ τὰ ἀπὸ τῶν Π , Ξ , P , Σ τετράγωνα τοῖς εἰρημένοις ὀρθογωνίοις ἴσα (1). δέδεικται δὲ ἤδη τοῖς ὀρθογωνίοις ταῖς ἴσον ϵ τὸ ἀπὸ τῆς I τετράγωνον. Τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς I ἴσον ἔσαι τοῖς ἀπὸ τῶν Π , Ξ , P , Σ τετράγωνοις. Ἐπεὶ δὲ οἱ κύκλοι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐκ τῆς κέντρου τετράγωνα (2). ϵ ὁ ἀκτῖνι ἄρα τῇ I γραφεὶς κύκλος ἴσος ἔσαι πᾶσι τοῖς κύκλοις, ὧν ἀκτῖνες αἱ Π , Ξ , P , Σ , ὁμῶς ληφθεῖσιν. Ἀλλ' οἱ ἀπὸ τῶν ἀκτίνων Π , Σ γραφόμενοι κύκλοι ἴσοι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ τῶν πλευρῶν $\alpha\beta$, $\epsilon\delta$ παραγομέναις κωνικαῖς ἐπιφανείαις· μέση γὰρ ἐστὶν ἀνάλογον ἢ Π τῆς τε $\alpha\beta$ πλευρᾶς τῆς $\kappa\omega\nu\eta$ ϵ τῆς $\beta\kappa$ ἀκτίνος τῆς βάσεως (3). Ἐὰν δὲ ἢ μέση ἀνάλογον ϵ τῶν $\epsilon\delta$, $\delta\sigma$. καὶ ὁ ἀπὸ ἀκτίνος τῆς Ξ γραφόμενος κύκλος ἴσος ἔσαι τῷ Τμήματι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ δύο παραλλήλων κύκλων, ὧν διάμετροι αἱ $\gamma\delta$, $\beta\eta$. ϵ γὰρ ϵ ἢ Ξ μέση ἐστὶν ἀνάλογον τῆς τε $\beta\gamma$ ϵ τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν $\beta\kappa$, $\gamma\mu$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ταῦτα ϵ ὁ κύκλος ὁ ἀκτῖνι τῇ P , ἴσος ἔσαι τῷ Τμήματι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων κύκλων, ὧν διάμετροι αἱ $\gamma\delta$, $\delta\zeta$. Ὁ κύκλος ἄρα ὁ ἀπὸ ἀκτίνος τῆς I γραφόμενος ἴσος ἔσαι πάσαις ἅμα ληφθεῖσαις ταῖς κωνικαῖς ἐπιφανείαις ταῖς εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμέναις, ὃ ἔδει δεῖξαι.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΙΘ'.

Κειμένων δὲ τῶν αὐτῶν τῷ δευτέρῳ Λήμματι, ἀχθείσῃς τε ὡσαύτως τῆς $\epsilon\beta$ ἀπὸ τῆς πέρατος τῆς διαμέτρου $\alpha\epsilon$ ἐπὶ τὸ πέρας τῆς προσεχέσας τῇ διαμέτρῳ πλευρᾶς $\alpha\beta$, λέγω ὅτι πάσαις ταῖς εἰς τὸ σφαιρικὸν Τμήμα $\delta\alpha\zeta$ ἐγγεγραμμέναις ἐπιφανείαις, ἴσος ἐστὶ κύκλος, ὃ ἢ ἐκ τῆς κέντρου μέση ἐστὶν ἀνάλογον τῆς ὑποτείνουσας $\epsilon\beta$ ϵ τῆς κατὰ τὸ Τμήμα ἄξονος $\alpha\sigma$.

Ἡ δὲ δεῖξις τὰ μὲν ἄλλα ἢ αὐτὴ τῇ τῆς προηγουμένης, πλὴν ὅσον ἀντὶ τῆς $I\zeta'$. ληπτέον εἰς ταῦτα τὴν $I\zeta'$.

Π ρ ό τ α σ ι ς Κ'.

Αἱ εἰς σφαῖραν ἐγγεγραμμέναι κωνικαὶ ἐπιφάνειαι εἰς τὴν τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν ἀπολήγουσιν.

(1) $I\zeta$. τῷ ϵ . (2) Πόρισμ. Β. τῆς β . τῷ $\iota\beta$. (3) Διὰ τὸ αὐτὸ πόρισμα. (4) $I\Gamma$. τοῦ παρ.

κ. 39.

Εἴσω δοθεῖσα ἐπιφάνεια ὁσωνδηποτέρῃ ἐλαχίστη ἢ Χ. Δῆλον ὅν, ὅτι δυνατόν ἐστι δοθῆναι ἐντὸς τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἀγεθ' ἑτέραν ὁμόκεντρον ἐπιφάνειαν ταύτης ἐλλείψαν ποσότητι ἐλάσσονι πάσης δοθείσης τῆς Χ. Ἐκτέρων δὲ ἐπιπέδῳ διὰ τῷ κέντρῳ τμηθεῖσθαι, ἔσονται μέγιστοι κύκλοι οἱ ἀγεθ', δπλμ· ἢ χζω ἢ διάμετρος αδε· καὶ ἀπτεῖσθαι τῇ κύκλῳ κατὰ τὸ δ ἢ νξ· εἰάν ὅν τὸ τόξον αε δίχα τμηθῇ κατὰ τὸ γ· καὶ ἑκάτερον τῶν τμημάτων δίχα αὖτις ὑποτμηθῇ (ἐν δέ γε τῷ 18 σχήματι τριχοτομητέον τὸ τεταρτημορικὸν τόξον αγ, ὃ δὲ καὶ αὐτὸ γενήσεται κατὰ τὸ Γ'. Πόρισμα τῆς ΙΕ'. τῷ Δ'), ἄχρις ὅτε ληφθήσεται τέως τόξον τὸ αβ ἐλαττον τῇ αν (1), δῆλον ὅτι εἰάν ὑποτείνῃ τὸ τόξον ἢ αβ, ἢ ἐφάψεται τῆς περιφερείας δπλμ, ἀλλ' ἔσεται πλευρὰ τῷ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἀγεθ' ἐγγεγραμμένῃ ἰσοπλεύρῃ, καὶ ἀρτιοπλεύρῃ σχήματος, ἢ αἱ πλευραὶ ὑπὸ τετραδὸς μετρῶνται, καὶ ἡδὲμία τῶν τῆς περιφερείας δπλμ ἐφάπτεται. Εἰάν ὅν περὶ τὴν διάμετρον αε τὰ πάντα περιενεχθῇ, φανερόν, ὅτι εἰς τὴν ἐκτὸς σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν κωνικαὶ ἐπιφάνειαι ἐγγραφήσονται, αἵτινες τὴν ἑτέραν ὁμόκεντρον σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν περιέξουσιν, καὶ ἐπομένως μείζονες αὐτῆς ἔσονται (2)· καὶ ἐπεὶ ἡ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια δπλμ ἐλλείπει τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἀγεθ' ποσότητι ἐλάσσονι πάσης δοθείσης τῆς Χ· πολλῶ δὲ μᾶλλον ἐλάσσονι ποσότητι τῆς δοθείσης Χ ἐλλείψουσιν αἱ κωνικαὶ ἐπιφάνειαι τῆς αὐτῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἀγεθ' (3)· ἀπολήγουσιν ἄρα εἰς τὴν ἀγεθ' ἐπιφάνειαν, ὃ ἔδει δεῖξαι.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΑ'.

κ. 41.

Αἱ εἰς σφαιρικὸν τμήμα τὸ δαζ' ἐγγεγραμμέναι κωνικαὶ ἐπιφάνειαι εἰς αὐτὴν τὴν τῷ σφαιρικῇ τμήματος ἐπιφάνειαν ἀπολήγουσιν.

Δείκνυται τοῖς αὐτοῖς ὁμοίᾳ τῇ προηγουμένη συλλογισμοῖς.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΒ'.

κ. 40.

Δέδεικται ἐν τῇ ΙΗ'. ὅτι ὁ κύκλος, ὃς ἢ ἐκ τῷ κέντρῳ μέση ἀνάλογόν ἐστι τῆς τε διαμέτρου αε καὶ τῆς ευθείας εβ τῆς ἀγομένης ἀπὸ τῷ πέρατος τῆς διαμέτρου αε ἐπὶ τὸ πέρας τῆς τῷ σχήματος πλευρᾶς αβ τῆς προσεχέσασθαι τῇ διαμέτρῳ, ἴσος ἐστὶ πάσαις ταῖς εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμέναις κωνικαῖς ἐπιφάνειαις.

(1) Διημ. Β. σχολ. μετὰ τὴν ια'. τῷ ε'. (2) Δέξιμ. μ. γ'. τῷ παρόντος. (3) Οἱσιν. ε. τῷ ιβ'.

υεΐαις. Νῦν δὲ λέγω ὅτι ὁ κύκλος ἥτος ἀπολήγει τελευταῖον εἰς κύκλον, οὐ ἢ ἐκ τῆ κέντρῃ ἐσιν ἢ τῆς σφαίρας διάμετρος αε (1).

Ἐὰν γὰρ πλείς αἰ εἰ μᾶλλον πλείς εἰς ἄπειρον πλευραὶ εἰς τὸν μέγιστον ἐγγραφῶσι κύκλον (αἶγε περὶ τὴν αε περιενοχθεῖσαι, κωνικὰς ἀπογεννώσιν ἐπιφανείας), δῆλον ὅτι ἡ αβ πλευρὰ γενήσεται τελευταῖον πάσης δοθείσης εὐθείας ἐλάσσων· καὶ ἡ διαφορὰ τῶν αε, βε γενήσεται δὴ καὶ αὕτη πάσης δοθείσης ἐλάσσων· εἰ πολλῶ δὴ μᾶλλον ἐλάσσονι ποσότητι πάσης δοθείσης διοίσει τῆς αε ἢ τὸν μέσον λόγον ἔχουσα τῶν αε, εβ, ἥτις αἰ ἐστὶ μείζων τῆς εβ. Καὶ ὁ κύκλος ἄρα, ὃ ἡ ἡμιδιάμετρος μέση ἀνάλογον εἴη τῶν αε, εβ, ποσότητι πάσης δοθείσης ἐλάσσονι διοίσει τῷ κύκλῳ, ὃ ἡμιδιάμετρος ἢ αε, τῷ ἐσιν εἰς αὐτὸν ἀπολήξει (2). Ὅ ἔδει δεῖξαι.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΓ΄.

Δέδεικται ἐν τῇ ΙΘ΄. ὅτι ὁ κύκλος, οὐ ἢ ἐκ τῆ κέντρῃ μέση ἐσιν ἀνάλογον τῆς ὑποτείνουσας εβ εἰ τῷ κατὰ τὸ Τμήμα ἄξονος αο, ἵσος ἐστὶ πάσαις ταῖς εἰς τὸ σφαιρικὸν τμήμα διὰ ἐγγεγραμμέναις κωνικῆς ἐπιφανείαις. Νῦν δὲ λέγω, ὅτι ὁ Κύκλος ἥτος ἀπολήγει εἰς Κύκλον, ὃ ἡ ἡμιδιάμετρος ἐσιν ἢ αδ, ἢ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῷ Τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἡγμένη τῷ Κύκλῳ δεξν, ὃς ἐστὶ βάσις τῷ Τμήματος. x. 41.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ εβ ἀπολήγει τελευταῖον εἰς τὴν αε, ὡς δῆλον ἐκ τῆς προηγμένηςδείξεως, δῆλον ὅτι εἰ ἡ μέση ἀνάλογον τῶν εβ, αο, ἀπολήξει τελευταῖον εἰς τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν αε, αο, ἄτ' ἐσιν εἰς αὐτὴν τὴν αδ (3). Καὶ ὁ Κύκλος ἄρα, οὐ ἢ ἐκ τῆς κέντρῃ μέση ἐσιν ἀνάλογον τῶν εβ, αο, ἀπολήξει εἰς τὸν Κύκλον, ὃ ἡ ἡμιδιάμετρος ἢ αδ. Ὅ ἔδει δεῖξαι.

Λήμμα εἰς τὴν ἐξῆς.

Ἐὰν ἡ Διάμετρος διπλασία ἢ τῆς Διαμέτρου, ὁ Κύκλος ἔσται τετραπλάσιος τῷ Κύκλῳ.

Δείκνυται ἐκ τῆς Β΄. τῷ ΙΒ΄, εἰ τῷ Γ΄. Ὅρισμὸς τῷ Ε΄. (ἢ ἐκ τῷ Γ΄. Πορίσματος τῆς Β΄. τῷ ΙΒ΄).

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΔ΄.

Πάσης Σφαίρας ἢ ἐπιφάνεια τετραπλάσια ἐστὶ τῷ μεγίστῳ Κύκλῳ τῶν ἐν αὐτῇ. x. 40.

(1) Ὅρισμ. ε. τῷ ιβ. (2) Ὅρισμ. ε. τῷ ιβ. (3) Πορίσμ. Β. τῆς κ'. τῷ ε'.

Τὸ ἐξαίρετον τῷ Ἀρχιμήδους τῷτο Θεώρημα ῥῆσα ἂν ἀποδειξαίμεν ἐκ τῶν ἤδη κειμένων, ἢ προαποδειχθέντων ἔτῳσι.

Εἰν μεγίστῳ Κύκλῳ τῆς σφαίρας νοεῖσθω περὶ τὴν διάμετρον αε Σχῆμα κανονικὸν ἐγγεγραμμένον (ἢ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν ὑπὸ τετραδὸς μετρεῖσθω), ὃ περὶ τὴν αε περιενοχθὲν, ἀπογεννήσει Κωνικὰς ἐπιφανείας εἰς τὴν Σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν ἐγγεγραμμένας· καὶ ἦχθω ἡ εβ. Δίδεσται δὴ (1), ὅτι πᾶσαι αἱ Κωνικαὶ ἐπιφάνειαι, αἱ εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμέναι, ἴσαι εἰσὶ Κύκλῳ, ἢ ἡ ἐκ τῷ Κέντρῳ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν αεβ Ὀρθογώνιον, τῷτ' ἐσιν, ἢ ἡ Ἡμιδιάμετρος μέση ἐσὶν ἀνάλογον τῶν αε, εβ. (Ὅπερ συμβαίνει αἰεὶ ὅσον ἂν τῶν ἐγγραφῶν εἰς ἄπειρον ἐχώμεθα)· ἐπεὶ δὲ αἱ εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμέναι Κωνικαὶ ἐπιφάνειαι εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ἀπολήγῃσι τελευταῖον τῆς Σφαίρας, ἥς ἡ ἐκ τῷ Κέντρῳ μέση ἐσὶν ἀνάλογον τῶν αε, εβ (2)· ὁ δὲ Κύκλος, ᾧ τινι ἴσῃται αἱ κωνικαὶ ἐπιφάνειαι, ἀπολήγῃ εἰς Κύκλον, ἢ Ἡμιδιάμετρος ἐσὶν ἡ αε, τῷτ' ἔσιν ἡ τῆς Σφαίρας διάμετρος (3)· ἡ τῆς Σφαίρας ἄρα ἐπιφάνεια ἴση ἔστι Κύκλῳ, ἢ Ἡμιδιάμετρος ἡ αε, τῷτ' ἐσὶ (4) τετραπλασίῳ τῷ μεγίστῳ Κύκλῳ (αγεθ) τῶν ἐν αὐτῇ· ὃ ἔδει δεῖξαι.

Ὅ τὰ Ἀρχιμήδους μετιῶν εἴπεται ὅσον ἐπιτομωτέρα, ἢ σαφεστέρα τῆς τῷ Ἀρχιμήδουςδείξεως ἐσὶν, ἢ πορ αὐτοὶ ἐν τῷ παρόντι Θεωρήματι ἐχρησάμεθα.

Π ο ρ ί σ μ α τ α .

Α'. Εἰκ τῷ ἐξαίρετῳ καὶ θαυμασίῳ τῷδε Θεωρήματι, ὃ κλέος αἰθιον περιποιήσατο Ἀρχιμήδους παρὰ πᾶσι τοῖς Γεωμέτραις, ἕνεσι λαβεῖν Κύκλον ἴσον τῇ τῆς Σφαίρας ἐπιφανείᾳ· οὗτος δὲ ἐσὶν, ἢ ἡ Ἡμιδιάμετρος ἴση τῇ τῆς Σφαίρας διαμέτρῳ, ἢ ἢ ἡ Διάμετρος διπλασία τῆς τῆς Σφαίρας διαμέτρου.

Β'. Εντεύθεν καὶ ἐκ τῆς Β'. τῷ IB'. μετὰ τῆς IE'. τῷ E'. δηλον, ὅτι αἱ τῶν Σφαιρῶν ἐπιφάνειαι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ἐν λόγῳ διπλασσίονι τῶν ἐν αὐταῖς Ἡμιδιαμέτρων.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Ρᾶσι ἤδη ἐσὶν ἡ καταμέτρησις τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας τῆς ἀπασῶν τῶν καμπύλων τὰ πρωτεῖα φερύσης. Ὁ τρόπος δὲ ταύτης διττός.

Α'. Μὲν γὰρ μετρεῖσθω Κύκλος ὁ μέγιστος τῆς Σφαίρας, ὡς παραδίδου

(1) IH. τῷ ταξέντος. (2) K. τῷ παρ. (3) KB. τῷ παρ. (4) Διὰ τὸ προηγ. Διμ.

Πάσης Σφαιρικῆς μορφᾶς (βαλ) ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ Κύκλῳ, ἢ ἡμίσεια-
μερος ἐστὶν εὐθεία (ἢ αβ) ἡ ἀπὸ τῆς κατὰ τὴν μορφᾶν κορυφῆς ἐπὶ τὴν περι-
φρείαν ἡγμένη τῇ Κύκλῳ (δοξ), ὅς ἐστι βάσις τῆς μορφᾶς.

Μέρος Δ'. Ἐν μερίδεσσι τομῆς μορφᾶς Σχημα νοείδω ἐγγεγραμμένον περι-
τὸν Ἀΐονα αὐτοῦ πλευρόν τε, εὐαγρίον πλευρόν χωρὶς τῆς βάσεως (ἢ μηδέμι-
α καὶ ἐν τῇ μορφᾷ ἐπιφανείας ἐγγράψαι· ἢ χθισ δὲ εὐαγρίον αὐτοῦ περιεγε-
χθισ, Κωνι-
ρον (3). Πάσαι οὖν αἱ εἰς τὸ Τμήμα ἐγγεγραμμέναι Κωνικαὶ ἐπιφανείαι, ἴσαι
εἰσι Κύκλῳ, ἢ ἡ ἓκ τῇ Κέντρῳ μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῆς εὐθείας εἰς, εὐαγρί-
κα τὸ Τμήμα Ἀΐονος αὐτοῦ (4). Τύτο δὲ συμβήσεται εἶσαί, ἐπαναλαμβάνον-
των τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς ἀπειρον. Τούτων, εἰπεὶ καὶ αἱ εἰς τὸ Τμήμα ἐγ-
γεγραμμέναι Κωνικαὶ ἐπιφανείαι εἰς Σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν Τμήματος ἀπολ-
ή-

(1) Ὅσα ὅμοια εἰσὶν. 340. (2) Ὅσα Σχολ. τῆς ΙΖ. τῇ παρόσῳ. (3) ΙΗ. ἢ ΙΘ.
τῇ παρόσῳ. (4) ΙΘ. τῇ παρόσῳ.

ταὶ ἐν τῷ μεταὶ τῆς δ'. τῆ παρόντος Σχολίῳ, καὶ πεπολλασιαδίῳ διὰ 4. Οἷον ἐὰν ἐυθεῖῃ ἢ τῆ κατὰ γῆν μεγίς Κύκλῳ ἐπιφάνεια τετραγωνικῆ μίθια 276 καὶ, εἴ' ἔν Βελγικῆ περιέχουσα 5. 94000, ὁ ἀριθμὸς ἕκτος τετραπλασιασθεὶς, διδωσι τετραγωνικῆ μίθια Βελγικῆ 23. 76000, εἰς τὴν τῆς γῆς Σφαίρας ἐπιφάνειαν.

Β'. Δι' ἣ τῆς Σφαίρας διήμερος πολλαπλασιασθεὶσα διὰ τῆς περιφερείας τῆ μεγίς Κύκλῳ τῶν ἐν αὐτῇ, διδωσι τὴν τῆς Σφαίρας ἐπιφάνειαν. Οἷον εἴπερ ἡ τῆς Γῆς διήμερος μίθια Βελγικῆ ὥρικῆ περιέχου ἐποτεδίκη 2750 $\frac{1}{2}$, ἡ δὲ τῆ κατ' αὐτὴν μεγίς Κυκλῶ περιφεία 8640 (1), οἱ δὲ ὅςτοι ἀριθμοί, ἀμεινόμεναι τῆ κλάσματος, πολλαπλασιασθεὶσας ἐπ' ἀλλήλας, δώσουσι πάλιν τετραγωνικῆ μίθια ὥρικῆ 23. 76000 εἰς τὴν ὅλην τῆς γῆς Σφαίρας ἐπιφάνειαν.

Τὰ δὲ τῆς διέξως πρόδηλα ἐκ τῆ Α'. Πρίσματος τῆς Ε'. τῆ παρόντος. Τὸ γὰρ ὑπὸ τῆς κατὰ τὴν Σφαίραν διαμέτρου, καὶ τῆς τῆ κατ' αὐτὴν μεγίς Κυκλῳ περιφερείας περιεχομένου Ὀρθογώνιον, εἴς, διὰ τὸ εἰρημένον Πρίσμα, τετραπλασίον τῆ μεγίς Κύκλῳ.

(Περὶ δὲ τῶν ἐν τῷ παρόντι Σχολίῳ παραληφθέντων ἀριθμῶν ὅρα τὰ ἐν τῷ μεταὶ τῆς δ'. τῆ παρόντος Σχολίῳ εἰρημένα).

γῆσιν (1), ὅτε Κύκλος, ἢ ἡ ἐκ τῆς Κέντρου μέση εἰς ἀνάλογον τῶν εβ, αο, εἰς Κύκλον, ἢ ἡμιδιάμετρος ἡ αδ, ἀποτελευτᾷ (2). ἢ ἡ τῆς Σφαιρικῆς μοίρας ἄρα ἐπιφάνεια δαζ, ἴση εἶσαι Κύκλῳ, ἢ ἡμιδιάμετρος ἡ αδ (3). Οὔτω δειῖται.

Μέρος Β'. Α' πὸ τῆς κορυφῆς α τῆς ἐλάσσονος Σφαιρικῆς μοίρας δεζ ἢ χθω ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως εὐθεῖα ἡ εδ, ἢ ἐπεξευχθῶ ἡ αδ. Καὶ εἰ πει ἡ ὑπὸ αδε γωνία εἰς ὀρθή (4). ὁ ἀπὸ ἀκτίνος ἄρα τῆς αε γραφόμενος Κύκλος, εἶσαι ἴσος τοῖς ἀπὸ τῶν αδ, εδ, γραφομένοις ἅμα ληφθεῖσιν (5). Α'λλ' ὁ μὲν ἀπὸ τῆς αε Κύκλος ἴσος εἰς τῇ ὅλῃ Σφαιρικῇ ἐπιφανείᾳ (6), ὁ δ' ἀπὸ τῆς αδ, ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς μείζονος μοίρας δαζ (7). ὁ ἄρα ἀπὸ τῆς εδ Κύκλος ἴσος εἰς τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς ἐλάσσονος μοίρας δεζ.

Ταῦτὶ τὸ δεύτερον εἰς ἐκ τῶν λόγων ἀξίων τῆς Ἀρχιμήδους εὐρέσεων, ὅπερ ἡμεῖς (ὥσπερ δὴ ἔστι τὸ προηγούμενον) πολὺ δὴ μάλλον ἐπιτομώτερον, ἢ σαφέστερον, ἢ περ αὐτὸς Ἀρχιμήδης, εἰδείξαμεν.

Πόρισμα. Ἐντεῦθεν δοθείσης τῆς κατὰ τὴν Σφαῖραν διαμέτρου αε, ἢ τῆς Σφαιρικῆς μοίρας δαζ Ἀ'ξονος αο (ἢ δοθέντων τῶν Ἀ'ξονος αο, ἢ τῆς κατὰ τὴν βάσιν ἡμιδιαμέτρου οδ), εὐρίσκεται ἡ αδ ἡμιδιάμετρος Κύκλου, ὅς ἐστι ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς Σφαιρικῆς μοίρας, ἢ ἐντεῦθεν ἡ καταμέτρησις τῆς κατὰ τὴν Σφαιρικὴν μοῖραν ἐπιφανείας. Ἐπεὶ γὰρ εἰσὶ αε, αδ, αο :: (8), ἔσται δὴ ἡ αδ = $\sqrt{(αδ \times αο)}$ (9) (ἢ ἐπειδὴ τὸ Τρίγωνον αοδ εἰς Ὀρθογώνιον, εἶσαι αδ = $\sqrt{(αο^2 + οδ^2)}$ (10). Οὗθεν εἰς γένηται ὡς 113 πρὸς 355, ὥτως ἡ αδ πρὸς τέταρτον ὅρον· ὅτος ὁ τέταρτος πολλαπλασιασθεὶς διὰ τῆς αδ, δώσει ἐμβαδὸν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς Σφαιρικῆς μοίρας ἴσον. Δείκνυται ἐκ τῆς πωρούσης, ἢ ἐκ τῆς μετὰ τὴν ζ'. Σχολίῃ σὺν τῇ ΙΕ'. τῇ Ε'.

Π ρ ό τ α σ ι ς Κς.

κ. 42.

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς περὶ τὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένης ὀρθῆς Κυλίνδρου ἡπσυ, ἴση εἰς τῇ τῆς Σφαίρας ἐπιφανείᾳ. Καὶ εἰς τὸν Κύλινδρον, ἢ ἡ Σφαῖρα Ἐπιπέδοις ὀρθοῖς ἐπὶ τὸν Ἀ'ξονα βθ τμηθῶσιν, ἕκαστον Τμήμα τῆς Κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἐκάσῳ τμήματι τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἔσται ἴσον.

Μέρος Α'. Ἐπεὶ γὰρ ἡ τῆς Κυλίνδρου πλευρὰ ἡπ ἴση εἰς τῇ τῆς βάσεως διαμέτρῳ πσ (11), ἔσται ἡ Κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ἡσ τετραπλασία τῆς βά-

(1) Κ. τῶ παρόντος. (2) ΚΓ. τῶ παρόντος. (3) Β. τῶ παρόντος. (4) ΑΓ. τῶ γ'. (5) Πορισμ. Η'. τῆς Β. τῶ β'. (6) Δῆλον ἐκ τῆς ΚΔ. τῶ παρόντος. (7) Δῆλον ἐκ τῆς πρώτης μέρους τῆς παρούσης. (8) Πορισμ. Β'. τῆς Η. τῶ ζ'. (9) ΙΖ. τῶ ζ'. (10) ΜΖ. τῶ α'. (11) Ε' ἐξ ὑποθέσεως.

σεως (1), τὰτ' ἐστὶ τὰ μεγίστη Κύκλου τῶν ἐν τῇ Σφαίρᾳ τῇ εἰς τὸν Κύλινδρον ἐγγεγραμμένη. Τετραπλασία δὲ τῆς τέτα επιφανείας ἐστὶ καὶ ἡ τῆς Σφαίρας ἐπιφάνεια (2)· ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τῷ Κυλίνδρῳ ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς Σφαίρας. Ὅ' εἶδει δείξαι.

Μέρος Β'. Η' χθωσαν εὐθεῖαι αἱ βο, οδ. Ἐπεὶ ἡ γωνία βοθ εἰς ὀρθὴν ἐν Η' μικυκλίῳ (3), καὶ ἡ ογ κάθετος ἐπὶ τὴν βο· ἡ ἄρα βο μέση εἰς ἀνάλογον τῆς βθ, καὶ βγ (4), τὰτ' ἐστὶ τῆς ιτ, καὶ τῆς ηι. Ὁ Κύκλος ἄρα, ὁ ἀπὸ ἀκτίνος τῆς βο, ἴσος ἐστὶ, τῇ Κυλινδρικῇ ἐπιφανείᾳ ητ (5)· ἐστὶ δὲ ἴσος καὶ τῷ τμήματι τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας οβκ (6)· ἡ Κυλινδρικὴ ἄρα ἐπιφάνεια ητ, ἴση τῇ Σφαιρικῇ βοκ.

Ἐπεὶ δὲ διὰ τὰ αὐτὰ διὰ ταῦτα καὶ ἡ Κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ιχ εἰς ἴση τῇ Σφαιρικῇ ξβρ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ Κυλινδρικὴ ιχ λοιπῇ τῇ Σφαιρικῇ ξοκρ, τῇ μεταξύ δύο παραλλήλων Κύκλων ἴση ἐστὶ. Καὶ τὸ αὐτὸ δεῖχθήσεται περὶ πάντων τῶν Τμημάτων.

Πόρισμα. Ἐντεῦθεν δῆλον, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια Κυλίνδρου περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένη, διπλασία ἐστὶ τῆς βάσεως.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΖ'.

Τὰ Σφαιρικῆς ἐπιφανείας Κύκλοις παραλλήλοις τετμημένης τμήματα, λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα, ὅν τὰ τμήματα τῆς διαμέτρου (βγ, γδ, δα, αε, ιζ, ζθ), πρὸς τὰς Κύκλους τὰς παραλλήλους ταῖς εὐθείαις. κ. 42.

Ἐπεται ἐκ τῷ προηγουμένῳ. Τὰ γὰρ τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας τμήματα οβκ, ξοκρ, μξβν κτ., ἴσα ἐστὶ τοῖς Κυλινδρικοῖς ητ, ιχ, λν κτ. (7). Ἀλλὰ ταῦτα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα, ὅν τὰ τῷ Ἀξονος τμήματα βγ, γδ, δα (8)· κακείνα ἄρα. Ὅ' εἶδει δείξαι.

Σ χ ό λ ι ο ν.

Ἐντεῦθεν γινώσκεται ὁ τῶν Ζωνῶν, καὶ Κλιμάτων πρὸς ἄλληλα λόγος. Ἐστὶ γὰρ πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τῷ Ἀξοντος τμήματα, ὃ περ γινώσκεται ἐκ τῷ Πίνακος τῶν Η' μιτόνων.

Ἐκ τῆς αὐτῆς δὲ καὶ ἡ τῶν τμημάτων τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας πορίζεται

(1) Πορισμ. τῆς ΙΒ. τῷ παρόντος. (2) ΚΔ. τῷ παρόντος. (3) ΛΔ. τῷ γ'. (4) Πορισμ. Β'. τῆς Η. τῷ ε'. (5) ΙΔ. τῷ παρόντος. (6) Ἐκ τῆς προηγουμένης. (7) Ἐκ τῆς προηγουμένης. (8) ΙΓ. τῷ β'.

καταμέτρησις. Ἐπεὶ γὰρ ἐκ τῆ Σχολίῃ τῆς ΚΔ', ἥ τε ὅλη τῆς Σφαίρας γινώσκειται ἐπιφάνεια, καὶ ὁ τῶν τμημάτων πρὸς ἄλληλα λόγος, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ λόγῳ τῶν τῆ Α'ξονος τμημάτων· φανερόν ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν τμημάτων τῆς σφαίρας γνωσθήσεται.

Γίεον δ' ἐτι ὡς τὰ τέτταρα προηγούμενα Θεωρήματα, καὶ πάντα τὰ ἐπόμενα, ἐξαίσιά τε ἐστὶ, καὶ θαυμάσια, καὶ ἔκ ἂν εἰποῖς ὅσῃν σπουδῇν εἰς τὴν τούτων κατάληψιν καταβλητέον ἐστὶ τὰς Γεωμετρῶντας.

Λήμμα εἰς τὴν ἐξῆς.

κ. 43. Ἐὰν Ἐπίπεδον (τὸ ξν) Σφαίρας ἐφάπτηται κατὰ τὸ ο, ἢ ἀπὸ τῆ Κέντρου τῆς Σφαίρας ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἀγομένη εὐθεῖα (αο), κάθετος ἐστὶ τῷ ἐφαπτομένῳ Ἐπιπέδῳ.

Τετμήσθωσαν τότε ἐπιψάουον Ἐπίπεδον, καὶ ἡ Σφαῖρα διὰ τε τῆ Κέντρου α, καὶ τῆ τῆς ἀφῆς σημείῳ ο δυσὶν Ἐπιπέδοις (ὧν τομὴ ἔσται ἡ αο), ἅτινα ἐν μὲν τῇ Σφαίρᾳ Κύκλους ἀπογεννώσιν τὰς οδ, οδ, ἐν δὲ τῷ Ἐπιπέδῳ νξ εὐθείας τὰς γο, ιο, αἵτινες τῶν Κύκλων κατὰ τὸ σημεῖον ο συνεφάπτονται (1). Ἡ ἄρα αο κάθετος ἐστὶν ἐκατέρᾳ τῶν ιο, γο (2)· ἐπομένως δὲ καὶ τῷ Ἐπιπέδῳ νξ (3). Οὗ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα. Ἐντῷδε συνάγεται, ὅτι Σφαῖρα ἐπ' ἀκριβὲς λεία ἐν Ἐπιπέδῳ ὀριζονταίῳ ἐπ' ἀκριβὲς λείῳ τῷ νξ τῆς Γῆς κατὰ τὸ ο ἐπιψάουον τεθεῖσα, ἢ κήσεται, εἰμὴ κατὰ τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς ο γενομένη. Οἶον ἐὰν Σφαῖρα ἐν τῷ σημείῳ ι τεθεῖ, αὕτη δὲ διὰ τε τὴν αὐτῆς βαρύτητα, καὶ τὴν τῆ Ἐπιπέδου ἐπίκλισιν ἐπὶ τὸ σημεῖον ο γενήσεται. Ἀχθείτης γὰρ τῆς αἰ, ἡ τὴν ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ Τριγώνῳ αοι ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνετα πλευρὰ αἰ, μείζων ἐστὶ τῆς πλευρᾶς αο (4) Διὰ τοι τῷτο ἡ Σφαῖρα μᾶλλον ἀφέστηκε τῇ Κέντρῳ ἐν τῷ ι ὅσα, ἢ περ ἐν τῷ ο. Οὐκ ἄρα κήσεται ἐν τῷ ι, ἀλλὰ καταβήσεται ἐπὶ τὸ ο. Ἄλλως γὰρ ἔκ ἂν ἔχοιμεν ἀποδείξαι τὴν τῶν ρευσῶν κατάβασιν, ἔτε μὴν τὴν εἰς σφαιροειδῇ ἐπιφάνειαν αὐτῶν διαμόρφωσιν.

Λήμμα εἰς τὴν Γ'. συνέπειαν τῇ ἐπομένῃ Σχολίᾳ. Ἐΐωσαν ο, π, ξ, τριῶν Κύκλων περιφέρειαι, καὶ ρ, σ, τ, τούτων ἡμιδιάμετροι· καὶ κείδω $\rho - \sigma = \tau$ · ἔσται δὲ $\sigma - \pi = \xi$.

Ἐστὶ γὰν $\sigma : \pi :: \rho : \sigma$ (5)· καὶ $\pi : \xi :: \sigma' : \tau$ · ἄρα $\sigma - \pi : \xi :: \rho - \sigma : \tau$ (6). Ἀλλὰ $\rho - \sigma = \tau$, ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα καὶ $\sigma - \pi = \xi$ (7).

(1) Ορίσμ. Β. τῷ γ'. (2) ΙΗ. τῷ γ'. (3) Δ. τῷ ια'. (4) ΙΘ. καὶ Πορίσμ. Β. τῷ ιβ'. (5) Ζ. τῷ παρόντος. (6) Πορίσμ. Β. τῆς ΚΒ. τῷ ε'. (7) Ορίσμ. Β. τῷ ε'.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΗ'.

Πᾶσα Σφαῖρα ἴση ἐστὶ Κένῳ (τῷ φο), ἢ τὸ μὲν ὕψος (κο) ἴσον ἐστὶ τῇ κ.44 45-46
 Ἡμιδιαμέτρῳ τῆς Σφαίρας· ἡ δὲ βάσις (φ) ἴση τῇ τῆς Σφαίρας ἐπιφανείᾳ.

Νοεῖδω περὶ τὴν Σφαῖραν σῶμά τι πολυέδρον περιγεγραμμένον, ἢ τὰς
 ἐκείνης γωνίας Εἰπίπεδα ἕτερα τῆς Σφαίρας ἐπιφάνοντα ἀποτεμνέτω· οὗ γε-
 νομένη, σῶμα ἕτερον πολυέδρον περιλαμβάνον τὴν Σφαῖραν ἀπογεννήσεται
 τῷ προτέρῳ ἔλασπον, ἐκ πλειόνων τε γωνιῶν συνιστάμενον καὶ ἐπιφάνειαν ἔχον
 ἐκ πλειόνων καὶ ἐλασσόνων Εἰπιδέων τῆς Σφαίρας ἐπιφανόντων συγκειμένην.
 Εἴαν δὲ τῷ πολυέδρῳ τῷ αἰ ἐκείνῳ γωνίαι Εἰπιδέοις ἑτέροις ἐπιφάνουσι τῆς
 Σφαίρας αὐτῆς ἀποτμηθῶσιν, καὶ τῷ ἐντεῦθεν ἀπογεγεννημένῳ πολυέδρῳ αἱ
 γωνίαι ὁμοίως ἀποτμηθῶσιν, καὶ ὕτως ἐπ' ἄπειρον· γενήσεται τέως, ὥς τε τὸ
 μὲν πολυέδρον ὑπερέχειν τῆς Σφαίρας ἐκείνῳ παντὸς δοθέντος ἀλάσσοι· τὴν
 δὲ τῷ ἐπιφάνειαν τὴν ἐξ Εἰπιδέων ἐπιφανόντων ἀπειρῶν, καὶ ἐλασσόνων καὶ
 δὴ καὶ πλειόνων (ὥς εἶπον) συγκειμένην, ὑπερέχειν ὡσαύτως τῆς Σφαιρικῆς ἐπι-
 φανείας Εἰπιδέῳ παντὸς δοθέντος ἀλάσσοι. Ὅπερ ἔχει μὲν ἐκάτερον ἀπο-
 δειχθῆναι, διὰ τὸ εἶναι δὲ καθ' ἑαυτὸ πρόδηλον, αἰτεῖδω τέως συντομίας χά-
 ριν. Τῶν δ' ὕτω κατασκευαζέντων, τὸ Θεώρημα συντεθήσεται τῷτον τὸν
 τρόπον.

Τὸ ἤδη ἐκείμενον πολυέδρον ἐκ Πυραμίδων σύγκεται, ὧν κορυφὴ μὲν
 κοινὴ τὸ Κέντρον ἐστὶ τῆς Σφαίρας· βάσεις δὲ τὰ ἐπιφάνοντα Εἰπίπεδα, ἐξ
 ὧν ἡ τῷ πολυέδρῳ σύγκεται ἐπιφάνεια. καὶ ἐπεὶ αἱ ἀπὸ τῷ Κέντρῳ α' ἐπὶ τὴν
 ἐπαφὴν ἐκάσῃ Εἰπιδέῳ ἡγμέναι εὐθεῖαι κάθετοί εἰσιν ἐκάσῃ Εἰπιδέῳ (1),
 δῆλον ὅτι πᾶσαι αἱ Πυραμίδες, ἐξ ὧν σύγκεται τὸ πολυέδρον, ἴσον ἔχουσιν
 ὕψος, αὐτὴν δηλονότι τὴν αβ, ἥτις ἐστὶ τῆς Σφαίρας ἡμιδιάμετρος. Εἴαν ἄρα
 ἡδη τεθῇ Εἰπίπεδον τὸ Χ τῇ τῷ πολυέδρῳ ἐπιφανείᾳ ἴσον, καὶ ἐπ' αὐτῷ Πυ-
 ραμὶς ἀνασταμένη ὀρθή, ὕψος ἔχουσα τὴν εὐθεῖαν μν ἴσην τῇ τῆς Σφαίρας ἡμι-
 διαμέτρῳ αβ· φανερόν ἐστι πᾶσαι αἱ εἰρημέναι Πυραμίδες, τῶν ἐστὶν ὅλον τὸ
 πολυέδρον ἴσον ἔσαι τῇ Πυραμίδι νΧ (2). Καὶ τῷ αὐτῷ τρόπῳ δείκνυται ὅτι
 πάντα τὰ τὴν Σφαῖραν περιλάμβανοντα λοιπὰ πολυέδρα, τὰ ἐκ τῆς ἀπο-
 τμήσεως τῶν ἐκείνῳ γωνιῶν ἄλλα ἐπ' ἄλλοις εἰς ἄπειρον ἀπογεννώμενα, ἴσον-
 ται ἑῷ ἴσα ταῖς Πυραμίδι (νΧ), ὧν τὸ μὲν ὕψος (μν) ἴσον τῇ τῆς Σφαίρας
 ἡμιδιαμέτρῳ· ἡ δὲ βάσις (Χ) ἴση ταῖς ἐπιφανείαις τῶν τὴν Σφαῖραν περιλαμ-

(1) Προηγ. Λήμμα. (2) Δῆλον ἐκ τῆς διέξεως τῆς ε'. τῷ β'.

βανόντων πολυέδρων. Ἐπεὶ δὲ τὰ μὲν πολυέδρα ἀπολήγῃ τῶς εἰς τὴν Σφαῖραν, ὡς ἀνωτέρω εἶπον, αἱ δὲ Πυραμίδες (νΧ) ἀποτελευτῶσιν, ὡς μικρῷ ὕψερὸν δειχθήσεται, εἰς τὸν Κῶνον. Ἡ Σφαῖρα (1) ἄρα ἴση ἔσται τῷ Κῶνῳ. Ὅθεν δεῖξαι.

Ὅτι δὲ αἱ Πυραμίδες νΧ (2) ἀποτελευτῶσιν εἰς Κῶνον, δειχθήσεται ὕτως. Αἱ τῶν πολυέδρων ἐπιφάνειαι ἀπολήγουσιν εἰς τὴν τῆς Σφαίρας ἐπιφανείαν, ὡς ἤντηται ἀνωτέρω. Ἐπεὶ δὲ αἱ βάσεις Χ τῶν Πυραμίδων νΧ ὑπόκεινται ἡεὶ ταῖς ἐπιφανείαις τῶν πολυέδρων ἴσαι· ἡ δὲ βάσις φ τῷ Κῶνῳ φο εἰς ἐξ ὑποθέσεως ἴση τῇ τῆς Σφαίρας ἐπιφανείᾳ· ἄρα καὶ αἱ βάσεις Χ ἀπολήξουσιν εἰς τὴν βάσιν φ· καὶ ἐπομένως, ὡς αἱ Πυραμίδες νΧ πρὸς τὸν ἐξ ὑποθέσεως ἰσοῦψῃ Κῶνον, ὅτως ἡ βάσις Χ πρὸς τὴν βάσιν φ (3)· αἱ Πυραμίδες ἄρα εἰς τὸν Κῶνον ἀπολήξουσιν.

Ἡ ἐκτεθειμένη ἡμῖν ἀπόδειξις τῆς τε παρέσης, καὶ τῆς ἐπομένης προτάσεως πολὺ τι διενήνοχε τῆς τῷ Ἀρχιμήδῃ, ἥτις καὶ τοὶ πολλοὶν τινα ὀξυτήτα τῷ ἀνδρὶ ἐμφάνυσαν καὶ ἐπίνοϊαν· ἔστιν ὁμῶς σχοινοτενής τις καὶ δυσχερὲς αὐτή· παραλαμβάνεται γὰρ ἐν αὐτῇ δύο τινὰ ὡς ὁμολογούμενα, καὶ προτάσεις ἑνδεκα καὶ πολλὰ ἄλλαι, ὧν ἐκείναι ἐξήρτηνται. Αὐτὸ δὲ τὸ Θεώρημα ὅτω προτίθῃσιν Ἀρχιμήδης. Πᾶσα Σφαῖρα τετραπλάσιον ἐστὶ Κῶνου, βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ Κύκλῳ τῶν ἐν τῇ Σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τῷ Κέντρῳ τῆς Σφαίρας.

Πόρισμα. Ἐντεῦθεν δῆλον ὅτι τὸ Ἡμισφαίριον διπλάσιόν ἐστι Κῶνου βασιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ Κύκλῳ τῶν ἐν τῇ Σφαίρᾳ· ὕψος δὲ τὴν ἐκ τῷ Κέντρῳ αὐτῆς τῆς Σφαίρας.

Τὸ Πόρισμα τόδε εἰς τὴν Α'. προβάλλεται ὁ Τακνέτιος. Α' Ζ' εἰς τὴν τῆς δεῖξιν λαμβάνει τῷ Σ' ὅπερ μόλις ἐστὶ καὶ αὐτῆς τῆς Προτάσεως σαφές· ὅτι δηλαδὴ τὸ Ἡμισφαίριον ἴσον ἐστὶ Κῶνῳ ἔχοντι, ὕψος μὲν τὴν ἐκ τῷ Κέντρῳ τῆς Σφαίρας, βάσιν δὲ Κύκλον τῇ ἐπιφανείᾳ τῷ Ἡμισφαίριῳ ἴσον. Ὅθεν καὶ αὐτὸ εὐκόλως, καὶ αὐτὴ δὴ αὐτὴ ἡ Α'. ἐκ ἤττον, ἐξ αὐτῆς τῆς ΚΗ' συνάγεται. Δέον ἦν ἢ τὴν Α'. ἐνταῦθα μετακομίσαντας εἰς Πόρισμα μεταβαλεῖν τὸ προειρημένον, ἢ γὰρ τῆς Προτάσεως κατὰ χώραν μενέσης, τὴν ἀπόδειξιν ἑτεροίως μεταρρυθμίσαι.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Ἐκ τῇ ἐξαίρετε τῷ δὲ Θεωρήματι ἡ τῷ ἐν τοῖς σεριοῖς εὐγενεστάτῳ ΣΧΉ

(1) Α. τῷ παρόντι. (2) ὁμοίως. (3) τοῦ μ. (3)

ματος πορίζεται καταμέτρησις. Ἐάν γάρ τὸ ἑκτημόριον τῆς διαμέτρου, ἢ τὸ τριτημόριον τῆς ἡμιδιαμέτρου διὰ τῆς κατὰ τὴν Σφαῖραν ἐπιφανείας, γινωσκομένης ἤδη ἐκ τῆς Σχολίᾳ τῆς ΚΔ'. πολλαπλασιασθῇ, προκύπτει τὸ τῆς Σφαίρας σφαιρόν. Οἷον εἰ εὐρεθῇ ἡ μὲν τῆς κατὰ γῆν Σφαίρας ἐπιφάνεια Τετραγωνικὰ μίλλια ὠρικά περιέχοντα 23,760000· ἡ δὲ ἡμιδιάμετρος μίλλων ἡστα ὠρικῶν 1375, ἢ τὸ τριτημόριον ἐς 458 $\frac{1}{2}$. Τῆτο δὲ πολλαπλασιασθὲν, ἀμειλιθέντος τῷ Κλάσματος, διὰ 23,760000, δώσει Κυβικὰ τετραγωνικὰ μίλλια ὠρικά 10882,080000 εἰς τὸ τῆς γῆνης Σφαίρας σφαιρόν. (Περὶ δὲ τῶν ἀριθμῶν τούτων ὅρα τὰ ἐν τῷ μετὰ τὴν ζ'. τῷ παρόντος σημειωθέντα Σχολίῳ).

Ἐπεὶ γὰρ ἡ Σφαῖρα ἴση ἐστὶ Κώνῳ, ἢ ὕψος μὲν ἢ ἐκ τῆς Κέντρου τῆς Σφαίρας, βάσις δὲ ἡ τῆς Σφαίρας αὐτῆς ἐπιφάνεια (1), τὸ δὲ τῷ Κώνῳ σφαιρόν προκύπτει ἐκ τῆς τριτημορίου τῆς ὕψους, τῆς ἑστὶ τῆς κατὰ τὴν Σφαῖραν ἡμιδιαμέτρου (2), πολλαπλασιαζομένη διὰ τῆς βασέως, τῆς ἑστὶ διὰ τῆς κατὰ τὴν Σφαῖραν ἐπιφανείας· καὶ τὸ τῆς Σφαίρας ἄρα σφαιρόν προκύπτει ἐκ τῆς τριτημορίου τῆς ἡμιδιαμέτρου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν πολλαπλασιαζομένη.

Δοδεισῶν δὲ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς περιφέρειας, εὐρεθήσεται τὸ τῆς Σφαίρας σφαιρόν, εἴαν τὸ ἑκτημόριον τῆς περιφέρειας ἐπὶ τὸ Τετράγωνον τῆς διαμέτρου πολλαπλασιασθῇ. Ἡ', ἄλλως, εἴαν τὸ Τετράγωνον τῆς διαμέτρου διαιρεθῇ διὰ 6· τὸ δὲ πηλίκον διὰ τῆς περιφέρειας πολλαπλασιασθῇ· τὸ αὐτὸ γὰρ καὶ ἔτω προκύψει γινόμενον, ὡς εἴπερ ἐπολλαπλασιάζετο τὸ τῆς διαμέτρου ἑκτημόριον ἐπὶ τὴν τῆς Σφαίρας περιφέρειαν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΚΘ'.

Παντὶ τομεῖ Σφαίρας ἴσος ἐστὶ Κώνος, ὁ ὕψος μὲν ἔχων ἴσον τῇ ἐκ τῆς Κέντρου τῆς Σφαίρας· βάσιν δὲ ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαιρικῆς Τομέως.

Ἐς αὐτὸν τομεὺς ἡμισφαίριον ἐλάσσω (ὁ αεγθ'). Περὶ δὲ τὸν Τομέα νοεῖσθω σῶμα πολυέδρον ἐυθύγραμμον περιγεγραμμένον. Ἐάν ᾖν ὁ λοιπὸς ἅπας συλλογισμὸς ὁμοίως τοῖς προηγουμένοις διατεθῇ, τῷ αὐτῷ τρόπῳ συντεθήσεται, ἢ συναχθήσεται τὸ ζητούμενον· δεικτέον δὲ τῆτο μόνον, ὅτι ἢ ἅπας ὁ τῆς δεξιῆς ἡρηται λόγος, ὅτι ἡ τῷ πολυέδρῳ ἐπιφάνεια, ἢ ἐξ Ἐπιπέδων πανταχόθεν τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας εγθ' ἐπιφαιούτων συγκειμένη, μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας εγθ' ὅπερ ἔτω γενήσεται. Νοεῖσθω τῇ ἐπιφανείᾳ εγθ' προσεθῆσθαι ἑτέραν ἴσην καὶ ὁμοίαν, ὑπὸ Ἐπιπέδων ἐπιφαιούτων ὁμοίως τοῖς

α. 47.

(1) ΚΗ. τοῦ παρόντος. (2) ζ. τοῦ παρόντος σελ. 342.

πρότερον περιλαμβανομένη· ἔσται δὲ ὅλη ἢ ἐκ τῶν Ε' πιπέδων συγκειμένη ἐπιφάνεια, τῆς Σφαιρικῆς ὅλης μείζων (1)· καὶ ἡ ἡμισεία ἄρα τῆς ἐκ τῶν Ε' πιπέδων συγκειμένης, μείζων ἔσται τῆς ἡμισείας τῆς Σφαιρικῆς εγθ'.

Ἐς δεύτερον τομεὺς μείζων Η'μισφαίριον ὁ αεβθ'. Συναμφότερος ἄρα ὁ Τομεὺς ἴσος ἐστὶ Κώνῳ, ὃ ὕψος μὲν ἢ τῆς Σφαίρας ἡμιδιάμετρος· βάσις δὲ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια (2)· τῷτ' ἐστὶ δυοὶ Κώνοις, ὧν τὸ μὲν ὕψος ταῦτον, βάσις δὲ ἴσαι τοῖς τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας τμήματιν εγθ', εβθ'. Ἀλλ' ὁ εἰς τῶν Τομέων, ὃς ἐστὶν ἐλάσσων Η'μισφαίριον, τῷτ' ἐστὶν ὁ αεγθ', ἴσος ἐστὶ, διὰ τὸ πρῶτον μέρος τῆς δεξιῆς, Κώνῳ, ὃ ὕψος μὲν ἢ τῆς Σφαίρας ἡμιδιάμετρος· βάσις δὲ ἡ ἐπιφάνεια εγθ'· ὁ ἕτερος ἄρα αεβθ' ἴσος ἐστὶ τῷ λοιπῷ Κώνῳ, οὗ ὕψος μὲν ἢ Η'μιδιάμετρος· βάσις δὲ ἡ λοιπὴ ἐπιφάνεια εβθ'. Οὗτοῦ δεικνύται.

Π ὁ ρ ι σ μ α .

Ἐπεὶ ἡ μὲν ἐπιφάνεια εγθ' ἴση ἐστὶ Κύκλῳ, ὃ ἀκτὺς ἢ γθ' (3)· ἡ δὲ εβθ' ἴση Κύκλῳ, ὃ ἀκτὺς ἢ βθ'· ἔσονται ἄρα οἱ Τομεῖς αεγθ', αεβθ' ἴσοι Κώνοις, ὧν ὕψος μὲν ἢ τῆς Σφαίρας ἡμιδιάμετρος· βάσεις δὲ Κύκλοι, ὧν ἡμιδιάμετροι αἱ γθ', βθ'.

Σ χ ὁ λ ι ο ν .

- κ. 47. Ἐν τούτῳ προρίζεται ἡ τε τῶν Τομέων καὶ ἡ τῶν τμημάτων τῆς Σφαίρας καταμέτρησις· τῶν μὲν τομέων εἰς (2) τὸ τρίτημόριον τῆς Η'μιδιαμέτρου πολλαπλασιασθῆ διὰ τῆς Σφαιρικῆς ἐπιφανείας τῶν Τομέων, γνωσκομένης ἤδη ἐκ τῆς ΚΖ (ἢ ἐκ τῷ Πορίσματος τῆς ΚΕ), ἢ διὰ τῷ Κύκλῳ, ὃ ἀκτὺς ἢ γθ', ἢ βθ'. Τῶν δὲ τμημάτων, εἰς μετρηθῆ ὁ Κώνος εαθ', καὶ ἀφαιρεθῆ μὲν τῷ Τομέϊ, εἴπερ ἐλάσσων ἐστὶν Η'μισφαίριον, προσεθῆ δὲ αὐτῷ μείζονι ὅντι Η'μισφαίριον.
- κ. 42. Τὸ δὲ μεταξὺ δύο κύκλων παραλλήλων ἢ μὴ παραλλήλων ἐναπολαμβανόμενον Τμήμα μῆρον μετρηθήσεται, εἰς τὰ τμήματα ξβθ', μβν γνωσθέντα ἤδη, ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρεθῆ.

Π ρ ὁ τ α σ ι ς Α'.

- κ. 48. Τὸ Η'μισφαίριον (εοβθ') διπλάσιόν ἐστὶ Κώνῳ (τῷ εβθ') ἔχοντος βάσιν καὶ ὕψος ταῦτα τῷ Η'μισφαίριῳ.

(1) Α'ξιωμα. Γ. τοῦ παρόντος. (2) ΚΕ. τοῦ παρόντος. (3) ΚΕ. τοῦ παρόντος. (4) ἄλλων ἐκ τῷ Σχολ. τῆς 6.

Ο' Κῶνος γὰρ ὁ ἔχων βάσιν μὲν ἴσην τῇ τῷ Ημισφαίριῳ ἐπιφανείᾳ εοβδ· ὕψος δὲ ἴσον τῇ Ημιδιαμέτρῳ αβ, ἐςὶ πρὸς Κῶνον τὸν εβδ, ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν (1)· τὸτ' ἔστιν ὡς ἡ τῷ Ημισφαίριῳ ἐπιφάνεια εοβδ, πρὸς τὸν μέγιστον Κύκλον πτ. Εἴπερ ἂν ἡ τῷ Ημισφαίριῳ ἐπιφάνεια εοβδ, διπλασία ἐςὶ τῷ μεγίστῳ Κύκλῳ (2)· ἄρα καὶ ὁ Κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὴν ἐπιφάνειαν εοβδ, ὕψος δὲ τὴν Ημιδιάμετρον αβ, διπλασίος ἐςὶ τῷ Κῶνῳ εβδ. Ἀλλὰ τὸ Ημισφαίριον ἐστὶν ἴσον Κῶνῳ, ὃ ὕψος μὲν ἡ τῆς Σφαίρας ἡμιδιάμετρος· βάσις δὲ ἡ Ημισφαίρικὴ ἐπιφάνεια εοβδ (3), διπλασίον ἄρα τὸ Ημισφαίριον τῷ Κῶνῳ εοδ. Ο' ἵδει δείξα.

Καὶ ἄλλως. Εἴπερ οἱ ἰσοῦψεῖς Κῶνοι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλους, ὡς αἱ βάσεις (4), ἔσται δὴ ὁ Κῶνος, ὃ ὕψος μὲν ἡ τῆς Σφαίρας ἡμιδιάμετρος, βάσις δὲ ἴση τῇ τῆς Σφαίρας ἐπιφανείᾳ, πρὸς τὸν Κῶνον, ὃ ὕψος μὲν τὸ αὐτὸ, βάσις δὲ ἴση τῷ μεγίστῳ Κύκλῳ τῶν ἐν τῇ Σφαίρᾳ, ὡς 4 πρὸς 1 (5). Εἴπερ δὲ ὁ πρότερος Κῶνος ἐστὶν ἴσος τῇ Σφαίρᾳ (6), ἡ Σφαῖρα ἄρα πρὸς τὸν ὑπερῶν Κῶνον ἔσται ὡς 4 πρὸς 1. Τὸ ἄρα Ημισφαίριον πρὸς τὸν ὑπερῶν Κῶνον ἐστὶν ὡς 2 πρὸς 1· ἀλλ' ὁ ὑπερῶν Κῶνος ἔχει τὰυτὰ καὶ ὕψος καὶ βάσιν τῷ Ημισφαίριῳ· τὸ Ημισφαίριον ἄρα διπλασίον ἐςὶ Κῶνῳ ἔχοντος, τότε ὕψος καὶ τὴν βάσιν τὰυτὰ τῷ Ημισφαίριῳ.

Πόρισμα. Κῶνος ὁ εβδ, καὶ ἡμισφαίριον τὸ εοβδ, καὶ Κύλινδρος ὁ εκ, ὧν ὕψος καὶ βάσις κοινὰ, εἰσὶ πρὸς ἀλλήλα, ὡς 1, 2, 3. Εἰςὶ γὰρ ὁ Κῶνος πρὸς μὲν τὸ Ημισφαίριον, ὡς 1 πρὸς 2 (διὰ τὴν παρῆσαν)· πρὸς δὲ τὸν Κύλινδρον, ὡς 1 πρὸς 3 (διὰ τὴν Γ'. τῷ ΙΒ').

Π ρ ό τ α σ ι ν ΛΑ'.

Εἴαν Σφαῖρα ἐπιπέδῳ τῷ ιεθτ μὴ διόκτι μὲν διὰ τῷ Κέντρῳ α, τέμνοντι καὶ πρὸς ἐνθάδε τὴν διάμετρον βοκ, εἰς δύο Τμήματα τὰ ιλβη, ισκδ, ἔτω τμηδῆ, ὥστε γενέσθαι ὡς τὸ ὕψος οβ τῷ Τμήματος ιλβδ, πρὸς τὴν τῆς σφαίρας Ημιδιάμετρον αβ, ἔτω τὸ ὕψος εκ τῷ ἑτέρῳ Τμήματος ισκδ, πρὸς ἑτέραν τὴν κν· ὡς δὲ τὸ ὕψος εκ τῷ Τμήματος ισκδ, πρὸς τὴν Ημιδιάμετρον ακ, ἢ αβ, ἔτω τὸ ὕψος βδ τῷ ἑτέρῳ Τμήματος ιλβδ, πρὸς ἑτέραν τὴν βδ. Λέγω

Α'. Ὅτι οἱ Κῶνοι ινδ, ιδδ, ὧν ὕψη μὲν αἱ ον, οδ· βάσεις δὲ κοινὴ ὁ Κύκλος ιεθτ, ἴσοι ἔσονται τοῖς Σφαιρικοῖς τμήμασι.

(1) ΓΑ. τῷ Γ'. (2) ΚΔ. τῷ παρόντος. (3) Εἴπεται ἐκ τῆς ΚΗ. τῷ παρόντος. (4) ΓΑ. τῷ ΙΒ'. (5) ΚΔ. τῷ παρόντος. (6) ΚΗ. τῷ παρόντος.

Β'. Ὅτι τὰ Τμήματα λόγον ἔξει τὸν αὐτὸν, ὃν αἱ εὐθεῖαι δο, κο.

Γ'. Ὅτι τὸ Τμήμα ἰσθ' ἔστι πρὸς τὸν εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένον μέγιστον Κῶνον ικθ, ὡς ἡ νο πρὸς τὴν κο. Τότε ἕτερον Τμήμα ιλβθ, πρὸς τὸν εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένον μέγιστον Κῶνον ιβθ, ὡς ἡ δο πρὸς τὴν βο.

Μέρος Α'. Τετμήσωσαν ἡ τε Σφαῖρα καὶ οἱ Κῶνοι ἐπιπέδῳ, διὰ τῆς Διαμέτρου βκ· καὶ γεγεννηθῶσαν ἐν μὲν τῇ σφαίρᾳ Κύκλος μέγιστος ὁ βλκθ· ἐν δὲ τοῖς Κῶνοις Τρίγωνα τὰ βιδθ, ικθ. Καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἐξ ὑποθέσεως ἡ Διάμετρος βοκ ἐπὶ τὸν Κύκλον ξτ, ἡ γωνία ιοβ ἔστι ὀρθή (1). Ὁρθὴ δὲ καὶ ἡ ἐν τῷ Ἡμικυκλίῳ ὑπὸ βικ (2)· ἄρα, ἐπεὶ ἐν τῷ Τριγώνῳ βικ, ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας κατήχθῃ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν βκ ἡ εὐθεῖα ιο, ἔσται δὴ ἡ ιβ πρὸς τὴν ιο, ὡς ἡ βκ πρὸς πρὸς τὴν κι (3). Ὁ διπλασίων ἄρα λόγος τῆς βι πρὸς τὴν ιο, ἴσος ἐστὶ τῷ διπλασίονι λόγῳ τῆς βκ πρὸς τὴν κι· τὰτ' ἐστὶν (ἐπεὶ (4) αἱ βκ, κι, κο συνεχῶς ἀνάλογον) ἴσος τῷ λόγῳ τῆς βκ πρὸς τὴν κο.

Ἐπεὶ πάλιν ἐξ ὑποθέσεως ὡς ἡ οκ, πρὸς τὴν ἡμιδιάμετρον αβ, ὥτως ἡ οβ πρὸς τὴν βδ· ἔσται δὴ ἀνάπαλιν μὲν ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν βο, ὥτως ἡ αβ πρὸς τὴν οκ· ἐναλλάσσονται δὲ ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν αβ, ὥτως ἡ βο πρὸς τὴν βκ· καὶ συντιθέντι, ὡς ἡ δα πρὸς τὴν βα, ὥτως ἡ βκ πρὸς οκ. Ἀλλ' ἐπεὶ δέδεικται ὅτι ὁ λόγος τῆς βκ πρὸς τὴν οκ ἐστὶ διπλασίων, τὰ τῆς βι πρὸς τὴν ιο, καὶ ἐπομένως ἴσος τῷ λόγῳ τῶν Κύκλων τῶν ἀκτίσι ταῖς βι, ιο γραφομένων (5)· ἔσται δὴ ἄρα ἡ δα πρὸς τὴν αβ, ὡς ὁ Κύκλος, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ βι, πρὸς τὸν Κύκλον, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ ιο· καὶ ὁ Κῶνος, ὃ ὕψος μὲν ἡ δα, βάσις δὲ ὁ Κύκλος, ὃ ἀκτὶς ἡ ιο, τὰτ' ἐστὶν ὁ ξτ, ἴσος τῷ Κῶνῳ, ὃ ὕψος μὲν ἡ βα· βάσεις δὲ ὁ ἀπὸ ἀκτίνος τῆς βι Κύκλος (6), τὰτ' ἐστὶ τῷ Σφαιρικῷ τομεῖ αιβο (7). Κοινῇ δὲ προσκειμένα τὰ Κῶνι ιαθ, ἔσται δὴ συναμφοτέρων ὅτε τομεὺς αιβθ καὶ ὁ προσκείμενος Κῶνος ιαθ, ἴσος συναμφοτέρῳ τῷ Κῶνῳ· τὰτ' ἐστὶ τὸ σφαιρικὸν Τμήμα ιλβθ ἴσον δυσὶ Κῶνοις, ὧν ὁ μὲν, ἔχει βάσιν μὲν τὸν Κύκλον ξι, ὕψος δὲ τὴν εὐθεῖαν δα· ὁ δὲ, ὕψος μὲν τὴν οβ, βάσιν δὲ τὸν αὐτὸν Κύκλον ξτ. Ἀλλ' οἱ δύο ἔτσι Κῶνοι συνισῶσι τὸν Κῶνον ιδθ (8)· τὸ Σφαιρικὸν ἄρα Τμήμα ιλβθ, ἴσον ἐστὶ τῷ Κῶνῳ ιδθ. Ὁ ἔδει δεῖξαι.

Διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται ὅτι καὶ τὸ σφαιρικὸν Τμήμα ἰσθ', ἴσον ἐστὶ

(1) Ὁρισμ. Γ. τῷ ια'. (2) ΛΑ. τῷ γ'. (3) Πόρισμ. Γ. τῆς Η. τῷ ε'. (4) Πόρισμ. Β. τῆς Η. τῷ ε'. (5) Πόρισμ. Β. τῆς Β. τῷ ιβ'. (6) ΙΒ. τοῦ ιβ'. (7) ΚΘ. τοῦ παρόντος. (8) Δείκνυται ἐκ τῆς ΙΔ. τῷ ιβ'. καὶ τῆς ΚΔ. τῷ ε'.

τῷ Κώνῳ ινθ· πλὴν ὅσον ὁ προσκείμενος ἐν τῷ προτέρῳ Κώνος ιαθ, ἐνταῦθα ἐστὶν ἐφαίρετός.

(Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶ $\kappa\iota : \iota\sigma :: \kappa\beta : \beta\iota$ (1)· ἔσται δὴ $\kappa\iota^2 : \iota\sigma^2 :: \kappa\beta^2 : \beta\iota^2$ (2) : : $\kappa\beta : \beta\iota$ (3)· ἐστὶ δὲ ἐξ ὑποθέσεως $\nu\kappa : \alpha\beta (= \kappa\alpha) :: \kappa\sigma : \sigma\beta$ · κ συντιθέντι $\nu\alpha : \alpha\kappa :: \kappa\beta : \beta\sigma :: \kappa\iota^2 : \iota\sigma^2$ (4) : : Κύκλ., ὃ ἀκτὶς $\kappa\iota$: Κύκλ., ὃ ἀκτὶς $\iota\sigma$ (= Κύκλ. ξτ)· ἄρα ὁ Κώνος, ὃ ὕψος ἢ $\nu\alpha$, κ βάσις ὁ ξτ = Κώνῳ, ὃ ὕψος ἢ $\alpha\kappa$ καὶ βάσις ὁ ἀπὸ ἀκτίνος τῆς $\kappa\iota$ Κύκλος (5) = τῷ σφαιρικῷ Τομεὶ αικθ (6). Ἀλλ' ὁ Κώνος, ὃ ὕψος ἢ $\nu\alpha$ κ βάσις ὁ ξτ, ἐστὶν ἴσος τοῖς δυοῖν Κώνοις ἅμα ληφθεῖσιν, ὧν ὁ μὲν ὕψος μὲν ἔχει τὴν $\nu\sigma$, βάσιν δὲ τὸν Κύκλον ξτ· ὁ δὲ, ὕψος μὲν τὴν $\sigma\alpha$ βάσιν δὲ τὸν αὐτὸν ξτ (7), τῷτ' ἐστὶ τοῖς Κώνοις ινθ, ιαθ· ὁ δὲ σφαιρικός Τομεὺς αικθ, ἴσος ἐστὶ τῷ σφαιρικῷ Τμήματι ισκθ κ τῷ Κώνῳ ιαθ ἅμα ληφθεῖσιν· κοινῇ δὲ ἀρδέντος τῷ Κώνου ιαθ, ὁ λοιπὸς Κώνος ινθ = τῷ λοιπῷ σφαιρικῷ Τμήματι ισκθ. Ο. Ε. Δ.)

Τὸ Β'. Μέρους δηλονότι ἐκ τῷ Α'. Οἱ γάρτοι Κώνοι ιδθ, ινθ εἰσὶ πρὸς ἀλλήλους, ὡς αἱ δο, νο (8), ἄρα κ τὰ ἴσα τοῖς Κώνοις Τμήματα ιλβθ, ισκθ λόγον ἔχουσιν, ὅν αἱ δο, νο.

Δηλον δὲ αὐτόθεν κ τὸ Γ'. Ὡς γὰρ ὁ Κώνος ιδθ πρὸς τὸν ινθ, οὕτως ἢ δο πρὸς τὴν βο (9)· καὶ τὸ ἴσον ἄρα τῷ Κώνῳ ιδθ, Τμήμα ιλβθ, ἐστὶ πρὸς τὸν Κώνον ιβθ, ὡς ἢ δο πρὸς τὴν βο. Τῷ αὐτῷ δὲ τρόπῳ δειχθήσεται, ὅτι κ τὸ Τμήμα ισκθ ἐστὶ πρὸς τὸν Κώνον ικθ, ὡς ἢ νο πρὸς τὴν κο.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Ἐκ τῷ πρώτῳ μέρει τῷ παρόντος Θεωρήματος πορίζεται, κ ἑτέρα ἢ χ ἡ τὸν εὐμήχανος τῶν σφαιρικῶν Τμημάτων καταμέτρησις. Ἐὰν δελονότι οἱ Κώνοι ιδθ, ινθ μετρηθῶσιν· ὅπερ γενήσεται ἐὰν τὸ τριτημόριον τῶν εὐθειῶν δο, νο ἐπὶ τὸν ξτ Κύκλον πολλαπλασιασθῇ (10).

Π ρ ό τ α σ ι ς ΔΒ'.

Πᾶς Κύλινδρος ὁρθός (9κ) ἡμιόλιός ἐστι τῆς Σφαίρας, περὶ ἣν περιγέγραπται· ἥτε ἐπιφάνεια αὐτῆς μετὰ τῶν βάσεων. ἡμιολία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς Σφαίρας.

α. 48.

(1) Πόρισμ. Β'. τῆς Η. τῷ ε'. (2) ΛΔ. τῷ ε'. κ Σχόλ. τῆς Κ. τῷ ε'. (3) Πόρισμ. Β'. τῆς Η. τῷ ε'. (4) Πόρ. Β'. τῆς Β. τῷ ιβ'. (5) ΙΕ. τῷ ιβ'. (6) ΚΘ. τῷ παρόντος. (7) ΚΔ. τῷ ε'. κ ΙΔ. τῷ ιβ'. (8) Δ. τῷ ιβ'. (9) Διὰ τὴν αὐτήν. (10) Ὅρα τὸ μετὰ τῷ ε'. Σχόλιον.

Ε'σω Α'ξων κοινός τῆτε σφαίρα εἰς τῷ Κυλίνδρῳ ὁ βξ. Εἰς δὲ τὸ Η'μισφαίριον εοβδ ἐγγεγραμμένῳ Κῶνος μέγιστος ὁ εβδ. Καὶ ἐπεὶ ὁ μὲν Κύλινδρος ἐκ (ἡμισυς τῷ ὅλῳ θκ) τριπλάσιός ἐστι τῷ Κῶνῳ εβδ (1). Τὸ δὲ Η'μισφαίριον διπλάσιον τῷ αὐτῷ Κῶνῳ (2), δηλὸν ὅτι ὁ Κύλινδρος ἐκ ἐστὶ πρὸς τὸ Η'μισφαίριον, ὡς 3 πρὸς 2· ἄρα εἰ ὁλος ὁ Κύλινδρος θκ ἐστὶ πρὸς ὅλην τὴν σφαῖραν εβδ, ὡς 3 πρὸς 2· ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

Ε'πεὶ δὲ πάλιν ἡ τῷ Κυλίνδρῳ πλευρὰ κν, ἐστὶν ἴση τῇ τῆς βάσεως διαμέτρῳ θν· ἔσεται δὴ ἡ τῷ ἐπιφάνεια χωρὶς μὲν τῶν βάσεων τετραπλασία (3), μετὰ δὲ τῶν βάσεων, τῷτ' ἐστὶν ὅλη ἡ τῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνεια ἑξαπλασία τῆς βάσεως μι, ἥτις ἐστὶν ἴση τῷ μεγίστῳ Κύκλῳ τῶν ἐν τῇ Σφαίρᾳ. Ἀλλ' ἡ τῆς Σφαίρας ἐπιφάνεια ἐστὶ τετραπλασία τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν αὐτῇ· ἡ ὅλη ἄρα ἐπιφάνεια τῷ Κυλίνδρῳ θκ, ἐστὶ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Σφαίρας, ὡς 6 πρὸς 4, τῷτ' ἐστὶν ὡς 3 πρὸς 2· ὅπερ ἦν τὸ δεύτερον.

Ο' Κύλινδρος ἄρα ὁ περὶ τὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένος ἡμιόλιός ἐστι τῆς Σφαίρας· ἥτε ἐπιφάνεια αὐτῇ μετὰ τῶν βάσεων, ἡμιόλια τῆς ἐπιφανείας τῆς Σφαίρας. Ο' εἰδει δεῖξαι.

Π ο ρ ῖ σ μ α τ α .

Α'. Κύλινδρος ὁρθός ὁ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένος, αὐτὴ τε ἡ Σφαῖρα, εἰς Κῶνος ὁ βάσιν εἰς ὕψος ἔχων ταῦτα τῷ Κυλίνδρῳ, εἰς πρὸς ἄλληλα, ὡς 3, 2, 1. Ε'στὶ γὰρ ὁ Κύλινδρος (διὰ τὴν παρῶσαν) πρὸς μὲν τὴν Σφαῖραν ὡς 3 πρὸς 2· πρὸς δὲ τὸν Κῶνον, ὡς 3 πρὸς 1 (10. τῷ 1β'). ἄρα κτ. Ε'ν τῷ αὐτῷ δὲ λόγῳ εἰσὶν ἔτι ἡ ἐπιφάνεια τῷ περὶ τὸ Η'μισφαίριον περιγεγραμμένου Κυλίνδρου, μετὰ τῆς βάσεως τῆς ἐπιφανέσεως τῷ Η'μισφαίριῳ, ἥτε τῷ Η'μισφαίριῳ ἐπιφάνεια, εἰ ἡ ἑκατέρῃ κοινὴ βάση. Ε'πεὶ γὰρ ἥτε τῷ Κυλίνδρῳ εἰ ἡ τῷ Η'μισφαίριῳ ἐπιφάνεια διπλασία ἐστὶ τῆς βάσεως (4)· ἔσεται δὴ ἡ τῷ Κυλίνδρῳ μετὰ τῆς βάσεως τῆς ἐπιφανέσεως, πρὸς τὴν ἑτέραν βάση, ὡς 3 πρὸς 1· ὅθεν δηλὸν τὸ προτεθέν.

Β'. Ο'θεν ὁ Κύλινδρος θκ χωρὶς τῆς εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένης Σφαίρας (τῷτ' ἐστὶ τὸ τῷ Κυλίνδρῳ σφαιρὸν κενόν τῆς Σφαίρας, τὸ ἔξωθεν μὲν ὑπὸ τῆς ὅλης τῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφανείας, ἔσωθεν δὲ ὑπὸ τῆς κοίλης σφαιρικῆς περατέμενον), ἴσαν ἐστὶ τῷ ἐγγεγραμμένῳ Κῶνῳ θβν. Ε'πεὶ γὰρ ὁ Κύλινδρος ἐστὶ πρὸς τὴν εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένην Σφαῖραν, ὡς 3 πρὸς 2· πρὸς τὸ κυλιν-

(1) 1. τῷ 1β'. (2) 1. πῶ παρόντος. (3) Πορισμ. τῆς 1β. τῷ παρόντος. (4) 1. τῷ παρόντος μετὰ τῷ Πορίσματος.

δρικὸν ἄρα σφαιρὸν κενὸν τῆς Σφαίρας, ἔσται ὡς 3 πρὸς 1· τῷ ἔστιν ὡς αὐτὸς ὁ Κύλινδρος πρὸς τὸν Κῶνον ββ (1)· καὶ ἐπομένως τὸ ἐκτείνε σφαιρὸν ἴσον τῷ Κῶνῳ.

Γ'. Τὸ τῷ Κυλίνδρῳ σφαιρὸν κενὸν Ἡμισφαίριον (τῷ ἔστιν ὁ Κύλινδρος ἐκ, χωρὶς τῷ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένῳ Ἡμισφαίριῳ εβδ), ἴσον ἐστὶ τῷ ἐγγεγραμμένῳ Κῶνῳ εβδ. Τότε γὰρ σφαιρὸν καὶ ὁ Κῶνος τριτημῶριον ἐστὶ τῷ Κυλίνδρου εκ (2).

Δ'. Εἰάν Κῶνος ὁ καὶ Κυλίνδρῳ ἐγγεγραμμένος τῷ νη, ἔχη τὴν μὲν κορυφὴν ἐν τῷ Κέντρῳ α τῷ εἰς τὸν Κύλινδρον ἐγγεγραμμένῳ Ἡμισφαίριῳ μοβν· τὴν δὲ βάσιν ην, τῇ βάσει τῷ Ἡμισφαίριῳ παράλληλόν τε καὶ τῷ Ἡμισφαίριῳ ἐπιφάυσαν κατὰ τὴν κορυφὴν β· ἀφαιρεθῇ δὲ τῷ Κυλίνδρῳ τὸ Ἡμισφαίριον, καταλειφθήσεται σφαιρὸν Κυλινδρικὸν κενὸν Ἡμισφαίριον, ἴσον Κῶνῳ τῷ καὶ ἔχοντι βάσιν τὴν αὐτὴν τῷ Κυλίνδρῳ τὴν ην. Δείκνυται ἐκ τῷ Γ'. Πορίσματος.

Ε'. Εἰάν Κῶνος καὶ σφαιρὸν ὅπως ἔχον ἐκάτερον Ἐπιπέδῳ τινὶ τμηθῶσι τῷ λχ παραλλήλῳ τῇ βάσει ην, γυνήσεται ἐν μὲν τῷ Κῶνῳ, Κύκλος ὁ ΑΕ· ἐν δὲ τῷ σφαιρῷ ἐπίπεδον δακτυλιακὸν τὸ ξλχρ, κατὰ πάντα ἀλλήλοις ἰσούμενα. Ἀχθεῖσιν γὰρ τῆς ἐν τῇ σφαίρᾳ Ἡμιδιαμέτρου αρ· ἔσται $αρ^2 = αδ^2 + δρ^2$ (3)· ἐπεὶ δὲ ἡ αβ, ἴση ἐστὶ τῇ βυ, ἴση ἄρα καὶ ἡ αδ τῇ δε (4)· καὶ διὸ καὶ αἱ αρ, αν, δχ ἀλλήλαις ἴσαι (5). Τοιγαρὲν τὸ ἀπὸ τῆς δχ, ἴσον συναμφοτέρῳ τῷ ἀπὸ τῶν δε, δρ· καὶ Κύκλος ὁ ἀπὸ δχ, ἴσος συναμφοτέρῳ τῷ ἀπὸ τῶν δρ, δε Κύκλῳ (6)· ἀφαιρούμεν δὲ ἐκατέρωθεν τῷ ἀπὸ τῆς δρ Κύκλῳ· λείπεται τὸ Δακτυλιακὸν ἐπίπεδον ξλχρ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς δε Κύκλῳ.

κ. 42.

ς'. Τὰ Τμήματα οἷα τινος Κῶνος καὶ καὶ Κυλινδρικῆς σφαιρῆς χωρὶς τῷ ἐν αὐτῷ Ἡμισφαίριῳ, τὰ μεταξὺ ἐπιπέδων ἀλλήλοις παραλλήλων ἐναπολαμβανόμενα, ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις· ἴσος γὰρ ὁ Κῶνος τῷ σφαιρῷ· ἴση δὲ καὶ ἡ τῷ Κῶνῳ κυκλικὴ τομὴ ΑΕ, τῷ τῷ σφαιρῷ δακτυλιακῷ Ἐπιπέδῳ ξλχρ. Εἰάν ἄρα τὸ Ἐπίπεδον λχ ἐπὶ τὰ ἄνω, ἢ τὰ κάτω παραλλήλως αἰετῇ βάσει ἐνεχθῇ, ἀπογεννήσκει αἰετῇ Τμήματα τῷ τε Κῶνῳ καὶ τῷ Κυλινδρικῇ σφαιρῇ ἀλλήλοις ἴσα.

Ζ'. Εἰκ τῆς καταμετρήσεως ἄρα τῷ Κῶνῳ καὶ ἡ τῷ Κυλινδρικῇ σφαιρῇ χωρὶς τῷ ἐν αὐτῷ Ἡμισφαίριῳ πορίζεται καταμέτρησις (7)· ἔκ τε τῆς κολοβῆς Κῶνος οΑΕκ, ἡ τῷ δακτυλιακῷ Τμήματος ξλιορχτκ, τῷ μεταξὺ τῶν αὐτῶν Ἐπιπέ-

(1) I. τῷ ββ. (2) Δείκνυται ὁμοίως τῷ Η. Πορίσματι διὰ τῷ 42 Σχήματος. (3) ΜΖ. τῷ α. (4) Πορ. Α. τῆς Δ. τῷ ε. (5) Ορισμ. Ε. τῷ ββ. καὶ Πρότ. ΑΔ. τῷ α. (6) Πορσμ. Β. τῆς Β. τῷ ββ. καὶ Πρότ. ΚΔ. τῷ ε. (7) Σχόλ. τῆς ς. τῷ παρόντος.

δων ιτ, λχ ἑναπολαμβανομένη (ι). Καὶ εὐτεῦθεν ἑτέρα ἀποφέρεται μέθοδος τῷ οἰαζήτινα τῆς Σφαίρας τμήματα καταμετρεῖν.

Οἷον εἰάν ζητῆται ἡ καταμέτρησις τῷ μεταξὺ τῶν παραλλήλων Ε'πιπέδων ξρ, οκ ἑναπολαμβανομένη Τμήματος ξοκρ, ἀφηρήθω τῷ Κυλίνδρῳ λτ ὁ κολοβὲς Κῶνος οΑΕκ. Ε'ὰν δὲ ζητῆται ἡ τῷ μεταξὺ τῶν παραλλήλων Ε'πιπέδων μν, ξρ ἑναπολαμβανομένη Τμήματος μξρν, ὑφηρήθω τῷ Κυλίνδρῳ μχ ὁ Κῶνος ΑαΕ.

Σ χ ό λ ι ο ν .

Ὅσον Ἀρχιμήδης τῷ παρόντι ἐπηγάλλετο Θεωρήματι, ἀπόδειξις ἐστίν, ὅτι τῷ ἰδίῳ τάφῳ Σφαῖραν εἰς Κύλινδρον ἐγγεγραμμένην ἐπιδέσθαι ἡξίωσε· ἢ τῷτο ἴσως δι' ὅτι τὸν αὐτὸν λογικὸν λόγον ἔντε τοῖς σώμασι τῷτοις ἢ ταῖς ὑφ' ὧν αὐτὰ τὰ σώματα περιέχεται, ἐπιφανείαις ἐνορῶν, τάυτην μᾶλλον, ἢ τινα ἄλλην τῶν τοσούτων αὐτῇ ἢ τηλικύτων εὐρέσεων ἡγάσαστο. Τοιαύτη μὲν τοι ταυτότης παθῶν ἔντε δακτυλοῖς ἢ δακτυλίων ἐπιφανείαις δέδεικται ἢ ἡμῶν αὐτοῖς ἐν τῷ Δ'. Βιβλίῳ τῶν κυλινδρικῶν ἢ δακτυλιακῶν (Προτ. 13. 14. 15.)· ἢ μὴν ἀλλὰ ἢ ἐπὶ τῆς Σφαίρας αὐτῆς ἢ ἕτερον εὐρηται ἡμῖν, ἔχ' ἥττον ἐπίσημον· τῷτο δὲ ἐστίν, ὅτι ὥσπερ ἡ Σφαῖρα λόγον ἔχει πρὸς τὸν αὐτὴν περιλαμβάνοντα ὀρθὸν Κύλινδρον, κατὰ τε τὸ σφαιρὸν ἢ τὴν ἐπιφάνειαν (ὅς ἐστι ἐξ ἀνάγκης ἰσόπλευρος), ὃν ὁ 2 πρὸς τὸν 3· ὅτως ἡ αὐτὴ λόγον ἔχει πρὸς τὸν περιλαμβάνοντα ἰσόπλευρον Κῶνον, κατὰ τε τὸ σφαιρὸν ἢ τὴν ἐπιφάνειαν, ὃν ἔχει ὁ 4 πρὸς τὸν 9· ἐξ οὗ δὴ ἔπεται ὅτι ὁ ἡμιόλιος λόγος, ὁ μεταξὺ Σφαίρας ἢ Κυλίνδρου εὐρημένος τῷ Ἀρχιμήδει, ὑπάρχει μεταξὺ τριῶν σωμάτων κατὰ συνέχειαν, Σφαίρας δηλοῦντι, Κυλίνδρου ἢ ἰσοπλεύρου Κῶνου· ὃ ἑκατέρῃ τὴν ἀπόδειξιν μετὰ ἢ ἄλλων ἡμετέρων Θεωρημάτων (ἐξ ὧν τρανώτερον ἢ τῆς Σφαίρας θαυμασία φύσις γινώσκεται) ἐν τρισὶ καὶ δεκα Προτάσεσι περιλαμβανομένων, ὑποσυνάψομεν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΑΓ'.

κ. 53. Πάσῃς Σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια διπλασία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῷ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένῃ ἰσοπλεύρῳ Κυλίνδρῳ.

Ε'ὼ Σφαῖρα ἢ ἀθβικ, ἢ ἐν αὐτῇ Τετράγωνον ἐγγεγραμμένον τὸ ακλδ· ὑφ' οὗ περιεσφθέντος, καταγράφεται Κύλινδρος ἰσόπλευρος ὁ αδλν εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένος· ἢ ξθω ἢ αλ, ἥτις ἐστὶ διάμετρος κοινὴ τῇ τε Σφαί-

ρα εἰ τῷ Τετραγώνῳ. Ἐπεὶ ἂν τὸ ἀπὸ τῆς αλ Τετράγωνον, ἴσῃ ἐς τοῖς ἀπὸ τῶν Ἀλλήλων ἴσων ακ, κλ Τετραγώνοις ἅμα ληφθεῖσιν (1), ἐνὸς ἄρα τῷ ἀπὸ ακ ἔσαι διπλάσιον. Ταιγαρεὺν εἰ Κύκλος ὁ περὶ τὴν διάμετρον αλ, διπλάσιός ἐστι τῷ περὶ τὴν ακ (2), τῷ ἔστι τῷ γν. Ἀλλὰ τῷ περὶ τὴν αλ Κύκλῳ τετραπλασία ἐστὶν ἡ τῆς Σφαίρας ἐπιφάνεια (3). διάμετρος γάρ τῆς Σφαίρας ἡ αλ, εἰ ὁ περὶ αὐτὴν Κύκλος μέγιστος τῶν ἐν τῇ Σφαίρᾳ. ἡ τῆς Σφαίρας ἄρα ἐπιφάνεια ὀκταπλασία ἐστὶ τῷ γν Κύκλῳ. ἐπεὶ δὲ ὑπόκειται ἴση τῇ ακ ἡ λκ, ἡ κυλινδρική ἄρα ἐπιφάνεια αλγλ τετραπλασία ἐστὶ τῷ γν Κύκλῳ (4). ἡ τῆς Σφαίρας ἄρα, ἐπεὶ δέδεικται ὀκταπλασία τῷ αὐτῷ Κύκλῳ, ἔσεται δὴ διπλάσια τῆς τῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφανείας. Ὅν ἔδει δεῖξαι.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΔ.

Πάσης Σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια πρὸς ὅλην τὴν τῷ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένην ἰσοπλευρῶν Κυλίνδρῳ ἐπιφάνειαν ἐστὶν, ὡς 4 πρὸς 3. κ. 53.

Κειμένων γάρ τῶν αὐτῶν τῇ προηγουμένῃ, ἐπεὶ ἡ τῷ Κυλίνδρου πλευρὰ λκ, ἐστὶν ἐξ ὑποθέσεως ἴση τῇ τῆς βάσεως διαμέτρῳ ακ, ἔσεται δὴ ἡ τῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνεια γλ τετραπλασία τῆς βάσεως γν (5). ὅλη ἄρα ἡ τῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνεια πρὸς συναμφοτέρων τὴν βάσιν γν, σλ, ἐστὶν ὡς 6 πρὸς 2. Δέδεικται δὲ ἐν τῇ προηγουμένῃ, ὅτι ἡ τῆς Σφαίρας ἐπιφάνεια ἐστὶ πρὸς τὴν μίαν τῶν βάσεων, ὡς 8 πρὸς 1. πρὸς συναμφοτέρων ἄρα ἔσαι, ὡς 8 πρὸς 2. πρὸς ὅλην ἄρα τὴν τῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνειαν ἔσαι, ὡς 8 πρὸς 6. τῷ ἔστι, ὡς 4 πρὸς 3. Ὅν ἔδει δεῖξαι.

Π ο ρ ί σ μ α τ α.

Α'. Ὅλη ἡ τῷ περὶ τὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένη ὀρθὴ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνεια, ἐστὶ πρὸς ὅλην τὴν τῷ ἐγγεγραμμένῳ ἰσοπλευρῶν κυλίνδρῳ ἐπιφάνειαν, ὡς 2 πρὸς 1. Ἐστὶ γάρ ἡ μὲν τῷ περιγεγραμμένῳ πρὸς τὴν τῆς Σφαίρας, ὡς 6 πρὸς 4 (6). ἡ δὲ τῆς Σφαίρας πρὸς τὴν τῷ ἐγγεγραμμένῳ, ὡς 4 πρὸς 3. διὰ τὴν παρῶσαν. δι' ἴση ἄρα ἡ τῷ περιγεγραμμένῳ πρὸς τὴν τῷ ἐγγεγραμμένῳ, ὡς 6 πρὸς 3. ἢ ὡς 2 πρὸς 1.

(Ὡς αὐτῶς ἡ τῆς περὶ ἰσόπλευρον Κύλινδρον περιγεγραμμένης Σφαίρας ἐπιφάνεια, διπλάσια ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς εἰς τὸν αὐτὸν Κύλινδρον ἐγγε-

(1) ΜΖ. τῷ α. (2) Πορ. Ε'. τῆς Β. τῷ β. (3) ΚΔ. τῷ παρόντος. (4) Διὰ τὸ Πόρ. τῆς ΙΒ. τῷ παρόντος. (5) Πορ. τῆς ΙΒ. τῷ παρόντος. (6) ΑΒ. τῷ παρόντος.

γραμμένης Σφαίρας. Ὡς περ δὴ ἡ αὐτὴ διπλασία ἐστὶ τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ περιγεγραμμένῃ Σφαίρᾳ· εἰσὶ γὰρ ἡ τῆς περιγεγραμμένης Σφαίρας ἐπιφάνεια, ἡ ὅλη ἡ τῷ Κυλίνδρῳ ἡ τῆς ἐγγεγραμμένης Σφαίρας πρὸς τὸν μεγίστον Κύκλον τῶν ἐν τῇ περιγεγραμμένῃ Σφαίρᾳ, ὡς 4 ἢ 3 ἢ 2 πρὸς 1 (1).

Β'. Ὅλη ἡ τῷ περὶ τὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένῳ ὀρθῷ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνεια, ἡ ἐπιφάνεια τῆς Σφαίρας, περὶ ἣν ὁ κύλινδρος περιγέγραπται, ἡ ὅλη ἡ τῷ εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένῳ ἰσοπλεύρῳ Κυλίνδρῳ ἐπιφάνεια εἰσὶν ἐν ἀρμονικῇ ἀναλογίᾳ, τῷτ' ἐστὶν ὡς 6, 4, 3.

Τρία δὲ ποσὰ εἰσὶν ἀρμονικῶς ἀνάλογον, εἴαν γένηται τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον, ὡς ἡ διαφορὰ τῇ πρώτῃ ἢ τῇ δευτέρῃ, πρὸς τὴν διαφορὰν τῇ δευτέρῃ ἢ τῇ τρίτῃ. Οἷον εἴαν ἡ 6 πρὸς 3, ὡς 6 — 4 πρὸς 4 — 3 (: : 2 : 1)· ἔσονται 6, 4, 3 ἀρμονικῶς ἀνάλογον.

κ. 53.

Σχόλιον. Ὁ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένος Κύλινδρος ἐστὶ, πρὸς ὁμοίον, εἴτ' ἂν ἰσόπλευρον Κύλινδρον εἰς τὴν αὐτὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένον, ὡς ἡ ἐν τῷ Τετραγώνῳ διάμετρος πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς πλευρᾶς· ἢ, ὅπερ ἐστὶ ταῦτόν, ὡς ἡ διάμετρος τῷ Κύκλῳ πρὸς τὸ ἡμίχορδον 45 μοιρῶν. Ἐν τῷ αὐτῷ δὲ λόγῳ ἐστὶ καὶ σφαῖρα ἡ περὶ Κύλινδρον ἰσόπλευρον περιγεγραμμένη, πρὸς τὴν εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένην.

Μέρος Α'. Καταχθεισῶν γὰρ ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ ἰσοσκελεῖ Τριγώνῳ ἀκλ τῶν καθέτων κξ, ξρ· ἔσται δὴ ἡ τὰ Τρίγωνα αξκ, αρξ ὀρθογωνία τε ἡ ἰσοσκελεῖ (2)· ἡ αἱ αλ, ακ, αξ, αρ συνεχῶς ἀνάλογον (3)· ἡ ἢ αρ = $\frac{1}{2}$ ακ (4)· ἐστὶ δὲ ἡ μὲν αλ, διάμετρος τῆς βάσεως τῷ περιγεγραμμένῳ Κυλίνδρῳ· ἡ δὲ ακ, διάμετρος τῆς βάσεως τῷ ἐγγεγραμμένῳ Κυλίνδρῳ· διὰ τὴν ὁμοιότητα ἄρα τῶν Κυλίνδρων ἔσται ὁ περιγεγραμμένος πρὸς τὸν ἐγγεγραμμένον, ἐν λόγῳ τριπλασίονι τῷ τῷ τῶν αλ, ακ (5)· τῷτ' ἐστὶν ὡς αλ πρὸς αρ (= $\frac{1}{2}$ ακ) (6). Α'ζ' ἡ μὲν αλ ἐστὶ διάμετρος τῷ τε Κύκλῳ αθβκ, ἡ τῷ Τετραγώνῳ δκ· ἡ δὲ ακ, πλευρὰ τῷ εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένῳ Τετραγώνῳ· τῷτ' ἐστὶ χορδὴ μοιρῶν 90 εἰς Κύκλον τὸν δκ, ἡ δὲ ἡμίσεια τῆς ακ, ἡμίχορδον 45 μοιρῶν (7). Ὁ περιγεγραμμένος ἄρα Κύλινδρος πρὸς τὸν ἐγγεγραμμένον, ὡς ἡ ἐν τῷ Τετραγώνῳ διάμετρος πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς πλευρᾶς, ἡ ὡς ἡ τῷ Κύκλῳ διάμετρος πρὸς ἡμίχορδον τὸ μοιρῶν 45.

(1) Διὰ τὴν παρῆσαν ἢ τὴν ΑΒ, ἢ τὴν ΚΔ, τῷ παρόντος. (2) Η. τῷ ζ'. (3) Πορ. Β'. τῆς Η. τῷ ζ'. (4) Σχόλ. Α'. τῆς Κξ. τῷ α'. (5) ΙΒ. τῷ ψ'. (6) Ὀβριμ. Ι. τῷ ε'. (7) Πορ. Α'. τῆς Γ. τῷ γ'.

Μέρος Β'. Καὶ ἐν τῷ αὐτῷ δὲ λόγῳ ἐστὶ ἡ σφαῖρα, περὶ Κύλινδρον ἰσό-
πλευρον περιγεγραμμένη, πρὸς τὴν εἰς τὸν αὐτὸν ἐγγεγραμμένην. Διάμετρος
γὰρ τῆς περὶ τὸν ἰσόπλευρον Κύλινδρον ἀλλὰ περιγεγραμμένης Σφαῖρας διὰ
ἐστὶν ἡ αλ· ἡ δὲ τῆς ἐγγεγραμμένης διάμετρος ἐστὶν ἰση τῇ διαμέτρῳ τῆς βά-
σεως τοῦ Κυλίνδρου, τὴν ἐστὶ τῇ ακ· ἡ περιγεγραμμένη ἄρα σφαῖρα πρὸς τὴν
ἐγγεγραμμένην, ἔσται ἐν λόγῳ τριπλασίονι τῇ τῆς αλ πρὸς ακ (1)· τὰς
ἐστὶν ὡς ἡ αλ πρὸς αρ ἢ πρὸς $\frac{1}{2}$ ακ. Ο. Ε. Δ.

Πόρισμα τῷ ἡγούμενῳ Σχολίῳ. Ἡ σφαῖρα ἐστὶ πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγε-
γραμμένον ἰσόπλευρον Κύλινδρον, ὡς ἡ τετραπλασία τῆς ἐν τῷ Τετραγώνῳ
διαμέτρου πρὸς τὴν τριπλασίαν τῆς Πλευρᾶς· ἢ ὡς ἡ τετραπλασία τῆς δια-
μέτρου τοῦ Κύκλου πρὸς τὴν τριπλασίαν τῆς Πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν Κύκλον ἐγγε-
γραμμένου Τετραγώνου.

Ἐστὶ γὰρ διὰ τὸ ἡγούμενον Σχολίον ἡ περὶ τὸν ἰσόπλευρον Κύλινδρον
περιγεγραμμένη σφαῖρα πρὸς τὴν εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένην, ὡς ἐν τῷ Τετρα-
γώνῳ ἡ τριπλῇ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν· ἢ ὡς ἡ τετραπλασία τῆς
διαμέτρου πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς πλευρᾶς. Ἀλλ' ἡ εἰς τὸν Κύλινδρον ἐγγε-
γραμμένη σφαῖρα ἐστὶ πρὸς αὐτὸν τὸν Κύλινδρον, ὡς 2 πρὸς 3 (2)· ἢ ὡς ἡ δι-
πλασία τῆς τοῦ Τετραγώνου πλευρᾶς, πρὸς τὴν τριπλασίαν τῆς τοῦ αὐτοῦ Τε-
τραγώνου πλευρᾶς. Ἄρα ἡ περὶ τὸν ἰσόπλευρον Κύλινδρον περιγεγραμμένη
σφαῖρα ἐστὶ, πρὸς αὐτὸν τὸν Κύλινδρον (τὴν ἐστὶ ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν εἰς αὐ-
τὴν ἐγγεγραμμένον ἰσόπλευρον Κύλινδρον), ὡς ἡ τετραπλασία τῆς ἐν τῷ Τε-
τραγώνῳ διαμέτρου πρὸς τὴν τριπλασίαν τῆς Πλευρᾶς· ἢ, ὅ εἰς ταῦτόν ἦκει,
ὡς ἡ τετραπλασία τῆς διαμέτρου τοῦ Κύκλου, πρὸς τὴν τριπλασίαν τῆς Πλευ-
ρᾶς τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν Κύκλον ἐγγεγραμμένου Τετραγώνου.

Π ρ ό τ α σ ί ς ΛΕ'.

Οἷασθαι Σφαιρικῆς μοίρας ἡ ἐπιφάνεια ιλβθ, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῇ εἰς κ. 53, ἢ 52.
αὐτὴν ἐγγεγραμμένη μεγίστη Κώνη ιβθ λόγον ἔχει, ὃν ἡ τοῦ Κώνης πλευρὰ βθ,
πρὸς τὴν τῆς βάσεως ἡμιδιάμετρον δο.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ τῆς μοίρας ιλβθ ἐπιφάνεια ἰση ἐστὶ Κύκλῳ, ἢ Ἡμιδιάμετρος
ἡ βθ (3), ἔσται ὁ λόγος ταύτης πρὸς τὸν Κύκλον ξτ, τὴν ἐστὶ τὴν βάσιν
αὐτῆς τε ἢ τοῦ Κώνης, διπλασίον τῇ λόγῳ τῆς βθ πρὸς δο (4)· τὰς ἐστὶ τῆς

(1) ΙΗ. τῇ αρ. (2) ΛΒ. τῇ παρόντος. (3) ΚΕ. τῇ παρόντος. (4) Πορ. Β'. τῆς
Β. τοῦ ιβ.

Κωνικῆς ἐπιφανείας $\text{ιβ}\beta$, πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν $\xi\tau$ (1)· φανερόν ἔστιν ὅτι ὡς ἡ ἐπιφάνεια $\text{ιλ}\beta\beta$, πρὸς τὴν Κωνικὴν ἐπιφάνειαν $\text{ιβ}\beta$, ἔτις ἡ αὐτὴ Κωνικὴ $\text{ιβ}\beta$, πρὸς τὴν Βάσιν $\xi\tau$ (2)· ὡς δὲ ἡ Κωνικὴ $\text{ιβ}\beta$, πρὸς τὴν βάσιν $\xi\tau$, ἔτις ἡ $\beta\beta$ πρὸς τὴν $\beta\theta$ (3)· ὡς ἄρα ἡ τῆς Μοίρας ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐν αὐτῇ ἐγγεγραμμένην Κωνικὴν $\text{ιβ}\beta$, ἔτις ἡ $\beta\beta$ πρὸς τὴν $\beta\theta$. Ὅ" εἶδει δεῖξαι.

Πόρισμα. Ἐκ τῆς δειξέως τῆς παρῆτης Προτάσεως δῆλον, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῷ εἰς Τμήμα σφαίρας ἐγγεγραμμένῳ μεγίστῳ Κῶνι μέσθι ἐστὶν ἀνάλογον τῆς τῷ Τμήματος ἐπιφανείας καὶ τῆς ἐκατέρω κοινῆς βάσεως.

Π ρ ό τ α σ ι ς Λ ε'.

κ. 48. Ἡ τῷ Ἡμισφαίριῳ ἐπιφάνεια ($\epsilon\theta\beta\delta$), πρὸς μὲν τὴν τῷ ἐγγεγραμμένῳ μεγίστῳ ὀρθῷ Κῶνι ἐπιφάνειαν ($\epsilon\beta\delta$) λόγον ἔχει, ὃν ἐν τῷ Τετραγώνῳ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν· πρὸς δὲ τὴν τῷ περιγεγραμμένῳ ὁμοίᾳ, ὃν ἐν τῷ Τετραγώνῳ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν διάμετρον.

κ. 49. Μέρος Α'. Προδὴλον ἔκ τῆς ἀποδείξεως τῆς προηγουμένης Προτάσεως. Οἷα σῆν γὰρ μοίρας, ἐπομένως δὲ καὶ τῷ Ἡμισφαίριῳ ἡ ἐπιφάνεια $\epsilon\theta\beta\delta$, ἐστὶ πρὸς τὴν αὐτῇ ἐγγεγραμμένην Κωνικὴν, ὡς ἡ $\beta\delta$ πρὸς τὴν $\delta\alpha$ · ἐστὶ δὲ ἡ μὲν $\beta\delta$ διάμετρος· ἡ δὲ $\delta\alpha$, πλευρὰ τῷ Τετραγώνῳ βαδκ· ἄρα κτ.

Μέρος Β'. Ἐς περὶ Κύκλον, ἢ Κέντρον τὸ α , ἡμιτετράγωνον περιγεγραμμένον τὸ $\epsilon\beta\gamma$ · ἢ περὶ τὸν Α'ξονα $\alpha\beta$ περιεσφαιρόμενος, γεγεννηθῶ Κῶνος περὶ τὸ Ἡμισφαίριον περιγεγραμμένος. Ἐπεὶ ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς $\epsilon\gamma$ διπλάσιον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $\epsilon\beta$, ἢ τῆς $\delta\iota$ (4)· διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ Κύκλος, ἢ διάμετρος ἡ $\epsilon\gamma$, τῇ Κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἡ $\delta\iota$, τῷ ϵ ἐστὶ τῷ Κύκλῳ $\eta\delta\iota$ (5)· διπλασία δὲ τῷ αὐτῷ Κύκλῳ ἐστὶ καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῷ εἰς τὸν Κῶνον $\epsilon\beta\gamma$ ἐγγεγραμμένῳ Ἡμισφαίριῳ (6)· ὁ Κύκλος ἄρα, ἢ διάμετρος ἡ $\epsilon\gamma$, ἴσος ἐστὶ τῇ τῷ Ἡμισφαίριῳ ἐπιφανείᾳ. Τοιγαρὲν ἐπεὶ ἡ τῷ Κῶνι ἐπιφάνεια $\epsilon\beta\gamma$, ἐστὶ πρὸς τὸν Κύκλον, ἢ διάμετρος ἡ $\epsilon\gamma$, τῷ ϵ ἐστὶ πρὸς τὴν αὐτῇ βάσιν, ὡς ἡ πλευρὰ $\beta\epsilon$ πρὸς τὴν τῆς βάσεως ἡμιδιάμετρον $\alpha\epsilon$ (7), ἔσται καὶ πρὸς τὴν τῷ ἐκ αὐτῇ ἐγγεγραμμένῳ Ἡμισφαίριῳ ἐπιφάνειαν, ὡς ἡ $\epsilon\beta$ πρὸς τὴν $\alpha\epsilon$, τῷ ϵ ἔστι ὡς ἡ ἐν τῷ Τετραγώνῳ διάμετρος πρὸς τὴν αὐτῇ πλευράν· καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῷ Ἡμισφαίριῳ πρὸς τὴν περιγεγραμμένην Κωνικὴν, ὡς ἡ πλευρὰ τῷ Τετραγώνῳ πρὸς τὴν Διαγώνιον. Ὅ" εἶδει δεῖξαι.

(1) ΙΔ . τῷ παρόντος. (2) Ὅρισμ. ΙΓ . τῷ ϵ . (3) ΙΔ . τῷ παρόντος. (4) Πορ. Α'. αἷς ΜΖ . τῷ α . (5) Πορ. Ε'. τῷ Β. τῷ β . (6) ΚΔ . τῷ παρόντος. (7) ΙΔ . τῷ παρόντος.

Πόρισμα. Ἐὰν περὶ Κῶνον ὀρθογώνιον τὸν εβδ Ἡμισφαίριον περιγραφῇ, καὶ εἰς αὐτὸν ἕτερον ἐγγραφῇ, ἔσται ἡ τῷ Κῶνι ἐπιφάνεια μέση ἀνάλογον τῆς ἐπιφανείας τῷ περιγεγραμμένῳ Ἡμισφαίριῳ, καὶ τῆς τῷ ἐγγεγραμμένου. Ἐνταῦθα γὰρ ἢ τε τῷ περιγεγραμμένῳ Ἡμισφαίριῳ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῷ Κῶνι, καὶ ἡ τῷ Κῶνι πρὸς τὴν τῷ ἐγγεγραμμένῳ, ὡς ἐν τῷ τετραγώνῳ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΔΖ.

Πάσης Σφαίρας τό τε σφαιρὸν καὶ ἡ ἐπιφάνεια λόγον ἔχει, πρὸς τὸν περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένον τετράγωνον κωνικὸν Ρόμβον, ὅν ἡ ἐν τῷ τετραγώνῳ πλευρὰ πρὸς τὴν διάμετρον.

Περὶ τὸν μέγιστον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ Κύκλον κθδι, περιγεγράφω τετράγωνον τὸ εβγζ, ἐξ ἧς περὶ τὸν Δ΄ξονα βε περιεχθέντος, γεγεννήσω Ρόμβος τὴν σφαῖραν περιλαμβάνων. Καὶ γενέσω ὡς ἡ τῷ τετραγώνῳ πλευρὰ εβ (Σχήμα 49.), πρὸς τὴν αὐτὴν διάμετρον εγ, οὕτως ἡ Σ πρὸς τὴν Ρ (Σχήμα 50.)· ὡς δὲ ἡ Σ πρὸς τὴν Ρ, οὕτως ἡ Ξ πρὸς τὴν Ο· καὶ ἔσται δὴ ὁ λόγος τῆς Σ πρὸς τὴν Ο, τριπλασίον τῷ λόγῳ τῆς Σ πρὸς τὴν Ρ (1), τῷτ' ἐστὶ τῆς εβ πρὸς τὴν εγ· ὁ δὲ τῆς Ο πρὸς τὴν Ρ, διπλασίον τῷ τῆς Ο πρὸς τὴν Ξ, ἢ τῆς Ρ πρὸς τὴν Σ, τῷτ' ἐστὶ τῆς εγ πρὸς τὴν εβ· καὶ ἐπομένως ἡ Ο πρὸς τὴν Ρ, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς εγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς εβ (2)· διπλασία ἄρα ἡ Ο αὐτῆς τῆς Ρ (3). Τήτων δὲ ἡτῶ κατασκευασάντων, νοησάτω περὶ τὸν κωνικὸν Ρόμβον σφαῖρα περιγεγραμμένη ἡ εβγζ· καὶ ἔσται δὴ ἡ σφαῖρα κθδι πρὸς τὴν εβγζ, ἐν λόγῳ τριπλασίον τῷ τῆς διαμέτρου δι (ἢ εβ), πρὸς τὴν εγ διάμετρον (4), τῷτ' ἐστὶν ὡς ἡ Σ πρὸς τὴν Ρ (ὅπερ δέδεικται ἀνωτέρω)· ἔστι δὲ ἡ σφαῖρα εβγζ, πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον κωνικὸν Ρόμβον, ὡς 2 πρὸς 1 (5)· τῷτ' ἐστὶν ὡς ἡ Ο πρὸς τὴν Ρ (ὅπερ δέδεικται ἀνωτέρω). Δι' ἴσου ἄρα ἡ σφαῖρα κθδι, ἐστὶ πρὸς τὸν αὐτὸν Ρόμβον, ὅς ἐστι περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένος, ὡς ἡ Σ πρὸς τὴν Ρ, τῷτ' ἐστὶν ὡς ἐν τῷ τετραγώνῳ ἡ πλευρὰ εβ πρὸς τὴν διάμετρον εγ· ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

(Δείκνυται δὲ τὸ αὐτὸ καὶ ἐκ μόνης τῆς ἐποπτείας τοῦ 49. Σχήματος. Διὰ τὸ εἶναι γὰρ τὰ Τρίγωνα εθα, εαβ, εβγ ὀρθογώνια ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ ε γωνίαν κοινὴν, ἔσονται δὴ αὶ εθ, εα, εβ, εγ συνεχῶς ἀνά-

(1) Σημ. 1. τοῦ ε. (2) Σχολ. τῆς Κ. τοῦ ε. (3) Σχολ. τῆς ε. καὶ Ζ. τοῦ ε. (4) ΙΗ. τοῦ β. (5) Δ. τῷ παρόντος.

λογον (1)· ἡ δὲ λόγος τῆς εβ πρὸς εγ, τριπλασίον τῆς εβ πρὸς εγ (2)· Ἐστὶ δὲ ἡ μὲν εἰς τὸν κωνικὸν Ῥόμβον ἐγγεγραμμένη σφαῖρα, πρὸς τὴν περὶ αὐτὸν περιγεγραμμένην ἐν λόγῳ τριπλασίονι τῆς τῶν διαμέτρων εβ, εγ (3), τῆς εβ πρὸς εγ· ἡ δὲ περιγεγραμμένη πρὸς τὸν Ῥόμβον, περὶ ὃν περιγέγραπται, ὡς 2 πρὸς 1 (4)· ἢ ὡς ἡ εγ πρὸς εα. Δι' ἴσου ἄρα ἡ ἐγγεγραμμένη σφαῖρα πρὸς τὸν Ῥόμβον, εἰς ὃν ἐγγέγραπται, ἢ (ὅπερ ἐστὶ ταῦτόν) ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένον Ῥόμβον, ὡς ἡ εβ πρὸς εα· τῆς εβ πρὸς εγ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν διάμετρον ἐν τῷ τετραγώνῳ ηδ).

Ἐκ δὲ τῆς Β'. μέρης τῆς προηγουμένης φανερόν, ὅτι ἡ τῆς Ἡμισφαίρης ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῆς περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένης Κῶνυς εβγ, ἢ ἐπομένως ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς Σφαίρας ηδδ, πρὸς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Ῥόμβου εβγζ, εἰς ὃν ὡς ἡ πλευρὰ ἐν τῷ τετραγώνῳ πρὸς τὴν διάμετρον. Πάσης ἄρα Σφαίρας τό, τε σφαιρὸν ἢ ἡ ἐπιφάνεια, ἐστὶ πρὸς τὸν περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένον τετράγωνον κωνικὸν Ῥόμβον (εβγζ), ὡς ἐν τῷ τετραγώνῳ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν διάμετρον. Ὅ" εἰδει δεῖξαι.

Πόρισμα Α'. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς περὶ κωνικὸν ἰσόπλευρον Ῥόμβον περιγεγραμμένης σφαίρας, ἢ ἐπιφάνεια τῆς Ῥόμβου, περὶ ὃν ἡ σφαῖρα περιγέγραπται, ἢ ἡ ἐπιφάνεια τῆς εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένης σφαίρας ἔχουσι συνεχῶς τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει ἐν τῷ τετραγώνῳ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν. Δῆλον δὲ ἔκτε τῆς προηγουμένης ἢ τῆς παρούσης.

Β'. Ἡ μὲν τῆς περὶ Ῥόμβον κωνικὸν ἰσόπλευρον περιγεγραμμένης Σφαίρας ἐπιφάνεια, διπλασία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς εἰς τὸν αὐτὸν Ῥόμβον ἐγγεγραμμένης Σφαίρας· ἡ δὲ τῆς περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένης Κωνικῆς ἰσοπλευροῦ Ῥόμβου, διπλασία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς εἰς τὴν αὐτὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένης ὁμοίᾳ Ῥόμβου. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ἐπιφάνεια τῆς περὶ Ῥόμβον περιγεγραμμένης Σφαίρας, ἢ τε τῆς Ῥόμβου, ἢ ἡ τῆς εἰς τὸν Ῥόμβον ἐγγεγραμμένης Σφαίρας εἰσι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ εγ, εβ, εα· ἢ ἔτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένης Ῥόμβου, ἢ ἡ ἐπιφάνεια τῆς Σφαίρας, ἢ ἡ τῆς εἰς τὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένης Ῥόμβου εἰσιν ὡσαύτως, ὡς αἱ εγ, εβ, εα, φανερόν, ὅτι ἐν ἑκάτερᾳ τῇ πτώσει ἡ ἐπιφάνεια τῶν περιγεγραμμένων σωμάτων ὕσεται πρὸς τὴν τῶν ἐγγεγραμμένων, ὡς ἡ εγ πρὸς τὴν εα, ἢ ὡς 2 πρὸς 1.

Γ'. Ὁ κωνικὸς ἰσόπλευρος Ῥόμβος ἐστὶν πρότερος τῶν δύο μέσων ἀνάλο-

(1) Πορισμ. μετὰ τὸ Σχόλ. τῆς ΙΓ. τῆς ε'. (2) Ορισμ. ΙΘ. τῆς ε'. (3) ΙΗ. τῆς β'. (4) Α. τῆς παρούσης.

γον τῆς τε εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένης, καὶ τῆς περὶ αὐτὸν περιγεγραμμένης Σφαίρας, ὡς ἐν τῇ δείξει τῷ πρώτῳ μέρει τῆς παρῆσης δέδεικται· ἡ γὰρ ἐγγεγραμμένη τῷ Ρ'όμβῳ Σφαῖρα, ὁ Ρ'όμβος, καὶ ἡ περιγεγραμμένη εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ Σ, Ρ, Π ἐν τῷ 50 Σχήματι· ἢ ὡς αἱ εδ, εα, εγ, ἐν τῷ 49.

Δ'. Δῆλον ἔτι ἐκ τῆς αὐτῆςδείξεως (ἢ ἐκ τῆς Δ'. τῆ παρόντος), ὅτι κ. 49.
ἡ Σφαῖρα εἰς διπλασίαν τῷ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένῳ κωνικῷ τετραγώνῳ Ρ'όμβῳ.

Ε'. Ἡ περὶ Ρ'όμβον κωνικὸν τετράγωνον περιγεγραμμένη Σφαῖρα εβγζ, εἰς πρὸς τὴν εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένην σφαῖραν ηθδι, ὡς ἐν τῷ τετραγώνῳ ἡ διάμετρος ἐν πρὸς τὴν εδ ἡμίσειαν τῆς πλευρᾶς εβ, ὡς δῆλον ἐκ τῆς εἰρημένηςδείξεως· ἐν δὲ τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰς ἐκ τῆς περὶ σφαῖραν περιγεγραμμένος κωνικός τετράγωνος Ρ'όμβος, πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον ὁμοῖον Ρ'όμβον· ἔτι γὰρ (διὰ τὴν ΑΖ'. ταύτην) ὁ μὲν περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένος κωνικός τετράγωνος Ρ'όμβος, πρὸς αὐτὴν τὴν σφαῖραν, ὡς ἡ εγ πρὸς τὴν εβ· ἡ δὲ σφαῖρα πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον τοιῆτον Ρ'όμβον, ὡς 2 πρὸς 1· ἢ ὡς ἡ εβ πρὸς τὴν εδ (Πορ. Δ'. τῆς παρ.)· δι' ἴση ἄρα ὁ Ρ'όμβος ὁ περιγεγραμμένος πρὸς τὸν ἐγγεγραμμένον, ὡς ἡ εγ πρὸς τὴν εδ (ΚΒ'. τῷ ε'.)

ς'. Τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει Ρ'όμβος κωνικός τετράγωνος περὶ σφαῖραν περιγεγραμμένος, πρὸς Ρ'όμβον ὁμοῖον τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμένον· καὶ Κυλινδρος ἰσόπλευρος περὶ οἰανδήποτε ἄλλην σφαῖραν περιγεγραμμένος, πρὸς Κύλινδρον ὁμοῖον εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμένον, ἐκ σφαῖρα, περὶ Κύλινδρον ἰσόπλευρον ἢ Ρ'όμβον κωνικὸν τετράγωνον περιγεγραμμένη, πρὸς ἑτέραν εἰς τὸν αὐτὸν Κύλινδρον ἢ τὸν Κῶνον ἐγγεγραμμένην. Εἰσὶ γὰρ ἅπαντα πρὸς ἄλληλα ὡς ἐν τῷ τετραγώνῳ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς πλευρᾶς· ὡς δῆλον ἔκτε τῶ προηγμένῳ Πορίσματος τῆς παρῆσης, ἐκ τῶ Σχολίου τῆς ΑΔ'. τῆ παρόντος.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΑΗ'.

Η' ἐπιφάνεια οἰασθὲν Σφαιρικῆς μοίρας (βδκδ), Κῶνον ἰσόπλευρον (τὸν κ. 54.
βκδ) περιλαμβανέσης, διπλασία ἐστὶ τῆς τῷ περιλαμβανομένῳ Κῶνι ἐπιφανείας.

Δῆλον ἐκ τούτου ἐκ τῆς ΑΕ'. Ἐστὶ γὰρ ἡ τῆς μοίρας βδκδ ἐπιφάνεια, πρὸς τὴν τῷ ἐγγεγραμμένῳ Κῶνι ἐπιφάνειαν, ὡς ἡ βκ πρὸς τὴν βα (1)· ὑπόκειται δὲ ὁ Κῶνος βκδ ἰσόπλευρος· ἡ ἄρα κβ ἴση τῇ βδ· ἐκ ἐπομένως διπλασία τῆς

(1) ΑΕ. τῆ παρόντος.

βα· ἡ τῆς μοίρας ἄρα ἐπιφάνεια βδκδ, διπλασία ἐς τῆς ἐπιφανείας τῆ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένη Κώνη βκδ. Ο' εἶδει δεῖξαι.

Πόρισμ. Α'. Ο' αὐτὸς δὲ διπλάσιος λόγος τηρεῖται, καὶ ἐν ταῖς ἐπιφανείαις τῆς τε τὸν ἰσόπλευρον Κῶνον περιλαμβανέσης σφαιρικῆς μοίρας, καὶ τῇ Κώνῃ, καὶ τῆς βάσεως τῇ Κώνῃ. Δῆλον δὲ ἔκ τε τῆς παρήσης καὶ ἐκ τῇ Πορίσματος τῆς ΛΕ'.

Β'. Η' τῆς Κῶνον ἰσόπλευρον περιλαμβανέσης σφαιρικῆς μοίρας ἐπιφάνεια, ἐς τὴν πρὸς ὅλην τὴν τῇ περιλαμβανομένῃ Κώνῃ ἐπιφάνειαν, ὡς 4 πρὸς 3.

Αἱ γὰρ ἐπιφάνειαι τῆς τε τὸν ἰσόπλευρον Κῶνον περιλαμβανέσης σφαιρικῆς μοίρας, καὶ τῇ περιλαμβανομένῃ Κώνῃ, καὶ τῆς τῇ Κώνῃ βάσεως εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς 4, 2, 1 (Πόρισμ. Α'). ὁθεν δῆλον τὸ Πόρισμα.

Γ'. Η' ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἐς τὴν πρὸς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τῇ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένη ἰσοπλεύρῃ Κυλίνδρῳ, ὡς ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἰσόπλευρον Κῶνον περιλαμβανέσης σφαιρικῆς μοίρας, πρὸς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τῇ αὐτῇ Κώνῃ· τῷτ' ἐσιν ὡς 4 πρὸς 3. Δῆλον ἔκ τε τῆς ΛΔ'. τῇ παρόντος καὶ ἐκ τῇ Β'. Πορίσματος τῆς παρήσης.

Ἐν τῷ αὐτῷ δὲ λόγῳ ἐσιν ὅλη ἡ ἐπιφάνεια Κυλίνδρου ὁρθῇ περὶ ἡμισφαίριον περιγεγραμμένη, πρὸς ὅλην τὴν τῇ ἡμισφαίρει ἐπιφάνειαν. Ἐπεὶ γὰρ ἐσιν ἡτε Κυλινδρική (1) καὶ ἡ ἡμισφαιρική (2) διπλασία τῆς βάσεως, ἔσσεται δὲ ὅλη μὲν ἡ κυλινδρική τετραπλασία τῆς βάσεως· ἡ δὲ ἡμισφαιρική μετὰ τῆς βάσεως τριπλασία τῆς αὐτῆς βάσεως· ὅλη ἄρα ἡ τῇ Κυλίνδρῳ ἐστὶ πρὸς ὅλην τὴν τῇ ἡμισφαίρει, ὡς 4 πρὸς 3.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΛΘ'.

Η' ἐπιφάνεια τῆς Σφαίρας πρὸς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τῇ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένη ἰσοπλεύρῃ Κώνῃ λόγον ἔχει, ὃν ὁ 16 πρὸς 9.

κ. 54.

Ἐς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας τὸ φ· εἰς δὲ τὴν σφαῖραν Κῶνος ἰσόπλευρος ἐγγεγραμμένος ὁ βκδ· καὶ ἄξων κοινὸς τῇ τε σφαίρῃ καὶ τῷ Κώνῳ ἐκφαο. Ἐὰν ἂν τμηθῶσι διὰ τῷ ἄξονος ἡ τε Σφαῖρα καὶ ὁ Κῶνος, γενήσεται ἐν μὲν τῇ Σφαίρῃ Κύκλος μέγιστος ὁ οβκδ· ἐν δὲ τῷ Κώνῳ Τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ βκδ, οὗ τινος ἡ μία πλευρὰ βαδ διάμετρος ἐστὶ τῆς τῇ Κώνῃ βάσεως ζτ· καὶ ἐπεὶ ὁ τῇ Κώνῃ ἄξων καὶ ἐστὶ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ζτ, ἔσσεται ἡ γωνία καο ὁρθή (3)· διὰ δὲ τῷτο τὸ ἀπὸ τῆς βα τετραγώνον ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν καο ὁρθογωνίῳ (4).

(1) Πόρισμ. τῆς Κς. τῇ παρόντος. (2) ΚΑ. τῇ παρόντος. (3) Ορίσμ. Γ. τῇ κ. (4) Πόρι. Β'. τῆς ΙΖ. τῇ ε'.

Εἴπερ δὲ ἡ τῷ ἰσοπλεύρῳ Τριγώνῳ πλευρὰ τεταρτημόριον τῷ ἄξονος ἀποτεμένει τὴν αο (1), ἔσται δὴ τὸ ὑπὸ τῶν καὶ ὀρθογώνιον, τῷτ' ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βα τετράγωνον, τριπλάσιον τῷ ἀπὸ τῆς αο τετραγώνῳ (2). Τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου φο τετράγωνον, ἐπεὶ ἐστὶ τετραπλάσιον τῷ ἀπὸ τῆς αο τετραγώνῳ (3), ἔσται δὴ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου βα τετράγωνον, ὡς 4 πρὸς 3· ἄρα καὶ ὁ κύκλος οβκδ ἐστὶ πρὸς τὸν κύκλον ξτ, ὡς 4 πρὸς 3α(4)· ἐστὶν ἄρα ὁ τετράκις κύκλος οβκδ, τῷτ' ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας δθ (5) πρὸς τὸν κύκλον ξτ, ὡς 16 πρὸς 3· ἐστὶ δὲ καὶ ἡ τῷ ἰσοπλεύρῳ Κώνῳ βκδ ἐπιφάνεια, χωρὶς μὲν τῆς βάσεως πρὸς τὸν κύκλον ξτ, τῷτ' ἐστὶ πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν, ὡς 2 πρὸς 1 (6)· μετὰ δὲ τῆς βάσεως, τῷτ' ἐστὶν ὅλη ἡ τῷ Κώνῳ βκδ πρὸς τὴν βάσιν, τῷτ' ἐστὶ τὸν κύκλον ξτ, ὡς 3 πρὸς 1, ἢ ὡς 9 πρὸς 3· καὶ ἐπεὶ δέδεικται ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἐστὶ πρὸς τὸν αὐτὸν κύκλον, ὡς 16 πρὸς 3· ἔσται δὴ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς Σφαίρας, πρὸς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τῷ ἰσοπλεύρῳ Κώνῳ, ὡς 16 πρὸς 9. Οἷον δεῖξαι.

Πόρισμα. Δῆλον ἄρα ἐκ τῆς παρήσηςδείξεως, ὅτι ἡ τῷ εἰς Σφαιρίαν ἐγγεγραμμένῳ ἰσοπλεύρῳ Κώνῳ βάσις ξτ, ἔχει πρὸς τὸν μέγιστον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλον δθ, ὡς 3 πρὸς 4.

(Αἴτιον. Εἴπερ δὲ ἡ τῷ ἰσοπλεύρῳ Τριγώνῳ πλευρὰ βδ, τεταρτημόριον τῷ Ἀξονος ἀποτεμένει τὴν αο (7)· ἔσται δὴ ἡ σφαιρική ἐπιφάνεια βοδ τεταρτημόριον τῆς ἐπιφανείας τῆς ὅλης σφαίρας (8)· καὶ ἐπομένως ἡ λοιπὴ βδκδ ἴση τριτῷ τεταρτημόριον· εἰν ἄρα ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τεθῇ ἴση 16· ἔσται ἡ βδκδ ἴση 12· ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια βδκδ ἐστὶ διπλασία τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας βκδ (9), καὶ ἐστὶ δὴ πρὸς αὐτὴν ὡς 12 πρὸς 6· ὅλη ἄρα ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια ἐστὶ πρὸς τὴν Κωνικὴν βκδ, ὡς 16 πρὸς 6. Εἴπερ δὲ ἡ ἐπιφάνεια τῷ Κώνῳ βκδ (ὄντος ἰσοπλεύρου), διπλασία ἐστὶ τῆς βάσεως ξτ (10), φανερόν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῷ Κώνῳ χωρὶς δηλονότι τῆς βάσεως, ἐστὶ πρὸς ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τῷ Κώνῳ, ὡς 2 πρὸς 3, ἢ ὡς 6 πρὸς 9. Δι' ἴσου ἄρα ὅλη ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια, πρὸς ὅλην τὴν ἐγγεγραμμένῳ ἰσοπλεύρῳ Κώνῳ ἐπιφάνειαν, ὡς 16 πρὸς 9. Οἷον δεῖξαι.)

(1) Πόρ. Ε. τῆς ΙΕ. τῇ ε'. (2) Α. τῇ ε'. (3) Πόρ. Γ'. τῆς Δ. τῇ β'. (4) Πορ. Β. τῆς Β. τῇ β'. (5) ΚΔ. τῇ παρόντος. (6) Πορ. Α'. τῆς ΙΗ. τῇ παρόντος. (7) Πόρ. Ε. τῆς ΙΕ. τῇ ε'. (8) ΚΖ. τῇ παρόντος. (9) Προτ. προηγ. (10) Πόρ. Α'. τῆς ΑΗ. τῇ παρόντος.

Π ρ ό τ α σ ι ς Μ'.

α. 55.

Η' τῆς Σφαίρας ἐπιφάνεια πρὸς ὅλην τὴν τῷ περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένην ἰσοπλεύρῃ Κῶνι ἐπιφάνειαν λόγον ἔχει, ὃν ὁ 4 πρὸς 9.

Εἴσω περὶ τὸν μέγιστον τῶν ἐν τῇ Σφαίρᾳ κύκλον βπμ, Τρίγωνον ἰσόπλευρον περιγεγραμμένον τὸ δοζ, ἐξ ἧς περὶ τὸν Ἀΐξονα οαβ περιεγεγράφθαι, ἀπογεγενηῖσθαι Κῶνος ἰσόπλευρος περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένος· περὶ δὲ τὸ ἰσόπλευρον Τρίγωνον δοζ περιγεγράφθαι κύκλος ὁ ὑδροζ, ὅς ἐστι τῷ προτέρῳ ὁμόκεντρος (1), καὶ προεκβεβλήσθαι ὁ Ἀΐξων οαβ ἐπὶ τὸ ν. Ἐπεὶ ἔν ἡ βν τεταρτημόριον ἐστὶ τῷ Ἀΐξονος ον (2), φανερόν ὅτι ἡ ον διπλασία ἐστὶ τῆς κβ· Τοιγαρὺν, ἐπεὶ ὁ τῶν κύκλων λόγος ἐστὶ διπλασίων τῷ τῶν διαμέτρων (3)· ἔσται δὴ ὁ κύκλος βπμ, πρὸς τὸν κύκλον ὑδροζ, ὡς 1 πρὸς 4· Προδεδεικται δὲ ἐν τῇ προτέρᾳ δεῖξει τῆς προηγμένης, ὅτι ὁ κύκλος ὑδροζ ἐστὶ πρὸς τὸν κύκλον ξτ, ὅς ἐστι βάσις τῷ εἰς τὴν σφαῖραν λζ ἐγγεγραμμένῳ ἰσοπλεύρῃ Κῶνι, ὡς 4 πρὸς 3. Δι' ἴτην ἄρα ὁ κύκλος βπμ πρὸς τὸν κύκλον ξτ, ὡς 1 πρὸς 3 (4)· ἐστὶ δὲ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῷ Κῶνι δοζ, τριπλασία τῷ κύκλῳ ξτ (5)· ὅλη ἄρα ἡ τῷ Κῶνι ἐπιφάνεια ἐννεαπλασία ἐστὶ τῷ κύκλῳ βπμ· ἄλλα τῷ κύκλῳ βπμ τετραπλασία ἐστὶν ἡ τῆς σφαίρας τπ ἐπιφάνεια (6)· ὅλη ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῷ ἰσοπλεύρῃ Κῶνι δοζ ἔσται πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, περὶ ἣν περιγεγράφται, ὡς 9 πρὸς 4. Ο' ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα. Α'. Δῆλον ἐκ τῆς δεξέως ταύτης, ὅτι ὁ τῷ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένῳ ἰσοπλεύρῃ Κῶνι Ἀΐξων βο, ἡμιόλιός ἐστι τῆς τῆς σφαίρας διαμέτρου βκ, τῷτ' ἐστὶν ὡς 3 πρὸς 2.

Β'. Δῆλον δ' ἐστὶ ἐκ τῆς αὐτῆς δεξέως, ὅτι ἡ τῷ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένῳ ἰσοπλεύρῃ Κῶνι δοζ βάσις ξτ, ἡμιολία ἐστὶ συναμφοτέρου τῆς βάσεως τῷ περὶ τὴν αὐτὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένῳ Κυλίνδρῳ· ἐστὶ γὰρ ὁ ξτ πρὸς τὸν βπμ, ὡς 3 πρὸς 1· ἄρα ὁ ξτ πρὸς τὸν δις βπμ, ὡς 3 πρὸς 2.

Γ'. Η' τῷ ἰσοπλεύρῃ Κῶνι δοζ ἐπιφάνεια ἡμιολία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῷ περὶ τὴν αὐτὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένῳ Κυλίνδρῳ· ἐστὶ γὰρ ἐκείνη μὲν, διπλασία τῷ ξτ κύκλῳ (7)· αὕτη δὲ, τετραπλασία τῷ βπμ (8)· ἡ κωνικὴ ἄρα ἐπιφάνεια ἔσται πρὸς τὴν κυλινδρικήν, ὡς δις 3 πρὸς τετράκις 1· τῷτ' ἐστὶν ὡς 6 πρὸς 4· ἢ ὡς 3 πρὸς 2.

(1) Σχόλ. τῆς ΙΓ. καὶ ΙΔ τῷ δ. (2) Πόρ. Β'. τῆς ΙΕ. τῷ δ. (3) Β. τῷ ιβ'. (4) ΚΕ. τῷ ε'. (5) Πόρισμα. Α'. τῆς ΙΔ. τῷ παρόντος. (6) ΚΔ. τῷ παρόντος. (7) Πόρ. Δ'. τῆς ΙΔ. τῷ παρόντος. (8) Κε. καὶ ΚΔ. τῷ παρόντος.

Δ'. Ο' μέγιστος κύκλος (βπμ) τῆς εἰς Κῶνον ἰσοπλευρου (τὸν δοζ) ἐγγεγραμμένης Σφαίρας, ἡ ἐπιφάνεια τῆς αὐτῆς Σφαίρας, ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῷ Κῶνι (δοζ), εἰς ὃν ἡ Σφαῖρα ἐγγέγραπται, ἢ ἡ ἐπιφάνεια τῆς περὶ τὸν αὐτὸν Κῶνον περιγεγραμμένης Σφαίρας ὅλοζ, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς 1, 4, 9, 16· τῶτ' ἔστιν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4. Δῆλον ἐκ τῆς ΚΔ', ἐκ τῆς παρέσης, ἢ ἐκ τῆς ΛΘ'. τῷ παρόντος.

Ε'. Ο'θεν δοθείσης τῆς κατὰ τὴν ἐγγεγραμμένην Σφαῖραν διαμέτρου αβ, εὐχερῶς καταγραφῆσονται Κύκλοι ταῖς εἰρημέναις ἐπιφανείαις ἴσοι. Αἱ γάρτοι ἀκτῖνες τῶν τοιούτων Κύκλων ἔσονται ααβ, 4αβ (1)· ἢ τὰ μέτρα τῶν κατ' ἐκείνας ἐπιφανειῶν αὐτίκα γνωδῆσονται.

ς'. Ἐπεὶ ἡ τῆς περὶ Κῶνον ἰσοπλευρου περιγεγραμμένης Σφαίρας διάμετρος ον, διπλασία ἐστὶ τῆς κατὰ τὴν ἐγγεγραμμένην Σφαῖραν διαμέτρου κβ, ἔσται δὴ ἡ περιγεγραμμένη Σφαῖρα ὀκταπλασία τῆς ἐγγεγραμμένης· ἐν λόγῳ δηλονότι τριπλασίονι τῶν διαμέτρων (2)· ἢ ὡς ὁ κύβος τῆς δυνάδος πρὸς τὸν κύβον τῆς μονάδος (3).

Π ρ ό τ α σ ι ς ΜΑ'.

Ο'λη ἡ τῷ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένῃ ἰσοπλεύρῳ Κῶνι ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τῆς ὅλης ἐπιφανείας τῷ εἰς τὴν αὐτὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένῃ ὁμοίῳ Κῶνι. α. 55.

Ο'λη γὰρ ἡ τῷ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένῃ ἰσοπλεύρῳ Κῶνι δοζ ἐπιφάνεια ἐστὶ πρὸς τὴν τῆς Σφαίρας, περὶ ἣν περιγέγραπται ἐπιφάνειαν, ὡς 9 πρὸς 4 (4)· ἡ δὲ τῆς Σφαίρας πρὸς τὴν τῷ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένῃ ὁμοίῳ Κῶνι σκτ, ὡς 16 πρὸς 9 (5). Αἱ ἴσιν ἄρα τεταραγμένως (6), ὅλη ἡ τῷ περιγεγραμμένῃ ἰσοπλεύρῳ Κῶνι ἐπιφάνεια, πρὸς ὅλην τὴν τῷ ἐγγεγραμμένῳ ὁμοίῳ Κῶνι, ὡς 16 πρὸς 4, ἢ ὡς 4 πρὸς 1. Ο' ἔδει δεῖξαι.

Παραπλησίῳ δὲ τρόπῳ δέικνυται, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς περὶ Κῶνον ἰσοπλευρου περιγεγραμμένης Σφαίρας τετραπλασία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας, τῆς εἰς τὸν αὐτὸν Κῶνον ἐγγεγραμμένης Σφαίρας. Δῆλον ἐκ τῷ Δ'. Πορίσματος τῆς προηγουμένης.

(1) Πρόφ. Β'. τῆς Β. τῷ αβ'. (2) ΔΗ. τῷ αβ'. (3) Σχόλ. τῆς ΛΓ. τῷ ια'. (4) Δπὶ τὴν προηγουμένην. (5) ΛΘ. τῷ παρόντος. (6) ΚΓ. τῷ ε'.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΜΒ΄.

Ἡ Σφαῖρα πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον ἰσόπλευρον Κῶνον βκγ εἰσιν, ὡς 32 πρὸς 9.

κ. 56.

Τετμήσθω ἡ σφαῖρα ἐξ ὁ Κῶνος βκγ, διὰ τῷ κοινῷ Α΄ξονος κοῖ ἐπιπέδῳ ποιῶντι ἐν μὲν τῇ Σφαίρᾳ Κύκλον μέγιστον τὸν οζκι· ἐν δὲ τῷ Κῶνῳ Τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ βκγ. Διὰ δὲ τῷ κέντρῳ α διήχθω ἐπίπεδον ἑρῶδὸν ἐπὶ τὸν Α΄ξονα οκ, ἀποτέμνον Ἡμισφαῖριον τὸ ζηκι, εἰς ὃ νενοήσθω Κῶνος μέγιστος ἐγγεγραμμένος ὁ ζκι. Ἐπεὶ ἔν ἡ τῷ ἰσοπλεύρῳ Τρίγωνῳ πλευρὰ βγ ἀποτέμνεται τῷ Α΄ξονος οκ τεταρτημόριον τὴν οπ (1), ἔσται δὲ ἡ πκ πρὸς τὴν ακ, ὡς 3 πρὸς 2, τῷτ' εἰσιν, ὡς 9 πρὸς 6. Δεδεικται δὲ ἐν τῇ ΛΘ΄, ὅτι ἡ βάσις ξτ ἐστὶ πρὸς τὸν κύκλον οζκι, τῷτ' εἰς πρὸς τὴν βάσιν νδ, ὡς 3 πρὸς 4, εἴτ' ἔν ὡς 6 πρὸς 8· ἐπεὶ ἄρα, ὁ λόγος τῷ Κῶνῳ βκγ πρὸς τὸν ζκι Κῶνον σύγκειται (2), ἔκ τε τῷ λόγῳ τῷ ὕψους πκ πρὸς τὸ ὕψος ακ (τῷτ' εἰς τῷ 9 πρὸς 6), ἐκ τῷ λόγῳ τῆς βάσεως ξτ πρὸς τὴν βάσιν νδ (τῷτ' εἰς τῷ 6 πρὸς 8), ἔσται δὲ ὁ Κῶνος βκγ πρὸς τὸν Κῶνον ζκι, ὡς 9 πρὸς 8. Ἐπεὶ δὲ ἡ Σφαῖρα γδ ἐστὶ τετραπλάσια τῷ Κῶνῳ ζκι (3)· Ὁ ἰσόπλευρος ἄρα Κῶνος βκγ ἔσται πρὸς τὴν Σφαῖραν γδ, ὡς 9 πρὸς 32. Ὁ ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλῶς. πκ πρὸς ακ, ὡς 3 πρὸς 2, ἢ ὡς 9 πρὸς 6· ἐπεὶ εἰσιν ξτ πρὸς γδ, ὡς 3 πρὸς 4 (4), ἢ ὡς 9 πρὸς 8· ἔσται ξτ πρὸς 4γδ, ὡς 6 πρὸς 32· ὁ Κῶνος ἄρα, οὗ ὕψος μὲν πκ, βάσις δὲ ξτ, τῷτ' εἰσιν ὁ Κῶνος βκγ πρὸς τὸν Κῶνον, ὃ ὕψος μὲν ακ βάσις δὲ 4γδ, τῷτ' εἰς (5) πρὸς τὴν Σφαῖραν γδ ἐν λόγῳ ἐστὶ συγκειμένῳ, ἔκ τε τῷ λόγῳ τῷ 9 πρὸς 6, ἐκ τῷ 6 πρὸς 32 (6), ἢ ὡς 9 πρὸς 32 (7).

Π ρ ό τ α σ ι ς ΜΓ΄.

κ. 55.

Κῶνος ἰσόπλευρος ὁ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένος, ὀκταπλάσιός ἐστι Κῶνος ὁμοίῳ τῷ εἰς τὴν αὐτὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένῳ.

Ἐῤωσαν δύο Κῶνοι ἰσόπλευροι οἱ σκτ, δοξ ὁ μὲν, ἐγγεγραμμένος εἰς τὴν Σφαῖραν, ὁ δὲ, περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένος· ἐξ Α΄ξων κοινὸς ὁ οκβ. Διὰ δὲ τῷ Α΄ξονος τετμήσθωσαν ἐπιπέδῳ τῶν τε Κῶνων ἐκάτερος ἐξ ἡ Σφαῖρα· ἐξ

(1) Πέρ. Ε. τῆς ΙΕ. τῷ δ.

(2) Σχόλ. Β'. τῆς ΙΕ. τῷ ιβ'.

(3) Α. τῷ παρόντι.

(4) Πορ. τῆς ΛΘ. τῷ παρόντι.

(5) ΚΗ. τῷ παρόντι.

(6) Σχόλ. Β'. τῆς ΙΕ. τῷ ιβ'.

(7) Ὁρίσμ. Ε. τῷ ε'.

ἔσονται αἱ Τομαὶ αὐτῶν Τρίγωνα δύο ἰσόπλευρα, ἢ Κύκλοι μέγιστοι ὁ βπμ. Περὶ τὸ Τρίγωνον δοξ νενειῶθω Κύκλος περιγεγραμμένος ὁ νδζ· ἢ ὁ Α'ξων οκβ προεπβεβλήθω ἐπὶ τὸ ν. Ἐπεὶ ἔν η̄ τῷ ἰσοπλευρῷ Τρίγωνῳ πλευρὰ δζ, ἀποτεμένει τῷ Α'ξονος ον τεταρτημόριον τὴν νβ (1), δηλοῖ ὅτι ἡ νο διπλασίᾳ ἐστὶ τῆς βκ. Ὡς αὐτως ἐπεὶ ἡ τῷ ἑτέρῳ ἰσοπλευρῷ Τρίγωνῳ πλευρὰ στ ἀπατέμνει τῷ Α'ξονος βκ τεταρτημόριον τὴν βγ (2), ἔσεται ὡς ἡ νο πρὸς τὴν οβ, ὅπως ἡ βκ πρὸς τὴν κγ· ἢ ἐν ἀναλλάσσοντι ὡς ἡ νο πρὸς τὴν βκ, ὅπως ἡ οβ πρὸς κγ· διπλασία δὲ ἡ νο τῆς βκ, διπλασία ἄρα ἢ ἡ οβ τῆς κγ. Διὰ τὸ εἶναι δὲ τὰ Τρίγωνα δοζ, σκτ ὅμοια, ἔσονται δὴ ἢ αἱ τῶν κωνικῶν βάσεων διάμετροι δζ, στ ἐν λόγῳ διπλασίῳ (3). Τοιγαρὺν ἐπεὶ οἱ Κῶνοι δοζ, σκτ εἰσὶν ὅμοιοι (4), ἢ ὁ λόγος αὐτῶν (5) τριπλασίῳ τῷ λόγῳ τῶν διαμέτρων δζ, στ, αἵτινες εἰσὶ ὡς 2 πρὸς 1· ἔσεται δὴ ὁ Κῶνος δοζ πρὸς τὸν Κῶνον σκτ, ὡς 8 πρὸς 1. Ο' ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλ' ὡς. Ἀ'χθεισῶν τῶν εὐθειῶν ἐν, σβ ἐπεὶ ἐστὶν ἡ γωνία δοζ, ἴση τῇ σκτ (6), ἄρα καὶ αἱ ἡμίσειαι αὐτῶν δον, σκβ ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις· ἢ αἱ οδν, κσβ ὅρθαι (7), ἢ τὰ Τρίγωνα δον, σκβ ὅμοια (8), ἢ ἐπομένως δο : σκ : ον : κβ :: 2 : 1 (9)· ἄρα ἡ δζ (= δο) : στ (= σκ) :: 2 : 1· ἢ οἱ ἰσόπλευροι Κῶνοι, ἐπεὶ εἰσὶν ὅμοιοι, ἔσονται ὡς 8 πρὸς 1· εἰπὶ γὰρ 8, 4, 2, 1 ÷.

Π ό ρ ι σ μ α .

Ο' περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένος ἰσόπλευρος Κῶνος ἐστὶ πρὸς τὸν εἰς τὴν αὐτὴν Σφαῖραν ἐγγεγραμμένον ὅμοιον Κῶνον, ὡς ἡ περὶ Κῶνον ἰσόπλευρον περιγεγραμμένη Σφαῖρα πρὸς τὴν εἰς τὸν αὐτὸν Κῶνον ἐγγεγραμμένην, τῷτ' ἐστὶν ὡς 8 πρὸς 1. Δῆλον ἔκ τε τῆς παρέσης ἢ τῷ ε'. Πορίσματος τῆς Μ'.

Καὶ ἐν γένει ἐπεὶ τὰ οἰομένης εἶδους ὅμοια σώματα τὰ δυνάμενα περὶ Σφαῖραν περιγραφῆναι ἢ εἰς αὐτὴν ἐγγραφῆναι, ἔχει τὰς διαμέτρους ἢ τὰς πλευρὰς ταῖς διαμέτροις τῶν ἐγγεγραμμένων, ἢ περιγεγραμμένων Σφαιρῶν ἀνάλογον, ἢ ἐστὶ πρὸς ἀλλήλα ἐν λόγῳ τριπλασίῳ μὲν κατὰ γὰρ τὰ σφαῖρα, διπλασίῳ, δὲ κατὰ τὰς ἐπιφανείας τῷ λόγῳ τῶν ὁμολόγων διαμέτρων, ἢ πλευρῶν· διὰ ταῦτα δὴ (10) ὃν λόγου ἔχει ἡ περὶ σῶμα οἰομένηποτε περιγε-

(1) Πόρισμ. Ε. τῆς ΙΕ. τῷ δ'. (2) Πόρ. τὸ αὐτό. (3) Δ. τῷ ε'. (4) Ὅρισμ. Δ. τῷ β'. (5) ΙΒ. τῷ β'. (6) Πόρισμ. τῆς Β. τῷ α'. (7) ΛΑ. τῷ γ'. (8) Πόρ. Θ. τῆς ΑΒ. τῷ α'. ἢ Πρωτ. Δ. τοῦ ε'. (9) Δῆλον ἐκ τῆς διέσεως τῆς Μ. τοῦ πρώτου. (10) ΛΔ. ἢ Ις. τῷ ε'.

γραμμένη Σφαῖρα, πρὸς τὴν εἰς τὸ αὐτὸ σῶμα ἐγγεγραμμένην, τὸν αὐτὸν ἔξει
 ἔν τῳ περὶ τὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένον σῶμα, πρὸς τὸ εἰς τὴν αὐτὴν Σφαῖραν
 ἐγγεγραμμένον ὁμοιον σῶμα. Ὅν δὲ λόγον ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τῆς περὶ οἰονδή-
 ποτε σῶμα περιγεγραμμένης Σφαίρας, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς εἰς τὸ αὐτὸ
 σῶμα ἐγγεγραμμένης Σφαίρας, τὸν αὐτὸν ἔξει ἡ ἐπιφάνεια τῆς περὶ τὴν
 Σφαῖραν περιγεγραμμένου σώματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς εἰς τὴν αὐτὴν
 Σφαῖραν ἐγγεγραμμένου ὁμοίου σώματος.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΜΔ'.

κ. 55. Τῆς Σφαίρας τό, τε σφαιρὸν ἡ ἡ ἐπιφάνεια ἐστὶ, πρὸς τε τὸ σφαιρὸν ἡ τὴν
 ἐπιφάνειαν τῆς περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένην ἰσοπλευρῶν Κῶνι (δοζ), ὡς 4 πρὸς 9.

Ἐστὶ γὰρ ἡ μὲν Σφαῖρα τπ, πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον ἰσό-
 πλευρον Κῶνον σκτ, ὡς 32 πρὸς 9 (1). ὅτος δὲ πρὸς τὸν περὶ τὴν αὐτὴν
 Σφαῖραν περιγεγραμμένον ὁμοιον Κῶνον δοζ, ὡς 1 πρὸς 8 (2), τῷτ' ἔστιν ὡς
 9 πρὸς 72. Δι' ἴσου ἄρα ἡ Σφαῖρα τπ, πρὸς τὸν περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένον
 ἰσόπλευρον Κῶνον δοζ, ὡς 32 πρὸς 72. τῷτ' ἔστι (διαιρεθέντος ἐκ γίγρου τῷ
 ὄρου διὰ 8), ὡς 4 πρὸς 9.

Ἀλλ' ὡς. Ἡ Σφαῖρα ἐστὶ πρὸς τὸν εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένον ἰσόπλευρον
 Κῶνον, ὡς 32 πρὸς 9 (3). ὁ δὲ ἐγγεγραμμένος πρὸς τὸν περὶ τὴν Σφαῖραν
 περιγεγραμμένον, ὡς 1 πρὸς 8 (4). τῷτ' ἔστιν ὡς 4 πρὸς 32. Δι' ἴσου ἄρα τε-
 ταρᾶμένως (5) ἡ Σφαῖρα, πρὸς τὸν περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένον ἰσόπλευ-
 ρον Κῶνον, ὡς 4 πρὸς 9.

Δέδεικται δὲ ἐν τῇ Μ'. Ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς Σφαίρας, ἐστὶ πρὸς ἑλὴν
 τὴν ἐπιφάνειαν τῆς περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένην ἰσοπλευρῶν Κῶνα, ὡς 4 πρὸς 9.
 Τῆς Σφαίρας ἄρα τό, τε σφαιρὸν ἡ ἡ ἐπιφάνεια ἐστὶ πρὸς τε τὸ σφαιρὸν ἡ τὴν ἐ-
 πιφάνειαν τῆς περὶ αὐτὴν περιγεγραμμένην ἰσοπλευρῶν Κῶνα, ὡς 4 πρὸς 9.
 Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Ὅπερ ἄρα ἔχει θαυμάσιος ὁ Ἀρχιμήδης ἐν τῇ Σφαίρα, ἡ τῷ τὴν Σφαῖ-
 ραν περιλαμβάνοντι Κυλίνδρῳ, τῷτ' αὐτὸ δέδεικται ἡδὴ καὶ ἡμῖν ἐπὶ τῆς
 Σφαίρας ἡ τῇ τὴν Σφαῖραν περιλαμβάνοντος ἰσοπλευρῶν Κῶνα. Ὅτι δηλαδὴ
 ἐνυπάρχει ἡ τοῖς σφαιροῖς ὁ αὐτὸς λογικὸς λόγος, ὅσπερ ἐν ταῖς ἐπιφανείαις

(1) MB. τῷ παρόντος. (2) Πρωτ. προηγ. (3) MB. τῷ παρόντος. (4) ΜΓ. τοῦ
 παρόντος. (5) ΚΓ. τοῦ ε'.

τέτων τῶν σωμάτων· ὡς γὰρ ἐκεῖνος εἰδείξεν ὅτι ἡ Σφαῖρα ἐστὶ, πρὸς τὸν Κύλινδρον κατὰ τε τὸ σφαιρὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, ὡς 2 πρὸς 3· ἔτω δὲ καὶ ἡμῖν δεικναι, ὅτι ἡ Σφαῖρα ἐστὶ πρὸς τὸν τὴν Σφαῖραν περιλαμβάνοντα ἰσόπλευρον Κῶνον, ὡς 4 πρὸς 9, κατὰ τε τὸ σφαιρὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν.

Εὐντεῦθεν δὲ τὸν αὐτὸν λόγον τῆς ἐστὶ τὸν ἡμιόλιον, ὃν παρέδωκεν Ἀρχιμήδης ὑπάρχειν μεταξύ Σφαίρας καὶ Κυλίνδρου, συνεχίζεσθαι κατὰ τε τὸ σφαιρὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, ἀπὸ τῶ περιγεγραμμένα ἰσοπλεύρου Κῶνος μέχρι τῆς Σφαίρας εὐμαρῶς ἀποδείξαντες, τέλος ἤδη τῷ συγγραμματίῳ ἐπιθήσομεν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ΜΕ΄.

Κῶνος ἰσόπλευρος περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένος, καὶ Κύλινδρος ὁρθός καὶ 57.
περὶ τὴν αὐτὴν Σφαῖραν ὡσάυτως περιγεγραμμένος, καὶ αὐτὴ ἡ Σφαῖρα, περὶ ἣν ὅ,τε Κῶνος καὶ ὁ Κύλινδρος περιγεγράφεται, τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον κατὰ τε τὸ σφαιρὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, τῆς ἐστὶ τὸν ἡμιόλιον.

Διὰ μὲν γὰρ τὴν ΑΒ΄. τῇ παρόντι, ὁ ὁρθός Κύλινδρος ὁ τὴν Σφαῖραν περιλαμβάνων, ἐστὶ πρὸς τὴν Σφαῖραν κατὰ τε τὸ σφαιρὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, ὡς 3 πρὸς 2, ἢ ὡς 6 πρὸς 4. Διὰ δὲ τὴν προηγουμένην ΜΔ΄. ὁ περὶ τὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένος ἰσόπλευρος Κῶνος βαλ., ἐστὶ πρὸς τὴν Σφαῖραν κατὰ τε τὸ σφαιρὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, ὡς 9 πρὸς 4. Ὁ αὐτὸς ἄρα Κῶνος ἐστὶ πρὸς τὸν Κύλινδρον, κατὰ τε τὸ σφαιρὸν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν, ὡς 9 πρὸς 6. Τὰ τρία ἄρα ταῦτα σώματα ὁ Κῶνος δηλαδὴ, ὁ Κύλινδρος καὶ ἡ Σφαῖρα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα, ὃν οἱ ἀριθμοὶ 9, 6, 4· τῆς ἐστὶ τὸν ἡμιόλιον· ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Π ρ ό τ α σ ι ς Μς΄.

Ὁ περὶ Σφαῖραν περιγεγραμμένος ἰσόπλευρος Κῶνος, πρὸς τὸν περὶ τὴν καὶ 58.
αὐτὴν Σφαῖραν περιγεγραμμένον ὁρθὸν Κύλινδρον τὸν αὐτὸν ἔχει ἡμιόλιον λόγον, κατὰ τε τὰ σφαιρὰ καὶ τὰς ἐπιφανείας, ὅλας τε καὶ τὰς ἀπλᾶς, καὶ διὰ καὶ κατὰ ὕψη καὶ τὰς βάσεις.

Πρόδηλος ἡ Πρότασις ὅσον μὲν ἦκει εἰς τὰς ὀλικὰς ἐπιφανείας καὶ τὰ σφαιρὰ, ἐκ τῆς προηγουμένης Προτάσεως· ὅσον δ' ἦκει εἰς τὰς ἀπλᾶς ἐπιφανείας, ἐκ τῆς Γ΄. Πορίσματος τῆς Μ΄. τῇ παρόντος· περὶ δὲ τὰ ὕψη καὶ τὰς βάσεις ἐκ τῆς Α΄, καὶ Β΄. Πορίσματος τῆς αὐτῆς Μ΄.

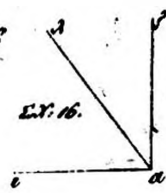
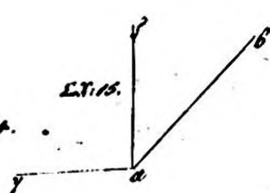
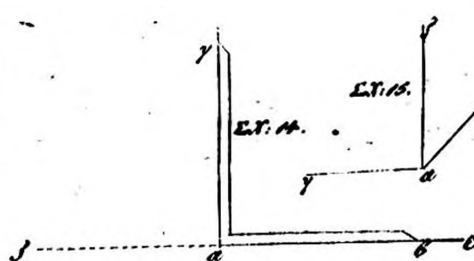
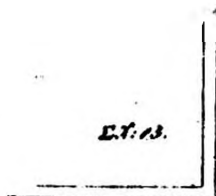
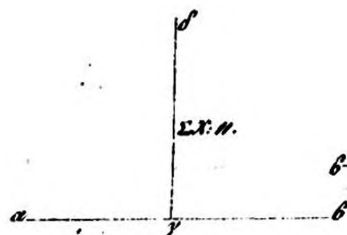
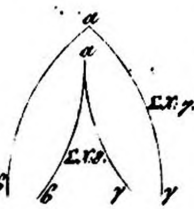
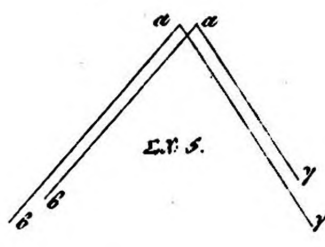
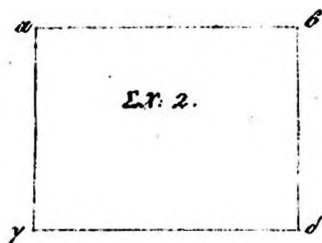
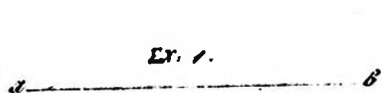
Τ έ λ ο ς.

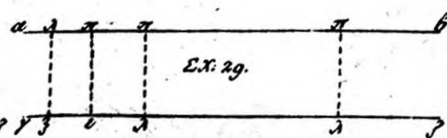
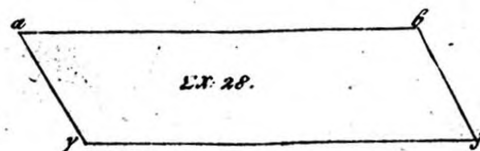
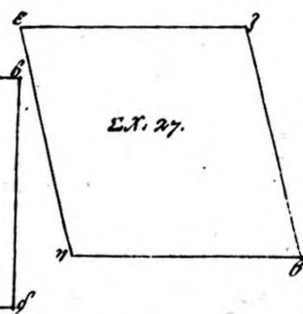
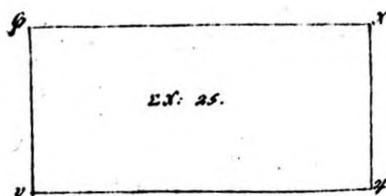
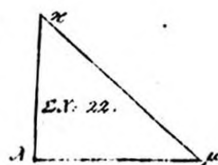
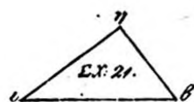
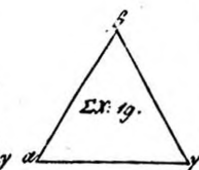
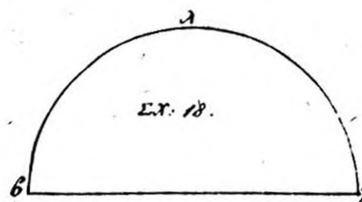
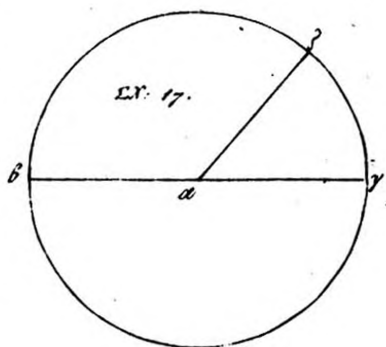
Π α ρ ο ρ ά μ α τ α .

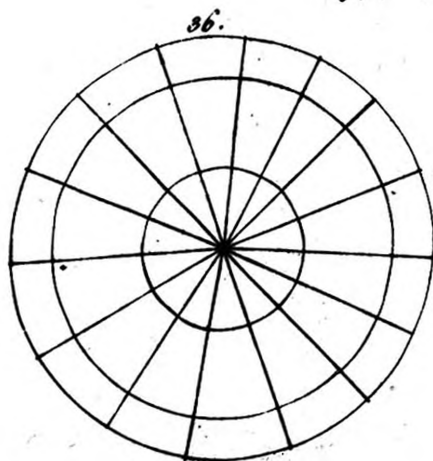
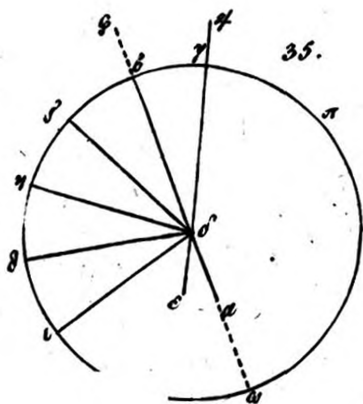
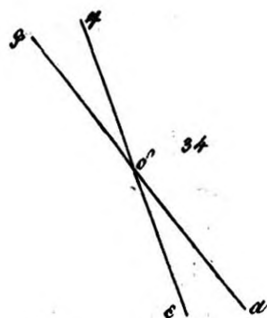
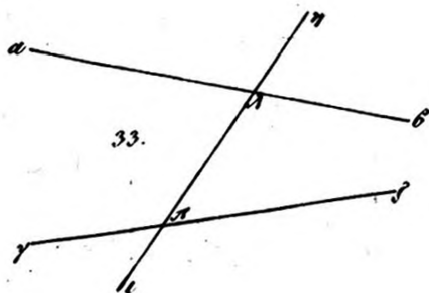
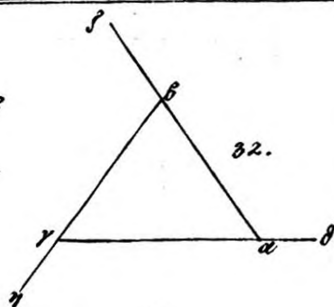
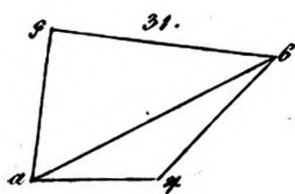
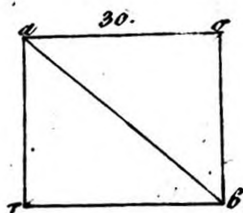
Σελ.	σίχ.	
10	22	δψ Γρ. αψ
αὐτ.	32	δδ Γρ. δα
11	8	όποσαιοῦν Γρ. όποσασῶν
12	2	έφεξής· Γρ. έφεξής· ΛΒ.
23	9	δηλ Γρ. δκλ
αὐτ.	σημ.	(12) κ̄ (13) η' Γρ. κ'
29	3	αβ Γρ. αδ
41	1	εζη Γρ. εζκ
50	18	τῶ τρίτῳ Γ. τῶ αὐτῶ τρίτῳ
55	1	ἀντι(10) Γρ. (2), κ̄ ἀντι(2) Γρ. (3) καὶ καθέξής· πρόσθετες δέ ἐν τῇ σημειώσει, (12) Σχόλ. μετὰ τὴν ΛΔ.
57	28	(εζ') Γρ. (βζ')
59	1	κ̄ βζ' Γρ. κ̄ βζα
60	21	αβ Γρ. αβ
αὐτ.	σημ.	(6) Α'ξ. ις'. Γρ. ΜΖ' Βιβλ. α'
61	13	ἔσαι βζ' Γρ. ἔσαι βζ'
62	15	τὸ ἡ Γρ. ἡ τὸ
71	5	7 × 1 Γρ. 3 × 7
77	σημ.	(2) τῷ α' Γρ. τῷ β'
84	14	γβ Γρ. γδ
84	σημ.	(2) Βιβλ. α'. Γρ. Βιβλ. β'
85	σημ.	(3) τῷ α' Γρ. τῷ β'
91	18	κ̄ Γρ. β
99	20	ασ Γρ. αο
100	σημ.	(3) τῷ α' Γρ. τῷ γ'
109	32	εδ Γρ. εαδ
113	23	πρὸς τῇ Γρ. πρὸς τῇ αὐτῇ
117	23	βη Γρ. βκ
118	25	βηγ Γρ. βκγ
122	27	σημεῖον Γρ. σημεῖον β
αὐτ.	σημ.	(11) τῷ α' Γρ. τῷ γ'
123	1	βγ Γρ. γβλ
128	23	χρήσει Γρ. ἐν χρήσει
150	12	κύκλω, Γρ. κύκλω ἡμιδιαμέτρου,

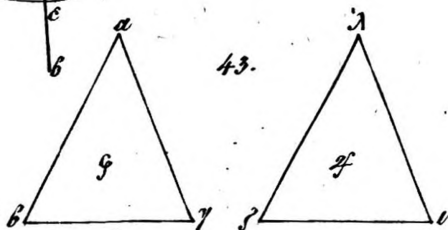
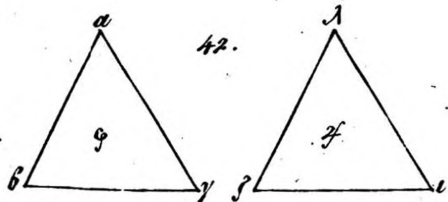
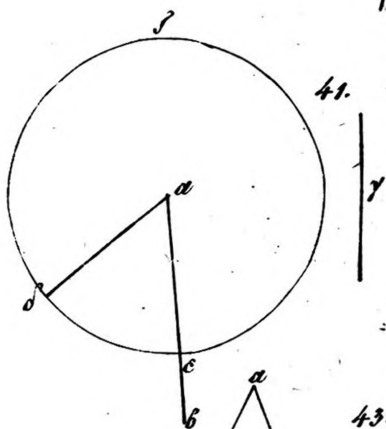
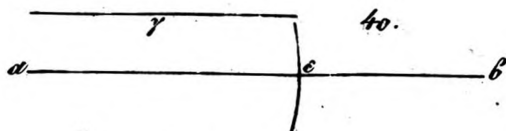
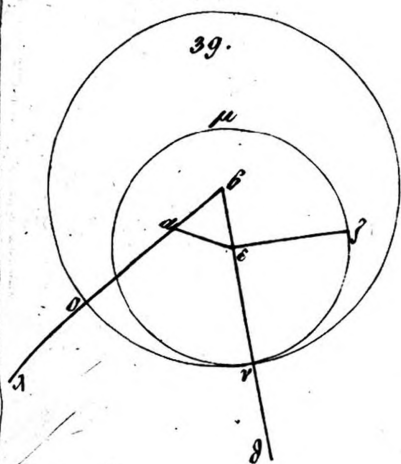
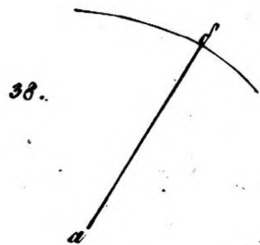
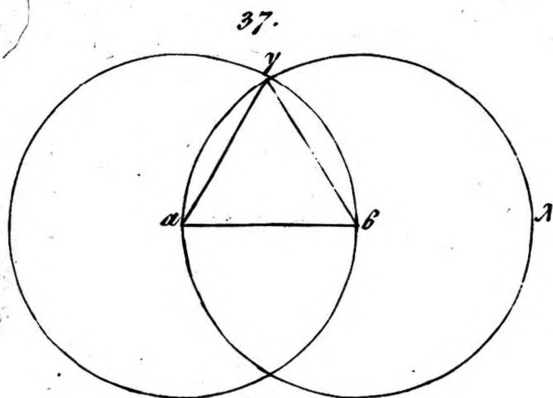
Σημ. Ἀντὶ θατέρᾳ Γρ. ἀπανταχῶ ἡ ἐτέρα· κ̄ ἀντὶ θατέρᾳς Γρ. τῆς ἐτέρας· κ̄ ἀντὶ θατέραν Γρ. τὴν ἐτέραν· καὶ ἀντὶ θατέρον Γρ. τὸν ἕτερον.

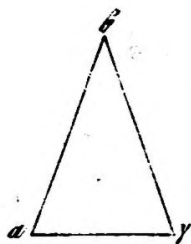
Σελ.	σίχ.	
159	22	κ̄ περὶ Γρ. κ̄ περὶ Ἀλγορίθμου, κ̄
161	31	τεταγμένως Γρ. τεταραγμένως
165	26	αὐτὸ Γρ. αὐτὸ ὅτως
173	27	τῶν Γρ. τῶν ὅλων
181	4	ξ:: Γρ. ζ::
185	26	βζ Γρ. βζι
186	17	τῶν Γρ. τῶν τῶν
197	26	ξ Γρ. ξ
204	19	αεΓρ. δε. κ̄ βα: αγ:: δα:αι
205	3	βγ Γρ. βλ
209	25	Γωνία Γρ. Γωνία (1),
215	4	πρ Γρ. λρ
231	σημ.	(2) τῷ α' Γρ. τῷ ε'
244	30	ξ Γρ. ξι
250	13	τ, Γρ. περιττεύει
253	16	√ $\frac{1}{2}$ αβ Γρ. √ $\frac{1}{2}$ αβ ²
254	32	αβ × ε Γρ. αβ + ε
255	12	√ $\frac{1}{2}$ αβ Γρ. √ $\frac{1}{2}$ αβ ²
274	21	σῶμα, Γρ. σῶμα ἄδεν,
283	18	περιεχόμενον Γρ. περιεχόμενον ἐςί.
αὐτ.	23	ταῦτα Γρ. ταῦτά
294	16	τῆς κατὰ Γρ. τῷ κατὰ
297	σημ.	(1) Ο'ρ. Α' Γρ. (1) Ο'ρ. Β'
304	21	τῷ ἐπὶ Γρ. ἡ ἐπὶ
310	σημ.	(2) ΚΗ Γρ. Κ
αὐτ.	αὐτ.	(5) τῷ ε' Γρ. τῷ ε'
314	26	η Γρ. ό
319	7	πρ Γρ. πγ
320	2	ἐκ Γρ. ἐκ
323	25	αὐτῆς Γρ. αὐτῇ
325	16	κορυφῆς, κ̄, Γρ. κορυφῆς β,
334	7	η ² = Γρ. η ² +
335	29	βε ² Γρ. βε ²
378	27	ξι Γρ. ξτ
385	15	τριπλῇ Γρ. διπλῇ.



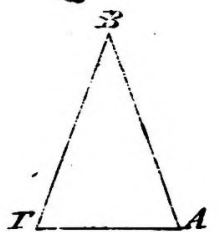




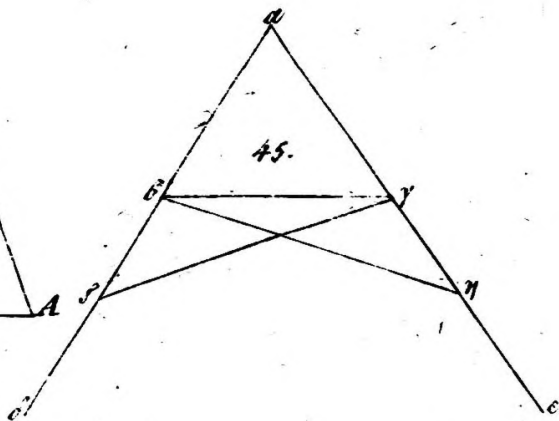




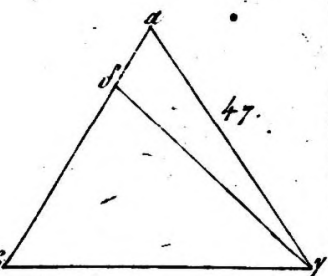
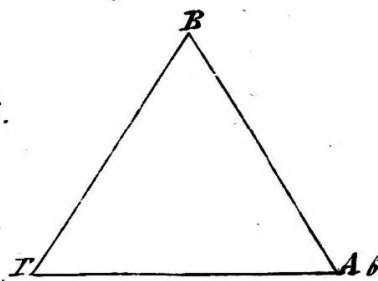
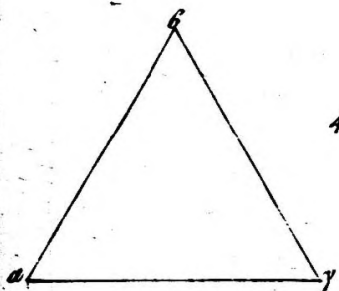
44.



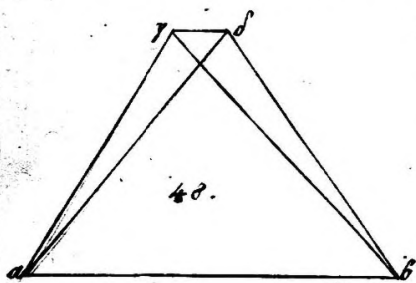
45.



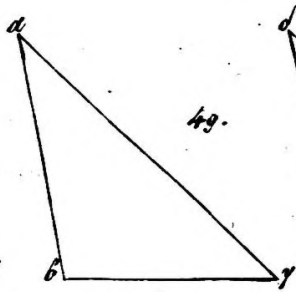
46.



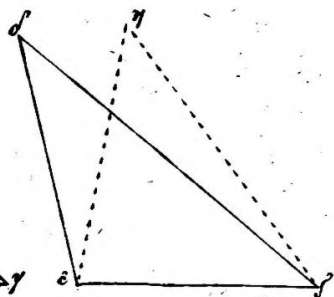
47.



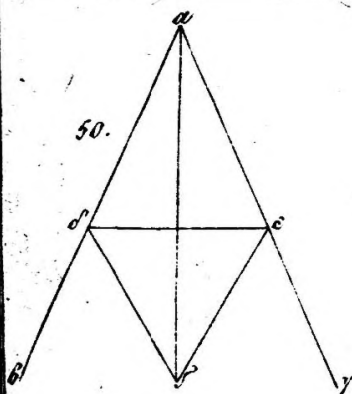
48.



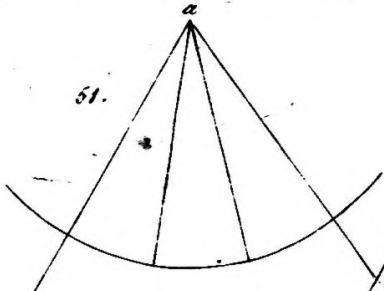
49.



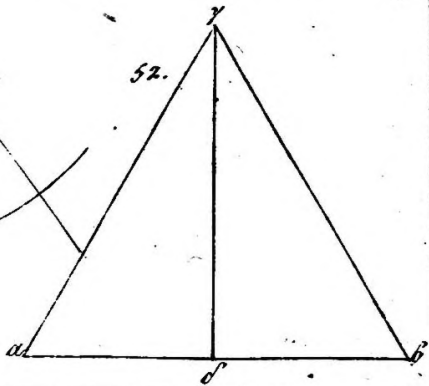
50.



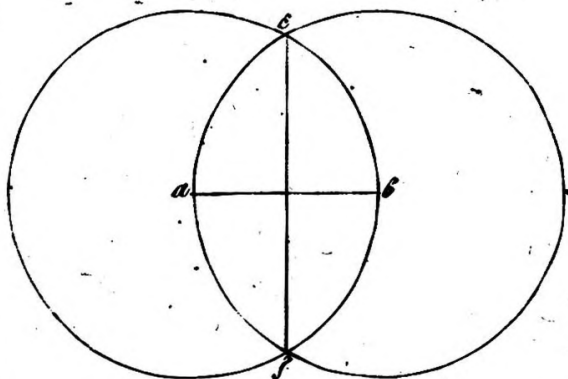
51.



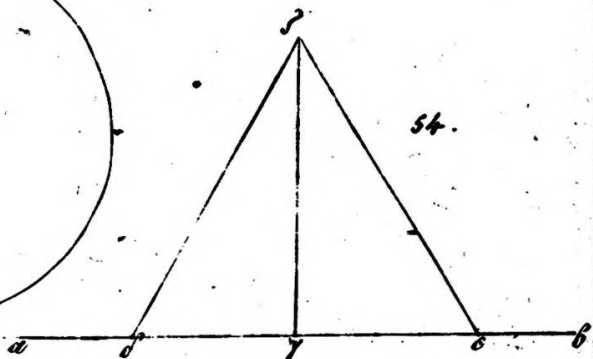
52.



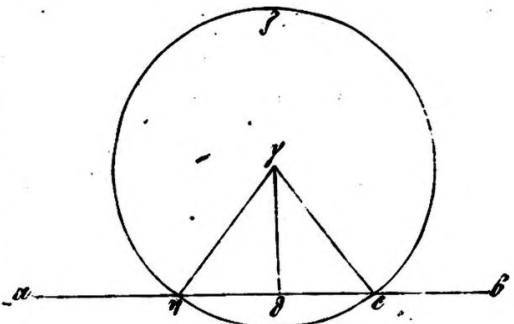
53.



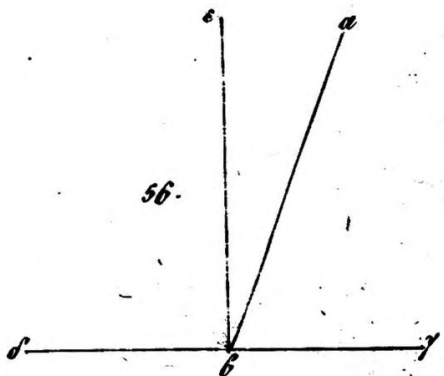
54.



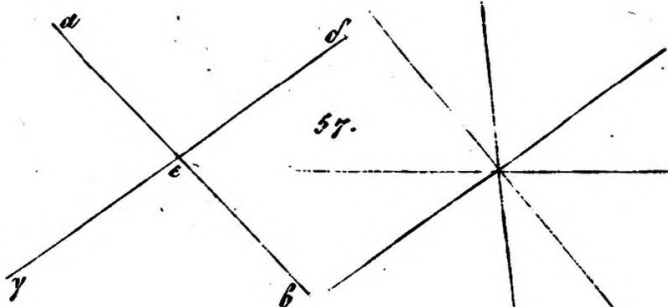
55.



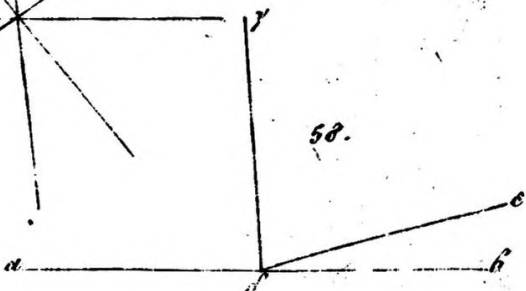
56.

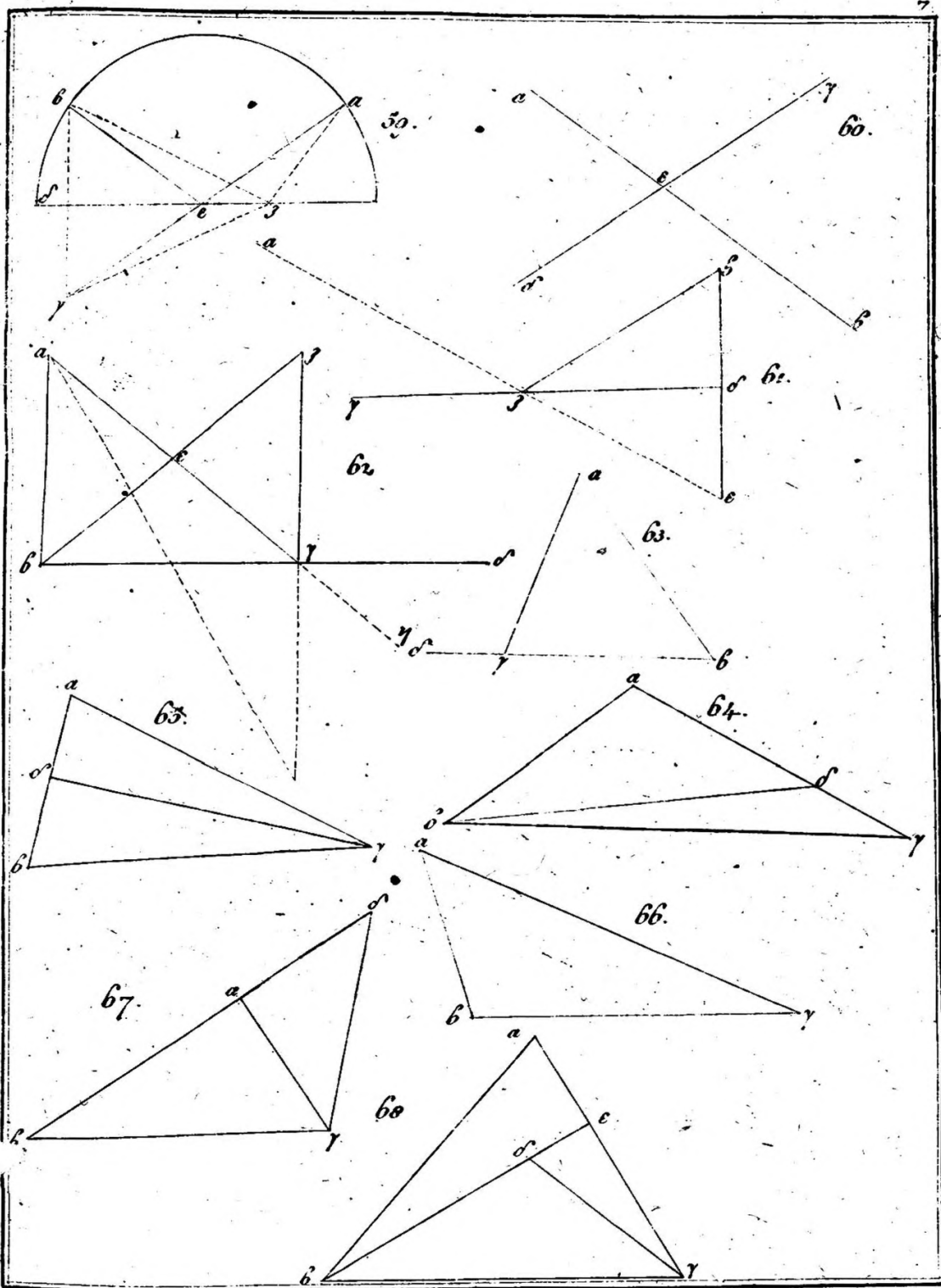


57.



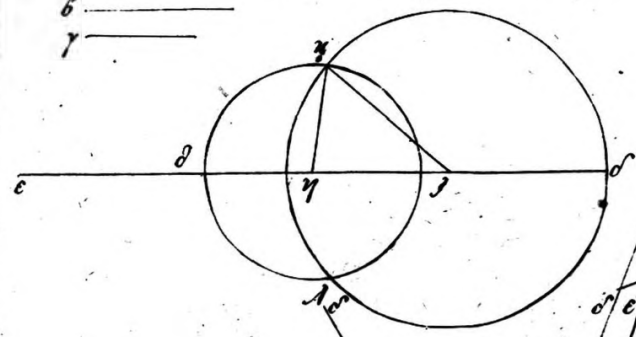
58.



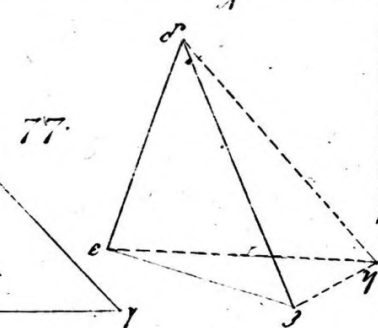
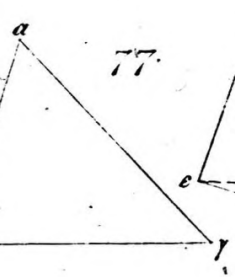
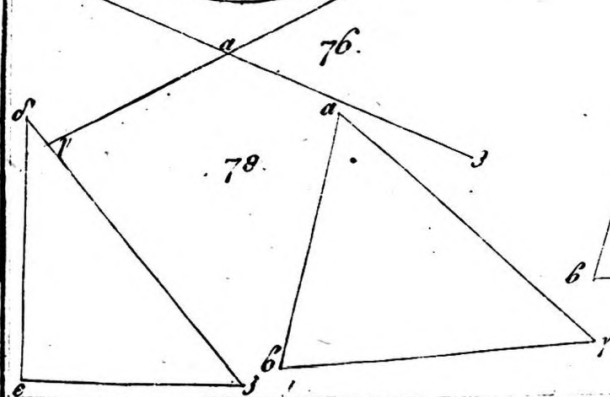
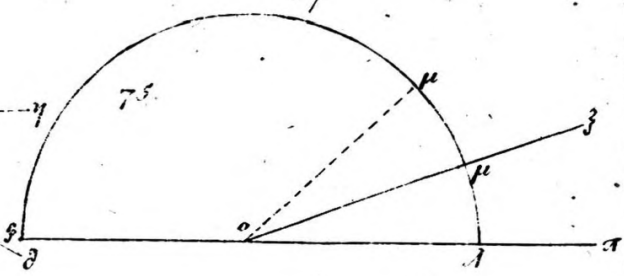
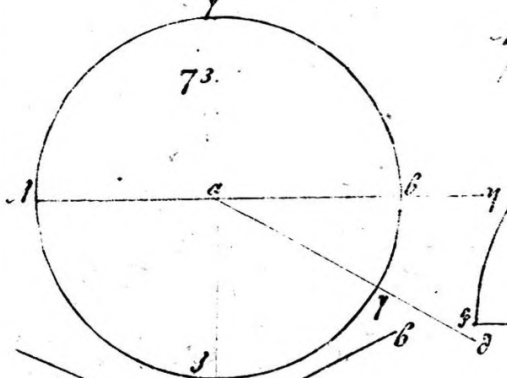
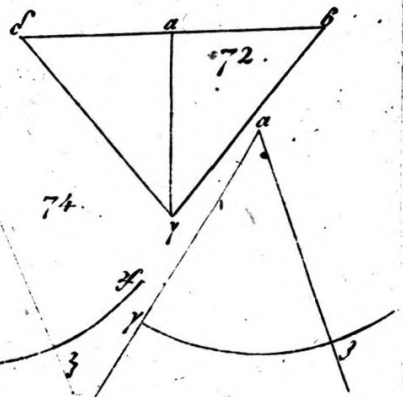
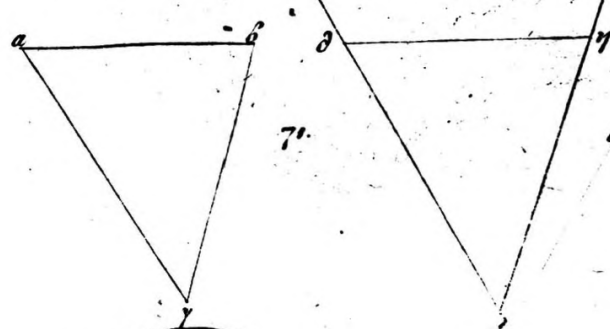
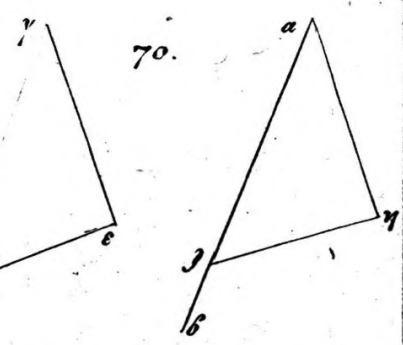


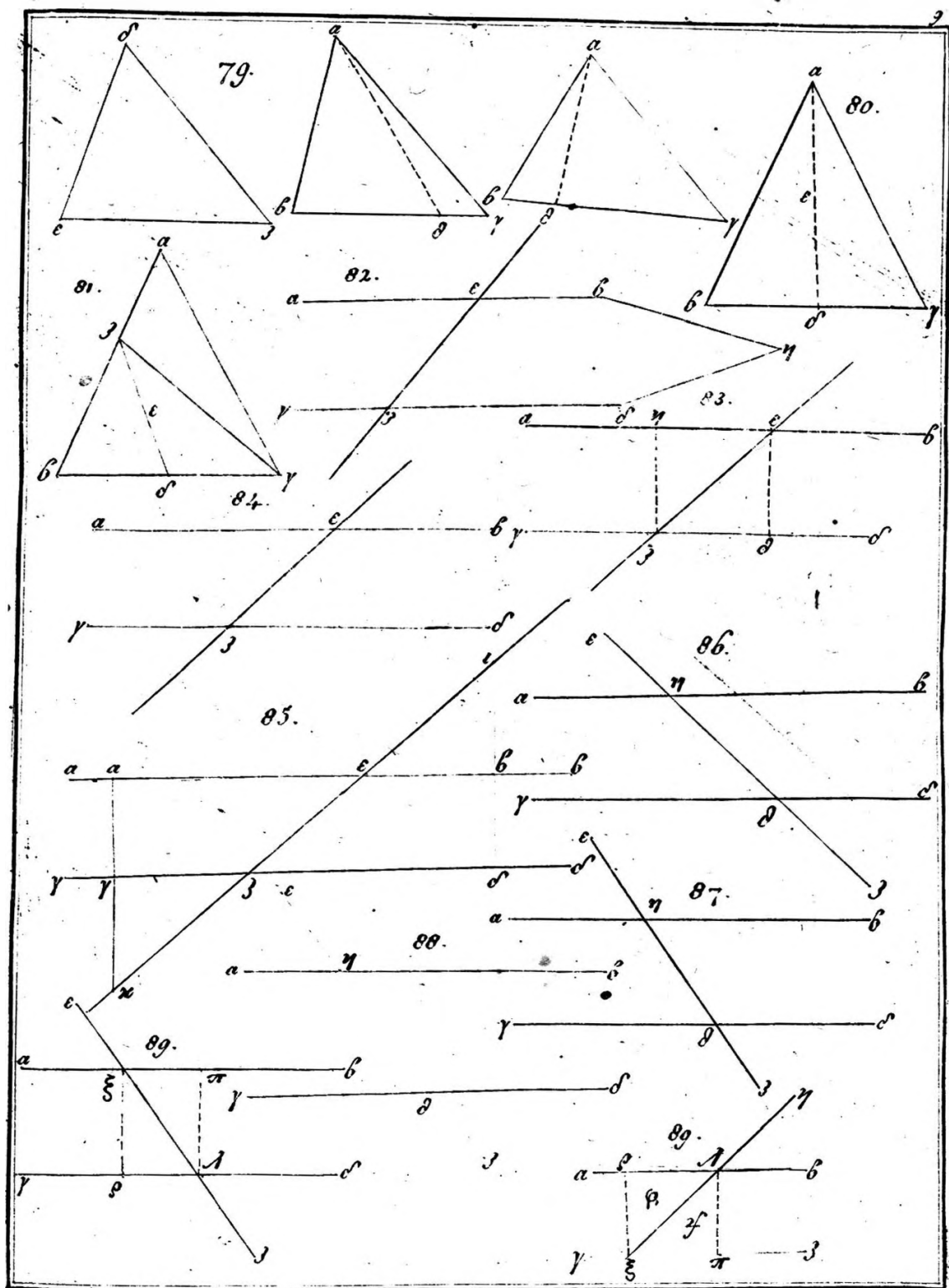
a ———
b ———
γ ———

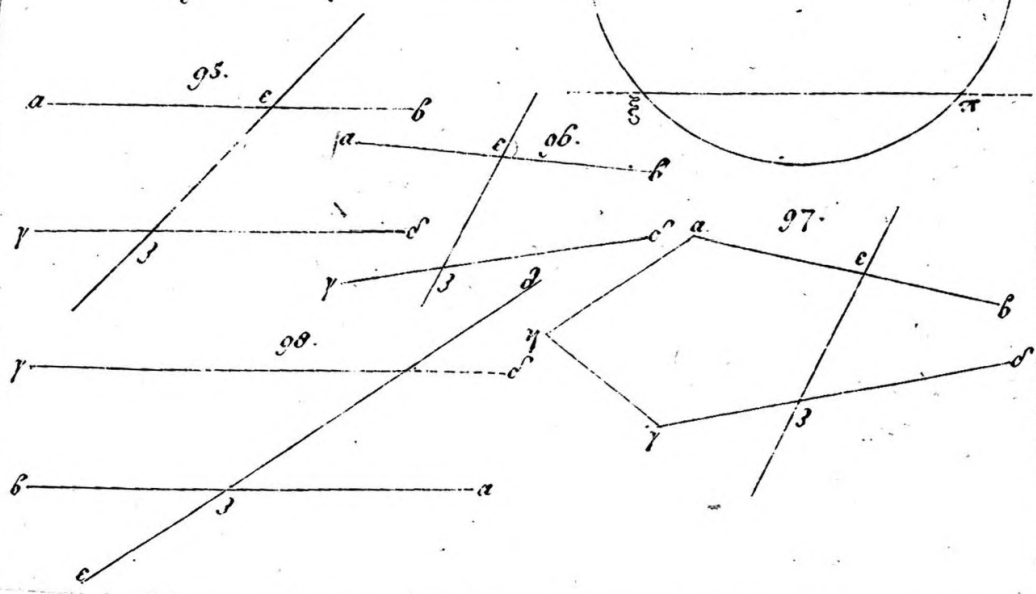
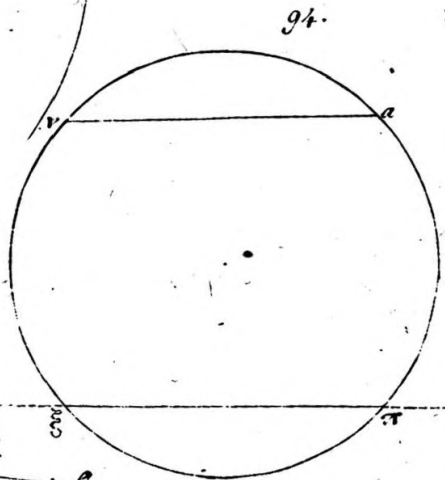
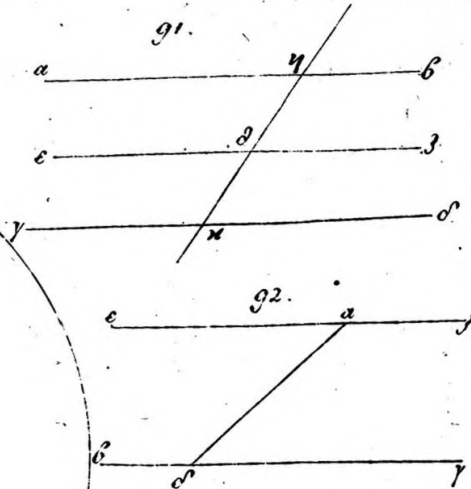
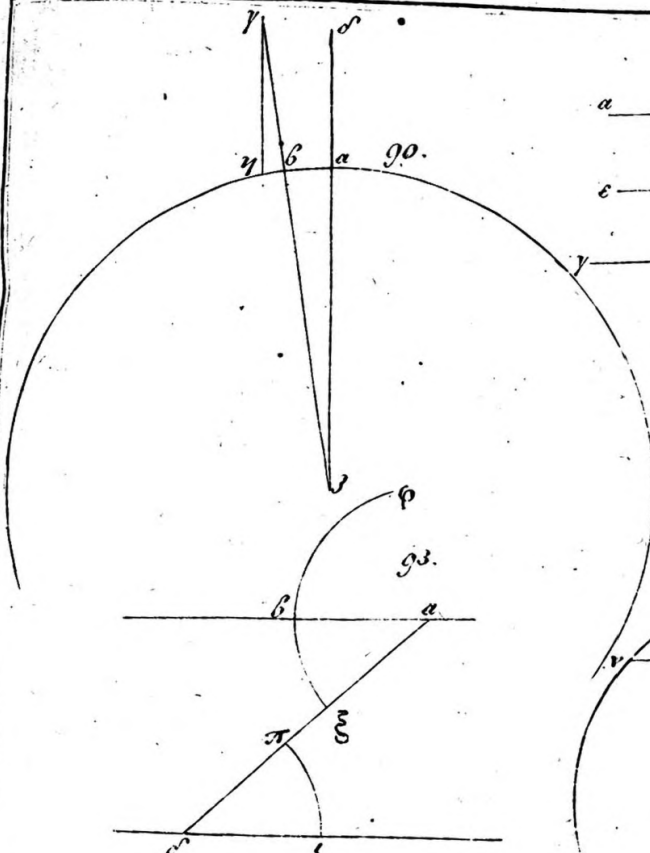
69.

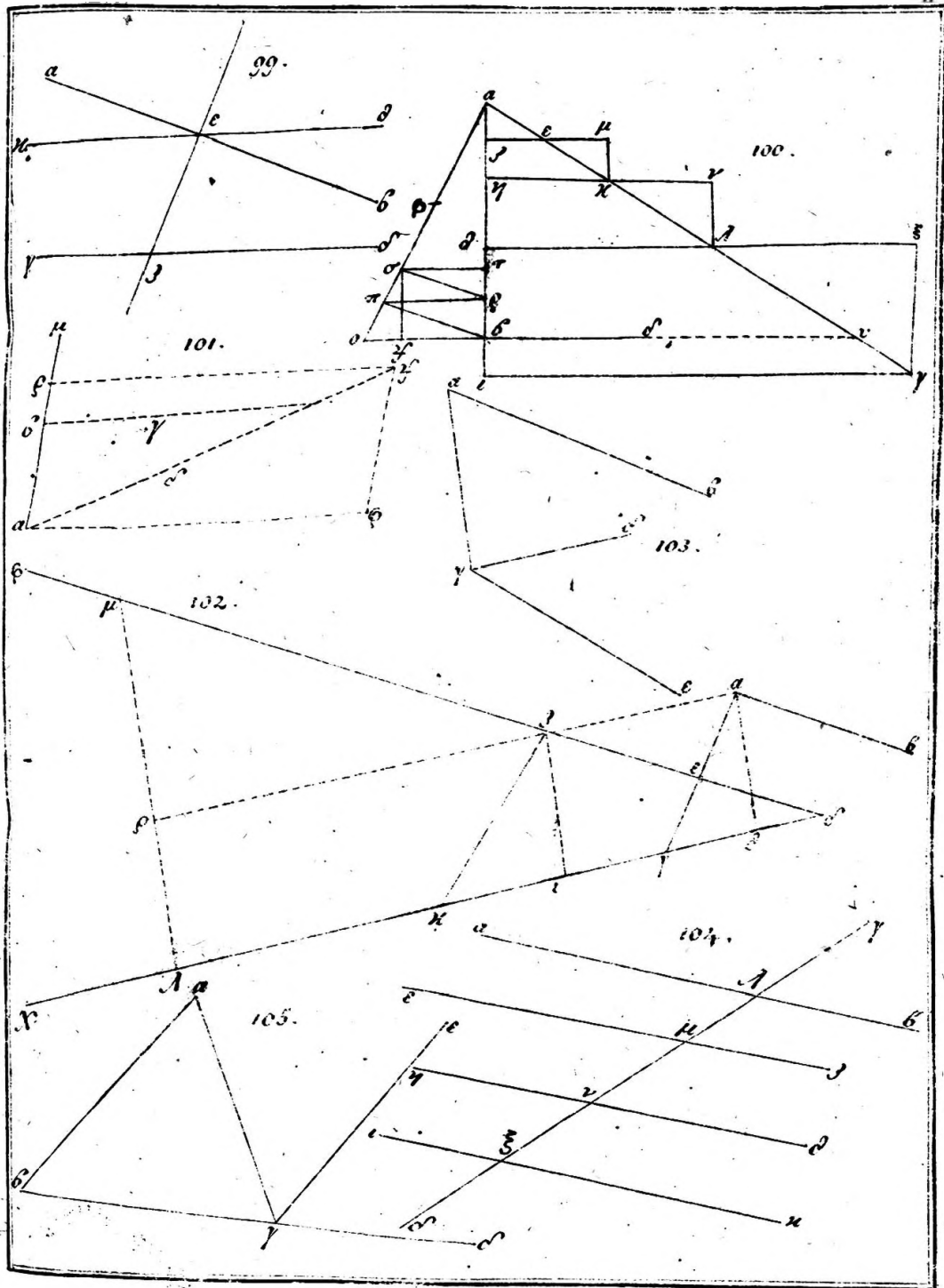


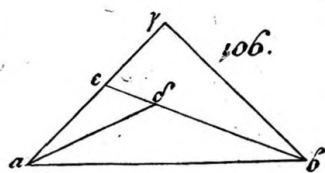
70.



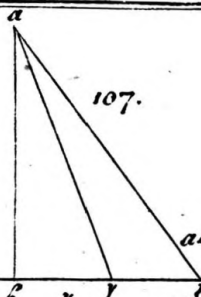




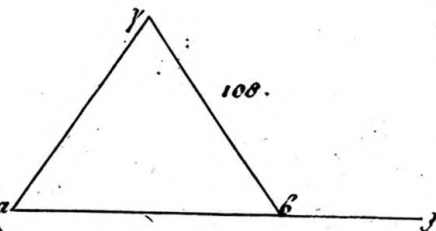




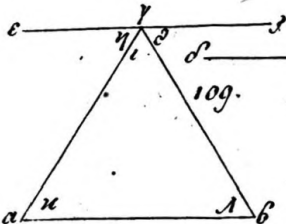
106.



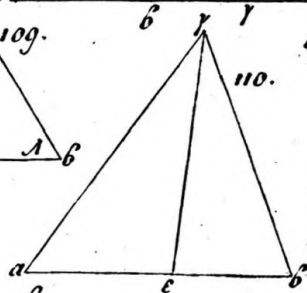
107.



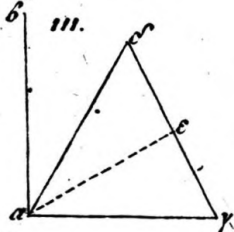
108.



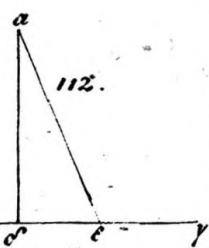
109.



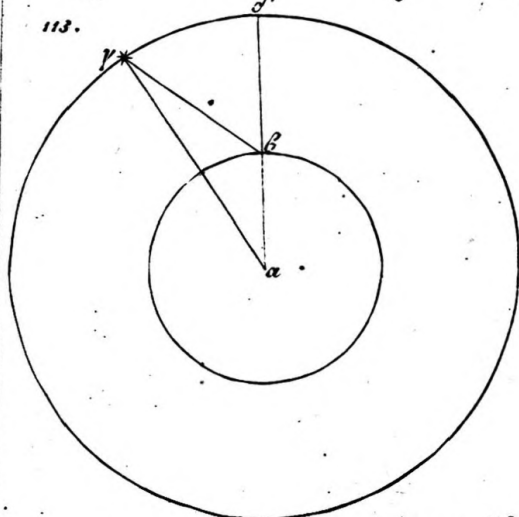
110.



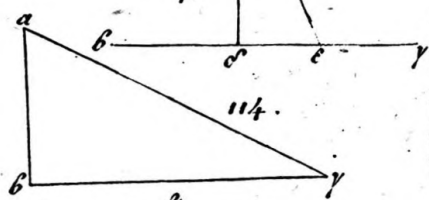
111.



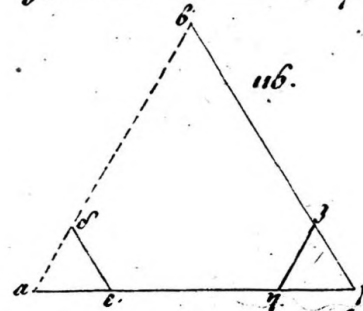
112.



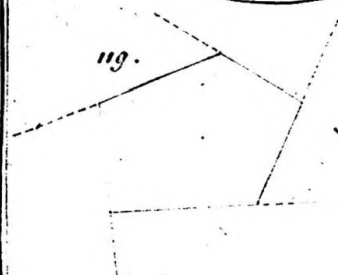
113.



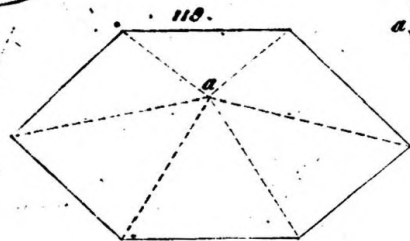
114.



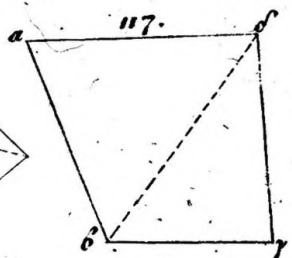
115.



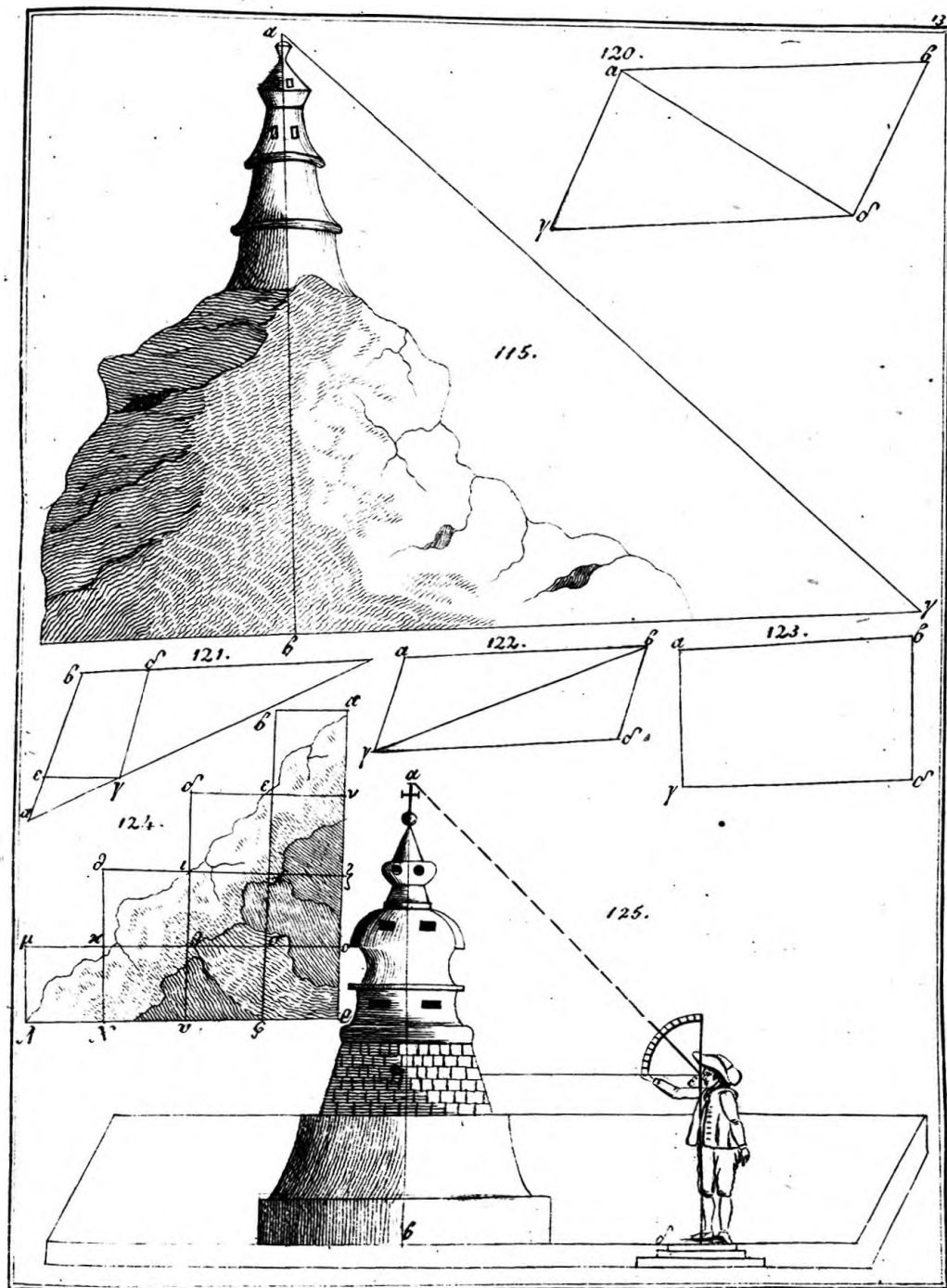
116.

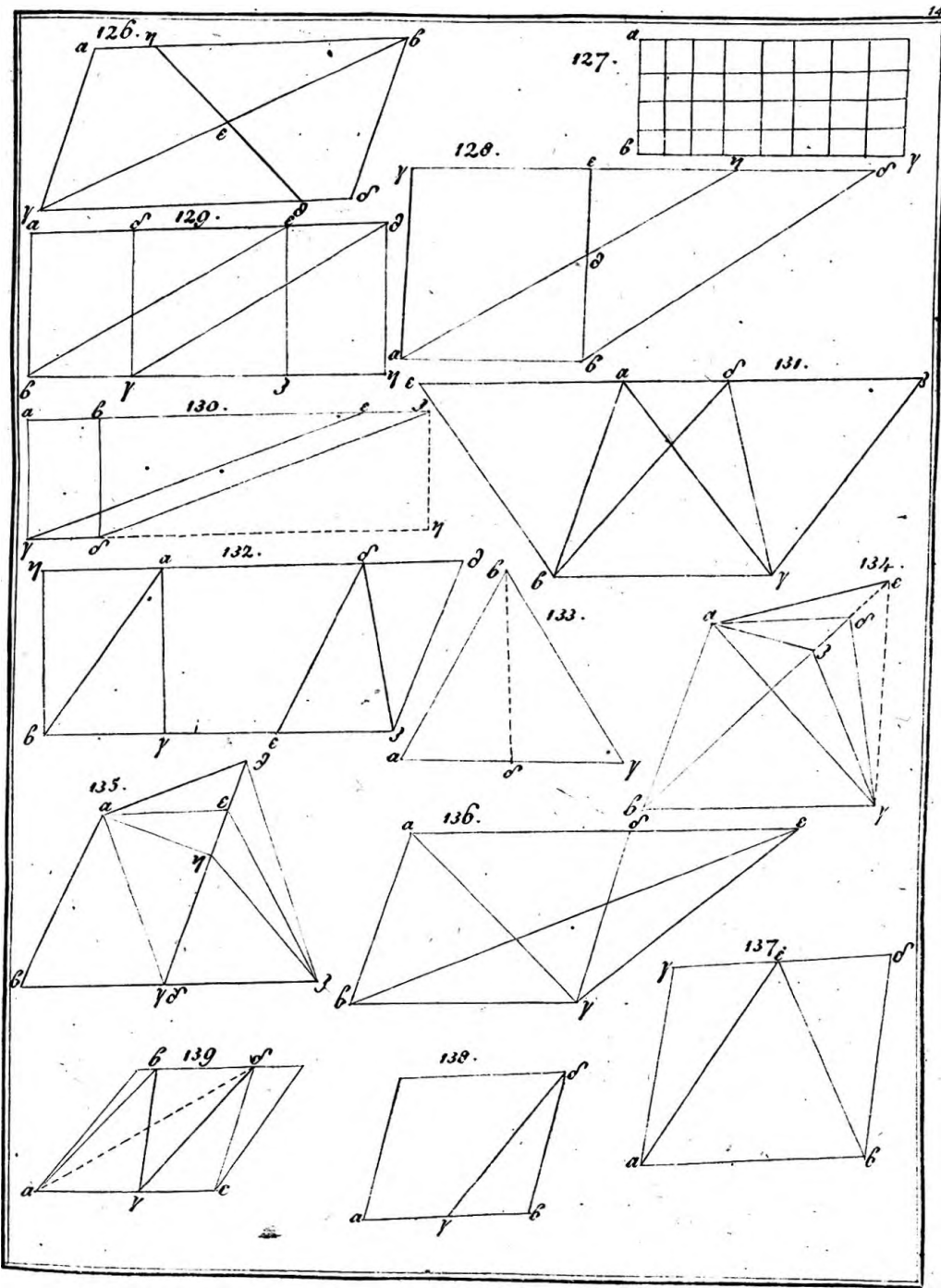


117.

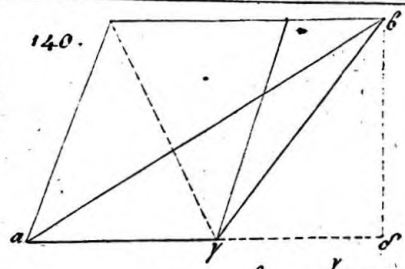


118.

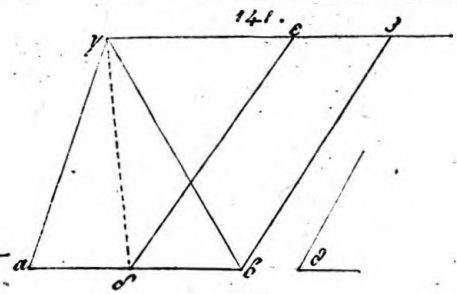




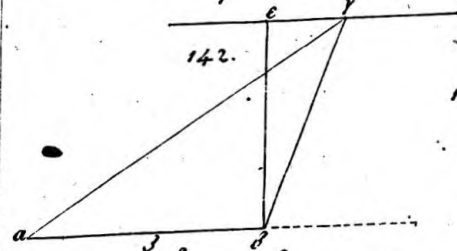
140.



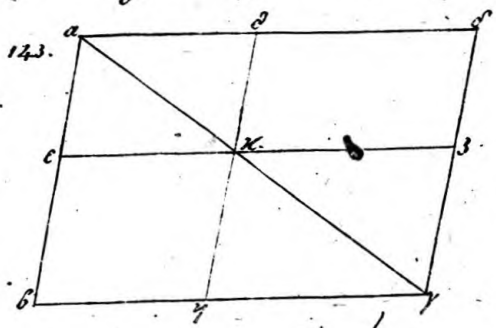
141.



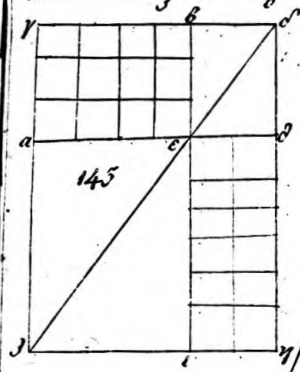
142.



143.

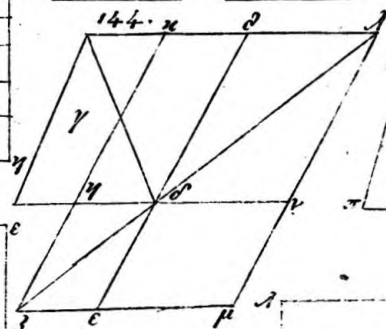


145.

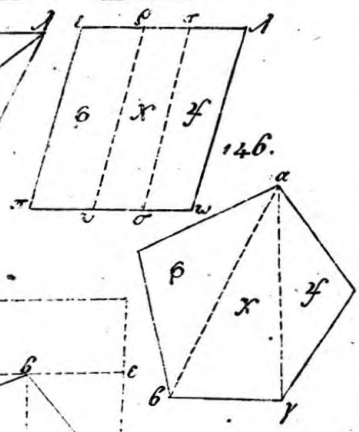


gamma

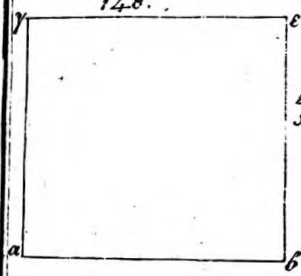
144.



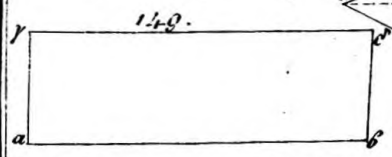
146.



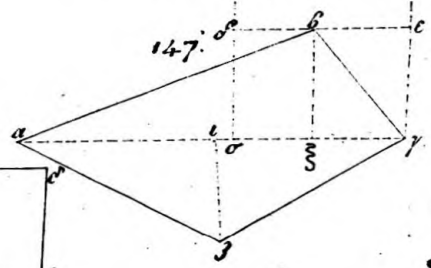
148.

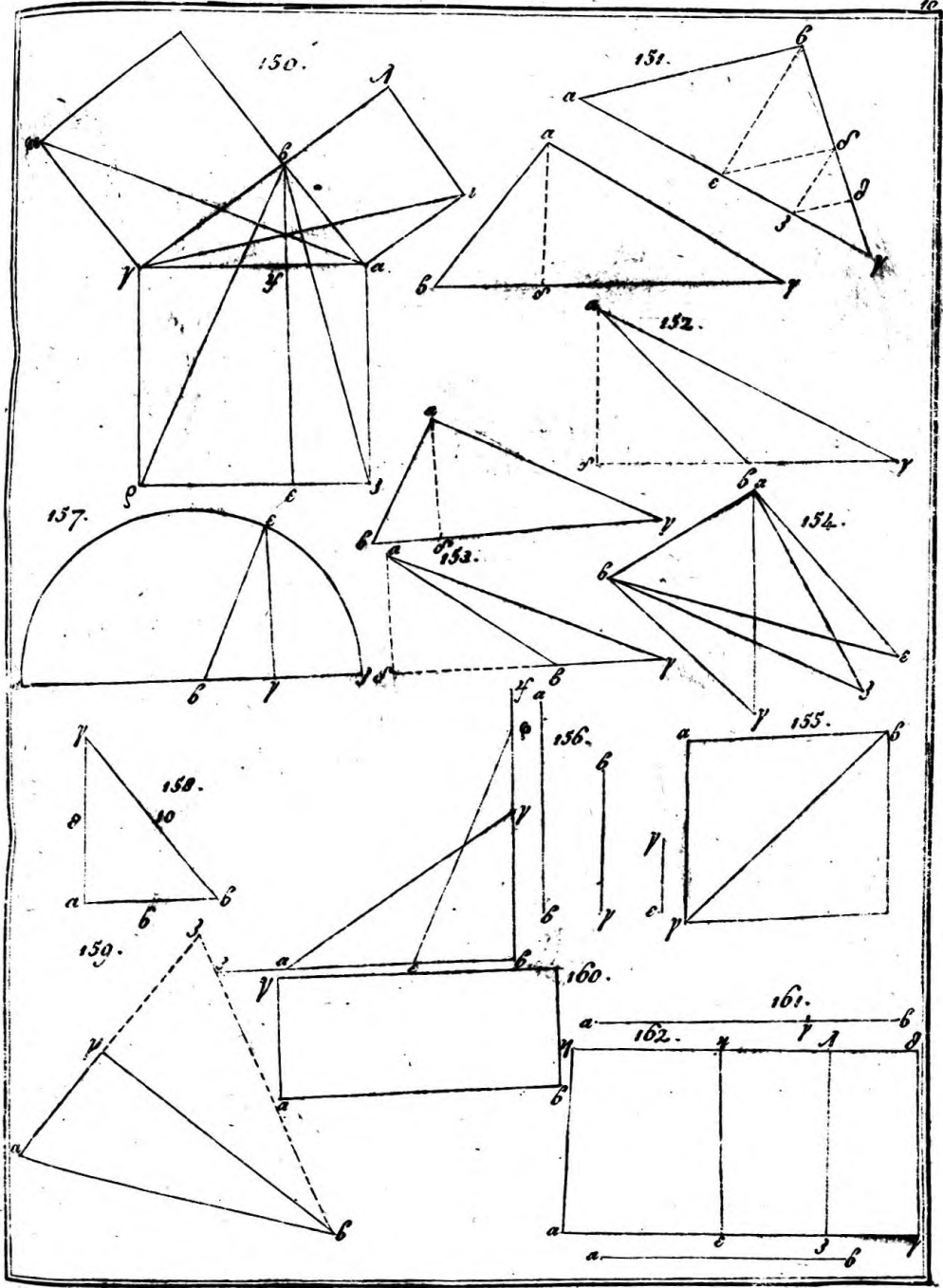


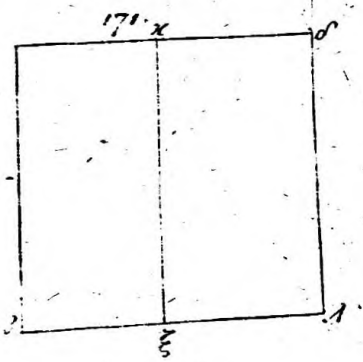
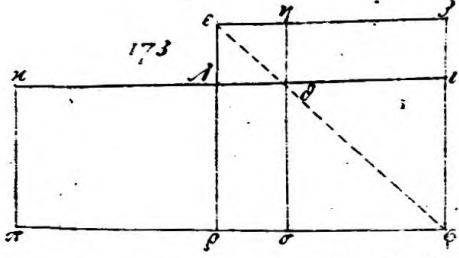
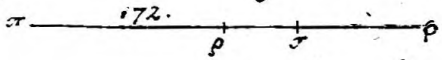
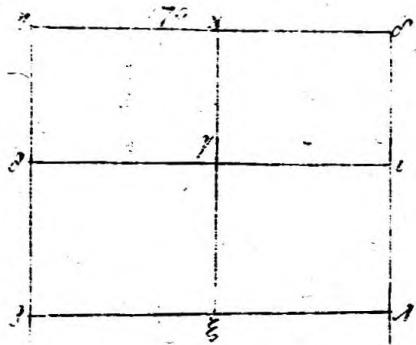
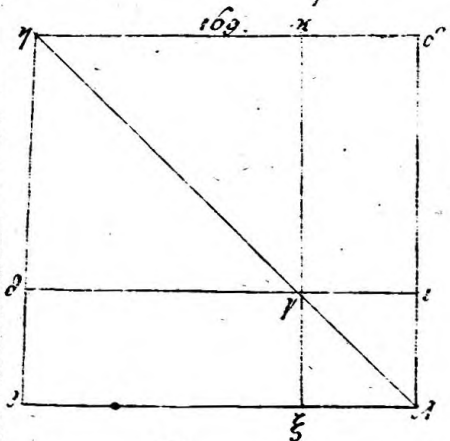
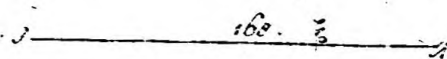
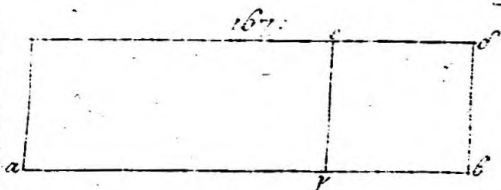
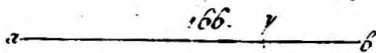
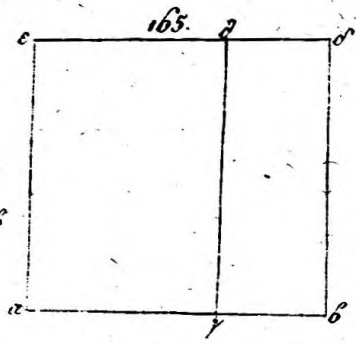
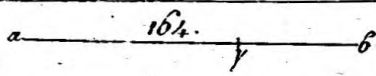
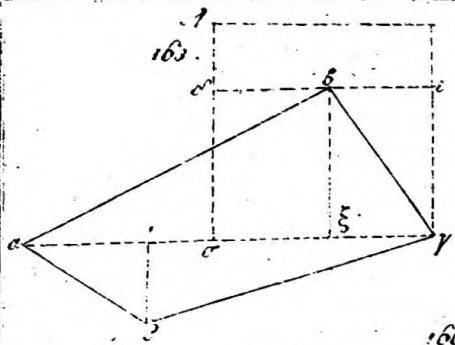
149.



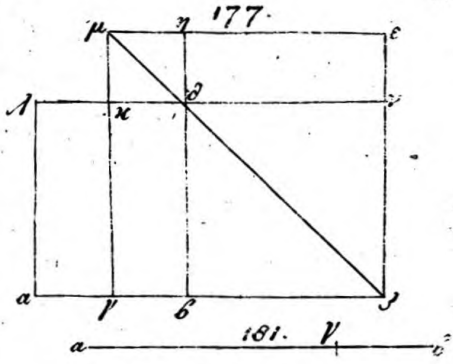
147.



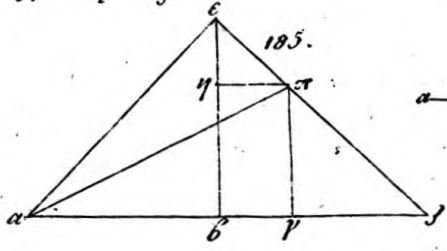
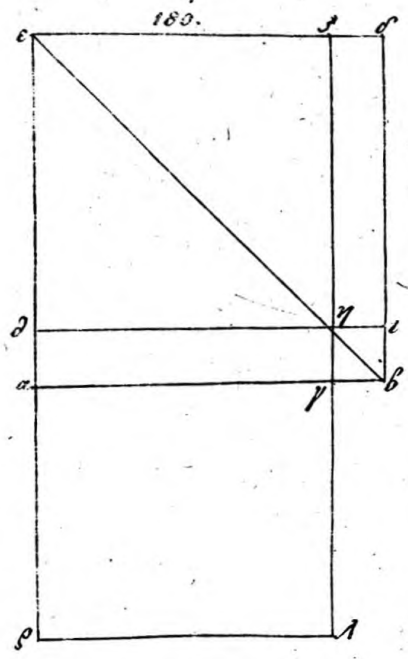
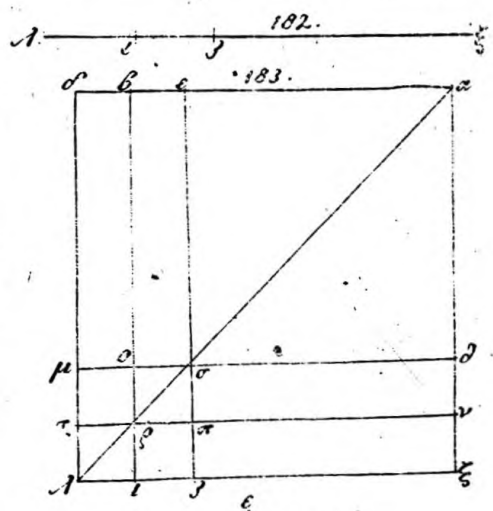




a — $174.$ μ ϵ δ π — $175.$
 γ — ν ζ σ λ — $176.$
 a — γ δ σ ζ — $177.$
 γ — δ σ ζ — $178.$
 γ — δ σ ζ — $179.$
 a — γ δ σ ζ — $180.$

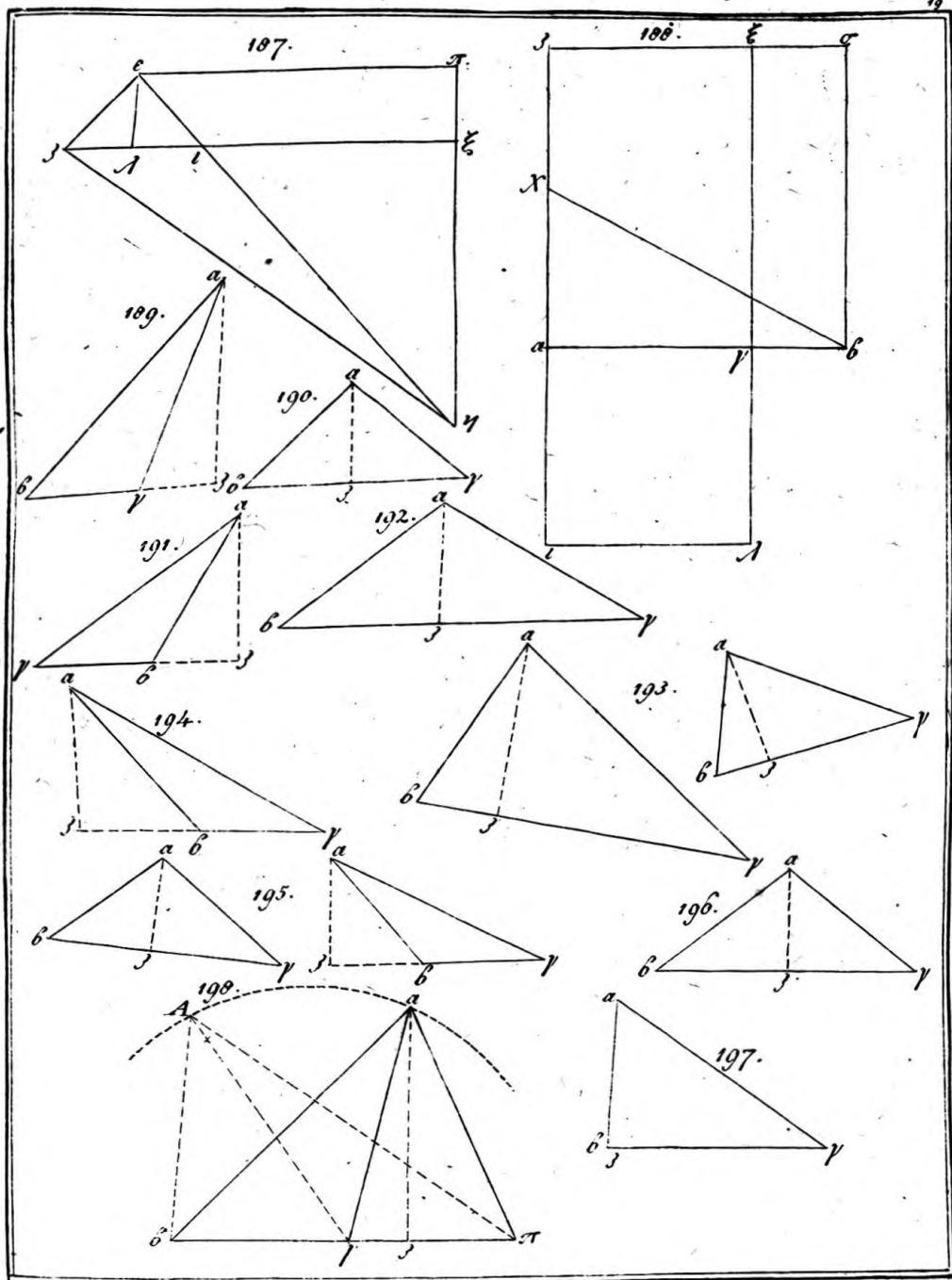


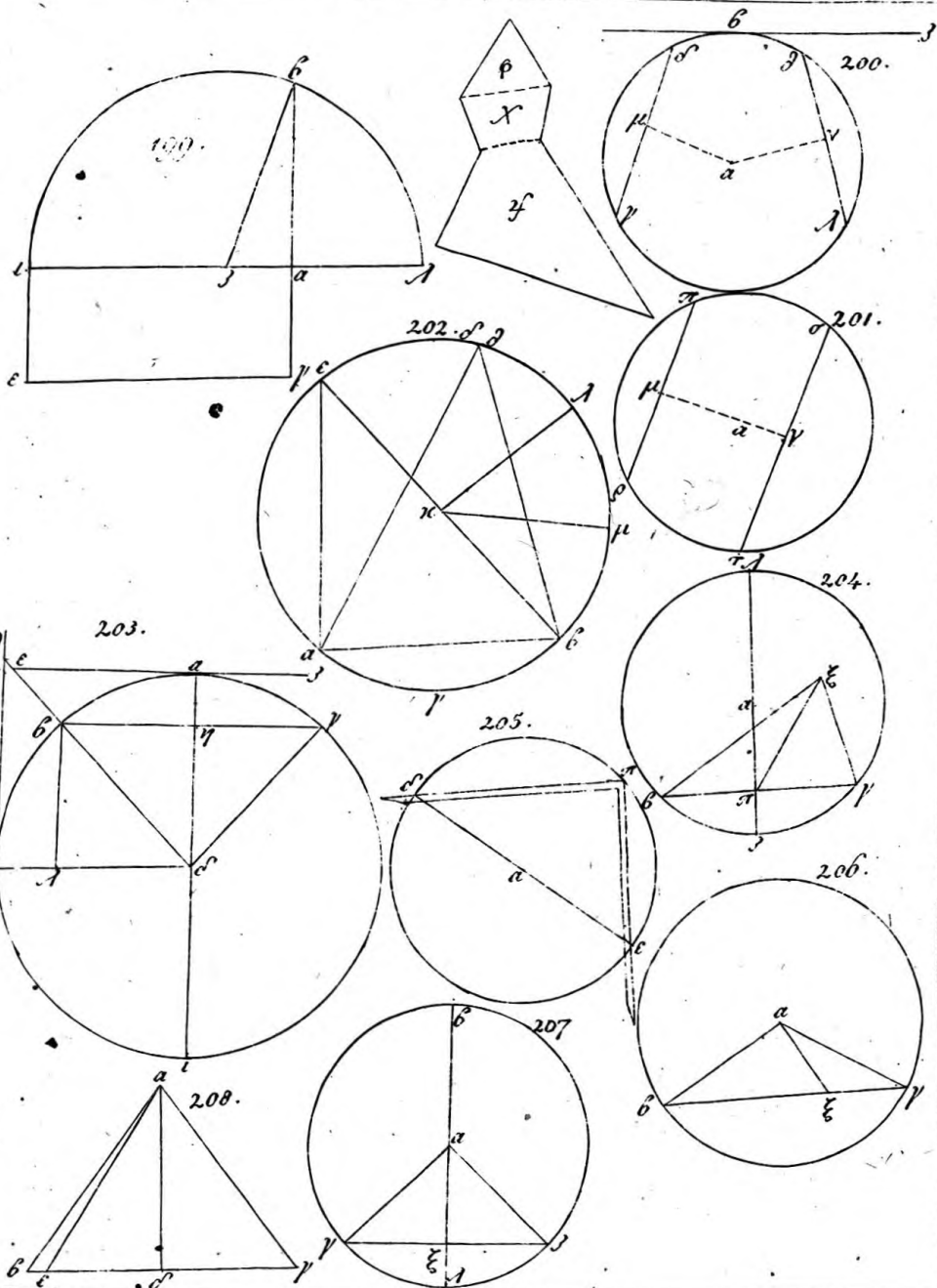
a — γ δ σ ζ — $176.$
 γ — δ σ ζ — $177.$
 γ — δ σ ζ — $178.$
 γ — δ σ ζ — $179.$
 a — γ δ σ ζ — $180.$

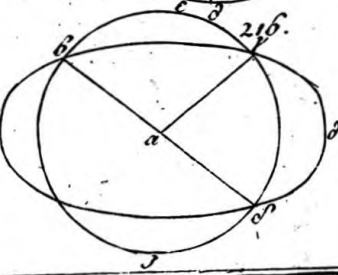
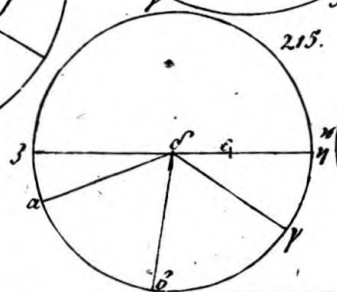
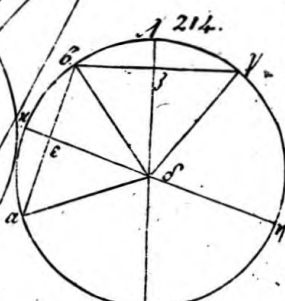
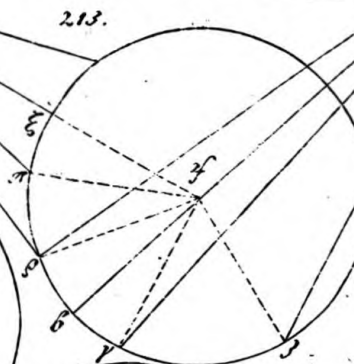
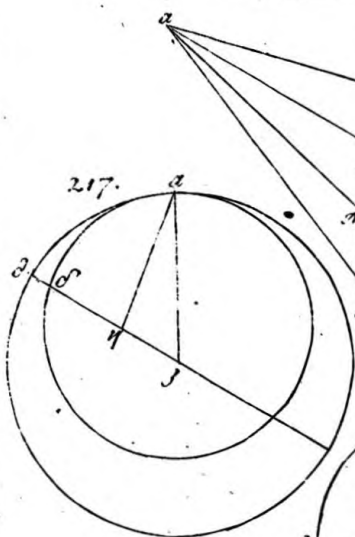
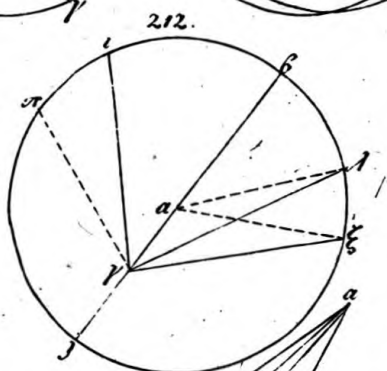
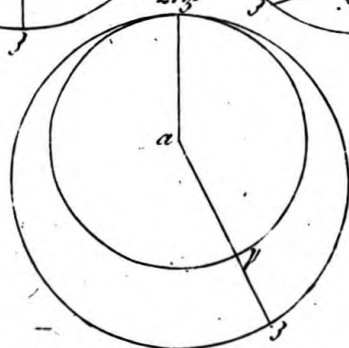
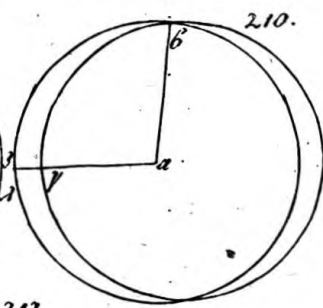
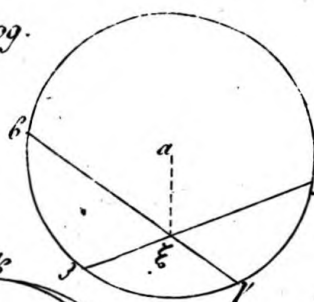
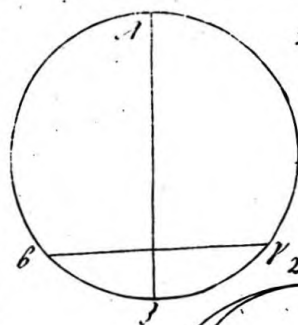


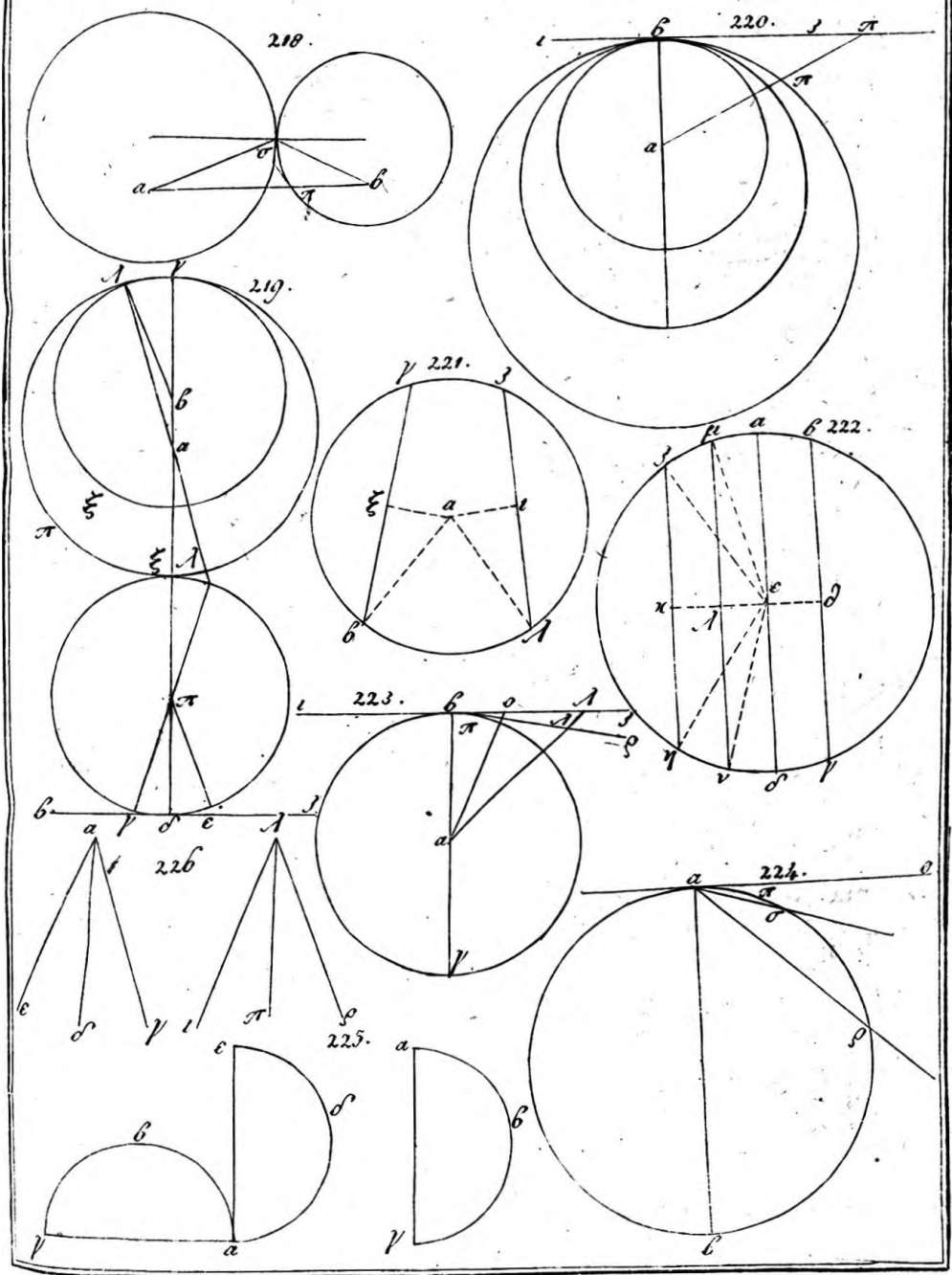
a — γ δ σ ζ — $184.$

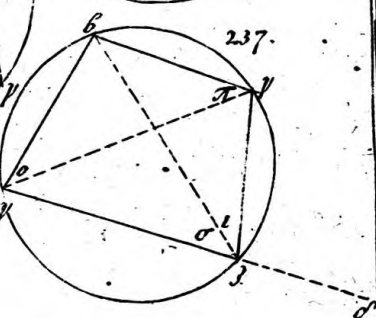
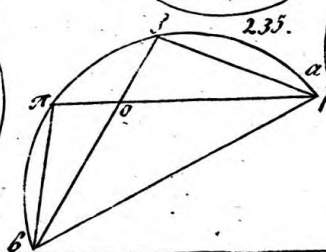
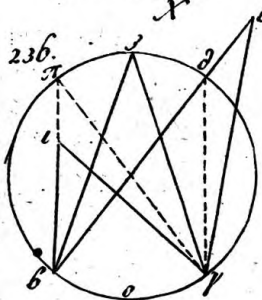
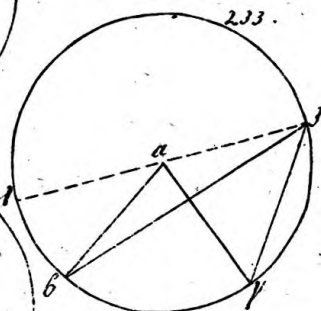
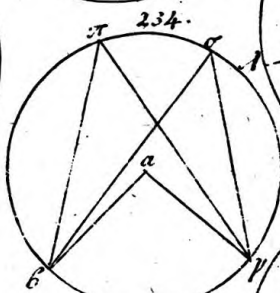
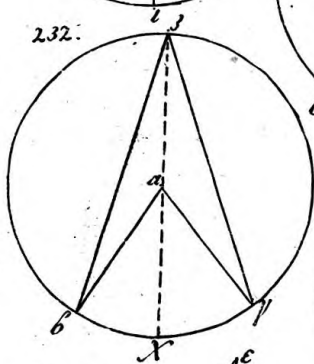
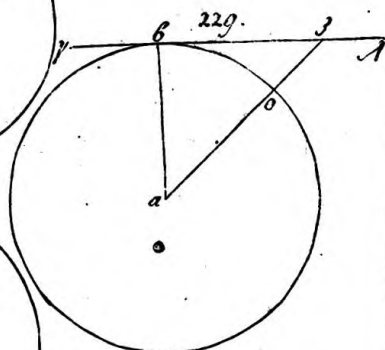
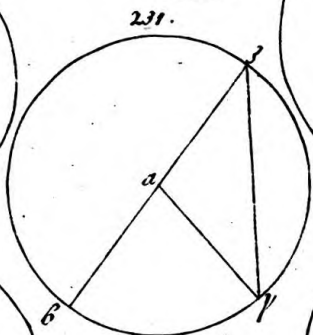
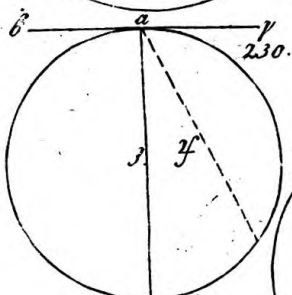
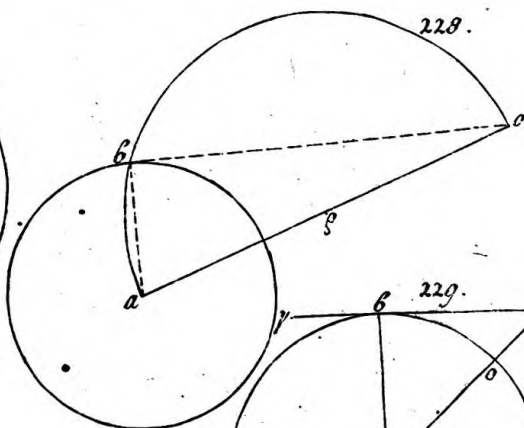
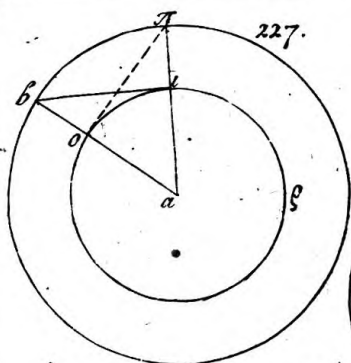
π — γ δ σ ζ — $186.$

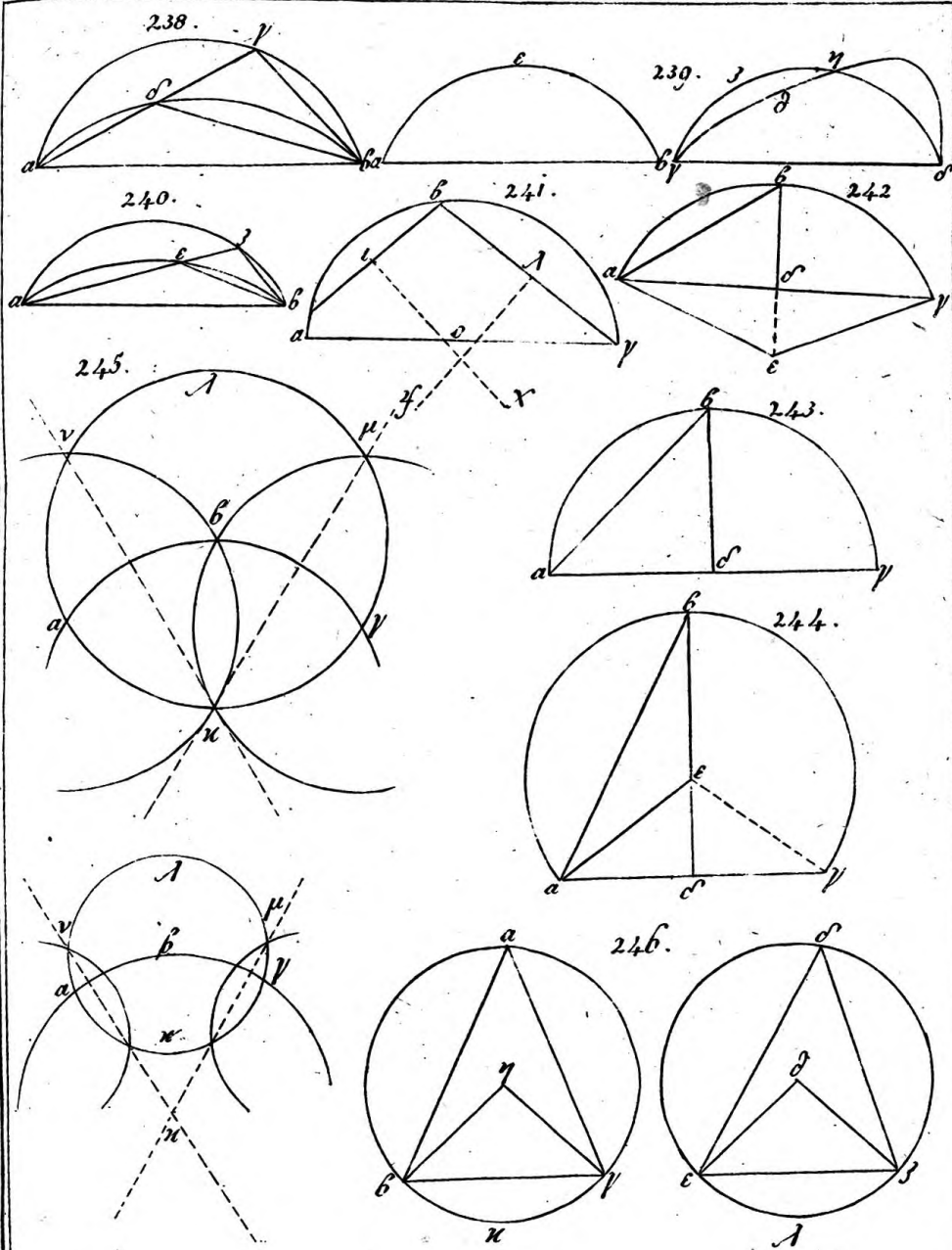


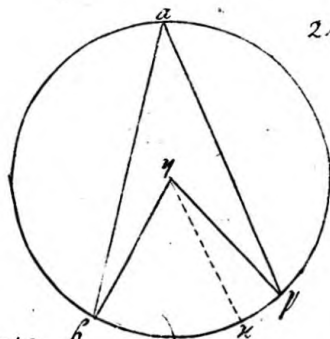




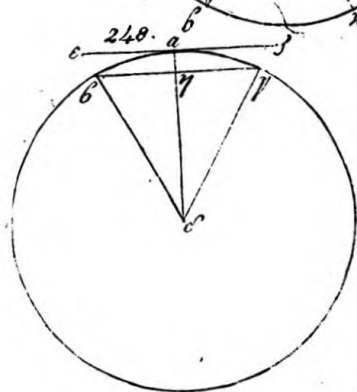
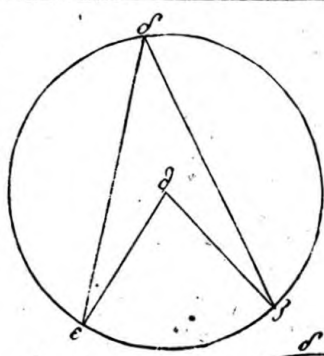




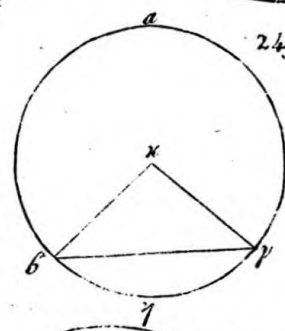




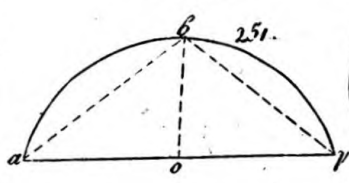
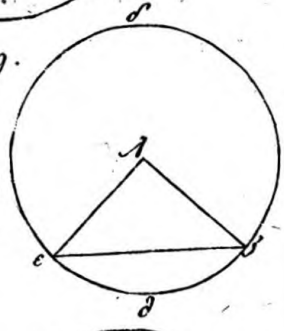
247.



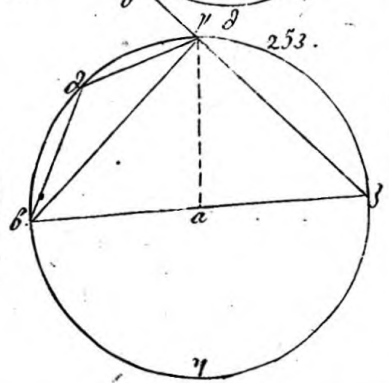
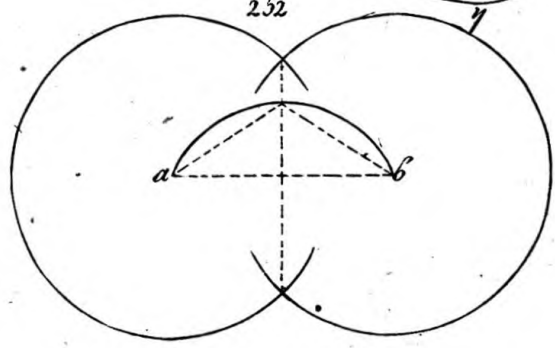
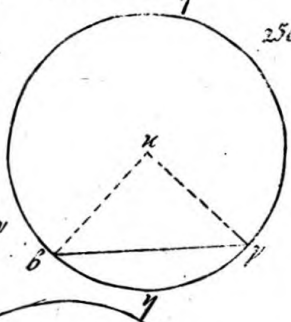
249.



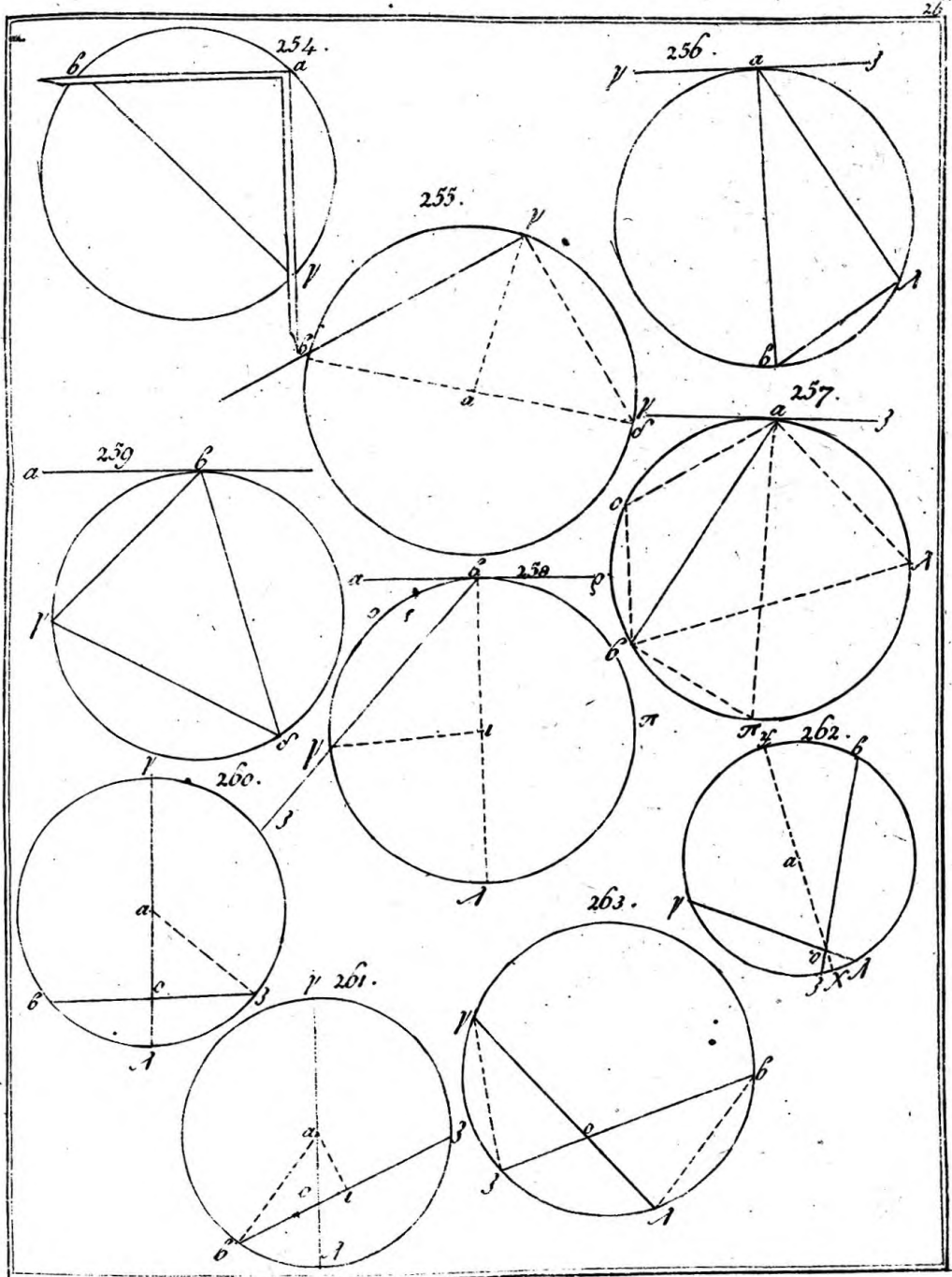
250.

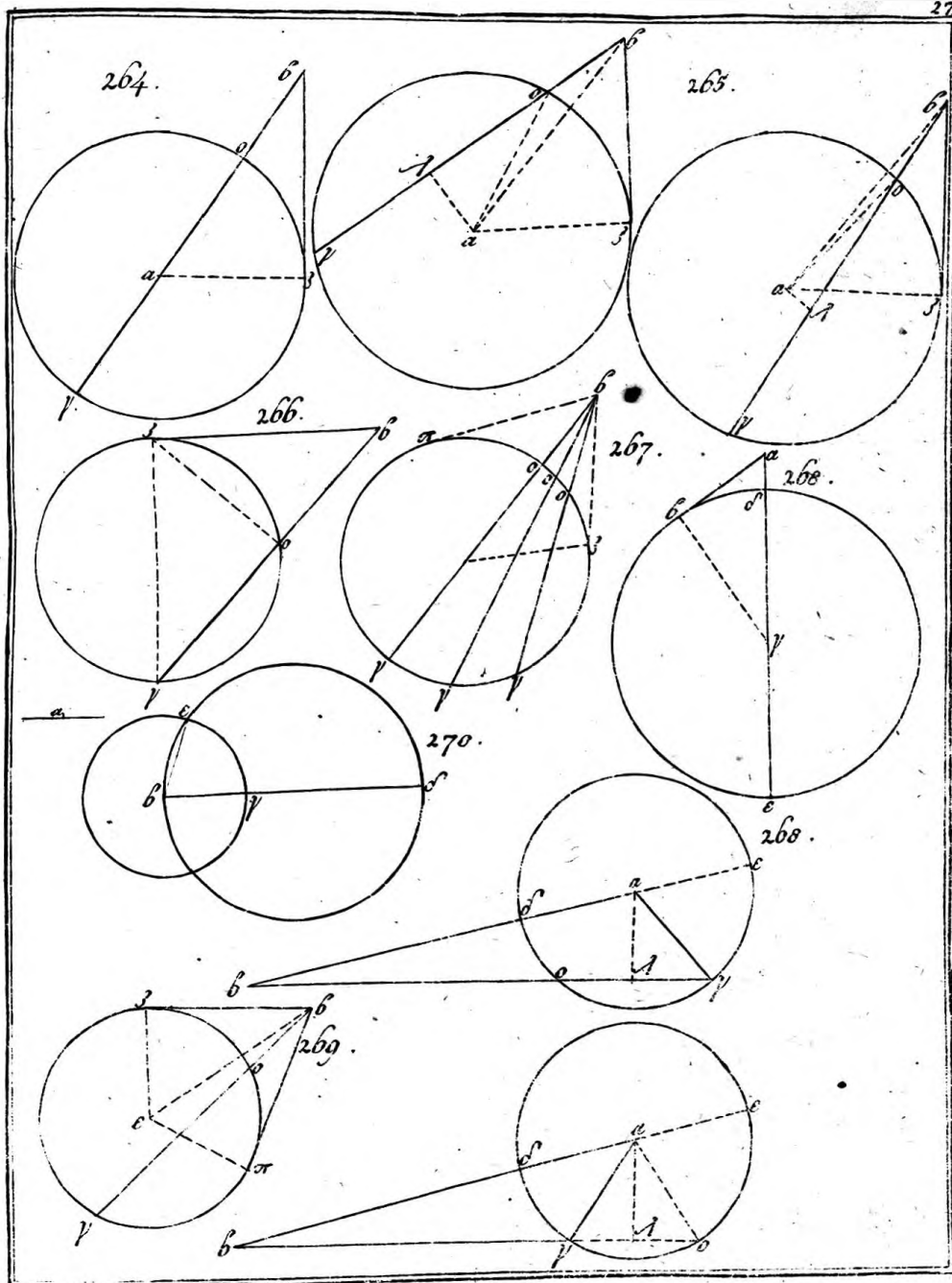


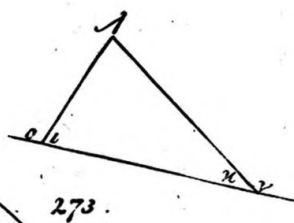
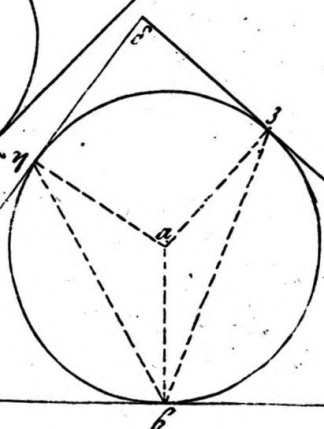
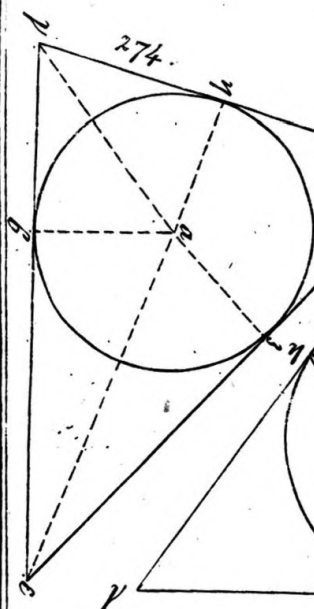
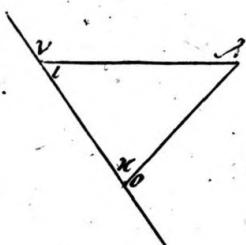
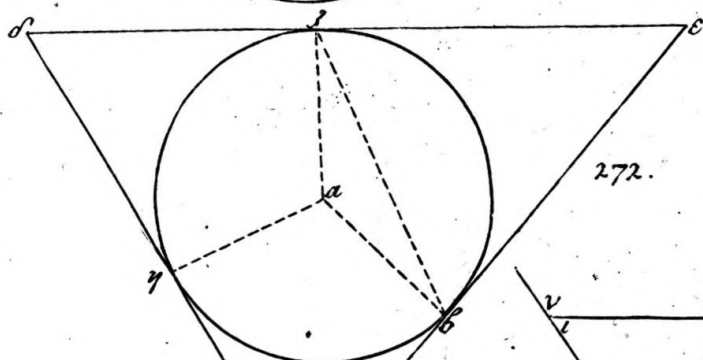
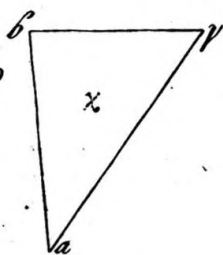
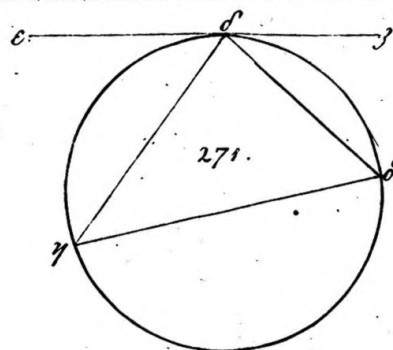
252.

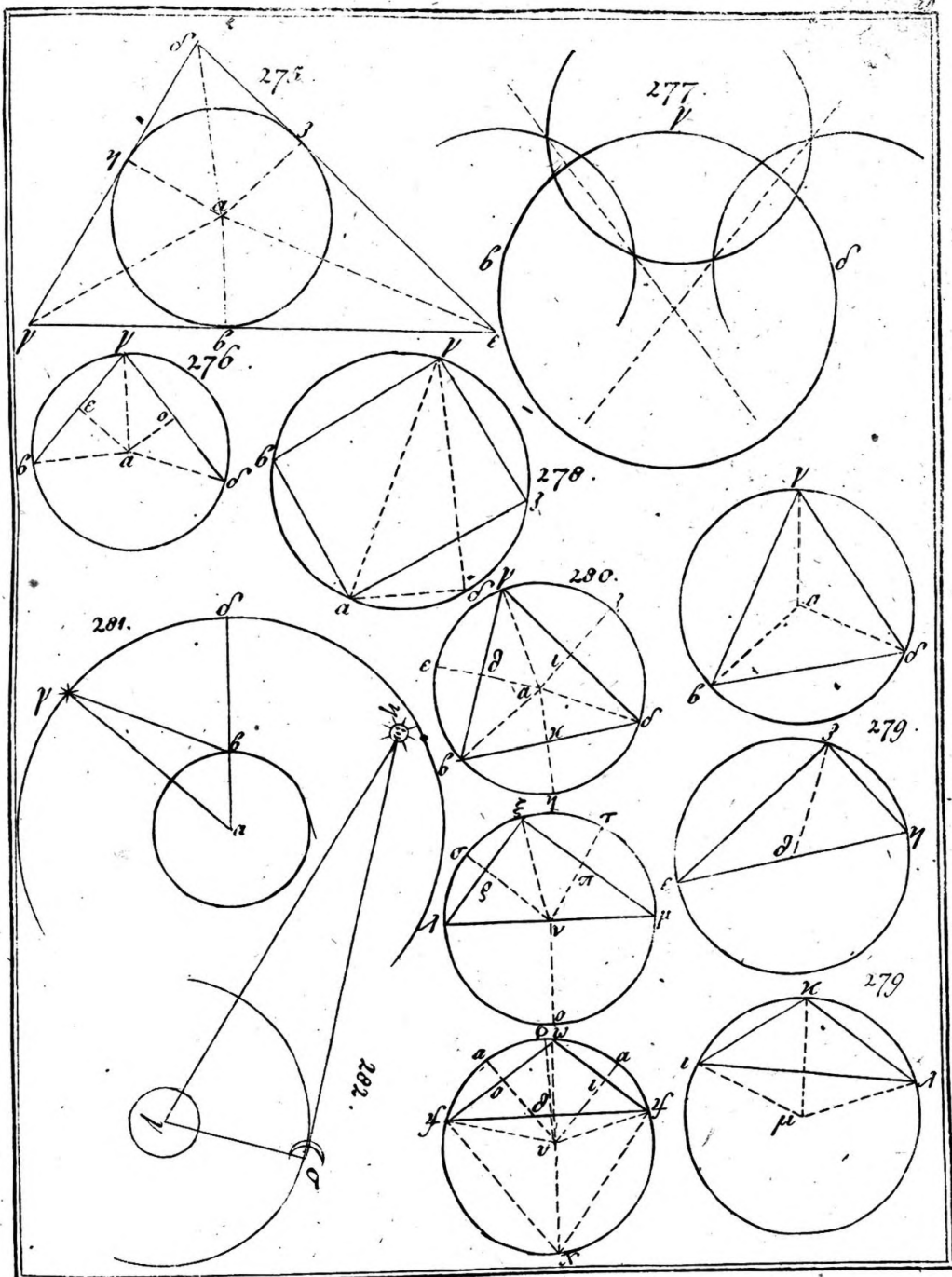


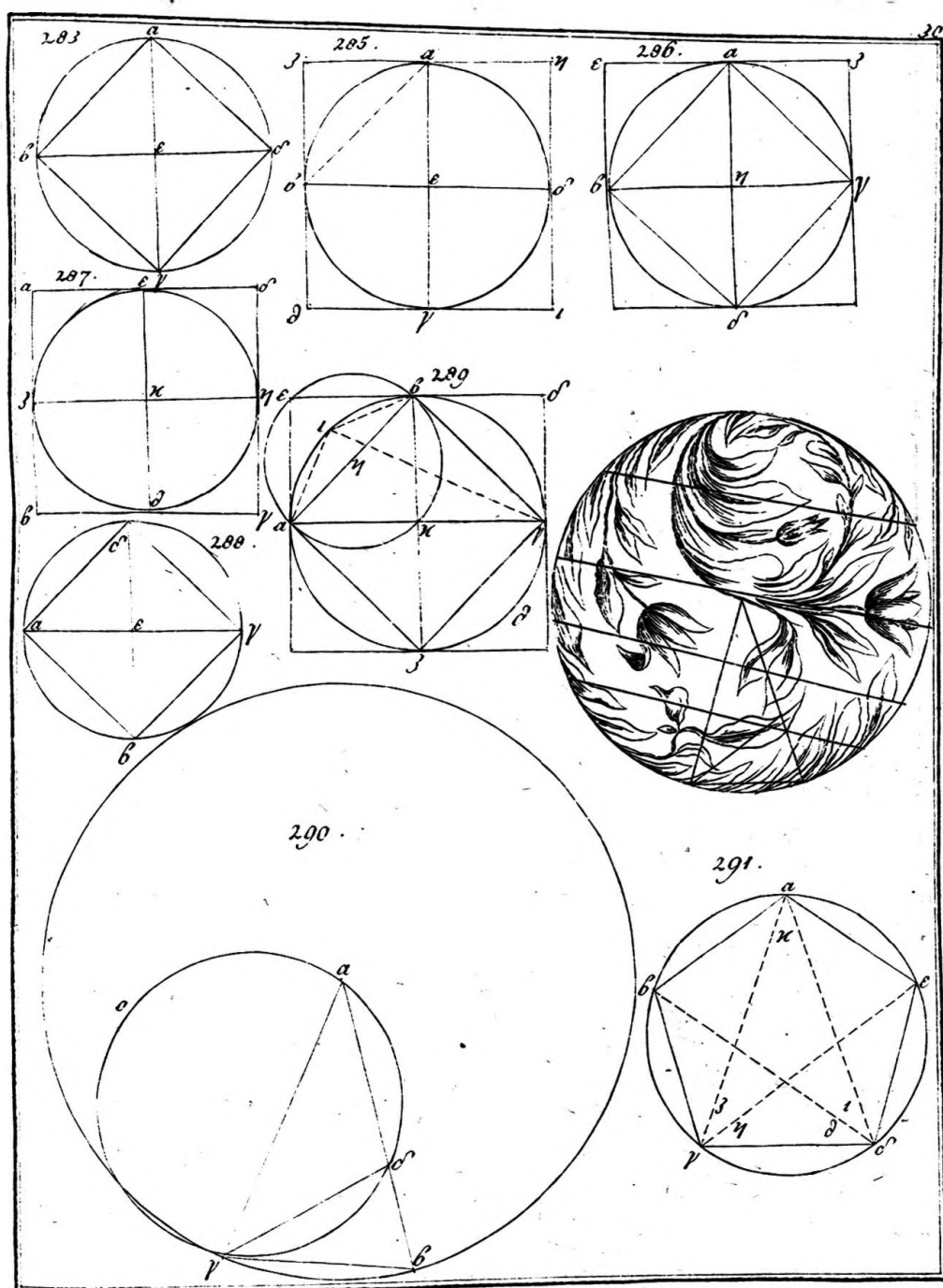
253.

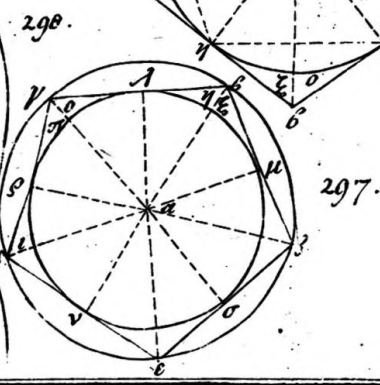
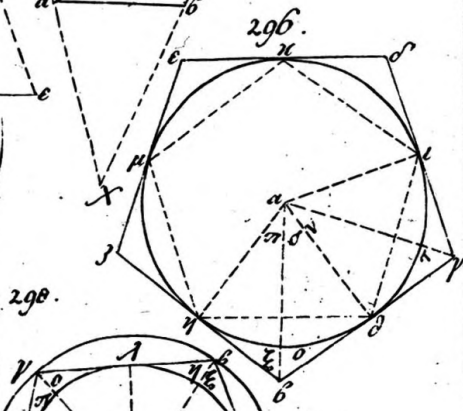
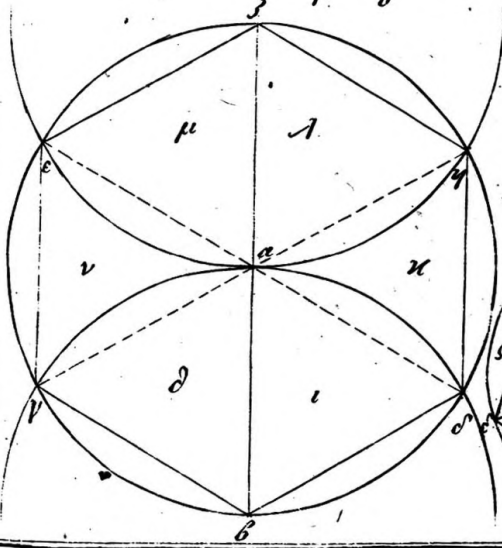
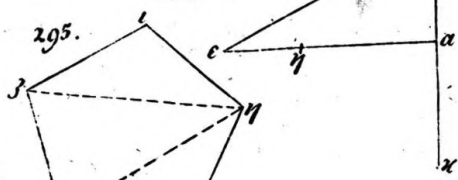
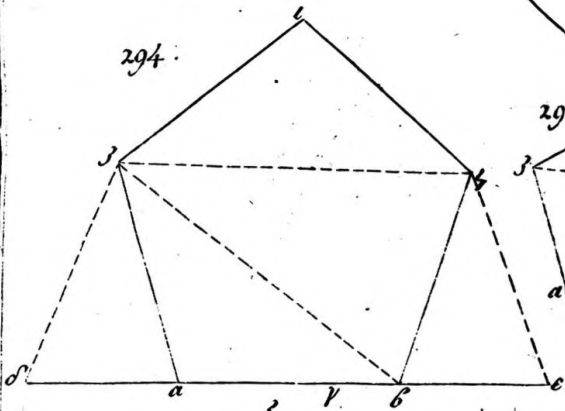
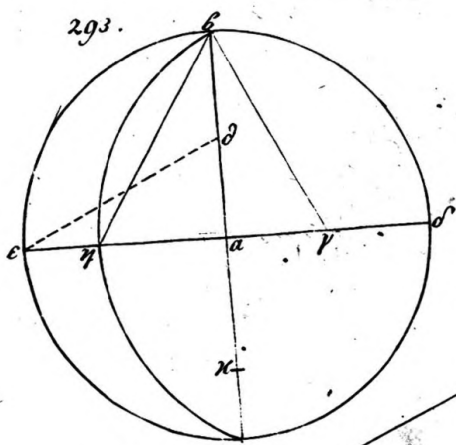
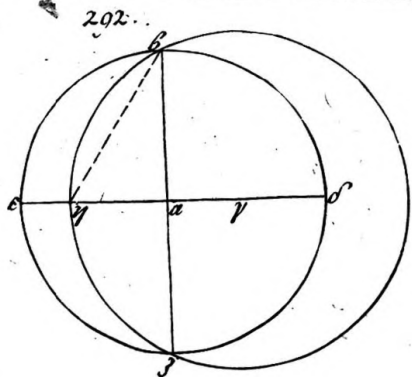


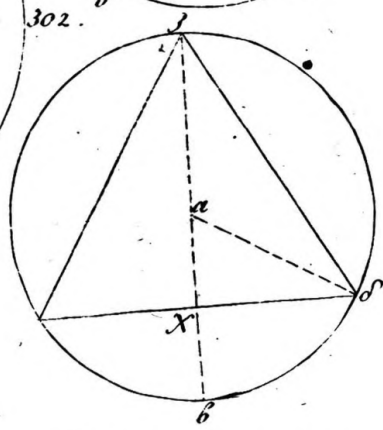
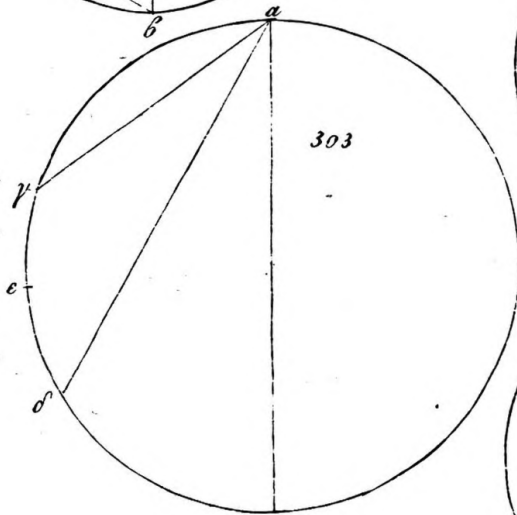
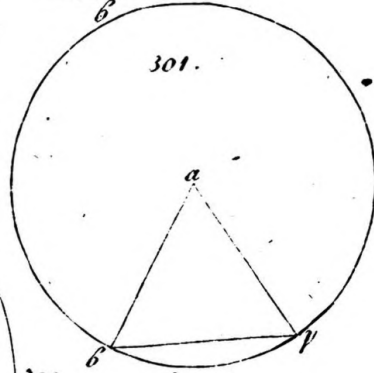
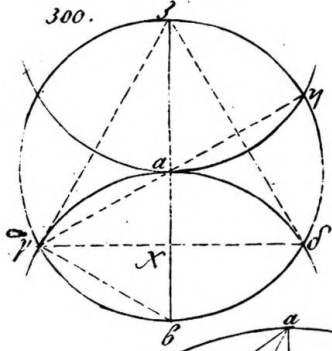
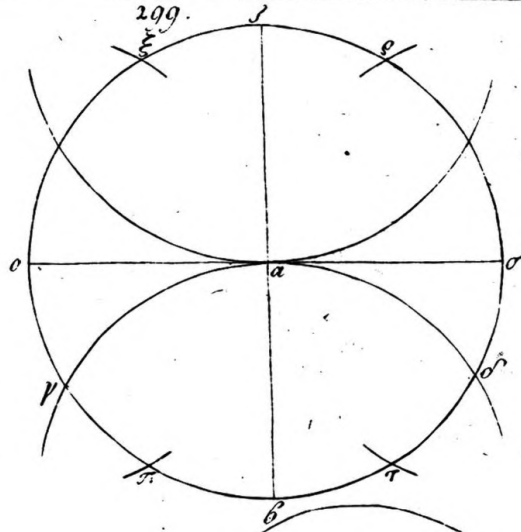


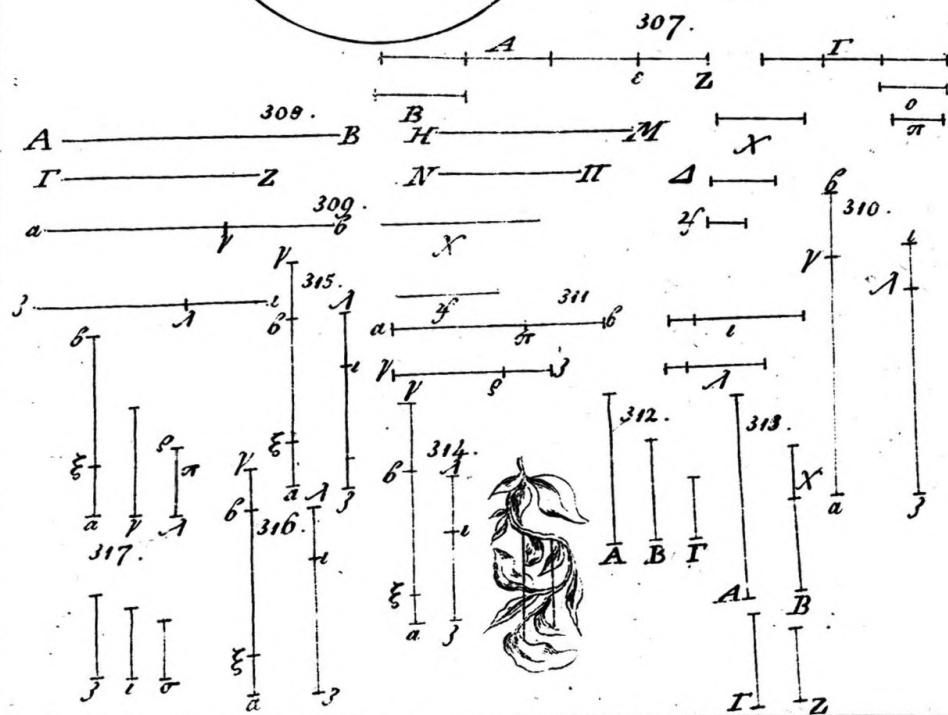
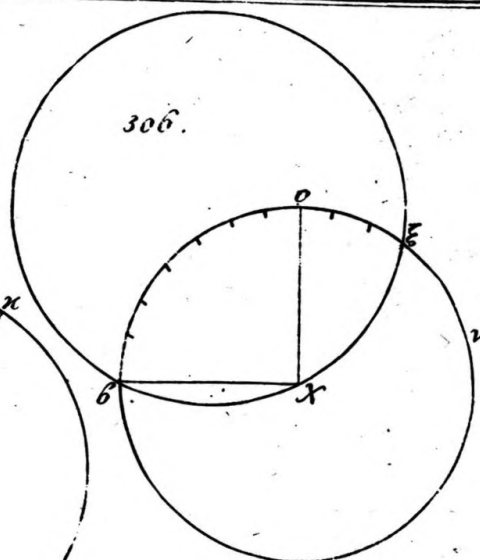
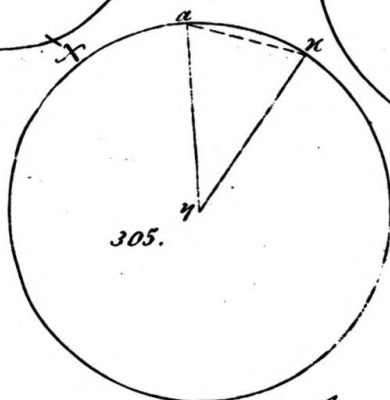
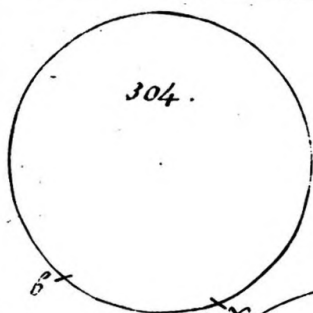


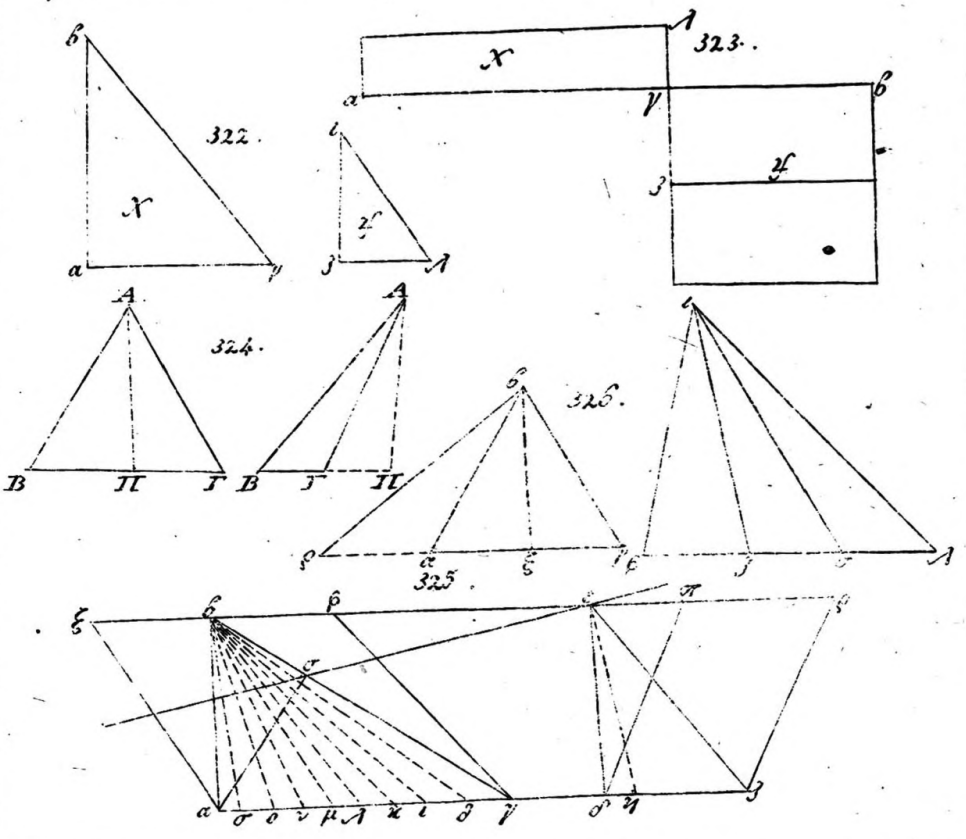
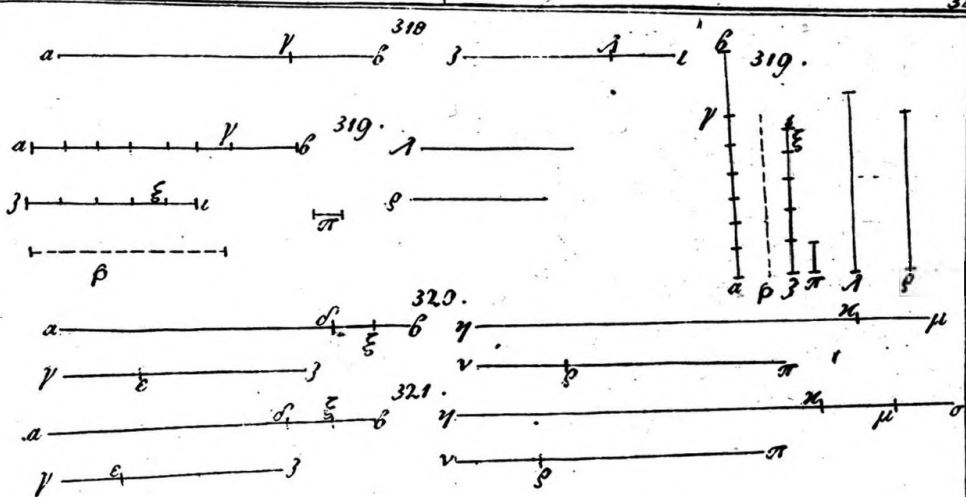


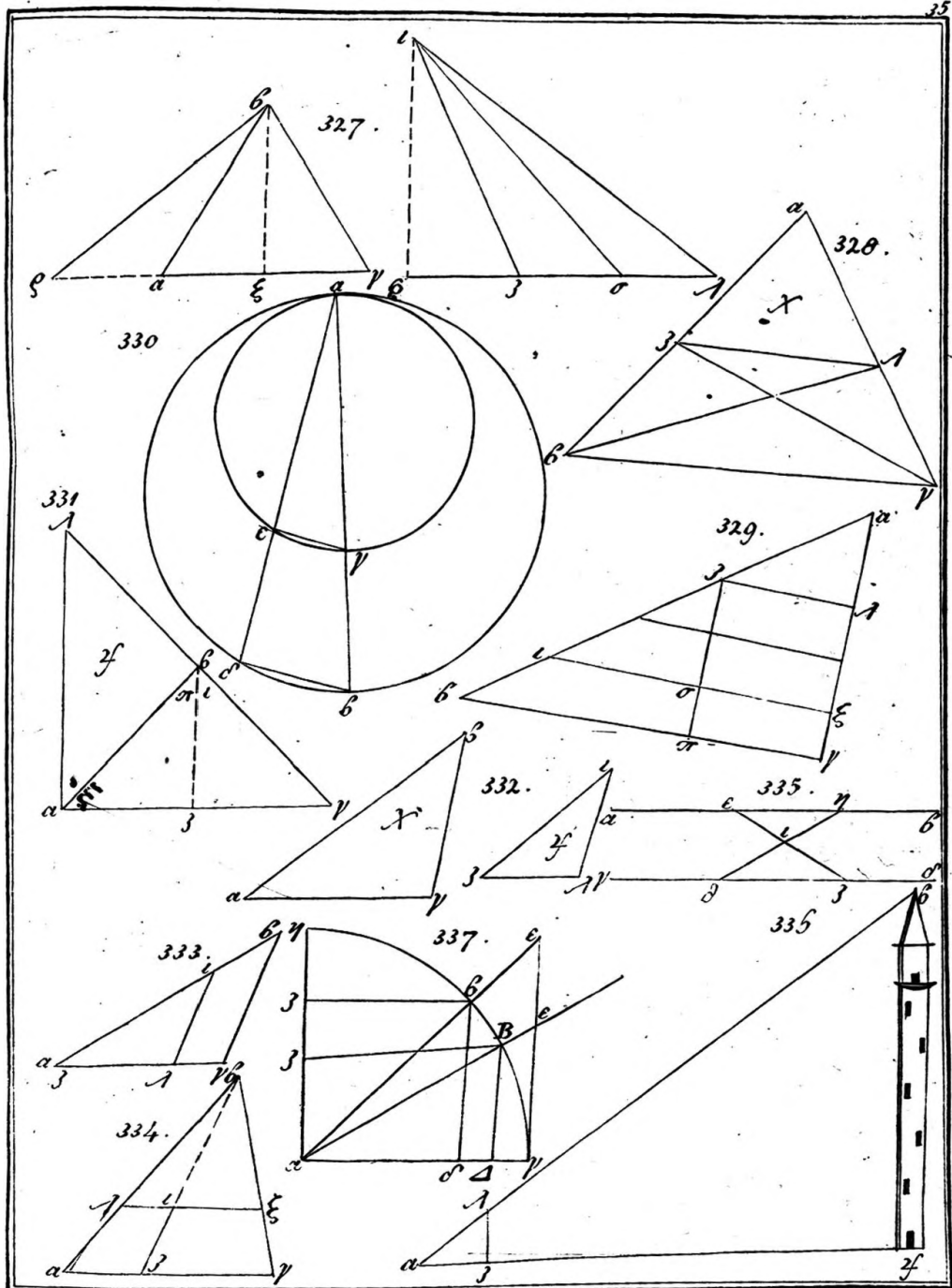


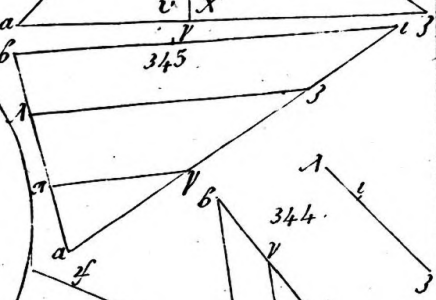
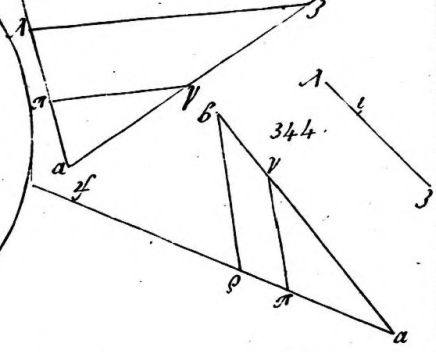
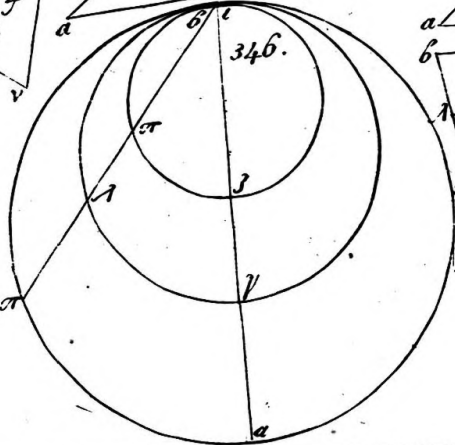
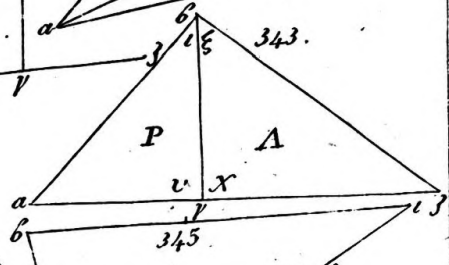
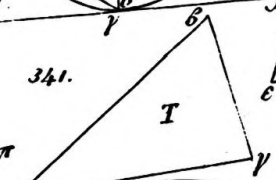
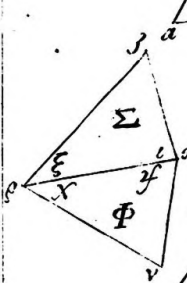
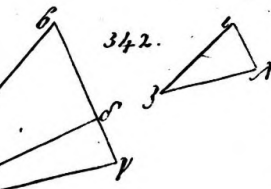
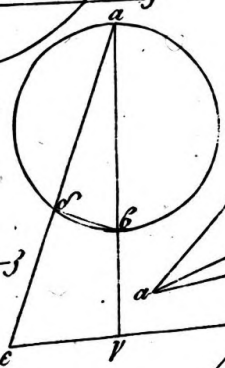
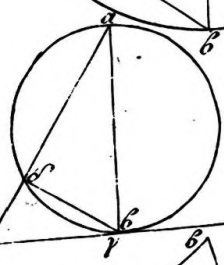
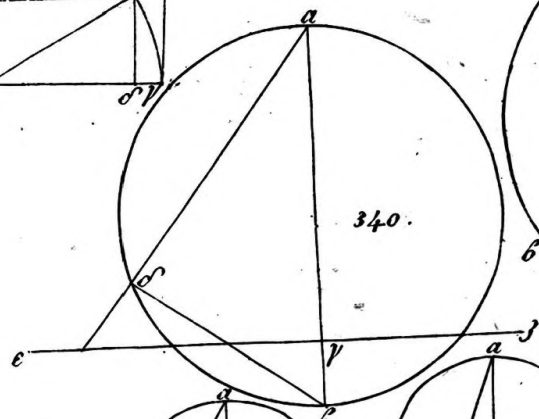
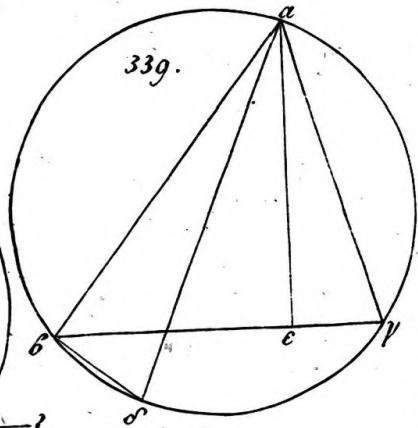
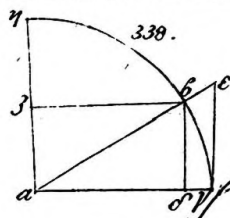


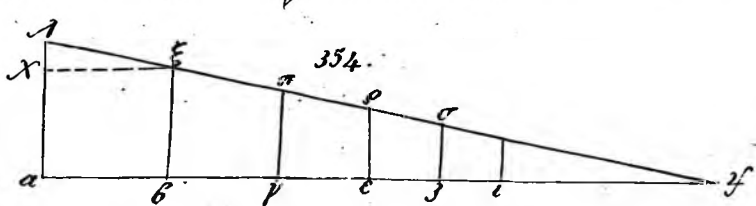
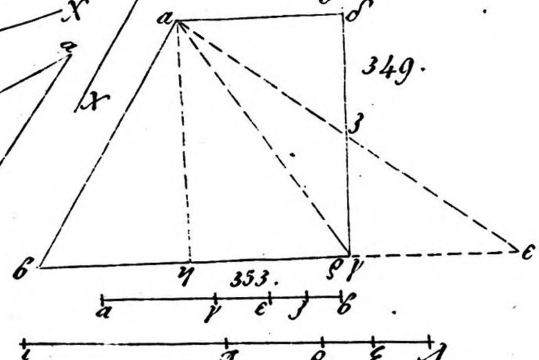
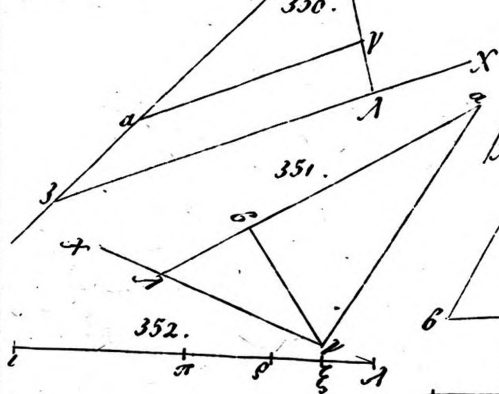
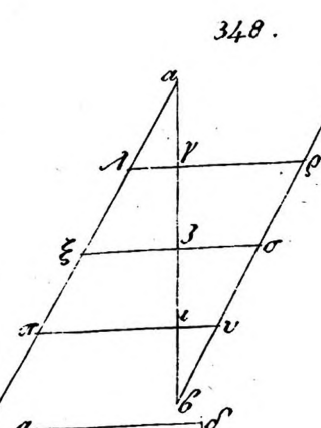
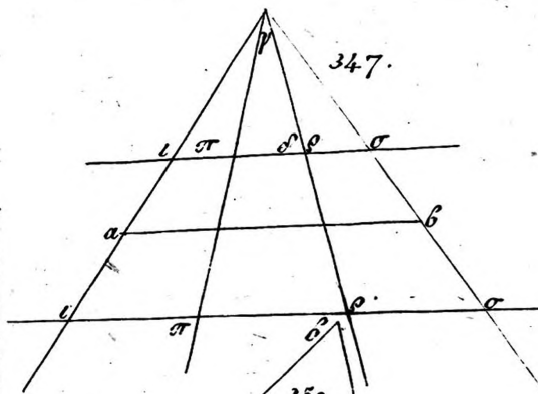


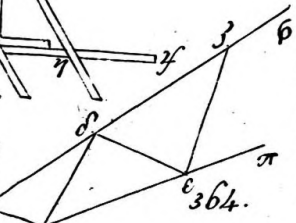
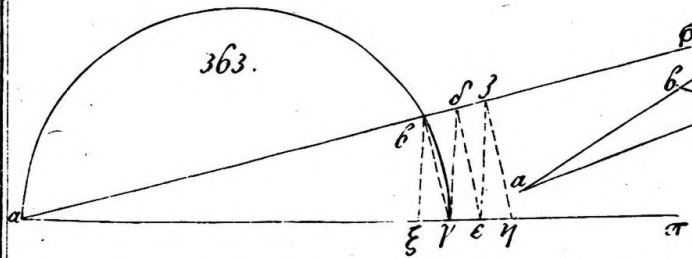
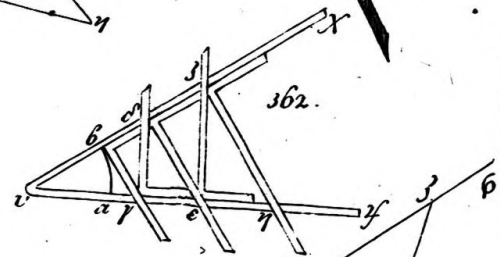
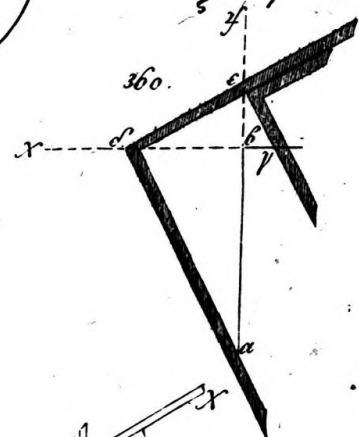
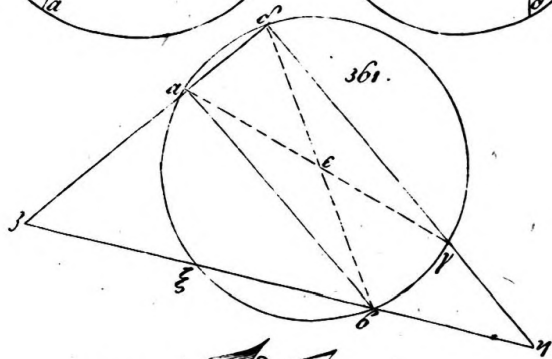
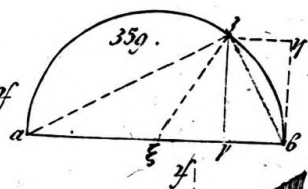
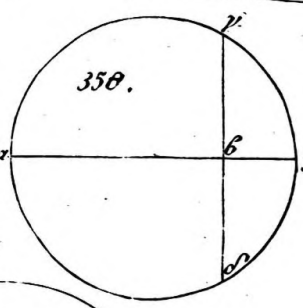
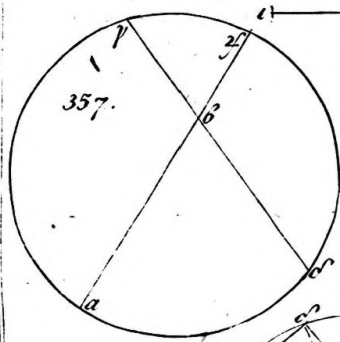
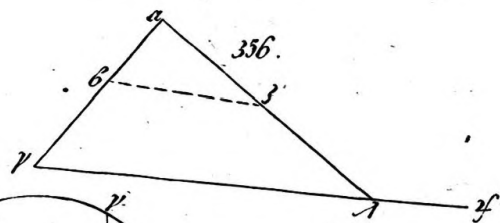
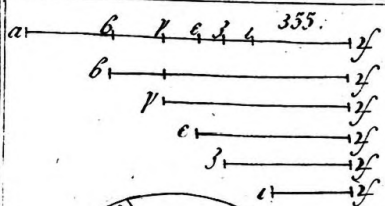


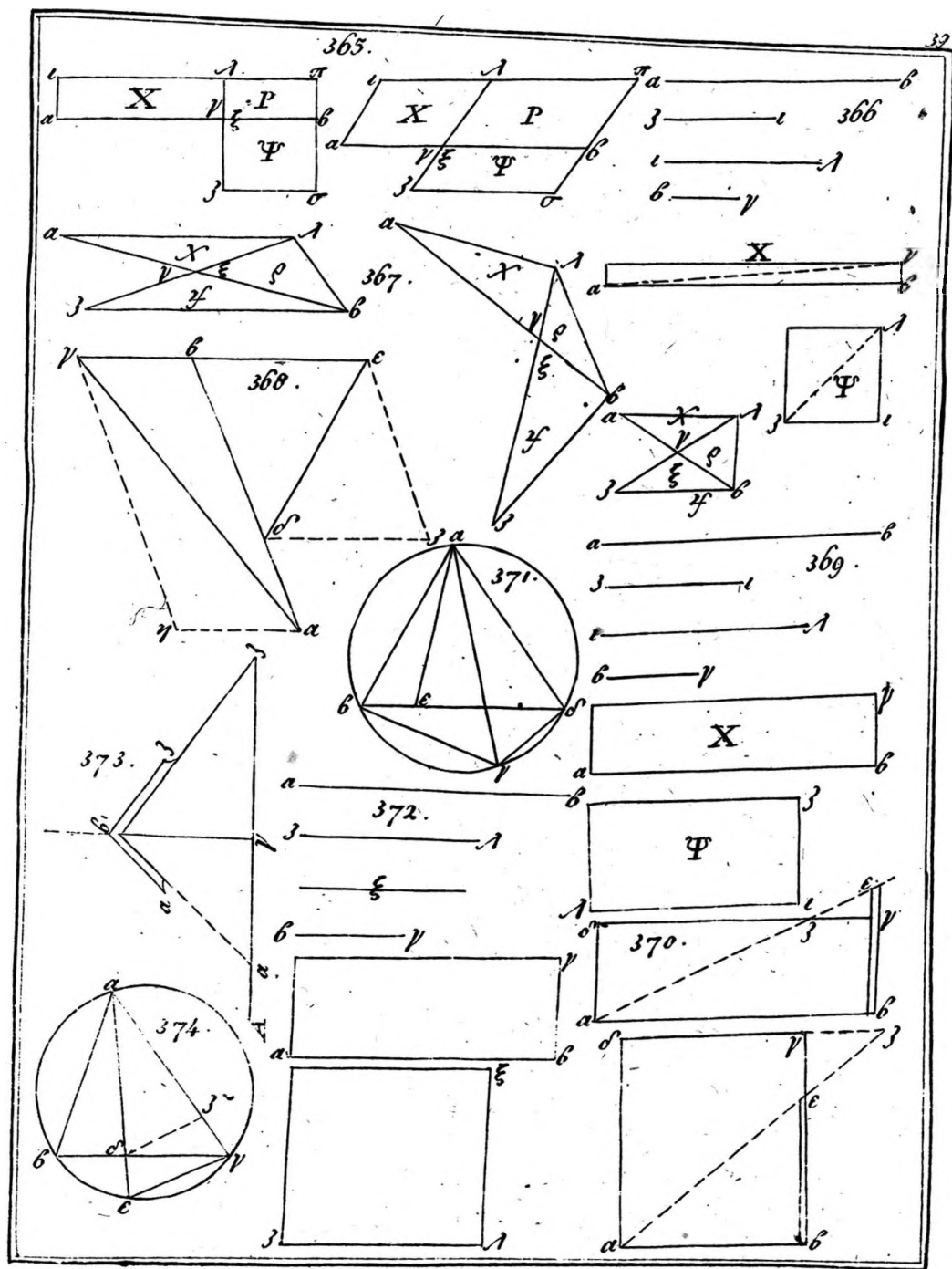


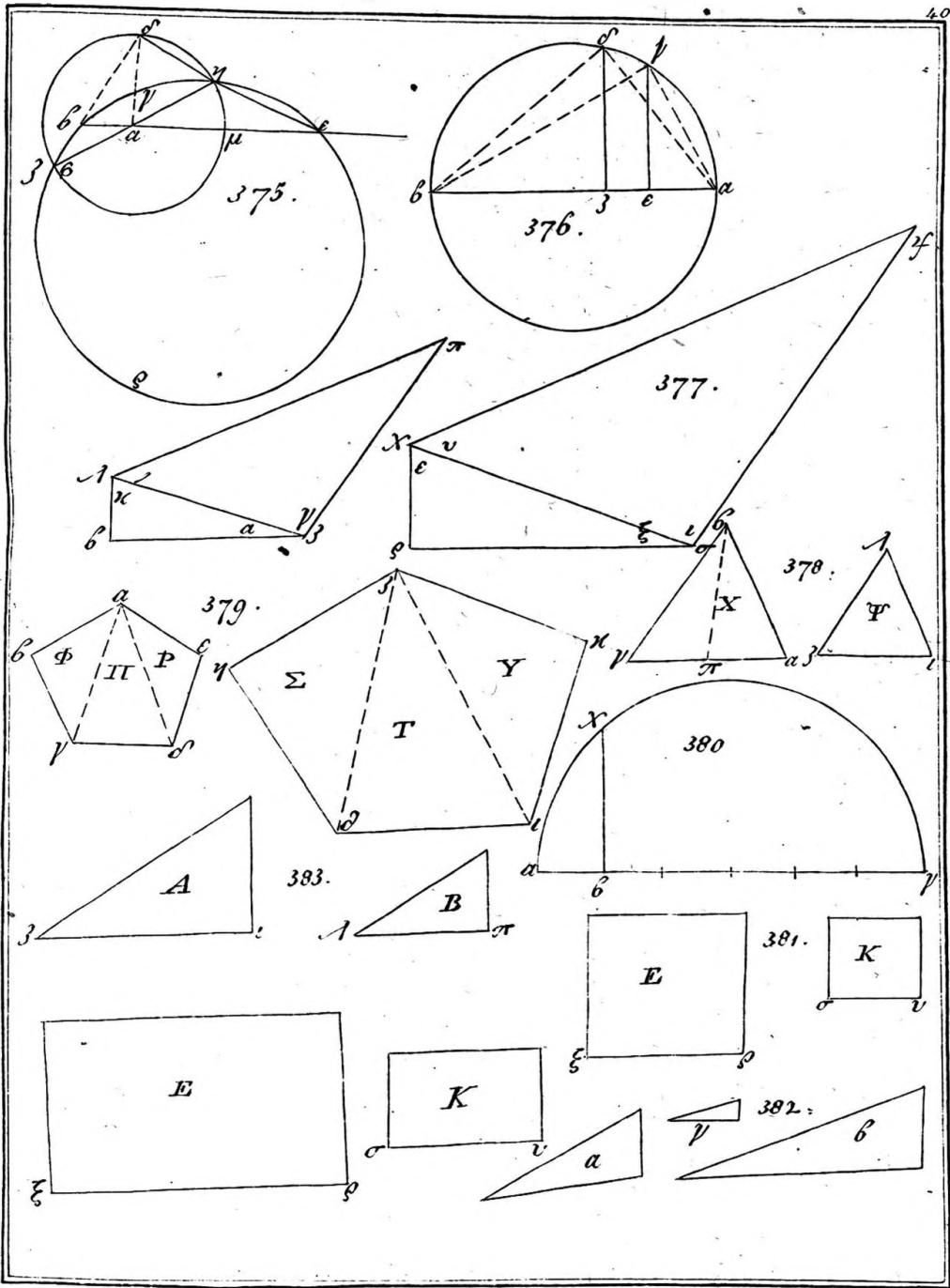


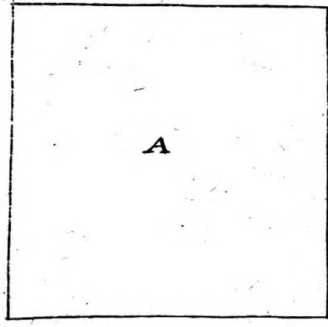
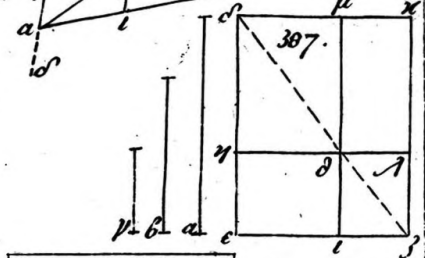
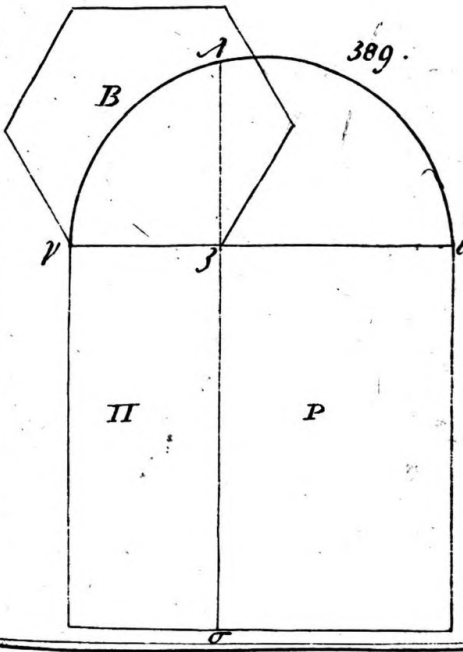
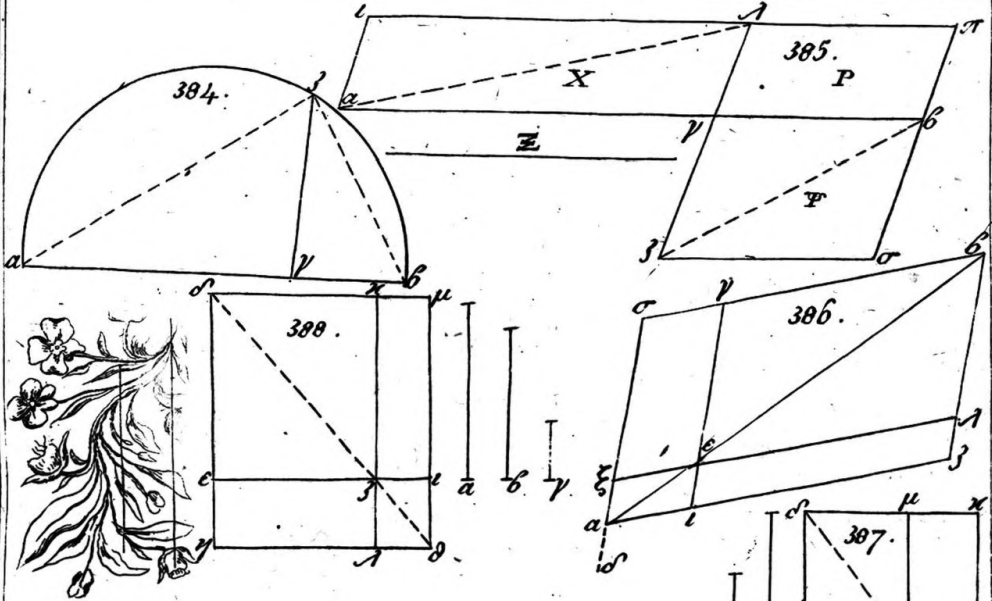


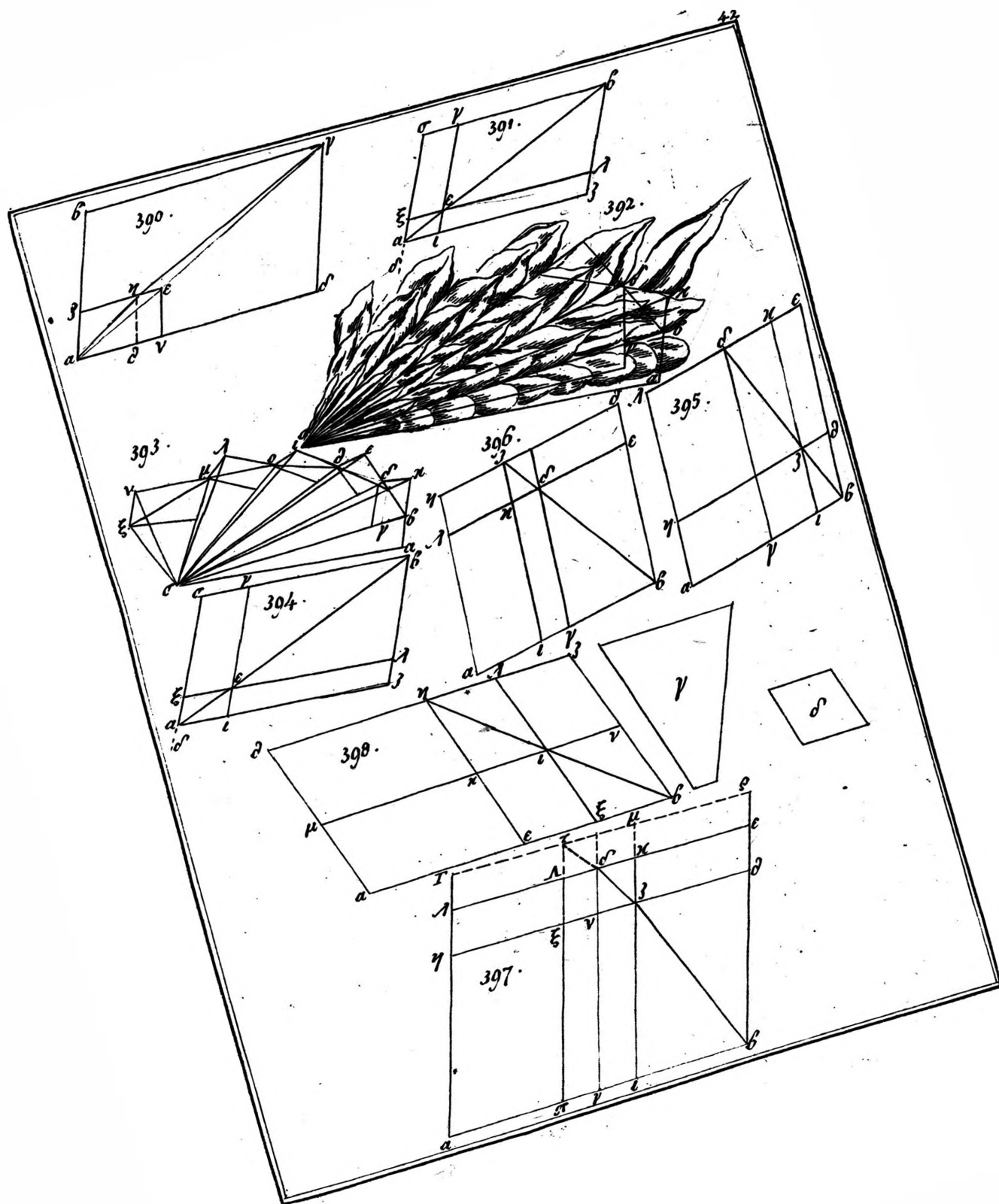


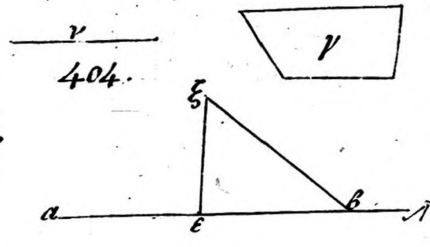
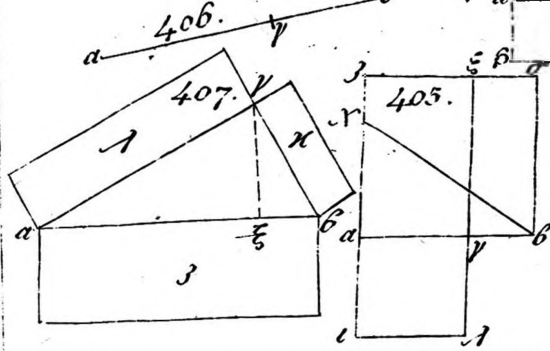
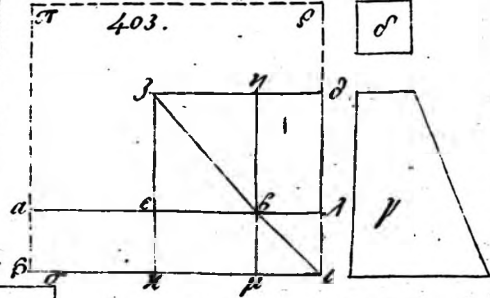
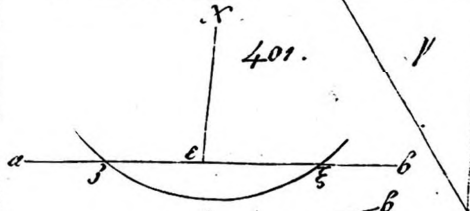
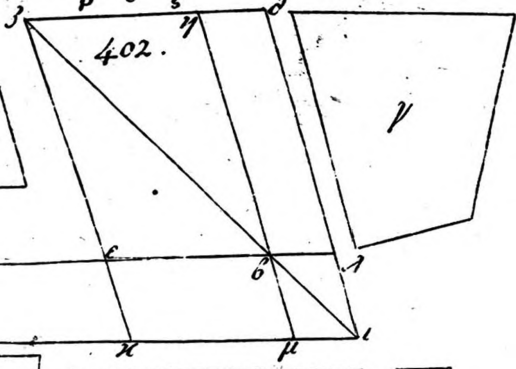
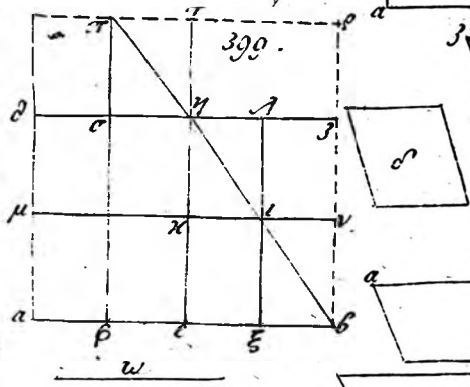
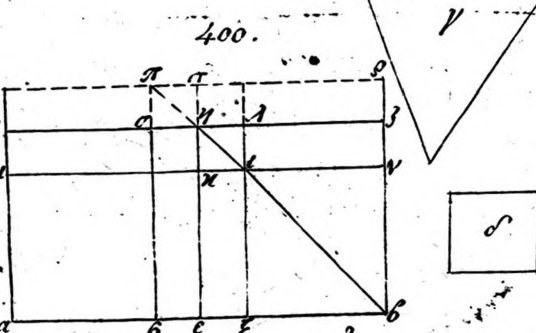
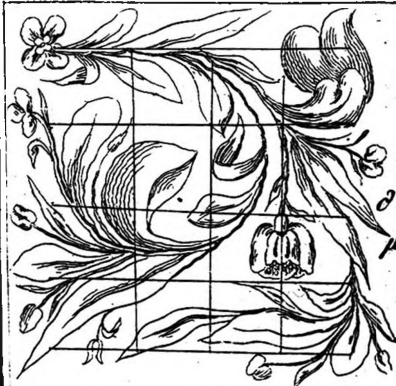


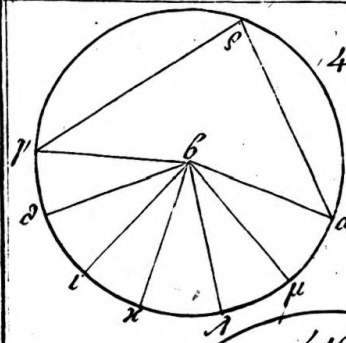




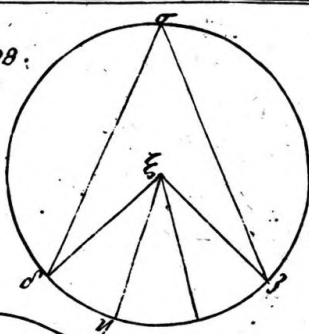




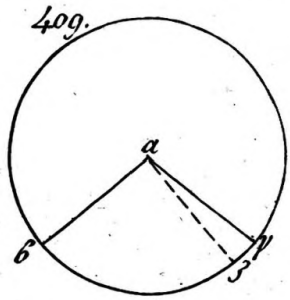




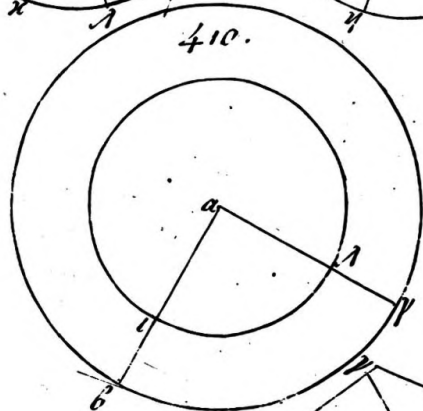
408.



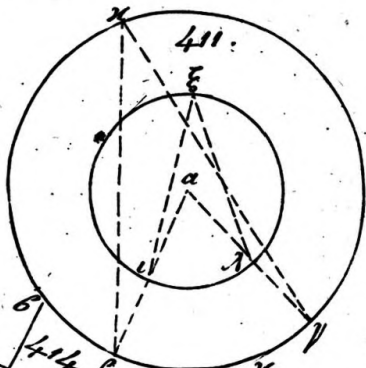
409.



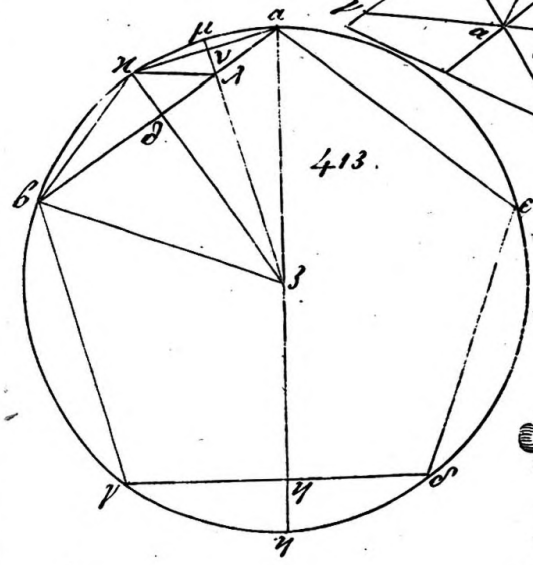
410.



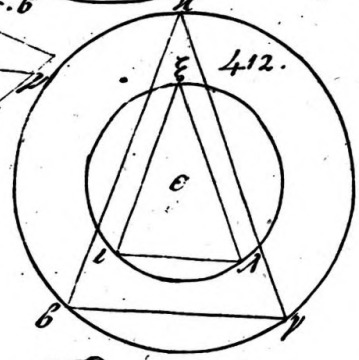
411.



414.

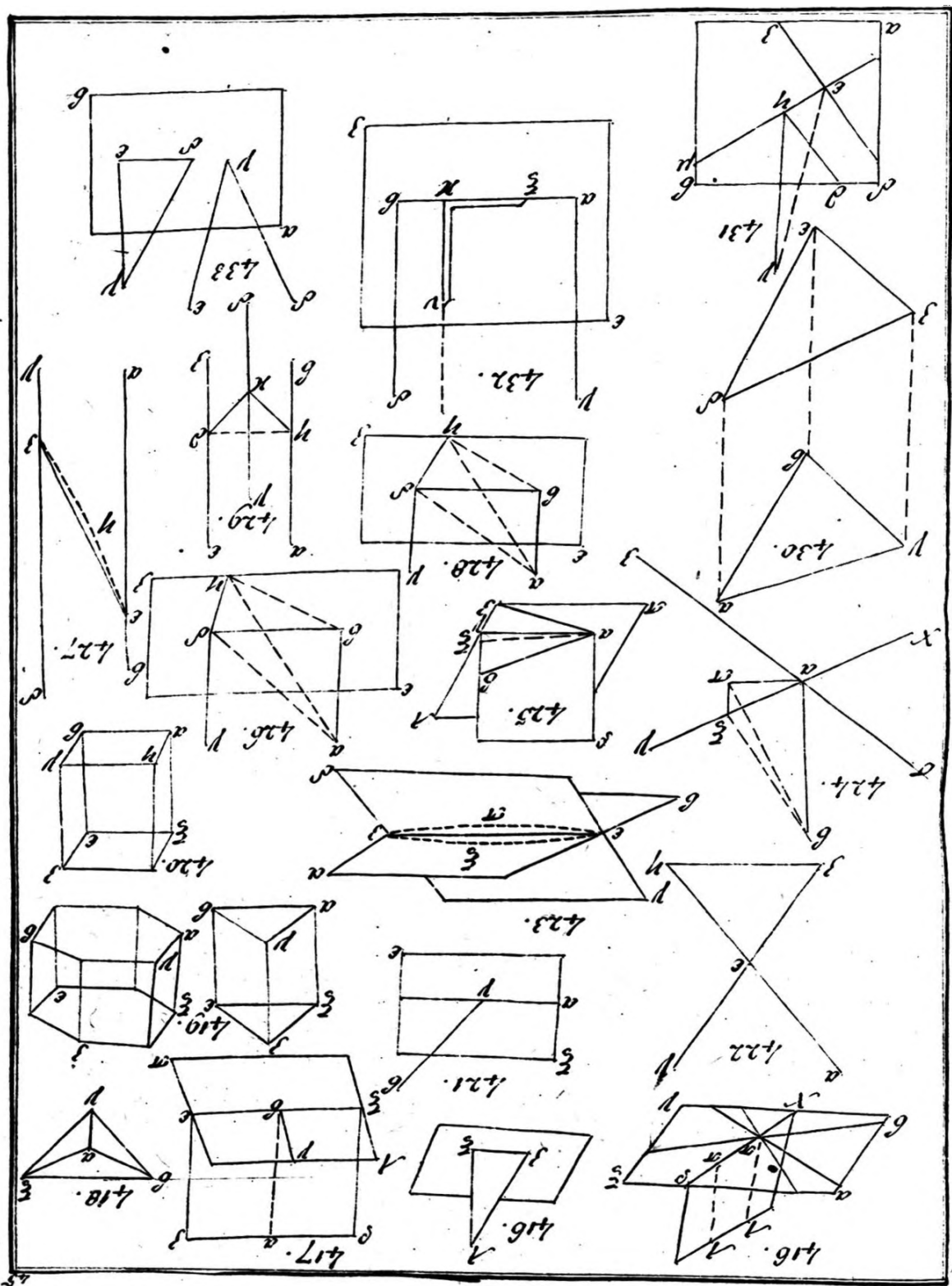


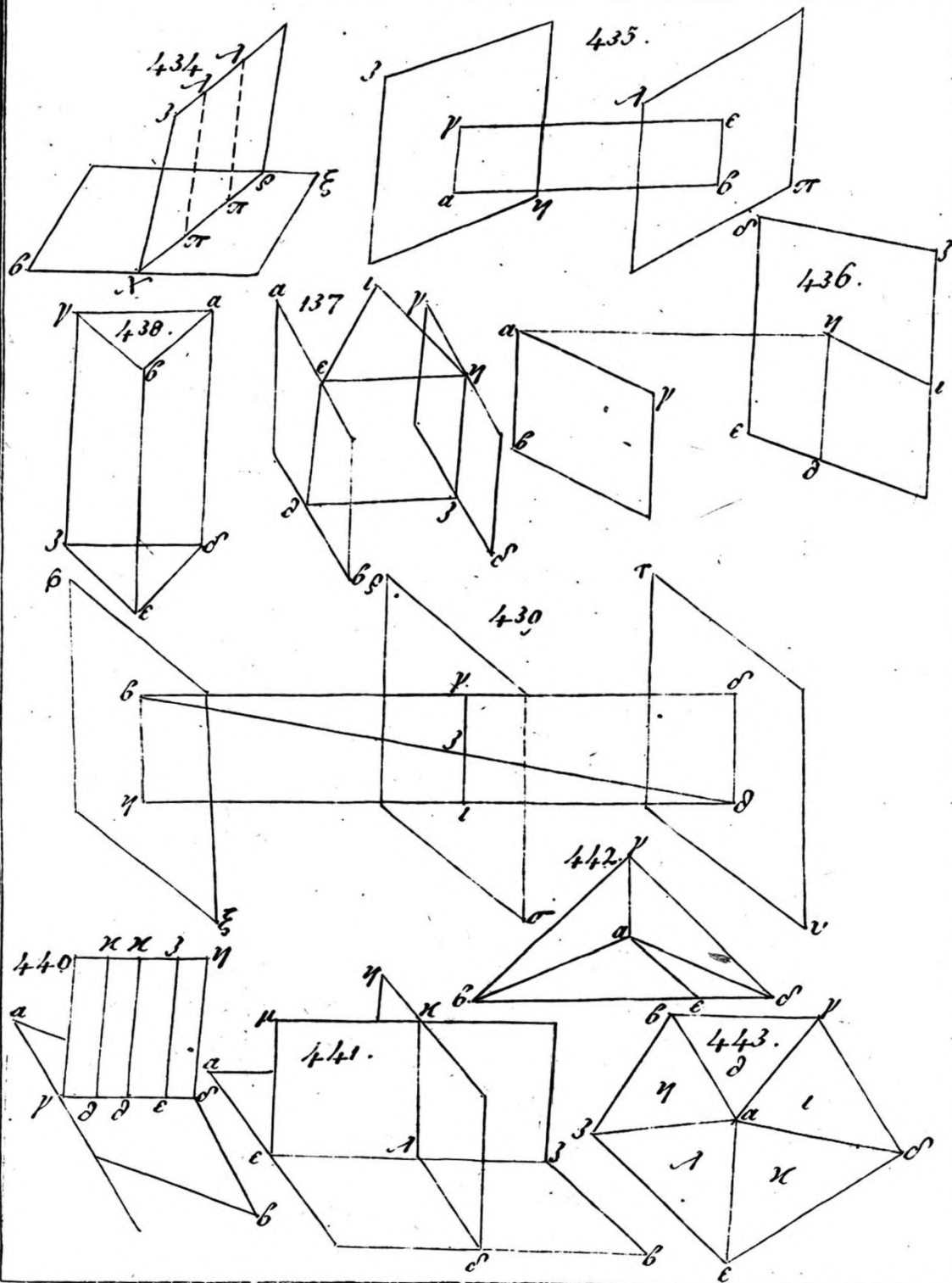
413.

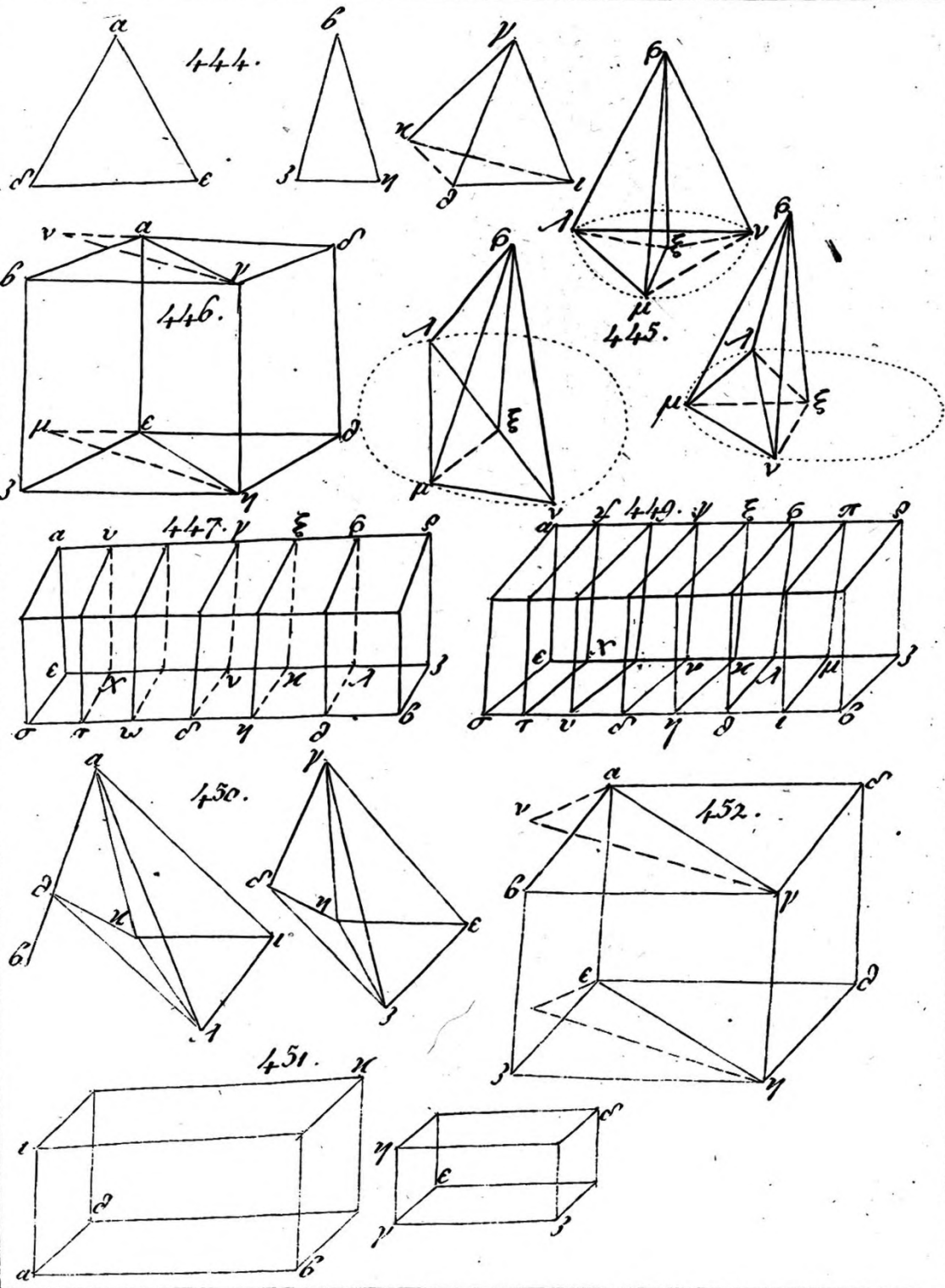


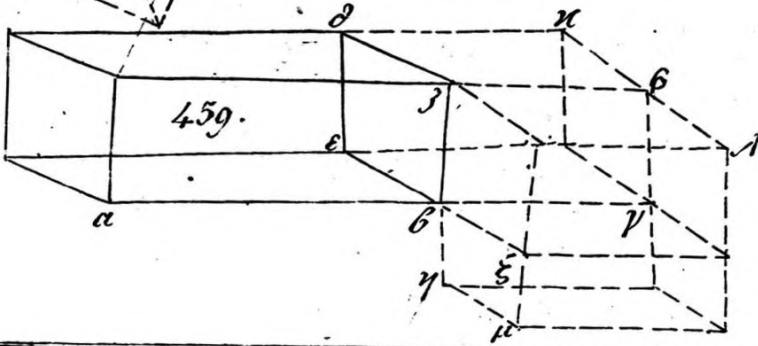
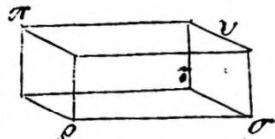
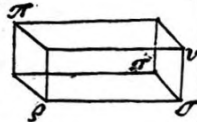
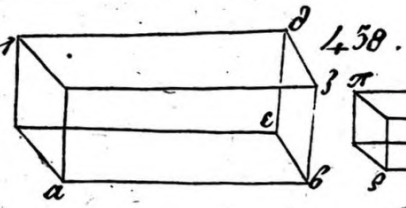
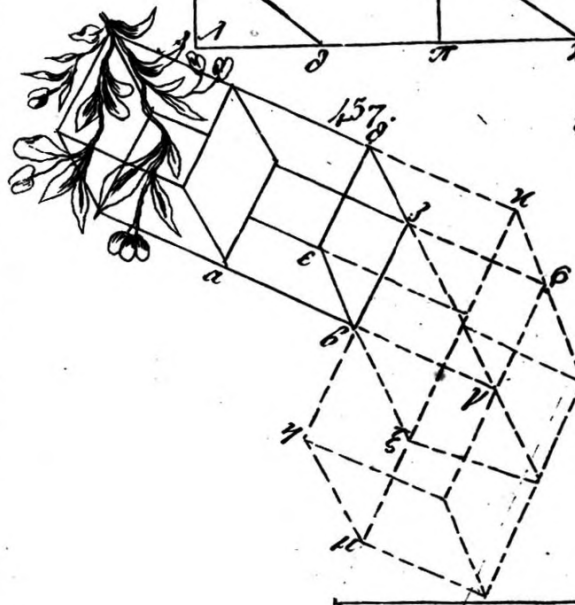
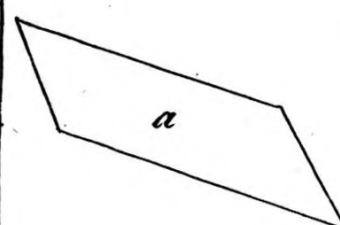
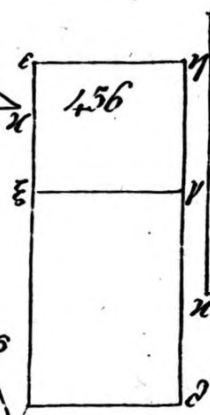
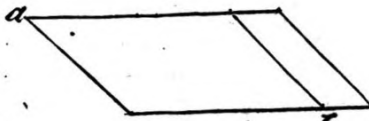
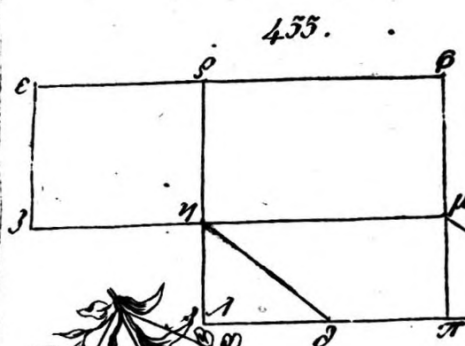
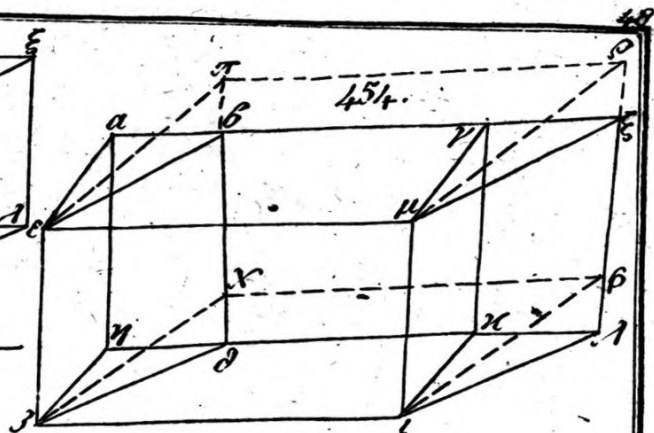
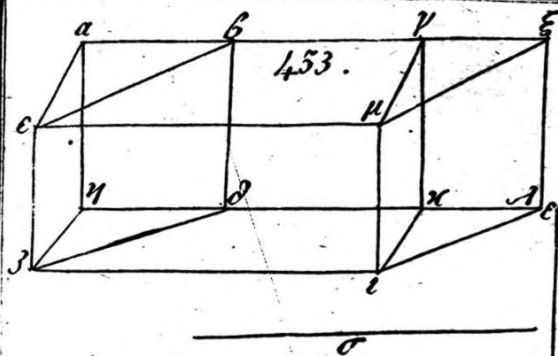
412.



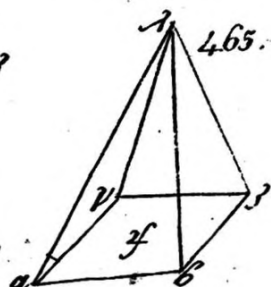
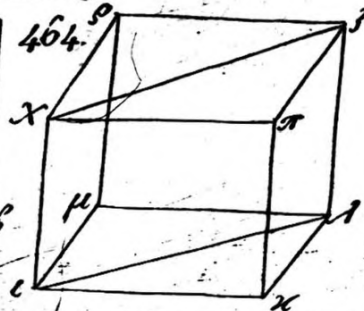
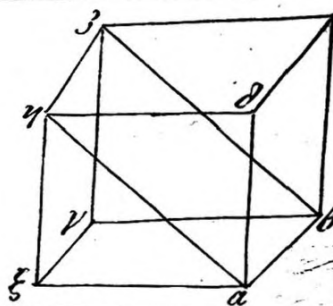
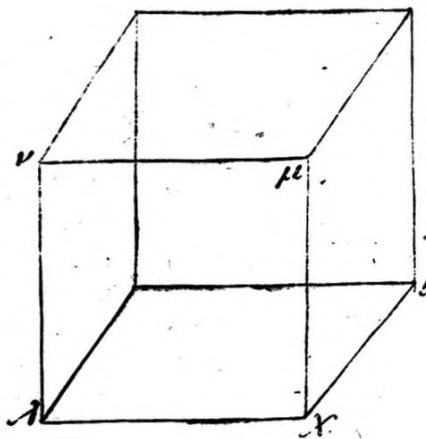
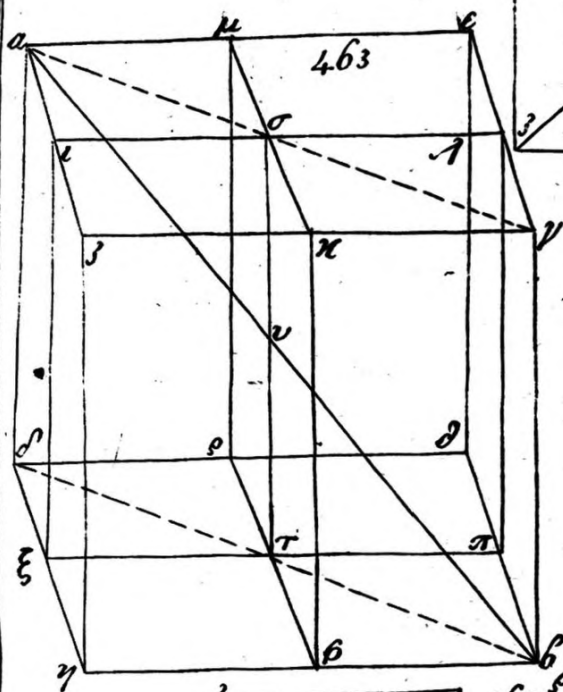
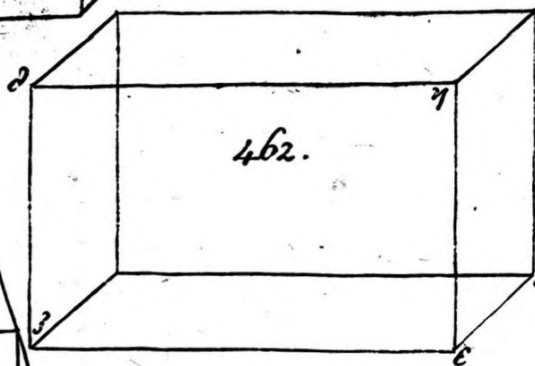
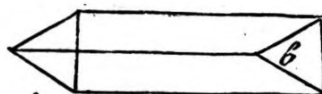
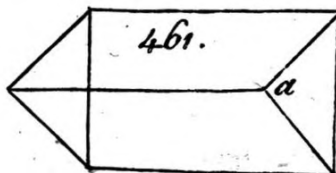
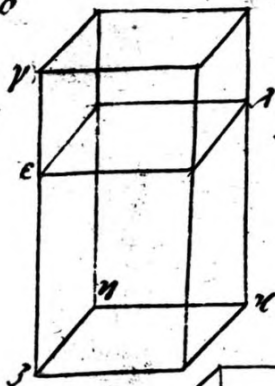
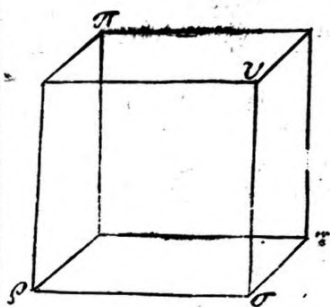


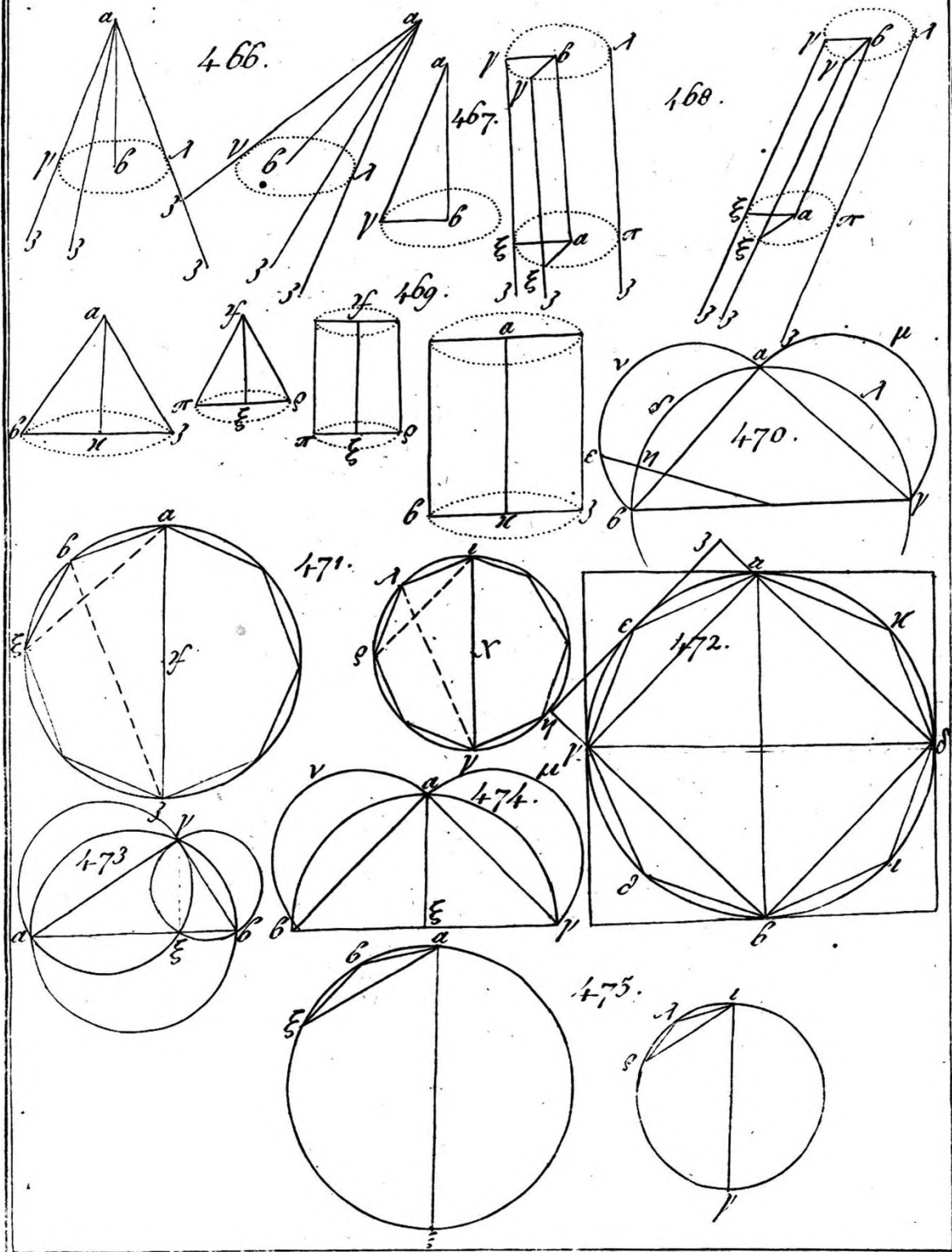


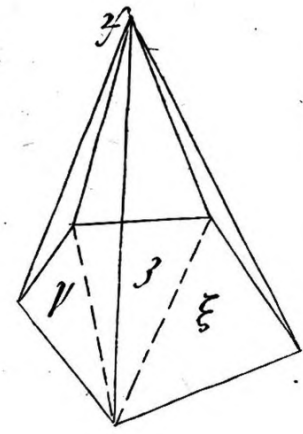
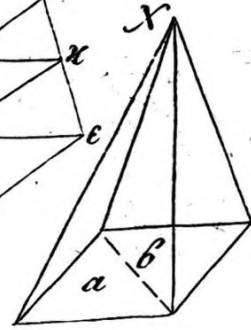
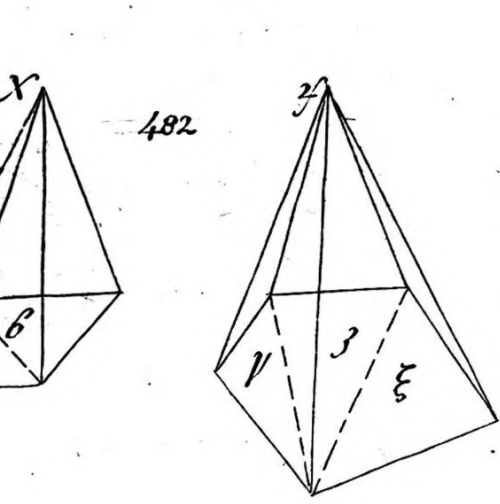
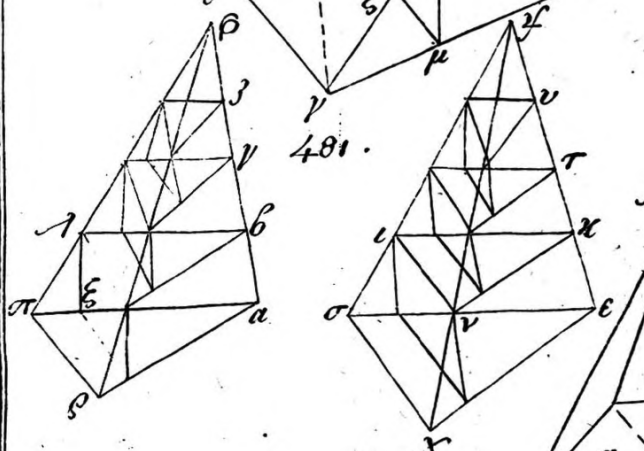
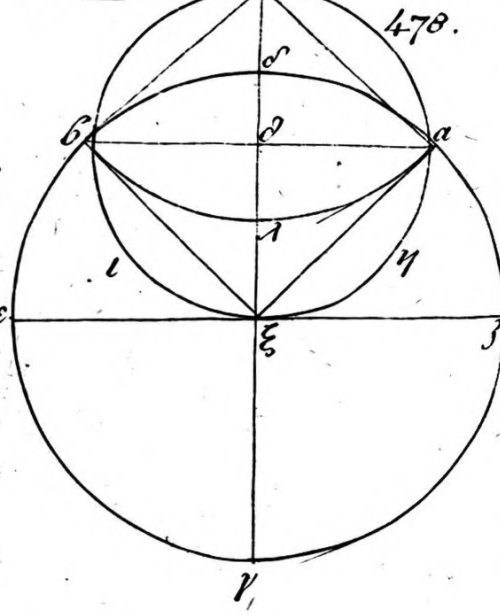
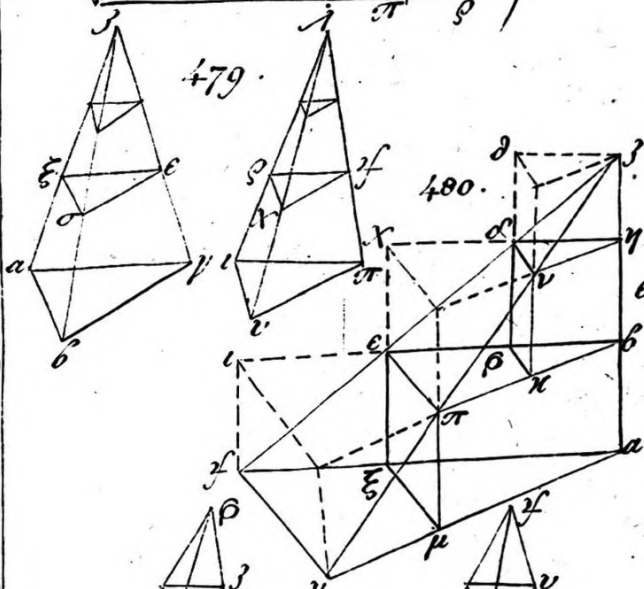
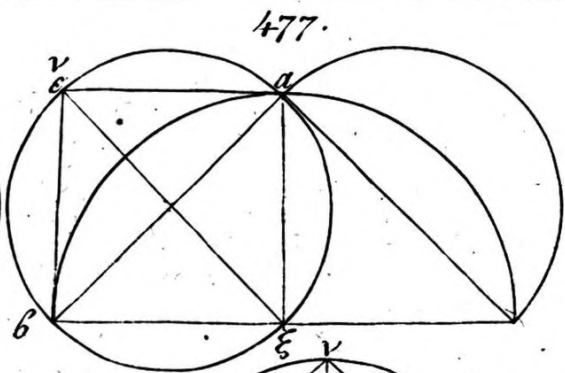
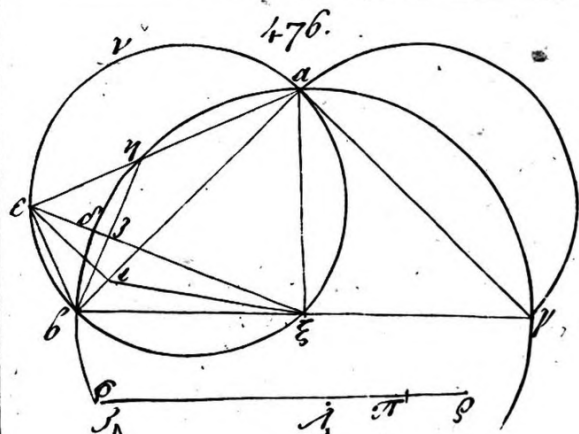


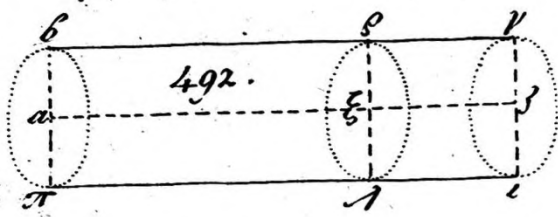
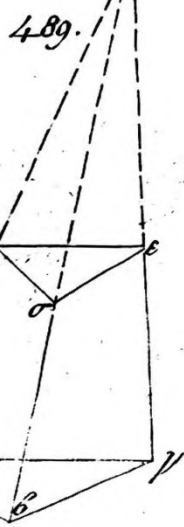
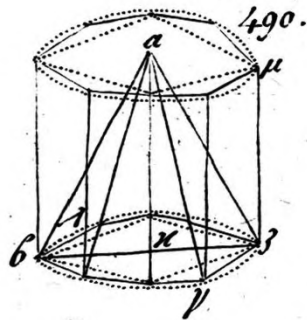
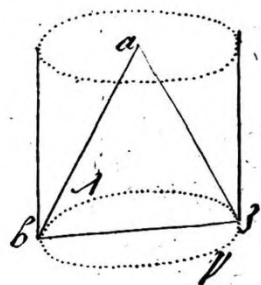
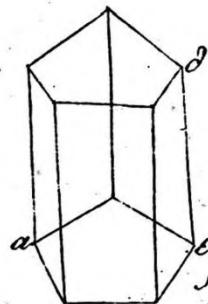
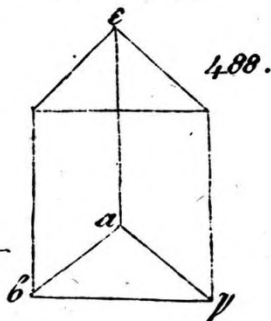
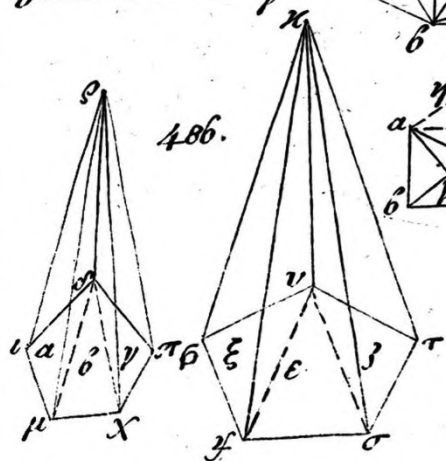
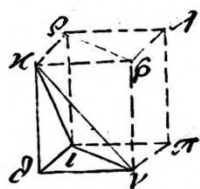
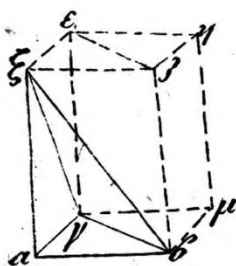
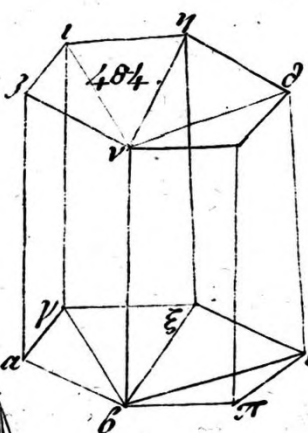
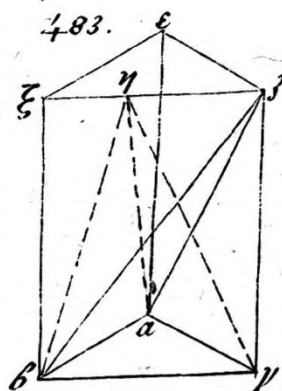


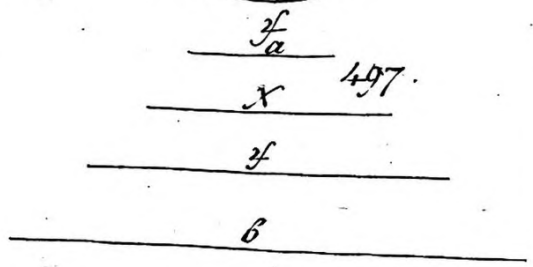
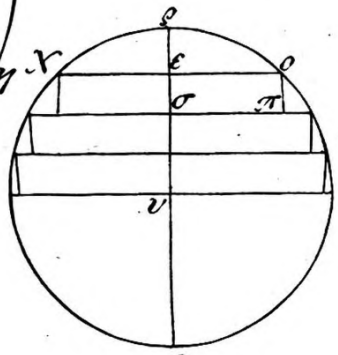
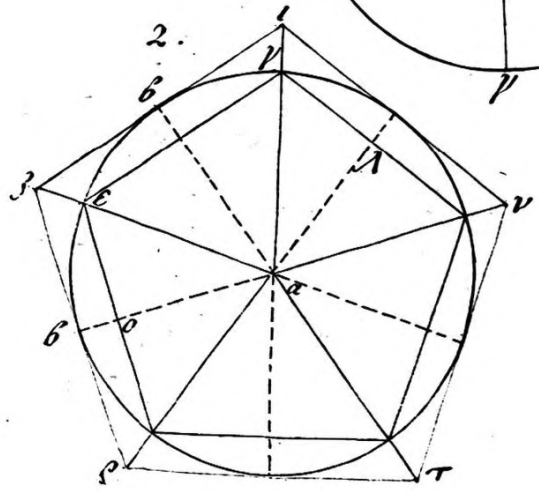
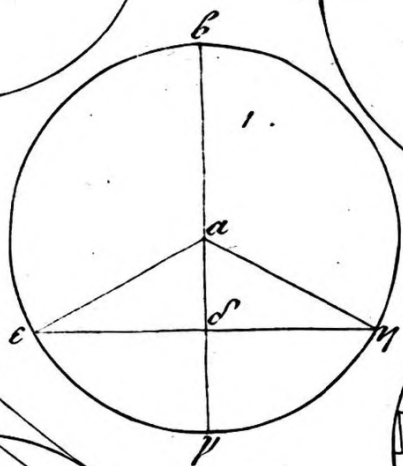
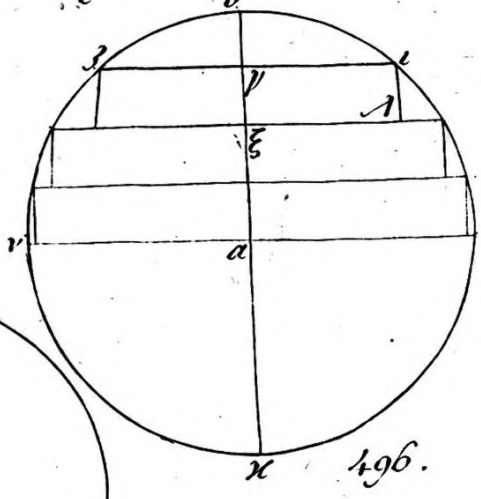
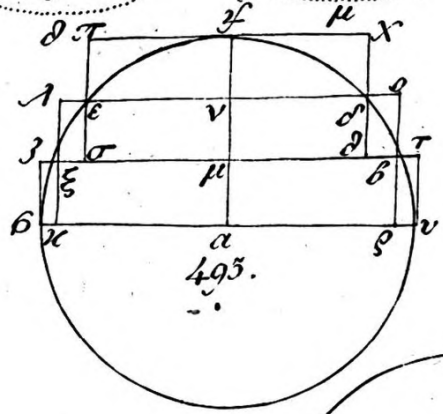
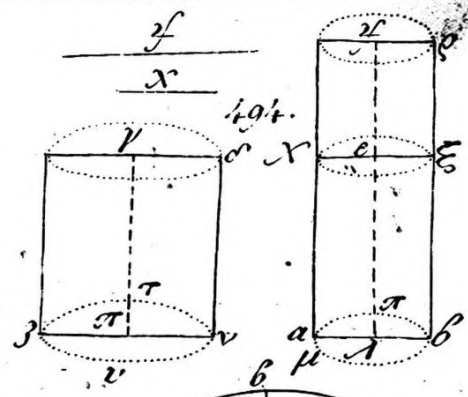
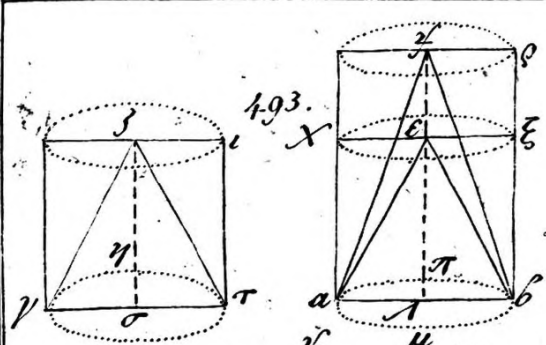
460

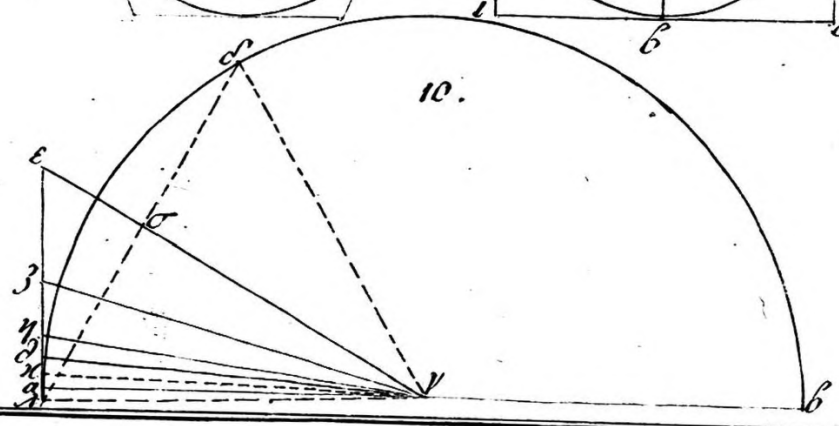
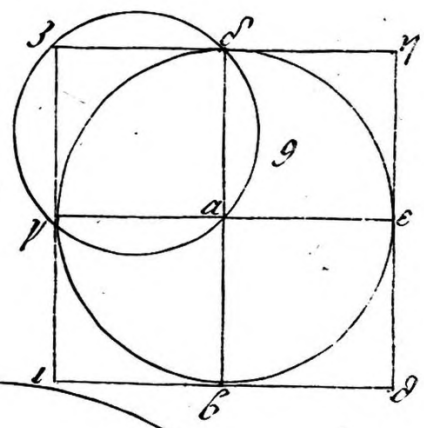
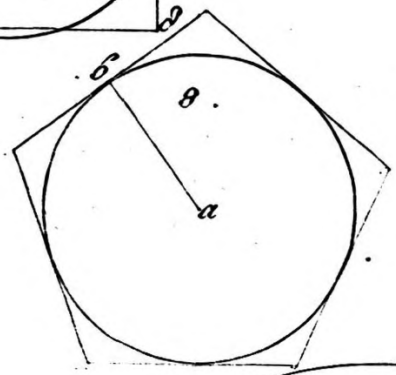
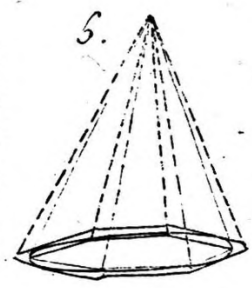
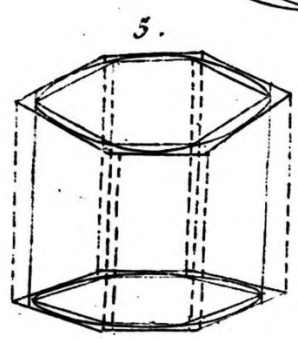
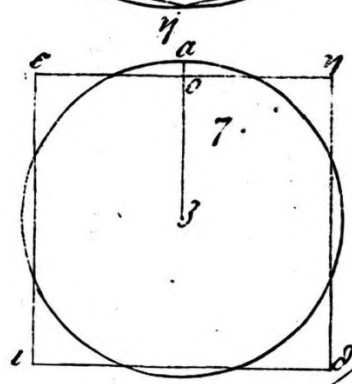
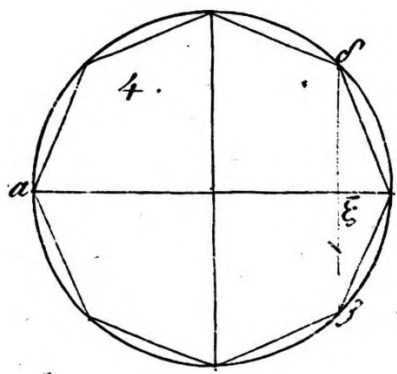
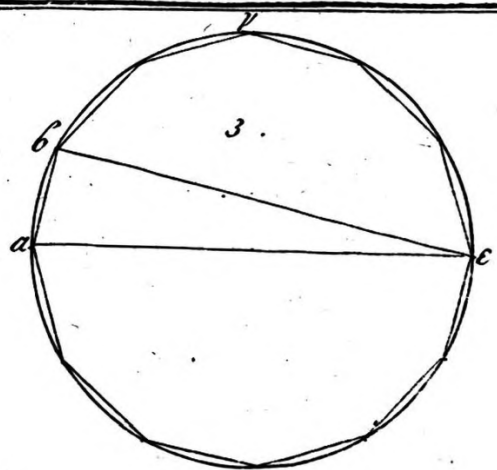


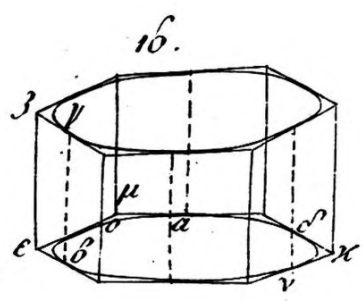
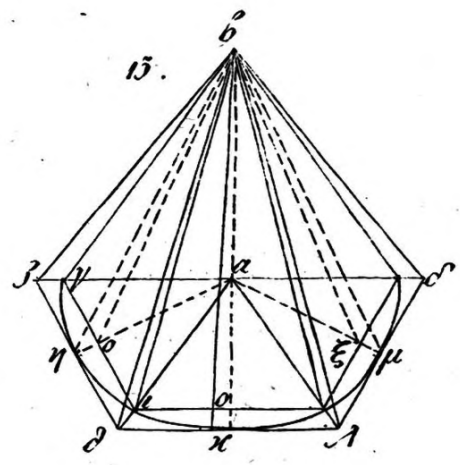
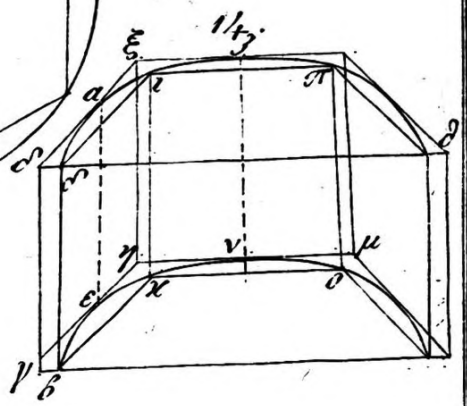
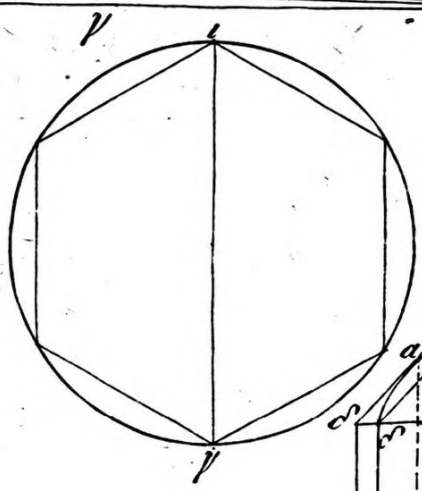
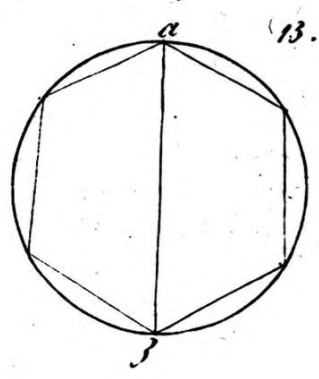
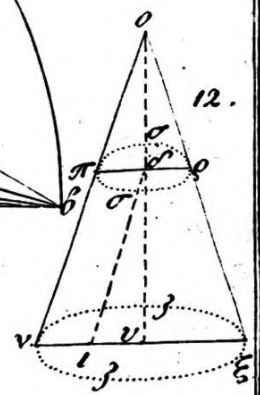
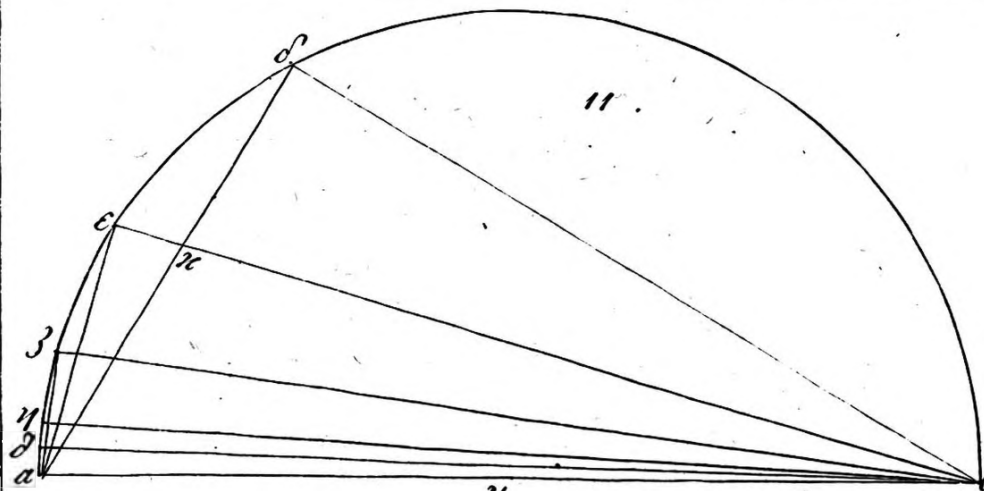




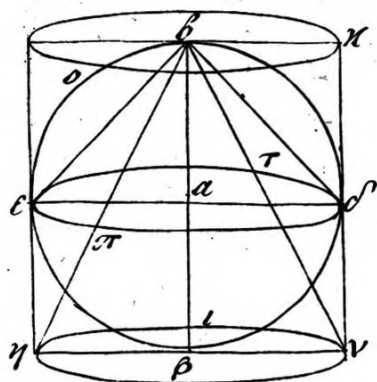




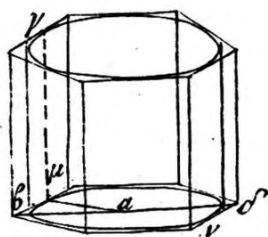
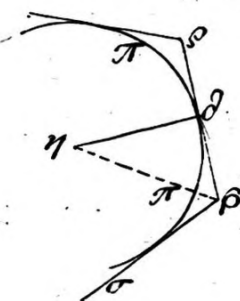




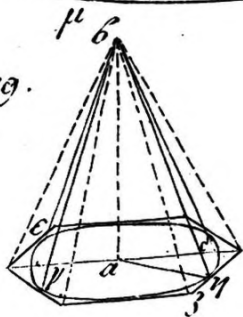
17.



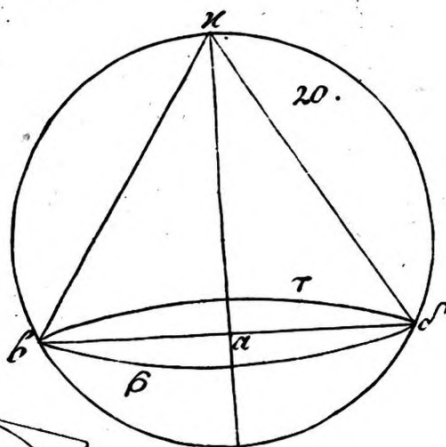
18.



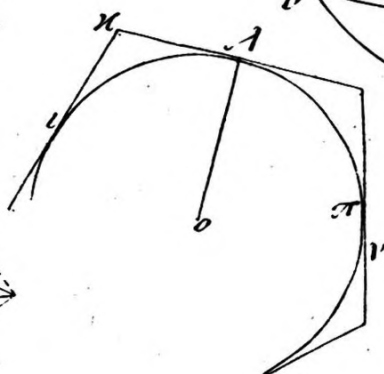
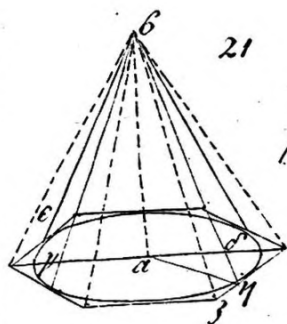
19.



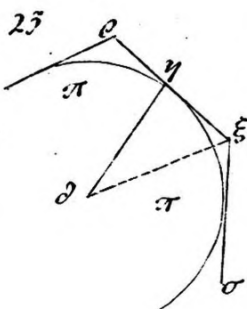
20.



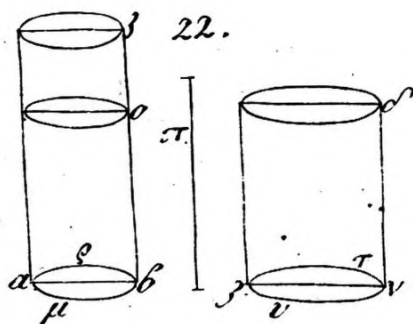
21.



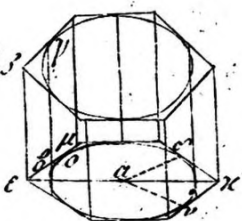
23.



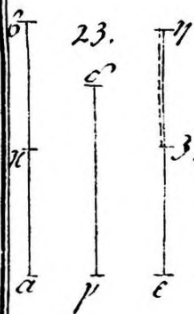
22.



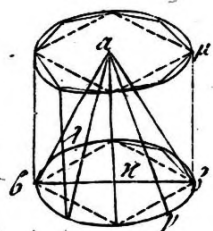
24.



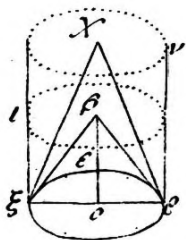
23.



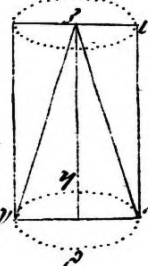
26.



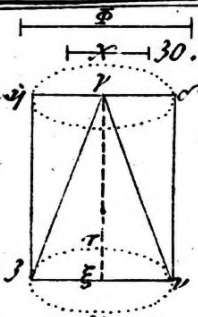
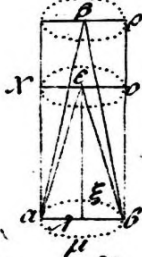
27.



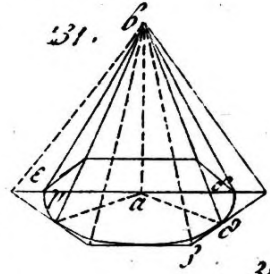
28.



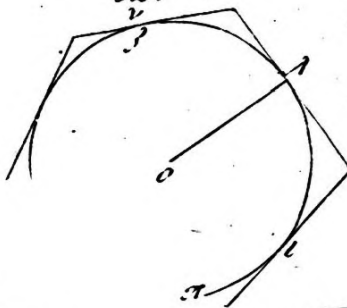
29.



31.



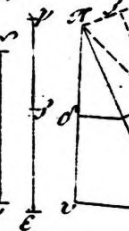
32.



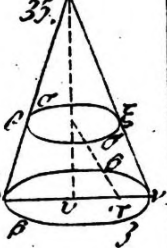
33.



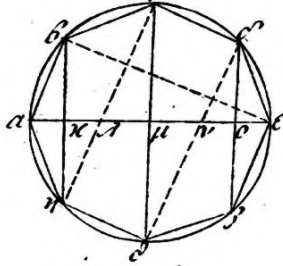
34.



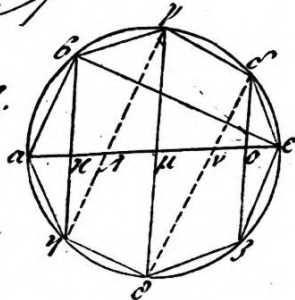
35.



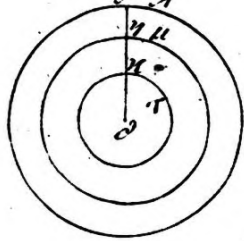
38.



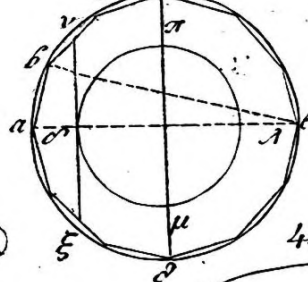
37.



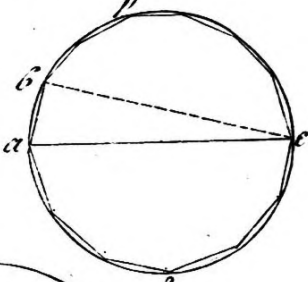
36.



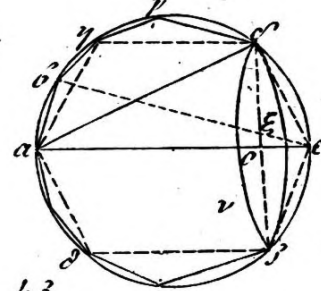
39.



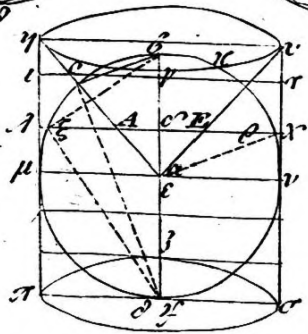
40.



41.



42.



43.

