

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΑ.

ΕΚΤΕΘΕΝΤΑ

ΠΑΡΑ

BENIAMIN ΛΕΣΒΙΟΥ.

*Το βιβλίο του Μ. Λεσβίου
Τ. 70.*



TOMOS Β΄.

ΕΝ ΒΙΕΝΝΗ, ΤΗΣ ΑΥΣΤΡΙΑΣ,
ἐκ τῆς Τυπογραφίας τοῦ Ἰωάννου Σπύριτ.
1820.

Πρὸς τοὺς Φιλαναγνώσας.

Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω, ἐπέγραψε
πρὸ τῶν πυλῶνων τῆς Ἀκαδημίας Πλάτων, ἐμφανίζον
διὰ τούτου τὸ ἀδύνατον τῆς παρεισδύσεως εἰς τὰ μυστήρια
τῆς φύσεως ἄνευ τῆς γνώσεως τῆς γεωμετρίας. Καὶ το-
σοῦτον τὸ πρᾶγμα ἔχεται ἀληθείας, ὥς ἕως οὗ ἡ ἀ-
στρονομία τῶν Ἰνδῶν, τῶν Βαβυλωνίων, τῶν Αἰγυπτίων,
καὶ τῶν Ἑλλήνων προτέκειτο εἰς μόνην τὴν παρατήρησιν
τῆς κινήσεως τῶν οὐρανίων σωμάτων, ἢ γνώσις αὐτῆς
περὶ τῆς κινήσεως, ἀποστάσεως, καὶ μεγέθους τῶν οὐ-
ρανίων σωμάτων ἢ τοσοῦτον παχυτάτη, ὥς ἢ πᾶν
ἄλλο, ἢ γνώσις καὶ ἐπιστήμη. Ἄφ' οὗ ὅμως Ἰππαρχος
ἐξηρμόσε τὴν σφαιρικὴν τριγωνομετρίαν εἰς τὴν ἀστρονο-
μίαν, ὅντος μετουσίωσε τὸ πρᾶγμα μετατρέψας αὐτὸ εἰς
μάθησιν καὶ ἐπιστήμην: οὔτε ἠκολούθησε διαφόρως εἰς
τάς λοιπὰς τῶν ἐπιστημῶν καὶ ἀνθρωπίνων γνώσεων, ὅπου
ὑπῆρξε δυνατόν νὰ εἰσχωρήσῃ ἡ γεωμετρία. Ὡς ἡ χεὶρ,
δὲ ἥς περ ὁ κάτοικος τῆς γῆς συλλαμβάνει τὸν οὐρανόν,
εἶναι οὐδὲν ἄλλο, εἰμὴ ἡ γεωμετρία, καὶ τούτου ἕνεκεν
ὡς φαίνεται καὶ Πλάτων ὠνόμασε τὸν Θεὸν γεωμέτην:

ὄνομα καταλλεστότατον εἰς τὸν οἰκοδόμου ταύτης τῆς οἰκοδομῆς!

Τὸ μέγιστον ὅμως τῆς γεωμετρίας εἶναι, ὅτι ὅχι μόνον ὑποτάσσει εἰς τὸν ἀνθρώπου τὰ οὐράνια καὶ τὰ ἐπὶ γῆς σώματα, ἀλλ' εἶναι καὶ τὸ μόνον μέσον πρὸς ἀγωγὴν καὶ παιδείαν τῆς νεολαίας: ὃ εἰς τοῦ ἀνθρώπου γένους. Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἡ γεωμετρία θεὸν εἶναι ἄλλο τι, εἰμὴ σειράτις συλλογισμῶν, καὶ οὔτε συνάγει ποτὲ ἀνευ δεδομένων, οὔτε βαίνει ποτὲ ἐξ ἀγνώστων εἰς ἄγνωστα, τούτου ἕνεκεν εἰτίας ὁ παῖς ἑαυτὸν ἐκ νεαρᾶς ἡλικίας νὰ συλλογίζηται, καὶ νὰ μὴ δέχεται ὡς ἀληθὲς τὸ μὴ προκύπτον ἐξ ἐγνωσμένων προτάσεων, δυσκολωτέρως τε ἤθελεν ἀπατᾶται εἰς τοῦτον τὸν βίον ὑπὸ τῶν ψευδῶν, καὶ εὐκολωτέρως ἤθελεν ἐκπληροῦ τοὺς σκοποὺς αὐτοῦ. Ἐπειτα ἐπειδὴ ἡ ἀγωγή καὶ παιδεία εἶναι τῶν ὧν οὐκ ἀνευ εἰς τοὺς παῖδας, τῆς γεωμετρίας ἀφαιρεθείσης, ὅποιον ἄλλο ἤθελεν εἶναι εἰς αὐτοὺς τὸ καταλειπόμενον μάθημα; Καὶ αἱ μέγισται βλαστημίαι ἐν τῷ περὶ φύσεως ἐξηλθον καὶ ἐξέρχονται ἄει ποτε ἐκ σώματος μὴ μαθηματικῶν, ὡς παρὰ τῶν Ἐπικουρείων τὸ, ὃ Ἥλιος ἐστὶ ποδῖατος καὶ τὰ λοιπὰ!

Ἡ γεωμετρία λοιπὸν ἔλαβε τὴν ἑαυτῆς γένεσιν ομοῦ μετὰ τὴν διάνοιαν τῶν ἀνθρώπων καὶ τέχνας. Καθότι οὐτοῦν τῶν ἀνθρώπων πολλὰν ἐπὶ τῆς γῆς, καὶ ἐνός τοῦ ἐδάφους αὐτῆς, ἀνάγκη ἦν εἰς πᾶσαν πολιτικὴν κοινωνίαν οἱ ἄνθρωποι νὰ διαμεῖναι καὶ νὰ μετρῶσι τὰς ἑαυτῶν γαίας, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἔργον τῆς γεωμετρίας. Συμφωνοῦσιν ὅμως αἱ συγγραφεῖς ὅτι ἡ Αἴγυπτος ὑπῆρξεν ἡ κοι-

τις τῆς γεωμετρίας καὶ τῶν ἀνθρωπίνων γνώσεων (α),
 ἢ ὁρθέτερον εἰπεῖν εἶναι ὁ μόνος τόπος εἰς ἡμᾶς γνωστός,
 ἔνθα φαίνονται ὅτι ἐγεωργήθησαν αἱ ἐπισῆμαι ἀρχαιο-
 τέτως. Καθότι κατὰ τὸν Ἡρώδοτον (β) καὶ Σέξοστρις
 ἐδιαίρεσε τὴν γῆν τῆς Αἰγύπτου εἰς ἅπαντας τοὺς Αἰγυ-
 πτίους διὰ τὴν συμβουλὴν τοῦ ὑπουργοῦ αὐτοῦ Θωτῆ ἢ
 Οὔσιριδος, παρατχὼν ἐκάστῳ ἕτον μέρος ἐπὶ συμφωνίᾳ
 δασμοῦ εἰς ἕκαστον ἕτος. Ἄν λοιπὸν ἡ μερίς τις τοῦτων
 ἀπετέμενετο ὑπὸ τοῦ ποταμοῦ, τούτου ἐρχομένου καὶ ἀ-
 ναγγέλοντος τὸ πρᾶγμα πρὸς τὸν βασιλέα, ὁ βασιλεὺς
 ζέλλων κατεμέτρει τὸν ἀγρὸν, ὥςτε οὗτος καὶ δασμοφο-
 ρῆται ἀναλόγως μὲ τὸ κατάλοιπον χωρίον, ἐξ οὗ, κατὰ
 τὴν δόξαν τοῦ συγγραφέως, ἐγεννήθη ἡ γεωμετρία, καὶ
 ἐντεῦθεν ἐπέρασεν εἰς τὴν Ἑλλάδα. Ἄλλ' ἐπειδὴ, κα-
 τὰ τοὺς κρείττους τῶν χρονολόγων, ὁ Σέξοστρις εἰ.α.β. ὁ
 αὐτὸς μὲ τὸν Σεσακ τὸν πολεμήσαντα μὲ τὸν Ῥοβοὰμ
 υἱὸν τοῦ Σολομῶντος, ἀκέλουθου εἶναι ὅτι οὗτος ὑπῆρξε
 πρὸ χιλιῶν ἑτῶν πρὶν χριστοῦ. Ὡς οὖν ὁ Ὅσιρις, ὅστις καὶ
 Ἑρμῆς τρισμέγιστος ὠνομάζετο, φαίνεται ὅτι ὑπῆρξεν ὁ
 εὑρετής τῆς γεωμετρίας, ἀριθμητικῆς, καὶ λογαρια-
 στικῆς· ἄλλοι δ' ὁμῶς ἀναφέρουσιν εἰς ἄλλους τὸ πρᾶγμα.

Ἐκ τῆς Αἰγύπτου λοιπὸν ἐπέρασεν ἡ γεωμετρία εἰς
 τὴν Ἑλλάδα, καὶ ἡ ταύτης μετακόμισις ἐγένετο ὑπὸ

(α) Περὶ Αἰγύπτου αἱ μαθηματικαὶ πρῶτον τέχναι συνίστησαν.
 Ἐκτὶ γὰρ ἤρθη σχολάζειν τὸ τῶν Ἱερῶν ἔθνος. Ἀριστ.
 Μεταφ. μετ' τὸ Α'. κριτ. α'.

(β) Βιβ. β'.

Θαλῇ τοῦ Μιλησίου, ἔστις ἡν — περί 641, καί μετ' αὐτόν ὑπ' ἄλλων (α). Οὗτος ὅμως δὲν ἠρκέσθη νὰ διδάξῃ εἰς τοὺς Ἕλληνας, ὅσα μόνον παρὰ τῶν Αἰγυπτίων ἔμαθεν, ἀλλ' ἐπρόσθετεν καὶ ἄλλας ὅχι ὀλίγας καὶ οὐσιώδεις ἐφευρέσεις εἰς αὐτήν, πλουτίσας τὴν ἐπιστήμην διὰ διαφόρων προτάσεων ·· πρὸς δὲ τοῖς καταμέτρησε καὶ τὸ ὕψος τῶν ἐν Αἰγύπτῳ Πυραμίδων διὰ τοῦ μεγέθους τῆς σκιᾶς αὐτῶν : μέθοδος ἔχουσα διὰ βάσιν τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ἢ ἀναλογίαν τῶν εὐθειῶν. Ἐρχεται δὲ μετ' αὐτόν Πυθαγόρας, ὃν — περί 590 ἔτη, καὶ γεωργεῖ εἰς τὴν Ἑλλάδα ὅχι μὲ ὀλιγώτερον καρπὸν τὴν γεωμετρίαν, γενόμενος ἐφευρετῆς πολλῶν καὶ διαφόρων προτάσεων, καὶ μάλιστα τῆς μζ. : ὃ ἐστὶν ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτείνουσας παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὰ τετράγωνα τῶν σκελῶν, πρότασις ὠραιότητα καὶ βάσις τῶν χορδῶν καὶ ἡμιτόνων, ἐνθα ἐχάρη τοσούτον, ὥστε ὑπὸ τῆς χαρᾶς μεθυσθεὶς ἐθυσίασεν ἑκατόν βόας εἰς τὰς μούσας διὰ τὴν τοιαύτην ἐμπνευσιν. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ὁ Πυθαγόρας ἐδόξαζε τὴν μετεμψύχωσιν, πολλοὶ σοχίζονται τὴν τῶν βοῶν θυσίαν ἀπίθανον. Εἴτε ὅμως ἐθυσίασε βόας, εἴτε μὴ, εἶναι ὀληθέςατον ὅτις ἡ τοῦ Πυθαγόρου ἡδονὴ ὑπῆρξε μείζων πάσης γῆϊνης ἡδονῆς. Μετὰ δὲ τοῦ Θαλῆν καὶ Πυθαγόραν τὰ σχολεῖα καὶ οἱ φιλόσοφοι, οἱ παρ' αὐτῶν μορφωθέντες, ἀφισρω-

(α) Μαρτυροῦνται καὶ τῶν Ἑλλήνων οἱ σεφώτατοι Σίμων, Θαλῆς, Πλάτων, Εὐδόξος, Πυθαγόρας (ὡς δ' ἴστωι φασὶ καὶ Ἀριστοτέλης), εἰς Αἰγύπτου ἀφικόμενοι καὶ συγγνωμένοι τοῖς πρεσβυτέροις, Πλεοντ. περί Ἰσίδ. καὶ Ὀσίρ.

Θύντες ὅλαις δυνάμεσιν εἰς τὴν καλλιέργειαν τῆς γεωμετρίας, μετεμόρφωσαν ἐντὸς ὀλίγου τὸ πρόσωπον τῆς Ἑλλάδος. Καὶ ὁ μὲν Πλάτων, ὅστις ἦν — περὶ 380 ἔτη, ἐπαινεῖ τὸν Ἀναξαγόραν ἕνεκα τῆς μεγάλης αὐτοῦ γνώσεως καὶ ἐπικύψεως ἐπὶ τῆς γεωμετρίας, ἅπαντες ὁμῶς οἱ νεώτεροι θαυμάζουσι τὸν Πλάτωνα τῆς μεγαλοφυΐας αὐτοῦ ἕνεκεν περὶ τῆς γεωμετρίας, ὁμολογοῦντες αὐτὸν, ἐκτός τῶν λοιπῶν, καὶ πατέρα τῶν κωνικῶν τομῶν, ὡς περ ἐτελειοποίησεν Ἀπολλώνιος καὶ μετ' αὐτὸν Ἀρχιμήδης, ἀγαθὸν τὸ πρᾶγμα εἰς τὸν Κελοφῶνα.

Μετὰ δὲ περὶ 50 ἔτη μετὰ τὸν Πλάτωνα ἀνεφάνη Εὐκλείδης. Δύο ὁμῶς ὑπῆρξαν οἱ Εὐκλείδαι, ὁ εἰς λέγω Μεγαρεὺς σοφιστὴς καὶ μαθητὴς τοῦ Σωκράτους, ὦν εἰς τὰ — 393 ἔτη, ὁ δὲ δεύτερος γεωμέτρης μετὰ ἑναὶ αἰῶνα μεταγενέστερος τούτου εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν. Καί τινες μὲν τῶν συγγραφέων θέλουσι τούτου ἐκ Τύρου ἢ τῶν Ναυσικράτους τινὸς κατοικοῦ τῆς Δαρμασκῆς, πλὴν τοῦτο βέβαια εἶναι πλάσμα, καὶ αὐτὸς ἦν Ἕλλην, σπουδᾶς εἰς τὰς Ἀθήνας ὑπὸ τῶν πλατωνικῶν, εἴτα ὑπὸ τῆς εὐπορίας Πτολεμαίου τοῦ Φιλαδέλφου (ἡοῦ τοῦ Λάγου θῦμελιωτοῦ τῆς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ ἀκαδημίας) ἐλκισθεὶς ἦλθεν, ἀπὸ τῆς Ἑλλάδος εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν. Ὁ Πάππος (α) λοιπὸν ἰσορεῖ αὐτὸν γλυκύν, μέτριον, ἔχοντα κλίσειν καὶ ἀγάπην πρὸς πάντα τὸν ὄντα ἱκανόν εἰς τὰ μαθηματικά, ὅτι ἀπέφευγεν ὅλαις δυνάμεσι τὸ νὰ φανῇ ἐναντίος τῶν συγγραμμάτων τῶν μαθηματικῶν, ἢ νὰ ἀφαιρέ-

(α) Συλλ. μαθημ. βιβ. ζ'. προοίμ.

ση πως τὸν ἀνῆκουτα τούτοις εἴφανον. Οὗτος λοιπὸν ἔλαβε τὴν δόξαν τοῦ νὰ συναθροίσῃ τὰς προτάσεις τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας, οὕτως τότε διεσπαρμμένας καὶ μεμονωμένας ἐν τοῖς συγγράμμασι τῶν ἰδίων ἐφευρετῶν, εὖθ' αὖ προσεθέμενος καὶ ἰδίου κεφάλαιον, συνέθετο ταῦτα εἰς ἀναχειρας στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας, σύνταγμα περίφημον ἐξ αὐτῆς τῆς γενέσεως αὐτοῦ μέχρι τῆς συντελείας τοῦ αἰῶνος. Ἐκδοτὶ Εὐκλείδους διέταξε καὶ συνέδεσεν αὐτὰ μετὰ τοιαύτην ἀλύτου γεωμετρικῆς αὐστηρότητος, ὥστε νὰ ἦναι μηδεμία πρότασις, ἥτις νὰ μὴ ἔχῃ ἀναγκαίαν ἀναφορὰν μετὰ τῆς πρὸ αὐτῆς, ἢ μετὰ τῆς ἐξῆς προτάσεως. Καὶ ματαίως πολλοὶ τῶν νεωτέρων γεωμετρῶν δυσσαρεζοῦμενοι περὶ τῆς τάξεως αὐτῶν, ἐζήτησαν μεταμόρφωσιν τινα εἰς αὐτάς. Ἐκδοτὶ ἡ ἀνίσχυρος αὐτῶν ἀπόπειρα ἀπέδωκε πραγματικῶς τὸ ἄδύνατον τῆς ἀποκαταστάσεως νέας ἀλύτου ἐπίσης βεβαίας καὶ ἐδραίας, ὅσον τοῦ παλαιοῦ γεωμέτρου. Καὶ ἐξ εὐληκτικῆς Οὐόλφιος ἐμολογεῖ (α) ὅτι ἐζήτησε, πλὴν εἰς μάτην, νὰ διατάξῃ τὰς γεωμετρικὰς ἀληθείας εἰς μεθοδικωτέραν τάξιν, ὑποπετών εἰς ὑποθέσεις ἀναποδείκτων, καὶ χάνωνσιν τῆς σεμνότητος τῶν ἀποδείξεων. Ἡ μέθοδος λοιπὸν τοῦ Εὐκλείδου εἶναι συνθετικὴ, καὶ σύνθεσις εἶναι τὸ νὰ ζητῇ τις τὰς ιδιότητας ἐνὸς ἐπιπέδου ἢ στερεοῦ σχήματος ἐκ τῶν προκυπτουμένων γνώσεων ἐξ αὐτῆς τῆς φύσεως ἢ γενέσεως αὐτοῦ, καὶ ὥς διὰ μὲν ἀλύτου τῶν ἀναφορῶν καὶ ἔγνωσμένων ἢ ἀποδεδειγμένων ἀρχῶν νὰ φθάνῃ εἰς τὴν

(α) Στοιχ. μαθ. τομ. ε', κεφ. γ'.

ζητουμένην πρότασιν. Αὕτη λοιπὸν ἡ μέθοδος ἔχει τὸ προτέρημα τοῦ νὰ προχωρήτις διὰ τοῦ φωτὸς ἀνὰ χειρας, καὶ νὰ εὕρισκῃ θεωρήματα ἀδύνατα εἰς εὕρεσιν διὰ πάσης ἄλλης μεθόδου, ἢ καὶ ἤθελον εὕρεθῇ ὑπὸ μορφῆς μὴ ὠραίας. Εἶναι ὅμως ἀληθεῖς ὅτι ἡ ἀναλύσις ἀποδεικνύει τὸ πρᾶγμα ἀμυχθί, πλην ἐπειδὴ τὰ στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας εἶναι μᾶλλον πρὸς στοιχείωσιν τῆς νοηλαίας: τουτέστι πρὸς ἐκτύλιξιν τοῦ νοῦς αὐτῶν, καὶ ὅχι μόνον πρὸς ἀπόδειξιν, ὅπερ ἅπτεσι τῆς ἀναλύσεως, μένει οὐδεὶς λόγος, οἱ οὖν περὶ δὲν πρέπει νὰ ἔχωσι τὰ δευτερεῖα ἢ καὶ τριτεῖα τὰ διὰ τῆς ἀναλύσεως στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας. Καὶ πρὸς πληρορορίαν τοῦ λεγομένου φθάνει τις νὰ δεῖλθῃ τὰ στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου καὶ τὰς γεωμετρίας τῶν νέων ἀλγεβραῖς, καὶ ὁψεται ἰδίους ὁφθαλμοῖς, πόσον ἐκάτερον τούτων διαφέρει.

Δὲν ἔλειψεν ὅμως, ὡς εἶπεν ἡ ἀνθρωπίνη φύσις, τινὲς τῶν γεωμετρῶν νὰ καθάψωνται τοῦ Εὐκλείδου περὶ τοῦ ἡ'. ὁρίσμου τοῦ πρώτου βιβλίου: τουτέστι τοῦ, »παράλληλοι λέγονται οὗο εὐθεῖαι αἱ ἀπέχονται ἐξίτου ἀλλήλων, ὡς: ἂν ἐκβληθῶσιν ἐφ' ἐκάτερα ἐπ' ἄπειρον, καὶ συμπεσούντων ποτὲ « ὅτι δηλονότι δεῖται ἀποδείξεως. Πλην ἔπρεπεν οὗτοι νὰ δώσωσιν ἄλλον ὁρισμὸν τῶν παραλλήλων σαφέστερον τοῖτου, καὶ τότε νὰ κατηγορήσωσι τούτου: ἂν ὅμως οὗτος ὁ ὁρισμὸς τεθῇ μετὰ τὴν κς'. πρότασιν τοῦ αὐτοῦ βιβλίου, θελεῖ μεταβληθῇ, εἰς ἀξίωμα. Τὸ μέγα ὅμως ἐλάττωμα, ὅπερ οἱ γεωμέτραι ἀποδιδράσιν εἰς τὸν Εὐκλείδην εἶναι ὁ ε'. ὁρισμὸς τοῦ ε'. βιβλίου: τουτέστιν, ἢ ἐν τῷ αὐτῷ μεγίθει λέγονται εἶναι

πρώτου πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτου πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκεις πολλαπλάσια, τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τεταρτου ἰσάκεις πολλαπλασίων κατ' ὅποιον πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον, ἢ ἅμα ἐλλείπη, ἢ ἅμα ἴτα, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ληφθέντα κατάλληλα: ὃ ἐστὶν ὅτι ταυτολογεῖ. Ἄλλ' — ὅταν οἱ νεώτεροι λέγωσιν, ἂν τὰ δύο ἐπόμενα ἢ δύο ἡγούμενα μιᾷ ἀναλογίας πολλαπλασιασθῶσι δι' ἐνὸς ἀριθμοῦ, τὰ γεγόμενα ἔσονται ἐπίσης ἀνάλογα, τούτο τί διαφέρει τοῦ, οὗ περ λέγει ὁ Εὐκλείδης; Ἐπειτα ἐπειδὴ εἶναι πολλαὶ ποσότητες εἰς τὴν γεωμετρίαν, ὧν περ τὰ πολλαπλάσια ἀδυνατοῦσι νὰ ἐξισωθῶσι, οἱ ὃ καὶ ἀδύνατοι εἰς ἀναλογίαν, καὶ τοιαῦτα εἶναι ἅπαντα αἱ ἀόρητοι, ὥς περ ὁ γεωμέτρης ἔπρεπε νὰ περιλάβῃ εἰς τὸν ὅρισμόν, ἀλλέως ὁ ὅρισμός ἦθελεν εἶναι ἐλλιπὴς περιέχων μόνον τὰς λογικὰς ποσότητας, βιασθεὶς ὁ Εὐκλείδης δίδωκε τὸν τοιοῦτον ὅρισμόν.

Ἄλλ' — πόσα παραπτώματα τῷ ὄντι πραγματικᾷ εἶν ἔχουσιν οὗτοι οἱ νεώτεροι γεωμέτραι; Κύκλος, λέγουσιν οὗτοι, εἶναι σχῆμα περατούμενον ὑπὸ μιᾷ καμπύλης, ἥς περ ἅπαντα τὰ σημεῖα ἀπέχουσιν ἐπίσης ἀφ' ἐνὸς σημείου, ὅπερ κέντρον ὠνόμασαι. ὅρισμός ἡμαρτημένος, εἰότι ἔπρεπε νὰ προσεθῇ καὶ τὸ, σχῆμα ἐπίπεδον. Ἐκαστότε αὖ ἐγὼ γράψω διὰ τινος διαβήτου ἐπὶ κοίλης ἢ κυρτῆς ἐπιφανείας σχῆμα κυκλικόν, τούτο δὲν θίλει εἶναι κύκλος.

Οὐόλφρος λέγει (α) ἢ ἂν διὰ δύο εὐθειῶν ὁμοῦ μειζέων μιᾷ τρίτης, γράψῃ τις ἐκ τῶν περάτων τῆς τρί-

(α) Elem. math. univers. 1740.

της δύο κύκλους ὡς διὰ κέντρων, οὗτοι οἱ κύκλοι τμη-
 θήσονται ὑπ' ἀλλήλων « ὅπερ εἶναι ψευδές, ἂν δὲν προ-
 ςεθῇ καὶ τὸ, ἂν ἡ διαφορὰ τούτων τῶν δύο εὐθειῶν δὲν
 ἦναι ἐλάσσων τῆς τρίτης.

Ἐπίσης ἀμαρτάνει οὗτος ὁ γεωμέτρης λέγων ἡνὰ
 γράψῃ τις τρίγωνον ἐπί τινος δοθείτης βάσεως διὰ δύο
 δοθεισῶν εὐθειῶν. « Καθότι ἔπρεπεν, ὡς ὁ Εὐκλείδης,
 νὰ προσθήσῃ, ἀνάγκη δ' ἔστιν, ἵνα αὐταὶ αἱ δύο εὐθεῖαι
 ὥσι μείζονες τῆς τρίτης.

Παράλληλοι, λέγουσιν οἱ νεώτεροι τῶν γεωμετρῶν,
 εἶναι εὐθεῖαι ἀπέχουσαι ἐπίσης καθ' ὅλα τὰ σημεῖα.
 Ἀλλὰ — τί σημαίνει ἐνταῦθα ἡ ἴση διάστασις; ἴσως νὰ
 ὑψώσῃ τις ἐπὶ τὴν μίαν εὐθείας τινὰς, εἰς τὴν ἐτέραν
 περατουμένης. Πλὴν ἔπρεπε πρῶτον νὰ ἀποδείχθῃ τοῦτο
 δυνατόν: τουτέστιν ὅτι ὑψωθείσῶν πρὸς ὁρθὰς ἐπὶ μίᾳς
 τριῶν ἴσων εὐθειῶν, ἂν ἀχθῇ ἄλλη τις διὰ τῶν κορυφῶν
 τῶν δύο, θίλει διαπεράσει καὶ διὰ τῆς τρίτης, ἥ ὅτι τὰ
 τρία σημεῖα κεῖνται κατ' εὐθείαν γραμμὴν. Πλὴν τὸ νὰ
 ἀποδειχθῇ τοῦτο ἔχει χρεῖαν πλήθους προτάσεων, καὶ
 ταῦτα τριγώνων, ἅπερ οἱ πλείονες τούτων τῶν γεωμε-
 τρῶν τάττουσι μετὰ τὴν διδασκαλίαν τῶν εὐθειῶν, πρὸς
 δὲ τούτοις ἔπρεπε νὰ προσεθῇ καὶ ὅτι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐ-
 τοῦ ἐπιπέδου, ἐν ᾧ οὗτοι νομίζουσιν ἡρῆ ἄωρον τὴν γνῶ-
 σιν τῶν ἐπιπέδων.

Ἄν τέσσαρα μεγέθη, λέγουσιν οἱ νεώτεροι τῶν
 γεωμετρῶν, ἦναι ἀνάλογα, τὸ γινόμενον τὸ ἐκ τῶν ἁ-
 κρῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐκ τῶν μέσων. Ἐξω. Ἀλλ' — ὅτ

ποῖον εἶναι τὸ γινόμενον δύο ἐπιφανειῶν ἢ δύο σφαιρῶν;
Οὐδείς εἶπε τι.

Ἀπαξάπαντες οἱ γεωμέτραι τὴν σήμερον ἀποδει-
κνύουσι τὰς ιδιότητας τῶν κύκλων, τῶν κυλίνδρων, τῶν
κώων, τῶν σφαιρῶν, ὑποτιθέμενοι ὅτι διαιροῦνται εἰς
ἀπείρως σμικρὰ, ὅτι εἶναι εὐθεῖαι αἱ καμπύλαι, ὅτι σύγ-
κειται τὰ κυρτὰ σφαιρὰ ἐκ λεπίδων ἀπείρως σμικρῶν. Ἀλ-
λὰ — τίς οὐχ ὁρᾷ ὅτι πολυειδῶς οὗτοι ἀμαρτάνουσι; Κα-
θότι α'. ἀπᾶται αὗται αἱ ἰδέαι εἶναι σκιαραί, ἐν ᾗ ἡ γεω-
μετρία ἀποπέφυκε τοῦ σκοτούς ·· β'. ὅτι αἱ λέξεις ἀπει-
ροσέν, πολύγωνον ἀπείρων πλευρῶν, κξ', εἶναι τρόπος
τοῦ ὁμιλεῖν σύντομος, οὐδείς ὁμῶς ἔμαθε νὰ ὁμιλῇ ποτε
συνεπτυγμένως, χωρὶς πρῶτον νὰ μάθῃ νὰ ὁμιλῇ ἀνε-
πτυγμένως.

Εὐκλείδης ὁμῶς ἐκτὸς τῶν γεωμετρικῶν σοιχείων
συνέγραψε καὶ ἄλλα πολλὰ συγγράμματα. Καὶ πρῶτον
μὲν ἐν σύγγραμμα περὶ διδόμενων : τούτέστιν ἐπακο-
λουθήτην τῶν σοιχείων αὐτοῦ καὶ πρῶτον βῆμα πρὸς τὴν
ὑψηλὴν γεωμετρίαν. Διδόμενον δ' εἰς τὴν γεωμετρίαν
λέγεται, ὅπερ εἶναι διωρισμένον ἐκ τῶν ὑποθέσεων τοῦ
προβλήματος καὶ ἐν ταύτῃ ἐγνωσμένον, καὶ τοιοῦτον εἶ-
ναι τὸ χωρίον ἐνὸς τριγώνου, ὅντων ἐγνωσμένων τῆς τε
βάσεως καὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ.

Προσέτι, κατὰ τὸν Πάππον, συνέγραψε καὶ τέσ-
σαρα βιβλία περὶ κωνικῶν τομῶν, ἅπερ κατέχουσι μέρος
ἄρκετὸν τῶν τεσσάρων πρώτων βιβλίων τοῦ Ἀπολλωνίου.

Πρὸς δὲ τούτοις συνέγραψε καὶ δύο βιβλία, ἅπερ
καὶ ἐχάθησαν, περὶ τόπων κατ' ἐπιφάνειαν : ὃ εἰς περὶ

καμπύλης διττῆς καμπυλότητος, ἢ γεγραμμένης ἐπὶ κυρ-
τῆς ἐπιφανείας διὰ τινος ἐκσυμφώνου κινήσεως, ὡς κυ-
λινδρική δὴλ. σπείρα, ἡμισφαιρική σπείρα, κξ'.

Πλὴν τὰ βαθία, ἂν ἐσώζοντο, συγγράμματα τοῦ
Εὐκλείδου ὑπῆρξαν περὶ πορισμάτων τρία. Καὶ ὁ μὲν
Πάππος (ἐν τῷ προοίμῳ τοῦ ζ'. βιβλίου τῶν μαθηματι-
κῶν συλλογῶν) δίδει ἰδέαν ἀκριβῆ τοῦ πράγματος, πλὴν
διὰ τὴν ἑλλειψιν τῶν σχημάτων διαμύνουσι σκοτεινά.

Πρόκλος ὁμοῦς λέγει ὅτι Εὐκλείδης συνέγραψε καὶ
σύγγραμμα περὶ διαιρετῶν. Καὶ νομίζεται, ὅπερ τὴν σῆ-
μερον καλοῦσι γεωδαισίαν, εἴτε διαιρεσιν τῶν σχη-
μάτων.

Ἐτε Εὐκλείδης συνέγραψε καὶ ἄλλο βιβλίον, ὅπερ
καὶ διέσωσαι, λεγόμενον φαινόμενα: τουτέστι περὶ ἐπι-
τολῆς καὶ ὁύσεως τῶν ἀπλανῶν, ἐνθα οἱ παλαιοὶ ἀστρο-
νόμοι προσέκειντο μεγάλως. Τοῦτο λοιπὸν τὸ βιβλίον εἶ-
ναι οὐσιώδες, ὡς ὃν ἱστορικὸν καὶ ἀποθῆκὴν πλήρη τῶν
γνώσεων, ὥς περ ἡ Ἑλλὰς εἶχε τότε περὶ τῆς ἀστρονο-
μίας. Σημειωτέον δ' ὅτι ἐπειδὴ ἡ λέξις ὀρίζων εὐρί-
σκεται αὐτοῦ, ἐν ᾧ ἐλλείπει ἐκ τοῦ Αὐτολύκου, ἴσταις ἢ
μικρόν τι πρὸ αὐτοῦ, ἢ σχεδὸν σύγχροτος αὐτοῦ, ὁρῶν
ἡθελε συναΐξει τις ὅτι ὁ Εὐκλείδης εἶναι ὁ ἐποματοθέ-
της τούτου.

Εὐρίσκονται δὲ καὶ δύο βιβλία περὶ μουσικῆς φέ-
ροντα τὸ ὄνομα Εὐκλείδου, ἐν ᾧ ὁμοῦς τὰ χειρόγραφα
φέρουσιν ὄνομα Κλεονίδου, ἀλλὰ δίδει τὸ πρᾶγμα ὑπό-
νοιαν, ἂν ἦναι σύγγραμμα ἐνὸς συγγραφέως. Καθότι τὸ

μὲν πρῶτον εἶναι Πυθαγορικόν, τὸ δὲ δεύτερον Ἀριστοξενικόν.

Τέλος πάντων ἀποδίδονται εἰς τὴν Εὐκλείδην καὶ δύο βιβλία περὶ ὀπτικῆς. Ἄλλ' ἐπειδὴ καὶ ταῦτα εἶναι ἀμαρτημάτων πλήρη καὶ ξένα πάσης ἀκριβείας, ἥτις ἦν ὁ χαρακτήρ τοῦ Εὐκλείδου, ὁρθῶς ἤθελε συνάξαι τις ἢ ὅτι εἶναι ὑποβολιμαία, ἢ ὅτι ἐδέχθησαν μεταβολὰς πολλὰς ἐκ ξένης χειρός.

Μετὰ δὲ τὸν Εὐκλείδην ἀνεράνη Ἀπολλώνιος ἐκ Πέργης, ὅστις ἦν — περὶ 250 ἔτη, γεωμέτρης τῆς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ σχολῆς καὶ τὰ πρῶτα φέρων μεταξὺ τῶν γεωμετρῶν. Οὗτος λοιπὸν συνέγραψε σύγγραμμα πληρέστατον περὶ τῶν κωνικῶν τομῶν, ὀνοματοθετηθεῖσιν παρ' αὐτοῦ τῆς ἐλλείψεως, ὑπερβολῆς, καὶ παραβολῆς, ἐνθα ἀπαντᾷ τις ἀπάσας τὰς ιδιότητας αὐτῶν περὶ τῶν ἀξόνων, διαμέτρων, καὶ ἐφαπτομένων. Σχεδὸν δὲ ταυτοχρόνως ἀνέτειλε καὶ ὁ μέγιστος τῶν παλαιῶν γεωμετρῶν Ἀρχιμήδης, καὶ ἂν ἐγὼ δὲν ἤμην Ἕλλην, ἤθελον εἶποι, καὶ ὁ μέγιστος τῶν νεωτέρων. Σύγγραμματα λοιπὸν τούτου ὀρῶνται περὶ σφαίρας, περὶ κύκλου, περὶ κωνοειδούς, περὶ σφαιροειδούς, περὶ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, ὅπερ εὔρεν ὡς ἑγχεῖς, εἴτε ὡς 7 πρὸς 22, χωρὶς νὰ ἐνηθῶσιν οἱ νεώτεροι νὰ προχωρήσωσιν οὔτε βῆμα ποδός. Καθότι παρατηρήσας Ἀρχιμήδης ὅτι ἡ πλειυὰ τοῦ τακτικοῦ ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου ὀξυγώνου εἶναι ἴτη μὲ τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου, ὑπέθετο δύο σειρὰς τακτικῶν πολυγώνων: ἐγγεγραμμένων ἐν κύκλῳ καὶ περιγεγραμμένων, ἀντιστοιχοῦντων ἀλλοδαῖς καὶ ἐν λό-

γῇ διπλασίονι, ἔνθα τὰ μὲν δύο πρῶτα συνέκειτο ἐξ 6 πλευρῶν, τὰ δ' ἑσχατα ἐξ 96. Ἐκ τῆς γνώσεως λοιπὸν τῆς πλευρᾶς τοῦ πρώτου ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου λογαριάσας τὴν περίμετρον ὅλων τούτων τῶν πολυγώνων, εὗρεν ὅτι αἱ περίμετροι τῶν δύο ἑσχατῶν πολυγώνων : τοῦ τε ἐγγεγραμμένου λέγω καὶ περιγεγραμμένου, δὲν διέφερουν, εἰμὴ σμικροτάτως ·· καὶ ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου συνείχετο μεταξύ τούτων, Ἀρχιμήδης εὗρεν ὅτι λαμβανομένης τῆς διαμέτρου ὡς 7, ἡ περιφέρεια παρίσταται παρ' ἑνὸς ἀριθμοῦ μείζοντος μὲν τῶν 21, ἐλάσσονος δὲ τῶν 22, πλην πλησιάζοντος μᾶλλον τῶν 22, ἢ 21, εἴτε ἡ περιφέρεια $< 3\frac{10}{70}$, ἢ $3\frac{1}{7}$ καὶ $> 3\frac{10}{71}$, εὐρὼν τὸ μέγεθος τῶν πλευρῶν διὰ τῆς ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν, ἐξ οὗ συνάγουσιν οἱ ἄριστοι τῶν μαθηματικῶν, ὡς ὁ Delagrange, ὅτι Ἀρχιμήδης ἐγίνωσκε τοὺς νῦν λεγομένους ἀραβικοὺς χαρακτήρας. Τετραγωνίζω δὲ τὸν κύκλον σημαίνει παρίσχημι τὸν κύκλον διὰ χωρίου τετραγώνου, ἢ παντὸς εὐθυγράμμου σχήματος. Καὶ ὑπῆρξεν ἄδύνατον εἰς τοὺς νεωτέρους νὰ εὕρωσιν ἄλλην ὁδοπορίαν ἐκτὸς ταύτης τῆς καταπεπατημένης. Πρὸς δὲ τοῦτοις Ἀρχιμήδης ἐτετραγώνισεν καὶ τὴν παραβολήν.

Ἐφαρμόττοντες ὁμῶς αἱ γεωμέτραι συνεχῶς τὴν γεωμετρίαν εἰς τὴν πράξιν, ἡσθάνθησαν ταχέως τῆς χρείας τοῦ νὰ εὕρωσι μέσα πρὸς διορισμὸν καταμετρήσεως παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ἐκ τῆς ἀναφορᾶς τῶν πλευρῶν καὶ γωνιῶν αὐτῶν, ὅπερ ἐστὶν ἡ τριγωνομετρία. Μετὰ δὲ τὸν Ἀρχιμήδην ἀναφανείς, εἰς τοὺς — 162, ὁ

πατήρ τῆς ἀστρονομίας καὶ ἀρίστος μαθηματικὸς Ἰππαρχος ὁ ἐκ Βιθυνίας, εἶπεν εἶναι ἀδύνατον τὸ νὰ ἦναι τις ἀγαθὸς ἀστρονόμος, χωρὶς νὰ ἦναι ταυτοχρόνως καὶ ἀρίστος μαθηματικὸς, ἐφευρετὴν τὴν σφαιρικὴν τριγωνομετρίαν, ἐφαρμόσας αὐτὴν εἰς τὴν ἀστρονομίαν. Ἐντεῦθεν λοιπὸν τῆς Ἑλλᾶδος ἀπολεισθήσης τὴν ἑαυτῆς ἐλευθερίαν, ὑπὸ τῶν Ῥωμαίων δουλωθείσης, αἱ μοῖσαι ἀπέπησαν ἀπὸ τοῦ ἐδάφους αὐτῆς, καὶ μὴ εὐρίσκουσαι ἄλλοθι ὑποδείξιωσιν, κατέφυγον ὑπὸ τῆς σκέπης τῶν Πτολεμαίων εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν. Πλὴν καὶ μετὰ τὴν ὑποταγὴν τῶν Ἑλλήνων εἰς τοὺς Ῥωμαίους, οἱ Ἕλληνες οὖν ἔπαυσαν ἀπὸ τοῦ νὰ καλλιεργῶσι τὴν γεωμετρίαν καὶ φιλοσοφίαν, καὶ ἀπὸ τοῦ νὰ ἀποκαταστήσωσι μαθητὰς καὶ τοὺς δεσπότας αὐτῶν. Ἐπὶ δὲ Μάρκου Αντωνίου, μετὰ 265 ἔτη μετὰ τοῦ Ἰππαρχου, ἀνεράνη Πτολεμαῖος ὁ μέγας ἀστρονόμος καὶ γεωμέτρης, συγγράψας τὴν μεγάλην αὐτοῦ σύνταξιν. Κατὰ δὲ τὰς ἀρχὰς τοῦ 3. αἰῶνος οἱ Ἕλληνες ἐφευρὸν τὴν ἄλγεβραν, καὶ Διόφαντος, ὅστις ἦν ἐπὶ Ἰουλιανοῦ τοῦ Παραβάτου, εἴτε εἰς τὰς 365, ἢ ὑπὴρξεν αὐτὸς οὗτος ὁ ἐρευρητής, ἢ καὶ συλλέξας τὰς τῶν ἄλλων ἐρευνήσεις καὶ καταβαλὼν καὶ ἴδιον κεφάλαιον σύνταξε τὴν ἄλγεβραν εἰς 13 βιβλία, ἀναλύσας προβλήματα μέχρι τοῦ β. βαθμοῦ, ἐξ ὧν μόνον τὰ εἴς διελύθησαν, ἔσχε δὲ καὶ τὴν Ἰπατίαν σχολιασθῆναι. Ὁ Διόφαντος ὁμοίως μετεφράσθη εἰς τὴν Ἀραβικὴν διάλεκτον, καὶ λαβὼν μεταμῆφωσιν τινα μετέχθη ἀπὸ τῆς Ἀραβίας εἰς τοὺς Εὐρωπαίους κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ 16. αἰῶνος παρὰ Λιουάρδου τοῦ ἐκ Πίσσης. Πλὴν θεωρεῖ τις καὶ εἰς

τούς παλαιούς ὅχι ὀλίγα ἔχνη τῆς ἀλγέβρης·· καὶ ἔτι ἡ κξ'. καὶ κη'. πρότασις τοῦ ε'. βιβλίου τῶν στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου πραγματικῶς εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ προβλήματα β'. βαθμοῦ: τουτίσι $\beta\chi - \chi^2 = \alpha^2$, καὶ $\beta\chi + \chi^2 = \alpha^2$. Καὶ ἐνταῦθα παύουσιν οἱ Ἕλληνες ἀπὸ τοῦ νὰ ἦναι ἐφευρεταί. Καὶ ἀρπαχθείσης τῆς ἐλευθερίας αὐτῶν ὑπὸ τῶν Ῥωμαίων δι' Αἰμιλίου τοῦ Παύλου, μετὰ πέντε αἰῶνας ἐξέπνευτε καὶ τὸ ἐφευρετικὸν πνεῦμα αὐτῶν: ὃ ἔστιν ὅλον τὸ ἀνθρώπινον γένος ἤρξατο ἰὰ πλησιάζη αὐτοῖς εἰς τὴν θνητότητα.

Αἱ συγχύσεις δὲ τῆς Ἀσίας καὶ ἡ τῶν Ἀράβων ἔσθως εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν, ἡ εἰς τοὺς 641, ὑπὸ τῶν Χαλδίων ἔδωκαν πληγὴν καιρίαν εἰς τὰς γνώσεις τῶν Ἑλλήνων, καὶ ἐντεῦθεν καὶ ὀλοκλήρου τοῦ ἀνθρωπίνου γένους. Ὄθεν κυριευθείσης ὑπὸ τῶν Ἀράβων τῆς Ἀλεξανδρείας, καὶ τῆς βιβλιοθήκης πυρὶ παραδοθείσης, τὰ λείψανα τῆς παιδείας ἐπίσπεψαν εἰς τὴν Κωνσταντινούπολιν καὶ εἰς τὰ ἄλλα μέρη τῆς Ἑλλάδος, ζῶντα ἡμιθνήτως. Ἐν μέρος ὅμως τῆς παιδείας ἀπῆλθε καὶ εἰς αὐτοὺς τοὺς Ἀραβας, καὶ ἐκ τούτων εἰς τοὺς Πέρσας. Λέγων ὅμως ὁ σοφὸς τῶν μαθηματικῶς καὶ ἀστρονόμος, βασιλεύσας περὶ τὸν 9. αἰῶνα, αἰσθανθεὶς τὴν ὠφέλειαν τῆς παιδείας ἐφρόντιζε νὰ δώσῃ εἰς τὰς ἐπιστήμας ψυχὴν τινα ἐν τῇ αὐτοῦ αὐτοκρατορίᾳ, ἀναγείρας σχολεῖον ἐν Κωνσταντινουπόλει. Πλὴν οὔτε αἱ τούτου φροντίδες, οὔτε Κωνσταντίνου τοῦ Πορφυρογεννήτου ἰσχύσαν ὀλοτελεῖν νὰ ἐκτελέσωσί τι, καὶ τοῦτο οὖν ἔνεκεν: πρῶτον μὲν διότι τότε τὰ πνεύματα εἶχον δοθῇ διόλου εἰς τὰς θρησκευτικὰς συζητήσεις, διού-

τερον δὲ, δίδει οἱ διάδοχοι αὐτῶν ὄντες ἀμαθέστατοι, ἀφεύκτως ἔπρεπε νὰ γένωσιν ὑπέρμαχοι τῆς ἀγγραμματίας καὶ ἀποθηριώσεως. Ὄθεν ἐκ τοῦ θ'. μέχρι τοῦ ιγ'. καὶ ιδ'. αἰῶνος ἐκτὸς τοῦ Ψέλλου ὁράται οὐδεὶς γεωμέτρης. Καὶ ἡ ἀμάθεια παρ' ἡμῶν ἦν τοσοῦτον μεγάλη, ὥςτε διὰ νὰ μάθῃ τις ἀστρονομίαν, ἔπρεπε νὰ ἐξέλθῃ ἐκ τῆς Ἑλλάδος καὶ νὰ ὑπάγῃ εἰς τὴν Περσίαν. Διὸ ἐν τῷ μέσῳ τοῦ ιγ'. αἰῶνος Χιονιάδης τις διὰ νὰ μάθῃ τὴν ἀστρονομίαν ἐπορεύθη εἰς τὴν Περσίαν, πλὴν ἕνεκα τούτου ἔγινε χρεῖα νὰ λάβῃ συστατικὰ παρὰ τοῦ Αὐτοκράτορος τῆς Κωνσταντινουπόλεως, ὡς τῶν Περσῶν ἐχόντων νόμον τοῦ νὰ μὴν διδάσκωσι τὴν ἀστρονομίαν εἰς ξένους καὶ μάλιστα εἰς τοὺς Ἕλληνας, ἀλλ' οὔτε οὕτως αὐτοὶ τὸν ἐδέχθησαν, εἰμὴ ἕνεκα τῶν μεγάλων αὐτοῦ ἐκδουλεύσεων.

Οἱ δ' Ἀραβες ἔλαβον τὴν κλίαιν τῆς παιδείας παρὰ τοῦ Χαλίφῃ Ἀβδαλά Ἀλμανών, ὅστις ἐβασίλευσεν εἰς τὸ Βαγδάτ, εἰς τοὺς 814, διδασκούς τὰς ἐπισήμας παρὰ Ἰωάννου Μεσῦα χειρουργοῦ χριστιανοῦ. Νικήσας δὲ τὸν Αὐτοκράτορα Μιχαὴλ τὸν γ', ἔλαβε παρ' αὐτοῦ διὰ δατμὸν βιβλία παντὸς εἶδους, ἅπερ καὶ μετέφρασεν εἰς τὴν Ἀραβικὴν διάλεκτον. Ὡς ἐκ τοῦ θ'. αἰῶνος μέχρι τοῦ ιδ'. ἀνεφάνησαν μεταξύ τῶν Ἀράβων ἄνδρες γεωμέτραι, γεωγράφοι, χημικοὶ, κξ. Καὶ εἰς τὸν ι'. αἰῶνα Ἀραψ τις ὀνομαζόμενος Ἀβαλφάτ μετέφρασε τὸν Ἀπολλώνιον: ὃ ἐστὶν ἦν καὶ Ἕλλην ἀγαθὸς καὶ ἄριστος μαθηματικὸς, καθ' ὃν χρόνον ἦν οὐδ' εἰς τῶν χριστιανῶν νὰ εὐνοῇ τὸν Ἀπολλώνιον ἐν τῇ ἰδίᾳ αὐτοῦ διαλέκτῳ. Ὡς ἡ Ἑλλὰς γεννήσασα καὶ γαλακτοτροφήσασα τὴν παιδείαν

τὴν ἐξαπέστειλε πρῶτον μὲν εἰς τὴν Ἀνατολήν, εἶτα εἰς τὴν δύσιν. Καθότι τέλος πάντων ἡ τύχη ἐμβλέψασα μὲ ὄμμα ἰλαρὸν πρὸς τοὺς Δυτικούς, ἠθέλησε νὰ ἐξάξῃ καὶ αὐτοὺς ἐκ τῆς θηριότητος. Καὶ μὴ εὐροῦσα ἄλλο μέσον κατέστρεψε τὴν αὐτοκρατορίαν τῆς Κωνσταντινουπόλεως, καὶ ἐξαπέστειλεν εἰς τὴν Ἰταλίαν ἅπαντας τοὺς πεπαιδευμένους τῶν Ἑλλήνων, οἵτινες φεύγοντες τὰς δυσυχίας τῆς ἰδίας πατρίδος ἐρημωμένης, προσέτρεξαν εἰς τὴν δύσιν ἄγοντες μεθ' ἑαυτῶν τὴν τε ἰδίαν διάλεκτον καὶ τὰ πολύτιμα σοιχεῖα τῆς ἀρχαιότητος, καὶ οὕτως αἱ πρῶται τῶν Ἑλλήνων ἀποικίαι κατήντησαν ἔσχατον καταφύγιον αὐτῶν. Ὡς ἡ ἐποχὴ τῆς καταλύσεως τῆς θηριότητος καὶ τῆς ἐνάξεως τῆς παιδείας τῶν Εὐρωπαίων εἶναι τὸ 1453 ἔτος. Καθότι μόλις ἔγινε γνωστὴ ἦτε Ἑλληνικὴ διάλεκτος εἰς τὴν Ἰταλίαν καὶ ὁ περιεχόμενος ἐν αὐτῇ θησαυρὸς καὶ πανταχόθεν ἤρξαντο νὰ τὴν σπουδάζωσιν ἀφιερούμενοι εἰς αὐτὴν ὅλαις δυνάμεσι. Καὶ οὕτως ἡ παιδεία ἐκ τῆς Ἰταλίας μεταβαίνουσα εἰς τὴν Γαλλίαν καὶ Γερμανίαν, ἐπεκράνθη εἰς ἅπασαν τὴν Εὐρώπην καὶ μέχρι τοῦ νέου κόσμου, ἐνθα καὶ ἔκαμε καὶ προόδους μεγάλας εἰς τοὺς ἐσχάτους τούτους αἰῶνας. Ἐπειδὴ ὅμως καὶ ἡ πρόοδος τῆς γεωμετρίας ἐνταῦθα: εἰς τὴν μὴ Ἑλλάδα λέγω, ὑπῆρξε περὶ ἀναλύσεως, ἐῴμεν τὴν τοῦτου ἔρευναν εἰς τὴν Ἀλγεβραν.

Ἄλλ' ὡς φαίνεται ἡ θεία πρόνοια ἠυδόκησεν εἰς τὸν 19. αἰῶνα νὰ ἐπιστραφῶσιν αἱ Πιερίδες μουσαι εἰς τὴν ἰδίαν αὐτῶν πατρίδα καὶ νὰ ἔλθωσιν εἰς τὸν Παρνασσόν. Καὶ τὸ φῶς εὐηγγελισθὲν διὰ μεγάλης ἡρᾶς, διεχύθη

εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ παρόντος αἰῶνος, καὶ διαχυθεὶν δέδωκε δύναμιν καὶ ἐνέργειαν εἰς τὰς κινήσεις τῆς ζωῆς, ἥτις ἦν ἀνύπαρκτος πρότερον. Ἄλλως ἐκδίδων εἰς φῶς τὰ σοῦ-
 χεῖα τοῦ Εὐκλείδου, εἴτε τῆς γεωμετρίας, ἐγὼ ἐκδίδω
 τὸ οὐσιωδέστατον τῶν συγγραμμάτων πρὸς ἀγωγήν τῆς νεο-
 λαίας, ἀποκατασταθεὶς ἐκ τῶν καιρικῶν περιστάσεων τοιοῦ-
 του σπάνιον, ἔνθα ἔλαβε τὴν αὐτοῦ ὕπαρξιν. Ἐπειδὴ
 ὁμοίως καὶ αἱ τοῦ Εὐκλείδου ἀποδείξεις εἶναι ἐκτεταμέναι
 καὶ δύσκολαι, ὥς, ὡς λέγουσι, εἶπεν ὁ Πτολεμαῖος
 ὁ Φιλάделφος ὁ τῆς Αἰγύπτου βασιλεὺς πρὸς τὸν διδάσ-
 καλον αὐτοῦ Εὐκλείδην, ὅτι ἂν ἦναι δυνατόν δι' ἄλλης εὐ-
 κολεωτέρας ὁδοῦ νὰ φθάσῃ τις εἰς τὴν γνῶσιν τῶν γεωμε-
 τρικῶν προτάσεων, καὶ ὑπὲρ τῶν βασιλέων, ὧ
 βασιλεὺς, ἤκουσεν, οὐκ ἔστιν ὁδὸς συντομω-
 τέρα, τοῦτου ἔνεκεν ἐγὼ ἐζήτησα ὁδὸν συντομωτέραν,
 προσιδέμενος καὶ τινα οὐσιώδη πορίσματα. Ἄν λοιπὸν ἐ-
 γὼ ἐπέτυχον κατὰ τοῦτο, ἐγὼ τὴν ψῆφον εἰς τοὺς ἀναγνώ-
 σας, φθάσει μόνον νὰ μὴν ἀγνοῶσιν ὅτι ἡ τῶν πραγμά-
 των ἀρχὴ εἶναι ἐργωδής.

Βενιαμὶν Λίσβιος.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ (α)

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΑ.

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

Ὅρισμοί. (β).

α'. Σημεῖον εἶναι ὃν ἄνευ ἐκτάσεως τινος.

β'. Γραμμὴ εἶναι ἑκτασις ἄνευ πλάτους ἢ βάθους,
• ἀλλὰ μόνον κατὰ μῆκος, ἥς περ οὐσης πεπερασμένης τὰ
πέρατα εἶναι σημεία.

(α) Οἱ ἄνθρωποι εἶναι κάτοικοι τῆς γῆς. Αὐτοὶ δὲν εἶναι
βοσκήματα, ἵνα λογικοί. Ἦν λοιπὸν ἀνάγκη εἰς αὐτοὺς καὶ ὑ-
ποτάξωσιν εἰς τὸν λόγον τὰ μέρη τῆς γῆς. οὗτως ἡ ἐκτέλεσις
ἦν ἀδύνατος ἄνευ τῆς καταμετρήσεως: ὃ ἔστιν ἄνευ τοῦ ποσῶν
σπιδάμεν, ἢ μονάδων εἶναι τὸ μέγεθος, ἢ ἑνὸς σώματος, ἢ ἑνὸς
ἐπιπέδου, ἢ ἀπλῶς μιᾶς ἐκτάσεως.. καὶ τοῦτο εἶναι ἡ Γεωμε-
τρία, ἥτις ὡς λίγῃ Ἀριστοτέλῃς (Μεταφ. βιβλ. α'. κεφ. α'.)
ἔλαβε τὸ εἶναι ἐκ τῆς Αἰγύπτου, ὑπὸ τῶν ἱερέων, οἵ τινες ὄντες
μεμαρτυρημένοι τῶν βωτακῶν, καὶ προσκείμενοι εἰς τὴν μελέτην ἐ-

γ'. Εξόφθα γραμμὴ εἶναι, ὅταν τὰ σημεῖα αὐτῆς κῆνται ἐπ' εὐθείας, καὶ οὐδὲν ἐξ αὐτῶν ἐξέχει τῶν λοιπῶν, ὡς ἡ AB σχ. 1. (γ).

οὔτερον τῆς γεωμετρίας. Αὕτη λοιπὸν ἐξετάζει οὐδὲν ἑτέρου τῶν σωμάτων: οὔτε τῆς βαρύτητος λέγω, οὔτε τὸ ἀδιαχώρητον, οὔτε τὸν χρωματισμὸν, οὔτε τὰς ὁδοὺς, οὔτε κτλ. εἰμὶ μόνον τῆς ἔκτασος αὐτῶν.

Πάν λοιπὸν σῶμα δύναται νὰ καταμετρηθῇ κατὰ τρεῖς ἐν-
θολογίας, αἵπειρ καὶ διαστάσεις ἐνομαζέσθαι, πρὸς ὁρμὰς ὅμως
ἐκαστὴ ἐκαστῇ. Καθέτι ἐγὼ δύναμαι νὰ καταμετρήσω ἓν σῶμα ὅχι
μόνον κατὰ μίαν εὐθυβολίαν, ἀλλὰ καὶ αὐθις πρὸς ὁρμὰς μὲ τῆς
πρώτης, καὶ τρίτης πρὸς ὁρμὰς μὲ ἀμφοτέρων, ἴσθα ὅπλ. ἡ μὲν
πρώτη ἐνομαζέται μῆκος, ἡ δὲ δευτέρα πλάτος, καὶ βάθος
ἡ τρίτη. Αὗται λοιπὸν αἱ τρεῖς διαστάσεις: μῆκος, λέγω, πλάτος,
καὶ βάθος, συμπιρύνονται διὰ παντός: εἰς πᾶν σῶμα ἐκ φύσεως,
καὶ εἶναι τῶν ἀδυνάτων νὰ διαιριθῶσι πραγματικῶς ἀπ' ἀλλήλων.
Πλὴν ὁ ἀνθρώπος νοεῖ ἔχει ταύτην τὴν ιδιότητα τὸ νὰ διαιρῇ
τὰ πραγματικά: ἀδιαίρητα διὰ τῆς ἐπιστήας, καὶ νὰ θεωρῇ ἄνὰ
μέρος τὰ ἀχώριστα. Ὅσον ὅμως εἶναι δυνατὸς ὁ διαχωρισμὸς τῶν
διαστάσεων ἐκ τῶν σωμάτων, τοσοῦτον καὶ ἀναγκαῖος εἰς τὸν ἀν-
θρώπου, καὶ τοσοῦτον ἀναγκαῖος, ὥστε τοῦτον μὴ εὔτε, ὁ ἀν-
θρώπος ἴσως εἶναι ἡθελῶν εἶναι ἀνθρώπος. διότι πᾶν ἀδύνατον εἰς αὐτὸν
νὰ καταμετρηθῇ: ὁ ἴσι νὰ ἐνολήσῃ ποσότητα, ἢ νὰ κἀμῃ ἄλ-
λεν νὰ ἐνολήσῃ. Ζητείεσθω, φίλοι ἐπίτιν, πόσον εἶται χωρὶς εὔτος
ὁ ἀγρός: τοῦτέστι ζητείεσθω ἡ καταμέτρησις τῆς ἐπιφανείας αὐ-
τοῦ. Ὅποια λοιπὸν ἡ φροντίς περὶ τοῦ βάρους αὐτοῦ; β'. Ζη-
τείεσθω πόσον ἀπένχῃ ἡ κωσσωτινευπέλις τῆς Μιτυλήνης: Ὅποια
λοιπὸν ἡ φροντίς περὶ τοῦ πλάτους, καὶ βάρους τοῦ διαστήματος.
ἐν ᾧ αὐτὴ ἐνέρχεται ταύτην τῆς διεύσεως ὁλοκλήρῃ οὔτε ζητήσῃ
εἰς τὸ πλάτος καὶ βάθος αὐτοῦ; Μάλιστα ἡθελῶν εἶναι σαφὲς ἄ-
νεκα. ἂν, τοῖς ζητοῦντος τὴν διεύσεως τῆς κωσσωτινευπέλειος
καὶ Μιτυλήνης, νὰ κἀθῇται ὁ γεωμέτρης: νὰ καταμετρήῃ τὰ
πλάτη καὶ βάθη τῆς θαλάσσης (ἂν καὶ τοῦτο πᾶν ὁρατὸν), τὰ
ἐκ τῆς Μιτυλήνης λέγω, μέχρις τῆς κωσσωτινευπέλειος.

Πάμπλη οὖν εἶναι ἐκείνη, ἧς περ τὰ σημεία ἐν
κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ὡς ἡ ΓΔ. σχ. 3.

Ἄν λοιπόν καὶ ὁ νοῦς θεωρῇ τὰς τρεῖς διατάξεις εἰς ἓν καὶ
τὸ αὐτὸ, τοῦτο εἶναι σῶμα γεωμετρικόν, ὅπερ δηλονότι ὑποτίθεται
ἄνυ βάρους, ἄνυ ὠτισάσει· καὶ οὕτως διότι πολλά ὀλίγον φρου-
τίξει ἢ γεωμετρία περὶ τῶν τοιούτων. Εἰδὲ καὶ παραβλέπων τις
ἐκ τούτου τὴν μίαν διάταξιν, θεωρεῖ μόνον τὰς δύο· τὸ πλάτος
καὶ τὸ μήκος λέγω, τοῦτο εἶναι ἐκείνο ἐπὶ ὑπὸ τῶν γεωμετρῶν
ἐνομαζέται ἐπιφανεία, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἐπιφανεία εἶναι πῖρας
σώματος. Ἄν πάλιν παραβλέπων τις ἐν ταυτῷ τὰς δύο διατάξεις,
θεωρεῖ μόνον τὴν τρίτην· τὸ μήκος λέγω, τοῦτο εἶναι ἐκείνο, εἰς
ὅπερ ὑπὸ τῶν γεωμετρῶν διδεται ὄνομα γραμμῆ, καὶ διὰ τοῦ-
το ἡ γραμμὴ εἶναι πῖρας ἐπιφανείας. Εἰδὲ τέλος πάντων καὶ
θεωρεῖ τις τὰ πέρατα μιᾶς γραμμῆς, ταῦτα εἶναι ἐκείνα, ἅπερ
ὀνομαζοῦν ἡ γεωμετρία σημεία. Ὡς ἂν ἡ ἐπιφανεία οὖσα πῖ-
ρας τοῦ σώματος, εἴτε τοῦ τριγῶν διαστατοῦ, ἔχῃ δύο διατάξεις,
καὶ ἡ γραμμὴ οὖσα πῖρας τῆς ἐπιφανείας, εἴτε τοῦ διγῶν δια-
στατοῦ, ἔχῃ μίαν διάταξιν, ἐπόμενον εἶναι καὶ τὸ σημείον, ὡς ἔν
πῖρας τῆς γραμμῆς, εἴτε τοῦ μοναγῶν διαστατοῦ, νὰ ἔχῃ οὐδε-
μίαν διάταξιν.

Ἡ ἐπιφανεία λοιπόν, ἡ γραμμὴ, καὶ τὸ γεωμετρικόν ση-
μείον εἶναι φαντασά, καὶ γινώσκονται διὰ τῆς ἀφαιρέσεως. Καθότι
ἂν ἐκ τοῦ τριγῶν διαστατοῦ ἀφαιρῶ τὴν μίαν διάταξιν, τὸ κα-
ταλειπόμενον θίλει εἶναι ἐπιφανεία.. καὶ ἂν ἐκ τούτου ἀφαιρῶ
τὴν μίαν διάταξιν, τὸ καταλειπόμενον θίλει εἶναι γραμμὴ.. καὶ
ἂν ἐκ τούτου ἀφαιρῶ τὴν ἐνοῦσαν διάταξιν κρατῶν τὰ πέρατα
αὐτοῦ, ταῦτα ἡθίλον εἶναι τὰ σημεία. Πλὴν καὶ ἂν δώσω κίνησιν
εἰς τοῦτο τὸ φανταστὸν σημείον, ἢ ὁδὸς αὐτοῦ ἡθίλον εἶναι γραμ-
μὴ, ὑποτιθέμενον νὰ ἔῃ σημεία καθ' ὁδόν.. καὶ ἂν δώσω κίνη-
σιν εἰς τὴν γραμμὴν πρὸς τὰ πλάγια, ἢ ὁδὸς αὐτῆς θίλει εἶναι
ἐπιφανεία, ὑποτιθέμενον νὰ ἔῃ σημεία καθ' ὁδόν.. καὶ ἂν δώσω
κίνησιν εἰς τὰ ἐπιδόμην πρὸς τὰ πλάγια, ἢ ὁδὸς αὐτῆς θίλει
εἶναι σῶμα, ὑποτιθέμενον νὰ ἔῃ σημεία καθ' ὁδόν..

(β) Ὁ ἐκτελεσθῆς προτίθεται πρὸ τῶν ἀποδείξεων, ὡς

δ'. Ἐπιφάνεια εἶναι μέγεθος ἔχον μόνον δύο διαστάσεις: μήκος καὶ πλάτος, πλὴν ὅχι καὶ βάθος, ἧς περ οὗσης πεπερασμένης τὰ πέρατα εἶναι γραμμαί.

ε'. Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια εἶναι, ἥτις καὶ ἀπλῶς ἐπίπεδον λέγεται, ἐκείνη ἐφ' ἧς δύνανται νὰ ἐφαρμοσθῶσι πρὸς πᾶσαν εὐθυβολίαν εὐθεῖαι, ὡς ἡ ΑΒΔΓ. σχ. 4. Καμπύλη δὲ ἢ μὴ τοιαύτη, ὡς ἡ αβγ. σχ. 5.

ς'. Ἐπίπεδος γωνία εἶναι ἡ ἐπ' ἐπιπέδου σύμπτωσις δύο γραμμῶν εἰς ἓν σημεῖον μὴ ἐπ' εὐθείας. Καὶ αὖν αἱ συμπίπτουσαι γραμμαὶ ἦναι εὐθεῖαι, ἢ γωνία ὀνομάζεται εὐθύγραμμος, ὡς ἡ ΒΑΓ. σχ. 6. αὖ δὲ μὴ εὐθεῖαι, καμπυλόγραμμος, ὡς ἡ βαγ. σχ. 7. καὶ τὸ μὲν σημεῖον τῆς συμπτώσεως τῶν δύο γραμμῶν

προετοιμασίαν, τρία τινά: ὅρους, αἰτήματα, καὶ ἀξιώματα. Καὶ ὅροι μὲν, εἴτε ὁρίσμοι ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ σαφήνεια τῶν λέξεων, ὅς περ μέλλει νὰ μεταχειρισθῇ εἰς τὰς ἀποδείξεις. αἰτήματα δὲ ζήτησίς τις, ἣν περ ζητεῖ παρὰ τοῦ ἀκροατοῦ, ἢ τις δεδομένη βλάπτει ὁλοτελῶς τὸν διδόντα. καὶ τέλος ἀξιῶμα εἶναι ἔννοια κοινὴ: ἔννοια λέγω, ἣν περ ἅπαντες ἀνευ τινὸς ἀποδείξεως δέχονται. Διὰ νὰ μὴ ζητῇ λοιπὸν ὁ γεωμέτρης νὰ ἀποδεικνύῃ συχνάκις τὰ σαφῆ, προϋποτίθεται ταῦτα, ὡς ὁμολογούμενα ὑπὸ πάντων.

(γ) Τὸ ὄνομα Εὐθεῖα εἶναι ἔννοια ἀπλῆ. Τὰ ἀπλᾶ εἶναι ἀνεπίδεκτα ὁρίσμου, ἢ ἀναπτύξεως. Ὡςτε δυσκόλως ἠθελε τὴν ὅρισσις αὐτῆς ἀνευ ταυτολογίας. Ὁ δ' Ἀρχιμήδης ὁρίζεται αὐτὴν, ἐλαχίστην τῶν ἔχουσῶν τὰ αὐτὰ πέρατα, ὡς δηλονότι ἡ ΑΒ σχ. 2. πλὴν τοῦτο εἶναι συμβεβηκός τι τῆς εὐθείας, καὶ ὅχι τὸ εἶναι αὐτῆς. Καὶ κατὰ τὸν Πλάτωνα εὐθεῖα εἶναι, ἧς τὰ ἄκρα τοῖς μέσοις ἐπιπροσθεῖ. Σημειωτέον δὲ ὅτι πᾶσα γραμμὴ προσδιορίζεται ὑπὸ δύο γραμμάτων τιθεμένων εἰς τὰ πέρατα αὐτῆς.

ὡς τὸ A , ἢ α ὀνομάζεται κορυφὴ γωνίας, σκελὴ δὲ, ἢ πλευραὶ τῆς γωνίας αἱ περιέχουσιν γραμμαὶ τὴν γωνίαν, ὡς αἱ AB , AG , ἢ $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ (α).

ζ'. Ἐὰν εὐθεῖα σταθεῖσα ἐπ' εὐθείας ἐκτελῇ ἴσας ἀλλήλαις τὰς ἐκ τοῦ ἐνὸς καὶ τοῦ ἐτέρου μέρους γωνίας, αὕτη μὲν ὀνομάζεται κάθετος, ὡς πρὸς ἣν ἐφύσκηκεν εὐθεῖαν, ὀρθὴ δὲ ἑκατέρω τῶν ἴσων γωνιῶν, ὡς ἡ AB , ἐπὶ τὴν $ΓΔ$. σχ. 9 (β).

Ἐκεῖνη δ' ὅμως ἡ γωνία, ἣτις εἶναι μείζων ὀρθῆς ὀνομάζεται ἀμβλεῖα, ὡς ἡ EZH , καὶ ὀξεῖα, ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς, ὡς ἡ EZO σχ. 10.

η'. Παράλληλοι λέγονται δύο εὐθεῖαι αἱ ἀπέχουσαι ἐξίστου ἀλλήλων, ὥς $\alpha\gamma$ ἐκβληθῶσιν ἐπ' ἄπει-

(α) Σημειώτεον ἐνταῦθα α . ὅτι εἰς τὴν ὑπαρξιν τῆς γωνίας προστεθὴν νὰ μὴ γένη ἡ σύμπτωσις τῶν δύο εὐθειῶν ἐπ' εὐθείας. διότι τότε ἤθελε προκύψῃ ἔχει πλέον γωνία, ἀλλ' εὐθεῖα γραμμὴ: ὅ ἐστι διὰ νὰ γένη γωνία εἶναι ἀνάγκη νὰ ὑπάρχῃ κλίσις τις εἰς τὰς δύο γραμμὰς, εἴτε διάφορος εὐθυβολία. β'. "Ὅτι εἰθεῖσαι νὰ παριστῶσι πᾶσαν γωνίαν διὰ τριῶν γραμμῶν: τοῦ ἐνὸς εἰς τὴν κορυφὴν καὶ τῶν λοιπῶν δύο εἰς τὰ πέρατα τῶν πλευρῶν, πολλάκις ὅμως καὶ διὰ τοῦ εἰς τὴν κορυφὴν μόνου. γ'. "Ὅτε το μέγεθος τῶν πλευρῶν μιᾶς γωνίας ἔχει λόγον οὐδένα πρὸς τὸ μέγεθος τῆς γωνίας, ἀλλὰ πρὸς τὸ μέγεθος τῆς κλίσεως αὐτῶν πρὸς ἀλλήλας. Οἷτω δοθείσης τῆς κλίσεως τῶν εὐθειῶν AB , AG τοῦ νὰ ᾖναι ἴση μὲ τὴν τῶν $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, τότε ἡ γωνία. $BAΓ = \gamma\alpha\beta$. βαγ. μὲ ἔλον ὅπου αἱ πλευραὶ αὐτῶν τῶν γωνιῶν εἶναι ἀνισοί. σχ. 8.

(β) Ἐπειδὴ ὅμως καὶ πᾶσα ὀρθὴ γωνία εἶναι ἴση $= 90^\circ$ (Ἀριθ. 60.), κατὰ τὴν διαίρεσιν τῶν μαθηματικῶν, τούτου ἕνεκεν γωνία ὀρθὴ καὶ μοῖραι ἐννευήκοντα εἶναι λέξεις συνώνυμοι.

ρον, δὲν θέλουσι συμπίσει ποτὲ, ὡς αἱ $AB, ΓΔ$, ὡς οὗτης $αδ = γδ = εζ$. σχ. 11 (α).

θ'. Ὄρος ὀνομάζεται τινος, τὸ πέρας αὐτοῦ.

ι'. Σχήμα εἶναι ἐπιφανεία περατουμένη ὑφ' ἐνὸς ἢ πολλῶν ὄρων, εἴτε γραμμῶν.

ια'. Κύκλος εἶναι σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περατούμενον, ἣτις καὶ περιφέρεια ὀνομάζεται, ἥς περ ἑκάστων σημείου ἀπέχει ἐξίστου ἀφ' ἐνὸς τῶν ἐν τῷ κύκλῳ σημείων, ὅπερ καὶ κέντρον ὀνομάζεται, ὅθεν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν περιφέρειαν ἐμπίπτουσαι εὐθεῖαι, εἶναι ἅπασαι ἴσαι ἀλλήλαις, ὡς αἱ $KA, KB, KΓ$. σχ. 12. αἵτινες καὶ ἡμιδιαμέτροι ἢ ἀκτῖνες λέγονται (β).

ιβ'. Διάμετρος λοιπὸν τοῦ κύκλου εἶναι πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατουμένη ἑκατέρωθεν εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὡς ἡ AB . σχ. 12.

(α) Ὡς ἂν ᾤξῃ τις δύο καθέτους ἴσας ἀλλήλαις ἐπί τερος εὐθείας, καὶ συζύξῃ τὰ πέρατα αὐτῶν, ἡ συζεύξασα θέλει εἶναι παράλληλος μὲ τὴν ὑποκειμένην εὐθεῖαν.

(β) Ἴδου καὶ ἡ γένεσις τοῦ κύκλου. Ἐστω μία ὁποιαδήποτε εὐθεῖα, ὡς ἡ KA , σχ. 13. κρατῶ τὴν μίαν ἄκρην ἀκίνητον· τὸ K , καὶ κινῶ τὴν ἑτέραν τὸ A ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἕως νὰ ἐπιφύῃ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον A . ὅθεν ἤρξατο νὰ κινῆται. Ἀν λοιπὸν δεθῇ νὰ ἀφῇ σημεῖα κατ' ὁδόν ἡ KA εὐθεῖα, ἥθιλε καταγραφῇ ὁ κύκλος $ABΓ$. Ὡς ἡ γένεσις τοῦ κύκλου γίνεται, ἐν ᾧ το μὲν KA σημεῖον τῆς περιφερομένης εὐθείας ἀκοντεῖ, τὰ δὲ λοιπὰ κινεῖται ἀνωσταχῶς, καὶ τοσοῦτον μὲν ταχυτέρως, ὅσον τοῦ κέντρου ἀπικοῦσι, τοσοῦτον δὲ βραδυτέρως, ὅσον εἰς αὐτὸ προσιγγιζοῦσι.

ἰδιότης τῆς διαμέτρου εἶναι τὸ νὰ διχοτομῇ τὸν κύκλον, ὡς ἡ ΑΒ. σχ. 12.

Καὶ ἐπομένως ἡ μικρὸν εἶναι σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ ἡμιπεριφερείας, ὡς τὸ ΑΒΓ.

ιγ'. Εὐθύγραμμα σχήματα ὀνομάζονται τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα.. καὶ τρίπλευρα μὲν, ὅσα ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν, τετράπλευρα δὲ, ὅσα ὑπὸ τεσσάρων, καὶ πολύπλευρα τὰ ὑπὸ πλείονων, ἢ τεσσάρων.

ιδ'. Ἐκ τῶν τριπλεύρων σχημάτων τρίγωνον μὲν ἰσόπλευρον ὀνομάζεται τὸ ἔχον καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας ἀλλήλαις, ὡς τὸ ΑΒΓ. σχ. 14, ἰσοσκελὲς δὲ, τὸ ἔχον ἴσας τὰς δύο μόνας, ὡς τὸ ΔΕΖ. σχ. 15.. καὶ σκαληνὸν τὸ ἔχον ἀνίσους καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς, ὡς τὸ ΗΘΙ. σχ. 16.

Ἦς δὲ ἐκ τῶν γωνιῶν, ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνον ὀνομάζεται τὸ ἔχον μίαν ὀρθὴν γωνίαν, ὡς τὸ ΑΒΓ. σχ. 17, ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον μίαν ἀμβλείαν γωνίαν, ὡς τὸ ΔΕΖ. σχ. 18, καὶ ὀξυγώνιον τὸ ἔχον καὶ τὰς τρεῖς γωνίας ὀξείας, ὡς τὸ ΗΘΙ. σχ. 19.

ιε'. Ἐκ δὲ τῶν τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μὲν ὀνομάζεται τὸ ἔχον ἴσας ἀλλήλαις τὰς τέσσαρας πλευρὰς, καὶ ὀρθὰς τὰς γωνίας, ὡς τὸ ΑΒΓΔ. σχ. 20.

Ἐτερόμηκες δὲ, ἢ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον ὀρθὰς μὲν τὰς τέσσαρας γωνίας, ἴσας δὲ μόνας τὰς ἀπέναντι πλευρὰς, ὡς τὸ ΕΖΗΘ. σχ. 21.

Ῥόμβος δὲ λέγεται τὸ ἔχον ἴσας καὶ τὰς τε τέσσα-

ρας πλευράς και τὰς ἀπέναντι γωνίας, ὡς τὸ ΙΚΑΜ. σχ. 22.

Ῥομβοειδὲς δὲ, τὸ ἔχον ἴσας τὰς ἀπέναντι πλευράς τε και γωνίας, ὡς τὸ ΝΕΟΠ. σχ. 23.

Ἐκτὸς δὲ τούτων, ἅπαντα τὰ λοιπὰ τετράπλευρα ὀνομάζονται τραπέζια, ὡς τὸ ΡΣΤΥ. σχ. 24.

ιβ'. Πᾶν τετράπλευρον ἔχον παραλλήλους (ὁρ. ζ.) τὰς ἀπέναντι πλευράς ὀνομάζεται παραλληλόγραμμον. Καὶ τοιαῦτα εἶναι τὰ τετράγωνα, τὰ ὀρθογώνια, οἱ ῥόμβοι, καὶ τὰ ῥομβοειδῆ (α).

ιζ'. Διάμετρος ἡ διαγώνιος λέγεται ἡ εὐθεῖα ἡ τὰς ἀπεναντίων γωνίας τῶν τετραπλεύρων ζευγνύουσα, ὡς ἡ ΘΖ. σχ. 21.

ιη'. Τὰ ὑπὸ πλείονον, ἢ τεσσάρων γραμμῶν περιεχόμενα σχήματα λέγονται πολύπλευρα καὶ πολύγωνα.

ΑΙΤΗΜΑΤΑ.

α'. Νὰ δύνηται τις νὰ ᾄξῃ ἀπὸ παντὸς σημείου πρὸς πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν.

β'. Νὰ δύνηται τις νὰ ἐπεκτείνῃ πεπερασμένην εὐθεῖαν.

γ'. Νὰ δύνηται τις νὰ γράψῃ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον.

(α) Παραλληλόγραμμα λέγεται τὸ ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευράς παραλλήλους (ὁρ. ζ.)

ΑΞΙΩΜΑΤΑ.

α'. Τὰ ἴσα μὲ ἐν τρίτον εἶναι καὶ πρὸς ἀλλη-
λα ἴσα.

β'. Τὰ διπλάσια ἐνὸς τρίτου εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

γ'. Τὰ ἡμίσεια ἐνὸς τρίτου εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

δ'. Τὰ ἐπ' ἀλλήλα ἐφαρμόζοντα εἶναι ἴσα ἀλ-
λήλοις.

ε'. Πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

ς'. Ἐάντις εἰς ἴσα ἴσα προσθήσῃ, τὰ ὅλα θέλου-
σιν εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

ζ'. Ἐάντις ἐκ τῶν ἴσων ἴσα ἀφείλῃ, τὰ καταλει-
πόμενα θέλουσιν εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

η'. Ἐάντις εἰς ἄνισα προσθήσῃ ἴσα, τὰ κεφάλαια
θέλουσιν εἶναι ἄνισα.

θ'. Ἐάντις ἐκ τῶν ἀνίσων ἀφείλῃ ἄνισα, αἱ δια-
φοραὶ θέλουσιν εἶναι ἄνισοι.

ι'. Τὸ ὅλον εἶναι ἴσον μὲ τὰ μέρη αὐτοῦ, καὶ μεῖ-
ζον ἐκάστου τῶν μερῶν αὐτοῦ.

ια'. Ἐάν, δύο εὐθειῶν τεμνομένων ὑπὸ μιᾶς τρι-
της, αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι ἦναι ἐλάτ-
τους δύο ὀρθῶν, αὐταὶ ἐπεκτεινόμεναι ἐπ' ἄπειρον θέ-
λουσι συμπέσοι εἰς ἓν σημεῖον, ἐξ οὗ μέρους εἶναι αἱ ἐ-
λάσσονες τῶν δύο ὀρθῶν γωνίαι (α).

ιβ'. Δύο εὐθεῖαι δὲν περιέχουσι χωρίον.

(α). Γεώμετρος, Πρόκλος καὶ ἄλλοι γεωμέτραι ἤψαντο τοῦ
Εὐκλείδου ἐνταῦθα ἐκβάλλοντες τοῦτο τὸ ἀξίωμα ἐκ τῆς τάξεως
τῶν ἀξιωμάτων, καὶ εἰς τὴν τάξιν τῶν θεωρημάτων αὐτὸ τότ-
τοντες· ἂν, λίγοντες, καὶ αὐτὸς ἐθετο ὡς θεωρήμα τὴν κβ', πρὶν:

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. Α΄.

Π ρ ό θ λ η μ α. (α).

Ἐπὶ τῆς δοθείσης πεπερασμένης εὐθείας νὰ συστήσῃ τις τρίγωνον ἰσόπλευρον.

Ἔστω AB ἡ δοθεῖσα. σχ. 25.

Κέντρῳ μὲν τῷ A , διαστήματι δὲ τῷ AB γράψω κύκλον τὸν $BΓΔ$ (αἰτ. γ'). . εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ B , διαστήματι δὲ τῷ BA γράψω κύκλον τὸν $ΑΕΓ$. ἔπειτα ἀπὸ

τοῦ παρόντος βιβλίου: τὴν «ἐὰν αἱ γωνίαι δυσὲν ὀρθαῖς ὡσὺν ἴσαι, αἱ εὐθεῖαι οὐδέποτε συμπεσοῦνται», πρέπει ὡσαύτως καὶ τοῦτο τὸ αξίωμα νὰ ἐξωσθῇ τῶν αξιωμάτων ὡς ἐν ἀντικρὺς θεωρημα.

Ἐγὼ ὅμως λέγω, ὅτι ἂν τοῦτο τὸ αξίωμα ἐκτεθῇ δι' ἄλλων λέξεων, ἰσως ἀποφύγοι ὁ Εὐκλείδης τὴν κατηγορίαν . . καὶ ὥδε πως. «Δύο εὐθεῖαι κείμεναι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἂν δὲν ἀπέχων ἐξίσου καθ' ὅλην τὴν ἑκτασιν, αὗται δὲν εἶναι παράλληλοι, καὶ διὰ τοῦτο θέλουσι συμπεσοῖ εἰς ἓν σημεῖον». Καὶ ἐπειδὴ οἱ γεωμέτραι ἐδεχθσαν τὸν ὅρισμὸν τῶν παραλλήλων, ὥνπερ ἰδιότης εἶναι ἢ οὐδέποτε σύμπτωσις, εἴτε ἢ ἰσότης τῶν διαστάσεων, δίκαιον ἦθελεν ἦναι νὰ δεχθῶσι καὶ τὸ τοῦτου ἐναντίον: τὸ ὅτι μὴ παραλλήλαι εἶναι ἐκείναι τῶν εὐθειῶν, ὥνπερ κειμένων ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, αἱ διαστάσεις αὐτῶν δὲν εἶναι ἴσαι, ἀλλ' αἱ μὲν ἐκ τοῦ ἐνὸς μέρους μικρύνονται, ἐκ δὲ τοῦ ἑτέρου σμικρύνονται . . καὶ ἂν σμικρύνωνται, δηλὸν ὅτι μηδενισθήσονται, καὶ διὰ τοῦτο αἱ εὐθεῖαι συμπεσοῦνται.

(α) Ἄπασαι αἱ προτάσεις εἶναι ἡ θεωρήματα, ἡ προβλήματα. Καὶ οὐνομάζεται μὲν θεώρημα ὅταν ἔχη μόνον ἀπόδειξιν, πρόβλημα δὲ, ὅταν καὶ ἀπόδειξιν καὶ πρᾶξιν.

Καὶ εἰς ἀμφοτέρω ὅμως, ὡς ἐκ μὲν τοῦ προβέλλοντος, θεωροῦνται δύο τινά: διδόμενον καὶ ζητούμενον, ὡς δὲ ἐκ τοῦ λύοντος, ἄλλα δύο: ἀποδείξις καὶ συμπέρασμα, ἐνίοτε ὅμως καὶ κατασκευή.

τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ οἱ δύο κύκλοι διατέμνονται, ἄγω-
 τὰς δύο εὐθείας $\Gamma\Lambda$, $\Gamma\mathbf{B}$ ἐπὶ τὰ Λ , $\mathbf{B}$ σημεία (αἴτ. α.)·
 καὶ λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον $\Lambda\Gamma\mathbf{B}$ εἶναι τὸ ζητούμενον τρί-
 γωνον.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἡ $\Lambda\Gamma = \Lambda\mathbf{B}$, καθὼ ἡμιδιάμε-
 τροι (ὁρ. α.)· καὶ ἡ $\mathbf{B}\Gamma = \Lambda\mathbf{B}$, καθὼ ἡμιδιάμετροι τοῦ
 κύκλου $\Lambda\mathbf{E}\Gamma$ · διὰ τοῦτο $\Lambda\Gamma = \mathbf{B}\Gamma$ (ἀξι. α.): ὃ ἐστὶν
 αἱ τρεῖς εὐθεῖαι $\Lambda\mathbf{B} = \Lambda\Gamma = \mathbf{B}\Gamma$. Ὡς τὸ τρίγωνον
 $\Lambda\Gamma\mathbf{B}$ εἶναι καὶ ἰσοπλευρον, καὶ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας
 $\Lambda\mathbf{B}$, ὅπερ ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ι ς. β'.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ νὰ θέσῃ τις εὐθεῖαν ἴσην με-
 τὴν δοθείσαν. Ἔσω Λ τὸ δοθέν σημεῖον, καὶ $\mathbf{B}\Gamma$ ἡ δο-
 θεῖσα εὐθεῖα. σχ. 26.

Ζευγνύω τὸ σημεῖον Λ μετὰ τὸ σημεῖον $\mathbf{B}$, πέρας
 τῆς δοθείσης εὐθείας. ἐπὶ τῆς $\Lambda\mathbf{B}$ εὐθείας ἐκτελῶ τρί-
 γωνον ἰσοπλευρον τὸ $\Lambda\mathbf{B}\Delta$ (πρ. α.). ἐπεκτείνω τὰς δύο
 πλευράς $\Delta\Lambda$, $\Delta\mathbf{B}$ τοῦ τριγώνου ἀπροσδιορίζως (αἴτ. β.).
 εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ $\mathbf{B}$, διαστήματι δὲ τῷ $\mathbf{B}\Gamma$ γράφω κύ-
 κλον τὸν $\Gamma\mathbf{E}\mathbf{Z}$, ὡσαύτως κέντρῳ μὲν τῷ Δ , διαστήματι
 δὲ τῷ $\Delta\mathbf{E}$ γράφω κύκλον τὸν $\mathbf{H}\mathbf{E}\Theta$, καὶ λέγω ὅτι ἡ
 $\Lambda\Theta$ εὐθεῖα εἶναι ἡ ζητούμενη εὐθεῖα.

Καθότι ἐπειδὴ ἡ $\Delta\Theta = \Delta\mathbf{E}$, καθὼ ἡμιδιάμετροι·
 καὶ τὰ τούτων μέρη $\Delta\Lambda = \Delta\mathbf{B}$, καθὼ πλευραὶ ἰσοπλευ-
 ρου τριγώνου, διὰ τοῦτο καὶ ἡ $\Lambda\Theta = \mathbf{B}\mathbf{E}$ (ἀξ. ζ').
 $\text{Ἄλλ' ἡ } \mathbf{B}\mathbf{E} = \mathbf{B}\Gamma$, καθὼ ἡμιδιάμετροι, ὅθεν καὶ ἡ
 $\Lambda\Theta = \mathbf{B}\Gamma$. Ὡς ἡ $\Lambda\Theta$ εὐθεῖα εἶναι καὶ ἴση μετὰ τὴν δο-
 θεῖσαν $\mathbf{B}\Gamma$, καὶ πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ Λ , ὡς ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ι ς. γ'.

Δύο ἀνίστων δοθεισῶν εὐθειῶν, νὰ ἀφέλῃται ἀπὸ τῆς μείζονος μέρος ἴσον μὲ τὴν ἐλάσσονα.

Ἐξωσαν $AB, \Gamma\Delta$ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι. σχ. 27.

Πρὸς τῷ σημείῳ B πέρατι τῆς μείζονος εὐθείας AB γράψω τὴν $BE = \Gamma\Delta$ δοθείτη (πρ. β'). εἶτα κέντρω μὲν τῷ B , διαστήματι δὲ τῷ BE γράψω κύκλον τὸν ZEH , καὶ λέγω ὅτι ἡ BZ εὐθεῖα εἶναι ἡ ζητούμενη εὐθεῖα.

Καθότι ἐπειδὴ ἡ $BE = \Gamma\Delta$, ἐκ τῆς κατασκευῆς.. καὶ ἡ $BE = BZ$, καθὸ ἡμιδιάμετροι, διὰ τοῦτο καὶ ἡ $BZ = \Gamma\Delta$ (αξ. α'). Ὡς ἀπὸ τῆς μείζονος AB ἀφῆρηται μέρος: τὸ BZ , ἴσον μὲ τὴν ἐλάσσονα $\Gamma\Delta$, ὡς ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ι ς. δ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσιν ἴσας τὰς δύο πλευράς: ἑκατέραν ἑκατέρα, καὶ τὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ τῶν δύο ἴσων πλευρῶν περιεχομένην ἴσην, ἔξουσιν καὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἴσας, καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον θέλει εἶναι ἴσον μὲ ὅλον τὸ τρίγωνον.

Ἐσω ἡ μὲν πλευρὰ $AB = \Delta E$, ἡ δὲ $AG = \Delta Z$ καὶ ἡ γων. $A = \gammaων. \Delta$, τότε λέγω ὅτι καὶ ἡ βάσις $B\Gamma = EZ$ βάσει, καὶ ἡ γων. $\Gamma = \gammaων. Z$, καὶ ἡ γων. $B = \gammaων. E$, καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον $AB\Gamma = \text{τριγ. } \Delta EZ$. σχ. 28.

Καθότι ἂν ἐφαρμόσω τὴν γων. A ἐπὶ τὴν ἴσην αὐτῇ γων. Δ , τότε οὕτως τῆς μὲν $AB = \Delta E$, τῆς δὲ $AG = \Delta Z$, ἡ μὲν AB ἔχει νὰ ἐφαρμόσῃ μὲ τὴν ΔE , ἡ δὲ AG μὲ τὴν ΔZ . ὅθεν καὶ τὰ σημεία B , καὶ Γ ἐσφαρμώσονται μὲ τὰ σημεία E καὶ Z , καὶ ἐπομένως καὶ

ὁλόκληρος ἡ βάσις $ΒΓ$ μὲ ὁλόκληρον τὴν βάσιν $ΕΖ$, ἀλλίως δύο εὐθεῖαι περιέξουσιν χῶρον (ἀξ. ιβ'). ὥς αὖ αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ ἐνὸς τριγώνου ἐφαρμόσῃσι μὲ τὰς τρεῖς πλευράς τοῦ ἑτέρου, δῆλον ὅτι καὶ ἡ γων. $Β = \gamma\omega\upsilon.$ $Ε$, καὶ ἡ γων. $Γ = \gamma\omega\upsilon.$ $Ζ$, καὶ ὅλον τὸ τρίγ. $ΑΒΓ = \text{τρίγ.}$ $ΔΕΖ$, ὅπερ ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ί ς. έ.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις. . καὶ αὖ ἐπεκτανθῶσι τὰ ἴσα σκέλη αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι θέλουσιν εἶναι ἐπίσης ἴσαι ἀλλήλαις.

Ἐς τὸν τριγώνον ἰσοσκελὲς τὸ $ΑΒΓ$. σχ. 29.

Ἐπεκτείνω τὰ ἴσα σκέλη $ΑΒ$ καὶ $ΑΓ$ ἀόριστως μέχρι τῶν $Δ$ καὶ $Ε$ σημείων. . ἐπὶ τῆς $ΑΔ$ εὐθείας λαμβάνω ἓν τυχὸν σημεῖον, ὡς τὸ $Ζ$. . τέμνω ἀπὸ τῆς $ΑΕ$ εὐθείας τὴν $ΑΗ = ΑΖ$ (πρ. γ'). . ἄγω τὴν $ΖΓ$ καὶ $ΗΒ$. . καὶ λέγω πρῶτον ὅτι τὸ τρίγ. $ΑΓΖ = \text{τρίγ.}$ $ΑΒΗ$.

Καθότι ἡ μὲν $ΑΖ = ΑΗ$, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ δὲ $ΑΓ = ΑΒ$ ἐξ ὑποθέσεως, καὶ ἡ γων. $Α$ κοινὴ εἰς τὰ δύο τρίγωνα. . ὥς τὸ τρίγ. $ΑΓΖ = \text{τρίγ.}$ $ΑΒΗ$ (πρ. δ'), καὶ ἡ γων. $Ζ = \gamma\omega\upsilon.$ $Η$, καὶ ἡ βάσις $ΖΓ. = ΗΒ$ βάσει.

Ἄλλ' αἱ πλευραὶ $ΖΓ$, $ΗΒ$, καὶ αἱ γων. $Ζ$, καὶ $Η$ εἶναι ἐν ταυτῷ πλευραὶ καὶ γωνίαι τῶν δύο τριγώνων $ΖΒΓ$, $ΗΓΒ$, τούτου ἕνεκεν εἰς τὰ τρίγωνα $ΖΒΓ$, $ΗΓΒ$ ἔγω ἔχω γων. $Ζ = \gamma\omega\upsilon.$ $Η$, καὶ τὴν πλευρὰν $ΖΓ = ΗΒ$, ἔχω δὲ καὶ τὴν $ΖΒ = ΗΓ$ διὰ τὸ (ἀξ. ζ'), τούτου ἕνεκεν τὸ τρίγ. $ΖΒΓ = \text{τρίγ.}$ $ΗΓΒ$ (πρ. δ'), καὶ ἵπομέ-

ως καὶ ἡ γων. $ZBF = \text{γων. } HGB$. Ἀλλ' αὐταὶ αἱ γωνίαι εἶναι ὑπὸ τὴν βάσιν BF τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ABF . Ὡς οὖν δίδεται τὸ δεύτερον μέρος τοῦ ζητήματος.

Ἀλλ' ἀποδείχθαισιν ἅπαξ τῆς τε γων. $AFZ = \text{γων. } ABH$, καὶ τῆς γων. $ZGB = \text{γων. } HBG$, ἂν ἀφαιρέσω τὰς δευτέρας ἐκ τῶν πρώτων, ἔξω τὰ καταλείπα ἴσα (ἀξ. ζ.): ὁ ἐστὶν ἔξω γων. $ABF = \text{γων. } AFB$, ὅπερ εἶναι τὸ πρῶτον μέρος τοῦ ζητήματος. Ὡς...

Π ρ ό τ α σ ι ς. δ'.

Ἐὰν τρίγωνον ἔχη δύο γωνίας ἴσας ἀλλήλαις, ἔξει καὶ τὰς ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσας πλευρὰς ἴσας.

Εἰς τὸ τρίγωνον ABF ἔσω ἡ γων. $ABF = \text{γων. } AFB$, τότε λέγω ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ $AF = AB$ σχ. 30.

Εἰδὲ μὴ, ἔσωσαν ἄνιστοι, καὶ μείζων θατέρω αὐτῶν, ὡς ἡ AB . Τότε τέμνων ἀπ' αὐτῆς τὴν $AB = AF$ (πρ. γ.), ἄγω τὴν FD εὐθεῖαν, καὶ ἔχω τρίγ. $ABF = \text{τρίγ. } DBF$. διότι ἐγὼ ἔχω εἰς αὐτὰ τὴν μὲν $AB = AF$, ἐκ τῆς κατασκευῆς, τὴν δὲ BF κοινὴν πλευρὰν, τὴν δὲ γων. $ABF = \text{γων. } AFB$, ἐξ ὑποθέσεως, ὥς τὸ τρίγ. $ABF = \text{τρίγ. } AFB$ (πρ. δ'): ὁ ἐστὶ τὸ ὅλον εἶναι ἴσον μὲ τὸ μέρος αὐτοῦ, ὅπερ εἶναι ἀτοπον (ἀξ. ι.). Ὡς...

Π ρ ό τ α σ ι ς. ε'.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως δυσὶν εὐθείαις ἐπικειμέναις καὶ εἰς ἓν σημεῖον συμπίπτουσαι, ἄλλαι δύο, ἴσαι ἑκατέρω ἑκατέρω, ἀδυνατοῦσι νὰ σταθῶσιν ἐκ τοῦ αὐτοῦ μέρους, καὶ νὰ συμπέσωσιν εἰς ἄλλο σημεῖον.

Ἐσω AB ἡ Βάσις, καὶ AF , BF αἱ ἐπ' αὐτῆς ἐπικείμεναι καὶ εἰς τὸ σημεῖον F συμπίπτουσαι, λέγω

ὅτι ἂν ἡ $ΑΔ = ΑΓ$, καὶ ἡ $ΒΔ = ΒΓ$, ἀδυνατοῦσι νὰ συμπέσωσιν εἰς διαφορετικὸν σημεῖον τοῦ σημείου $Γ$, ὡς εἰς τὸ Δ. σχ. 31.

Ἔξω ὁμῶς τοῦτο δυνατόν. Ἄγω τὴν $ΓΔ$, καὶ ἔχω δύο τρίγωνα ἰσοσκελῆ τὰ $ΑΓΔ$, $ΒΔΓ$, καὶ διὰ τοῦτο ἡ μὲν $γων. ΑΓΔ = γων. ΑΔΓ$, ἡ δὲ $γων. ΒΔΓ = γων. ΒΓΔ$ (πρ. έ.): ὁ ἕστιν ἡ $γων. ΒΔΓ$ (οὕσα μέρος τῆς $γων. ΑΔΓ = ΑΓΔ$) = $γων. ΒΓΔ$ (ἣτις εἶναι ὅλον τῆς $γων. ΑΓΔ$): τουτέστι τὰ ὅλα ἴσα μὲ τὰ μέρη, ὅπερ εἶναι ἄτοπον.

Ἄλλ' εἶναι δυνατόν, ἤθελεν εἰποῖτε, νὰ συμπέσωσιν αἱ δευτέραι εὐθεῖαι ἢ ἐντός, ἢ ἔξωθεν τῶν πρώτων, ὡς εἰς τὸ σχ. 32.

Ἔξω. Τότε ἄγων τὴν $ΓΔ$ εὐθεῖαν, ἔξω δύο τρίγωνα ἰσοσκελῆ τὰ $ΑΓΔ$, $ΒΓΔ$. ἐπεκτείνω τὰ δύο ἴσα σκέλη τοῦ ἐνὸς ἰσοσκελοῦς τοῦ $ΒΓΔ$, καὶ οὕτως ἔξω τὰς ἀπὸ τὴν βάσιν $γωνίας$ ἴσας ἀλλήλαις (κατὰ τὴν αὐτὴν): τουτέστι τὴν $γων. ΕΓΔ = γων. ΖΔΓ$, ὡσαύτως καὶ τὴν $γων. ΑΔΓ = γων. ΑΓΔ$ ὡς πρὸς τῇ βάσει: ὁ ἕστι τὰ ὅλα ἴσα μὲ τὰ μέρη, ὅπερ εἶναι ἄτοπον. ὅθεν οὔτε ἡ $ΑΔ = ΑΓ$, οὔτε ἡ $ΒΔ = ΒΓ$ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν (α). Ὡς...

(α.) Αὕτη ἡ πρότασις ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν ἐξῆς: ἂν δύο τρίγωνα ἔχωσι καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας: ἰκάνην ἰκάνη, ὅν εἶναι δυνατόν νὰ μὴ σχῶσι καὶ τὰς $γωνίας$ ἴσας. Καθότι ἔγνωσαν $ΑΓ = ΑΔ$, καὶ $ΒΓ = ΒΔ$ σχ. 31, ἢ 32, καὶ ἐπικεῖσθωσαν καὶ αἱ τέσσαρες ἐπὶ τῆς $ΑΒ$ εὐθείας ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεία. Τότε ἂν αἱ μὲν δύο σύμ.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς. η'.

Ἐάν δύο τρίγωνα ἔχωσι καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας· ἐκάστην ἐκάστῃ, ἔξουσι καὶ τὰς τρεῖς γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν ὑποτεταγμένας ἴσας, καὶ τὰ τρίγωνα θί-
λουσιν εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

Εἰς τὰ τρίγωνα $ABΓ$, $ΔEZ$ ἔσω ἡ μὲν $AB = ΔE$,
ἡ δὲ $ΑΓ = ΔZ$, ἡ δὲ $BΓ = EZ$, τότε λέγω ὅτι καὶ
ἡ γων. $A =$ γων. $Δ$, καὶ ἡ γων. $B =$ γων. E , καὶ ἡ
γων. $Γ =$ γων. Z , καὶ τὸ τρίγ. $ABΓ =$ τρίγ. $ΔEZ$
σχ. 33.

Καθότι ἐφαρμόζω τὴν βάσιν AB ἐπὶ τῆς βάσεως
 $ΔE$, καὶ τότε εἶναι ἀναγκη νὰ ἐφαρμόσῃ καὶ ἡ $ΑΓ$ μὲ
τὴν $ΔZ$, καὶ ἡ $BΓ$ μὲ τὴν EZ : ὃ ἔστι καὶ τὸ σημεῖον $Γ$
μὲ τὸ σημεῖον Z , ἀλλέως ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως $ΔE$ δυ-
σὶν εὐθείαις ἐπικειμέναις καὶ εἰς τὸ σημεῖον Z συμπίπτου-
σαις, ἄλλαι δύο: αἱ $ΑΓ$, $BΓ$, ἱσῆς ἑκατέρας ἑκατέρᾳ,
συνηδύναι καὶ συμπίπτουσιν εἰς ἄλλο σημεῖον, ὥς εἰς
τὸ $Γ$, ὅπερ δίδεικται ἀδύνατον (πρ. ζ'). Ὡς... .

Π ρ ό τ α σ ε ι ς. θ'.

Νὰ διαιρέσῃ τις δίχα τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον
γωνίαν.

πίπτει εἰς τὸ $Γ$ σημεῖον, αἱ δὲ λοιπαὶ δύο εἰς τὸ $Δ$: ὃ ἔσω εἰς δύο
διαφορετικά, τότε τὰ γινόμενα τρίγωνα $ABΓ$, $ΑΒΔ$ θίλουσιν εἶναι
μὲν ἰσόπλευρα, πλὴν ὄχι καὶ ἰσογώνια. διότι ἡμῖν γων. $ΔAB$
 $<$ γων. $ΓAB$, ἡ δὲ γων. $ΔBA <$ $ΓBA$ σχ. 32. ὃ περιηλενόςτι ἀ-
ποδεικνύεται ἀδύνατον. Ὡς αὕτη μὲν ἡ πρότασις ἀποδεικνύει διὰ
τῆς ἀτόπου ἀπαγωγῆς τὸ πρᾶγμα, ἡ δὲ ἑξῆς διὰ τῆς εὐθείας: ἡ
ἂν θείλῃς ἡ μὲν ἀναγκαστικῶς, καὶ ἡ ἑτέρα συνδυαστικῶς...

Ἐξω ΒΑΓ ἡ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία. σχ. 34.

Λαμβάνω ἀπὸ τῆς ΒΑ εὐθείας τυχὸν σημείον τὸ Δ. .
ἀραιῶ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὴν $AE = AD$ (πρ. γ'). .. ἄγω
ἐκ ΔΕ εὐθεῖαν, καὶ ἐπ' αὐτῆς συνίστημι τρίγωνον ἰσό-
πλευρον τὸ ΔΖΕ (πρ. α'). .. ἄγω τὴν ΑΖ εὐθεῖαν,
καὶ ἔχω τρίγ. $ADZ =$ τρίγ. $A EZ$.

Καθότι εἰς ταῦτα τὰ τρίγωνα ἐγὼ ἔχω τὴν μὲν
 $AD = AE$, τὴν δὲ $DZ = EZ$, ἐκ τῆς κατασκευῆς,
καὶ τὴν ΑΖ κοινὴν πλευράν. Ὡς τὸ τρίγ. $ADZ =$ τρίγ.
 $A EZ$ (πρ. ή.) , καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ γων. $ZAD =$ γων.
 $ZE A$: ὁ εἰς ἡ γων. ΔΑΕ δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς ΑΖ
εὐθείας.

ΠΟΡΙΣΜΑ (α).

Ὡς διὰ τῆς εἰς δίχα ὑποδιαιρέσεως, δύναται τις νὰ
διαίρῃ μίαν γωνίαν καὶ εἰς τέσσαρα, καὶ εἰς ὅτι, κτξ.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς ι'.

Νὰ διαίρῃ τις δίχα τὴν δοθεῖσαν μὴ ἄπειρον εὐ-
θεῖαν.

Ἐξω ΑΒ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα σχ. 35.

Συνίστημι ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΓΒ
(πρ. α') .. διαίρῶ δίχα τὴν γωνίαν ΑΓΒ (πρ. θ') διὰ
τῆς ΓΔ εὐθείας, καὶ λέγω ὅτι ἡ $AD = BD$.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ εἰς τὰ τρίγωνα ΑΓΔ, ΒΓΔ ἡ
μὲν $AG = BG$, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ δὲ ΓΔ κοινὴ, ἡ
δὲ γων. $AGD =$ γων. BGD , ἐκ τῆς κατασκευῆς, διὰ

(α.) Τὸ πόρισμα εἶναι πρότασις τις, ἀπὸ ἀποδείξεως, ὡς
προσποικισμένην.

τοῦτο καὶ ἡ $AD = BD$ (πρ. δ'). Ὡς ἐπὶ τὴν AB δίχα τε-
 μνῆται κατὰ τὸ Δ , ὡς ἐξηγεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ι ς ια'.

Μετὰ τὴν δοθείσαν εὐθείαν νὰ ὑψώσῃται πρὸς ὀρθὰς
 εὐθείαν ἀπὸ τοῦ ἐπ' αὐτῆς δοθέντος σημείου.

Ἐστω AB ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, καὶ Γ τὸ ἐπ' αὐτῆς
 δοθὲν σημεῖον σχ. 36.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας AB λαμβάνω ἐν τυχόν
 σημείον, ὡς τὸ Δ .. ἀφαιρῶ ἀπὸ τῆς GB τὴν $EG =$
 $\Delta\Gamma$ (προτ. γ').. ἐπὶ τῆς ΔE συνίστημι τρίγωνον ἰσοπλευ-
 ρον τὸ ΔZE .. ἄγω τὴν $Z\Gamma$ εὐθείαν, καὶ λέγω ὅτι αὕτη
 εἶναι πρὸς ὀρθὰς μετὰ τὴν AB δοθείσαν εὐθείαν.

Καθότι εἰς τὰ τρίγωνα $Z\Gamma\Delta$, $Z\Gamma E$ ἡ μὲν $\Delta Z =$
 EZ , ἡ δὲ $\Delta\Gamma = E\Gamma$, ἐκ τῆς κατασκευῆς, καὶ ἡ $Z\Gamma$
 κοινὴ πλευρά. Ὡς καὶ ἡ γων. $Z\Gamma\Delta =$ γων. $Z\Gamma E$
 (προτ. ή): ὁ ἐστὶν ἡ εὐθεῖα ΓZ ὑψώται πρὸς ὀρθὰς μετὰ
 τὴν δοθείσαν AB (ὁρ. ζ'), καὶ ἀπὸ τοῦ ἐπ' αὐτῆς Γ
 δοθέντος σημείου, ὡς ἐξηγεῖτο.

Π ό ρ ι σ μ α α'.

Ὡς ἐάν τις λάβῃ δύο σημεῖα ἐπίσης ἀπέχοντα ἀ-
 πὸ τοῦ πέρατος μιᾶς πρὸς ὀρθὰς εὐθείας, καὶ ἄξῃ δύο εὐ-
 θείας εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς πρὸς ὀρθὰς, αὗται αἱ εὐ-
 θεῖαι θέλουσιν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις. Οὕτως ἡ $\Delta Z =$
 EZ .. διότι $\Delta\Gamma = E\Gamma$.

Π ό ρ ι σ μ α β'.

Καὶ ἂν ἡ μὲν $\Delta\Gamma = E\Gamma$, ἡ δὲ $\Delta Z = EZ$, ἡ
 ΓZ θελεῖ εἶναι πρὸς ὀρθὰς μετὰ τὴν AB .

Π ό ρ ι σ μ α γ'.

"Ως ἐυκόλως ἤθελεν ἀναγράψαι τις τρίγωνον ἰσοσκελές. Καθότι ἂν εἰς ἓν τῆς πρὸς ὀρθὰς ὑψωθείσης ἄξῃ δύο εὐθείας ἀπὸ δύο σημείων ἀπεχόντων ἐπίσης τῆς ἀρχῆς αὐτῆς, τὸ συνησόμενον τρίγωνον θέλει εἶναι ἰσοσκελές. Οὕτως οὕσης τῆς $\Gamma\Delta = \Gamma\epsilon$, τὸ τρίγωνον $\epsilon\Delta\text{Z}$ εἶναι ἰσοσκελές.

Π ρ ό τ α σ ι ς ιβ'.

Ἐπὶ τὴν δοθείσαν ἄπειρον εὐθεῖαν νὰ καταξῇ τις, κάθετον ἀφ' ἑνὸς σημείου κειμένου ἔξωθεν αὐτῆς.

Ἔσω Λ τὸ ἐξωθέν σημεῖον, καὶ $\text{B}\Gamma$ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα σχ. 37.

Ἐπεκτείνω τὴν $\text{B}\Gamma$ εὐθεῖαν ἀδιορίσως μέχρι τοῦ Δ σημείου (αἵτη. β'). εἴτα κέντρῳ μὲν τῷ Λ , διαστήματι δὲ τῷ $\Lambda\epsilon$ ὑπερβαίνοντι πρὸς τὰ ἄλλα μέρη τῆς εὐθείας, γράφω κύκλον τὸν $\text{Z}\epsilon\text{H}$. τέμνω τὴν ZH εὐθεῖαν δίχα κατὰ τὸ σημεῖον Θ . ἄγω τὰς εὐθείας $\Lambda\Theta$, ΔZ , ΛH , καὶ λέγω, ὅτι ἡ γων. $\Lambda\Theta\text{Z} = \text{γων. } \Lambda\Theta\text{H}$.

Καθότι εἰς τὰ τρίγωνα $\text{Z}\Lambda\Theta$, $\text{H}\Lambda\Theta$ ἡ μὲν $\Lambda\text{Z} = \Lambda\text{H}$, καθὼς ἡμιδιάμετροι, ἡ δὲ $\text{Z}\Theta = \text{H}\Theta$, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ δὲ $\Lambda\Theta$ κοινὴ πλευρὰ, ὅθεν ἡ γων. $\Lambda\Theta\text{Z} = \text{γων. } \Lambda\Theta\text{H}$ (πρ. η'). "Ως ἡ $\Lambda\Theta$ ἥκται καθέτως ἐπὶ τὴν ΛB (ὁρ. ζ'), ὅπερ δηλονότι ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ι ς ιγ'.

"Αν εὐθεῖα σταθῇ ἐπ' εὐθείας, αἱ γεννησόμεναι δύο γωνίαι θέλουσιν εἶναι ὀρθαί, ἢ ἴσαι δυτὶν ὀρθαῖς.

Ἔσω ΛB ἡ ἐφεσηκυῖα εὐθεῖα, καὶ $\Gamma\Delta$, ἐφ' ἧς ἐφέστηκε σχ. 38.

Τότε ἐγὼ λέγω ὅτι ἡ AB ἦ εἶναι κάθετος: ὅ. ἐστὶν ἡ γων. $AB\Gamma = \gamma\omega\nu$. $AB\Delta$, ἡ δὲν εἶναι.. ἂν δὲν ἦναι ἐπὶ πρὸς ὀρθὰς ἀπὸ τοῦ B σημείου τὴν BE (πρ. ια'). καὶ ἔχω γων. $EB\Gamma = \gamma\omega\nu$. $EB\Delta = 90^\circ$ (ὁρ. ζ'). Ἀλλ', ὡς ὁράται, τὸ τούτων κεφάλαιον: τουτέστι γων. $EB\Gamma + \gamma\omega\nu$. $EB\Delta = \gamma\omega\nu$. $EB\Gamma + \gamma\omega\nu$. $EB\Delta + \gamma\omega\nu$. $AB\Delta = \gamma\omega\nu$. $AB\Gamma + \gamma\omega\nu$. $AB\Delta$. "Ὡς αἱ δύο ἐκθεῖσαι γωνίαι, εἴτε αἱ γων. $AB\Gamma + \gamma\omega\nu$. $AB\Delta = \gamma\omega\nu$. $EB\Gamma + \gamma\omega\nu$. $EB\Delta = 180^\circ$: τουτέστι μὲ δύο ὀρθὰς ἴσαι, ὅπερ ἐζητεῖτο.

Π ό ρ ι σ μ α α'.

"Ὡς αὖ πολλὰ εὐθεῖαι σταθῶσιν ἐπὶ μίχυν εὐθείαν κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἅπασαι αἱ γενησόμεναι γωνίαι θίλουσιν εἶναι ἴσαι μὲ δύο ὀρθὰς, εἴτε $= 180^\circ$.

Π ό ρ ι σ μ α β'.

'Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ἀπὸ τοῦ ἀπέναντι μέρους τῆς αὐτῆς εὐθείας δὲν εἶναι τρόπος νὰ ὑπάρξῃ διαφόρως, τούτου ἕνεκεν ἅπασαι αἱ γενοόμεναι γωνίαι εἰς ἓν σημείου μίαν εὐθείαν, εἶναι ἴσαι. μὲ τέσσαρας ὀρθὰς, εἴτε $= 360^\circ$.

Π ό ρ ι σ μ α γ'.

"Ὡς δύο εὐθεῖαι τέμνουσαι ἀλλήλας, ἐκτελοῦσαι γωνίας $= 360^\circ$.

Π ό ρ ι σ μ α δ'.

"Ὅτι αὖ ἄχθῃ εὐθεῖα ἐπὶ κοίλης, αἱ δύο ἐφεξῆς γωνίαι $< 180^\circ$, εἰδὲ ἐπὶ κυρτῆς $> 180^\circ$. Καθότι αἱ γων. $EB\gamma + \gamma\omega\nu$. $EB\delta < \gamma\omega\nu$. $EB\Gamma + \gamma\omega\nu$. $EB\Delta$,

ὥς μέρος καὶ ὅλον, ἐν ᾧ ἀκολουθεῖ... τὸ ἀναπαλεῖν ἀπὸ τοῦ κυρτοῦ μέρους.

Π ρ ό τ α σ ι ς ιβ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσαι μὲ μίαν τρίτην κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον, ὅχι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ μέρους αὐτῆς, ἐκτελούντι τὰς ἐφ' ἑξῆς γωνίας ἴσας μὲ δύο ὀρθὰς, αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι θίλονται κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἐξώσαν AB, καὶ ΓΒ αἱ συμπίπτουσαι μὲ τὴν ΔΒ εὐθεῖαν κατὰ τὸ Β σημεῖον οὕτως, ὥς αἱ γων. $\Lambda B \Delta + \gamma \omega \nu. \Delta B \Gamma = 180^\circ$. σχ. 39.

Τότε ἐγὼ λέγω ὅτι ἡ AB, καὶ ΓΒ εἶναι μία εὐθεῖα, ἀλλέως: ἂν δηλονότι δὲν ἦναι μία εὐθεῖα, εἶναι δυνατόν νὰ ἀχθῇ μία ἄλλη ἐπ' εὐθείας μὲ τὴν AB, καὶ ἔσω ἡ BE. Ἀλλὰ τότε γων. $\Lambda B \Delta + \gamma \omega \nu. \Delta B E = 180^\circ$, εἴτε μὲ δύο ὀρθὰς (πρ. ιγ'). καὶ ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἡ γων. $\Lambda B \Delta + \gamma \omega \nu. \Delta B \Gamma = 180^\circ$, τούτου ἔνεκεν ἀφαιρῶν κοινῶς τὴν γων. $\Lambda B \Delta$, ἔσω γων. $\Delta B \Gamma = \gamma \omega \nu. \Delta B E$ (ἀξ. ζ'): ὁ ἐστὶ τὸ ὅλον ἴσον μὲ τὸ ἴδιον μέρος, ὅπερ εἶναι ἀτοπον. Ὡς...

Π ρ ό τ α σ ι ς ιε'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ποιήσουσι τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις (α).

(α) Θαλῆς λέγεται ὁ ἐφευρετὴς ταύτης τῆς προτάσεως. Καὶ ἂν τοῦτο εἰχεται ἀληθείας, τότε οἱ Αἰγύπτιοι, ὡς περ αὐτὸς ὑπέρβει μαθητῆς, ἢ ἡγούμενος αὐτῆς, ἢ γράσκοντες ὑπάρχοντες ἐκ τῶν μαθητῶν: ὁ ἐστὶ καθ' ἑκάτερον ἡσὼν ὅχι μεγάλου πνεύματος. Ὅθεν ἐσοὶ παραβάλλοις αὐτοὺς μὲ τοῖς Ἕλλησι, ἔχουσιν ἀδύνατον τὴν ὁρᾶσθαι.

Ἐξῆσαν αἱ διατεμνόμεναι $AB, ΓΔ$, τότε λέγω
ὅτι $\gammaων. AED = \gammaων. ΓEB$. σχ. 40.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἡ εὐθεῖα $ΓΕ$ ἴσεται ἐπὶ τὴν
 AB , διὰ τοῦτο αἱ $\gammaων. ΓEB + \gammaων. AEG = 180^\circ$
(πρὸς. γ'). .. ὡσαύτως ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα AE ἴσεται ἐ-
πὶ τῆς $ΓΔ$, διὰ τοῦτο αἱ $\gammaων. ΓEA + \gammaων. AED =$
 180° .. ἀραιῶ κοινῶς τὴν γωνίαν $ΓEA$, καὶ μένει $\gammaων.$
 $ΓEB = \gammaων. AED$ (ἀξ. ζ.) .. κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον
ἤθελεν ἀποδειχθῆ καὶ $\gammaων. ΓEA = \gammaων. ΔEB$. Ὡς...

Π ρ ό τ α σ ι ς ις'.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθεί-
σης, ἡ ἐκτὸς γωνία θίλει εἶναι μείζων ἐκατέρας τῶν
ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον.

Προτεκβεσθήσθω ἡ πλευρὰ $ΒΓ$ τοῦ τριγώνου $ABΓ$,
τότε λέγω ὅτι, $\gammaων. AΓΔ > \gammaων. ΓBA$ καὶ τῆς $ΓAB$.
σχ. 41.

Καθότι τέμνω δίχα τὴν $ΑΓ$ πλευρὰν κατὰ τὸ E
σημεῖον (πρ. ι') .. ἄγω τὴν BE εὐθεῖαν .. τὴν ἐπεκτεί-
νω, ὥς οὗ ἡ $EZ = BE$ (πρ. β') .. ἄγω τὴν $ZΓ$ εὐ-
θεῖαν, καὶ λέγω ὅτι ἡ $\gammaων. EΓZ = \gammaων. BAE$.

Καθότι εἰς τὰ τρίγωνα $BAE, ΓZE$ ἡ μὲν BE
 $= EZ$, ἡ δὲ $AE = EG$, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ δὲ $\gammaων.$
 $BEA = \gammaων. ZEG$ (πρ. ις') .. διὰ τοῦτο καὶ $\gammaων. EΓZ$
 $= \gammaων. BAE$ (πρ. δ') .. ἀλλ' ἡ $\gammaων. EΓΔ > \gammaων.$
 $EΓZ$ (ἀξ. ι') .. ὥς θίλει εἶναι ἐπίσης μείζων καὶ τῆς
ταύτης ἴσης τῆς $BAΓ$ λέγω.

Διὰ τῆς ὁμοίας κατασκευῆς καὶ ἀποδείξεως ἤθελεν
ἀποδειχθῆ, ὅτι καὶ $\gammaων. OΓH = \gammaων. ABH$.. ἀλλ' ἡ $\gammaων.$

$\Theta\Gamma\text{H} = \gamma\omega\nu$. $\Delta\Gamma\text{Z}$, καθὸ κατὰ κορυφήν .. ὥστε ἡ $\gamma\omega\nu$. $\Delta\Gamma\text{Z} = \gamma\omega\nu$. ABH , καὶ διὰ τοῦτο ἡ $\gamma\omega\nu$. $\text{E}\Gamma\Delta > \gamma\omega\nu$. $\text{AB}\Delta$. Ὡς...

Π ρ ό τ α σ ι ς ιζ'.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι εἶναι ἐλάσσονες δύο ζῆθόν.

Καθότι αἱ $\gamma\omega\nu$. $\text{A}\Gamma\Delta + \gamma\omega\nu$. $\text{A}\Gamma\text{B} = 180^\circ$ (πρ. ιγ'). σχ. 41. Ἄλλ' ἀπεδείχθη ὅτι ἡ $\gamma\omega\nu$. $\text{A}\Gamma\Delta > \gamma\omega\nu$. ΓAB , καὶ τῆς $\text{AB}\Gamma$ (πρ. ι'). .. ὥστε αἱ $\gamma\omega\nu$. $\text{A}\Gamma\text{B} + \gamma\omega\nu$. $\Gamma\text{AB} < 180^\circ$. Ὡσαύτως καὶ αἱ $\gamma\omega\nu$. $\text{A}\Gamma\text{B} + \gamma\omega\nu$. $\Gamma\text{BA} < 180^\circ$.. καὶ τέλος καὶ αἱ $\gamma\omega\nu$. $\Gamma\text{AB} + \gamma\omega\nu$. $\Gamma\text{BA} < 180^\circ$.

Π ρ ό τ α σ ι ς ιη'.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Εἰς τὸ τρίγωνον $\text{AB}\Gamma$ ἔσω ἡ πλευρὰ $\text{AB} > \Delta\Gamma$ πλευρᾶς, τότε λέγω. ὅτι καὶ $\gamma\omega\nu$. $\text{A}\Gamma\text{B} > \gamma\omega\nu$. ΓBA . σχ. 42.

Ἀπὸ τῆς AB τέμνω τὴν $\text{A}\Delta = \text{A}\Gamma$ (πρ. γ'). .. ἄγω τὴν $\Gamma\Delta$ εὐθείαν, καὶ ἔχω $\gamma\omega\nu$. $\text{A}\Delta\Gamma = \gamma\omega\nu$. $\text{A}\Gamma\Delta$ (πρ. ε'). .. ἀλλὰ $\gamma\omega\nu$. $\Gamma\Delta\text{A} > \gamma\omega\nu$. $\Delta\text{B}\Gamma$ (πρ. ις'). .. ὥστε καὶ $\gamma\omega\nu$. $\text{A}\Gamma\Delta > \gamma\omega\nu$. $\Delta\text{B}\Gamma$, καὶ ἔτι πολλῶ μείζων ταύτης ἡ $\gamma\omega\nu$. $\text{A}\Gamma\text{B}$. Ὡς...

Π έ ρ ι σ μ α.

Ὡς παντὸς τριγώνου ἡ ἐλάσπων πλευρὰ τὴν ἐλάσσονα γωνίαν ὑποτείνει. .. καὶ ἐπομένως τὰ σκαληνὰ ἔχει ἀνίσους τὰς τρεῖς γωνίας.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς ιθ'.

Παντός τριγώνου ἡ μείζων γωνία ὑποτείνεται ὑπὸ τῆς μείζονος πλευρᾶς.

Εἰς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἔσω γων. $A >$ γων. B , τότε λέγω ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ $\Gamma B >$ ΓA πλευρᾶς. σχ. 43.

Ἀλλέως, ἡ ἴση ἤθελεν εἶναι ἡ ἐλάσσων... ἔσω λοιπὸν τὸ πρῶτον: ὃ ἐστὶν ἔσω $\Gamma B = \Gamma A$, ἀλλὰ τότε ἤθελεν εἶναι καὶ ἡ γων. $A =$ γων. B (πρ. ε'), ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἐστὶν τὸ δεύτερον: ὃ ἐστὶν ἔσω $\Gamma B <$ ΓA , ἀλλὰ τότε ἤθελεν εἶναι καὶ γων. $A <$ γων. B (πρ. ιη'), ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ὡς ἐπειδὴ ἡ πλευρὰ ΓB ἀδυνατεῖ νὰ ᾔηται μήτε ἴση, μήτε ἐλάσσων τῆς πλευρᾶς ΓA , ἀναγκαίως δεῖ εἶναι μείζων, ὅπερ ἐζητεῖτο.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὡς ἐξ τε τὰ ὀρθογώνια καὶ ἀμβλυγώνια τρίγωνα ἡ ὑποτείνουσα πλευρὰ τὴν ὀρθὴν καὶ ἀμβλείαν γωνίαν εἶναι μείζων ἑκατέρας τῶν λοιπῶν.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς κ'.

Παντός τριγώνου τὸ κεφάλαιον τῶν δύο πλευρῶν εἶναι μείζον τῆς τρίτης (α).

(α) Ὁ Ἀρχιμήδης φαίνεται ὅτι ἐξέλαβεν εἰς ἀξίωμα ταύτην τὴν πρότασιν, ὅθιν καὶ ὠρίσατο τὴν ἐνδεῆ γραμμὴν συμμορτάτην πασῶν τῶν γραμμῶν τῶν περατουμένων εἰς δύο σημεία (ὄρον. γ. σημ.), εἴτε καμπυλῶν δηλευστέ, εἴτε εὐθειῶν καὶ ἐμπευστῶν γωνίαν.

Εἰς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$, λέγω ὅτι αἱ πλευραὶ $AF + FB > AB$. σχ. 44.

Ἐπεκτείνω τὴν AF ἕως οὗ ἡ $ΓΔ = FB$ (πρ. γ'). .. καὶ ἔχω γωνίαν $ΓΔB =$ γων. $ΓBΔ$ (πρ. ε'). Ἀλλ' ἡ γων. $ABΔ > ΓBΔ$, ὡς ὅλον μέρος, διὰ τοῦτο θέλει εἶναι μείζων καὶ τῆς ταύτης ἴσης: τῆς $ΓΔB$.. ὅθεν ἡ AD εἶτε αἱ $AF + FB > AB$ (πρ. ιθ'). .. ὁμοίον τι ἤθελε λεχθῆ καὶ περὶ τῶν λοιπῶν πλευρῶν. Ὡσε...

Π ρ ό τ ι α σ ι ς. κα'.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ἑνὸς τριγώνου συσταθῇται ἄλλαι δύο εὐθεῖαι συμπέσωσιν εἰς ἓν τῶν ἐντὸς αὐτοῦ σημείων, τὸ μὲν κεφάλαιον αὐτῶν θέλει εἶναι ἐλασσον τῶν πρώτων, περιέξουσι δ' ὅμως μείζονα γωνίαν.

Ἐξωσαν αἱ AD , BD αἱ δευτέραι εὐθεῖαι, τότε λέγω ὅτι αἱ μὲν $AD + BD < AF + BF$, πλὴν ἡ γων. $D >$ γων. $Γ$. σχ. 45.

Ἐπεκτείνω τὴν AD πλευρὰν, ἕως οὗ νὰ συμπέσῃ μετ' τὴν $BΓ$ κατὰ τὸ σημεῖον E , καὶ οὕτως ἔχω $BE + ED > AB$ (πρ. ιθ') .. προσέθῃμε κοινῶς τὴν AD , καὶ ἔχω $AE + BE > AD + BD$. Ἀλλὰ $AF + FE > AE$ (κατὰ τὴν αὐτήν), ὅθεν προσιδέμενος κοινῶς τὴν BE , ἔξω $AF + FE + EB$: ὁ ἐστὶν $AF + BF > AE + BE$. Ἀλλὰ δεδεικται $AD + BD < AE + BE$. Ὡσε πολλῶ πλεον αἱ $AD + BD < AF + BF$, ὅπερ δηλονότι εἶναι τὸ πρῶτον μέρος τῆς προτάσεως.

Εἰς τὸ τρίγ. BDE ἡ ἐκτὸς γων. $BDA > BED$ (πρ. ις') .. διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ ἐκτὸς γων. $BED >$ γων. $EΓA$.. ὅθεν πολλῶ μᾶλλον ἡ γων. $BDA >$ γων. $EΓA$,

εἴτε τῆς ΒΓΑ, ὅπερ εἶναι τὸ δεύτερον μέρος τῆς προτάσεως. Ὡς . . .

Π ρ ό τ α σ ε ι ς κβ'.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, ἐξ ὧν ἐκάστη νὰ ἦναι ἐλάσσων τοῦ κεφαλαίου τῶν λοιπῶν δύο, νὰ συστήσῃ τις τρίγωνον.

Ἐς ὧταν Α, Β, Γ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι. σχ. 46.

Γράφω τὴν ΔΕ εὐθεῖαν .. ἐκ ταύτης λαμβάνω τὴν μὲν ΔΖ = Α, τὴν δὲ ΖΗ = Β, τὴν δὲ ΗΘ = Γ (πρ. γ'). .. εἴτα κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΖ, γράφω κύκλον τὸν ΔΙΚ.. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΘ, γράφω κύκλον τὸν ΙΟ .. ἄγω τὰς εὐθείας ΖΙ, ΗΙ, καὶ λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον ΖΙΗ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Καθότι ἡ μὲν πλευρὰ αὐτοῦ ΖΙ = ΔΖ, καθὸ ἡμιδιάμετροι, ἡ δὲ ΗΙ = ΗΘ, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον.. ἀλλ' ἡ μὲν ΔΖ = Α, ἡ δὲ ΖΗ = Β, ἡ δὲ ΗΘ = Γ, ἐκ τῆς κατασκευῆς. Ὡς τὸ τρίγωνον ΖΙΗ συνιστᾷ ἐκ τριῶν εὐθειῶν ἴσων μὲ τὰς τρεῖς δοθείσας, ὡς ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς κγ'.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ ἐπ' αὐτῆς δοθέντι σημείῳ, νὰ συστήσῃ τις γωνίαν εὐθύγραμμου ἴσην μὲ τὴν δοθείσαν εὐθύγραμμου.

Ἐς ὧ ΑΒ ἡ δοθείσα εὐθεῖα, Α τὸ ἐπ' αὐτῆς σημείον, καὶ ΔΓΕ ἡ δοθείσα εὐθύγραμμος γωνία. σχ. 47.

Ἐπὶ τῶν σκελῶν τῆς δοθείτης γωνίας λαμβάνω δύο τυχόντα σημεία: τὰ Ζ, Η.. ζευγνύω αὐτὰ διὰ τῆς εὐθείας ΖΗ.. εἴτα ἐκ τριῶν εὐθειῶν ἴσων μὲ τὰς τρεῖς εὐθείας ΓΖ, ΓΗ, ΖΗ ἐκτελῶ τρίγωνον τὸ ΘΑΙ (πρ.

κβ'), ὅπερ δηλονότι εἶναι ἴσόν μετ' τὸ τρίγ. ZΓΗ (πρ. η')., καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ γων. ΘΑΙ = γων. ZΓΗ, ὡς ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ι ς. κδ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς δύο πλευρὰς ἴσας ταῖς ἀπὸ πλευραῖς: ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὸ δ' ἐν ἔχει μείζονα τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένην γωνίαν, ἔξει μείζονα καὶ τὴν βάσιν.

Εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔσωσαν ΑΒ = ΔΕ, καὶ ΑΓ = ΔΖ, ἡ δὲ γων. Α > γων. ΕΔΖ, τότε λέγω ὅτι καὶ ἡ ΒΓ > ΕΖ. σχ. 48.

Πρὸς τῇ ΕΔ εὐθείᾳ καὶ τῷ ἐπ' αὐτῆς σημείῳ Δ συνίστημι γων. ΕΔΗ = γων. Α (πρ. κγ'). ἔκτελῶ τὴν πλευράν ΔΗ = ΔΖ = ΑΓ, καὶ οὕτως ἡ ΕΗ = ΒΓ (πρ. δ').

Οὗτος λοιπὸν ἰσοσκελεὺς τοῦ τριγώνου ΖΔΗ, ἡ γων. ΔΗΖ = γων. ΔΖΗ.. ἀλλ' ἡ γων. ΕΖΗ > γων. ΔΖΗ, καθὸ ὅλον, διὰ τοῦτο γων. ΕΖΗ > γων. ΔΗΖ > γων. ΕΗΖ. ὥστε οὕτως τῆς γων. ΕΖΗ > γων. ΕΗΖ, θίλει εἶναι καὶ ἡ πλευρὰ ΕΗ > ΕΖ (πρ. ιη')... ἀλλ' ἐκ τῆς κατασκευῆς ἡ ΕΗ = ΒΓ, ὥστε καὶ ἡ ΒΓ > ΕΖ, ὅπερ ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ι ς. κε'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς δύο πλευρὰς ἴσας ταῖς ἀπὸ πλευραῖς: ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὸ δ' ἐν ἔχει μείζονα τὴν βάσιν, ἔξει μείζονα καὶ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένην γωνίαν.

Εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔσωσαν ΑΒ = ΔΕ,

καὶ $ΑΓ = ΔΖ$, καὶ ἡ $ΒΓ > ΕΖ$, τότε λέγω ὅτι καὶ ἡ γων. $Α > γων. ΖΔΕ$. σχ. 48.

Ἀλλέως, θέλει εἶναι ἡ ἴση, ἡ ἐλάσσων. Ἐξω λοιπὸν α' ἡ γων. $Α = γων. ΖΔΕ$, τότε θέλει εἶναι καὶ τὸ τρίγ. $ΑΒΓ =$ τρίγ. $ΔΕΖ$, καὶ ἡ $ΒΓ = ΔΖ$ (πρ. δ'), ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἐξω β' ἡ γων. $Α < γων. ΖΔΕ$, τότε καὶ ἡ $ΒΓ < ΕΖ$ (πρ. κδ'), ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ὡςτε μὴ οὕσα ἡ γων. $Α$ οὔτε ἴση, οὔτε ἐλάσσων· τῆς γων. $ΖΔΕ$, ἐξ' ἀνάγκης πρέπει νὰ ᾖται μείζων, ὅπερ καὶ ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς. κς'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσιν ἴσας τὰς δύο γωνίας καὶ τὴν μίαν πλευρὰν, ἦτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἡ τὴν ὑποτείνουσαν τὴν μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, ἴσην ἔξουσι καὶ τὴν τρίτην γωνίαν καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς πρὸς ἀλλήλας.

Εἰς τὰ τρίγωνα $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$ ἔςωσαν γων. $Α = γων. Δ$, καὶ γων. $Β = γων. Ε$, καὶ μία πλευρὰ ἴση μὲν πλευρᾷ: τουτέστιν εἴτε ἡ πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις ὡς ἡ $ΑΒ = ΔΕ$, εἴτε ἡ ὑποτείνουσα μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, ὡς ἡ $ΒΓ = ΕΖ$, τότε λέγω ὅτι καὶ τὸ τρίγωνον $ΑΒΓ =$ τρίγ. $ΔΕΖ$. σχ. 49.

α'. Ἐξω ἡ πλευρὰ $ΑΒ = ΔΕ$, οὔσης δηλ. καὶ τῆς μὲν γων. $Α = γων. Δ$, τῆς δὲ γων. $Β = γων. Ε$. Ἐπιτίθεται τὴν $ΔΕ$ ἐπὶ τὴν $ΑΒ$, καὶ καθ' ἴσιν ἔχει τὰ ἐφαρμόση μὲ αὐτήν (αξ. δ'). Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ἡ μὲν γων. $Α = γων. Δ$, ἡ δὲ γων. $Β = γων. Ε$, διὰ τοῦτο ἡ μὲν πλευρὰ $ΔΖ$ ἔχει νὰ ἐφαρμόση μὲ τὴν $ΑΓ$, ἡ

δὲ EZ μὲ τὴν BΓ, καὶ ἐπομένως καὶ ἡ σύμπτωση αὐ-
τῶν Z μὲ τὴν σύμπτωσιν ἐκείνων Γ, ἀλλέως.. ὁ ἐστὶν
ἂν τὸ σημεῖον Z πεσῇται ἔξω τοῦ σημείου Γ, τότε οὔτε
αἱ ΔZ, EZ ἐφαρμόσουσι μὲ τὰς ΑΓ, ΒΓ: ὁ ἐστὶν οὔτε
ἡ γων. Α = γων. Δ, οὔτε ἡ γων. Β = γων. Ε, ὅπερ
εἶναι ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Ὡς καὶ τὸ σημεῖον Z
ἐφαρμόσει μὲ τὸ σημεῖον Γ, καὶ οὕτως ἡ γων. Γ = γων.
Z, καὶ ἡ ΑΓ = ΔZ, καὶ ἡ ΒΓ = EZ, ὅπερ ἐζη-
τεῖτο.

β'. Ἐξω ἡ BΓ = EZ: αἱ ὑποτείνουσαι ἀηλονότι
μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, διαμενουσῶν ἐν ταυτῇ τῆς μὲν
γων. Α = γων. Δ, τῆς δὲ γων. Β = γων. Ε, τότε
θέλει εἶναι καὶ ἡ AB = ΔΕ.

Εἰ δὲ καὶ δὲν εἶναι ἡ AB = ΔΕ, ἔξω θατέρᾳ αὐ-
τῶν μείζων, καὶ ἔξω ἡ ΔΕ > AB.. τότε λαμβάνων
τὴν αΕ = AB (πρ. γ'). ἔχω εἰς τὰ τρίγωνα ΖαΕ, ΓΑΒ
τὴν μὲν αΕ = AB, ἐκ τῆς κατασκευῆς, τὴν δὲ EZ = BΓ,
καὶ τὴν γων. Ε = γων. Β, ἐξ ὑποθέσεως.. ὥς καὶ ἡ
γων. ΖαΕ = γων. ΓΑΒ (πρ. δ'). Ἀλλ' ἡ γων. ΖαΕ >
γων. ΖΔα (πρ. ις'). διὰ τοῦτο ἡ γων. ΖαΕ > γων. ΓΑΒ:
καὶ ἴση δηλονότι καὶ ἄνιστος. Ὡς ἡ ΔΕ δὲν εἶναι μείζων
τῆς AB, καὶ ἐπομένως τὸ τρίγ. ΔΕΖ = ΑΒΓ, ὅπερ
ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ι ς. κζ'.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἐπὶ δύο εὐθείας, ποιῇ τὰς
ἐναλλαξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις, παράλληλοι θέλουσιν εἶ-
ναι ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Ἐξω AB ἡ εὐθεῖα ἡ ἐμπίπτουσα, καὶ ΓΔ, EZ

ἐφ' ᾧ περ ἐμπίπτει καὶ ἡ γων. $\Gamma Η Β = \gamma \omega \nu$. $\Lambda \Theta Ζ$, τότε λέγω ὅτι καὶ $\Gamma Δ$, $Ε Ζ$ εἶναι παράλληλοι. σχ. 50.

Εἰδὲ καὶ δὲν εἶναι, ἐπεκτεινόμεναι θέλουσι συμπίπτει ἀπὸ τοῦ ἐνὸς μέρους (ἀξ. ια'). ὥς συμπίσσωσι λοιπὸν εἰς τὸ σημεῖον Γ , ὥς νὰ ἐκτελεσθῇ τρίγωνον τὸ $\Lambda \Theta \Gamma$. Ἀλλὰ τότε ἡ ἐκτὸς γων. $\Gamma Η \Theta > \gamma \omega \nu$. $\ Η \Theta \Gamma$ (πρ. ις'), ἐν ᾧ ὀφλουότι ὑπετέθη ἴση, ὅπερ εἶναι ἀτοπον, ὥς αἱ εὐθεῖαι $\Gamma Δ$, $Ε Ζ$ οὐ συμπεσούνται, καὶ διὰ τοῦτο καὶ παράλληλοι (ἀξ. η'). Ὡς...

Π ρ ό τ α σ ι ς κ η'.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἐπὶ δύο εὐθείας, ποιῇ ἥτοι τὴν ἐκτὸς γωνίαν ἴσην μετὰ τὴν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίου καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσας μετὰ δύο ὀρθὰς, παράλληλοι θέλουσιν εἶναι ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

"Εξω δύοιν θάτερον: ἥτοι ἡ γων. $\Lambda Η Δ = \gamma \omega \nu$. $\Lambda \Theta Ζ$, ἢ αἱ γων. $\Delta Η \Theta + \gamma \omega \nu$. $\ Η \Theta Ζ = 180^\circ$, τότε λέγω ὅτι καὶ αἱ εὐθεῖαι $\Gamma Δ$, $Ε Ζ$ εἶναι παράλληλοι ἀλλήλαις. σχ. 50.

α'. Ἐξω ἡ γων. $\Lambda Η Δ = \gamma \omega \nu$. $\Lambda \Theta Ζ$, ἀλλὰ καὶ ἡ γων. $\Lambda Η Δ = \gamma \omega \nu$. $\Gamma Η Β$, καθὸ κατὰ κορυφὴν.. ὥς ἡ γων. $\Gamma Η Β = \gamma \omega \nu$. $\Lambda \Theta Ζ$ (ἀξ. α'), αἵ τινες, δηλονότι εἶναι ἐναλλάξ. Ὡς ἡ $\Gamma Δ$ παράλληλος μετὰ τὴν $Ε Ζ$ (πρ. κς').

β'. Ἐξωσαν αἱ γων. $\Delta Η \Theta + \gamma \omega \nu$. $\ Ζ \Theta Η = 180^\circ$, ἀλλ' αἱ γων. $\Theta Η Δ + \gamma \omega \nu$. $\Theta Η Γ = 180^\circ$ (πρ. ιγ'), ὥς ἡ γων. $\ Ζ \Theta Η = \gamma \omega \nu$, $\Theta Η Γ$ (ἀξ. ζ').

αἵτινες δηλονότι εἶναι ἐναλλάξ. Ὡς ἡ ΓΔ παράλληλος
 μὲ τὴν ΕΖ (πρ. κζ.). Ὡς...

Π ρ ό τ α σ ι ς. κθ'.

Ἡ ἐπὶ τὰς παραλλήλους εὐθείας ἐμπίπτουσα εὐ-
 θεία, ποιεῖ τὰς τε ἐναλλάξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις, καὶ
 τὴν ἐκτὸς ἴσην μὲ τὴν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίου καὶ ἐπὶ τὰ
 αὐτὰ μέρη, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσας μὲ
 οὗτο ὁρθάς.

Ἐςωσαν αἱ ΓΔ, ΕΖ παράλληλοι ἀλλήλαις, τότε
 λέγω α'. ὅτι ἡ γων. ΓΗΘ = γων. ΗΘΖ, β'. ὅτι ἡ γων.
 ΑΗΔ = γων. ΑΘΖ, γ'. ὅτι αἱ γων. ΔΗΘ + γων.
 ΗΘΖ = 180° σχ. 51.

Τὸ γ'. Οὐδὼν λοιπὸν παραλλήλων τῶν ΓΔ, ΕΖ, ἂν
 εἶεν ἦναι ἡ γων. ΔΗΘ + γων. ΗΘΖ = 180°, τότε
 αἱ εὐθεῖαι ΓΔ, ΕΖ ἐπεκτεινόμεναι πρὸς τὸ μέρος Δ, Ζ
 θέλουσι συμπέσοι εἰς ἓν σημεῖον (ἀξ. ια'): ὃ ἐστὶ δὲν
 εἶναι παράλληλοι, ὥπερ εἶναι ἐναντίου τῆς ὑποθέσεως.

Τὸ α'. Οὐδὼν λοιπὸν τῶν γων. ΔΗΘ + γων. ΗΘΖ
 = 180°, εἶναι ἐν ταυτῷ καὶ αἱ γων. ΘΗΔ + γων.
 ΘΗΓ = 180° (πρ. ιγ'), διὰ τοῦτο γων. ΗΘΖ = γων.
 ΘΗΓ (ἀξ. ζ'), αἵτινες δηλονότι εἶναι ἐναλλάξ.

Τὸ β'. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γων. ΘΗΓ = γων.
 ΗΘΖ.. καὶ ἡ γων. ΘΗΓ = γων. ΑΗΔ, καθὼ κατὰ κο-
 ρυφὴν, διὰ τοῦτο καὶ γων. ΑΗΔ = γων. ΗΘΖ, ὃ ἐστὶν
 ἡ ἐκτὸς ἴση μὲ τὴν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίου καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ
 μέρη. Ὡς...

Π ρ ό τ α σ ε ι ς. λ'.

Αί παράλληλοι με μίαν τρίτην ευθείαν, είναι και πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι.

Ἐσῶσαν αἱ AB , $ΓΔ$ παράλληλοι με τὴν EZ , τότε λέγω ὅτι εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας, παράλληλοι. σχ. 52.

Καθότι ἄγω τὴν $ΗΘ$ ευθείαν ἐπὶ τὰς τρεῖς ευθείας, καὶ ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ AB εἶναι παράλληλος με τὴν EZ , διὰ τοῦτο ἔξω γων. $HIB =$ γων. HKZ (πρ. κθ'). διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ γων. $HKZ =$ γων. $HΛΔ$, ὅθεν γων. $HIB =$ γων. $HΛΔ$ (ἀξ. α'). ὥς ἐ ἡ AB παράλληλος με τὴν $ΓΔ$ (πρ. κη'), ὅπερ ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς. λ'.

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου καὶ ἄξιτις παράλληλου με τὴν δοθείσαν ευθείαν.

Ἐστω α τὸ δοθὲν σημεῖον, καὶ AB ἡ δοθείσα ευθεία. σχ. 53.

Λαμβάνω τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς AB , ὡς τὸ Γ .. ἄγω τὴν $\alpha\Gamma$ ευθείαν.. εἶτα πρὸς τῷ σημείῳ α τῆς $\Gamma\alpha$ ευθείας συνίστημι γωνίαν τὴν $\Gamma\alpha\Delta =$ γων. $\alpha\Gamma B$ (πρ. κγ'), αἵτινες δηλονότι εἶναι καὶ ἐναλλάξ. Ὡς ἐ ἡ ΔE , ἥτις ἤχη διὰ τοῦ δοθέντος σημείου α , εἶναι παράλληλος με τὴν δοθείσαν ευθείαν AB (πρ. κβ'), ὡς ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς. λβ'.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία εἶναι ἴση με τὰς δύο ἀπέναντι ἐσω-

τετραγώνου .. καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι παντὸς τριγώνου εἶναι ἴσαι μὲ δύο ὀρθάς (α).

Προτεκβάλλω τὴν πλευρὰν ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, καὶ λέγω ὅτι ἡ γων. ΑΓΔ = γων. ΒΑΓ + γων. ΑΒΓ, καὶ ὅτι αἱ τρεῖς αὐτοῦ γωνίαι = 180° . σχ. 54.

Διὰ τοῦ σημείου Α ἄγω τὴν ΕΖ παράλληλον μὲ τὴν ΒΓ .. τότε αἱ τρεῖς γων. ΓΑΖ + ΒΑΓ + ΒΑΕ = $2 \times 90^\circ$ (πρ. ιγ'). .. ἀλλ' ἡ μὲν γων. ΒΑΕ = γων. ΑΒΓ, ἡ δὲ γων. ΓΑΖ = γων. ΑΓΒ (πρ. κθ'), ὥστε αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ = $2 \times 90^\circ$.

β'. Αἱ δύο γωνίαι ΑΓΒ + γων. ΑΓΔ = $2 \times 90^\circ$ (πρ. ιγ') .. ἀλλὰ δίδεικται ὅτι παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι = $2 \times 90^\circ$ (α'). .. ὥστε ἡ γων. ΑΓΔ = γων. ΓΒΑ + γων. ΓΑΒ. "Ὡς...

Π ό ρ ι σ μ α.

α'. "Ὡς Παντὸς τριγώνου τὸ κεφάλαιον τῶν δύο γωνιῶν εἶναι $< 180^\circ$.

β'. Τὰ κεφάλαια τῶν τριῶν γωνιῶν πάντων τῶν τριγώνων εἶναι ἴσα πρὸς ἀλλήλα.

γ'. "Ὡς ἂν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς δύο γωνίας ἴσας ταῖς ὁμοῖς γωνίαις, εἴτε ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, εἴτε ὁμοῦς

(α) Πυθαγόρας λέγεται ὁ ἐφευρετὴς ταύτης τῆς προτάσεως. Ἡ ὥραιότης λοιπόν, ἡ μεγάλη χαρῆς, καὶ ἡ πολυτεχνία ταύτης τῆς προτάσεως μαρτυροῦσι τὸ, ὅποιος ἦν ὁ ταύτης γινυήτωρ, καὶ ὁποίου τῶς ἐξεροῦντο οἱ ἐφευρεταὶ τῆς γεωμετρίας Αἰγύπτου!

ἔξουσι καὶ τὴν τρίτην τῇ τρίτῃ ἴσην. Οὕτως εἰς τὴν κς'. πρώταισιν ἔχοντα τὰ δοθέντα δύο τρίγωνα δύο ἴσας γωνίας, εἶναι καὶ ἰσογώνια.

δ'. Ἄν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὴν μίαν γωνίαν ἴσην ἔξουσι καὶ τὰ κεφάλαια τῶν λοιπῶν δύο ἴσα πρὸς ἀλλήλα.

ε'. Πᾶν ὀρθογώνιον καὶ ἀμβλυγώνιον τρίγωνον ἔχει ὀξείας ἑκατέρας τὰς λοιπὰς δύο γωνίας.

ς'. Τῶν μὲν ὀρθογωνίων τριγώνων τὸ κεφάλαιον τῶν δύο ὀξειῶν γωνιῶν $= 90^\circ$, τῶν δὲ ἀμβλειῶν $< 90^\circ$.

ζ'. Ἐὰν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ᾖναι καὶ ἰσοσκελῆ, τότε ἑκατέρα τῶν ὀξειῶν γωνιῶν $= 45^\circ$. Καὶ ἂν θάτε-
ρα τῶν ὀξειῶν εἰς αὐτὰ γωνιῶν $= 45^\circ$, τότε ταῦτα θέλουσιν εἶναι καὶ ἰσοσκελῆ.

η'. Τῶν ἰσοπλευρῶν τριγώνων ἐκάστη γωνία $= 60^\circ$.. καὶ ἂν ἐκάστη γωνία ἑνὸς τριγώνου $= 60^\circ$, τοῦτο θέλει εἶναι καὶ ἰσόπλευρον.

θ'. Ὡς εἰς δυνατόι τις νὰ διαιρέσῃ τριχῶς μίαν εὐ-
θείαν γωνίαν. Καθότι ἔσω ἡ γων. ΒΑΓ $= 90^\circ$ (σχ. 55) .. τότε ἐπὶ τῆς ΑΓ εὐθείας συνίστημι τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΓΔ (πρ. α'.) .. τέμνω διχα τὴν γων. ΔΑΓ (πρ. θ'.) .. καὶ οὕτως ἔχω γων. ΕΑΓ $=$ γων. ΕΔΔ $=$ γων. ΔΑΒ $= 30^\circ$.

ι'. Ἄν εἰς τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα γνωστῇ μία γωνία, γνωσθήσονται καὶ αἱ λοιπαί.. διότι αἱ μὲν τρεῖς $= 180^\circ$, αἱ δὲ δύο ἴσαι ἀλλήλαις.

ια'. Ἄν πλήθος εὐθειῶν καταταχθῶσιν ἀφ' ἑνὸς σημείου ἐπὶ μιᾷ εὐθείᾳ, ἡ ἐλάχιστη θέλει εἶναι ἡ κάθε-

τος. Οὕτως ἀπὸ τοῦ σημείου Α (σχ. 56.) ἄγω ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας τὰς ΑΔ, ΑΘ, ΑΕ, ΑΖ, κτξ, ἐξ ὧν ἡ ΑΘ ἔστω κάθετος. "Οὕτων λοιπὸν ὀρθογωνίων τῶν τριγώνων ΑΘΕ, ΑΘΖ, κτξ. ἡ ΑΘ εἶναι ἐλάσσων καὶ τῆς ΑΕ, καὶ τῆς ΑΖ, κτξ. (πρ. ιθ'), ὡς οὕσης τῆς ὀρθῆς μείζονος ἀπασῶν τῶν ὀξείων.

ιβ'. "Ως ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι ἀδύνατον νὰ καταχθῶσι δύο κάθετοι. Καθότι τότε ἤθελε συζητῆ τρίγωνον συνέχον δύο ὀρθὰς γωνίας: ὃ ἐστὶ τὰς τρεῖς μείζουσας τῶν 180° , ὅπερ εἶναι ἀδύνατον,

ιγ'. Παντὸς τετραπλεύρου εὐθυγράμμου σχήματος τὸ κεφάλαιον τῶν τεσσάρων γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ τέσσερας ὀρθὰς, εἴτε $= 2 \times 180^\circ$. Καθότι ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ (σχ. 57) .. ἄγω τὴν διαγώνιον ΑΓ, καὶ ἔχω δύο τρίγωνα ἴσα μὲ τὸ τραπέζιον, καὶ ἐπομένως αἱ ἐξ τῶν τριγώνων γωνίαι εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τέσσερας τοῦ τετραπλεύρου .. Ἄλλ' αἱ ἐξ γωνίαι τῶν δύο τριγώνων εἶναι ἴσαι μὲ τέσσερας ὀρθὰς, ὥς καὶ αἱ τέσσαρες τοῦ τετραπλεύρου $\text{ΑΒΓΔ} = 2 \times 180^\circ$.. τοῦτο αὐτὸ ἤθελε λεχθῆ καὶ περὶ τοῦ τετραγώνου, καὶ ῥόμβου, καὶ ῥομβοειδοῦς: ὃ ἐστὶ παντὸς παραλληλογράμμου.

ιδ'. "Ως παντὸς εὐθυγράμμου σχήματος τὸ κεφάλαιον τῶν ἐντὸς γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ τόσα ζεύγη ὀρθῶν γωνιῶν, ὅσας πλευρὰς ἔχει ἀποθέσει δύο. Οὕτω τὸ μὲν τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 57) ἔχον τέσσερας πλευρὰς ἔχει καὶ τὸ κεφάλαιον τῶν τεσσάρων γωνιῶν $= 4 \times 180^\circ - 2 \times 180^\circ = 2 \times 180^\circ$.. Εἰς δὲ τὸ ἐξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 58) ἀπὸ τινος τυχόντος σημείου τῶν ἐν-

τος, ὡς τοῦ Η, ἄγω εὐθείας εἰς ἑκάστην τῶν γωνιῶν, καὶ ἔχω ἕξ τρίγωνα, ὥνπερ αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι μὲ ἕξ ζεύγη, εἴτε $= 6 \times 180^\circ$. Ἐπειδὴ ὁμως καὶ ταῦτα τὰ ἕξ τρίγωνα περιέχουσιν ὅχι μόνον τὰς ἕξ γωνίας τοῦ ἑξαγώνου, ἀλλὰ καὶ ἔτι τέσσαρας, τὰς περὶ τὸ σημεῖον Η (πέρ. β'. προ. ιγ.) , τοῦτου ἕνεκεν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἀφαιρῶσιν ἕξ αὐτῶν δύο ζεύγη, καὶ οὕτω τὸ κεφάλαιον τῶν γωνιῶν τοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ θέλει εἶναι $= 6 \times 180^\circ - 2 \times 180^\circ = 4 \times 180^\circ$. Ὡς αὖ αἱ ἐντὸς γωνίαι τοῦ πολυγώνου ἦναι $= \infty$, ὡς εἰς τὸν κύκλον, τότε, ὀνομάζων Θ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, ἔξω διὰ κεφάλαιον τῶν γωνιῶν τοῦ κύκλου $= 2 \infty \Theta - 4 \Theta$. Ὡς ἐκάστη γωνία ἐσωτερικὴ τοῦ κύκλου $= \frac{2 \infty \Theta - 4 \Theta}{\infty} = 2\Theta - \frac{1}{\infty}$.

ιε'. Παντὸς εὐθυγράμμου σχήματος τὸ κεφάλαιον τῶν ἐκτὸς γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ τέσσαρας ὀρθάς. Καθότι ἐπειδὴ αἱ ἐντὸς μετὰ τῶν ἐκτὸς γωνιῶν εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ δύο ἐφεξῆς γωνίαι, αἵτινες δηλονότι εἶναι ἴσαι μὲ ἐν ζεύγος ὀρθῶν (πρ. ιγ.) .. καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐφεξῆς γωνιῶν εἰς πᾶν εὐθύγραμμον εἶναι τοσοῦτος, ὅσαι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ .. καὶ τὸ κεφάλαιον μόνον τῶν ἐντὸς γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ τόσα ζεύγη ὀρθῶν γωνιῶν, ὅσας πλευρὰς ἔχει τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα ἀποθέτει δύο (πέρ. ιδ.) , τοῦτου ἕνεκεν μένουσιν αἱ ἐκτὸς γωνίαι παντὸς εὐθυγράμμου σχήματος, ἴσαι μὲ δύο ζεύγη ὀρθῶν γωνιῶν, εἴτε $= 2 \times 180^\circ$.

Ὡς τὸ κεφάλαιον τῶν ἐκτὸς γωνιῶν ἐνὸς τριγώνου

εἶναι ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον τῶν ἐκτὸς γωνιῶν ἐνὸς χιλιγράμμου.. πρᾶγμα παράδοξον!

Π ρ ό τ α σ ι ς. λγ'.

Αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγύουσαι εὐθείας ἴσας καὶ παραλλήλους, εἶναι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παραλλήλοι.

Ἐσῶ ἡ $AB = \Gamma\Delta$, καὶ παράλληλος μὲ αὐτήν, τότε λέγω ὅτι ἂν συζεύξη τις τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος σημεία: τὰ A, Γ καὶ τὰ B, Δ , ἡ $A\Gamma = B\Delta$ καὶ παράλληλος μὲ αὐτήν. σχ. 59.

Ἄγω τὴν διαγώνιον AD , καὶ ἔχω γωνίαν $\Lambda D\Gamma = \gamma\omega\nu. \Delta AB$ (πρ. κβ'), καθὼ ἐναλλάξ.. ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ἡ $AB = \Gamma\Delta$, καὶ ἡ AD κοινὴ, ὥς τε καὶ ἡ βάσις $A\Gamma = B\Delta$ (πρ. δ'). Ἀλλ' ἐν ταυτῷ εἶναι καὶ ἡ γων. $\Delta A\Gamma = \gamma\omega\nu. \Delta B\Delta$, αἵτινες ὀφλουότι εἶναι ἐναλλάξ, ὥς τε αἱ $A\Gamma, B\Delta$ εἶναι καὶ παραλλήλοι, ὅπερ ἐζητεῖτο.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὡς τε καὶ ἐξ ἐναντίας, ἂν εἰς ἓν τετράπλευρον αἱ ἀπεναντίον πλευраὶ ἦναι ἴσαι ἀλλήλαις, τοῦτο θάλει εἶναι παραλληλόγραμμον. Καθότι τὰ τρίγωνα $\Lambda D\Gamma, B\Delta$ ἔχοντα τὰς πλευρὰς ἴσας, ἐκάστην ἐκάστη, ἔξουσι καὶ τὰς γωνίας ὡσαύτως (πρ. η'), αἵτινες ὀφλουότι εἶναι ἐναλλάξ, διὸ καὶ παραλληλόγραμμον τὸ $A\Gamma\Delta B$.

Π ρ ό τ α σ ι ς λδ'.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίου πλευραὶ καὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ ἡ διαγώνιος διχοτομεῖ αὐτά.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΓΔΒ μετὰ τῆς διαγωνίου ΑΔ. σχ. 59.

Ἡ διαγώνιος ΑΔ ἐμπίπτουσα μὲν εἰς τὰς παραλλήλους ΑΒ, ΓΔ, ποιεῖ τὰς ἐναλλάξ γωνίας ἴσας, εἴτε τῇ γων. ΑΔΓ, ἢ γων. ΔΑΒ ἐμπίπτουσα δ' εἰς τὰς παραλλήλους ΑΓ, ΒΔ, ποιεῖ τὴν γων. ΑΔΒ = γων. ΔΑΓ (πρ. κθ') .. ὥςτε τὸ τρίγωνον ΑΔΓ = τριγ. ΑΔΒ, ὡς ἔχοντα δύο γωνίας ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρω, καὶ μίαν πλευράν: τὴν ΑΔ τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις κοινὴν (πρ. κς'). Ὡςτε τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΔΒ διχοτέμνεται ὑπὸ τῆς διαγωνίου ΑΔ. Ὅμοιον τι ἤθελεν ἀποδειχθῆ καὶ ἂν ἡ ΒΓ ἦν διαγώνιος, ὅπερ εἶναι τὸ β' μέρος τῆς προτάσεως.

Ἄν λοιπὸν καὶ τὸ μὲν τρίγ. ΑΔΓ = τριγ. ΑΔΒ, τὸ δὲ τρίγ. ΓΑΒ = τριγ. ΓΔΒ, δῆλον ὅτι ἡ μὲν ΑΒ = ΓΔ, ἡ δὲ ΑΓ = ΒΔ, καὶ ὅτι ἡ μὲν γων. ΑΒΔ = γων. ΑΓΔ: ὅ ἐστιν αἱ ἀπεναντίου πλευραὶ καὶ γωνίαι τῶν παραλληλογράμμων εἶναι ἴσαι, ἡ δὲ γων. ΓΑΒ = γων. ΓΔΒ, ὅπερ εἶναι τὸ πρῶτον μέρος τῆς προτάσεως.

Π ό ρ ι σ μ α α'.

Ὡς ἂν ἡ μία γωνία ἐνὸς παραλληλογράμμου εἶναι ὀρθή, καὶ αἱ λοιπαὶ ὀρθαὶ θέλουσιν εἶναι: ὅ ἐστι θελεῖν εἶναι ὀρθογώνιον (ὀρθ. ιε'). Καθότι ἐπειδὴ καὶ τὸ κερφάλαιον τῶν τεσσάρων γωνιῶν τῶν τετραπλεύρων εἶναι ἴσον

μέ τεσσαρας ὀρθάς (πρό. γ'. προ. λβ').. καὶ εἰς τὰ παραλληλόγραμμα αἱ ἀπεναντίου γωνίαι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις, δηλόν ὅτι τῆς μιᾶς οὐσῆς ὀρθῆς, ἐκάστη ὀρθὴ θελεῖ εἶναι.

Π ὁ ρ ι σ μ α β'.

Αἱ διαγώνιοι τέμνουσι διχα ἀλλήλας. Καθότι ἐπειδὴ εἰς τὰ τρίγωνα $\triangle AEF$, $\triangle BED$ ἡ μὲν γων. $\angle EAF =$ γων. $\angle EDB$, ἡ δὲ γων. $\angle EFA =$ γων. $\angle EBD$, καθὸ ἐναλλὰξ (πρ. κθ'), καὶ ἡ $\angle AEF = \angle BDE$, ὡς ἀπεναντίου πλευραὶ ἐνὸς παραλληλογράμμου, διὰ τοῦτο καὶ ἡ $AE = ED$ (πρ. κς'): ὁ ἐστὶν ἡ AD διχα τέτμηται κατὰ τὸ E ὑπὸ τῆς BF . "Οθεν ἂν τὸ παραλληλόγραμμον ᾖναι καὶ τετράγωνον, τότε τὰ τεσσαρα τμήματα θελουσιν εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

Π ρ ὁ τ α σ ι ς. λς'.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπικείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ μεταξύ τῶν αὐτῶν παραλλήλων, εἶναι ἴσα πρὸς ἀλλήλα.

"Εστω ἡ DE παράλληλος μετὰ τὴν AB , τότε λέγω ὅτι τὸ παραλ. $\triangle AB\Gamma\Delta =$ παραλ. $\triangle ABEZ$. σχ. 60.

Καθότι εἰς τὰ τρίγωνα $\triangle AZE$, $\triangle BEZ$ ἡ μὲν γων. $\angle ZAE =$ γων. $\angle ZEB$, ἡ δὲ γων. $\angle AZE =$ γων. $\angle BEZ$, ὡς ἐκτὸς καὶ ἐντὸς, καὶ ἡ $\angle A = \angle B$, ὡς ἀπεναντίου πλευραὶ ἐνὸς παραλληλογράμμου.. ὥστε τὸ τρίγ. $\triangle AZE =$ τρίγ. $\triangle BEZ$ (πρ. κς'). Τώρα ἀφαιρῶ κοινῶς τὸ τρίγωνον $\triangle HZ$, καί μοι μένει τραπέζιον $\triangle HAD =$ τραπ. $\triangle HBE$.. προσίθημι κοινῶς τὸ τρίγωνον $\triangle HAB$, καί μοι γεννᾶται τὸ παραλ. $\triangle AB\Gamma\Delta =$ παραλ. $\triangle ABEZ$ (ἀξ. ζ'). Ὡς...

Π ρ ό τ α σ ι ς. λς'.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπικείμενα ἐπὶ ἴσων βάσεων καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων, εἶναι ἴσα πρὸς ἀλλήλα.

Ἐστω ἡ ΔΗ παράλληλος μετὰ τὴν ΑΖ, καὶ ἡ ΑΒ = ΕΖ, τότε λέγω ὅτι παραλ. ΑΒΓΔ = παραλ. ΕΖΗΘ. σχ. 61.

Καθότι ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ ΑΒ = ΕΖ = ΘΗ, ἂν ᾶξω τὰς ΑΘ, ΒΗ, τὸ ΑΒΗΘ θελεῖ εἶναι καὶ παραλληλόγραμμον (πρ. λγ'), καὶ ἴσου μετὰ τὸ ΑΒΓΔ (πρ. λε'). ἀλλ' εἶναι ἐν ταυτῷ ἴσον καὶ μετὰ τὸ ΕΖΗΘ, ὡς ἐπικείμενον ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΘΗ μετὰ αὐτά. Ἰςτε παραλ. ΑΒΓΔ = παραλ. ΕΖΗΘ, ὅπερ ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ι ς. λζ'.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπικείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων, εἶναι ἴσα πρὸς ἀλλήλα.

Ἐστω ἡ ΓΕ παράλληλος μετὰ τὴν ΑΒ, τότε λέγω ὅτι τὸ τρίγ. ΑΔΒ = τρίγ. ΑΓΒ. σχ. 62.

Ἀπὸ τοῦ σημείου Β ἄγω τὴν μὲν ΒΖ παράλληλον μετὰ τὴν ΑΓ, τὴν δὲ ΒΕ παράλληλον μετὰ τὴν ΑΔ, καὶ ἔχω παραλ. ΑΒΖΓ = παραλ. ΑΒΕΔ (πρ. λε'). Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΑΔΒ, ΑΓΒ εἶναι ἡμίσεια αὐτῶν (πρ. λς'), ὥστε εἶναι ἴσα καὶ πρὸς ἀλλήλα (ἀξ. γ'). Ὡςτε...

Π ρ ό τ α σ ι ς. λη'.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπικείμενα ἐπὶ ἴσων βάσεων καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων, εἶναι ἴσα πρὸς ἀλλήλα.

Ἐς' ἣ μὲν ΔΗ παράλληλος μὲ τὴν ΑΖ, ἣ δὲ ΕΖ = ΑΒ, τότε λέγω ὅτι τὸ τρίγ. ΑΒΓ = τρίγ. ΕΖΗ. σχ. 63.

Ἄγω τὴν μὲν ΑΔ παράλληλον μὲ τὴν ΒΓ, τὴν δὲ ΕΘ μὲ τὴν ΖΗ, καὶ ἔχω παραλ. ΑΒΓΔ = παραλ. ΕΖΗΘ (πρ. λς'). Ἀλλὰ τὰ τρίγ. ΑΒΓ, ΕΖΗ εἶναι ἡμίσητα αὐτῶν (πρ. λς'). ὥς ἐστι καὶ πρὸς ἀλλήλα ἴσα (ἀξ. γ'). Ὡς... .

Π ρ ό τ α σ ι ς. λδ'.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπικείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, κεῖνται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων.

Ἐς' ὃ τὸ τρίγ. ΑΒΓ = τρίγ. ΑΒΔ, ἐπικείμενα ἀμφοτέρω ἐπὶ τῆς αὐτῆς ΑΒ βάσεως, τότε λέγω ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι πα ἀλλήλος μὲ τὴν ΑΒ. σχ. 64.

Εἰδὲ καὶ δεῖν εἶναι, δύναμαι νὰ ἄξω μίαν ἄλλην εὐθεῖαν παράλληλον μὲ τὴν ΑΒ, καὶ ἔς' ἣ ΓΕ.. ζυνύω τὸ σημεῖον Ε μὲ τὸ σημεῖον Β διά τινος εὐθείας, καὶ ἔχω τρίγ. ΑΒΕ = τρίγ. ΑΒΓ (πρ. λς').. ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ = τρίγ. ΑΒΔ, ἐξ ὑποθέσεως, ὥς ἐστι τὸ τρίγ. ΑΒΕ = τρίγ. ΑΒΔ: ὃ ἐστὶ τὸ μέρος ἵσον μὲ τὸ ὅλον, ὅπερ εἶναι ἄτοπον. Ὡς ἡ ΓΔ εἶναι παράλληλος μὲ τὴν ΑΒ, ὅπερ καὶ ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ι ς. μ'.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπικείμενα ἐπὶ ἴσῳ βάσει καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, κεῖνται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων.

Ἐς' ὃ τὸ μὲν τρίγ. ΑΒΓ = τρίγ. ΔΕΖ, ἣ δ'

$AB = \Delta E$, τότε λέγω ὅτι ἡ ΓZ εἶναι παράλληλος μετὰ τὴν AE . σχ. 65.

Εἰδὲ καὶ δὲν εἶναι, ἐγὼ δύνάμει νὰ ἄξω μίαν ἄλλην εὐθεῖαν παράλληλον μετὰ τὴν AE , καὶ αὕτη ἔστω ἡ ΓH ., ζευγνύω τὸ σημεῖον H μετὰ τὸ σημεῖον E διὰ τῆς εὐθείας HE , καὶ ἔχω τρίγ. $AB\Gamma = \text{τρίγ. } \Delta E H$ (πρ. λη'). ἄλλὰ τὸ τρίγ. $AB\Gamma = \text{τρίγ. } \Delta E Z$, ἐξ ὑποθέσεως, ὥστε καὶ τὸ τρίγ. $\Delta E H = \text{τρίγ. } \Delta E Z$: ὁ ἕστι τὸ μέρος ἴσον μετὰ τὸ ὅλον, ὅπερ εἶναι ἄτοπον. Ὡς. . .

Π ρ ό τ α σ ι ς. μ α'.

Ἐὼν παραλληλόγραμμόν τε καὶ τρίγωνον ἐφιστῶνται ἐπὶ τὴν αὐτὴν βάσιν, καὶ κῆνται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων, τὸ παραλληλόγραμμον θίλει εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγώνου.

Ἐστω ἡ ΔE παράλληλος μετὰ τὴν AB , τότε λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον $ABE = \text{παραλ. } \frac{AB\Gamma\Delta}{2}$. σχ. 66.

Ἄγω τὴν διαγώνιον AG , καί μοι προκύπτει τρίγ. $AB\Gamma = \text{παραλ. } \frac{AB\Gamma\Delta}{2}$ (πρ. λδ'). ἄλλὰ τρίγ. $AB\Gamma = \text{τρίγ. } ABE$ (πρ. λζ'), ὥστε τὸ παραλ. $\frac{AB\Gamma\Delta}{2} = \text{τρίγ. } ABE$. ὥς. . .

Π ό ρ ι σ μ α. α'.

Ὡς. ἂν τρίγωνον ἔχη διὰ βάσιν τὴν βάσιν παραλληλογράμμου, καὶ περατοῦται εἰς τὴν ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρὰν, τὸ τρίγωνον θίλει εἶναι ὑποδιπλάσιον τοῦ παραλληλογράμμου, ὡς τὸ $AB\Gamma$ τοῦ $AB\Delta E$ (σχ. 67). Εἰδὲ καὶ τὸ τρίγωνον ἔχει διπλασίαν τὴν βάσιν, θίλει

εἶναι ἴσον μὲ τὸ παραλληλόγραμμον, ὡς τὸ $ABΓ$ μὲ τὸ $AZΓ$.

Π ὁ ρ ι σ μ α. β'.

Ἐὰν τρίγωνον ἔχῃ διὰ βάσιν τὴν ἡμίσειαν βάσιν παραλληλογράμμου, καὶ περατοῦται εἰς τὴν ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρὰν, τὸ τρίγωνον θέλει εἶναι ὑποτετραπλάσιον τοῦ παραλληλογράμμου, ὡς τὸ $AZΓ$ τοῦ $ABΔΕ$.

Π ρ ὁ τ α σ ι ε. μβ'.

Νὰ συστήσῃ τις παραλληλόγραμμον ἴσον μὲ τὸ δοθὲν τρίγωνον, καὶ μὲ γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον.

Ἐξω $ABΓ$ τὸ δοθὲν τρίγωνον, καὶ $Δ$ ἡ δοθεῖσα γωνία. σχ. 68.

Τέμνω εἰχα τὴν βάσιν AB κατὰ τὸ E σημεῖον.. εἶτα πρὸς τὴν σημείω E καὶ πρὸς τῇ EB εὐθείᾳ συνίστημι γων. $BEZ =$ γων. $Δ$. (πρ. κγ')... ἄγω τὴν μὲν ZH παράλληλον μὲ τὴν AB , τὴν δὲ $BΘ$ παράλληλον μὲ τὴν EZ , καὶ ἔχω παραλ. $EBΘZ =$ τριγ. $ABΓ$ (πρ. α'. προ. μα'), καὶ γων. $BEZ =$ γων. $Δ$, ὡς ἐζητεῖται.

Π ρ ὁ τ α σ ι ε. μγ'.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ παραπληρώματα τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

Ἐξώσαν περὶ τὴν διάμετρον AB παραλληλόγραμματα $ZEBK$, $ZOΔH$, τότε λέγω ὅτι τὰ τούτων παραπληρώματα εἶναι ἴσα ἀλλήλοις: τουτέστι $AEZH = ZKΓΘ$. σχ. 69.

Καθότι τὸ μὲν τριγ. $ABΔ =$ τριγ. $ΔΓΒ$, τὸ δὲ

τρίγ. $HZA = \text{τριγ. } \Delta OZ$, ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ τρίγ.
 $EBZ = \text{τριγ. } ZKB$ (πρ. λδ''). ἀφαιρῶ ἐκ τῶν ἴσων
 ἴσα, καὶ ἔχ' ο παραπλ. $A EZH = \text{παραπλ. } ZKΓO$, ὅπερ
 ἐζητεῖτο. Ὡς...

Π ρ ό τ α σ ι ς. μδ'.

Παρά τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν νὰ συστήσῃ τις παραλ-
 ληλόγραμμον ἴσον μὲ τὸ δοθὲν τρίγωνον, καὶ μὲ γωνίαν
 ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον.

Ἔστω AB ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, Γ τὸ δοθὲν τρίγωνον,
 καὶ Δ ἡ δοθεῖσα γωνία. σχ. 70.

Ἐπεκτείνω τὴν BA εὐθεῖαν μέχρι τινὸς σημείου,
 ὡς τοῦ E .. εἶτα πρὸς τῷ σημείῳ A τῆς EA εὐθείας
 συνίστημι γων. $E\Delta Z = \text{γων. } \Delta$ (πρ. κγ').. ἐκτελῶ,
 παραλ. $E\Delta ZH = \text{τριγ. } \Gamma$ (πρ. μβ'').. ἀπὸ τοῦ σημείου
 B ἄγω τὴν μὲν BO παράλληλον μὲ τὴν AZ , τὴν δὲ
 OH παράλληλον μὲ τὴν BE .. ἄγω τὴν διαγώνιον OA ,
 ἐπεκτείνων αὐτὴν ἕως οὗ νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν HE εὐθεῖαν
 κατὰ τὸ σημεῖον I .. ἐκπληρῶ τὸ παραλληλόγραμμον
 $IKBE$.. ἐπεκτείνω καὶ τὴν ZA μέχρι τοῦ σημείου Λ ,
 καὶ λέγω ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον ΛK εἶναι τὸ ζη-
 τούμενον.

Καθότι ἐπειδὴ παραπλ. $\Lambda K = \text{παραπλ. } AH$ (πρ.
 μγ'').. καὶ τὸ παραπλ. $\Lambda H = \text{τριγ. } \Gamma$ ἔχον καὶ τὴν
 γων. $E\Delta Z = \text{γων. } \Delta$, ἐκ τῆς κατασκευῆς, τὸ ΛK πα-
 ραλληλόγραμμον εἶναι τὸ ζητούμενον, καὶ παράκειται καὶ
 παρὰ τὴν AB δοθεῖσαν εὐθεῖαν, ὡς ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ι ς. μέ'.

Νὰ συστήσῃ τις παραλληλόγραμμον ἴσον μὲ τὸ δοθὲν

εὐθύγραμμον σχῆμα, καὶ μὲ γωνίαν ἴσην μετὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον.

Ἔστω $ΑΒΓΔ$ τὸ δοθέν εὐθύγραμμον σχῆμα, καὶ $Ε$ ἡ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία. σχ. 71.

Διαλύω τὸ εὐθύγραμμον $ΑΒΓΔ$ εἰς τὰ τρίγωνα $ΑΒΓ$, $ΑΓΔ$ (καὶ εἰς ἄλλα πολλὰ, ἂν ᾖ πολὺπλευρον).. εἶτα συνίστημι τὸ μὲν παραλ. $ΖΗ =$ τριγ. $ΑΒΓ$, μετὴν γων. $Ζ =$ γων. $Ε$ (πρ. μβ'), τὸ δὲ παραλ. $ΘΙ =$ τριγ. $ΑΓΔ$, παρὰ τὴν $ΗΘ$ εὐθεῖαν, καὶ μετὴν γων. $ΗΘΚ =$ γων. $Ζ$. Ἀλλὰ τὰ δύο τρίγωνα $ΑΒΓ + ΑΓΔ =$ εὐθυγρ. $ΑΒΓΔ$.. καὶ τὰ δύο παραλληλόγραμμα $ΖΗ + ΘΙ =$ παραλ. $ΖΙ$.. ὥστε τὸ παραλ. $ΖΙ =$ εὐθυγρ. $ΑΒΓ$, ὡς ἐζητεῖτο.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὡςτε εὐκόλως ἤθελε συστήσῃ τις παραλληλόγραμμον ἴσον μετὰ δύο δοθέντα τρίγωνα. Καθότι ἂν ᾖσαν δεδομένα τὰ τρίγωνα $ΑΒΓ$, $ΑΓΔ$, τότε ἐγὼ ἤθελον συστήσῃ προὔ- του τὸ παραλ. $ΖΗ = ΑΒΓ$, εἶτα τὸ παραλ. $ΘΙ = ΑΓΔ$. Ἐντεῦθεν ὃ ἤθελον εὗροι τις καὶ τὴν διαφορὰν δύο εὐθυ- γράμμων, οἷα εἶναι τοῦ $ΘΙ$ παραλληλογράμμου, καὶ τοῦ $ΑΒΓ$ τριγώνου.

Π ρ ό τ α σ ι ς. μς'.

Τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ ἀναγράψῃ τις τὸ τετρά- γωνον.

Ἔστω $ΑΒ$ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα. σχ. 72.

Ἀπὸ τοῦ σημείου $Α$ ὑψιὸ πρὸς ἐρθᾶς τὴν $ΑΓ$ (πρ. ια')... τέμνω τὴν $ΔΑ = ΑΒ$ (πρ. γ').. ἄγω τὰς $ΔΕ$,

ΒΕ παραλλήλους μετὰ τὰς ΑΒ, ΑΔ, καὶ λέγω ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΕΔ εἶναι τὸ ζητούμενον τετράγωνον.

Καθότι ἐπειδὴ, ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ μὲν πλευρὰ $ΑΔ = ΑΒ$, αἱ δ' ἀπεναντίον αὐτῶν εἶναι ἴσαι (πρ. λδ'). διὰ τοῦτο $ΑΒ = ΔΑ = ΔΕ = ΒΕ$. Ἐτι ἐπειδὴ ἡ γων. Α 90°, ἐκ τῆς κατασκευῆς, διὰ τοῦτο ἅπασαι αἱ λοιπαὶ θέλουσιν εἶναι ἐπίσης ὄρθαι (πρόρ. α'. προ. λδ'). ὥστε τὸ ΑΒΕΔ εἶναι τετράγωνον (ὁρῶ ιε'): ὁ ἐστὶ $ΑΒΕΔ = ΑΒ \times ΑΒ = ΑΒ^2$ (α.).

Π ό ρ ι σ μ α α'.

Δοθείσης τῆς διαγωνίου, ἥθελε περιγράψοιτις τὸ περὶ αὐτὴν τετράγωνον. Καθότι οὗσης δεδομένης τῆς ΑΕ εὐθείας, ἂν ἐκτελέσω τὴν γων. $ΕΑΒ = 45^\circ$, καὶ τὴν γων. $ΕΑΔ = 45^\circ$.. καὶ ἂν ἄξω τὰς ΑΔ, ΕΒ παραλλήλους μετὰ τὰς ΑΒ, ΑΔ, τὸ ΑΒΕΔ θέλει εἶναι τετράγωνον.

Π ό ρ ι σ μ α β'.

Ὡςτε ἡ διάμετρος τοῦ τετραγώνου τέμνει διχα τὴν ὀρθὴν γωνίαν, εἴτε ἐκτελεῖ θατέραν $= 45^\circ$.

(α) Τὸ τετράγωνον βίβαια ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ἐπιφανεία τις, ἥ τις, ὡς εἴπομεν, κατ' ἀρχάς, γινώσκει ἐκ τῆς ἰδέας τοῦ σώματος διὰ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ βύθους, ὡς καὶ ἡ ἰδέα τῆς γραμμῆς ἐκ τῆς ἰδέας τῆς ἐπιφανείας. Πλὴν ὅρ' οὗ ἅπαξ ἀποκρίσεσθε τὴν ἰδέαν τῆς γραμμῆς, ἀπαντᾷ οὐδεμίαν δυσκολίαν, ὥςτε διὰ τῆς κατὰ τῶν γραμμῶν νὰ ἐνοήσῃ ὅτι γινώσκται ἐπιφάνεια. Ἄν λοιπὸν καί τις εὐθεία ἐκτελεῖτο, καὶ ἐν τῇ κοίτῃσθαι παραλλήλως καὶ ἐπίσης ἑαυτῇ ἄρει σημαία καθ' ἑαυτὴν, τοῦτο ἦεναι εἶναι τετράγωνον. Ὡςτε τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς εὐθείας $ΑΒ = ΑΒ \times ΑΒ = ΑΒ^2$.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς μ ζ.

Τῶν ὀρθογώνιων τριγώνων τὸ τετράγωνον τῆς ὑπο-
τενούσης εἶναι ἴσον μὲ τὰ τετράγωνα τῶν λοιπῶν δύο
πλευρῶν. (α).

Ἐξω ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ΒΑΓ κατὰ τὴν Α
γωνίαν, τότε λέγω ὅτι $BΓ^2 = AB^2 + ΑΓ^2$. σχ 73.

Ἀναγράφω τὰ τετράγωνα τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ
τριγώνου: τουτέστι τὰ ΒΕ, ΑΖ, ΑΠ.. ἀπὸ τοῦ σημείου
Α κατάγω κάθετον τὴν ΑΘ ἐπὶ τῆς ΔΕ, καὶ ἄγω τὰς
δύο εὐθείας ΑΔ, ΓΖ.

Τώρα εἰς τὰ τρίγωνα ΑΔΒ, ΓΖΒ ἡ μὲν ΒΔ =
ΒΓ, ὡς πλευραὶ τοῦ τετραγώνου ΒΕ, ἡ δ' ΑΒ = ΒΖ,
ὡς πλευραὶ τοῦ τετραγώνου ΑΖ, ἡ δὲ γων. ΑΒΔ =
γων. ΓΒΖ, ὡς εἰς δύο ὀρθὰς κοινῶς προσθείστης τῆς
ΑΒΓ γωνίας.. ὥς τε τρίγ. ΑΔΒ = τρίγ. ΓΖΒ (πρ. δ').
Ἀλλὰ τὸ μὲν τρίγ. ΑΔΒ = παραλ. $\frac{ΒΔΘΚ}{2}$, τὸ δὲ τρίγ.

(α) Ἡ ὠραϊότης καὶ ἡ μεγάλη χρῆσις ταύτης τῆς προτά-
σεως εἶναι κήρυξ διακρίσεως τοῦ, ἐποιοῦς ὑπῆρξεν ὁ ταύτης ἱστυ-
ριτικῆς: ὁ ἴσος ὁ μίγιστος τῶν φιλοσόφων. Λέγουσαν δ' ἔτι διὰ τὴν
ταύτης ἐφεύρεσιν Πυθαγόρας ἔθυσεν ἑκατὸν βόας εἰς τὰς μούσας.
Ἀλλ' ἱπικὴ καὶ οὕτως ἀπειχετο τῶν κραιῶν, διὰ τοῦτο θύλουσι
τωῖς ἔτι, οἱ θυσιασθῆναι βόες ἦσαν ἐκ κροῦ. Ἐπειδὴ ὁμως καὶ
ἡ παράδοσις λέγει ὅτι ἡ θυσία ἔργον εἰς τὰς μούσας, καὶ ὅχι
εἰς τὸ θεῖον, διὰ τοῦτο ὁ ἡμέτερος Εὐγέnius ἀπετέλμησε νὰ
συνάξῃ ὅτι ὁ Πυθαγόρας ἤνυεν τῷ θεῷ! Ἀλλ' αὖ αὐτὸς ἐγίνω-
σκει τὴν φύσιν, πῶς — ἢν δυνατόν νὰ ἀγνοῇ τὸν ταύτης δημιουργ-
γόν; Τοῦτο δὲν εἰσφέρειν ἀπὸ τοῦ νὰ ἔλγεται, οἱ Χριστιανοὶ προ-
σφέροντες θυσίας εἰς τὸν ἅγιον Ναόλαον, ἀγνοοῦσι τὸ θεῖον!

$\Gamma Z \Delta = \text{παραλ. } \frac{AZ}{2}$, ὡς ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ με-
ταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων (πρ. μα'). Ὡς παραλ.
 $B \Delta \Theta K = \text{τετραγ. } AZ \text{ (ἀξ. β')} = AB^2$.

Ἄν ἄξω καὶ τὰς AE, BH εὐθείας, διὰ τῆς ὁμοίας
ἀποδείξεως ἐγὼ ἤθελον ἀποδείξαι ὅτι καὶ παραλ $\Gamma E \Theta K =$
τετραγ. AH . Ἀλλὰ $B \Delta \Theta K + \Gamma E \Theta K = B \Delta E \Gamma =$
 $B \Gamma^2$, τούτου ἕνεκεν $B \Gamma^2 = AZ + AH = AB^2 +$
 AG^2 . Ὡς . . .

Π ό ρ ι σ μ α α'.

Τὸ τετράγωνον μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου
τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτείνουσας
ἀποδείξει τοῦ τετραγώνου τῆς ἐτέρας πλευρᾶς: τουτέστι
 $AB^2 = B \Gamma^2 \quad A \Gamma^2$.

Π ό ρ ι σ μ α β'.

Εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ἢ ὑποτείνουσα, ἢ μία
τῶν λοιπῶν πλευρῶν, καὶ τὸ τμήμα τῆς ὑποτείνουσας τὸ
ὑπὸ τῆς καθέτου ἐπ' αὐτῆς ἀπολαμβανόμενον εἶναι συνε-
χὴ ἀνάλογα: τουτέστι $\div B \Gamma : AB^2 : BK$, καὶ $\div B \Gamma :$
 $A \Gamma : GK$. Καθότι ἐπειδὴ τὸ μὲν ὀρθογ. $B \Delta \Theta K =$
 $B \Delta \times BK = B \Gamma \times BK$, τὸ δ' ὀρθογ. $\Gamma E \Theta K = \Gamma E \times GK$
 $= B \Gamma \times GK$.. καὶ ἐπειδὴ, ὡς δέδεικται, τὸ ὀρθογ. $B \Delta \Theta K$
 $= AB^2$, τὸ δ' ὀρθογ. $\Gamma E \Theta K = A \Gamma^2$, τούτου ἕνεκεν
 $B \Gamma \times BK = AB^2$, καὶ $B \Gamma \times GK = A \Gamma^2$, καὶ διὰ
τούτο $\div B \Gamma : AB^2 : BK$, καὶ $B \Gamma : A \Gamma^2 : GK$.

Π ό ρ ι σ μ α γ'.

Ἄν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἦναι καὶ ἰσοσκελές, τό-
τε τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτείνουσας θάλει εἶναι διπλάσιον

ἐκατέρου τετραγώνου θατέρας τῶν λοιπῶν δύο πλευρῶν:
 τουτέστι $B\Gamma^2 = 2 AB^2$. Καὶ διὰ τοῦτο $B\Gamma^2 : AB^2 ::$
 $2 : 1$.. καὶ ἐπομένως $B\Gamma : AB :: \sqrt{2} : 1$.

Π ό ρ ι σ μ α. δ'.

Ὡς αὖ ληφθῇ ἡ $B\Gamma$ ὡς διάμετρος τετραγώνου, ἔ
 τότε ἡ διάμετρος ἔξει πρὸς θατέρας τῶν πλευρῶν τοῦ
 τετραγώνου ὡς $\sqrt{2}$ πρὸς 1 : ὅτε ἔσιν ὁ λόγος τῆς διαμέτρου
 ἐνὸς τετραγώνου ὡς πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι
 ἀρρήτος. (α).

Π ό ρ ι σ μ α. ε'.

Τὸ τετράγωνον μιᾶς εὐθείας εἶναι τετραπλάσιον τῆς
 ἡμισείας αὐτῆς. Καθότι ἔστω αὕτη ἡ εὐθεῖα ὑποτείνουσα
 ὀρθογωνίου ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ὡς ἡ $B\Gamma$, τότε $B\Gamma^2$
 $= 2AB^2$, καὶ $AB^2 = 2BK^2$, ὡς ὄντες τότε ἰσοσκε-
 λοὺς καὶ τοῦ KAB τριγώνου, καὶ διὰ τοῦτο $B\Gamma^2 = 4BK^2$.

Π ρ ό τ α σ ι ς. μῆ'.

Πᾶν τρίγωνον, οὗ τινος τὸ τετράγωνον μιᾶς τῶν πλευρῶν
 εἶναι ἴσον μὲ τὰ τετράγωνα τῶν λοιπῶν δύο, εἶναι ὀρθο-
 γώνιον.

Εἰς τὸ τρίγωνον $BA\Gamma$ ἔστω $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$,
 τότε λέγω ὅτι ἡ γων. $BA\Gamma = 90^\circ$. σχ. 74.

(α) Ἡμεῖς εἶδομεν εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν ὅτι τὸ $\sqrt{2}$ εἶναι
 ἀρρητός, ἀρ' ὅπως. Ὡς ἐπιπλεονεκτήσῃ καὶ ἡ διάμετρος τῶν τετραγώνων
 ἔχει πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτῶν ὡς $\sqrt{2}$ πρὸς 1. τοῦτον εἶναι ἡ
 διάμετρος αὐτῶν εἶναι ἀσύμμετρος ὡς πρὸς τὴν πλευρὰν, καὶ ὅτε
 ὁ μὲν Εὐκλείδης ἀποδεικνύει εἰς τὴν τελευταίαν πρότασιν τοῦ ἑ-
 βδόμου, ὁ δὲ Πλάτων λέγει ὅτι ὁ τοῦτο ἀγνοῶν οὐκ αἰεὶ πρὶν τα-
 χυθῇ εἰς τὴν τάξιν τῶν λογικῶν.

Ἀπὸ τοῦ σημείου Α ἄγω τὴν ΑΔ πρὸς ὁρθὰς μετὰ τὴν ΑΓ, καὶ ἔστω μὲ τὴν ΒΑ (πρ. ια'). .. ἄγω καὶ τὴν ΔΓ εὐθείαν, καὶ ἔχω $\Delta\Gamma^2 = \Delta\Gamma^2 + \Delta\Delta^2$ (πρ. ιβ'). $= \Delta\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2$, ὡς οὐσης τῆς ΑΔ $= \Delta\Gamma$. Ὡς $\Delta\Gamma^2 = \Delta\Gamma^2$ (αξ. α'), καὶ ἔχομενος καὶ ἡ ΔΓ $= \Delta\Gamma$. Ὡς ἐπειδὴ εἰς τὰ τρίγωνα ΓΑΔ, ΒΑΓ, ἡ μὲν ΔΓ $= \Delta\Gamma$, ἡ δὲ ΑΔ $= \Delta\Gamma$, ἡ δὲ ΑΓ κοινὴ διὰ τοῦτο καὶ ἡ γων. ΔΑΓ $=$ γων. ΒΑΓ (πρ. η'). .. ἀλλ' ἡ γων. ΔΑΓ εἶναι ὁρθή, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ὁρθὴ ἄρα καὶ ἡ γων. ΒΑΓ. Ὡς....

ΒΙΒΛΙΟΝ Β'. (α).

Ὁ ρ ο ς α'.

Πᾶν ὀρθογώνιον, ὡς τὸ ΑΒΓΔ, λέγεται ὅτι περιέχεται ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν τῶν περιεχουσῶν τὴν εὐθεῖαν γωνίαν: τῆς ΑΒ καὶ ΑΔ. σχ. 75. (β).

(α) Σὺς τοῦτο τὸ βιβλίον τὸ μακρὸν, ὃ Εὐκλείδης πραγματεύεται τὰ πάθη τῶν εὐθειῶν, εἴτε τὰ τετραγώνια καὶ τὰ ὀρθογώνια, ὅθεν ἔπρκει νὰ ταχθῇ μετὰ τὸ πρῶτον, εἴτε μετὰ τὴν γνῶσιν τῶν τριγώνων, παραλληλογράμμων, τετραγώνων, καὶ ὀρθογώνων. Εἰ καὶ μακρὸν λοιπὸν εἶναι τοῦτο τὸ βιβλίον, πλὴν εἶναι σύσσωμὸς καὶ εἰς τὴν ἀληθειάν, καὶ ἡ τοῦτον χρῆσις φάνηται καὶ εἰς αὐτὴν τὴν τριγωνομετρίαν. καὶ φαίνεται μὲν τοῦτο τὸ βιβλίον εἰς τοὺς ἀρχαίους τῆς γεωμετρίας μυστήρια τοῦ ἀκατάληπτου, πλὴν τοῦτο γινώσκται τὸ πρῶτον, εἰς δὲ τὸ δεύτερον ἀπορεῖται καὶ οὔτε αὐτοὶ πῶς ἠέρον. καθότι ἅπασαι σχιδόν αὐτοῦ αἱ προτάσεις ὑφίστανται εἰς τὸ, τὰ μέρη εἶναι ἴσα μὲ τὸ ἔλυν.

(β) Ἡμεῖς εἶδομεν, ὅτι οἱ γεωμέτραι ἔφθασαν νὰ σχάζων

Ο ρ ο ς β.

Ἵψος πρυτὸς σχήματος λέγεται ἡ κάθετος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ ἐπὶ τὴν βάσιν ἀχθεῖσα. Οὕτως ἡ ΔΑ οὕσα κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, εἶναι ὕψος τοῦ ΑΒΓΔ. σχ. 75,

ται τὰς ἐπιφανείας ὡς γινόμενας ἐκ τῆς κινήσεως μιᾶς γραμμῆς (σημ. πρ. μς'. βιβλ'. α'). Ὡς ἡ μὴ κινουμένη εὐθεῖα ἐνομαζέται βάσις τοῦ σχήματος, τὸ δὲ πῶς ἐκινήθη, ὕψος. Ἄν λοιπὸν καὶ ἐν τῷ κινεῖσθαι ἡ βάσις σμικρύνηται, ὥς ἡ μὴ κινουμένη, τὰ γινόμενα σχήματα θίλουσιν εἶναι τριγῶνα. Εἰδὲ καὶ ἡ βάσις, διαμίνουσα ἡ αὐτὴ, κινεῖται παράλλῳ αὐτῇ, τὰ γινόμενα θίλουσιν εἶναι παραλληλόγραμμα. Καὶ ἂν πρὸς τούτοις ἡ κίνησις ἀρξῇται πρὸς ὀρθὸς αὐτῇ, τὰ γινόμενα σχήματα θίλουσιν εἶναι ὀρθογώνια. Εἰδὲ τίλος πάντων καὶ ἡ κίνησις εἶναι τοσαύτη, ὅσον καὶ τὸ μήκος αὐτῆς, τὰ γινόμενα σχήματα θίλουσιν εἶναι τετραγῶνα. Ὡς ἐπειδὴ καὶ εἰς τὰ ὀρθογώνια τὸ ὕψος, εἴτε ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν, συμπίπτει μὲ τὴν ὁδοῦ τῆς βάσεως, τοῦτου ἕνεκα τὸ ὕψος ἐπὶ τὴν βάσιν, καὶ αἱ δύο εὐθεῖαι αἱ περιέχουσιν τὴν ὀρθὴν γωνίαν, εἶναι λίξις συνάνηται: ὁ ἔστιν ἐν ὀρθογώνῳ ἥθειον εἶναι τοσοῦτον μίγα. ἔσον ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος ἥθειον εἶναι μεγάλα: τούτῃ τὰ ὀρθογώνια ἔχουσι λόγον συνθετον ἕκτε τῶν βάσεων καὶ ὕψων, εἴτε τῶν ὁδοῦ εὐθειῶν τῶν περιεχουσῶν μίαν τῶν ὀρθῶν γωνιῶν (ἀριθ. §. 134). Οὕτως ἂν ἡ βάσις ἦναι 4 ποδῶν, καὶ τὸ ὕψος 3, τότε τὸ ὀρθογώνιον θίλῃ εἶναι = 12 ποδ., πληρὸν ἔχει μήκος, εἴτε γραμμῇ, ἀλλ' ἐπιφανείᾳ, εἴτε μήκος μετὰ πλάτους. Καθότι ἐπειδὴ καὶ ὁ πῶς ἐκινήθη ἡ βάσις καὶ κινῆται, καὶ καὶ κινῆται ἔχει ἐκ' εὐθείας αὐτῇ. ἄλλα πρὸς ὀρθὸς, δῆλον ὅτι τὸ γινόμενον ἀδυνατεῖ καὶ μὴν ἦναι ἀπλάτεις. Ὡς ἀρ' οὐ ἀπαξ ὑπετίθησαν αἱ ἐπιφανείαι καὶ γινώσκονται διὰ τῆς κινήσεως τινὸς γραμμῆς, μὴ ἐκ' εὐθείας δηλονότι, πῶς — πάλιν καὶ ἀπορώσιν τοὺς ὅτι οὕσαι αἱ εὐθεῖαι μήκη ἀπλάτῃ, γινώσκῃ μήκος μετὰ πλάτους;

Ο ρ ο ς γ.

Παντός παραλληλογράμμου χωρίου τὸ περὶ τὴν διάμετρον ἐν παραλληλόγραμμον μετὰ τῶν δύο παραπληρωμάτων ὀνομάζεται γυνώμων, ὡς τὸ αβγ. σχ. 75.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς α'.

Ἐὰν ὡς δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μία αὐτῶν τμηθῇ εἰς ὅσαδῇποτε τμήματα, τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὰ ὀρθογώνια τὰ ὑπὸ τῆς ἀτμήτου καὶ τῶν τμημάτων περιεχόμενα.

Ἐξωσαν ΑΒ, ΑΓ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι.. καὶ ᾧς τμηθῇ ἡ ΑΒ εἰς τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, Ε, τότε λέγω ὅτι $AB \times AG = AD \times AG + DE \times AG + EB \times AG$. σχ. 76.

Ἀπὸ τοῦ σημείου Β ὑψῶ πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ΑΒ τὴν ΒΖ (πρ. ια'). = ΑΓ.. ἐκπληρῶν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖ.. εἰτα ἀπὸ τῶν σημείων Δ, Ε ἄγω τὰς ΔΗ, ΕΘ παραλλήλους μὲ τὴν ΑΓ, ἡ μὲ τὴν ΒΖ, καὶ ἴσας μὲ αὐτὴν (πρ. λδ').

Τὸ ὀρθογ. ΑΖ = ΑΒ × ΒΓ (ὅρω α')... ἀλλὰ τὸ ὀρθογ. ΑΖ = ὀρθογ. ΑΗ + ὀρθογ. ΔΘ + ὀρθογ. ΕΖ, ὡς ἔλον καὶ μέση, ἐξ ὧν τὸ μὲν ΑΗ = ΑΓ × ΑΔ, τὸ δὲ ΔΘ = ΑΓ × ΔΕ, τὸ δὲ ΕΖ = ΑΓ × ΕΒ. Ὡς τὸ ὀρθογ. ΑΒ × ΑΓ = (ΑΔ + ΔΕ + ΕΒ) × ΑΓ. Ὡς αὖν ἡ ΑΒ = 10, καὶ ἡ ΑΓ = 6.. καὶ αὖ τὰ 10 διαιρεθῶσιν εἰς 2 + 5 + 3, τότε $10 \times 6 = 2 \times 6 + 5 \times 6 + 3 \times 6$. Ὡς...

Π ρ ό τ α σ ε ι ς. β'.

Ἐάν ευθεία γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἓν σημεῖον, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἐκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα δύο ὀρθογώνια θέλουσιν εἶναι ἴσα μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ὅλης.

Ἐστω AB ἡ δοθείσα ευθεία.. καὶ ᾧς τμηθῇ κατὰ τὸ σημεῖον Γ , τότε λέγω ὅτι $AB \times AG + AB \times BG = AB^2$ σχ. 77.

Ἀναγράφω τὸ τετράγωνον τῆς AB : τὸ AD (πρ. μς'. βιβλ. α'). ἄγω τὴν GZ παράλληλον μὲ τὴν AE , καὶ μοι γεννᾶται ἡ $GZ = AB$. Τὸ τετράγωνον $AD = AB^2$, ἐκ τῆς κατασκευῆς.. ἀλλὰ τὸ τετράγ. $AD =$ ὀρθογ. $AZ +$ ὀρθογ. $ΓΔ$, ὡς ὅλου καὶ μέρη.. καὶ τὸ μὲν ὀρθογ. $AZ = AB \times AG$, τὸ δ' ὀρθογ. $ΓΔ = AB \times BG$. Ὡς $AB^2 = AB \times AG + AB \times GB = AB (AG + GB)$.

Ἐστω $AB = 10$, καὶ $AG = 7$, τότε καὶ $BG = 3$, καὶ ἐπομένως $10 \times 7 + 10 \times 3 = 10 \times 10 = 10^2$. Ὡς...

Π ρ ό τ α σ ε ι ς. γ'.

Ἐάν ευθεία γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἓν τυχὸν σημεῖον, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἐνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ εἰρημένου τμήματος μετὰ τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ὑπὸ τῶν δύο τῶν τμημάτων περιεχομένου.

Ἐστω AB ἡ δοθείσα ευθεία.. καὶ ᾧς τμηθῇ εἰς τυχὸν σημεῖον τὸ Γ , τότε λέγω ὅτι ὀρθογ. $AB \times AG = AG^2 +$ ὀρθογ. $AG \times BG$. σχ. 78.

Ἀναγράφω τὸ τετράγωνον τῆς AG : τὸ AD λέγω.

ἄγω τὴν BZ παράλληλον μετὰ τὴν ΓΔ.. ἐκτείνω τὴν ΕΔ μέχρι τοῦ Ζ, καὶ οὕτως ἔχω τὴν $BZ = ΓΔ = ΑΓ$. σχ. 78.

Τὸ ὀρθογώνιον $AZ = ὀρθογ.$ $AB \times ΑΓ$.. ἀλλ' ὀρθογ. $AZ =$ τετραγ. $ΑΔ + ὀρθογ.$ $ΓΖ$, ὡς ὅλον καὶ μέρη.. Ἀλλὰ τὸ μὲν τετραγ. $ΑΔ = ΑΓ^2$, τὸ δὲ ὀρθογ. $ΓΖ = ΑΓ \times ΓΒ = ΑΓ \times ΓΒ$.. ὥστε ὀρθογ. $AB \times ΑΓ = ΑΓ^2 + ΑΓ \times ΒΓ$.

Ἐξω $AB = 10$, καὶ $ΑΓ = 7$, τότε $10 \times 7 = 7^2 + 7 \times 3$. Ὡσαύτως καὶ ἂν ἐτετραγωνίζετο τὸ ἕτερον τμήμα ΒΓ, τὸ πρᾶγμα ἤθελεν ἔχει ἐπίσης τὸν αὐτοῦ τόπον. Καθότι τότε $10 \times 3 = 3^2 + 3 \times 7$. Ὡς...

Π ρ ό τ α σ ε ι ς. δ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἓν τυχὸν σημεῖον, τὸ τετράγωνον τῆς ὅλης θέλει εἶναι ἴσον μετὰ τὸ δις ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τῶν τετραγώνων τῶν τμημάτων.

Ἐξω AB ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα.. καὶ ἂς τμηθῇ εἰς τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, τότε λέγω ὅτι $AB^2 = 2 ΑΓ \times ΓΒ + ΑΓ^2 + ΒΓ^2$. σχ. 79.

Ἀναγράφω τὸ τετράγωνον τῆς AB : τὸ $ΑΔ$ λέγω.. ἄγω τὴν διάμετρον $ΑΔ$.. ἀπὸ τοῦ σημείου Γ ἄγω τὴν ΓΕ παράλληλον μετὰ τὴν ΒΔ, καὶ διὰ τοῦ σημείου Ζ ἄγω τὴν ΗΘ παράλληλον μετὰ τὴν ΑΒ.

Τὸ τετράγωνον $ΑΔ = AB^2$, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἀλλὰ τὸ τετράγ. $ΑΔ = ὀρθογ.$ $AZ + ὀρθογ.$ $ΖΔ + ὀρθογ.$ $ΓΗ + ΘΕ$.. τὸ δ' ὀρθογ. AZ , ὡς ἐκτῆς $ΑΔ$ διαγωνίου,

ἡ γων. $\angle \Lambda \Gamma = 45^\circ$ (πρ. β'. προ. μς'. βιβλ. α'), ἐξ οὗ
 ἡ γων. $\angle \Delta \Gamma = 45^\circ$. (πορ. ζ'. προ. λβ'. βιβλ. α'), ὥστε
 ἡ $\Lambda \Gamma = \Gamma \Delta$ (πρ. ζ'. βιβλ. α'), καὶ διὰ τοῦτο τὸ ὀρ-
 θογώνιον $\Lambda \Gamma \Delta$ εἶναι ἰσόπλευρον (πρ. λδ'. βιβλ. α')..
 ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ γων. $\angle \Lambda \Gamma = 90^\circ$ ἐκ τῆς κατασκευῆς,
 διὰ τοῦτο καὶ ἅπασαι αἱ γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ὀρθαί.. ὥστε τὸ
 ὀρθογώνιον $\Lambda \Gamma \Delta$ εἶναι τετράγωνον (ῥ. ιε'. βιβλ. α'):
 ὁ ἐς $\Gamma = \Lambda \Gamma^2$. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ ὀρθογώ-
 νιον $\Delta \Gamma \Delta$ εἶναι τετράγωνον: τουτέστι $\Delta \Gamma^2 = \Gamma \Delta^2$.
 Τὸ δὲ ὀρθογ. $\Gamma \Delta = \Delta \Gamma \times \Gamma \Delta$ (ῥ. α') $= \Lambda \Gamma \times$
 $\Gamma \Delta$.. καὶ ἐπειδὴ τὰ παραπληρώματα εἶναι ἴσα ἀλλή-
 λους (μγ'. βιβλ. α'), διὰ τοῦτο καὶ τὸ ὀρθογ. $\Theta \Gamma =$
 $\Lambda \Gamma \times \Gamma \Delta$. Ὡς τὸ $\Lambda \Delta^2 = 2 \Lambda \Gamma \times \Gamma \Delta + \Lambda \Gamma^2 + \Gamma \Delta^2$.
 Ἐξω $\Lambda \Delta = 10$, καὶ $\Lambda \Gamma = 7$, τότε $10^2 =$
 $2 \times 7 \times 3 + 7^2 + 3^2 = 42 + 49 + 9$.

Π ό ρ ι σ μ α α'.

Ὡς τὰ περὶ τῇ διάμετρον ὀρθογώνια τῶν τετρα-
 γώνων εἶναι καὶ αὐτὰ τετράγωνα.

Π ό ρ ι σ μ α β'.

Ἄν ἡ τομὴ τῆς δοθείτης εὐθείας γένῃ δίχα, τότε
 τὰ παραπληρώματα θέλουσιν εἶναι καὶ αὐτὰ τετράγωνα.
 Καὶ διὰ τοῦτο ἂν $\Lambda \Delta = 10$, τότε $\Lambda \Delta^2 = 10^2 =$
 $2 \times 5 \times 5 + 5^2 + 5^2 = 4 \times 5^2$: ὁ ἐς τὸ τετρά-
 γωνον τῆς ἑλῆς εἶναι τετραπλάσιον τῆς ἡμισείας, ὡς τοῦτο
 εἶδομεν (πορ. ε'. προ. μζ'. βιβλ. α').

Π ρ ό τ α σ ι ς ε'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα μέρη
 τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων μερῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ

τοῦ τετραγώνου τῆς μεταξύ τῶν τομῶν, θέλει εἶναι ἴσον μετὰ τὸ τετράγωνον τῆς ἡμισείας.

Ἐξω AB ἡ ὁδοῦτα εὐθεῖα, καὶ ᾧς τμηθῇ εἰς ἴσα κατὰ τὸ Γ, καὶ εἰς αἰσα κατὰ τὸ Δ, τότε λέγω ὅτι $ΑΔ \times ΒΔ + ΓΔ^2 = ΓΒ^2$. σχ. 80.

Ἀναγράφω τὸ τετράγωνον τῆς ἡμισείας ΓΒ: τὸ ΓΕ λέγω. ἄγω τὴν διάμετρον ΒΖ. ἄγω ἀπὸ μὲν τοῦ σημείου Δ τὴν ΔΗ παράλληλον μετὰ τὴν ΒΕ, τὴν δὲ ΙΚ διὰ τοῦ Θ σημείου παράλληλον καὶ ἴσην μετὰ τὴν ΑΒ, καὶ ζευγύνω τὰ σημεία Ι, Α διὰ τῆς εὐθείας ΙΑ.

Ἐπειδὴ τὸ ὀρθογ. ΓΘ = ὀρθογ. ΘΕ (πρ. λγ'. β:δ. α'), προσέθῃμι κοινῶς τὸ τετραγ. ΔΚ, καὶ ἔχω ὀρθογ. ΓΗ = ὀρθογ. ΔΕ. ἄλλ' ὀρθογ. ΓΚ = ὀρθογ. ΑΔ (πρ. λγ'. β:δ. α').. διὰ τοῦτο καὶ ὀρθογ. ΑΔ = ὀρθογ. ΔΕ. προσέθῃμι κοινῶς τὸ ὀρθογ. ΓΘ, καὶ ἔχω ὀρθογ. ΑΘ = γνωμ. αβγ. προσέθῃμι δὲ κοινῶς τὸ τετραγ. ΛΗ, καὶ ἔχω ὀρθογ. ΑΘ + τετραγ. ΛΗ = γνωμ. αβγ. + τετραγ. ΛΗ. ἀλλὰ γνωμ. αβγ. + τετραγ. ΛΗ = τετραγ. ΓΕ = $ΓΒ^2$, ὡς μέρη καὶ ὅλον. ὥς: ὀρθογ. ΑΘ + τετραγ. ΛΗ (= $ΓΔ^2$) = $ΓΒ^2$.

Ἐξω ΑΒ = 12, καὶ ΑΔ = 10, τότε ἡ μὲν ΑΓ = 6, ἡ δὲ ΒΔ = 2. Ὅθεν $10 \times 2 + 4^2 = 6^2$.

Π ὁ ρ ι σ μ α.

Ὡς: ἡ δίχρη πάσης ποσότητος τομὴ γενεᾷ γινόμε-
ων μέγιστον ἀπάσης τομῆς. Οὕτως ὁ 12 ἀριθμὸς τμηθεὶς,
πολλαχῶς, δίδει $6 \times 6 > 7 \times 5 > 8 \times 4 > 9 \times 3$
 $> 10 \times 2 > 11 \times 1$.

Π ρ ό τ α σ ι ς .

Ἐάν ευθεία γραμμὴ τμηθῇ δίχα, καὶ εἰς αὐτὴν προσεθῇ ἄλλη ευθεία ἐπ' ευθείας, τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῆς δοθείσης σὺν τῇ προσεθείσῃ, ὡς ἀπὸ μιᾶς, καὶ τῆς προσεθείσης περιεχόμενον, μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς ἡμισείας θίλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἡμισείας σὺν τῇ προσεθείσῃ, ὡς ἀπὸ μιᾶς.

Ἐξω AB ἡ δοθεῖσα ευθεία δίχα τετμημένη κατὰ τὸ Γ , καὶ BD ἡ εἰς αὐτὴν προσεθείσα, τότε λέγω ὅτι $AD \times BD + GB^2 = GD^2$. σχ. 81.

Ἀναγράφω τὸ τετράγωνον τῆς GD : τὸ $ΓΔΕΖ$ λέγω.. ἄγω τὴν διάμετρον DZ .. ἀπὸ τοῦ σημείου B ἄγω τὴν BH παράλληλον μὲ τὴν DE .. διὰ τοῦ σημείου Θ ἄγω τὴν IK παράλληλον καὶ ἴσην μὲ τὴν AD .. ζευγνύω τὰ σημεία I, A διὰ τῆς IA ευθείας.

Τὸ ὀρθογ. $AK = AD \times BD$ (ὅρω α'), ὡς οὔσης τῆς $BD = DK$ (πρ. πρ. δ').. ἀλλὰ τὸ ὀρθογ. $AK =$ γνωμ. $\alpha\beta\gamma$.. διότι τὸ μὲν ὀρθογ. $AL =$ ὀρθογ. $\Gamma\Theta$ (πρ. $\lambda\zeta'$. βιβ. α'), τὸ δ' ὀρθογ. $\Gamma\Theta =$ ὀρθογ. ΘE , ὡς παραπληρώματα.. προσέβημι λοιπὸν κοινῶς τὸ τετράγ. ΛH , καὶ ἔχω ὀρθογ. $AK +$ τετραγ. $\Lambda H =$ γνωμ. $\alpha\beta\gamma +$ τετραγ. ΛH .. ἀλλὰ γνωμ. $\alpha\beta\gamma +$ τετραγ. $\Lambda H =$ τετραγ. $\Gamma E = GB^2$, ὡς μέρη καὶ ὅλα, καὶ ὀρθογ. $AK +$ τετραγ. $\Lambda H = AD \times BD + GB^2$. Ὡς $AD \times BD + GB^2 = GD^2$.

Ἐξω $AB = 8$, καὶ $BD = 6$, τότε θίλει εἶναι $GB = 4$, καὶ $AD = 14$. Ὡς $(8+6) 6 + 4^2 = (4+6)^2$, ἢτε $14 \times 6 + 4^2 = 10^2$.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς ζ.

Ἐάν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἓν τυχόν σημεῖον, τὰ δύο τετράγωνα τῆς τε ὅλης καὶ θατέρου τμήματος θέλουσιν εἶναι ἴσα μὲ τὸ εἰς ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχόμενον μετὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἐτέρου τμήματος.

Ἐστω AB ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, τετμημένη εἰς ἓν τυχόν σημεῖον τὸ Γ, τότε λέγω ὅτι $AB^2 + GB^2 = 2 AB \times GB + AG^2$. σχ. 82.

Ἀναγράφω τὸ τετράγωνον τῆς AB: τὸ AD λέγω.. ὡσαύτως καὶ τὸ τῆς GB: τὸ ΓZ δηλονότι.. ἄγω τὴν διάμετρον EB.. ἀπὸ τοῦ σημείου Γ ἄγω τὴν ΓΘ παράλληλον μὲ τὴν ΒΔ, καὶ διὰ τοῦ σημείου I τὴν ΔΚ παράλληλον μὲ τὴν AB.

Τὸ τετραγ. AD = AB^2 , καὶ τὸ τετραγ. ΓZ = GB^2 , ἐκ τῆς κατασκευῆς.. ἀλλὰ τετραγ. AD = ὀρθογ. AK + ὀρθογ. ID + τετραγ. AO, ὡς ὅλον καὶ μέρη.. ὥστε $AB^2 + GB^2 = \text{ὀρθογ. AK} + \text{ὀρθογ. ID} + \text{τετραγ. AO} + \text{τετραγ. ΓZ}$.. ἀλλὰ τὸ μὲν ὀρθογ. AK = $AB \times GB$, ὡς οὐσης τῆς GB = BK, τὸ δὲ ὀρθογ. ID + τετραγ. ΓZ = ὀρθογ. ΓΔ = $AB \times GB$, καὶ τὸ τετραγ. AO = $AI^2 = AG^2$. Ὡς $AB^2 + GB^2 = 2AB \times GB + AG^2$.

Ἐστω AB = 10, καὶ AG = 7, τότε GB = 3. Ὡς $10^2 + 3^2 = 2 \times 10 \times 3 + 7^2$. Ὡς...

Π ρ ό τ α σ ε ι ς η'.

Ἐάν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἓν τυχόν σημεῖον, καὶ εἰς αὐτὴν προσεθῇ ἄλλη εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας καὶ ἴση

μέ τὸ ἐν τμήμα, τὸ τετράκις ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῆς δοθείσης καὶ τοῦ ἐνὸς τμήματος περιεχόμενον μετὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἐτέρου τμήματος θέλει εἶναι ἴσον μετὰ τὸ τετράγωνον τῆς ὅλης. (α).

Ἐξω AB ἡ δοθείσα εὐθεΐα. καὶ ὥς τμηθῇ εἰς ἐν-
τυχὸν σημείου τὸ Γ. καὶ ὥς προσεθῇ εἰς αὐτὴν ἡ ΒΔ
= ΓΒ, τότε λέγω ὅτι $4 AB \times GB + AG^2 = AD^2$.
σχ. 83.

Ἀναγράφω τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ: τὸ ΑΕ λέγω..
ἄγω τὴν διάμετρον ΖΔ. ἀπὸ τῶν σημείων Γ, Β. ἄγω
τὰς ΓΗ, ΒΘ παραλλήλους μετὰ τὴν ΔΕ, καὶ διὰ τῶν
σημείων Ι, Κ ἄγω τὰς ΛΜ, ΝΞ παραλλήλους μετὰ
τὴν ΑΔ.

Τὸ τετράγωνον ΑΕ = AD^2 , ἐκ τῆς κατασκευῆς..
ἀλλὰ τὸ τετραγ ΑΕ = γνομ. αβγ. + τετραγ. ΞΗ,
ὡς ὅλον καὶ μέρη.. ὁ δὲ γνομ. αβγ. = ὀρθογ. ΑΙ
+ ὀρθογ. ΜΟ + ὀρθογ. ΙΕ + ὀρθογ. ΚΘ + τετραγ.
ΒΛ, ὡς ὅλον καὶ μέρη: ὁ ἐς = $4 AB \times GB$. Ὡς
 $AD^2 = 4 AB \times GB + τετραγ. ΞΗ = 4 AB \times GB$
+ AG^2 .

(α) Ὁ Τακωμίτις ὅμως προσέροι ταύτην τὴν πρότασιν
ὡςδε πως. Ἐάν εὐθεΐα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα μέρη, καὶ εἰς αὐτὴν
προσεθῇ ἄλλη εὐθεΐα ἐπ' εὐθείας, τὸ τετράκις ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ
τῆς ἡμισείας σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς ἡμισείας περιεχόμενον
μετὰ τοῦ τετραγώνου τῆς προσκειμένης εἶναι ἴσον μετὰ τὸ τετρά-
γωνόν τῆς ὅλης: τῆς δοθείσης λίγω σὺν τῇ προσθεισῇ.

Ἐξω ΓΔ ἡ δοθείσα τετμημένη διχα κατὰ τὸ Β. ὥς προ-
σεθῇ ἡ ΑΓ εὐθεΐα, τότε $4 AB \times GB + AG^2 = AD^2$.

Ἐξω $AB = 10$, καὶ $AG = 7$, τότε $BD = 3$, καὶ $AD = 13$. Ὡς $4 \times 10 \times 3 + 7^2 = 13^2$.
Ὡς...

Π ρ ό τ α σ ε ι ς. 9.

Ἐὰν εὐθεία γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα μέρη, τὰ τετράγωνα τῶν αὐτῶν μερῶν τῆς δευτέρας τομῆς θύλουσι εἶναι διπλάσια τῶν τετραγώνων τῆς τε ἡμισείας καὶ τοῦ μεταξὺ τῶν τομῶν,

Ἐξω AB ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, τετμημένη εἰς ἴσα μέρη κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Δ , τότε λέγω ὅτι $AD^2 + DB^2 = 2(AG^2 + GD^2)$. σχ. 84.

Ἀπὸ τοῦ σημείου Γ ὑψώ πρὸς ὀρθὰς τὴν $GE = AG = GB$. ἄγω τὴν EA καὶ EB . ἀπὸ τοῦ σημείου Δ ἄγω τὴν DZ παράλληλον μετὰ τὴν GE , καὶ διὰ τοῦτο πρὸς ὀρθὰς μετὰ τὴν AB . ἀπὸ τοῦ σημείου Z ἄγω τὴν ZH παράλληλον μετὰ τὴν AB , εἴτε καθέτως ἐπὶ τῆς EG . καὶ τέλος ἄγω τὴν AZ . Καὶ ἔχω τρία ταῦτα: α'. ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα AGE , BGE εἶναι ὀρθογώνια τε καὶ ἰσοσκελῆ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, καὶ διὰ τοῦτο ἡ τε γων. $GEA = 45^\circ$, καὶ ἡ γων. $GEB = 45^\circ$, τούτου ἕνεκεν ἡ ὅλη γων. $AEB = 90^\circ$.

β'. Ἐπειδὴ τὸ τρίγ. EHZ εἶναι καὶ ὀρθογώνιον, καὶ ἔχει καὶ τὴν γων. $HEZ = 45^\circ$, τούτου ἕνεκεν $EH = HZ$ (πορ. ζ'. προ. λβ'. βιβ. α').

γ'. Ἐπειδὴ τὸ τρίγ. ZAB εἶναι ὀρθογώνιον, καὶ ἔχει καὶ τὴν γων. $ZBA = 45^\circ$, τούτου ἕνεκεν $ZA = AB$.

Ὡς τὸ $AZ^2 = AD^2 + DZ^2$ (πρ. μζ.) =

$AD^2 + DB^2$.. αλλά δια τὸν αὐτὸν λόγον. $AZ^2 = AE^2 + EZ^2$.. ὥς $AD^2 + DB^2 = AE^2 + EZ^2$ (ἀξ. α'). .. αλλά τὸ μὲν $AE^2 = AG^2 + EG^2$ (πρ. μζ. βιβ. α'.) $= 2 AG^2$ (πρ. γ'. τῆς αὐτῆς), τὸ δὲ $EZ^2 = HZ^2 + EH^2 = 2 HZ^2 = 2 GD^2$. Ὡς $AD^2 + DB^2 = 2 (AG^2 + GD^2)$.

Ἐς $AB = 10$, καὶ $AG = 5$, καὶ $AD = 7$, τότε $DB = 3$, καὶ $GD = 2$. Ὡς $7^2 + 3^2 = 2 (5^2 + 2^2)$.. Ὡς...

Π ρ ό τ α σ ι ς . ι

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ διχα, καὶ εἰς αὐτὴν προσεθῇ ἄλλη εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὰ τετράγωνα τῆς τε ὅλης καὶ τῆς προσθεθείσης θέλουσιν εἶναι διπλάσια τῶν τετραγώνων τῆς τε ἡμισείας καὶ τῆς συγκεκριμένης ἔκτε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσθεθείσης.

Ἐς AB ἡ δοθείσα εὐθεῖα, καὶ εἰς αὐτὴν ὅς προσεθῇ ἡ BD εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τότε λέγω ὅτι $AD^2 + BD^2 = 2 (AG^2 + GD^2)$. σχ. 85.

Ἀπὸ τοῦ σημείου Γ ὑψώ πρὸς ὀρθὰς τὴν $GE = AG = GB$.. ἄγω τὰς EA , EB .. ἐκπληρῶ τὸ ὀρθογ GZ .. ἐπεκτείνω τὰς EB , ZD , ἕως οὗ νὰ συμπέσωσιν εἰς τὸ σημεῖον H , ὡς μὴ οὔσαι παράλληλοι, ἄγω καὶ τὴν AH .

Ἡ μὲν γων. $AEB = 90^\circ$, ἡ δὲ γων. $EBG = 45^\circ$, κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς ἀνωτέρω προτάσεως.. ἀλλ' ἡ γων. $EBG =$ γων. ΔBH , καθὼ κατὰ κορυφήν.. Ὅθεν καὶ ἡ γων. $\Delta BH = 45^\circ$, καὶ διὰ τοῦτο τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $B\Delta H$ ἔχει τὴν $B\Delta = \Delta H$ (πρ. ζ' πρ. λβ. βιβ. α').

Ὡς $AH^2 = AD^2 + DH^2 = AD^2 + BD^2$ (πρ. μζ'. βιβλ. α'). Ἀλλὰ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ $AH^2 = AE^2 + EH^2$.. ὥς $AD^2 + BD^2 = AE^2 + EH^2$.. Ἀλλὰ τὸ μὲν $AE^2 = AF^2 + EF^2$ (διὰ τὴν αὐτὴν) $= 2 AF^2$ (πρ. γ'. τῆς αὐτῆς), τὸ δὲ $EH^2 = DE^2 + EH^2$ (διὰ τὴν αὐτὴν) $= 2 EZ^2$, (ὡς ὅτος ὁλ. ἰσοσκελεὺς τοῦ ὀρθογωνίου τριγ. EZH) $= 2 ΓΔ^2$.. Ὡς $AD^2 + BD^2 = 2 (AF^2 + ΓΔ^2)$.

Ἐς $AB = 10$, καὶ $BD = 4$, διὰ τοῦτο $AD = 14$ καὶ $AF = 5$. Ὡς $14^2 + 4^2 = 2 (5^2 + 9^2)$. Ὡς ..

Π ρ ό τ α σ ι ς. ια'.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν νὰ διαιρέσῃ τις οὕτως, ὥς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον νὰ ᾖ ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἑτέρου τμήματος.

Ἐς AB ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα. σχ. 86.

Ἀναγράφω τὸ τετράγωνον τῆς AB : τὸ AF λέγω.. τέρνω διχα τὴν AD (πρ. ι. βιβλ. α') κατὰ τὸ σημεῖον E .. ἄγω τὴν EB .. ἐπεκτείνω τὴν EA , ὥς οὗ ἢ $EZ = EB$.. ἀναγράφω τὸ τετράγωνον τῆς AZ : τὸ AH λέγω.. ἐπεκτείνω τὴν HO ὥς τοῦ σημείου K , καὶ λέγω ὅτι τὸ σημεῖον Θ εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.

Καθότι ἐπειδὴ εἰς τὴν DA εὐθεῖαν, τμηθεῖται διχα, προστεθῇ ἡ AZ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, διὰ τοῦτο ὀρθογ. $AZ \times AZ + EA^2 = EZ^2$ (πρ. ζ') $= EB^2$, ὡς οὗτος ὁλ. ἐκ τῆς κατασκευῆς, $EB = EZ$.. ἀλλ' $EB^2 = AB^2 + EA^2$ (πρ. μζ'. βιβλ. α').. ὥς ἐκ τῆς ὀρθογ. $AZ \times AZ + EA^2 = AB^2 + EA^2$: ὁ ἐξ ὀρθογ. $AZ \times AZ = AB^2$..

ἀλλὰ ὀρθογ. $\Delta Z \times AZ = \text{ὀρθογ. } \Delta H$, καὶ $AB^2 = \text{τετραγ. } \Delta \Gamma$. ὥς ἀφαιρουμένου κοινῶς τοῦ ὀρθογ. $\Delta \Theta \text{H} \Delta$, μένει τετραγ. $\Delta H = \text{ὀρθογ. } \Theta \Gamma$: ὅ ἐστιν $\Delta \Theta^2 = B\Gamma \times \Theta B = AB \times \Theta B$, ὑπὲρ ἑξήτειτο. Ὡς ἡ AB τέτμηται οὕτω κατὰ τὸ Θ σημείου, ὥς $AB \times \Theta B = \Delta \Theta^2$: ὅ ἐστιν $AB : \Delta \Theta :: \Delta \Theta : \Theta B$. (α).

Π ρ ό τ α σ ι ς. ιβ'.

Εἰς τὰ ἀμβλυγώνια τρίγωνα τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτείνουσας τὴν ἀμβλείαν γωνίαν εἶναι μείζον τῶν τετραγώνων τῶν λοιπῶν πλευρῶν κατὰ τὸ δις ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ μιᾶς τῶν λοιπῶν πλευρῶν, ἐφ' ἣν ἐκβλήθεισαν ἐπιπίπτει ἡ κάθετος, καὶ τῆς εὐθείας τῆς μεταξὺ τῆς καθέτου καὶ τῆς ἀμβλείας γωνίας.

Ἐστω $B\Delta\Gamma$ τρίγωνον ἀμβλυγώνιον κατὰ τὴν Δ γωνίαν. σχ. 87. ἐπεκτείνω τὴν BA . ἄγω ἐπ' αὐτὴν κάθετον τὴν $\Gamma\Delta$, ἣτις εἶναι τὸ ὕψος τῶν τριγώνων, καὶ λέγω ὅτι $B\Gamma^2 = AB^2 + \Delta\Gamma^2 + 2 AB \times \Delta\Delta$. σχ. 87.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἡ γων. $B\Delta\Gamma = 90^\circ$, διὰ τοῦτο $B\Gamma^2 = B\Delta^2 + \Delta\Gamma^2$ (πρ. μζ. βιβ. α'). ἀλλὰ τὸ μὲν $B\Delta^2 = AB^2 + \Delta\Delta^2 + 2 AB \times \Delta\Delta$ (πρ. δ'), τὸ δὲ $\Delta\Gamma^2 = \Delta\Gamma^2 - \Delta\Delta^2$ (πορ. α. προ. μζ. βιβ. α'). Ὡς $B\Delta^2 +$

(α) Ἀὕτη ἡ πρότασις ἀριθμητικῶς δὲν ἐκφράζεται. διότι εἶναι ἀδύνατον νὰ ἐξηγῇ ἀριθμῶς. ὥς διαιρεθῆναι εἰς δύο, τὸ γινόμενον, ἐκ τοῦ ὅλου ἐπὶ τὸ ἐν μέρος νὰ ᾖναι ἴσον μετὰ τετραγώνου τοῦ ἑτέρου τμήματος, διὰ ἀρ' ὅτων ὁμῶς ἀριθμῶν ἐκφράζεται. Καθότι ἔστω ὁ ἀριθμὸς 2, καὶ αὗς διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη· εἰς τὸ μείζον $\sqrt{5}-1$, καὶ εἰς τὸ ἐλάσσον $3-\sqrt{5}$, τότε $2(3-\sqrt{5}) = (\sqrt{5}-1)$.

$\Delta\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2 BA \times \Delta\Delta = B\Gamma^2$: ὁ ἔστι τὸ
 $B\Gamma^2 > AB^2 + AB^2$ κατὰ τὸ $2 BA \times \Delta\Delta$, ὡς ἐξηγεῖτο.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὡς αὖν, εἰς ἓν τρίγωνον, τὸ τετράγωνον τῆς μίαν
 πλευρᾶς ἦναι μείζον τῶν τετραγώνων τῶν λοιπῶν πλευ-
 ρῶν, τὸ τετράγωνον θέλει εἶναι ἀμβλυγώνιον, καὶ ἡ εἰ-
 ρημένη πλευρὰ θέλει ὑποτείνειν τὴν ἀμβλείαν γωνίαν.

Π ρ ό τ α σ ι ς. ιγ'.

Εἰς τὰ ὀξυγώνια τρίγωνα τὸ τετράγωνον τῆς ὑπο-
 τείνουσας μίαν τῶν ὀξείων γωνιῶν εἶναι ἐλάσσον τῶν τε-
 τραγώνων τῶν λοιπῶν πλευρῶν κατὰ τὸ δις ὀρθογώνιον
 τὸ περιεχόμενον ὑπὸ μίαν τῶν λοιπῶν πλευρῶν, ἐφ' ἣν
 ἡ κάθετος ἐπιπίπτει, καὶ τῆς εὐθείας τῆς μεταξὺ τῆς κα-
 θέτου καὶ τῆς εἰρημένης ὀξείας γωνίας.

Ἐς ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ ΓAB , καὶ ἂν ἀχθῇ
 κάθετος ἡ $\Gamma\Delta$, τότε λέγω ὅτι $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 -$
 $2 AB \times \Delta\Delta$. σχ. 88.

Τὸ $A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2$ (πρ. μζ'. βιβλ. α'). ἀλλὰ
 τὸ μὲν $A\Delta^2 = AB^2 + B\Delta^2 - 2 AB \times \Delta B$ (πρ. ζ'),
 ὡς ὕπο: $AB^2 + \Delta B^2 = 2 AB^2 + A\Delta^2$, τὸ δὲ $\Delta\Gamma^2 =$
 $B\Gamma^2 - \Delta B^2$ (πρ. α'. μζ'. βιβλ. α'). ὡς ὕπο:

Ὡς αὖν $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 - 2 AB \times \Delta B$: ὁ
 ἔστι $A\Gamma^2 < AB^2 + B\Gamma^2$ κατὰ τὸ $2 AB \times \Delta B$.

Π ό ρ ι σ μ α. α'.

Ὡς αὖν εἰς πᾶν τρίγωνον ἀχθείσας καθέτου ἀπὸ τῆς
 κορυφῆς, ἂν μὲν ἡ μία πρὸς τῇ βάσει γωνία ἦναι ἀμβλεία,
 ἡ κάθετος πεσίζειται ἔξω τῆς βάσεως (πρ. ιβ'). ἂν δ'

ὀρθῇ, εἰς τὸ πέρας τῆς βάσεως (πρ. μζ'. βιβ. α'). εἰδὲ καὶ εἶναι ἐκάτεραι ὀξεῖαι, ἐπὶ τὴν βάσιν.

Π ὁ ρ ι σ μ α. β'.

Ἄν, εἰς ἓν τρίγωνον, τὸ τετράγωνον τῆς μᾶς πλευρᾶς ἦναι ἑλασσον τῶν τετραγώνων τῶν λοιπῶν δύο πλευρῶν, αὕτη ἡ πλευρὰ ὑποτείνει ὀξεῖαν γωνίαν.

Π ρ ὁ τ α σ ι ς. ιδ'.

Νὰ συστήσῃς τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ δοθέν εὐθύγραμμον.

Ἔστω Α τὸ δοθέν εὐθύγραμμον σχῆμα. σχ. 89.

Παρὰ τὴν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΒΓ συνήσῃμι παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΒΓΔΕ = εὐθυγ. Α (πρ. με'. βιβ. α')., ἔπεκτείνω τὴν ΒΓ, ἕως οὗ ἡ ΓΖ = ΓΔ.. τέμνω τὴν ΒΖ οἷχα κατὰ τὸ σημεῖον Κ.. εἴτα κέντρον μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΖ, γράφω κύκλον τὸν ΖΗΒ.. ἐπεκτείνω τὴν ΔΓ μέχρι τῆς περιφερείας Η.. ἄγω τὴν ΚΗ, καὶ λέγω ὅτι τὸ ΗΓ² εἶναι τὸ ζητούμενον τετράγωνον.

Καθότι, ἐπειδὴ καὶ ἡ εὐθεῖα ΒΖ τέτμηται εἰς ἴσα κατὰ τὸ Κ, καὶ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Γ, διὰ τοῦτο $KZ^2 = BG \times GZ + KG^2$ (πρ. ε')., ἀλλὰ $KZ = KH$, καθὸ ἡμιδιάμετροι, καὶ $KH^2 = HG^2 + KG^2$ (πρ. μζ'. βιβ. α').. Ὡς $BG \times GZ + KG^2 = HG^2 + KG^2$ (ἀξ. α').. ὁ ἔστι $BG \times GZ = HG^2$, ἀφαιρέσαντος δηλ. κοινῶς τοῦ KG^2 , ἀλλ', ἐκ τῆς κατασκευῆς $BG \times GZ = \text{ὀρθογ. ΒΓΔΕ}$, καὶ ὀρθογ. ΒΓΔΕ = εὐθ. Α, ὥς $HG^2 = \text{εὐθυγ. Α}$, ὅπερ ἐζητεῖτο.

BIBΛION Γ.

Ὅ ρ ο ι.

α'. Κύκλοι ἴσοι εἶναι ἐκεῖνοι, ὧν περ αἱ διαμέτροι ἢ ἡμιδιάμετροι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

β'. Ἐφαπτομένη λέγεται ἐκείνη ἡ εὐθεῖα, ἣτις ἀπτεται τοῦ κύκλου καθ' ἓν μόνον σημεῖον καὶ ἐπεκταθεῖσα δὲν τέμνει τὸν κύκλον, ὡς ἡ ΓΑ (σχ. 105).. καὶ διατέμνουσα ἢ ἀρχομένη ἐξωθεν τοῦ κύκλου καὶ περατουμένη εἰς τὸ κοῖλον τῆς ἐπιφανείας ὡς ἡ αΒ, καὶ αΓ (σχ. 97).. καὶ προσφιλοῦσα ἢ περατουμένη εἰς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν, ὡς ἡ αΛ, αΗ, αΘ.

γ'. Κύκλοι ἐφαπτόμενοι λέγονται ἐκεῖνοι, εἴ τινας, χωρὶς να τέμνονται ὑπ' ἀλλήλων, ἐφαπτονται, ὡς οἱ ΑΒΓ, αβγ. σχ. 101.

δ'. Ἐν κύκλῳ λέγονται εὐθεῖαι ὅτι ἀπέχουσιν ἐξίσου τοῦ κέντρου, εἰὰν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτάς ἀχθεῖσαι κάθετοι ᾖναι ἴσαι ἀλλήλαις.. καὶ λέγεται ὅτι ἀπέχει μείζον μία εὐθεῖα μᾶς ἄλλης, εἰὰν ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὴν ἀχθεῖσα κάθετος ᾖναι μείζων.

ε'. Χορδὴ ἐνομάζεται μία εὐθεῖα, ἣτις περατοῦται ἐκατέρωθεν εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὡς ἡ ΑΓΒ.. τὸξά δὲ τὰ μέρη τῆς περιφερείας τὰ ὑπὸ τῆς χορδῆς ὑποτείνομενα, ἅπερ καὶ μέτρα γωνιῶν εἶναι, ὡς τὸ ΑΕΒ : σχ. 90.

ς'. Τόξα ἴσα λέγονται, ὅσα ἐν τῷ αὐτῷ ἢ ἴσας

κύκλοις ὑποτείνουσιν ἴσας γωνίας, εἴτε πρὸς τῷ κέντρῳ, εἴτε πρὸς τῇ περιφέρειᾳ, ὡς τὸ ΓΒ = ΒΔ. σχ. 92.

ζ. Τμήμα κύκλου λέγεται τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ χορδῆς καὶ τόξου, ὡς τὸ ΑΓΒΕ. σχ. 90.

η. Τμήματος γωνία λέγεται ἡ περιεχομένη ὑπὸ χορδῆς καὶ τόξου, ὡς ἡ ΓΑΕ, ἢ ΓΒΕ: σχ. 90.

θ. Ἐν τμήματι γωνία λέγεται ἡ ἔχουσα τὴν κορυφὴν εἰς τὴν περιφέρειαν, καὶ περιεχομένη ὑπὸ χορδῶν, ὡς ἡ ΑΓΒ. σχ. 112.

ι. Ἐπιβέβηκε λέγεται ἡ ἐν τμήματι γωνία ἐπὶ τὸ τόξον, ὅταν τοῦτο τὸ τόξον μὲ τὸ τμήμα τοῦ κύκλου ἐκπληρῶσι τὴν περιφέρειαν. Οὕτως ἡ γων. ΑΠΒ ἐπιβέβηκεν ἐπὶ τόξον ΑγΒ. διότι τοξ. ΑΠΒ + τοξ. ΑγΒ = 360° σχ. 110.

ια. Τομεὺς λέγεται τρίγωνον ἔχον τὴν μὲν κορυφὴν εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, τὰς δὲ δύο πλευρὰς χορδὰς τὴν δὲ βάσιν τόξον, ὡς τὸ ΑΚΒγΑ. σχ. 110.

ιβ. Τμήματα ὁμοια κύκλου λέγονται, ὅταν αἱ ἐν αὐτοῖς γωνίαι ἦναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Π ρ ό τ α σ ι ς. α'.

Τοῦ δοθέντος κύκλου νὰ εὕρηται τὸ κέντρον.

"Εξω ΑΕΒΔ ὁδοθεῖς κύκλος. σχ. 90.

"Αγω ἐν αὐτῷ τυχούσαν χορδὴν, ὡς τὴν ΑΒ. τέμνω αὐτὴν δίχα κατὰ τὸ σημεῖον Γ. ἀνάγω πρὸς ὀρθὰς μὲ αὐτὴν τὴν ΓΔ. ἐπεκτείνων αὐτὴν ἀπὸ τοῦ ἀπέναντι μέρους μέχρι τῆς περιφέρειας Ε. τέμνω δίχα τὴν χορδὴν ΔΕ κατὰ τὸ Κ σημεῖον, καὶ λέγω ὅτι τὸ σημεῖον Κ εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.

Εἰδὲ καὶ εἶναι, ἔσω ἐν ἄλλο, ὡς τὸ Ζ.. ἄγω τὰς ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ εὐθείας, καὶ ἔχω εἰς τὰ τρίγωνα ΑΓΖ, ΒΓΖ τὴν μὲν ΖΑ = ΖΒ, καθὼς ἡμιδιαμέτρους, τὴν δὲ ΑΓ = ΓΒ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, καὶ κοινὴν τὴν ΖΓ, καὶ διὰ τοῦτο καὶ τὴν γων. ΑΓΖ = γων. ΒΓΖ (πρ. ή. βιβ. α'): ὅ εἰς τὴν ΓΖ πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ΑΒ (ῥ. ζ. βιβλ. α'), ὅπερ εἶναι ἀδύνατον, ὡς εὐθὴς τοιαύτης τῆς ΓΗ (πρό. β'. προ. λβ'. βιβ. α'). Μὴ ἔντος λοιπὸν τοῦ σημείου Ζ κέντρου τοῦ κύκλου ΑΓΒΔ, μήτε ἄλλου τινὸς ἐκτὸς τοῦ Η, θέλει εἶναι τὸ Η, ὡς ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ι ς. β'.

Εὰν ληθῇσι δύο σημεῖα ἐπὶ τῆς περιφερείας, καὶ διαζευχθῶσι διά τινος εὐθείας, αὕτη ἡ εὐθεῖα πεσεῖται ὁλόκληρος ἐντὸς τοῦ κύκλου: ταυτέστιν εἶναι χορδῇ.

Ἐξωσαν Α καὶ Β τὰ ζευχθῆσόμενα σημεῖα, καὶ ΑΒ ἡ ταῦτα ζευγνύουσα εὐθεῖα, τότε λέγω ὅτι ἡ ΑΒ εὐθεῖα καίεται ὁλόκληρος ἐν τῷ κύκλῳ ΑΒΔ. σχ. 91.

Εὐρίσκω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΔ (πρ. α'), καὶ ἔσω τὸ Η.. ἄγω τὴν ΗΓ ἐπὶ τὴν ΑΒ εἴτε πρὸς ὀρθὰς, εἴτε μή.. καὶ ἔσω ἡ μία γωνία, ὡς ἡ ΚΓΑ > 90°.. ἄγω τὰς ἡμιδιαμέτρους ΚΑ, ΚΒ. Τώρα ἐπειδὴ καὶ ἡ γων. ΑΓΚ εἶναι ἀμθλεια, τούτου ἕνεκεν αἱ λοιπαὶ δύο θέλουσιν εἶναι ὀξείαι (πρό. ε'. προ. λβ'. βιβ. α'), καὶ διὰ τοῦτο ἡ γων. ΑΓΚ > γων. ΚΑΓ, καὶ ἐπομῆνος καὶ ἡ πλευρὰ ΚΑ > ΚΓ (πρ. ιδ'. βιβλ. α').. ἀλλὰ τὸ πέρας τῆς ΚΑ εἶναι περιφέρεια, τούτου ἕνεκεν τὸ πέρας τῆς ΚΓ εὐθείας εἶναι ἐγγύτερον τοῦ κέντρου Η: ὅ εἰς τὸ σημεῖον Γ καίεται ἐντὸς τοῦ κύκλου. Ὁμοίῳ τε

ἤθελε λεχθῇ καὶ περὶ παντὸς ἄλλου σημείου τῆς AB εὐθείας. Ὡς ἡ AB εὐθεῖα κεῖται ὁλόκληρος ἐντὸς τοῦ κύκλου $AB\Delta$, ὡς προετέθη.

Π ὁ ρ ι σ μ α.

Ὡς ἐκ πάντων εὐθειῶν ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ἐφάπτεται αὐτοῦ καθ' ἓν μόνον σημεῖον, ἀλλέως ἂν ἐφάπτεται αὐτοῦ κατὰ δύο, θέλει πέσει ἐντὸς, καὶ τότε θέλει εἶναι πλέον μὴ ἐφαπτομένη (ὅρ. β').

Π ρ ὁ τ σ ι ς γ'.

Ἐν κύκλῳ ἂν ἡ διάμετρος τέμνῃ μίαν χορδὴν δίχα, ταμεῖ αὐτήν καὶ πρὸς ὀρθὰς καὶ ἂν πρὸς ὀρθὰς, καὶ δίχα.

Ἔστω AB διάμετρος τοῦ κύκλου, καὶ ἔστω α' ἡ $\Gamma\Delta$ δίχα τετμημένη κατὰ τὸ E , τότε λέγω ὅτι γων. $\Gamma EK =$ γων. ΔEK . σχ. 92.

Ἄγω τὰς ἡμιδιαμέτρους KE , $K\Delta$.

Εἰς τὰ τρίγωνα KGE ; $K\Delta E$ ἡ μὲν $K\Gamma = K\Delta$, καθὸ ἡμιδιάμετροι, ἡ δὲ $GE = E\Delta$, ἐξ ὑποθέσεως, καὶ ἡ KE κοινὴ, ὥς ἡ γων. $KE\Gamma =$ γων. $K\Delta E$ (πρ. ἡ. βιβ. α'). ὅθεν εἶναι ὀρθαὶ (ὅρ. ζ'. βιβ. α').

β'. Ἔστω ἡ γων. $K\Gamma E =$ γων. $K\Delta E$. Ἀλλὰ καὶ ἡ γων. $\Gamma =$ γων. Δ , ὡς γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου τοῦ $K\Gamma\Delta$, καὶ ἡ $K\Gamma = K\Delta$, διὰ τοῦτο καὶ ἡ $GE = E\Delta$ (πρ. κς'. βιβλ. α'). ὅθεν ἡ $\Gamma\Delta$ δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς διαμέτρου AB , ὅπερ εἶναι τὸ δεύτερον μέρος τῆς προτάσεως. Ὡς...

Π ὁ ρ ι σ μ α α'.

Ὡς ἡ χορδὴ ἢ τέμνουσα δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς ἀλ-

λην χορδήν είναι διάμετρος, είτε κείται ἐπ' αὐτῆς τὸ κέντρον.

Π ρ ι σ μ α β'.

Ευκόλως ἔβηλε τάμοις ἐν τόξον δίχα. Καθότι ἔσω ΓΒΔ τὸ δοθέν τόξον· ἄγω τὴν ΓΔ χορδὴν.. τέμνω αὐτὴν δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον.. αἶρω πρὸς ὁρθὰς με αὐτὴν τὴν ΕΚΑ.. ἐπεκτείνω αὐτὴν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου μέχρι τῆς περιφέρειας Β, καὶ ἔσαι $ΓΒ = ΒΔ$.. διότι ἡ γων. $ΓΚΒ =$ γων. $ΔΚΒ$ (ὅρ. 5').

Π ρ ό τ α σ ι ς δ'.

Ἐν κύκλῳ εἰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας ἐκτὸς τοῦ κέντρου, εἶναι ἀδύνατον νὰ τάμωσιν ἀλλήλας δίχα. Τεμνίτωσαν ἀλλήλας αἱ ΑΒ, ΓΔ κατὰ τὸ σημεῖον Ε, λέγω ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ ἦναι ἡ μὲν ΑΕ = ΕΒ, ἡ δὲ ΓΕ = ΕΔ. σχ. 93.

Ἐξω ὁμῶς τοῦτο δυνατόν. Τότε ἄγω τὴν διάμετρον ΖΗ διὰ τοῦ Ε σημείου, ἔξω τέσσαρας ὁρθὰς γωνίας: τουτέστι γων. $ΖΕΒ =$ γων. $ΖΕΔ = 90^\circ$ (πρ. γ'): ὅ εἰσι τὸ ὅλον ἴσον μὲ τὸ ἴδιον μέρος, ὅπερ εἶναι ἀτοπον. Ὡς αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΓΔ δὲν ἔταμον ἀλλήλας δίχα.

β'. Ἄς διέρχεται ἡ μία εὐθεῖα, ὡς ΖΗ, διὰ τοῦ κέντρου Κ, τότε οὐδεμῶς ὀλιγώτερον ἢ τομὴ αὐτῆς διὰ πινος χορδῆς, ὡς διὰ τῆς ΑΒ, δὲν θίλει γένει δίχα.. διότι τότε ἡ $ΖΕ > ΕΗ$. Ὡς...

Π ρ ό τ α σ ι ς ε'.

Ἐν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντός, οὐχ ἔξωσι τὸ αὐτὸ κέντρον.

Οἱ κύκλοι ΑΒΓ, ΑΔΕ αἱ ἐφάπτονται κατὰ τὸ

Α σημείον, λέγω ὅτι δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ἔχῃσι τὸ αὐτὸ κέντρον. σχ. 95.

Εἶδε καὶ εἶναι δυνατόν, ἔσω τὸ σημείον Κ.

Πρὸς τὸ σημείον τῆς ἐπαφῆς Α ἄγω τὴν ἡμιδιάμετρον ΚΑ, ὡσαύτως καὶ τυχούσαν ἡμιδιάμετρον τὴν ΚΕΓ. καὶ ἔχω $ΚΑ = ΚΓ$, ὡς ἡμιδιαμέτρους τοῦ κύκλου ΑΒΓ. ὡσαύτως καὶ τὴν ΚΑ = ΚΕ, ὡς ἡμιδιαμέτρους τοῦ κύκλου ΔΔΕ. ὥς καὶ ἡ $ΚΓ = ΚΕ$: ὅ εἰσι τὸ ὅλον ἴσον μὲ τὸ ἴδιον μέρος, ὅπερ εἶναι ἀτοπον. Ὡς...

Π ρ ό τ α σ ι ς. ε.

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐχ ἔξουσιν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Εἰ δὲ καὶ εἶναι δυνατόν, ἔσω τὸ αὐτὸ κέντρον Κ κέντρον κοινὸν τῶν δύο κύκλων ΑΒΓ, ΔΒΕ. σχ. 94.

Ἄγω τὰς ἡμιδιαμέτρους ΚΓ, ΚΕ τοῦ κύκλου ΔΒΕ, ὅθεν ἡ $ΚΓ = ΚΕ$. ἀλλὰ καὶ ἡ $ΚΓ = ΚΖ$, καθὼς ἡμιδιαμέτροι τοῦ κύκλου ΑΒΓ. ὥς ἡ $ΚΕ = ΚΖ$ (ἀξ. α'): ὅ εἰσι τὸ ὅλον ἴσον μὲ τὸ ἴδιον μέρος, ὅπερ εἶναι ἀτοπον. Ὡς.

Π ρ ό τ α σ ι ς. ζ.

Ἐὰν ἀπόστινος σημείου ἐντὸς τοῦ κύκλου, πλην τοῦ κέντρου, ἀχθῶσιν εὐθεῖαι εἰς τὴν περίφερειαν, ἡ διὰ τοῦ κέντρου θάλει εἶναι ἡ μέγιστη, τῶν δὲ λοιπῶν ἡ αἰετὶ ἔγγιον αὐτῆς θάλει εἶναι μείζων τῶν ἀπωτέρω, καὶ ἐλαχίστη ἡ ἀπωτάτω. καὶ δύο μόνον ἐκατέρωθεν τῆς ἐλαχίστης θάλουσιν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Ἐσω α τὸ δοθέν σημείον, καὶ Κ τὸ κέντρον τοῦ

κύκλου $A\Delta B\Gamma$, λέγω α'. ὅτι ἡ aA εἶναι ἡ μεγίστη..
 β'. ὅτι ἡ $a\Gamma > a\Delta > aE > aB$.. γ'. ὅτι ἡ aB εἶ-
 ναι ἡ ἐλαχίστη ἀπασῶν.. καὶ δ'. ὅτι ἡ $aE = e\Theta$, καὶ
 ἡ $a\Gamma = aZ$. σχ. 96.

Ἡ $K\Lambda = K\Gamma$, καθὸ ἡμιδιάμετροι.. προσέθῃμι
 κοινῶς τὴν aK , καὶ ἔχω $aK + K\Gamma = aA$, ἀλλ' αἱ
 $aK + K\Gamma > a\Gamma$ (πρ. κ'. βιβ. α').. ὥς τε καὶ ἡ aA
 $> a\Gamma$. Ὁμοίως ἤθελεν ἀποδειχθῆ καὶ ἡ aA μείζων
 ἀπασῶν τῶν λοιπῶν.

β'. Εἰς τὰ τρίγωνα $K\Gamma\alpha$, $K\Delta\alpha$ ἔχω τὴν μὲν $K\Gamma$
 $= K\Delta$, καθὸ ἡμιδιαμέτρους, τὴν δὲ $K\alpha$ κοινὴν, τὴν δὲ
 γωνίαν $aK\Gamma >$ γων. $aK\Delta$, ὡς ὅλον καὶ μέρος.. ὥς τε
 καὶ ἡ $a\Gamma > a\Delta$ (πρ. κδ'. βιβ. α'): ὅθεν ἡ ἔγγιον τῆς
 aA εἶναι μείζων τῆς ἀπωτέρω.

γ'. Αἱ $K\alpha + aE > KE$ (πρ. κ'. βιβ. α').. ἀλλ'
 ἡ $KE = KB$, καθὸ ἡμιδιαμέτροι, διὰ τοῦτο αἱ $K\alpha +$
 $aE > KB$.. ἀφαιρῶ κοινῶς τὴν $K\alpha$, καὶ μένει $aE >$
 aB : ὅθεν ἡ aB , ἡ εὖσα ἀπωτάτω τῆς aA , εἴτε μέρος
 τῆς διαμέτρου AB εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἀπασῶν.

δ'. Εἰς τὰ τρίγωνα $E\alpha K$, $\Theta\alpha K$ συνίστημι τὴν γων.
 $E\alpha K =$ γων. $\Theta\alpha K$ (πρ. κγ'. βιβ. α'): ἡ ἀνέλης λαμ-
 βάνου τοξ. $EB =$ τοξ. $B\Theta$.. ἀλλ' ἔχω καὶ $KE =$
 $K\Theta$, καθὸ ἡμιδιαμέτρους, καὶ τὴν $K\alpha$ κοινὴν.. ὥς τε καὶ
 ἡ $KE = K\Theta$ (πρ. δ'. βιβ. α'). Ὁμοίως ἤθελεν ἀπο-
 δειχθῆ, καὶ ἡ $a\Gamma = aZ$, ἂν τοξ. $\Gamma A =$ τοξ. AZ .
 Ὡς τε...

Π ό ρ ι σ μ α.

"Ως ἡ αἰ εἰς ἑγγιον τῆς εἰλαχίσης εἶναι ἐλλάσσων τῶν ἀπωτέρω.

Π ρ ό τ α σ ι ς. η'.

Ἐάν ἀπότινος σημείου, ἐκτός τοῦ κύκλου, ἀχθῶσι διατέμνουσαι τε εἰς αὐτόν καὶ προσχιλοῦσαι, ἐκ μὲν τῶν διατεμνουσῶν ἡ μὲν διὰ τοῦ κέντρου θέλει εἶναι ἡ μεγίστη, ἡ δὲ αἰ εἰς ἑγγιον αὐτῆς μείζων τῶν ἀπωτέρω. ἐκ δὲ τῶν προσχιλουσῶν, ἡ μὲν μεταξύ τῆς διαμέτρου καὶ τοῦ σημείου θέλει εἶναι ἡ εἰλαχίστη, ἡ δ' αἰ εἰς ἑγγιον αὐτῆς ἐλάσσων τῶν ἀπωτέρω. καὶ μόναι δύο ἐκατέρωθεν τῆς εἰλαχίσης θέλουσιν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Ἐσω αὐτὸ ἔξω τοῦ κύκλου ΑΔΒΖ τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ Κ τὸ κέντρον αὐτοῦ, τότε, λέγω, ὅτι ἡ μὲν $αΒ > αΓ > αΔ$, κτξ., ἡ δὲ $αΓ > αΔ$ κτξ., καὶ ὅτι ἡ μὲν $αΑ < αΗ < αΘ <$, κτξ., ἡ δὲ $αΗ < αΘ$ · καὶ ὅτι ἡ μὲν $αΓ = αΕ$, ἡ δὲ $αΗ = αΙ$, ἂν τοξ. ΒΓ = τοξ. ΒΕ. σχ. 97.

Ἄγω τὰς ἡμιδιαμέτρους ΚΓ, ΚΔ, ΚΘ, ΚΗ, ΚΙ, ΚΕ.

α'. Ἡ $αΒ = αΚ + ΚΓ$, ὡς οὔσης τῆς ΚΒ = ΚΓ, ἀλλ' αἰ $αΚ + ΚΓ > αΓ$ (πρ. κ'. βιβλ. α'). ὥς καὶ ἡ $αΒ > αΓ$ · ὁρῶν ἡ διατέμνουσα ἡ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένη εἶναι μείζων τῶν λοιπῶν.

β'. Εἰς τὰ τρίγωνα αΓΚ, αΔΚ ἡ μὲν ΚΓ = ΚΔ, ἡ δὲ αΚ κοινὴ, ἡ δὲ γων. $αΚΓ >$ γων. $αΚΔ$, ὡς ὅλον καὶ μέρος. ὥς καὶ ἡ $αΓ > αΔ$. (πρ. κδ'.

βιθ. α'): ὁ ἐστὶν ἢ αἰεὶ ἕγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου εἶναι μείζων τῶν ἀπωτέρω.

γ'. Ἡ $aH < aH + KH$ (πρ. κ'. βιθ. α'): ἀρα τὸ κοινὸς τὰ ἴσα: ὅ ἐστι $KH = KH$, καὶ μένει $aA < aH$: ὁ ἐστὶν ἢ εὐθεῖα ἢ μεταξύ τῆς διαμέτρου AB καὶ τοῦ σημείου a εἶναι ἐλλάσσων ἀπασῶν.

δ'. Εἰς τὰ τρίγωνα aKH , $aK\Theta$ ἡ μὲν $KH = K\Theta$, ἡ δὲ aK κοινὴ, ἡ δὲ γων. $aKH <$ γων. $aK\Theta$, ὡς μέρος καὶ ὅλου: ὥστε καὶ ἡ $aH <$ $a\Theta$ (πρ. κδ'. βιθ. α'): ὁ ἐστὶν ἢ ἕγγυς τῆς ἐλαχίστης aA εἶναι ἐλάσσων τῶν ἀπωτέρω.

ε'. Εἰς τὰ τρίγωνα aFK , aEK ἐκτελῶ τὴν γων. $aKF = aKE$.. ἀλλ' ἔχω καὶ τὴν $KF = KE$, καθὸ ἡμιδιαμέτρους, καὶ τὴν aK κοινὴν.. ὥστε καὶ ἡ $AF = AE$ (πρ. δ'. βιθ. α'). Ὡσαύτως ἤθελεν ἀποδειχθῆ, καὶ ἡ $aH = aI$, φθάνει μόνον νὰ ᾔηται τὸξ. $FB = BE$, εἴτε $AH = AI$. Ὡςτε δύο μόναι εὐθεῖαι ἐκατέρωθεν τῆς ἐλαχίστης δύνανται νὰ ᾔηται ἴσαι ἀλλήλαις. Ὡςτε...

Π ὁ ρ ι σ μ α.

Ὡςτε ἡ ἐφαπτομένη εἶναι ἡ μεγίστη τῶν προσπελούτων.

Π ρ ό τ α σ ι ς. Σ'.

Ἐν κύκλῳ εἰάν αἱ ἀπόκεις τῶν ἐντὸς σημείων πρὸς τὴν περιφέρειαν ἀγόμεναι εὐθεῖαι ᾔηται πλεον τῶν δύο ἴσαι ἀλλήλαις, τοῦτο τὸ σημεῖον θελεῖ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου.

Ἐσὼ $KA = KB = KG$, τότε λέγω ὅτι τὸ σημεῖον K εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου $AB\delta\Gamma$. σχ. 98.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἀπὸ παντὸς ἄλλου σημείου, πλὴν τοῦ κέντρου, μόναι δύο εὐθεῖαι δύνανται νὰ ἀχθῶσιν ἴσαι εἰς τὴν περιφέρειαν (πρ. ζ'), ὁ δὴλον ὅτι μόνον ἀπὸ τοῦ κέντρου ἤθελον ἀχθῆ πολλαί. Ἐπειτα ἄγω καὶ τυχούσαν χορδὴν τὴν AB . τέμνω αὐτὴν δίχα κατὰ τὸ σημεῖον Δ . ἄγω τὴν ΔK , καὶ ἔχω εἰς τὰ τρίγωνα $\Delta K A$, $\Delta K B$ τὴν μὲν $KA = KB$, τὴν δὲ $\Delta A = \Delta B$, ἐκ τῆς κατασκευῆς, καὶ κοινὴν τὴν $K\Delta$, ὥστε ἡ $\gamma\omega\nu. K\Delta B = \gamma\omega\nu. K\Delta A$ (πρ. η'. βιβ. α'). ὥστε τὸ κέντρον τοῦ κύκλου $AB\Gamma$ κεῖται ἐπὶ τῆς $\Delta\Gamma$ (πρ. α'. προ. γ'). ὁμοίως ἤθελεν ἀποδειχθῆ ὅτι καὶ ἐπὶ τῆς $E\Gamma$. ἀλλ' αἱ $\Delta\Gamma$, $E\Gamma$ ἔχουσιν οὐδὲν ἕτερον κοινὸν σημεῖον, ἢ τὸ K , ὥστε τὸ K εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου $AB\Gamma$. Ὡς...

Π ρ ό τ α σ ι ς. ι.

Δύο κύκλοι δὲν δύνανται νὰ τάμωσιν ἀλλήλους κατὰ πλείονα τῶν δύο σημείων.

Ἐξδὲ καὶ εἶναι δυνατόν, ὥς τάμωσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι $AB\Gamma$, $\alpha\beta\gamma$ κατὰ τὰ σημεία Δ , E , Z , H . σχ. 99.

Ἀπὸ τοῦ κέντρου K τοῦ κύκλου $AB\Gamma$ ἄγω τὰς ἡμιδιαμέτρους $K\Delta$, KE , KZ , καὶ ἔχω $K\Delta = KE = KZ$, ὡντινων περατουμένων εἰς τὰς περιφέρειας ἀμφοτέρων τῶν κύκλων, τὸ σημεῖον K εἶναι κέντρον καὶ τοῦ κύκλου $\alpha\beta\gamma$ (πρ. θ'). ἀλλὰ δύο κύκλοι τέμνοντες ἀλλήλους ἀδυνατοῦσι νὰ ἔχωσι κοινὸν κέντρον (πρ. ε'). Ὡς...

Π ρ ό τ α σ ι ς. ια'.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντὸς, ἢ

τὰ κέντρα αὐτῶν ζευγνύουσα εὐθεῖα ἐπεκτεινομένη θέλει πέσει ἐπὶ τὴν συναφὴν αὐτῶν.

Ἔστωσαν K , k τὰ κέντρα τῶν ἐντὸς κατὰ τὸ A σημείου ἐφαπτομένων κύκλων: τῶν $AB\Gamma$, $A\beta\gamma$, τότε λέγω ὅτι ἡ Kk ἐπεκτεινομένη θέλει πέσει εἰς τὸ σημείου A : τουτέστιν ὅτι ἡ KkA εἶναι εὐθεῖα. σχ. 100.

Εἰδὲ καὶ δὲν εἶναι, ἔσω μία ἄλλη, ὡς ἡ $Kk\Delta E$.. ἄγ' οὖν τὴν ἡμιδιάμετρον KZA , καὶ ἔχω $Kk + kA > KZA$ (πρ. κ'. βιβ. α')... ἀλλ' ἡ $KZA = Kk\Delta E$, καθὼς ἡμιδιάμετροι, διὰ τοῦτο καὶ ἡ $Kk + kA > Kk\Delta E$.. ἀφαιρῶ κοινῶς τὴν Kk , καὶ μένει $kA > k\Delta E$.. ἀλλ' ἡ $kA = k\Delta$, ὡς ἡμιδιάμετροι τοῦ κύκλου $A\beta\gamma$.. ὥστε τὸ μέρος $k\Delta$ εἶναι μείζον τοῦ ὅλου kE , ὕπερ εἶναι ἄτοπον. Ὡς... .

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὡς ἡ γραμμὴ ἡ τὰ κέντρα καὶ τὴν συναφὴν συζευγνύουσα δύο ἐφαπτομένων κύκλων εἶναι εὐθεῖα.

Π ρ ό τ α σ ι ς. ιβ'.

Ἐάν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐκτός, ἡ τὰ κέντρα αὐτῶν συζευγνύουσα εὐθεῖα διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τῆς ἐπαφῆς.

Ἔστωσαν K , k τὰ κέντρα τῶν ἐκτός κατὰ τὸ A σημείου ἐφαπτομένων κύκλου: τῶν $AB\Gamma$, $A\beta\gamma$, τότε λέγω ὅτι ἡ KAk εἶναι εὐθεῖα. σχ. 101.

Εἰδὲ καὶ δὲν εἶναι, ἔσω μία ἄλλη, ὡς ἡ $K\Delta\delta k$. Ὡς $KA + Ak > K\Delta\delta k$ (πρ. κ'. βιβ. α')... ἀλλ' ἡ $KA = K\Delta$, καθὼς ἡμιδιάμετροι τοῦ κύκλου $AB\Gamma$, ἡ δὲ $Ak = \delta k$, καθὼς ἡμιδιάμετροι τοῦ κύκλου $A\beta\gamma$.

διὰ τοῦτο $K\Lambda + \Lambda\kappa = K\Delta + \delta\kappa$.. καὶ $K\Delta + \delta\kappa > K\Delta\delta\kappa$: ὅ ἐστι τὸ μέρος μείζον τοῦ ὅλου, ὅπερ εἶναι ἄτοπον.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὡς ἡ γραμμὴ ἢ τὰ κέντρα καὶ τὴν ἐπαφὴν συζευγνύουσα δύο ἐφαπτομένων κύκλων εἶναι εὐθεῖα.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς. ιγ'.

Δύο κύκλοι οὔτε ἐντὸς, οὔτε ἐκτὸς ἐφάπτονται εἰς πλεόν τοῦ ἐνὸς σημείου.

Ἄς ἐφάπτονται ἐντὸς οἱ κύκλοι $AB\Gamma$, $A\beta\gamma$, καὶ ἐκτὸς οἱ $AB\Gamma$, $B\delta\epsilon\zeta$ τότε λέγω ὅτι ἡ συναφὴ καὶ ἡ ἐπαφὴ αὐτῶν εἶναι μόνον ἓν σημεῖον τὸ A , καὶ B . σχ. 102.

Εἰδὲ καὶ εἶναι δυνατόν, ἔσωσαν πολλὰ σημεία, ὡς τὰ A , β , εἰς τὴν συναφὴν, καὶ B , E εἰς τὴν ἐπαφὴν.

α'. Ζευγνύω τὰ κέντρα K , κ .. ἄγω τὰς $K\Lambda$, $\kappa\beta$.. καὶ θέλουσιν εἶναι εὐθεῖαι αἱ $K\kappa A$, $K\kappa\beta$ (πορ. προ. ιβ')... ἀλλ' ἂν τὸ σημεῖον A κῆται ἐπ' εὐθείας μὲ τὰ σημεία K , κ , τὸ σημεῖον β ἀδυνατοῖ νὰ κῆται ἐπίσης: ὅ ἐστιν ἂν ἡ γραμμὴ $A\kappa K$ ᾖ εὐθεῖα, ἡ $\beta\kappa K$ ἀδυνατεῖ νὰ εἶναι (ὅρ. γ'. βιβλ. α')... μὴ οὔσης δὲ εὐθείας τῆς $\beta\kappa K$, τότε οὔτε τὸ σημεῖον β θέλει εἶναι σημεῖον συναφῆς, οὔτε οὐδὲν ἄλλο, ἐκτὸς τοῦ σημείου A . Ὡς...

β'. Ἐπειδὴ καὶ οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐκτὸς κατὰ τὰ σημεία B , καὶ E , τούτου ἕνεκεν αἱ γραμμαὶ $K\Theta$, $K\epsilon\Theta$ θέλουσιν εἶναι εὐθεῖαι (πόρ. προ. ια')... ἀλλὰ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν (ἀξ. ιβ')... ὥς ἂν

τὸ σημεῖον Β ἦναι σημεῖον ἐπαφῆς, τὸ σημεῖον Ε ἀδυνατεῖ νὰ εἶναι, ἀλλ' οὔτε ἄλλο οὐδέν. "Ως...

Π ρ ό τ α σ ι ς. ιδ'.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι χορδαὶ ἐξίσου ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἐξίσου ἀπέχουσιν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Ἐν κύκλῳ ΑΒΔΓ ἔσω Κ τὸ κέντρον, καὶ ἡ ΑΒ = ΓΔ.. ἄγω κάθετος τὰς ΚΕ, ΚΖ, καὶ λέγω ὅτι καθ. ΚΕ = καθ. ΚΖ.. καὶ ἂν καθ. ΚΕ = καθ. ΚΖ, τότε λέγω ὅτι καὶ ἡ ΑΒ = ΓΔ. σχ. 103.

Ἄγω τὰς ἡμιδιαμέτρους ΚΒ, ΚΔ.

α'. Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ = ΓΔ, καὶ αἱ ΚΕ, ΚΖ κάθετοι ἐπ' αὐτάς, ἐξ ὑποθέσεως, διὰ τοῦτο καὶ δίχα τέμνονται ὑπ' αὐτῶν (πρ. γ'), ὅθεν ΕΒ = ΖΔ.. ἀλλὰ $ΚΒ^2 = ΚΕ^2 + ΕΒ^2$, καὶ $ΚΔ^2 = ΚΖ^2 + ΖΔ^2$ (πρ. ρζ'. βιβ. α'), καὶ $ΚΒ^2 = ΚΔ^2$, καθὼς ἡμιδιαμέτροι.. ὅθεν $ΚΕ^2 + ΕΒ^2 = ΚΖ^2 + ΖΔ^2$.. ἀφαιρῶ κοινῶς τὰ ἴσα.. τουτέστι ΕΒ², ΖΔ², καὶ μένει $ΚΕ^2 = ΚΖ^2$, καὶ ΚΕ = ΚΖ: ὁ ἔστιν ἡ ΑΒ καὶ ΓΔ ἀπέχουσιν ἐξίσου ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ (ὅρ. δ').

β'. Ἐσω ΚΕ = ΚΖ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἐν ταύτῳ εἶναι καὶ κάθετοι, διὰ τοῦτο αἱ ΑΒ, ΓΔ εἶναι δίχα τετμημέναι κατὰ τὰ Ε, Ζ σημεία (πρ. γ').. ἀλλὰ $ΚΕ^2 + ΕΒ^2 = ΚΖ^2 + ΖΔ^2$, ὡς ἕντος ἑκατέρου μέλους ἴσων μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἡμιδιαμέτρου.. Ὡς ἀφαιρεθέντων κοινῶς τῶν ἴσων: τῶν ΚΕ², ΚΖ², μένει ΕΒ² = ΖΔ², καὶ διὰ τοῦτο καὶ ΕΒ = ΖΔ.. ἀλλ' αὗται εἶναι ἡμίσεια τῶν ΑΒ, ΓΔ, διὰ τοῦτο καὶ ΑΒ = ΓΔ (ἀξ. β'). Ὡς...

Π ρ ό τ α σ ι ς ιε'.

Ἐν κύκλῳ ἢ διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖα εἶναι ἡ μεγίστη, τῶν δὲ λοιπῶν ἡ αἰετὶ ἑγγων τοῦ κέντρου μείζων τῶν ἀπωτέρω, καὶ αἱ παράλληλοι τέμνουσιν ἴσα τόξα.

Ἐστω Κ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΖΘ, λέγω ὅτι ἡ $AB > ΓΔ > EZ$, κτξ. σχ. 104.

Ἄγω τὰς ἡμιδιαμέτρους ΚΓ, ΚΕ, ΚΖ, ΚΔ.

α'. Εἰς τὸ τρίγωνον ΚΓΔ, αἱ $ΚΓ + ΚΔ > ΓΔ$ (πρ. κ'. βιβ'. α')., ἀλλ' αἱ $ΚΓ + ΓΔ = AB$.. ὥςτε $AB > ΓΔ$.

β'. Εἰς τὰ τρίγωνα ΚΓΔ, ΚΕΖ ἡ μὲν $ΚΓ = ΚΕ$, ἡ δὲ $ΚΔ = ΚΖ$, ἡ δὲ γων. $ΓΚΔ >$ γων. $ΕΚΖ$, ὡς ὅλον καὶ μέρος.. ὥςτε καὶ ἡ βάσις $ΓΔ > EZ$ (πρ. κδ'. βιβ'. α').: ὅ ἐστιν ἡ ἑγγων τοῦ κέντρου μείζων τῶν ἀπωτέρω. Τοῦτο αὐτὸ ἤθελε λεχθῆ καὶ περὶ τοῦ ἑτέρου μέρους τοῦ κέντρου, ὡς περὶ τῆς ΗΘ.

γ'. Ἐστω ἡ ΓΔ παράλληλος μετὰ τὴν ΑΒ, τότε λέγω ὅτι τοξ. $ΑΓ =$ τοξ. $ΒΔ$. Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἡ γων. $ΚΓΔ =$ γων. $ΚΔΓ$ (πρ. ζ'. βιβ'. α')., καὶ ἡ μὲν γων. $ΚΓΔ =$ γων. $ΓΚΑ$, ἡ δὲ γων. $ΚΔΓ =$ γων. $ΔΚΒ$ (πρ. κθ'. βιβ'. α')., ὅθεν γων. $ΓΚΑ =$ γων. $ΔΚΒ$, καὶ διὰ τοῦτο τοξ. $ΑΓ =$ τοξ. $ΒΔ$ (ὅρ. ζ').

Π ρ ό τ α σ ι ς ις'.

Ἡ ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς διαμέτρου ἀγομένη πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα, κείται ὁλόκληρος ἔξω τοῦ κύκλου: τουτέστιν εἶναι ἐφαπτομένη, μεταξύ δὲ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς περιφερείας ἀδυνατεῖ νὰ παρεμπέσῃ ἄλλη εὐθεῖα, ὅ ἐστιν

ἡ τοῦ ἡμικυκλίου γωνία εἶναι μεγίστη ἀπασῶν τῶν ὀξείων γωνιῶν, καὶ ἐλαχίστη ἡ λοιπή.

"Εξω ΑΓ πρὸς ὀρθὰς μετὰ τὴν ΑΒ διάμετρον κατὰ τὸ πέρασ Α, τότε λέγω α'. ὅτι ἡ ΑΓ κεῖται ὁ λόκληρος ἐξωθεν τοῦ κύκλου ΑΒΕ.. β'. ὅτι μεταξὺ αὐτῆς καὶ τῆς περιφερείας εἶναι ἀδύνατον νὰ παρεμπέσῃ ἄλλη εὐθεῖα.. γ'. ὅτι ἡ γων. ΚΑΕ εἶναι μεγίστη ἀπασῶν τῶν ὀξείων γωνιῶν, καὶ δ'. ὅτι ἡ γων. ΓΑΕ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἀπασῶν τῶν ὀξείων. σλ. 105.

Εἶδε καὶ ἡ ΑΓ δὲν κεῖται ὁλόκληρος ἐξωθεν τοῦ κύκλου, ἄς κῆται ἐν μέρος αὐτῆς, ὡς τὸ Αγ, ἐντὸς.. ζευγνύω λοιπὸν ἐν τῶν ἐντὸς αὐτῆς σημείων, ὡς τὸ γ, διὰ τῆς Κγ μετὰ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

α'. Εἰς τὸ τρίγωνον ΚγΑ ἡ γων. ΚΑΓ = 90° , ἐξ ὑποθέσεως.. ὥς ἡ γων. ΚγΑ < 90° (πρό. ζ'. προ. λβ'. βιβ. α')... ὅθεν καὶ ἡ εὐθεῖα Κγ > ΚΑ, ἀλλ' ἡ ΚΑ εἶναι ἡμιδιάμετρος, διὰ τοῦτο τὸ σημεῖον γ κεῖται ἐξωθεν τῆς περιφερείας, ἐν ᾧ ὑπετέθη νὰ κῆται ἐντὸς, ὅπερ εἶναι ἀντίφασις. "Ὡς ὁλόκληρος ἡ ΑΓ εὐθεῖα κεῖται ἐξωθεν τοῦ κύκλου ΑΒΕ, ἥτις καὶ ἐφαπτομένη ὠνομάσθη. (ὁρ. β').

β'. "Εξω λοιπὸν δυνατὴ ἡ παρεμπύσις μιᾶς εὐθείας, ὡς τῆς ΑΔ, μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης ΑΓ καὶ τῆς περιφερείας ΑΕ. Τότε οὗσης τῆς γωνίας ΚΑΕ < 90° , δύναμαι νὰ ἄξω κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΔ, καὶ ἐξω ἡ ΚΘ (πρό. ια'. προ. λβ'. βιβ. α')... καὶ τότε οὗσης τῆς γων. ΚΘΑ = 90° , ἡ γων. ΚΑΘ < 90° , καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ ΚΑ > ΚΘ (πρό. ιθ'. βιβ. α')... ἀλλ' ἡ ΚΑ =

KZ , καθὼς ἡμισφαίμετροι, διὰ τοῦτο καὶ ἡ $KZ > KO$: ὁ-έστι πο- μέρος μείζον τοῦ ὕλου, ὅπερ εἶναι ἀδύνατον. Ὡς οὐδεμία εὐθεῖα δύναται νὰ παρεμπέσῃ μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς περιφερείας.

γ'. Ἄν λοιπὸν οὐδεμία εὐθεῖα δύναται νὰ παρεμπέσῃ μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης AF καὶ τῆς περιφερείας AE , ἀναγκαίως ἡ γων. $KAΕ >$ γων. KAD : ὁ-έστιν ἡ γωνία ἡ ἐκ τῆς διαμέτρου καὶ περιφερείας εἶναι μείζων πάσης γωνίας τῆς ἐκ τῆς διαμέτρου καὶ πάσης διατεταγμένης. Ἐπειτα ἐπειδὴ καὶ εἰς τὸν κύκλον ἡ ἐσωτερικὴ γωνία $= 2 \Theta = \frac{1}{\infty}$ (πρό. ιθ'. προ. λβ'. βισ'. α'), καὶ ἐπειδὴ ἡ ἐξωτερικὴ μετὰ τῆς ἐξωτερικῆς $= 2 \times 90^\circ = 2 \Theta$, διὰ τοῦτο μένει ἡ ἐξωτερικὴ: τουτέστιν ἡ ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς περιφερείας $= \frac{1}{\infty}$: ἀπειροσὴ δηλοῦσι καὶ διὰ τοῦτο σμικρῶτέρα πάσης πεπερασμένης.

δ'. Ἀλλ' ἂν ἡ γων. $KAΕ >$ γων. KAD , δὴλον ὅτι τὸ λείψανον αὐτῆς μέχρι τῆς ὀρθῆς θείκει εἶναι ἐλάττω τῆς πάσης ὀξείας γωνίας: τουτέστιν ἡ γων. $EAF <$ γων. DAG . Ὡς... (α)

(α) (1) Ταχυέστες, ὡσαύτως καὶ ὁ ἡμέτερος Εὐκλείης εἰ-
χαζονται τὰ γ. καὶ δ. μέρος ταύτης τῆς προτάσεως ὡς παρ-
άξου; Δίαις, ὅθιν καὶ τὰ ἐξωφράκισαν. Ἀλλὰ τίς — εἶχ' ὅρῳ,
παρακαλῶ, ὥστε ταῦτα κρείμνται ἐκ τοῦ β' μέρους; Καὶ ἐπειδὴ
ἐδέχθησαν τὸ β. μέρος, ἀρα πρέπει νὰ δεχθῶσι καὶ τὸ γ. καὶ δ.
καθότι τὸ νὰ ᾔται ἀδύνατον; ἡ παρέμπωσις μετὰ εὐθείας μεταξὺ
τῆς ἐφαπτομένης καὶ περιφερείας; πρὶ ἀλλοι σημαίνει, εἰμὴ ὅτι ἡ
γωνία ἡ ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς περιφερείας εἶναι ἀδύνα-
τος ὑπὸ πάσης εὐθείας γραμμῆς; ὁ ἴστω ἐλαχίστη πάσης ὀξείας;

Π ό ρ ι σ μ α .

Ὡς ἡ ἐφαπτομένη μετὰ τῆς ἀπὸ τῆς ἀφῆς διαμέτρου ἐκτελεῖ γωνίαν ὀρθήν.

Π ρ ό . τ . α σ ι ς ι ζ'.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου ἔξωθεν τοῦ δοθέντος κύκλου, νὰ ἄξῃ τις ἐφαπτομένην πρὸς αὐτόν.

Ἐξω Α τὸ δοθὲν σημεῖον, καὶ ΒΓΔ ὁ δοθεὶς κύκλος. σχ. 107.

Ζευγνύω τὸ δοθὲν σημεῖον Α μετὰ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου Κ διὰ τῆς εὐθείας ΑΚ.. εἴτα κέντρῳ μὲν τῷ Κ διαστήματι δὲ τῷ ΚΑ, γράφω κύκλον τὸν ΑΕΖ.. ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῆς ΚΑ ἄγω πρὸς ὀρθὰς τὴν ΒΖ (πρ. ια'. βιβ. α'). .. ἄγω καὶ τὴν ΔΑ εὐθείαν, καὶ λέγω ὅτι αὕτη εἶναι ἐφαπτομένη.

Καθότι ἐπεὶ δὴ εἰς τὰ τρίγωνα ΚΖΒ, ΚΑΔ ἡ μὲν ΚΖ = ΚΑ, καθὸ ἡμιδιάμετροι τοῦ κύκλου ΑΕΖ, ἡ δὲ ΚΒ = ΚΔ, καθὸ ἡμιδιάμετροι τοῦ κύκλου ΒΓΔ, ἡ δὲ γων. Κ κοινή, διὰ τοῦτο καὶ ἡ γων. ΖΒΚ = γων. ΑΔΚ (πρ. δ'. βιβ. α'). .. ἄλλ', ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ γων. ΖΒΚ ὀρθή, ὀρθή ἄρα καὶ ἡ γων. ΑΔΚ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΑΔ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ΒΓΔ (πορ. πρ. ις'). Ὡς ἡκται ἡ ΑΔ ἐφαπτομένη, ὡς ἐζητεῖτο.

Δηλον ὅμως ὅτι αὕτη ἡ γωνία εἶναι διαιρητὴ διὰ καμπύλης. Καθότι ὡς διὰ διαφόρων διαστημάτων γραφῶσι κύκλοι διὰ τοῦ αὐτοῦ πέρατος Α. σχ. 106, ὡς οἱ ΑαΔ, Αβι, κτξ. ἡ γων. ΔΑΓ > ΒΑΓ > ΖΑΓ > ΗΑΓ, κτξ. Πλὴν οὐδεὶς τῶν κύκλων ἤθελε συμπέσει ποτὲ μὲ τὴν ἐφαπτομένην ΑΓ: ὁ ἐξω αὐταὶ αἱ γομφαὶ ἤθελον εἶναι ἀσύμπτωτοι.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς ιη'.

Ἐάν κύκλου ἐφάπτηται τις εὐθεία, καὶ ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἀχθῇ ἡμιδιάμετρος, αὕτη θέλει εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην.

Ἔστω AB ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου $\Gamma\Delta E$, καὶ K τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. ἄγω τὴν $K\Gamma$, καὶ λέγω ὅτι εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν AB . σχ. 108.

Εἰ δὲ καὶ δὲν εἶναι, ἔστω μία ἄλλη, ὡς ἡ KZ . Τότε εἰς τὸ τρίγωνον $K\Gamma Z$ οὐσῆς τῆς γων. $KZ\Gamma = 90^\circ$, ἡ γων. $K\Gamma Z < 90^\circ$ καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ $K\Gamma > KZ$ (πρ. ιθ'. βιβ. α'). ἀλλ' ἡ $K\Gamma = K\Delta$, καθὸ ἡμιδιάμετροι, ὅθεν καὶ ἡ $K\Delta > KZ$. ὅ ἐστι τὸ μέρος μείζον τοῦ ὅλου, ὅπερ εἶναι ἄτοπον. Ὡς ἡ $K\Gamma$ εἶναι πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ἐφαπτομένην AB , καὶ οὐδεμία ἄλλη. Ὡς...

Π ρ ό τ α σ ε ι ς ιθ'.

Ἐάν κύκλου ἐφάπτηται τις εὐθεία, καὶ ἀπὸ τῆς ἀφῆς ἀχθῇ πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ἐφαπτομένην εὐθεία τις, ἐπ' αὐτῆς θέλει κεῖσθαι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Ἔστω AB ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου $\Gamma\Delta E$, κατὰ τὸ Γ σημείου, τότε λέγω ὅτι ἂν ἀχθῇ ἡ $\Gamma\Delta$ πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν AB , ἐπ' αὐτῆς θέλει εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. σχ. 109.

Εἰ δὲ καὶ δὲν εἶναι, ἔστω ἔξωθεν αὐτῆς, ὡς τὸ σημεῖον Z . Τότε ζευγνύων αὐτὸ μὲ τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς Γ διὰ τῆς εὐθείας $Z\Gamma$, ἔξω γων. $Z\Gamma B = 90^\circ$ (πρ. ιη'). ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἡ γων. $K\Gamma B = 90^\circ$, διὰ τοῦτο ἡ γων. $Z\Gamma B =$ γων. $K\Gamma B$ (αξ. α'): ὅ ἐστι τὸ μέρος ἴσον μὲ τὸ ὅλον, ὅπερ εἶναι ἄτοπον. Ὡς τὸ σημεῖον Z

δὲν εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀλλ' οὔτε ἄλλο οὐδὲν ἔξω-
θεν τῆς ΓΔ, ὅπερ ἐπρόκειτο. "Ὡς..."

Π ρ ό τ α σ ι ς κ'.

Ἐν κύκλῳ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία εἶναι διπλασία
τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ἂν ἀμφοτέραι ἔχῃσι διὰ βάσιν τὸ
αὐτὸ τόξον.

Ἐξω Κ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΠΑΒΔ, τότε λέγω
ὅτι ἡ γων. ΑΚΒ = 2 γων. ΑΠΒ, σχ. 110.

Ἀπὸ τοῦ σημείου Π ἄγω διὰ τοῦ κέντρου Κ τὴν ΠΓ.
α'. Τοῦ τριγώνου ΚΠΑ ὄντος ἰσοσκελοῦς, ἡ γων.
ΚΑΠ = γων. ΚΠΑ. ἄλλ' ἡ γων. ΓΚΑ = γων. ΚΑΠ
+ γων. ΚΠΑ (πρ. λβ'. βιβ. α'). ὥς ἡ γων. ΓΚΑ
= 2 γων. ΚΠΑ. διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ γων.
ΓΚΒ = 2 γων. ΚΠΒ. "Ὡς ὅλη ἡμῶν ἡ γων. ΑΚΒ
= 2 γων. ΑΠΒ, αἵτινες δηλοῦντι ἔχουσι τὴν αὐτὴν
βάσιν: τὸ τόξον ΑΓΒ, ἢ τὴν χορδὴν ΑΒ.

β'. Ὡσαύτως ἠθέλει ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ γων. ΑΚΒ = 2
γων. ΑΔΒ. Καθότι ὄντος τοῦ τριγώνου ΚΔΒ ἰσοσκελοῦς,
ἡ γων. ΚΔΒ = γων. ΚΒΔ, ἄλλ' ἡ γων. ΑΚΒ = γων.
ΚΔΒ + γων. ΚΒΔ (πρ. λβ'. βιβ. α'). ὥς ἡ γων.
ΑΚΒ = 2 γων. ΑΔΒ.

γ'. Ἐπεὶ ἡ γων. ΑΚΒ = 2 γων. ΑΕΒ. Καθότι
ἄγων τὴν διάμετρον ΕΖ, ἔξω γων. ΖΚΒ = γων.
ΚΕΒ + γων. ΚΒΕ = 2 γων. ΚΕΒ, ὡς ὄντος ἰσοσκε-
λοῦς τοῦ τριγ. ΚΕΒ. ἄλλα δέδεικται (α'. μέρει) ἡ γων.
ΖΚΑ = 2 γων. ΖΕΑ, ὥς μὲν καὶ ἡ λοιπὴ γων.
ΑΚΒ = 2 γων. ΑΕΒ. "Ὡς..."

Π ό ρ ι σ μ α α'.

"Ως αἱ πρὸς τῇ περιφερείᾳ, καὶ τὴν αὐτὴν χορδὴν ἔχουσιν διὰ βάσιν γωνίαι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις. Οὕτως ἡ γων. $\Delta\text{Π}\text{Β} = \text{γων. } \Delta\text{Δ}\text{Β} = \text{γων. } \Delta\text{Ε}\text{Β}$, ὡς εἶναι ὑπὸ διπλάσιαι τῆς γων. $\Delta\text{Η}\text{Β}$.

Π ό ρ ι σ μ α β'.

Αἱ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίαι ἔχουσι διὰ μέτρον τὸ ἡμισυτόξον, ὑφ' οὗ ὑποτείνονται. Οὕτως ἡ γων. $\Delta\text{Π}\text{Β}$, ἣτις ὑποτείνεται ὑπὸ τοῦ τόξου $\Delta\gamma\text{Β}$, ὅπερ δηλ. εἶναι μέτρον τῆς γων. $\Delta\text{Η}\text{Β}$, ἔχει διὰ μέτρον τὸ τόξον $\Delta\gamma = \text{τοξ. } \frac{\Delta\gamma\text{Β}}{2}$.

Π ό ρ ι σ μ α γ'.

Εἰ δὲ καὶ ἡ γωνία κεῖται μεταξὺ τοῦ κέντρου, καὶ τῆς περιφερείας, τότε ἔχει διὰ μέτρον ὑπὲρ τοῦ ἡμίσεως τόξου.

Π ρ ό τ α σ ι ς. κα'.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι: τῷ ΒΕΔΠΑ , ἔσωσαν αἱ γωνίαι $\Delta\text{Π}\text{Β}$, $\Delta\text{Δ}\text{Β}$, $\Delta\text{Ε}\text{Β}$, λέγω ὅτι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις. 110. σχ.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ αὗται αἱ γωνίαι ἔχουσι διὰ βάσιν τὴν αὐτὴν χορδὴν: τὴν $\Delta\text{Β}$, τούτου ἕνεκεν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις (πορ. α'. πρ. κ'). "Ως...

Π ρ ό τ α σ ι ς. κβ'.

Τῶν ἐν κύκλῳ τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι εἰναι ἴσαι μὲ δύο ὀρθάς.

Ἐξω ἐν κύκλῳ τετράπλευρον τὸ $ΑΒΓΔ$, τότε λέγω ὅτι $\gamma\omega\nu. ΓΑΒ + \gamma\omega\nu. ΒΔΓ = 180^\circ$. σχ. 111.

Ἄγω τὰς διαγωνίους $ΑΔ, ΒΓ$.

Αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου $ΑΒΓ = 180^\circ$ (πρ. λβ'. βιβ. α'). ἄλλ' ἡ μὲν $\gamma\omega\nu. α = \gamma\omega\nu. δ$, ὡς ἐφιστάμεναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς χορδῆς τῆς $ΑΒ$, ἡ δὲ $\gamma\omega\nu. β = \gamma\omega\nu. γ$, ὡς ἐφιστάμεναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς χορδῆς τῆς $ΑΓ$ (πρ. α' πρ. κ'). ὥστε ἡ $\gamma\omega\nu. ΓΑΒ + ΒΔΓ = 180^\circ$.

Ὡσαύτως ἤθελεν ἀποδειχθῆ ὅτι καὶ $\gamma\omega\nu. ΑΒΔ + \gamma\omega\nu. ΔΓΑ = 180^\circ$. Ὡς...

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὡς ἂν ἐπεκταθῇ ἡ μὲν πλευρὰ τοῦ τετραπλεύρου, ἡ ἐκτὸς γωνία θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίου, ὡς οὗτης τῆς ἐκτὸς μετὰ τῆς ἐντὸς $= 180^\circ$ (πρ. ιγ'. βιβ. α').

Π ρ ό τ α σ ι ς. κγ'.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς χορδῆς, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα ἀδυνατοῦσι νὰ συζηθῶσιν.

Εἰ δὲ καὶ εἶναι δυνατόν, ἔσωσαν ὅμοια τὰ ἄνισα τμήματα κύκλων $ΑΓΒ$, $ΑγΒ$ ἐπὶ τῆς αὐτῆς χορδῆς τῆς $ΑΒ$, καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος $Γ$. σχ. 112.

Συνίστημι τυχοῦσαν $\gamma\omega\nu. ΑΓΒ$ ἐν τῷ $ΑΓΒ$ τμήματι, ἄγω τὴν $Βγ$ εὐθεῖαν.

Ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, τὰ τμήματα τῶν κύκλων $ΑΓΒ$, $ΑγΒ$ εἶναι ὅμοια, διὰ τοῦτο ἡ $\gamma\omega\nu. ΑΓΒ = \gamma\omega\nu. ΑγΒ$ (πρ. ι'). ἄλλ' ἡ $\gamma\omega\nu. ΑγΒ > \gamma\omega\nu. ΑΓΒ$

(πρ. ις'. βιβ. α').. ὥστε αἱ αὐταὶ γωνίαι εἶναι καὶ ἴσαι ἀλλήλαις καὶ ἄντιστοι, ὅπερ εἶναι ἀδύνατον. Ὡς...

Π ρ ό τ α σ ι ς κδ'.

Τὰ ἐπὶ ἴσων χορδῶν ὅμοια τμήματα κύκλων εἶναι ἴσα πρὸς ἀλλήλα.

Ἐςω ἡ χορδὴ $AB = ΓΔ$, καὶ τὰ κυκλικὰ τμήματα $ΑΕΒ$, $ΓΖΔ$ ὅμοια, τότε λέγω ὅτι τμ. $ΑΕΒ =$ τμ. $ΓΖΔ$. σχ. 113.

Εἰδὲ καὶ εἶναι, ἔςωσαν ἄνισα.

Τότε ἐφαρμόζοντός μου τὸ τμήμα $ΓΖΔ$ ἐπὶ τὸ $ΑΕΒ$, ἐπειδὴ ἡ $AB = ΓΔ$, ἐξ ὑποθέσεως, διὰ τοῦτο ἐφαρμοσθέντος τοῦ $Γ$ σημείου ἐπὶ τὸ $Α$ σημεῖον, ἔχει καὶ ἐφαρμωσθῇ καὶ τὸ $Δ$ σημεῖον ἐπὶ τὸ $Β$ σημεῖον, καὶ οὕτως ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς AB συσθεήσονται δύο τμήματα κύκλων: τὰ $ΑΕΒ$, $ΑΖΒ$, ὅμοια καὶ ἄνισα, ὅπερ εἶναι ἀδύνατον (πρ. κγ').. ὅθεν τμ. $ΑΕΒ =$ τμ. $ΑΖΒ$. Ὡς...

Π ρ ό τ α σ ι ς κε'.

Κύκλου τμήματος δοθέντος καὶ ἐκπληρώτητις τὸν κύκλον, οὗτινος εἶναι τμήμα.

Ἐςω $ΑΒΓ$ τὸ δοθέν τμήμα κύκλου. σχ. 114.

Τέμνω δίχα τὴν χορδὴν AB κατὰ τὸ $Δ$ σημεῖον.. καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἄγω πρὸς ὀρθὰς μετὰ τὴν AB τὴν $ΔΕ$ (πρ. ια' βιβ. α').. ἄγω τυχοῦσαν χορδὴν τὴν $ΑΓ$.. τέμνω αὐτὴν δίχα κατὰ τὸ $Ζ$ σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἄγω πρὸς ὀρθὰς μετὰ τὴν $ΑΓ$ τὴν $ΖΗ$.

Τώρα ἐπειδὴ καὶ αἱ εὐθεῖαι $ΔΕ$, $ΖΗ$ τέμνουσι καὶ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τὰς χορδὰς AB , $ΑΓ$, διὰ τοῦτο

Θέλει εἶναι ἐπ' ἀμφοτέρων τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου κύκλου (πρ. γ'), καὶ ἐπειδὴ αὐταὶ ἔχουσι κοινὸν σημεῖον οὐδὲν ἄλλο, ἢ τὸ Κ. ὅθεν τὸ Κ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου κύκλου. Ὡς αὖ κέντρον μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΑ γράψω κύκλον τὸν ΑΕΒΓ, οὗτος θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος κύκλος.

Π ρ ό τ α σ ι ς. κς'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι, καὶ πρὸς τοῖς κέντροις καὶ πρὸς ταῖς περιφερείαις, ἐφίξονται ἐπὶ ἴσων τόξων καὶ χορδῶν.

Ἔστω ὁ κύκλ. ΠΑΒ = κύκλ. παβ, καὶ ἡ γων. ΑΚΒ = γων. ακβ, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ γων. ΑΠΒ = γων. απβ. τότε λέγω ὅτι τόξ. ΑΓΒ = τόξ. αγβ. σχ. 115.

Ἄγω τὰς χορδὰς ΑΒ, αβ.

α'. Ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ γων. ΑΚΒ = γων. ακβ, καὶ ἡ ΑΚ = ακ = ΚΒ = κβ, καθὸ ἡμιδιάμετροι ἴσων κύκλων, διὰ τοῦτο καὶ ἡ βᾶσις ΑΒ = αβ (πρ. δ'. βιβ. α').

β'. Ἐπεὶ δὴ λοιπὸν ἡ χορδὴ ΑΒ = αβ, καὶ ἡ γων. ΑΠΒ = γων. απβ, ἐξ ὑποθέσεως, διὰ τοῦτο τμήμα ΑΠΒ = τμήμ. απβ. (πρ. κδ.). Ἄλλ' οἱ κύκλοι ΠΑΒ, παβ εἶναι ἴσοι, ὥςτε τμήμ. ΑΓΒ = τμήμ. αγβ. (ἀξ. ζ'). ὅθεν καὶ τόξ. ΑΓΒ = τόξ. αγβ. ὥςτε...

Π ρ ό τ α σ ι ς. κζ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι καὶ πρὸς τοῖς κέντροις καὶ πρὸς ταῖς περιφερείαις, αἱ ἐφιστάμεναι ἐπὶ ἴσων τόξων ἢ χορδῶν, εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Καθότι αὖ ὁ κύκλος ΠΑΒ = κύκλ. παβ (σχ.

τὸ αὐτὸ), καὶ ἂν πλευρ. $AB = \text{πλευρ. } \alpha\beta$. τότε οὐσῶν καὶ τῶν λοιπῶν πλευρῶν ἴσων ἀλλήλαις, θέλει εἶναι καὶ ἡ γων $AKB = \text{γων. } \alpha\kappa\beta$. (πρ. ἡ'. βιβ. α'), καὶ ἐπομένως καὶ ἡ γων. $APB = \text{γων. } \alpha\pi\beta$ (πρ. κ'). Ὡς...

Π ρ ό τ α σ ι ς. κη'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι χορδαὶ ἀφαιροῦσιν ἴσα τόξα, τὸ μὲν μείζον τῷ μείζονι, τὸ δ' ἔλαττον τῷ ἐλάττω.

Ἐστω ὁ μὲν κύκλος $PAB = \text{κυκλ. } \pi\alpha\beta$, ἡ δ' $AB = \alpha\beta$ (σχ. τὸ αὐτὸ), τότε λέγω ὅτι τὸ μὲν τοξ. $BPA = \text{τοξ. } \beta\pi\alpha$, τὸ δὲ τοξ. $AGB = \text{τοξ. } \alpha\gamma\beta$.

Καθότι ἂν χορ. $AB = \text{χορ. } \alpha\beta$, τότε καὶ τμημ. $BPA = \text{τμημ. } \beta\pi\alpha$ (πρ. κζ'), ὡς περιεχουσῶν ἴσας γωνίας, καὶ ἐπομένως καὶ τοξ. $BPA = \text{τοξ. } \beta\pi\alpha$, καὶ τοξ. $AGB = \text{τοξ. } \alpha\gamma\beta$. (αξ. ζ'). Ὡς...

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὡς ἐν τῷ αὐτῷ, ἡ ἴσοις κύκλοις, αἱ μὴ ἴσαι χορδαὶ μὴ ἴσα τόξα ἀφαιροῦσι.

Π ρ ό τ α σ ι ς. κθ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι χορδαὶ ὑποτείνουσιν ἴσας γωνίας.

Καθότι ἂν ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐφισῶνται ἐπ' ἴσων βάσεων (πρ. κς'), ἐπόμενον εἶναι καὶ αἱ ἴσαι χορδαὶ νὰ ὑποτείνωσιν ἴσας γωνίας: πρὸς τε τοῖς κέντροις δηλονότι καὶ πρὸς ταῖς περιφερείαις.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὡς ἐν τῷ αὐτῷ, ἡ ἴσοις κύκλοις, αἱ μὴ ἴσαι χορδαὶ μὴ ἴσας γωνίας ὑποτείνουσιν.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς. λ'.

Τὸ δοθὲν τόξον νὰ διχοτομήτηται.

Ἐξω ΑΓΒ τὸ δοθὲν τόξον. σχ. 116.

Ζευγνύω τὰ πέρατα τοῦ τόξου διὰ τῆς ΑΒ χορδῆς.. τέμνω δίχα τὴν χορδὴν ΑΒ κατὰ τὸ σημεῖον Δ (πρ. ι'. βιβ. α')... ἄγω πρὸς ὀρθὰς μετὴν ΑΒ τὴν ΔΓ (πρ. ια')... ἄγω καὶ τὰς ΓΑ, ΓΒ χορδὰς.

Εἰς τὰ τρίγ. ΑΓΔ, ΒΓΔ, ἡ μὲν ΑΔ = ΔΒ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ δὲ ΓΔ κοινὴ, ἡ δὲ γων. ΑΔΓ = γων. ΒΔΓ, καθὼ ὀρθαί, διὰ τοῦτο καὶ ἡ ΑΓ = ΒΓ (πρ. δ'. βιβ. α')... ἀλλ' αἱ ἴσαι χορδαὶ ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἀφαιροῦσι τόξα ἴσα (πρ. κη'). Ὡς τοξ. ΑΓ = τοξ. ΒΓ: ὁ ἐς τὸ τόξον ΑΓΒ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Γ σημεῖον ὡς ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς. λά'.

Ἐν κύκλῳ, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία εἶναι ὀρθή (α), ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι, ὀξεῖα, ἡ δὲ ἐν τῷ ελάττω, ἀμβλεία.. καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία εἶναι ἀμβλεία, ἡ δὲ τοῦ ελάττωτος ὀξεῖα.

Ἐξω ΑΒ διάμετρος τοῦ κύκλου ΑΕΔ, καὶ Κ τὸ κέντρον αὐτοῦ, τότε λέγω ὅτι ἡ μὲν γων. ΒΓΑ = 90°, ἡ δὲ γων. ΒΑΓ < 90°, ἡ δὲ γων. ΒΔΓ > 90°.. καὶ ἔτι ἡ γων. ΒΓΑ > 90°, ἡ δὲ γων. ΒΓΔ < 90°. σχ. 117.

(α) Θαλῆς ὑπέθετο ὅ ἐκτετατὴς τοῦ, ὅτι πᾶν τρίγωνον ἐν κύκλῳ ἔχον βάσιν τῆς διαμέτρου, εἶναι ὀρθογώνιον, καὶ διατίθηται τοσοῦτον, ὥστε προσέφερεν ἀποδείξαι τοῖς ἑταίροις. Διότι, εἰς τοῦ Θαλ.

*Αγώ διὰ τοῦ κέντρου K τὴν $ΓΕ$.

α'. Ἡ γων. $BKE +$ γων. $BKG = 180^\circ$ (πρ. ιγ'. βιβ. α'). ἄλλ' ἡ μὲν γων. $BKE = 2$ γων. KGB , ἡ δὲ γων. $BKG = 2$ γων. KGA (πρ. λβ'. βιβ. α'), ὥς ἑνῶν δηλονότι ἰσοσκελῶν τῶν τριγώνων KGB , KGA .. ὥς ὅλη ἡ γων. $BGA = 90^\circ$, ἣτις δηλονότι εἶναι ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ $ΑΓΔΒ$.

β'. Εἰς τὸ τριγ. BGA λοιπὸν οὕσης τῆς γων. $BGA = 90^\circ$, μένει ἡ γων. $GAB < 90^\circ$ (πρ. ε'. πρ. λβ'. βιβ. α'), ἣτις δηλονότι εἶναι ἐν τῷ μείζονι τμήματι τῷ $BΓΑΕΒ$.

γ'. Εἰς τὸ τετράπλευρον $ΑΒΔΓ$ ἡ γων. $GAB +$ γων. $BΔΓ = 180^\circ$ (πρ. κβ'). ἄλλὰ δέδεικται ἡ γων. $GAB < 90^\circ$.. ὥς ἡ λοιπὴ: τοὔτεσιν ἡ γων. $BΔΓ > 90^\circ$, ἣτις δηλονότι εἶναι ἐν τῷ ἐλάσσονι τμήματι: τῷ $BΓΔΒ$.

δ'. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γων. $BGA = 90^\circ$, ὥς δέδεικται (α'), διὰ τοῦτο ἡ γων. $BΓA > 90^\circ$, ἣτις δηλονότι εἶναι γωνία τοῦ μείζονος τμήματος τοῦ $BΓΑΕΒ$.

ε'. Ἐπειδὴ λοιπὸν καὶ ἡ γων. $BΓA > 90^\circ$, διὰ τοῦτο ἡ ἐφεξῆς γων. $BΓδΔ < 90^\circ$, ἣτις δηλονότι εἶναι γωνία τοῦ ἐλάσσονος τμήματος τοῦ $BΓΔΒ$.

Π ὅ ρ ι σ μ α. α'.

*Ὡς ἐν κύκλῳ ἡ διάμετρος ὑποτείνει ὀρθὴν γωνίαν πάντοτε.

Π ὅ ρ ι σ μ α. β'.

*Ἄν εἰς τρίγωνον ληφθῇ ὡς διάμετρος ἡ ὑποτείνουσα, καὶ περὶ αὐτὴν περιγραφῇ κύκλος, ἡ περιφέρεια θέλει

διέλθει διὰ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας! ὁ εἰς Θέλει δι-
 ἔλθει διὰ τῆς κορυφῆς τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου.
 Οὕτως ὅστις ὀρθογωνίου τοῦ τριγώνου ΒΓΑ, ἂν λάβω
 διὰ διαμέτρου τὴν ΑΒ, εἴτε δι' ἡμιδιάμετρον τὴν ΚΛ,
 καὶ ἱσάψω κύκλον, ἡ περιφέρεια αὐτοῦ Θέλει διέλθει διὰ
 ἐκῶ Γ σημείων; ὁ εἰς διὰ τῶν σημείων Β, Γ, Α.

Π ὁ ρ ι σ μ α. γ'.

Εὐκόλως ἤθελεν ἄξις τις κάθετον ἐπὶ τινος εὐθείας,
 ἀπό τινος σημείου-ἔξωθεν αὐτῆς, πρὸς ὀρθὰς εὐθείαν με-
 τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν. Καθότι ἂν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα γένη
 χορδὴ κύκλου, ὡς ἡ ΑΓ, καὶ ἀπ' ἐνὸς αὐτῆς πέρατος,
 ὡς ἐκῶ Α, ἀχθῇ διάμετρος, ὡς ΑΒ, ἡ ΓΒ εὐθεῖα θί-
 λει εἶναι πρὸς ὀρθὰς μετὴν ΑΓ. Καὶ ἂν ἀπὸ τοῦ ση-
 μεῖου Β ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ΑΓ κατὰ τὸ σημεῖον Γ, ἡ ΒΓ
 αὕτη θίλκεται εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ.

Π ὁ ρ ι σ μ α. δ'.

Εὐκόλως ἤθελεν ἄξις τις ἐφαπτομένην εἰς κύκλου
 ἀπὸ τινος-ἔξωθεν δοθέντος σημείου. Καθότι ἔσω Α τὸ
 δοθὲν σημεῖον, καὶ ΒΕΖ ὁ δοθεὶς κύκλος (σχ. 122.).
 Τότε ζευγύνω τὸ σημεῖον Α μετὸ κέντρον τοῦ κύκλου Κ
 διὰ τῆς ΑΚ εὐθείας, εἰτά ὡς διαμέτρου τῆς ΑΚ, γράφω
 κύκλον, ὅστις Θέλει διέλθει διὰ τῶν σημείων Α, Γ, Κ
 (πρὸς β'). ἄγω τὴν ΑΓ, ἥτις Θέλει εἶναι ἡ ζητούμενη
 ἐφαπτομένη. Καθότι ἂν ἄξω τὴν χορδὴν ΚΓ, ἡ γων.
 $\angle ΑΓΚ = 90^\circ$, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΑΓ ἐφαπτομένη (πρὸς ις').

Π ρ ὁ τ α σ ι ς. λβ'.

Εν κύκλῳ ἂν ἀπὸ τῆς ἀφῆς τῆς ἐφαπτομένης ἀχθῇ
 χορδὴ αἱ γωνίαι, ὅς περ ποιήσῃ μετὴν ἐφαπτομένην,

Σέλουνται εἶναι ἴσαι μὲ τὰς γωνίας τὰς ἐν τοῖς ἐναλλάξ τμήματι τοῦ κύκλου.

"Εξω ΔΑΓ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ABE, καὶ ἀχθῆτω ἡ χορδὴ AB, τότε λέγω ὅτι ἡ μὲν γων. ΔAB εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐν τῷ τμήματι BEA, ἡ δὲ γων. ΓAB ἴση μὲ τὴν ἐν τῷ τμήματι BZA. σχ. 118.

"Αγω τὴν ΑΕ πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ΔΓ, καὶ τυχοῦσαν χορδὴν τὴν ΑΖ. ζευγύνω τὰ σημεῖα E, B, Z εἰς τῶν EB, BZ χορδῶν.

α'. Αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου ABE $\equiv 180^\circ$.. ἀλλ' ἡ γων. ABE $\equiv 90^\circ$ (πρ. λα'). .. ὅθεν ἡ γων. BEA + γων. BAE $\equiv 90^\circ$.. ἀλλ' αἱ γων. ΔAB + γων. BAE $\equiv 90^\circ$, ἐκ τῆς κατασκευῆς.. ὥστε ἡ γων. ΔAB + γων. BAE = γων. BEA + γων. BAE.. καὶ ἀφαιρέσεως κοινῶς τῆς γων. BAE, μένει γων. ΔAB = γων. BEA, ἥτις δηλονότι εἶναι ἐν τῷ ἐναλλάξ τμήματι: τῷ BEA.

β'. Αἱ γων. BEA + γων. BZA $\equiv 180^\circ$ (πρ. κγ').. ὡσαύτως καὶ αἱ γων. ΓAB + γων. ΔAB $\equiv 180^\circ$ (πρ. ιγ'. βιβ. α'). .. ὥστε ἂν ἐκ τῶν ἴσων ἀφέλω ἴσα, εἴτε τὴν γων. ΔAB = γων. BEA, θελῶ μοι μένει γων. ΓAB = γων. BZA, ἥτις εἶναι ἐν τῷ ἐναλλάξ τμήματι: τῷ BZA.

"Αν ὁμοῦς ἡ εἰρημένη χορδὴ ἦν πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν ἐφαπτομένην ΔΓ, τότε τὸ πρᾶγμα ἠθέλην εἶναι σαφές οἰκοθεν (πρ. λα'). "Ως . . .

Π ρ ό τ α σ ι ς. λχ.

Ἐπὶ τῆς ὁδοῦ εὐθείας νὰ γράψῃ τις τμήμα κύ-

κλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην μετὴν δοθείσαν εὐθύγραμμον γωνίαν.

Ἔστω AB ἡ δοθείσα εὐθεῖα, καὶ Γ ἡ δοθείσα εὐθύγραμμος γωνία. σχ. 119.

Πρὸς τῷ σημείῳ A τῆς δοθείσης εὐθείας AB , συνίστημι γων. $\Delta AB = \gammaων. \Gamma$ (ὑποτιθεμένης ὀξείας δηλονότι τῆς γωνίας Γ , εἰδὲ καὶ ἣν ἀμβλείαν, ἐκτελοῦν αὐτὴν $= \gammaων. EAB$).. ὄγω τὴν AZ πρὸς ὁθῶς μετὴν ΔE , ἐφ' ἧς θέλει εἶναι τὸ κέντρον τοῦ γραφησομένου κύκλου (πρ. 19.).. ἐκτελῶ τὴν γων. $ABK = \gammaων. KAB$, καὶ διὰ τοῦτο ἔξω $BK = AK$ (πρ. 5. βιβ. α')... εἰτα ἂν κέντρῳ μὲν τῷ K , διαστήματι δὲ τῷ KA γράψω κύκλον τὸν $ABZH$, τὸ τμήμα $BZHA$ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον, ὅθῃ ἄγω τὴν χορδὴν BZ .

Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἡ γων. $BZA = \gammaων. \Delta AB$ (πρ. 13.).. καὶ ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ γων. $\Delta AB = \gammaων. \Gamma$, διὰ τοῦτο καὶ ἡ γων. $BZA = \gammaων. \Gamma$. Ὡς τὸ τμήμα $BZHA$ τοῦ κύκλου ἐγράφη καὶ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας AB , καὶ περιέχει καὶ γωνίαν ἴσην μετὴν δοθείσαν γων. Γ , ὅπερ ἐζητεῖτο.

Ἄν ὅμως καὶ ἡ δοθείσα γωνία ἦν ἀμβλεία, τότε ἐκτελουμένης αὐτῆς ἴσης γων. EAB , τὸ ζητούμενον τμήμα ἤθελεν εἶναι τὸ ABB .

Εἰ δὲ τέλος πάντων καὶ ἡ δοθείσα γωνία ἦν ὀρθή, τότε ἤθελον ἐκτελέσσει τὴν δοθείσαν εὐθεῖαν διάμετρον, καὶ ἐπ' αὐτὴν γράφων ἡμικύκλιον νὰ σχῶ τὸ ζητούμενον τμήμα (πρ. 14.).

Π ρ ό τ α σ ι ς. λδ'.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου νὰ ἀφέλῃ τις τμήμα δεδομένου γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθείσαν εὐθύγραμμον.

Ἔστω $ABZH$ ὁ δοθείς κύκλος, καὶ Γ ἡ δοθείσα γωνία. σχ. 119.

Ἄγω τὴν ἐφαπτομένην DE .. ἐκτελῶ τὴν γων. $\Delta AB = \gammaων. \Gamma$.. καὶ λέγω ὅτι τὸ τμήμα $BZHA$ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Καθότι ἡ γων. $BZA = \gammaων. \Delta AB$ (πρ. λβ'.) καὶ ἡ γων. $\Delta AB = \gammaων. \Gamma$, ἐκ τῆς κατασκευῆς, διὰ τοῦτο καὶ γων. $BZA = \gammaων. \Gamma$. Ὡς τε τὸ τμήμα $BZHA$ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Π ρ ό τ α σ ι ς. λε'.

Ἐν κύκλῳ εἰάν δύο χορδαὶ τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ἐκ τῶν τμημάτων τῆς μιᾶς ὀρθογώνιον θέλῃ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐκ τῶν τῆς ἐτέρας.

Αἱ χορδαὶ AB , $αβ$ ἄς τέμνωσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ σημεῖον Γ , τότε λέγω ὅτι $ΑΓ \times ΓΒ = αΓ \times Γβ$. σχ. 120.

Ἀπὸ τοῦ κέντρου K κατάγω καθέτους ἐπὶ τὰς AB , $αβ$ τὰς $K\Delta$, $K\delta$, αἵτινες θέλουνσι τάμωσι ὅλα αὐτὰς κατὰ τὰ σημεῖα Δ , δ (πρ. γ'.).. ἄγω τὰς εὐθείας $K\Gamma$, $Kα$, $Kβ$.

Τὸ ὀρθογ. $ΑΓ \times ΓΒ + \Delta\Gamma^2 = \Delta B^2$ (πρ. ε'. βιβ. β.).. προσίθῃμι κοινῶς τὸ $K\Delta^2$, καὶ ἔχω ὀρθογ. $ΑΓ \times ΓΒ + \Delta\Gamma^2 + K\Delta^2 = \Delta B^2 + K\Delta^2 = KB^2$ (πρ. μζ'. βιβ. α'.): ὅ ἐστιν ἴσα μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἡμιδιαμέτρου.

Διὰ τοὺς ὁμοίους λόγους καὶ τὸ ὀρθογ. $\alpha\Gamma \times \Gamma\beta + \delta\Gamma^2 + \kappa\delta^2 = \alpha\delta^2 + \kappa\delta^2 = \kappa\alpha^2$ ὅ ἐστιν ἴσα μὲν τὸ τετράγωνον τῆς ἡμισδιαμέτρου καὶ διὰ τοῦτο ὀρθογ. $\alpha\Gamma \times \Gamma\beta + \Delta\Gamma^2 + \kappa\Delta^2 = \text{ὀρθογ. } \alpha\Gamma \times \Gamma\beta + \delta\Gamma^2 + \kappa\delta^2$ ὅ ἐστιν ὀρθογ. $\alpha\Gamma \times \Gamma\beta = \text{ὀρθογ. } \alpha\Gamma \times \Gamma\beta$, ὡς ὄντος $\kappa\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 = \kappa\delta^2 + \delta\Gamma^2 = \kappa\Gamma^2$ (πρ. μζ'. βιβ. α').

Εἰ δὲ καὶ αἱ δοθεῖσαι χορδαὶ ᾗσαν καὶ διαμέτροι, τότε τὸ πρᾶγμα ἤθελεν εἶναι σαφές· ἐξ ἑαυτοῦ.

Ἄν ὁμοῦς ἡ μία ᾗν διάμετρος, καὶ ἡ ἑτέρα μὴ, τότε ἡ διάμετρος ἡ ἤθελε τέμνει τὴν χορδὴν δίχα, ἢ μὴ.

Ὅς τέμνη λοιπὸν δίχα κατὰ τὸ Ε τὴν ΓΔ. σχ. 92.

Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ ἐφθία τέμνεται εἰς ἴσα κατὰ τὸ Η, καὶ εἰς ἅνισα κατὰ τὸ Ε, διὰ τοῦτο ὀρθογ. $\alpha\epsilon \times \epsilon\beta + \kappa\epsilon^2 = \kappa\beta^2$ (πρ. ε'. βιβ. β') $= \kappa\Delta^2$.. ἀλλὰ $\kappa\Delta^2 = \epsilon\Delta^2 + \kappa\epsilon^2$ (πρ. μζ'. βιβ. α').. ὥστε ὀρθογ. $\alpha\epsilon \times \epsilon\beta + \kappa\epsilon^2 = \epsilon\Delta^2 + \kappa\epsilon^2$.. καὶ τοῦ $\kappa\epsilon^2$ κοινῶς ἀφαιρεθέντος, μένει ὀρθογ. $\alpha\epsilon \times \epsilon\beta = \epsilon\Delta^2 = \epsilon\Delta \times \Gamma\epsilon$, τριησίσης δίχα δηλονότι τῆς ΓΔ.

Ἐξω τέλος πάντων ἡ χορδὴ αβ εἰς ἅνισα τετμημένη ὑπὸ τῆς διαμέτρου κατὰ τὸ Γ σχ. 121.

Ἀπὸ τοῦ κέντρου Η ἄγω τὴν Ηδ κάθετον ἐπὶ τὴν αβ, ἣτις καὶ δίχα τέμνει αὐτὴν (πρ. γ').. ὅθεν ὀρθογ. $\alpha\Gamma \times \Gamma\beta + \delta\Gamma^2 = \delta\beta^2$ (πρ. ε'. βιβ. β').. προσέθη-
μι κοινῶς τὰ $\kappa\delta^2$, καὶ ἔχω ὀρθογ. $\alpha\Gamma \times \Gamma\beta + \delta\Gamma^2 + \kappa\delta^2 = \delta\beta^2 + \kappa\delta^2 = \kappa\beta^2$ (πρ. μζ'. βιβ. α'). $= \kappa\beta^2$..

ἀλλὰ $KB^2 = \text{ὀρθογ. } \Lambda\Gamma \times \Gamma B + K\Gamma^2$ (πρ. ε'. βιβ. β'). ὥστε ὀρθογ. $\alpha\Gamma \times \Gamma\beta + \delta\Gamma^2 + K\delta^2 = \text{ὀρθογ. } \Lambda\Gamma \times \Gamma B + K\Gamma^2$: ὅθεν ὀρθογ. $\alpha\Gamma \times \Gamma\beta = \text{ὀρθογ. } \Lambda\Gamma \times \Gamma B$, ὡς ὅντες ὁηλονότι $\delta\Gamma^2 + K\delta^2 = K\Gamma^2$ (πρ. μζ.). Ὡς...

Π ο ρ ι σ μ α.

Τὸ τετράγωνον τῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον καθέτου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀρθογώνιον τῶν τῆς διαμέτρου τμημάτων. Καθότι ἐπειδὴ $\Gamma E \times E\Delta = \Lambda E \times E B$, (σχ. 92.).. καὶ ἐπειδὴ $\Gamma E = E\Delta$ (πρ. γ'), διὰ τοῦτο $\Gamma E^2 = \Lambda E \times E B$.

Π ρ ό τ α σ ι ς λς'.

Ἐὰν ἀπόκентος σημείου, ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ὀρθῇ διατέμνουσα καὶ ἐφαπτομένη εἰς αὐτὸν, τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἐκ τῆς διατεμνουσῆς καὶ τῆς προσφιλεύσῃς θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης.

Ἔστω Λ τὸ ὁθεν σημεῖον ἔξω τοῦ κύκλου, ΛB ἡ διατέμνουσα, καὶ $\Lambda\Gamma$ ἡ ἐφαπτομένη, τότε λέγω ὅτι ὀρθογ. $\Lambda B \times \Lambda\Delta = \Lambda\Gamma^2$. σχ. 122.

Ἄγω διὰ τοῦ κέντρου τὴν διατέμνουσαν ΛE , τὰς ἡμιδιαμέτρους $K\Gamma$, $K\Delta$, καὶ τὴν $K\Theta$ κάθετου ἐπὶ τὴν ΛB , ἥτις διχοταμεῖ αὐτὴν κατὰ τὸ Θ σημεῖον. (πρ. γ').

Καὶ διὰ τοῦτο $\Lambda\Theta^2 = \text{ὀρθογ. } \Lambda B \times \Lambda\Delta + \Theta\Delta^2$ (πρ. ε'. βιβ. β'). προσέθῃμιν κοινῶς τὸ $K\Theta^2$, καὶ ἔχω $\Lambda\Theta^2 + K\Theta^2 = \text{ὀρθογ. } \Lambda B \times \Lambda\Delta + \Theta\Delta^2 + K\Theta^2$. ἀλλὰ $\Theta\Delta^2 + K\Theta^2 = K\Delta^2$, καὶ $\Lambda\Theta^2 + K\Theta^2 = \Lambda K^2$, διὰ τοῦτο $\Lambda K^2 = \text{ὀρθογ. } \Lambda B \times \Lambda\Delta + K\Delta^2 = \text{ὀρθογ. } \Lambda B \times \Lambda\Delta + K\Gamma^2$.. ἀλλὰ τὸ $\Lambda K^2 = \Lambda\Gamma^2 +$

$K\Gamma^2$ (πρ. ιη').. ὥςτε ὀρθογ. $ΑΓ \times ΑΔ + ΚΓ^2 = ΑΓ^2 + ΚΓ^2$, εἴτε κοινῶς ἀφαιρεθέντος τοῦ $ΚΓ^2$, ὀρθογ. $ΑΒ \times ΑΔ = ΑΓ^2$. "Ως...

Π ό ρ ι σ μ α. α'.

"Ως τὰ ὀρθογώνια τὰ ἐκ τῶν διατεμνουσῶν καὶ τῶν προσφιλουσῶν εἶναι ἴσα ἀλλήλοις. Οὕτως ὀρθογ. $ΑΒ \times ΑΔ = ὀρθογ. ΑΕ \times ΑΖ$, ὡς ὕπoς ἑκατέρου $= ΑΓ^2$.

Π ό ρ ι σ μ α. β'.

"Αν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐξωτερικοῦ σημείου ἀχθῶσι δύο ἐφαπτόμεναι, αὗται θέλουσιν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις. Οὕτως ἂν ἄξω ἐφαπτομένην καὶ τὴν $Αγ$, αὕτη θέλει εἶναι $= ΑΓ$.. διότι τὸ τετράγωνον ἑκατέρας εἶναι ἴσον μὲν καὶ τὸ αὐτὸ ὀρθογώνιον.

Π ό ρ ι σ μ α. γ'.

'Απὸ τοῦ αὐτοῦ ἐκτὸς σημείου τοῦ κύκλου εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀχθῶσι πλέον τῶν δύο ἐφαπτομένων.

Π ό ρ ι σ μ α. δ'.

Αἱ γωνίαι αἱ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου διατεμνούσης εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις: τουτέστιν ἡ γων. $ΓΑΚ = γων. γΑΚ$.

Π ό ρ ι σ μ α. ε'.

Οὕσης ἐγνωσμένης τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς προσφιλούσης, ἤθελεν ἐγνωθῆ καὶ ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου. Κοιθότι ἂν ὀνομάσω $χ$ τὴν διάμετρον, ἔξω $ΑΓ^2 = (χ + ΑΖ) ΑΖ$, εἴτε $χ = \frac{ΑΓ^2 - ΑΖ^2}{ΑΖ}$.

$ΑΖ$

Π ρ ό τ α σ ι ς. λζ'.

Ἐάν ἀπότινος σημείου, ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἐκ δύο ὀρθογώνων εἰς αὐτὸν εὐθειῶν, τῆς μιᾶς διατεμνούσης καὶ τῆς ἐτέρας προσφιλοῦσης, τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἐκ τῆς διατεμνούσης καὶ τοῦ προσφιλοῦντος αὐτῆς μέρους ἴσται ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς προσφιλοῦσης, ἢ προσφιλοῦσα θέλει εἶναι ἐφαπτομένη.

Ἐξω ὀρθογ. $AB \times AD = AF^2$, τότε λέγω ὅτι ἡ AF εὐθεῖα εἶναι ἐφαπτομένη. σχ. 122.

Ἄγω τὴν $A\gamma$ ἐφαπτομένην (πρ. ιζ.) καὶ ἔχω ὀρθογ. $AB \times AD = A\gamma^2$ (πρ. λς'). ἄλλ', ἐξ ὑποθέσεως, καὶ ὀρθογ. $AB \times AD = AF^2$. Ὡς $A\gamma^2 = AF^2$, καὶ διὰ τοῦτο $A\gamma = AF$. Ὡς ἐπειδὴ εἰς τὰ τρίγωνα $K\gamma A$, KFA αἱ τρεῖς πλευраὶ εἶναι ἴσαι, ἐκάστη ἐκάστω, διὰ τοῦτο καὶ ἡ γων. $K\gamma A = \gamma\omega\upsilon$. $K\gamma A$ (πρ. η'. βιβ' α'). ἄλλ', ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ γων. $K\gamma A = 90^\circ$. διὰ τοῦτο καὶ ἡ γων. $KFA = 90^\circ$, ὅθεν ἡ AF εὐθεῖα εἶναι ἐφαπτομένη (πρ. ις'). Ὡς...

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὡς εὐκόλως τις ἤθελεν ἄξει ἐφαπτομένην εἰς ἓνα κύκλον ἀπότινος ἔξωθεν σημείου δοθέντος. Καθότι ἂν ἄξῃ ἀπὸ τοῦ εἰρημένου σημείου μίαν τυχοῦσαν διατέμνουσαν, καὶ ἐκτελέσῃ τὸ ἐξ αὐτῆς καὶ τοῦ προσφιλοῦντος αὐτῆς μέρους ὀρθογώνιον, ἢ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ρίζα θέλει εἶναι ἡ ἐφαπτομένη: τουτέστιν $= \sqrt{AB \times AD}$. Οὕτως ἂν $AB = 18$, καὶ $AD = 2$, τότε $AF = \sqrt{36} = 6$.

ΒΙΒΛΙΟΝ. Δ'. (α).

Ὅ ρ ο ι.

α'. Σχήματα τακτικά λέγονται, ὅσα τῶν εὐθύγραμμων ἔχουσι καὶ τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις.

β'. Σχήμα εὐθύγραμμον λέγεται ὅτι ἐγγράφεται ἐν σχήματι εὐθύγραμμῳ, ὅταν ἐκάστη γωνία αὐτοῦ ἄπτηται ἐκάστης πλευρᾶς, τοῦ ἐν ᾧ ἐγγράφεται, ὡς τὸ αβγδε. σχ. 132.

γ'. Σχήμα εὐθύγραμμον λέγεται ὅτι περιγράφεται περὶ σχήμα εὐθύγραμμον, ὅταν ἐκάστη πλευρὰ αὐτοῦ ἄπτηται ἐκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται, ὡς τὸ ΑΒΓΔΕ. σχ. 132.

δ'. Σχήμα εὐθύγραμμον λέγεται ὅτι ἐγγράφεται ἐν κύκλῳ, ὅταν ἐκάστη αὐτοῦ γωνία ἄπτηται τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου, ὡς τὸ ΑΔΒΓ. σχ. 128.

ε'. Σχήμα εὐθύγραμμον λέγεται ὅτι περιγράφεται

(α) Τοῦτο τὸ βιβλίον εἶναι ὁλόκληρον προβληματικῶδες. Καθεὶ ἀρ' οὗ ὁ κύκλιός τις ἐξήντητο εἰς τὸ τρίτον βιβλίον τὰς ιδιότητας τοῦ κύκλου, εἰς τοῦτο ἔρχεται νὰ διδάξῃ τὴν παραβολὴν τοῦ κύκλου μετὰ τῶν λοιπῶν σχημάτων· πῶς δηλαδὴ νὰ ἔγγραψῃ τις ἢ νὰ περιγράψῃ σχήματα περὶ κύκλου, οὗτος; ἢ γὰρ οὗτος εἶναι ἀναγκαῖα εἰς τὴν γεωμετρικὴν, ἀρχιτεκτονικὴν, εἰς τὴν τριγωνομετρικὴν, καὶ διὰ τοῦτο καὶ εἰς τὴν ἀστρονομίαν.

περὶ κύκλον, ὅταν ἐκάστη αὐτοῦ πλευρὰ ἄπτηται τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου, ὡς τὸ αβγδ. σχ. 128.

ς'. Κύκλος λέγεται ὅτι ἐγγράφεται ἐν σχήματι εὐθυγράμμῳ, ὅταν ἡ περιφέρεια αὐτοῦ ἄπτηται ἐκάστης πλευρᾶς, τοῦ ἐν ᾧ ἐγγράφεται σχήματος, ὡς ὁ. αβγ. σχ. 126.

ζ. Κύκλος λέγεται ὅτι περιγράφεται περὶ σχῆμα εὐθύγραμμον, ὅταν ἡ περιφέρεια αὐτοῦ ἄπτηται ἐκάστης γωνίας, τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται σχῆμα, ὡς ὁ ΑΒΓΔ. σχ. 129.

η'. Εὐθεῖα λέγεται ὅτι εἰσαρμόζεται εἰς κύκλον, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἦναι εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὡς ἡ ΑΒ. 123.

Π. ρ. ὁ τ α σ ι ε α'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον νὰ ἐναρμώσῃ τις εὐθεῖαν ἴσην μὲ τῇ δοθείσῃ εὐθεῖαν οὔσαν μὴ μείζονα τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου.

Ἐξω ΑΒΓ ὁ δοθείς κύκλος, καὶ Δ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα. σχ. 123.

Ἄγω τὴν διάμετρον ΑΒ.. καὶ ἂν μὲν ἡ ΑΒ = Δ, τὸ ζητούμενον ἐτελείωσεν, εἰδὲ μὴ, τέμνω ἀπὸ τῆς ΑΒ τὴν ΑΕ = Δ (πρ. γ'. βιβ. α'). .. εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΕ γράφω κύκλον τὸν ΕΓΖ.. ἄγω τὴν ΑΓ ἡμιδιάμετρον.

Ἡ εὐθ. ΑΕ = εὐθ. Δ, ἐκ τῆς κατασκευῆς.. ἀλλ' ἡ εὐθ. ΑΕ = εὐθ. ΑΓ, καθὼς ἡμιδιάμετρος, διὰ τοῦτο ἡ εὐθ. ΑΓ = εὐθ. Δ: ὅθεν ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἐνήρμοσαί

ἐν τῷ κύκλῳ $AB\Gamma$ ἴση μὲ τὴν δοθείσαν εὐθείαν Δ , ὅπερ ἐζητέτο.

Π ρ ό τ α σ ι ε. β'.

Ἐν τῷ δοθέντι κύκλῳ νὰ ἐγγράψῃ τις τρίγωνον ἰσωνίων μὲ τὸ δοθεὶν τρίγωνον.

"Εξω $\Lambda\Gamma\text{B}$ ὁ δοθεὶς κύκλος, καὶ $\alpha\beta\gamma$ τὸ δοθεὶν τρίγωνον. σχ. 124.

Ἄγω τὴν ΔE ἐξαπτομένην τοῦ κύκλου κατὰ τὸ A σημείου .. ἀπὸ τοῦ A σημείου ἄγω τὴν χορδὴν $\Lambda\Gamma$ ὡςτος, ὥςτε ἡ $\gamma\omega\nu$. $\text{E}\Lambda\Gamma = \gamma\omega\nu$. β , τὴν δὲ AB ὡςτος, ὥςτε ἡ $\gamma\omega\nu$. $\Delta\text{AB} = \gamma\omega\nu$. γ .. ζευγύω τὰ σημεία B , Γ διὰ τῆς εὐθείας $\text{B}\Gamma$.

Τοῦ τριγώνου $\Lambda\Gamma\text{B}$ ἡ μὲν $\gamma\omega\nu$. $\text{AB}\Gamma = \gamma\omega\nu$. $\text{E}\Lambda\Gamma$ (πρ. λβ'. βιβ. γ') = $\gamma\omega\nu$. β , ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς ἡ δὲ $\gamma\omega\nu$. $\Lambda\Gamma\text{B} = \gamma\omega\nu$. ΔAB (διὰ τὴν αὐτὴν) = $\gamma\omega\nu$. γ , ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς ὥςτε ἡ $\gamma\omega\nu$. $\text{B}\Lambda\Gamma = \gamma\omega\nu$. α . (πρ. γ'. πρ. λβ'. βιβ. α'): ὥςτε καὶ τὰ τρίγωνα $\Lambda\Gamma\text{B}$, $\alpha\beta\gamma$ εἶναι ἰσογώνια, καὶ τὸ τρίγ. $\Lambda\Gamma\text{B}$ ἐν τῷ δοθέντι κύκλῳ, ὡς ἐζητέτο.

Π ρ ό τ α σ ι ε γ'.

Περί τὸν δοθέντα κύκλον νὰ περιγράψῃ τις τρίγωνον ἰσωνίων μὲ τὸ δοθεὶν τρίγωνον.

"Εξω $\Lambda\text{B}\Gamma$ ὁ δοθεὶς κύκλος, καὶ $\alpha\beta\gamma$ τὸ δοθεὶν τρίγωνον. σχ. 125.

Ἐν τῷ δοθέντι κύκλῳ ἐγγράψω τρίγωνον τὸ $\text{AB}\Gamma$ ἰσωνίων μὲ τὸ δοθεὶν τρίγωνον $\alpha\beta\gamma$ (πρ. β'). .. ἄγω τὰς τρεῖς εὐθείας $\text{E}\Lambda$, ZH , HE ἐξαπτομένας τοῦ κύκλου καὶ παραλλήλως μὲ τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου $\Lambda\text{B}\Gamma$,

αἵτινες δηλονότι θέλουσι συμπέσει πρὸς ἀλλήλας κατὰ τὰ σημεῖα Z, H, E.. ἐπεκτείνω τὴν BG πλευρὰν μέχρι τοῦ σημείου γ.. ἄγω ἀπὸ τοῦ κέντρου K τὴν Ka καθεύτως ἐπὶ τὴν AB, ἐπεκτείνων αὐτὴν μέχρι τοῦ β σημείου, εὐθα ἡ γων. $K\beta Z = 90^\circ$. (πρ. τῆς βιβ. γ').

Ἐγὼ ἔχω γων. $E\gamma B = \gamma\omega\nu$. EHZ (πρ. κθ'. βιβ. α')., ἀλλὰ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ γων. $E\gamma B = A\Gamma B$.. ὥς γων. $EHZ = \gamma\omega\nu$. $A\Gamma B$.

Ὡσαύτως ἤθελεν ἀποδειχθῆ καὶ γων. $Z = \gamma\omega\nu$. B, καὶ διὰ τοῦτο καὶ γων. $E = \gamma\omega\nu$. A: ὥς τὸ περιγεγραμμένον τρίγωνον εἶναι ἰσογώνιον μὲ τὸ ἐγγεγραμμένον, ἀλλὰ τὸ ἐγγεγραμμένον ἔστιν ἰσογώνιον μὲ τὸ δοθέν τριγ. $\alpha\beta\gamma$, ὥς καὶ τὸ περιγεγραμμένον εἶναι καὶ ἰσογώνιον μὲ τὸ δοθέν τρίγ. $\alpha\beta\gamma$, καὶ περὶ τὸν δοθέντα κύκλον ABΓ, ὡς ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α π ι ς δ'.

Ἐν τῷ δοθέντι τριγώνῳ νὰ ἐγγράψῃ τις κύκλον.

Ἐςω ABΓ τὸ δοθέν τρίγωνον. σχ. 126.

Τέμνω δίχα τὰς γωνίας ABΓ, AΓB (πρ. θ'. βιβ. α'.) διὰ τῶν εὐθειῶν BK, ΓK.. τὰς ἐπεκτείνω ἕως οὗ νὰ συμπέσωσιν εἰς τι σημεῖον, ὡς εἰς τὸ K.. ἀπὸ τοῦ K σημείου ἄγω τρεῖς καθεύτους ἐπὶ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου: τὰς Ka, Kβ, Kγ.

Εἰς τὰ τρίγωνα BaK, BβK ἡ μὲν γων. $\alpha BK = \gamma\omega\nu$. βBK , ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ δὲ γων. $BaK = \gamma\omega\nu$. $B\beta K$, καθὼς δεῖται, ἡ δὲ BK κοινὴ πλευρά.. ὥς γων. $Ka = K\beta$ (πρ. κς'. βιβ. α').). Ὡσαύτως ἤθελεν ἀποδειχθῆ καὶ ἡ $K\beta = K\gamma$. Ὡς εἰς αὐτὸν κέντρον μὲν τῷ K,

διαστήματι δὲ τῷ $K\alpha$ γράψω κύκλον, ὁ κύκλος θέλει διέλθῃ διὰ τῶν τριῶν σημείων α , β , γ (πρ. 9'. βιβ. 7'). ὁ ἐς γέγραπται κύκλος ἐν τῷ δοθέντι τριγώνῳ (ὅρ. 5'), ὡς ἐζητεῖτο.

Π ρ ὁ τ α σ ι ς. α'.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον νὰ περιγράψῃ τις κύκλον.

Ἐξω $AB\Gamma$ τὸ δοθὲν τρίγωνον. σχ. 127.

Τέμνω δίχα τὰς πλευρὰς AB , $B\Gamma$ κατὰ τὰ σημεῖα α καὶ β . ἄγω τὴν μὲν αK πρὸς ὀρθὰς μετὰ τὴν AB , τὴν δὲ βK πρὸς ὀρθὰς μετὰ τὴν $B\Gamma$ (πρ. 1α'. βιβ. 4'), ἐπεκτείνων αὐτὰς ἕως οὗ νὰ συμπέσωσιν εἰς τι σημεῖον, ὡς εἰς τὸ K . ζευγνύω τὸ σημεῖον K μετὰ τὰ σημεῖα A , B , Γ . Εἰς τὰ τρίγωνα $AK\alpha$, $BK\beta$ ἡ μὲν $\alpha A = \alpha B$, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ δὲ αK κοινὴ, ἡ δὲ γων. $K\alpha A = \gamma\omega\nu$. $K\alpha B$, καθ' ὀρθὰς.. ὥστε ἡ $K A = K B$ (πρ. 8'. βιβ. 4'). Ὁσαύτως ἤθελεν ἀποδειχθῇ καὶ ἡ $K B = K \Gamma$. Ὡςτε αὖ κέντρον μὲν τῷ K , διαστήματι δὲ τῷ $K A$ γράψω κύκλον, ὁ κύκλος θέλει διέλθῃ διὰ τῶν τριῶν σημείων A , B , Γ . (πρ. 9'. βιβ. 7'). ὁ ἐς περιγέγραπται κύκλος περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον (ὅρ. 5'), ὡς ἐζητεῖτο.

Π ὁ ρ ι σ μ α. α'.

Ὡςτε εὐκόλως ἤθελε γράψοι τις κύκλον διὰ τριῶν σημείων δοθέντων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων. Καθότι ἔξωσαν A , B , Γ τὰ δοθέντα σημεῖα.. ζευγνύω αὐτὰ διὰ τῶν εὐθειῶν AB , $B\Gamma$, ΓA , καὶ εὗρισκω τὸ σημεῖον K ὅπερ θέλει εἶναι κέντρον τοῦ ζητουμένου κύκλου.

Π ὁ ρ ι σ μ α. β'.

Ἄν μὲν τὸ δοθὲν τρίγωνον ἦναι ὀξυγώνιον, τὸ

κέντρον τοῦ ζητουμένου κύκλου θέλει κείται ἐνὸς τοῦ τριγώνου, εἰ δὲ ὀρθογώνιον ἐπὶ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ, εἰς τὸ ἀμβλυγώνιον, ἔξω τοῦ τριγώνου πρὸς τὸ μέρος τῆς��ποτεινούσης τὴν ἀμβλείαν γωνίαν.

Π ό ρ ι σ μ α. γ'.

"Αυτὶς διχοτομήσῃ τὰς δύο πλευρὰς ἐνὸς τριγώνου, καὶ ἀπὸ τῶν τομῶν ἄξῃ πρὸς ὀρθὰς μετὰ αὐτὰς πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη εὐθείας, ἢ σύμπτωσις αὐτῶν θέλει εἶναι τὸ κέντρον τοῦ περιγραφησομένου περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου.

Π ρ ό τ α σ ι ς. ε'.

Ἐν τῷ δοθῶντι κύκλῳ να' ἐγγράφηται τετράγωνον.

Ἐξω ΑΔΒΓ, ὁ δοθεὶς κύκλος. σχ. 128.

Ἄγῃ τὴν διάμετρον ΑΒ, καὶ πρὸς ὀρθὰς μετὰ αὐτὴν τὴν ΓΔ. ζευγυνύω τὰ πέρατα αὐτῶν διὰ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ΒΓ, ΓΑ.

Ἐπειδὴ γων. ΑΚΔ = γων. ΔΚΒ = γων. ΒΚΓ = γων. ΓΚΑ, καθὼ ὀρθαί, διὰ τοῦτο καὶ αἱ χορδαὶ ΑΔ = ΔΒ = ΒΓ = ΓΑ (πρ. χς. 1). ὅθεν τὸ τετράπλευρον ΑΔΒΓ ἔχει τὰς τέσσαρας πλευρὰς ἴσας, ἀλλήλαις, ἀλλ' ἔχει ἐν ταυτῷ καὶ τὰς τέσσαρας γωνίας ὀρθὰς, ὡς ἐκάστης ἐνούσης ἐν ἡμικυκλίῳ (ρ. λα'. βιβ. γ'). ἵ. ὥς εἶναι τετράγωνον (ὅρ. ε'. βιβ. α'), εἶναι δ' ἐν ταυτῷ καὶ ἐν τῷ κύκλῳ ΑΔΒΓ. Ὡς γέγονε τὰ ζητηθέν.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὡς ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐν κύκλῳ τετράγωνου ἔχει πρὸς τὴν ἡμιδιάμετρον τοῦ κύκλου, ὡς γ. 2. i. Καθότι ἐπειδὴ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΚΔ εἶναι ὀρθογώνιον

ισοσκελές, διὰ τοῦτο $\Delta\Delta : \Delta\text{Κ} :: \sqrt{2} : 1$ (πόρ. γ'. προ. μζ'. βιβ. α').

Π ρ ό τ α σ ε ι ς. ζ.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλου νὰ περιγράψῃ τις τετραγώνον.

Ἐξω $\Lambda\Delta\text{ΒΓ}$ ὁ δοθεὶς κύκλος. σχ. 128.

Ἄγω τὰς διαμέτρους ΑΒ , $\Gamma\Delta$ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις.. διὰ τῶν περάτων αὐτῶν ἄγω τὰς $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$. ἐφαπτομένας.. καὶ τὰς ἐπεκτείνω ἕως νὰ συμπίσωσι κατὰ τὰ σημεία α , β , γ , δ .

Ἐπειδὴ ἡ γων. $\alpha\Gamma\text{Κ} = 90^\circ$ (πόρ. προ. ις'. βιβ. γ'), διὰ τοῦτο γων. $\alpha\Gamma\text{Κ} = \text{γων. } \Delta\text{Κ}\Gamma$: ὁ ἐστὶ τὸ $\alpha\Gamma\text{Κ}\Delta$, εἴτε τὸ $\alpha\delta\text{Β}\Delta$ εἶναι παραλληλόγραμμον, καὶ διὰ τοῦτο ἡ $\alpha\delta = \text{ΑΒ} = \beta\gamma$.. ὡσαύτως καὶ ἡ $\alpha\beta = \Gamma\Delta = \delta\gamma$.. ὥς αἱ τέσσαρες πλευραὶ οὔσαι ἴσαι μὲ τὴν ΑΒ , αἱ $\Gamma\Delta$ εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Ἐπεὶκα ἐπειδὴ ἡ γων. $\beta\alpha\delta = \text{γων. } \Delta\text{Κ}\Gamma$ (προ. λδ'. βιβ. α'), καὶ ἡ γων. $\Delta\text{Κ}\Gamma = 90^\circ$, ἐκ τῆς κατασκευῆς, διὰ τοῦτο καὶ ἡ γων. $\beta\alpha\delta = 90^\circ$.. ἀλλ' ὅταν ἔν παραλληλόγραμμον ἔχει τὴν μίαν γωνίαν ὀρθήν, ἔξει καὶ τὰς τέσσαρας ὡσαύτως (πορ. α'. λδ'. βιβ. α').. ὥς τε τὸ τετράπλευρον $\alpha\beta\gamma\delta$ ὡς ἔχον ἴσας τὰς τέσσαρας πλευράς, καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις, εἶναι τετράγωνον (ὅρ. ιε'. βιβ. α').. ἀλλὰ καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ἀπτονται τοῦ κύκλου (προ. ις. βιβ. γ').. ὥς περιγράφεται περὶ τὸν κύκλον $\Lambda\Delta\text{ΒΓ}$ (ὅρ. ε'), ὡς ἐζητήετο.

Π έ ρ ι σ μ α' α'.

"Ως το περιγεγραμμένον περί κύκλου τετράγωνον είναι διπλάσιον τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου.

Καθότι $AB^2 = 2\Gamma\Gamma^2$, ὡς οὔσης ὀρθῆς τῆς γωνίας $\Gamma\Gamma\Gamma$, καὶ ἰσοσκελοῦς τοῦ τριγώνου $\Gamma\Gamma\Gamma$.. ἀλλὰ $αδ = AB$.. ὥς $αδ^2 = 2\Gamma\Gamma^2$, εἴτε $αβγδ = 2\Delta\Delta\Gamma\Gamma$.

Π έ ρ ι σ μ α. β'.

"Ως ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου περί κύκλου τετραγώνου ἔχει πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου, ὡς $\sqrt{2} : 1$. Καθότι ἂν $αδ^2 = 2\Gamma\Gamma^2$, θέλει εἶναι καὶ $αδ^2 : \Gamma\Gamma^2 :: 2 : 1$, καὶ διὰ τοῦτο $αδ : \Gamma\Gamma :: \sqrt{2} : 1$.

Π ό ρ ι σ μ α. γ'.

Τὸ περιγεγραμμένον περικύκλιον τετράγωνον εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου. Καθότι ἂν $αδ^2 = 2\Gamma\Gamma^2$, καὶ ἂν $\Gamma\Gamma^2 = 2\Delta\Delta^2$ (πρ. 5'), θέλει εἶναι καὶ $αδ^2 = 4\Delta\Delta^2$, καὶ διὰ τοῦτο $αδ = 2\Delta\Delta$.

Π ρ ό τ α σ ι ς. η'.

Ἐν τῷ δοθέντι τετραγώνῳ. νὰ ἐγγράφη τις κύκλος.

"Εξω $αβγδ$ τὸ δοθὲν τετράγωνον σχ. 128.

Τέμνω δίχα τὰς πλευρὰς $αβ$, $βγ$ κατὰ τὰ σημεῖα Λ , καὶ Δ .. ἄγω ἀπὸ τῶν τομῶν τὴν μὲν AB παράλληλον μὲ τὴν $βγ$, εἴτε πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν $αβ$, τὴν δὲ $\Delta\Gamma$ παράλληλον μὲ τὴν $βα$.. εἴτα κέντρῳ μὲν τῷ σημείῳ τῆς συμπτώσεως K , διαστήματι δὲ τῷ $K\Lambda$ γράφω κύκλον τὸν $\Lambda\Delta\Gamma\Gamma$, ὅς τις θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος.

Καθότι ἡ $K\Lambda = \Delta\beta$, καὶ ἡ $K\Delta = \Delta\beta$ (πρ. λδ'.

βιβ. α').: ἑκατέρω· δηλονότι ἴση μὲν τὴν ἡμίσειαν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου.. ὥς· ἢ $KA = KB$.. ὡσαύτως· ἤθελεν ἀποδειχθῆ καὶ ἢ $KB = KD$: ὅ· ἐς· τὸ σημεῖον K εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου $AB\Gamma$ (πρ. θ'. βιβ. γ').). Ὡς· εἰ· πειθῇ καὶ ὁ κύκλος $AB\Gamma$ ἄπτεται ἐκάστης πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου $αβγδ$, ἐγγέγραπται ἐν αὐτῷ (ὅρ. ζ'), ὡς ἐζητεῖτο.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὡς· εἰ· ἂν δύο τῶν ἐφεξῆς πλευρῶν ἑνὸς τετραγώνου διχοτομηθῶσι, καὶ ἀπὸ τῶν τομῶν ἀχθῶσι πρὸς ὀρθὰς καὶ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι, ἢ σύμπτωσις αὐτῶν· θέλει εἶναι τὸ κέντρον τοῦ περιγραφητομένου περὶ τὸ τετράγωνον κύκλου..

Π ρ ό τ α σ ε ι ς. θ'.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον νὰ περιγράψῃ τις κύκλον.

Ἐς· τὸ $AB\Gamma\Delta$ τὸ δοθὲν τετράγωνον. σχ. 129.

Ἄγω τὰς διαγωνίους $ΑΓ$, $ΒΔ$.

Καὶ ἔχω $KA = KB = K\Gamma = KD$ (πρ. β'. πρ. λδ'. βιβ. α').. ὥς· εἰ· ἂν κέντρῳ μὲν τῷ K , διαστήματι δὲ τῷ KA γράψω κύκλον, ὁ κύκλος θέλει διελθεῖ διὰ τῶν σημείων A, B, Γ, Δ (πρ. θ'. βιβ. γ').): ὅ· ἐστίν ὁ κύκλος $AB\Gamma\Delta$ περιέγραπται περὶ τὸ τετράγωνον $AB\Gamma\Delta$ (ὅρ. ζ'), ὡς ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς. ι'.

Νὰ συστήσῃ τις τρίγωνον ἰσοσκελές ἔχον ἑκατέρω τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίαν τῆς τρίτης.

Ἐκτιθῆμι εὐθεῖαν τινα τὴν AB . σχ. 130.

Τέμνω αὐτὴν κατὰ τὸ Γ οὕτως, ὥς· $AB \times B\Gamma$

$= \Delta\Gamma^2$ (πρ. ια'. τοῦ β'). .. εἴτα ἐπὶ τὸ τμήμα ΓΒ ἀναγράφω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΓΔΒ (πρ. γ'. πρ. ια'. ββ. α'). ἐκτελῶν $\Gamma\Delta = \text{ΒΔ} = \Delta\Gamma$.. ἄγω τὴν ΑΔ εὐθεῖαν .. καὶ περὶ τὸ τρίγ. ΔΓΔ περιγράφω κύκλον τὸν ΑΓΔΕ (πρ. ε').

Ἐπειδὴ $\text{ΒΔ} = \text{ΑΒ} \times \text{ΒΓ}$, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ὡς οὔσης τῆς $\text{ΒΔ} = \Delta\Gamma$, διὰ τοῦτο ἡ ΒΔ εἶναι ἐκαστομένη τοῦ κύκλου ΑΓΔΕ (πρ. λβ'. ββ. γ'). .. καὶ ἐντεῦθεν γων. $\text{ΒΔΓ} = \text{γων. ΔΑΒ}$ (πρ. λβ'. ββ. γ') $= \text{γων. ΓΔΑ}$, ὡς ὄντος τοῦ τρίγ. ΓΔΔ ἰσοσκελοῦς, ἐκ τῆς κατασκευῆς .. ὥς οὖσα γων. $\Delta\Gamma\text{Β} = \text{γων. ΓΑΔ} + \text{γων. ΓΔΑ}$ (πρ. λβ'. ββ. α') $= 2 \text{ γων. ΓΑΔ} = 2 \text{ γων. ΑΔΓ} = 2 \text{ γων. ΓΔΒ} = \text{γων. ΑΔΒ}$: ὁ ἐστὶν ἡ γων. ΑΔΒ $= 2 \text{ γων. ΔΑΒ}$. Ἀλλ' ἡ γων. $\Delta\Gamma\text{Β} = \text{γων. ΔΒΓ}$, ὡς γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου .. ὥς καὶ ἡ γων. $\text{ΑΒΔ} = 2 \text{ γων. ΒΑΔ}$ (αξ. α'). Ὡς τὸ τρίγωνον ΔΑΒ εἶναι καὶ ἰσοσκελὲς, καὶ ἔχει καὶ ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίαν τῆς τρίτης, ὡς ἐζητεῖτο.

Π ό ρ ι σ μ α. α'.

Ὡς εἰς ἅντις λάβῃ $\frac{1}{10}$ τῆς περιφερείας, εἴτε $\frac{1}{5}$ τῆς ἡμιπεριφερείας : τουτέστι τόξον καὶ ἄξιν ἐκ τῶν περάτων αὐτοῦ ἢ τῆς χορδῆς ἡμιδιαμέτρους, τὸ γενησόμενον τρίγωνον θέλει εἶναι ἰσοσκελὲς ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίαν τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ. Καθότι οὔσης τότε τῆς παρὰ τῷ κέντρῳ γωνίας $= 36^\circ$, καὶ τῶν λοιπῶν δύο $= 144^\circ$, μένει ἑκατέρα $= 72^\circ$.

Π ό ρ ι σ μ α. β'.

Ὡς εἰς αὐ τρίγωνον ἔχον τὴν κορυφὴν πρὸς τῷ κέντρῳ

τοῦ κύκλου καὶ τὴν βάσιν χορδὴν, ἔχη ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίαν τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ, ἢ βάσις αὐτοῦ θέλει εἶναι πλευρὰ δεκαγώνου.

Π ρ ό τ α σ ι ς. ια'.

Ἐν τῷ δοθέντι κύκλῳ νὰ ἐγγράψῃ τις πεντάγωνον τακτικόν.

Ἔστω ΑΔΓΒΕ ὁ δοθεὶς κύκλος. σχ. 131.

Ἐν τῷ δοθέντι κύκλῳ ἐγγράψω τρίγωνον ἰσοσκελές τὸ ΑΒΓ, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίαν τῆς γων. ΓΑΒ (πρ. ι'). .. τέμνω διὰ τὰς γωνίας ΑΒΓ, ΑΓΒ διὰ τῶν ΒΔ, ΓΕ.. ἄγω τὰς χορδὰς ΑΔ, ΔΓ, ΒΕ, ΕΑ.

Καὶ ἔχω $ΑΔ = ΔΓ = ΓΒ = ΒΕ = ΕΑ$, ὡς ὑποτίθουσαι ἴσας γωνίας (πρ. κς'. βιβ. γ'). Ὡς τὸ πεντάπλευρον ΑΔΓΒΕ ἔχον τὰς πέντε πλευρὰς καὶ τὰς πέντε γωνίας ἴσας ἀλλήλαις, εἶναι τακτικόν (ὁρ. α'), καὶ ἐγγέγραπται ἐν τῷ δοθέντι κύκλῳ, ὡς ἐζητεῖτο.

Π ό ρ ι σ μ α. α'.

Ὡς ἐκάζη γωνία τακτικοῦ πενταγώνου $= 108^\circ$. Καθότι ἐπειδὴ καὶ παντὸς εὐθυγράμμου σχήματος τὸ κεφάλαιον τῶν ἐντὸς γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ τοσαῦτα ζεύγη, ὅσας πλευρὰς ἔχει, ἀποδίδει τεσσάρων ὀρθῶν (πρ. ιε'. πρ. λβ' βιβ. α'), τοῦτου ἕνεκεν αἱ γωνίαι τοῦ πενταγώνου $ΑΔΓΒΕ = 6 \times 90^\circ$, καὶ διὰ τοῦτο ἐκάζη αὐτῶν $= 108^\circ$.

Π ό ρ ι σ μ α. β'.

Ἐν κύκλῳ ἢ πλευρὰ τοῦ τακτικοῦ πενταγώνου ὑποτίθει γωνίαν πρὸς τῷ κέντρῳ $= 72^\circ$. Καθότι ἐπειδὴ καὶ

ὁ κύκλος $= 360^\circ$, διὰ τοῦτο $\frac{360}{5} = 72$, καὶ ἐπομένως πρὸς τῇ περιφερείᾳ ὑποτείνει γωνίαν $= 36^\circ$.

Π ρ ό τ α σ ι ς. ιβ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον νὰ περιγράψῃ τις πεντάγωνον τακτικόν.

Ἐς τὸ αβγδε ὁ δοθεὶς κύκλος. σχ. 132.

Ἐν τῷ δοθέντι κύκλῳ ἐγγράφω πεντάγωνον τακτικόν τὸ αβγδε (πρ. ια'). διὰ τῆς κορυφῆς τῶν γωνιῶν αὐτοῦ ἄγω ἐφαπτομένας τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ.. τὰς ἐπεκτείνω ἕως οὗ νὰ συμπέσωσι κατὰ τὰ σημεῖα Β, Γ, Δ, Ε, Α, καὶ λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ εἶναι τὸ ζητούμενον πεντάγωνον.

Καθότι ἐπειδὴ ἀπὸ τῶν αὐτῶν σημείων Δ, Ε, κτξ. ἄγονται δύο ἐφαπτόμεναι, διὰ τοῦτο, ἡ μὲν Δδ = δΕ, ἡ δὲ Κγ = Κδ, καθὼς ἡμιδιάμετροι, ἡ δὲ ΔΚ κοινὴ ὅθεν ἡ γων. ζ = γων. η (πρ. η'. βιβ. α'). ὁ ἐξιν ἡ γων. γΔδ ἐξίχοτομήθη ὑπὸ τῆς ΔΚ, ὡσαύτως καὶ ἡ γων. γΗδ = 2 γων. μ.. διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ γων. εΗδ = 2 γων. ν. Ἄλλ' ἡ γων. γΗδ = γων. ΕΚδ (πρ. κζ'. βιβ. γ'). ὥς ἡ γων. μ = γων. ν, καὶ ἐπομένως ἡ μὲν Δδ = δΕ, ἡ δὲ γων. η = γων. θ. (πρ. κζ'. βιβ. α').. ὥς ἡ ὅλη ἡ γων. γΔδ = γων. δΕε (αξ. β'). Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἤθελον ἀποδειχθῶσιν ἴσαι ἅπασαι αἱ γωνίαι καὶ πλευраὶ τοῦ πενταγώνου ΑΚΓΔΕ. Ὡς τὸ πεντάγωνον ΑΚΓΔΕ ἔχον τὰς γωνίας καὶ τὰς πλευράς ἴσας ἀλλήλαις, καὶ ὃν περὶ τὸν δοθέντα κύκλον αβγδε περιγεγραμμένον, εἶναι τὸ ζητούμενον.

Π ό ρ ε σ μ α.

Ἡ πλευρά τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένου πενταγώνου τακτικοῦ ὑποτείνει πρὸς τὸ κέντρο γωνίαν $\equiv 72^\circ$.

Καθότι ἂν πέντε πλευραὶ ὑποτείνωσι γωνίας πέντε περὶ τὸ κέντρον, αἵτινες $\equiv 360^\circ$ (πρό. β'. προ. γ. βιβ. α'). ὁ δὲ ὅλον ὅτι ἐκάστη αὐτῶν $\equiv 72^\circ$.

Π ρ ό τ α σ ι ς. γ'.

Ἐν τῷ δοθέν τι τακτικῷ πενταγώνῳ νὰ ἐγγράψῃ τις κύκλον.

Ἐστω ΑΒΓΔΕ τὸ δοθέν πεντάγωνον τακτικόν. σχ. 132.

Διαίρω δίχα τὰς δύο γωνίας Δ, καὶ Ε διὰ τῶν εὐθειῶν ΔΚ, ΕΚ.. ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς συμπτώσεως αὐτῶν Κ ἄγω καθετόους ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ πενταγώνου Κγ, Κδ, Κε.

Εἰς τὰ τρίγωνα ΔΚγ, ΔΚδ ἡ μὲν γων. ζ $\equiv$ γων. η, ἡ δὲ γων. ΚγΔ $\equiv$ γων. ΚδΔ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ δὲ ΚΔ κοινὴ, ὥς ἡ Κγ $\equiv$ Κδ (πρό. κς'. βιβ. α').. ὡσαύτως δ' ἤθελεν ἀποδειχθῆ καὶ ἡ Κδ $\equiv$ Κε. Ὡς κέντρον μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ Κγ γράφω κύκλον, ὁ κύκλος θέλει διέλθῃ διὰ τῶν σημείων γ, δ, ε (πρό. δ'. βιβ. γ'): ὁ ἐπεὶ θέλει ἐγγραφῇ ἐν τῷ τακτικῷ πενταγώνῳ ΑΒΓΔΕ (ὁρ. ζ'), ὡς ἐζητεῖτο.

Π ό ρ ε σ μ α.

Ὡς ἂν τάμῃ δίχα τις δύο τῶν ἐφεξῆς πλευρῶν ἐνὸς πενταγώνου τακτικοῦ, καὶ ἀπὸ τῶν τομῶν αἶψή πρὸς ὀρθὰς μὲ τὰς πλευρὰς εὐθείας, ἡ σύμπτωση αὐτῶν θέ-

λει εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ἐγγραφησομένου κύκλου, εἴτε
 θέλωσιν εἶναι ἡμιδιάμετροι αἱ πρὸς ὁρὰς ἀχθεῖσαι.

Π ρ ό τ α σ ι ς. ιδ'.

Περὶ τὸ εὐθεῖν τακτικὸν πεντάγωνον καὶ περιγράψῃ
 τις κύκλον.

Ἐξω αβγδε τὸ εὐθεῖν τακτικὸν πεντάγωνον. σχ.
 132.

Διαίρω δίχα τὰς δύο ἐξεξῆς γωνίας βγδ, γδε διὰ
 τῶν εὐθειῶν γκ, δκ. ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς συμπτώσεως
 αὐτῶν κ ἄγω κάθετον τὴν κλ. ἐπὶ τὴν γδ πλεωρὰν τοῦ
 πενταγώνου.

Εἰς τὰ τρίγωνα λκγ, λκδ ἡ μὲν λγ=λδ (πρ.
 γ'. βιβ. γ'), ἡ δὲ κλ κοινή, ἡ δὲ γων. κλγ=γων.
 κλδ, ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς. ὥς καὶ ἡ κγ=κδ (πρ.
 ε'. βιβ. α'). ὡσαύτως δ' ἤθελεν ἀποδειχθῆ καὶ ἡ κδ=
 κε. Ὡς κέντρον μὲν τῷ κ, διαστήματι δὲ τῷ κγ γρά-
 φω κύκλον, ὅστις θέλει διέλθῃ διὰ τῆς κορυφῆς τῶν γω-
 νιῶν τοῦ πενταγώνου γ, δ, ε (πρ. ε'. βιβλ. γ'): ὁ ἕξτε-
 ρός ἐστι νὰ περιγραφῇ περὶ τὸ πεντάγωνον αβγδε (ὁρ. ε'),
 ὡς ἐξητεῖτο.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὡς εἰς ἀντιστοιχίαν διείχα δύο ἐξεξῆς γωνίας ἐνὸς
 πενταγώνου τακτοῦ διὰ δύο εὐθειῶν, ἡ σύμπτωση αὐ-
 τῶν θέλει εἶναι τὸ κέντρον τοῦ περιγραφησομένου περὶ αὐ-
 τὸ κύκλου, εἴτε αὗται αἱ εὐθεῖαι θέλωσιν εἶναι ἡμιδιά-
 μετροι τοῦ κύκλου.

Π ρ ό τ α ς ι σ τ ε ις .

Ἐκ τῶν δοθέντων κύκλῳ να ἐγγράφη τις ἐξάγωνος τακτικόν.

Ἔστω ΑΓΖΒΕΔ ὁ δοθείς κύκλος. σχ. 133.

Ἄγω τὴν διάμετρον ΑΒ.. ἀπὸ τοῦ πέρας αὐτῆς Α ἐγκομίζω ἐκατέρωθεν τὴν ΑΓ=ΑΔ=ΚΑ (πρ. α'. βιβλ. γ'). ἄγω ἀπὸ τῶν σημείων Γ, Δ τὰς διαμέτρους ΓΕ, ΔΖ.. ἄγω τὰς χορδὰς ΓΖ, ΖΒ, ΒΕ, ΕΔ, καὶ λέγω ὅτι τὸ ἐξάγωνον ΑΓΖΒΕΔ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Τὰ τρίγωνα ΑΚΓ, ΑΚΔ ὄντα, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἰσοπλευρά εἶναι καὶ ἰσογώνια, καὶ διὰ τοῦτο ἡ γων. ΑΚΓ=γων. ΑΚΔ=60° (πρ. η'. πρ. 1β'. βιβλ. α'). ἀλλ' αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις, διὰ τοῦτο γων. ΒΚΕ=γων. ΒΚΖ=60°. Ὡς ἐπείδῃ ἡ γων. ΕΚΖ=2×60°, διὰ τοῦτο ἡ γων. ΔΚΕ=60° (πρ. ιγ'. βιβλ. α'), καὶ ἐχομένως καὶ ἡ γων. ΓΚΖ=60°. Ὡς ἐπὶ τὸ ἐξάγωνον ΑΓΖΒΕΔ ἔχει ἴσας πρὸς ἀλλήλας τὰς ἐξωτερικάς.

β.) Ἐπειδὴ καὶ τὰ ἐξωτερικά τρίγωνα ΑΚΓ, ΓΚΖ, ΖΚΒ, ΒΚΕ, ΕΚΔ, ΔΚΑ εἶναι ἰσοπλευρά, ἔθεν καὶ ἰσογώνια, καὶ ἐπειδὴ ἐκάστη γωνία τοῦ ἐξάγωνου ΑΓΖΒΕΔ συγκείται ἐκ δύο γωνιῶν τῶν ἐσημένων ἰσογώνιων τριγώνων, τοῦτου ἕνεκεν ἀπασαί αἱ γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις: τοῦτέστιν ἡ γων. ΑΓΖ=γων. ΓΖΒ=κτλ: ἔστι τὸ ἐξάγωνον ΑΓΖΒΕΔ εἶναι τακτικόν καὶ ἐγγράμμενον ἐν κύκλῳ (ὅρ. δ'), ὡς ἐζητεῖτο.

Π ό ρ ι σ μ α . α'.

Ὡς ἐπὶ ἐκάστη γωνία τοῦ ἐξάγωνου εἶναι = 120°.

Π ό ρ ι σ μ α. β'.

Ἐκάστη πλευρά τοῦ ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου εἶναι ἴση μετὰ τὴν ἡμιδιάμετρον τοῦ κύκλου.

Ὡς αὖ ἐναρμόνιαις χορδαῖς συνεχῶς ἐξ ἐν τῇ περιφέρειᾳ ἴσας μετὰ τὴν ἡμιδιάμετρον, τὸ ἐγγραφησόμενον σχῆμα θέλει εἶναι ἑξάγωνον καὶ τακτικόν, διότι ἐγγράπται ἐν κύκλῳ.

Π ό ρ ι σ μ α. γ'.

Πᾶσα χορδὴ ἴση μετὰ τὴν ἡμιδιάμετρον ὑποτείνει γωνίαν πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ $\equiv 60^\circ$, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ $\equiv 30^\circ$.

Π ό ρ ι σ μ α. δ'.

Ὡς ἐπεὶ καὶ ἡ μὲν διάμετρος ὑποτείνει γωνίαν $\equiv 90^\circ$, (πρ. λαβ. βε. γ'), ἡ δὲ χορδὴ ἡ ἴση μετὰ τὴν ἡμιδιάμετρον γωνίαν $\equiv 30^\circ$ καὶ ὑποτείνουσαι εὐθεῖαι ἀμικρύνονται ἡτίτοις, ἢ αὐτὸς ὑποτείνόμεναι γωνίαι. Καθότι 2 : 1 $\equiv 90^\circ : 30^\circ$.

Σ η μ ε ς ὁ ρ ι σ μ ο ς.

Ἄν διὰ τῆς κορυφῆς τῶν ἐξ γωνιῶν τοῦ ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου, ἄξω ἐξ ἐφαπτομένας ἐπενέουσαι αὐτάς ἕως οὗ νὰ συμπίσωσι, τὸ περιγραφησόμενον σχῆμα θέλει εἶναι ἑξάγωνον τακτικόν, ὥς δηλονότι καὶ τὸ πεντάγωνον (πρ. βε.) καὶ τὸ τετράγωνον (πρ. ζ.), καὶ ἐν γένει πᾶν σχῆμα τακτικόν περιγραφόμενον περὶ κύκλον.

Π ό ρ ι σ μ α. ε'.

Ἐκ τῶν δοθέντων κύκλῳ νὰ ἐγγράφη τις πεντακαίδεκαγώνος τακτικόν.

Ἐστὶν ΑΒΓΕρ' ὁρθοὺς κύκλος. σχ. 134.

Ἐν πρῶθόθεν κύκλῳ ἐγγράφω τρίγωνον τακτικόν τοῦ ΑΒΓ (πρ. β'), καὶ πεντάγωνον τακτικόν τοῦ Αβγδς (πρ. α').

Τώρα εἶναι καταφανές ὅτι ἂν διαιρηθῇ ἅπασα ἡ περιφέρεια ΑΒΓ εἰς 15 μονάδας, τὸ μὲν τόξον ΑΒΒ εἴη 5 μονάδας, τὸ δὲ Αβγ, 6.. ὥστε τὰ Βγ τόξον 1 εἰς 5 μέρη καὶ τὸ δΓ, 1. Ὡς ἂν εἴη τὴν κύκλον ἐναρμόσιον κατὰ τὸ συνεχὲς εὐθείας, ἐκάστη ἴσην ἢ μὲν τὴν Βγ, ἢ μὲν τὴν δΓ, τὸ ἐγγραφθησάμενον πεντεκαίδεκαγώνου εἴη ἴσας τὰς πλευράς. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ἐγγράφεται καὶ ἐν κύκλῳ, διὰ τοῦτο εἴη καὶ τὰς γωνίας ἴσας, ὡς ὁηλονότι καὶ τὸ τετράγωνον, πεντάγωνον, καὶ ἑξάγωνον.. διὰ τοῦτο ὅτις ἀπὸ ἐκάστης γωνίας ἡμιδιαμέτρου, τὰ γενησόμενα τρίγωνα εἴησαν ἴσα, ἐξ αὐτῶν οὖν ἐκτελοῦσιν ἐκάστην γωνίαν τοῦ πεντεκαίδεκαγώνου. Καὶ ἐπειδὴ ἐκάστη αὐτοῦ γωνία ἀπτεται τοῦ κύκλου ΑΒΓ, διὰ τοῦτο καὶ ἐγγράσσεται ἐν αὐτῷ, ὡς ἐξητήτεο.

Π ὁ ρ ι σ μ α α.

Ὡς ἐκάστη γωνία τοῦ πεντεκαίδεκαγώνου τακτικοῦ $\equiv 156^\circ$. Καθότι τὸ κεφάλαιον αὐτῶν $\equiv 26 \times 90^\circ \equiv 2340^\circ$ (πρ. ιδ'. πρ. λβ. βιβλ. α').

Π ὁ ρ ι σ μ α β'.

Ἡ πλευρὰ τοῦ πεντεκαίδεκαγώνου ἐν κύκλῳ ὑποτείνει πρὸς τὸ κέντρον γωνίαν $\equiv 24^\circ$, καὶ διὰ τοῦτο πρὸς περιφέρειαν $\equiv 12^\circ$. Καθότι ἂν εἴη τὸ πεντεκαίδεκαγώνον ἐγγράφει 15 τρίγωνα ἔχοντα διὰ βᾶτις τὰς πλευράς τοῦ πεντεκαίδεκαγώνου καὶ περατούμενα εἰς τὸ

κέντρον· αὐτὸ περὶ τὸ κέντρον αὐτῶν 15· γινάσκει θύλουται εἶναι $= 4 \times 90^\circ$ (πρό. β'. προ. γ'. βιβ. α').

Σημειώσις.

Ἄν ἐγγράψω ἐν κύκλῳ πεντεκαίδεκάγωνον, καὶ δι' ἐκάστης κορυφῆς τῶν γωνιῶν ἄξω θραπτομένης ἐπεκτείνων αὐτάς ἕως οὗ νὰ συμπέσωσι, τὸ περιγραφησόμενον σχῆμα θέλει εἶναι πεντεκαίδεκάγωνον, ὡς δηλοῦντι καὶ τὸ ἐξάγωνον (σημείωσις. πρ. ιε').

BIBΛION Ε'. (α).

Ὁ ρ ο ι.

α'. Μέρος ἢ ὑποπλαπλάσιον λέγεται ἐν μεγέθος ἄλλου μεγέθους, ὅταν καταμετρή αὐτὸ ἐξηκριθωμένως. Οὕτω μία γραμμὴ τριῶν ποδῶν εἶναι μέρος καὶ

(α) Εἰς τοῦτο τὸ βιβλίον ἐκτίθηται ὁ Εὐκλείδης τὴν ἀναλογίαν, καὶ ἡ περὶ εἴναιτο εἰς τὴν ἀσθηματικὴν λόγος μικρὸς. Ἡ ἀναλογία ὅμως προσεῖται οὐχὶ μόνον εἰς τὴν γεωμετρίαν, ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν ἀσθηματικὴν, καὶ εἰς τὴν ἁλγεβραν, καὶ εἰς τὴν τριγωνομετρίαν, καὶ ἐν γένει εἰς πᾶσαν τὴν ἀπλὴν μαθηματικὴν καὶ μικτὴν καὶ εἰς αὐτὴν τὴν πολιτικὴν ζωὴν. Καὶ εἶναι ἡ ψυχὴ καὶ τὸ φῶς καὶ τῆς μαθηματικῆς, ὡς ταύτης ἀραιωθείτης. ἐκίθη μὲν νεοφ. Ἡδὲξον τὸν διδάσκαλον τοῦ Πλάτωνος θύλουται δὲ ἐκτίθηται τοῖσι τοῖσι οὐρανίου δόξαν.

ὑποπολλαπλάσια τῆς 12 ποδῶν γραμμῆς, πλὴν ὅχι καὶ τῆς 11, ἢ 13.

β'. Πολλαπλάσιον λέγεται ἐν μεγέθι ἄλλου μεγέθους, ἔταν καταμετρηται ὑπ' ἐκείνου ἐξηκρισμένως. Οὕτω μία γραμμὴ 12 ποδῶν εἶναι πολλαπλάσιον τῆς 3 ποδῶν γραμμῆς, πλὴν ὅχι καὶ τῆς πέντε.

γ'. Τὰ δύο μεγέθη: τὸ τε πολλαπλάσιον καὶ ὑποπολλαπλάσιον, ὀνομάζονται σύμμετρα, ὡς ἔχοντα ἐν κοινὸν μέτρον, καὶ διὰ τοῦτο ἀσύμμετρα, τὰ μὴ ἔχοντα κοινὸν μέτρον.

δ'. Λόγος λέγεται ἡ κατὰ πηλικότητα δύο μεγεθῶν ἁμογενῶν (3) σχέσις: τουτέστι τὸ ποσάκις ἐν μέγε-

(β) Τὸ ποσὸν θεωρούμενον ὡς ὅλον, σύγκριται ἐκ μερῶν. Ἄν λοιπὸν τὰ μέρη αὐτοῦ ᾖναι ἴσα ἀλλήλοις, τότε τὸ μὲν ὅλον ὀνομάζεται πολλαπλάσιον ὡς πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ μέρος, τὸ δὲ μέρος αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸ ὅλον, ὑποπολλαπλάσιον, τὸ δὲ ποσάκις τὸ μέρος περιέχεται εἰς τὸ ὅλον, ἢ ποσάκις τὸ ὅλον περιέχει τὸ μέρος. λόγος. Οὕτως ὅντος τοῦ $12 = 4 + 4 + 4$, ἐγὼ ἐκτίθημι αὐτὸ οὕτως $\frac{12}{3}$, ἔσθα τὸ μὲν 12 λέγεται πολλαπλάσιον τοῦ 3, το δὲ 3 ὑποπολλαπλάσιον τοῦ 12, καὶ λόγος τὸ $\frac{12}{3}$. οὕτως ἐκτιθεὶς εἶναι τὸ $\frac{3}{12}$ ∴ ἔσθα εἰς μὲν τὸ $\frac{12}{3}$ θεωρούμενον ὅλον εἶναι τὸ 12 τοῦ 3, εἰς δὲ τὸ $\frac{3}{12}$, ὅποιον μέρος τὸ 3 τοῦ 12. Ἀλλὰ ὁμῶς ὅτι ὑπὸ τοῦ 12 ἀριθμοῦ ἐγὼ δύναμαι νὰ ἱκανῶ καὶ χρόνον, καὶ γραμμὴν, καὶ ἰσχυρισμὸν, καὶ σῶμα. Πλὴν εἶμαι βεβαιωμένος νὰ ἐλεῶμαι ὡσαύτως καὶ τὸ 3 τοῦ αὐτοῦ εἶδους δηλονότι: τουτέστι χρόνον ἢ γραμμὴν, ἢ κτλ., καί μοι εἶναι ἀδύνατον νὰ εἰπῶ 12 ὥσαι χρόνος περιέχει 3 ποδῶν μῆκος, τετρακτὶς, ὡς ὅντος τοῦτου λόγου σαφές. Διαθέτι καθὼς ἐγὼ εἶν δύναμαι ποτὶ

θος περιέχει, ἢ περιέχεται ὑπ' ἄλλου μεγέθους, καὶ διὰ
τοῦτο πᾶς λόγος ἀπαιτεῖ δύο ὄρους, ἐξ ὧν ὁ μὲν πρῶτος
ὀνομάζεται ἡγούμενον, ὁ δὲ δεύτερος, ἐπόμενον.
Οὕτως εἰς τὸ 12:3 τῶν 12 περιέχοντων τὰ 3 τετράκις, ὁ
λόγος αὐτῶν εἶναι 4, καὶ εἰς τὸ 3:12 εἶναι $\frac{1}{4}$, καὶ
εἰς τὸ 3:3 εἶναι $\frac{1}{1}$.

ε'. Ἄν τὰ δύο μεγέθη τοῦ λόγου εἶναι σύμμετρα, ὁ
λόγος αὐτῶν λέγεται λογικός ἢ ὁρθός, εἰδ' ἀσύμμετρα,
ἀλογος ἢ ἁρρήτος. Οὕτως ὁ μὲν λόγος τοῦ 2:1 εἶναι
ῥητός, ὁ δὲ τοῦ $\sqrt{2}:1$ ἁρρήτος.

ς'. Ἀνάλογα ἢ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ λέγονται τέσσα-
ρα μεγέθη, ὅταν ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸ δεύτερον
εἶναι ὁ αὐτὸς μετὰ τὸν τοῦ τρίτου πρὸς τὸ τέταρτον. Οὕτως
ἐπεὶ 15:5, ὡς 12:4, διὰ τοῦτο 15, 5, 12, 4
εἶναι ἀνάλογα ἢ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ.

ζ'. Ἀναλογία λέγεται ἡ ἐξίσωσις δύο λόγων. Οὕ-
τως ἐπεὶ $\frac{15}{5} = \frac{12}{4}$, διὰ τοῦτο 15:5::12:4 ὀνο-
μάζεται ἀναλογία, καὶ ἐν γένει ἂν $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι καὶ
A:B::α:β. (ἀριθμ. 129).

η'. Εἰς τὰ μὴ ἀνάλογα μεγέθη ὁ λόγος εἶναι μεί-
ζων λόγος, καὶ ὅταν τὸ ἡγούμενον ὑπερέχη μᾶλλον τὸ
ἐπόμενον, καὶ ὅταν περιέχηται ἥττον εἰς αὐτό, ἢ εἰς τὸν
δεύτερον λόγον. Οὕτως 12:3 > 12:4, καὶ 4:12 >
3:12, ὅτε τὸ μὲν $\frac{12}{3} > \frac{12}{4}$, τὸ δὲ $\frac{4}{12} > \frac{3}{12}$.

καὶ κάτω ἐξίσωσις εἰς δύο ἑτεροειδῆ ποσά: 2 ἐν δ' ἑαυταί. ῥῆρι εἰ-
πεῖν, καὶ εἰπὼ γραμμῇ 12 ποδῶν εἶναι ἴση μετὰ ἐκπλάγιον 12 πο-
δῶν, ἢ μὴ 12 ποδῶν σῶμα, οὕτω ἀδυνατῶ ἀπλῶς καὶ παραβαλεῖν
δύο ἑτεροειδῆ ποσά.

δ'. Ἄν εἰς τὰ ἀνάλογα τὸ ἐπόμενον τοῦ πρώτου λόγου ᾦται καὶ ἡγούμενον τοῦ δευτέρου, ἡ ἀναλογία ὀνομάζεται συνεχῆς, εἰδὲ μὴ, διακεκριμένη. Οὕτως $\frac{2^4}{2^3} : \frac{2^3}{2^2} : 2$, ἢ ἐν γένει $\alpha^4 : \alpha^3 : \alpha^2 : \alpha$ εἶται ἀναλογία συνεχῆς.

ε'. Εἰς τὴν συνεχῇ ἀναλογίαν τὸ πρῶτον μέγεθος ἔχει πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον, ἢ πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ πρὸς τὸ τέταρτον, τριπλασίονα ἢ πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Οὕτως εἰς τὴν ἀναλογίαν $\frac{2^4}{2^3} : \frac{2^3}{2^2} : 2$, ὁ λόγος $\frac{2^4}{2^3}$ εἶναι διπλασίον τοῦ λόγου $\frac{2^3}{2^2}$: τοῦτέστι τετράγωνον.. καὶ ὁ λόγος $\frac{2^4}{2^2}$ εἶναι τριπλασίον τοῦ λόγου $\frac{2^3}{2^2}$: τοῦτέστι κύβος.

ς'. Εἰς μίαν ἀναλογίαν ὁμόλογα μέγεθη λέγονται τὰ ἡγούμενα πρὸς ἀλλήλα, ὡσαύτως καὶ ἐπόμενα. Οὕτως ἂν $A : B :: \alpha : \beta$, τὰ A, α λέγονται ὁμόλογα, ὡσαύτως καὶ τὰ B, β .

ζ'. Ἐναλλάξ λόγος λέγεται, ὅταν τις ἐκ μιᾶς ἀναλογίας κάμῃ τὰ μὲν δύο ἡγούμενα πρῶτον λόγον, δεύτερον δὲ τὰ ἐπόμενα. Οὕτως οὕσης τῆς ἀναλογίας $15 : 5 :: 12 : 4$, $\frac{15}{5} = \frac{12}{4}$, ἐναλλάξ λόγος λέγεται τὸ $15 : 12 :: 5 : 4$, ἢ $\frac{15}{12} = \frac{5}{4}$.

ζ'. Ἀναπαλιν λόγος λέγεται, ὅταν τις ἐκ μιᾶς ἀναλογίας κάμῃ τὰ ἐπόμενα ἡγούμενα. Οὕτως οὕσης τῆς ἀναλογίας $15 : 5 :: 12 : 4$, $\frac{15}{5} = \frac{12}{4}$, ἀναπαλιν λόγος λέγεται τὸ $5 : 15 :: 4 : 12$, ἢ $\frac{5}{15} = \frac{4}{12}$.

θ'. Σύνθεσις λόγου λέγεται, ὅταν ἐκ μιᾶς ἀναλογίας κάμῃ τις ἡγούμενον τὸ κεφάλαιον τοῦ ἡγούμενου καὶ

ἐπομένον. Οὕτως οὕσης τῆς ἀναλογίας $15:5::12:4$,
 σύλλεσις λόγου λέγεται τὸ $15+5:5::12+4:4$,
 εἴτε $20:5::16:4$, ἢ $\frac{20}{5} = \frac{16}{4}$.

ιβ'. Διαίρεσις λόγου λέγεται, ὅταν ἐκ μίας ἀναλο-
 γίας κάμητις ἡγούμενον τὴν διαφορὰν τοῦ ἡγούμενου
 πρὸς τὸ ἐπόμενον. Οὕτως οὕσης τῆς ἀναλογίας $15:5::$
 $12:4$, ἢ $\frac{15}{5} = \frac{12}{4}$, διαίρεσις λόγου λέγεται τὸ $15 -$
 $5:5::12 - 4:4$, εἴτε $10:5::8:4$, ἢ $\frac{10}{5} = \frac{8}{4}$.

ιγ'. Ἀναστροφὴ λόγου λέγεται, ὅταν ἐκ μίας ἀνα-
 λογίας κάμητις ἐπόμενον τὴν διαφορὰν τοῦ ἡγούμενου
 πρὸς τὸ ἐπόμενον. Οὕτως οὕσης τῆς ἀναλογίας $15:5::$
 $12:4$, ἀναστροφὴ λόγου λέγεται τὸ $15:15-5::12:$
 $12-4$, εἴτε $15:10::12:8$, ἢ $\frac{15}{10} = \frac{12}{8}$.

ιδ'. Τεταγμένη ἀναλογία λέγεται, ὅταν οἱ ὁμόλο-
 γοι ὅροι μίας ἀναλογίας γένωσιν ὁμόλογοι μίας ἄλλης με-
 τὰ διαφορετικῶν ἐπομένων: ὅ ἐστιν ὅταν οἱ ὁρίθμῃται ἢ πα-
 ρονομασθῇ δύο ἴσων κλασμάτων γένωσιν παρονομασθῇ ἢ
 ἀριθμηθῇ ἄλλων δύο ἴσων κλασμάτων. Οὕτως ἂν $A:$
 $B::\Gamma:\Delta$, τεταγμένη εἶναι ἢτε $A:E::\Gamma:Z$, καὶ ἢ
 $B:E::\Delta:Z$: ὅ ἐστὶν ἂν $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, τεταγμένη εἶναι ἢ
 $\frac{B}{E} = \frac{\Delta}{Z}$.. ἢ ἂν $\frac{B}{A} = \frac{\Delta}{\Gamma}$, ἢ $\frac{E}{B} = \frac{Z}{\Delta}$, εἴτε ἐπειδὴ $\frac{15}{5} =$
 $\frac{12}{4}$, διὰ τοῦτο $\frac{15}{20} = \frac{12}{10}$, καὶ $\frac{20}{5} = \frac{16}{4}$ εἶναι τεταγμένη
 ἀναλογία.

ιε'. Τεταραγμένη ἀναλογία λέγεται, ὅταν οἱ μὴ
 ὁμόλογοι ὅροι μίας ἀναλογίας γένωσι· μὴ ὁμόλογοι ὅροι
 μίας ἄλλης μετὰ διαφορετικῶν μέσων. Οὕτως ἂν $A:B::$
 $\Gamma:\Delta$, καὶ $B:E::Z:\Gamma$: τουτέστι ἂν $A\Delta = B\Gamma$, καὶ

$B\Gamma = EZ$, ἡ δευτέρα εἶναι τεταραγμένη ἀναλογία. εἴτε ἐπειδὴ $15 \times 4 = 12 \times 5$, καὶ $12 \times 5 = 20 \times 3$, ἡ δευτέρα εἶναι ἀναλογία τεταραγμένη.

εἰς. Διῶσου λόγος λέγεται, ὅταν ἐκ δύο ἀναλογιῶν ληφθέντες δύο ὅσοι λόγοι ἐκτελέσωσι τρίτην ἀναλογίαν. Καὶ διῶσου μὲν τεταγμένως λόγος λέγεται, ὅταν οἱ μὲν δύο ὁμόλογοι ὅροι τῆς πρώτης ἀναλογίας γένωσιν ὁμόλογοι τῆς τρίτης, οἱ δὲ ὁμόλογοι τῆς δευτέρας δευτέρω ὁμόλογοι. διῶσου δὲ τεταραγμένως λόγος λέγεται, ὅταν οἱ δύο ὅροι τῆς πρώτης σχώσιν ἀντιπεπονητόως πρὸς τοὺς δύο ὅρους τῆς δευτέρας. Οὕτως ἂν $A : B :: \Gamma : \Delta$, καὶ $B : E :: \Delta : Z$, εἴτε ἂν $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ καὶ $\frac{B}{E} = \frac{\Delta}{Z}$, τότε $\frac{A}{E} = \frac{\Gamma}{Z}$ λέγεται λόγος διῶσου τεταγμένως. καὶ ἂν $A : B :: \Gamma : \Delta$, καὶ $B : E :: Z : \Gamma$, εἴτε $A\Delta = B\Gamma$, καὶ $B\Gamma = EZ$, τότε $A\Delta = EZ$, εἴτε $A : E :: Z : \Delta$ λέγεται λόγος διῶσου τεταραγμένως.

Π ρ ό τ α σ ι ς. α'. καὶ β'. (α).

Ἐὰν ὁποιαδήποτε μεγέθη ἦναι ἀνάλογα, ἅπαντα τὰ ἡγούμενα ἔχουσι πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα, ὡς ἐν ἡγούμενον πρὸς ἐν ἐπόμενον.

Ἔστω $A : B :: \Gamma : \Delta :: E : Z :: H : \Theta$, τότε λέγω ὅτι $A + \Gamma + E + H : B + \Delta + Z + \Theta :: A : B$.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἐν ἐπόμενον ἄλλο ὅν εἶναι εἰρή

(α) Ὁ Εὐκλείδης μεταχειρίζεται τινὰς προτάσεις διὰ τῶν πελλαπλασίων πρὸς ἀπὸ τοῦ ἄλλου. ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ τοιαῦται ἀποδείξεις ἐγερθῆναι πικρῶς, τοῦτου ἕνεκα ἐνοῶμεν πελλὰς προτάσεις, φιλάστοις ὅμως τῇ τάξει αὐτῶν.

τῷ ἡγούμενῳ ἐπὶ τὸν λόγον (ὁρ. δ'·), διὰ τοῦτο ὀνομα-
 σθέντος μ τοῦ λόγου τούτων τῶν ἀναλόγων ποσοτήτων, ἡ
 ἀναλογία θέλει τραπεῖ εἰς τὴν ἐξῆς $A : A\varepsilon :: \Gamma : \Gamma\mu ::$
 $E : E\mu :: H : H\mu$. Ἐπειδὴ τοῦτο ὡς ὁράται $(A + \Gamma +$
 $E + H) A\mu = (A + \Gamma + E + H) A\mu$ εἶναι ταυ-
 τότης ἡ ἐξίσωσις, καὶ ἐπειδὴ μία ἐξισώσις ἄλλο δὲν εἶ-
 ναι, εἰμὴ ἀναλογία, διὰ τοῦτο ἔξω $A + \Gamma + E + H :$
 $(A + \Gamma + E + H) \mu \mu :: A : A\mu$, ὃ ἐστὶν $A + \Gamma +$
 $E + H : B + \Delta + Z + \Theta :: A : B$ · τουτίστι τὸ κεφά-
 λαῖον τῶν ἡγούμενων ἔχει πρὸς τὸ κεφάλαιον τῶν ἐπομέ-
 νων τῶν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς ἐν ἡγούμεμενον πρὸς τὸ
 ἐπόμενον αὐτοῦ.

Ἐξω $21 : 7 :: 18 : 6 :: 15 : 5 :: 12 : 4$ τουτίστι
 $\frac{21}{7} = \frac{18}{6} = \frac{15}{5} = \frac{12}{4}$, τότε λέγω ὅτι $21 + 18 + 15$
 $+ 12 : 7 + 6 + 5 + 4 :: 21 : 7$, εἴτε $\frac{21+18+15+12}{7+6+5+4}$
 $= \frac{21}{7} = \frac{3}{1}$.

Π ρ ό τ α σ ι ς. β'· καὶ κδ'.

Ἐὰν εἰς ἀναλογίας ἦναι τὰ αὐτὰ ἐπόμενα καὶ διέ-
 φορα τὰ ἡγούμενα, ἅπαντα τὰ ἡγούμενα τοῦ πρώτου
 ἐπόμενου ἔξουσιν πρὸς ἅπαντα τὰ ἡγούμενα τοῦ δευτέρου
 ἐπόμενου, ὡς αὐτὰ τὰ ἐπόμενα.

Ἐξω $A : B :: \Gamma : \Delta$, καὶ $E : B :: Z : \Delta$, καὶ $H :$
 $B :: \Theta : \Delta$, τότε λέγω ὅτι $A + E + H : \Gamma + Z +$
 $\Theta :: B : \Delta$.

Ἐπειδὴ καὶ μία ἀναλογία ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ
 μία ἐξίσωσις (ὁρ. ε'·), διὰ τοῦτο αἱ ὁδοῦναι ἀναλογίαι
 τρέπονται εἰς ταύτας τὰς ἐξισώσεις $\frac{B}{\Delta} = \frac{A}{\Gamma}$, καὶ $\frac{B}{\Delta} =$
 $\frac{E}{Z}$, καὶ $\frac{B}{\Delta} = \frac{H}{\Theta}$.. ὥστε $\frac{A}{\Gamma} = \frac{E}{Z} = \frac{H}{\Theta}$ (ἀξ. α'·).. ἄλλ'

αἱ ἐξισώσεις τρέπονται εἰς ἀναλογίας, διὰ τοῦτο ἔξω $B : \Delta :: A : \Gamma :: E : Z :: H : \Theta$, καὶ διὰ τοῦτο $A + E + H : \Gamma + Z + \Theta :: B : \Delta$ (πρ. α'). Ἐξω $15 : 5 :: 12 : 4$, καὶ $20 : 5 :: 16 : 4$, καὶ $25 : 5 :: 20 : 4$, τότε ἔσονται $15 + 20 + 25 : 12 + 16 + 20 :: 5 : 4 = 1 \frac{1}{4}$.

Π ρ ό τ α σ ι ς γ'.

Ἐάν τέσσαρα μεγέθη ᾗναι ἀνάλογα, καὶ πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσιν ἐξίσουντὰ ἡγούμενα αὐτῶν ἢ οἱ ὅροι τοῦ ἐνὸς λόγου, ἔσονται πάλιν ἀνάλογα.

Ἐξω $A : B :: \Gamma : \Delta$, καὶ ἄς πολλαπλασιασθῶσιν ἢ ἄς διαιρεθῶσιν τὰ ἡγούμενα αὐτῆς, ἢ οἱ ὅροι τοῦ ἐνὸς λόγου διὰ τῆς μ ποσότητος, τότε λέγω ὅτι $\mu A : B :: \mu \Gamma : \Delta$, καὶ $\frac{A}{\mu} : B :: \frac{\Gamma}{\mu} : \Delta$, καὶ $\mu A : \mu B :: \Gamma : \Delta$.

Ἐπειδὴ καὶ πᾶσα ἀναλογία ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ἐξίτωσις (ὁρ. ζ'), διὰ τοῦτο ἔξω $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$.. ἀλλ' ἐπειδὴ μία ἐξίτωσις ἂν πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ ἐκατέρωθεν ἐπίσης, δὲν ἀπολλύει τὴν ἰσότητα, διὰ τοῦτο α'. ἔχω $\frac{\mu A}{B} = \frac{\mu \Gamma}{\Delta}$, καὶ ἐπομένως $\mu A : B :: \mu \Gamma : \Delta$.. β'. ἔχων $\frac{A}{\mu B} = \frac{\Gamma}{\mu \Delta}$, ἔξω $\frac{A}{\mu} : B :: \frac{\Gamma}{\mu} : \Delta$.. γ'. ἔχων $\frac{\mu A}{\mu B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ ἔξω $\mu A : \mu B :: \Gamma : \Delta$. Ὡσαύτως καὶ $\frac{A}{\mu} : \frac{B}{\mu} :: \Gamma : \Delta$.

Ἐξω $15 : 5 :: 12 : 4$, τότε ἔσαι α'. $10 \times 15 : 5 :: 10 \times 12 : 4$.. β'. $\frac{15}{3} : 5 :: \frac{12}{3} : 4$.. διότι $\frac{15}{3} = \frac{12}{3}$, $\frac{10 \times 15}{5} = \frac{10 \times 12}{4}$, $\frac{15}{5 \times 3} = \frac{12}{4 \times 3}$.

Π ρ ό τ α σ ι ς δ'.

Ἐάν τέσσαρα μεγέθη ᾗναι ἀνάλογα, καὶ πολλαπλα-

συνθεθῶσιν ἢ διαιρεθῶσιν ἐξίσου τὰ ἡγούμενα καὶ ἐπόμενα αὐτῶν, ἢ οἱ ὅροι ἑκατέρου λόγου, ἔσονται πάλιν ἀνάλογα.

Ἔστω $A : B :: \Gamma : \Delta$ · καὶ ἄς πολλαπλασιασθῶσι τὰ μὲν ἡγούμενα διὰ τοῦ μ , τὰ δὲ ἐπόμενα διὰ τοῦ ν , τότε λέγω ὅτι $\mu A : \nu B :: \mu \Gamma : \nu \Delta$, καὶ $\mu A : \mu B :: \nu \Gamma : \nu \Delta$.

Ἐπειδὴ καὶ πάντα ἀνάλογια τρέπεται εἰς ἐξίσωσιν, διὰ τοῦτο ἔστω $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ · ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ μία ἐξίσωσις ἂν πολλαπλασιασθῇ, ἢ διαιρεθῇ ἑκατέρωθεν διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος, ὅθεν ἀπολλύει τὴν ἰσότητα, διὰ τοῦτο διαιρῶν ἑκάτερα τὰ μέλη (διὰ τοῦ ν , καὶ πολλαπλασιάζων δὲ διὰ τοῦ μ), ἔστω $\frac{\mu A}{\nu B} = \frac{\mu \Gamma}{\nu \Delta}$, καὶ ἐπομένως $\mu A : \nu B :: \mu \Gamma : \nu \Delta$.

Ὡσαύτως ἠθέλειν ἀποδειχθῇ ὅτι καὶ $\frac{A}{\mu} : \frac{B}{\nu} :: \frac{\Gamma}{\mu} : \frac{\Delta}{\nu}$.

Ἔστω $15 : 5 :: 12 : 4$, τότε καὶ $10 \times 15 : 2 \times 5 :: 10 \times 12 : 2 \times 4$, καὶ $\frac{15}{5} : \frac{5}{5} :: \frac{12}{5} : \frac{4}{5}$ · διότι αὕτη τρέπεται εἰς τὴν $\frac{15 \times 4}{15} = \frac{12 \times 5}{15}$.

Π ὁ ρ ι σ μ α α'.

Ὡς εἰς αὐτὴν ἀναλογίαν πολλαπλασιασθήσιν τοὺς ὅρους καταλλήλως, τὰ γινόμενα θείλουσιν εἶναι ἀνάλογα. Οὕτως ἔστω $A : B :: \Gamma : \Delta$, καὶ $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$, τότε λέγω ὅτι $\alpha A : \beta B :: \gamma \Gamma : \delta \Delta$. Καθότι αἱ δοθεῖσαι ἀναλογίαι τρέπονται εἰς ταύτας τὰς ἐξισώσεις $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, καὶ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$. Καὶ ἐπειδὴ ἂν πολλαπλασιασθῇ μία ἐξίσωσις διὰ τῆς αὐτῆς ἢ ἰσῆς ποσότητος, ὅθεν ἀλλάττει τὸ εἶναι τῆς ἰσότη-

τος, διὰ τοῦτο ἔξω $\frac{\alpha\Lambda}{\beta\Gamma} = \frac{\gamma\Delta}{\delta\Delta}$, ὅθεν $\alpha\Lambda : \beta\Gamma :: \gamma\Gamma : \delta\Delta$.

Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ πᾶν ἐπόμενον ἐπὶ τὸν λόγον εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ αὐτὸ τὸ ἡγούμενον, διὰ τοῦτο ἡ ἀναλογία $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$, ὀνομασθέντος μ τοῦ λόγου, τρέπεται εἰς ταύτην $\alpha : \mu\alpha :: \gamma : \mu\gamma$ · καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἐξίσωσις $\frac{\alpha\Lambda}{\beta\Gamma} = \frac{\gamma\Gamma}{\delta\Delta}$ τρέπεται εἰς ταύτην $\frac{\mu\Lambda}{\beta} = \frac{\mu\Gamma}{\Delta}$, εἴτε $\mu\Lambda : \beta :: \mu\Gamma : \Delta$.

Π' ὁ ρ εἰς μίαν β'.

Ἄν μᾶς ἀναλογίας διαιρήσῃ τις τοὺς ὅρους καταλλήλως διὰ τῶν ὅρων μίαν ἄλλην, τὰ πηλίκια θέλουσιν ἐπίσης εἶναι ἀνάλογα. Οὕτως ἔστω $\Lambda : \beta :: \Gamma : \delta$, καὶ $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$, τότε λέγω ὅτι $\frac{\Lambda}{\alpha} : \frac{\beta}{\beta} :: \frac{\Gamma}{\gamma} : \frac{\delta}{\delta}$. Καθότι αἱ ἐπιθέται ἀναλογίαι τρέπονται εἰς ταύτας τὰς ἐξισώσεις $\Lambda\Delta = \beta\Gamma$, καὶ $\alpha\delta = \beta\gamma$. Καὶ ἐπειδὴ ἂν μία διαίρεθῇ ἐξίσωσις διὰ τῆς αὐτῆς ἡ ἴσης ποσότητος, μένει ἐπίσης ἐξίσωσις διὰ τοῦτο ἔξω $\frac{\Lambda\Delta}{\alpha\delta} = \frac{\beta\Gamma}{\beta\gamma}$, εἴτε $\frac{\Lambda}{\alpha} \times \frac{\Delta}{\delta} = \frac{\beta}{\beta} \times \frac{\Gamma}{\gamma}$, καὶ διὰ τοῦτο $\frac{\Lambda}{\alpha} : \frac{\beta}{\beta} :: \frac{\Gamma}{\gamma} : \frac{\delta}{\delta}$, εἴτε ὀνομασθέντος μ τοῦ λόγου, $\frac{\Lambda}{\alpha} : \frac{\beta}{\mu\alpha} :: \frac{\Gamma}{\gamma} : \frac{\delta}{\mu\gamma}$, ὅθεν $\Lambda : \frac{\beta}{\mu} :: \Gamma : \frac{\delta}{\mu}$.

Π' ὁ ρ εἰς μίαν γ'.

Ἄν αἱ τετραγωνικαὶ ᾖσιν ἀνάλογον, καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν ἀνάλογα θέλουσιν εἶναι· τούτῳ αὖ $\Lambda^2 : \beta^2 :: \Gamma^2 : \delta^2$, τότε καὶ $\Lambda^2 : \beta^2 :: \Gamma^2 : \delta^2$. Καθότι ἐπειδὴ $\Lambda : \beta :: \Gamma : \delta$, διὰ τοῦτο καὶ $\Lambda^2 : \beta^2 :: \Gamma^2 : \delta^2$, ὅθεν πολλαπλασιάζων καταλλήλως τοὺς ὅρους αὐτῶν ἔξω $\Lambda^2 : \beta^2 :: \Gamma^2 : \delta^2$. Ὡσαύτως βε-

βαίει καὶ $A^3 : B^3 :: \Gamma^3 : \Delta^3$ καὶ ἐν γένει $A^a : B^a :: \Gamma^a : \Delta^a$.

Π ό ρ ι σ μ ο ς δ'.

Ὡς αὖ τὰ τετράγωνα τινῶν μεγεθῶν ἦναι ἀνάλογα, καὶ τὰ μεγέθη θείλουσιν εἶναι ἀνάλογα : τούτεστιν αὖ $A^2 : B^2 :: \Gamma^2 : \Delta^2$, τότε καὶ $A : B :: \Gamma : \Delta$. Ὡσαύτως καὶ αὖ ἢν $A^3 : B^3 :: \Gamma^3 : \Delta^3$, καὶ ἐν γένει αὖ ἢν $A^a : B^a :: \Gamma^a : \Delta^a$.

Π ό ρ ι σ μ ο ς ε'.

Ὡς αὖ τὸ ἡγούμενον μιᾶς ἀναλογίας ταυτίζεται μετὰ τὸ ἐπόμενον μιᾶς ἄλλης, τότε τὰ γινόμενα τῶν πρώτων λόγων ἐξέρχεται πρὸς ἀλλήλας ὡς ἐν ἡ γούμενον πρὸς ἐν ἐπόμενον. Οὕτως αὖ $A : B :: \alpha : \beta$, καὶ $\Gamma : \Delta :: \gamma :$
 α , τότε $A\Gamma : B\Delta :: \gamma : \beta$.. ὅπερ καὶ μέθοδον σύνθετον τῶν πρώτων ἢ τῶν πέντε ὀνομάζουσιν (ἀριθμ. 141). Καὶ αὖ $A : B :: \alpha : \beta$, καὶ $A : B :: \beta : \gamma$, τότε $A^2 : B^2 :: \alpha : \gamma$, εἴτε $A : B :: \sqrt{\alpha} : \sqrt{\gamma}$.

Π ρ ό τ ι α σ ι ς ε' καὶ ζ' καὶ εθ'.

Ἐάν ἐκ δύο ὅλων ἀφαιρεθῶσι μέρη ἀνάλογα μετὰ τὰ ἔλας τὰ καταλειπόμενα θείλουσιν εἶναι ἀνάλογα καὶ μετὰ ὅλα καὶ μετὰ ἀραιφεύετα.

Ἐςω $10A : 2A :: 10B : 2B$, τότε λέγω ὅτι καὶ $8A : 10A :: 8B : 10B$, καὶ $8A : 2A :: 8B : 2B$.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ πάντα ἀναλογία τρέπεται εἰς ἐξίσω-
σιν, διὰ τοῦτο ἔξω $2 \times 10 AB = 2 \times 10 AB$.. πολλὰς
πλασιάσω ἑκατέρωθεν διὰ τοῦ 4, καὶ ἔχω $8 \times 10 AB$
 $= 8 \times 10 AB$, καὶ ἐπομένως $8A : 10A :: 8B : 10B$.

β'. Εἰ δὲ καὶ πρῶτον μὲν διαιρέσω ἑκατέρωθεν τὴν

$2 \times 10 \cdot AB = 2 \times 10 \cdot AB$ διὰ τοῦ 5, εἴτα δι' πολλαπλασιάσω διὰ τοῦ 4, ἔξω $2 \times 8 \cdot AB = 2 \times 8 \cdot AB$, καὶ ἐπομένως $8A : 2A :: 8B : 2B$.

Ἐξω $A = 15$, καὶ $B = 12$, τότε ὄντος $10 \times 15 : 2 \times 15 :: 10 \times 12 : 2 \times 12$, θέλει εἶναι καὶ $8 \times 15 : 10 \times 15 :: 8 \times 12 : 10 \times 12$, καὶ ἐπὶ $8 \times 15 : 2 \times 15 :: 8 \times 12 : 2 \times 12$.

Π ρ ό τ α σ ι ς ζ.

Τὰ ἴσα μεγέθη ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸ αὐτὸ μέγεθος, καὶ τὸ αὐτὸ μέγεθος ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς δύο ἴσα μεγέθη.

Ἐξω $A = \alpha$, τότε λέγω ὅτι $A : B :: \alpha : B$, καὶ ὅτι $B : A :: B : \alpha$.

Ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, $A = \alpha$, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζων ἑκάτερα τὰ μέλη διὰ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ποσότητος τοῦ B , ἔξω $AB = \alpha B$, καὶ ἐπομένως $A : B :: \alpha : B$, εἴτε $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{B}$.

β'. Ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, $A = \alpha$, διὰ τοῦτο καὶ $BA = B\alpha$, ὥς $B : A :: B : \alpha$ (ὁρ. ζ'), εἴτε $\frac{B}{A} = \frac{B}{\alpha}$.

Π ρ ό τ α σ ι ς η'.

Ἐκ δύο ἀρίστων μεγεθῶν τὸ μείζον ἔχει πρὸς ἓν τρίτον μείζονα λόγον, ἢ τὸ ἐλαττον, καὶ τὸ τρίτον ἔχει μείζονα λόγον πρὸς τὸ ἐλαττον, ἢ πρὸς τὸ μείζον.

Ἐξω $A > B$, τότε λέγω ὅτι $A : B > \beta : B$, καὶ ὅτι $B : \beta > B : A$.

Καθὼς ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ A εἶναι μείζον τοῦ B , διὰ τοῦτο ἂν διαίρῃσω ἑκάτερα διὰ μιᾶς καὶ τῆς

αυτῆς ποσότητος, ὡς τῆς B , τὰ πηλίκα ἔχουσι τὴν ὁμοίαν ἀναφοράν. Ὡστε $\frac{A}{B} > \frac{\beta}{B}$, καὶ διὰ τοῦτο $A : B > \beta : B$.

β'. Ἐπειδὴ καὶ ἐξ ὑποθέσεως τὸ A εἶναι μείζον τοῦ β , διὰ τοῦτο μία καὶ ἡ αὐτὴ ποσότης: τὸ B , περιεῖξει τὸ β , μᾶλλον, ἢ τὸ A : ὅ ἐστι $\frac{B}{\beta} > \frac{B}{A}$, εἴτε $B : \beta > B : A$. Καθότι διαιρῶ ἀμφότερα τὰ μέρη τοῦ $A > \beta$ διὰ τοῦ $A\beta$, καὶ ἔχω $\frac{1}{\beta} > \frac{1}{A}$.. πολλαπλασιάζω ἀμφότερα διὰ τοῦ B , καὶ ἔχω $\frac{B}{\beta} > \frac{B}{A}$, εἴτε $B : \beta > B : A$.

Ἔστω $A = 30$, $\beta = 20$, καὶ $B = 5$, τότε $\frac{30}{5} > \frac{20}{5}$, καὶ $\frac{5}{20} > \frac{5}{30}$.. ὡσαύτως καὶ ἂν $A = 30$, $\beta = 20$, καὶ $B = 60$, τότε $\frac{30}{60} > \frac{20}{60}$ καὶ $\frac{60}{20} > \frac{60}{30}$. Καὶ τέλος, ἂν $A = 30$, $\beta = 20$, καὶ $B = 30$, τότε $\frac{30}{30} > \frac{20}{30}$, καὶ $\frac{30}{20} > \frac{30}{30}$.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς 9'.

Τὰ ἔχοντα πρὸς ἓν τρίτον τὸν αὐτὸν λόγον, εἶναι ἴσα πρὸς ἀλλήλα.. καὶ, πρὸς ἅπερ ἓν τρίτον ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, εἶναι ἴσα πρὸς ἀλλήλα.

Ἔστω $A : B :: \alpha : B$, τότε λέγω ὅτι $A = \alpha$.

Ἐπειδὴ $A : B :: \alpha : B$, ἐξ ὑποθέσεως, διὰ τοῦτο $AB = \alpha B$ (ὅρ. ζ'.) .. διαιρῶ ἐκατέρωθεν διὰ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ποσότητος: τῆς B , καὶ ἔχω $A = \alpha$.

β'. Ἔστω $B : A :: B : \alpha$, τότε λέγω ὅτι $A = \alpha$.

Ἐπειδὴ $B : A :: B : \alpha$ διὰ τοῦτο $B\alpha = BA$, καὶ ἐπομένως $\alpha = A$.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὡστε καὶ τὰ ἔχοντα πρὸς δύο ἴσα τὸν αὐτὸν λόγον,

εἶναι ἴσα πρὸς ἀλλήλα.. καὶ πρὸς ἅπερ οὗο ἴσα ἀλλή-
λοις ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, εἶναι ἴσα πρὸς ἀλλήλα.

Π ρ ό τ α σ ι ς. ι'.

Ἐκ οὗο μεγεθῶν τὸ ἔχον μείζονα λόγον πρὸς ἓν
τρίτον, εἶναι μείζον.. καὶ θάτερον οὗο μεγεθῶν, πρὸς
ὅπερ ἓν τρίτον ἔχει μείζονα λόγον, εἶναι ἔλαττον τοῦ
ἐτέρου.

Ἔσῳ $A : B > \alpha : B$, τότε λέγω ὅτι $A > \alpha$.

Καθότι ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, $A : B > \alpha : B$,
διὰ τοῦτο $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{B}$ (ἀριθμ. 22). Τώρα ἂν πολλαπλα-
σιάσω ἑκάτερα διὰ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ποσότητος: τῆς B ,
τὸ πρᾶγμα μένει ἀμετάβλητον.. ὥς ἐξω $A > \alpha$.

β'. Ἔσῳ $A > \alpha$, τότε λέγω ὅτι $A : B > \alpha : B$.

Ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, $A > \alpha$, διὰ τοῦτο διαίρων
ἑκάτερα διὰ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ποσότητος: τῆς B , τὸ
πρᾶγμα μένει ἀμετάβλητον.. ὥς ἐξω $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{B}$, εἴτε $A :$
 $B > \alpha : B$.

Π ό ρ ί σ μ α. α'.

Ὡς ἐκ οὗο μεγεθῶν τὸ ἔχον μείζονα λόγον πρὸς
θάτερον οὗο ἴσων, εἶναι μείζον.. καὶ θάτερον οὗο μεγε-
θῶν, πρὸς ὅπερ ἓν ἐκ οὗο ἴσων ἔχει μείζονα λόγον, εἶναι
ἐλαττον τοῦ ἐτέρου.

Π ό ρ ι σ μ α. β'.

Εἰς οὗο ἀνίσους λόγους, τὸ γινόμενον τὸ ἐκ τῶν
ἄκρων εἶναι ἄνισον μὲ τὸ γινόμενον τὸ ἐκ τῶν μέσων.

Καθότι ἂν $A : B > \alpha : B$, ὅηλον ὅτι καὶ $AB >$
 αB . Καθότι ἐπειδὴ $15 : 5 > 10 : 5$, διὰ τοῦτο καὶ

$15 \times 5 > 10 \times 5$.. ὡσαύτως ἐπειδὴ $5 : 10 > 5 : 15$,
διὰ τοῦτο καὶ $5 \times 15 > 5 \times 10$.

Π ὁ ρ ι σ μ α γ'.

Ἐν εἰς δύο λόγους τὸ γινόμενον τὸ ἐκ τῶν ἄκρων
ἦναι ἄνισον μὲ τὸ γινόμενον τὸ ἐκ τῶν μέσων, οἱ λόγοι
εἶναι ἄνισοι: ὁ ἐξεν ἢ μὴ ἐξίσωσις, μὴ ἀναλογία.

Π ρ ὁ τ α σ ι ς. ια'.

Οἱ λόγοι οἱ αὐτοὶ μὲ ἓνα τρίτον, εἶναι οἱ αὐτοὶ καὶ
πρὸς ἀλλήλους.

Ἐάν $A : B :: \Gamma : \Delta$, καὶ $\Gamma : \Delta :: E : Z$, τότε λέ-
γω ὅτι καὶ $A : B :: E : Z$.

Καθότι ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, $A : B :: \Gamma : \Delta$, διὰ
τοῦτο $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ (ὅρ. ζ.) .. ὡσαύτως ἐπειδὴ $\Gamma : \Delta :: E : Z$,
διὰ τοῦτο $\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{E}{Z}$.. καὶ διὰ τοῦτο $\frac{A}{B} = \frac{E}{Z}$ (αξ.
α') .. ὥςτε $A : B :: E : Z$, ὅπερ καὶ δεῖξαι λόγος τετα-
ραγμένως λέγεται (ὅρ. ιθ').

Π ὁ ρ ι σ μ α. α'.

Ὡςτε οἱ λόγοι οἱ αὐτοὶ μὲ δύο ἴσους λόγους, εἶναι
καὶ πρὸς ἀλλήλους ἴσοι.

Π ὁ ρ ι σ μ α β'.

Ἐν οἱ λόγοι οἱ ὑποδιπλασίονες ἦναι ἴσοι ἀλλήλοις,
καὶ οἱ διπλασίονες αὐτῶν ἴσοι θέλουσιν εἶναι. Ἐξω $A : B :: B : \Gamma$, καὶ $\alpha : \beta :: \beta : \gamma$, καὶ $A : B :: \alpha : \beta$,
τότε λέγω ὅτι $A : \Gamma :: \alpha : \gamma$.

Καθότι αὗται αἱ ἀναλογίαι τρέπονται εἰς ταύτας τὰς
ἐξισώσεις $\frac{A}{B} = \frac{B}{\Gamma}$, καὶ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$, καὶ $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$.. ὅθεν $\frac{A}{B}$
 $= \frac{B}{\Gamma} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$.. καὶ πολλαπλασιάζων τὰ ἴσα διὰ τῶν

ἴσων, ἔξω $\frac{A}{B} \times \frac{B}{\Gamma} = \frac{a}{\beta} \times \frac{\beta}{\gamma}$, εἴτε $\frac{A}{\Gamma} = \frac{a}{\gamma}$, καὶ διὰ
τοῦτο $A : \Gamma :: a : \gamma$, ὅπερ εἶναι λόγος διπλασίων, ἢ ὁ
τοῦ $A : B$.

Π ό ρ ι σ μ α γ'.

Ἄν οἱ λόγοι οἱ διπλασιούμεναι ᾖναι ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ
οἱ ὑποδιπλασιούμεναι θείλουσιν εἶναι ἴσοι. Ἐστω $A : B ::$
 $B : \Gamma$, καὶ $a : \beta :: \beta : \gamma$, καὶ $A : \Gamma :: a : \gamma$, τότε λέ-
γω ὅτι καὶ $A : B :: a : \beta$.

Καθότι αὗται αἱ ἀναλογίαι τρέπονται εἰς ταύτας
τὰς ἐξισώσεις $A\Gamma = B^2$, καὶ $a\gamma = \beta^2$, καὶ $A\gamma = a\Gamma$,
αἵτινες πολλαπλασιασθεῖσαι ὑπ' ἀλλήλων δίδουσι $A^2\Gamma\gamma\beta^2$
 $= a^2\Gamma\gamma B^2$, εἴτε $A\beta^2 = a^2B^2$, καὶ διὰ τοῦτο $A^2 :$
 $B^2 :: a^2 : \beta^2$, καὶ ἐπομένως $A : B :: a : \beta$. (πορ. δ'.
προ. δ'), ὅπερ εἶναι λόγος ὑποδιπλασίων, ἢ ὁ τοῦ $A^2 : B^2$.

Π ρ ό τ α σ ι ς ιγ'.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ᾖναι ἀνάλογα, καὶ τρίτος
τῶν λόγων αὐτῶν ᾖναι μείζον ἐνὸς τρίτου, θέλει εἶναι
ὡσαύτως καὶ ὁ ἕτερος.

Ἐστω $A : B :: \Gamma : \Delta$, καὶ $\Gamma : \Delta > E : Z$, τότε
λέγω ὅτι καὶ $A : B > E : Z$.

Καθότι ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, $A : B :: \Gamma : \Delta$, καὶ
 $\Gamma : \Delta > E : Z$, διὰ τοῦτο ἔξω $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, καὶ $\frac{\Gamma}{\Delta} > \frac{E}{Z}$.
ὥς ἀντικαθιστῶν εἰς τὸν τόπον τοῦ $\frac{\Gamma}{\Delta}$ τὸ ἰσοδύναμον
αὐτοῦ $\frac{A}{B}$, ἔξω $\frac{A}{B} > \frac{E}{Z}$, εἴτε $A : B > E : Z$.

Π ρ ό τ α σ ι ς ιδ'.

Ἄν ἐκ τεσσάρων μεγεθῶν ἀναλόγων τὸ πρῶτον ᾖ

γούμενον ἢναι μείζον τοῦ δευτέρου, θέλει εἶναι ὡσαύτως καὶ τὸ πρῶτον ἐπόμενον τοῦ δευτέρου.. καὶ ἂν ἴσων, ἴσων.. καὶ ἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἐστω $A : B :: \Gamma : \Delta$, τότε λέγω ὅτι ἂν $A > \Gamma$, θέλει εἶναι ἐπίσης καὶ $B > \Delta$, καὶ ἂν $A = \Gamma$, καὶ $B = \Delta$, καὶ ἂν $A < \Gamma$, καὶ $B < \Delta$.

Καθότι ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, $A : B :: \Gamma : \Delta$, διὰ τοῦτο $A\Delta = \Gamma B$ (ὁρ. ζ.).

Ἦσε ἂν $A = \Gamma$, ἐξ ἀνάγκης θέλει εἶναι καὶ $B = \Delta$.. καὶ ἂν $A > \Gamma$, θέλει εἶναι ἐπίσης καὶ $B > \Delta$.. καὶ ἂν $A < \Gamma$, θέλει εἶναι ἐπίσης καὶ $B < \Delta$, ἀλλέως ἢ ἐξίσωσις $A\Delta = \Gamma B$ οὐ δύναται νὰ ὑπάρξῃ.

Π ρ ό τ α σ ι ς ι ε'.

Ἐὰν δύο μεγέθη ἦναι ὅμοια μέρη δύο ὅλων, ἔξω-
σι πρὸς ἀλλήλα ὡς τὰ ὅλα.

Ἐστω $aB = A$, καὶ $a\Delta = \Gamma$, τότε λέγω ὅτι $B : \Delta :: A : \Gamma$.

Ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, $aB = A$, καὶ $a\Delta = \Gamma$, διὰ τοῦτο θέλει εἶναι $aB\Gamma = a\Delta A$, εἴτε $B\Gamma = \Delta A$ εἴτε $\frac{B}{\Delta} = \frac{A}{\Gamma}$, διαιρεθέντων ἑκατέρων διὰ τοῦ $\Delta\Gamma$, καὶ διὰ τοῦτο $B : \Delta :: A : \Gamma$ (ὁρ. ζ.).

Οὕτως ἐπειδὴ $5 \times 10 = 50$, καὶ $4 \times 10 = 40$, διὰ τοῦτο $5 : 4 :: 50 : 40$.

Π ρ ό τ α σ ι ς ις'.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἦναι ἀνάλογα, καὶ ἐναλλάξ ἢ καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογα θείλουσιν εἶναι.

Ἐστω $A : B :: \Gamma : \Delta$, τότε λέγω ὅτι καὶ $A : \Gamma :: B : \Delta$, καὶ $B : \Delta :: A : \Gamma$.

α'. Ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, $A : B :: \Gamma : \Delta$, διὰ τοῦτο $AD = GB$ (ὅρ. ζ'). ὅ ἐστι $\frac{A}{\Gamma} = \frac{B}{\Delta}$, διαιρεθείσης δηλονότι τῆς ἐξισώσεως διὰ τοῦ $\Gamma\Delta$, ὥςτε $A : \Gamma :: B : \Delta$.

β'. Ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, $A : B :: \Gamma : \Delta$, διὰ τοῦτο $BG = AD$, εἴτε $\frac{B}{A} = \frac{\Delta}{\Gamma}$: διαιρεθείσης δηλονότι τῆς ἐξισώσεως διὰ τοῦ AG , ὥςτε ἔξω $B : A :: \Delta : \Gamma$, ὅπερ καὶ λόγος ἀνάπαλιν λέγεται (ὅρ. ιγ'). Ἐπειδὴ $\frac{A}{\Gamma} = \frac{B}{\Delta}$ διὰ τοῦτο καὶ $\frac{B}{\Delta} = \frac{A}{\Gamma}$, εἴτε $GB = AD$, καὶ διὰ τοῦτο $B : A :: \Delta : \Gamma$, εἴτε καὶ ἐναλλάξ $A : \Gamma :: B : \Delta$, εἴτε $B : \Delta :: A : \Gamma$, καὶ ἐναλλάξ $B : A :: \Delta : \Gamma$.

Ἔστω $15 : 5 :: 12 : 4$, τότε α'. θέλει εἶναι $15 : 12 :: 5 : 4$. β'. $5 : 4 :: 15 : 12$. ὅπερ λέγεται ἀνάπαλιν λόγος (ὅρ. ιγ').

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὡςτε δύναμαι νὰ ἀνατρέψω δύο ἴσα κλάσματα. Καθότι ἂν $A : B :: \Gamma : \Delta$, καὶ ἂν τὸ ἀνάπαλιν $B : A :: \Delta : \Gamma$ ὅ ἐστιν ἂν $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, καὶ $\frac{B}{A} = \frac{\Delta}{\Gamma}$, τοῦτο τί — ἄλλο εἶναι, εἰμὴ ἀνατροπὴ ἴσων κλασμάτων;

Π ρ ό τ α σ ι ς. ις'.

Ἐὰν ὁποσαῦν μεγέθη ἦναι ἀνάλογα, διαιρεθέντα τε καὶ κατ' ἀντιστροφὴν ἀνάλογα θέλουσιν εἶναι.

Ἔστω $A : B :: \Gamma : \Delta$, τότε λέγω ὅτι καὶ $A - B : B :: \Gamma - \Delta : \Delta$, καὶ ὅτι $A : A - B :: \Gamma : \Gamma - \Delta$.

Καθότι ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, $A : B :: \Gamma : \Delta$, διὰ τοῦτο $AD = GB$. Τώρα ἀφαιρῶν ἐκατέρωθεν μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ποσότητα: τὴν BD , ἔξω $AD - BD =$

· $\Gamma B = B\Delta$, εἴτε $(A - B)\Delta = (\Gamma - \Delta)B$, καὶ ἐπομένως $A - B : B :: \Gamma - \Delta : \Delta$, ὅπερ καὶ διαίρεσις λόγου ὀνομάζεται (ὅρ. ι').

β'. Ὡς ἐπειδὴ $A\Delta = \Gamma B$, διὰ τοῦτο θέλει εἶναι ἐπίσης καὶ $-A\Delta = -\Gamma B$. Τώρα προσθέμενος ἑκατέρωθεν μίαν καὶ καὶ τὴν αὐτὴν ποσότητα: τὴν $A\Gamma$, ἔξω $A\Gamma - A\Delta = A\Gamma - \Gamma B$, εἴτε $A(\Gamma - \Delta) = (A - B)\Gamma$, καὶ ἐπομένως $A : A - B :: \Gamma : \Gamma - \Delta$, ὅπερ καὶ ἀντιστροφή λόγου ὀνομάζεται (ὅρ. ις').

Π ό ρ ι σ μ α. α'.

Ὡς ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἦναι μὴ ἀνάλογα, καὶ διακριθέντα εἶναι θέλουσιν εἶναι ἀνάλογα. Οὕτως ἐὰν $A : B > \Gamma : \Delta$, εἴτε $\frac{A}{B} > \frac{\Gamma}{\Delta}$, θέλει εἶναι ὡσαύτως καὶ $\frac{A-B}{B} > \frac{\Gamma-\Delta}{\Delta}$. Καὶ μερικῶς ἐπειδὴ $20:5 > 12:4$, εἴτε $\frac{20}{5} > \frac{12}{4}$, διὰ τοῦτο καὶ $\frac{20-5}{5} > \frac{12-4}{4}$, εἴτε $\frac{20-1}{5} > \frac{12-1}{4}$.

Π ό ρ ι σ μ α. β'.

Ἡ διαφορὰ τῶν ἡγούμενων ἔχει πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἐπομένων ὡς ἐν ἡγούμενον πρὸς ἐν ἐπόμενον. Καθότι ἔσω $A:B::\Gamma:\Delta$, τότε καὶ ἐναλλαξ $A:\Gamma::B:\Delta$, καὶ διαίρεται $A-\Gamma:\Gamma::B-\Delta:\Delta$, ὅθεν καὶ ἐναλλαξ $A-\Gamma:B-\Delta::\Gamma:\Delta$.

Π ρ ό τ. α σ ι ς. ιη'.

Ἐὰν ὅσοις μεγέθη ἦναι ἀνάλογα, καὶ συντεθέντα ἀνάλογα θέλουσιν εἶναι.

Ἐξω $A:B :: \Gamma:\Delta$, τότε λέγω ὅτι καὶ $A+B:B :: \Gamma+\Delta:\Delta$.

Καθότι ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, $A:B :: \Gamma:\Delta$, διὰ τοῦτο $\Lambda\Delta = \Gamma B$. Τώρα προσθέμενος ἐκατέρωθεν μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ποσότητα: τὴν $B\Delta$, ἔξω $\Lambda\Delta + B\Delta = \Gamma B + B\Delta$, εἴτε $(A+B)\Delta = (\Gamma+\Delta)B$, καὶ ἐπομένως $A+B:B :: \Gamma+\Delta:\Delta$, ὅπερ δηλονότι καὶ σύνθεσις λόγου ὀνομάζεται (ὅρ. ιθ').

Ἐξω $15:5 :: 12:4$, τότε καὶ $15+5:5 :: 12+4:4$, εἴτε $20:5 :: 16:4$.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ἦναι ἂν τέσσαρα μεγέθη ἦναι μὴ ἀνάλογα, καὶ συνθέντα δὲν θέλουσιν εἶναι ἀνάλογα. Οὕτως ἂν $A:B > \Gamma:\Delta$, εἴτε $\frac{A}{B} > \frac{\Gamma}{\Delta}$, θέλει εἶναι ὡσαύτως καὶ $\frac{A+B}{B} > \frac{\Gamma+\Delta}{\Delta}$, ὥστε $\frac{A+B}{B} = \frac{\Gamma+\Delta}{\Delta} + 1$, καὶ $\frac{\Gamma+\Delta}{\Delta} = \frac{\Gamma}{\Delta} + 1$: ὁ ἕξιν εἰς ἅνισα πρόσθεσις μονάδος.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς. κ' καὶ κα'.

Ἐὰν ὁποσαῦν μεγέθη ἦναι ἀνάλογα τεταγμένως, καὶ διῆτον τεταγμένως ἀνάλογα θέλουσιν εἶναι.

Ἐξω $A:B :: \Gamma:\Delta$, καὶ $B:E :: \Delta:Z$, τότε λέγω ὅτι καὶ $A:E :: \Gamma:Z$. Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως, $A:B :: \Gamma:\Delta$, καὶ $B:E :: \Delta:Z$, διὰ τοῦτο καὶ ἐναλλαξ $A:\Gamma :: B:\Delta$, καὶ $B:\Delta :: E:Z$ (πρ. ις'). Ὡς $A:\Gamma :: E:Z$ (πρ. ια'), καὶ ἐναλλαξ $A:E :: \Gamma:\Delta$, ὅπερ καὶ διῆτον τεταγμένως ὀνομάζεται (ὅρ. ιθ').

Ἐξω $15:5 :: 12:4$, καὶ $5:20 :: 4:16$, τότε

τε: 15:20 :: 12:16.. ὁ ἔστιν ἂν $\frac{15}{5} = \frac{12}{4}$, καὶ $\frac{5}{20} = \frac{4}{16}$ εἰ τότε καὶ $\frac{15}{20} = \frac{12}{16}$. Καθότι πολλαπλασιάζων τὰ ἴσα διὰ τῶν ἴσων, ἔξω $\frac{15}{5} \times \frac{5}{20} = \frac{12}{4} \times \frac{4}{16}$: ὁ ἔστι $\frac{15}{20} = \frac{12}{16}$.

Π ρ ό τ α σ ι ς. κβ'. καὶ κγ'.

Ἐὰν ὁποσαῶν μεγέθη ἦναι ἀνάλογα τεταραγμένως καὶ αὐτοῦ τεταραγμένως ἀνάλογα θέλονται εἶναι.

Ἐστω $A : B :: \Gamma : \Delta$, καὶ $B : E :: Z : \Gamma$ εἰ τότε λέγω ὅτι $A : E :: Z : \Delta$.

Καθότι ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, $A : B :: \Gamma : \Delta$, καὶ $B : E :: Z : \Gamma$, διὰ τοῦτο $AB = \Gamma B$, καὶ $\Gamma B = EZ$ (ὅρ. ζ.). ὥστε $AB = EZ$ (ὅρ. α'), ὥστε $A : E :: Z : \Delta$, ὅπερ καὶ αὐτοῦ τεταραγμένως ἀναμένεται (ὅρ. ιθ.).

Ἐστω $15 : 5 :: 12 : 4$, καὶ $5 : 30 :: 2 : 12$ εἰ τότε καὶ $15 : 30 :: 2 : 4$, τοῦτέστιν ἂν $15 \times 4 = 12 \times 5$, καὶ $12 \times 5 = 30 \times 2$ εἰ τότε καὶ $15 \times 4 = 30 \times 2$ ὥστε $15 : 30 :: 2 : 4$.

Π ρ ό τ α σ ι ς. κδ'.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἦναι ἀνάλογα, τὸ μέγιστον μετὰ τοῦ ἐλαχίστου ἔστι μείζον τῶν λοιπῶν.

Ἐστω $A : B :: \Gamma : \Delta$, ἐνθα ἔστω A μείζον τοῦ B καὶ Γ , καὶ διὰ τοῦτο $B > \Delta$. ἢ ὅντος $\Delta < B$, ἔστω $A = 12 B$ εἰ τότε ἔσται $12B : B :: 12\Delta : \Delta$, καὶ λέγω ὅτι $12B + \Delta > 12\Delta + B$.

Καθότι ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, $B > \Delta$, ἔσται καὶ $11B > 11\Delta$ καὶ ἐντεῦθεν καὶ $12B > 11\Delta + B$, καὶ διὰ τοῦτο $12B + \Delta > 12\Delta + B$, εἴτε ἀντικαθίστων τὰ ἴσα ἔξω $A + \Delta > B + \Gamma$.

ΒΙΒΛΙΟΝ. ΣΤ'. (α).

Ὅ ρ ο ι.

α'. Ομοια σχήματα εὐθύγραμμα λέγονται, ὅσα ἔχουσιν ἴσας τὰς γωνίας: ἐκάστην ἐκάσῃ, καὶ περὶ τὰς ἴσας γωνίας ἀναλόγους τὰς πλευράς.

β'. Ἀντιπεπονητά σχήματα λέγονται, ὅσα ἔχουσιν ἴσας τὰς γωνίας: ἐκάστην ἐκάσῃ, καὶ περὶ τὰς ἴσας γωνίας ἀντιπεπονητόως τὰς πλευράς.

γ'. Εὐθεία λέγεται ὅτι τέμνεται κατὰ τὸν μέσον καὶ ἄκρον λόγον, ὅταν ἡ ὅλη ἔχη πρὸς τὸ μείζον τμήμα, ὡς τὸ μείζον τμήμα πρὸς τὸ ἔλλασσον.

δ'. Λόγος συγκείμενος λέγεται τὸ γινόμενον τῶν ἀπλῶν λόγων. ὁ ἐστὶν ἀντὶ τὰ θεωρητὶς τὴν ἀναφορὰν οὗο ὅλων, τὰ θεωρῇ τῶν ἐξ ὧν σύγκειται μερῶν. Οὕτως ὁ λόγος τοῦ αΑ πρὸς τὸ βΒ εἶναι λόγος συγκείμενος ἐκ τῶν λόγων α: β, καὶ Α: Β, ἢ α: Β καὶ Α: β, καὶ ὁ λόγος τοῦ 30×2 πρὸς 5×4 σύγκειται ἐκ τοῦ 30: 5, καὶ 2: 4, ἢ ἐκ τοῦ 2: 5, καὶ 30: 4: τουτέστι $\frac{30 \times 2}{5 \times 4} = \frac{30}{5} \times \frac{2}{4}$ ἢ $= \frac{30}{4} \times \frac{2}{5}$: ὁ ἐστὶ πᾶν γινόμενον ἔχει

(α) Ὁ Εὐκλείδης εἰς τὸ πέμπτον βιβλίον ἔταξε τὴν θεωρίαν τῆς ἀναλογίας, καὶ εἰς τοῦτο κάμει τὴν ἐφαρμογὴν αὐτῆς εἰς τὸ ἐπίπλευτα τῶν σχημάτων, εἰς τὴν ἀναφορὰν τῶν πλευρῶν αὐτῶν, εἰς τὰ ὁμοία τῶν σχημάτων, εἰς κτλ.

πρὸς πᾶν γινόμενον, ὡς τὸ γινόμενον τῶν λόγων τῶν παραγόντων.

εἰ. Ὅμοια τέτρα λέγονται, ὅσα ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὰς ἰδίας περιφερείας.

Π ρ ὀ τ α σ ι ς. α'.

Τά τε τρίγωνα καὶ παραλληλόγραμμα τὰ ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος, εἶναι ἀνάλογα μὲ τὰς βάσεις αὐτῶν.

α'. Τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ, αβγδ ἄς ἔχωσι τὸ αὐτὸ ὕψος (ὁρ. β'. βιβ'. β'): τουτέστιν ἔστω $BE = \beta\epsilon$, τότε λέγω ὅτι παραλ. ΑΒΓΔ : παραλ. αβγδ :: ΑΒ : αβ. σχ. 135.

Ἐπὶ τῶν αὐτῶν βάσεων ΑΒ, αβ συνίστημι παραλληλόγραμμα ὀρθογώνια τὰ ΑΒΕΖ, αβεζ, ἐξ ὧν τὸ μὲν ὀρθογ. ΑΒΕΖ = παραλ. ΑΒΓΔ, τὸ δ' ὀρθογ. αβεζ = παραλ. αβγδ (πρ. λς'. βιβλ. α'). ἀλλὰ τὸ μὲν ὀρθογ. ΑΒΕΖ = $AB \times BE$, τὸ δ' ὀρθογ. αβεζ = $\alpha\beta \times \beta\epsilon$ (ὁρ. α'. βιβλ. β'). ὥστε τὸ μὲν παραλ. ΑΒΓΔ = $AZ \times BE$, τὸ δὲ παραλ. αβγδ = $\alpha\beta \times \beta\epsilon$, καὶ διὰ τοῦτο $\frac{\text{παραλ. ΑΒΓΔ}}{\text{παραλ. αβγδ}} = \frac{AB \times BE}{\alpha\beta \times \beta\epsilon} = \frac{AB}{\alpha\beta}$. ὡς ὄντος, ἐξ ὑποθέσεως, $BE = \beta\epsilon$, ὥστε παραλ. ΑΒΓΔ : παραλ. αβγδ :: ΑΒ : αβ (ὁρ. ζ'. βιβλ. ε').

β'. Ἐπειδὴ λοιπὸν παραλ. ΑΒΓΔ : παραλ. αβγδ :: ΑΒ : αβ, διὰ τοῦτο καὶ παραλ. $\frac{ΑΒΓΔ}{2}$: παραλ. $\frac{αβγδ}{2}$:: ΑΒ : αβ. (πρ. γ'. βιβλ. ε'). ἀλλὰ τὸ μὲν παραλ. $\frac{ΑΒΓΔ}{2}$ = τριγ. ΑΒΓ, τὸ δὲ παραλ. $\frac{αβγδ}{2}$ = τριγ. αβγ. (πρ. μα'. βιβλ. α'), ὥστε τριγ. ΑΒΓ : τριγ. αβγ :: ΑΒ : αβ.

Π ό ρ ι σ μ α. α'.

Τὰ τρίγωνα καὶ παραλληλόγραμμα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν εἶναι ἀνάλογα μὲ τὰ ὕψη αὐτῶν.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ εἶναι ἀδιάφορον ὅποιον θῆλει νὰ λάβῃ τις διὰ ὕψους, διὰ τοῦτο ἐκληφθέντων τῶν BE, βε διὰ βάσεων, ἔξω τὰ ὕψη AB, αβ ἀνάλογα καὶ μὲ τὰ τρίγωνα καὶ μὲ τὰ παραλληλόγραμμα.

Π ό ρ ι σ μ α. β'.

Τὰ τρίγωνα καὶ παραλληλόγραμμα, τὰ ὅντα ἀνάλογα μὲ τὰς βάσεις ἔχουσιν ἴσα τὰ ὕψη.

Π ό ρ ι σ μ α. γ'.

Τὸ ἑμβαδὸν παντὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους, ἢ ἴσον μὲ τὸ ὕψος ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτοῦ βάσιν. Καθότι ἂν τὸ τριγ. ABΓ = παραλ. $\frac{AB\Gamma\Delta}{2}$, καὶ ἂν παραλ. $\frac{AB\Gamma\Delta}{2} = \frac{AB \times BE}{2}$, ὅθεν ὅτι τριγ. ABΓ = $\frac{AB \times BE}{2} = AB \times \frac{BE}{2}$ ἢ = $\frac{AB}{2} \times BE$.

Π ό ρ ι σ μ α. δ'.

Εἰς πᾶν τρίγωνον ἡ μείζων πλευρὰ ἔχει πρὸς τὸ κεφάλαιον τῶν λοιπῶν δύο, καθὼς ἡ διαφορὰ αὐτῶν πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τμημάτων τῆς μείζονος πλευρᾶς τμηθείσης ὑπὸ τῆς καθέτου τῆς ἀπὸ τῆς μείζονος γωνίας. Οὕτως εἰς τὸ τρίγωνον αβγ ἀχθείσης τῆς καθέτου αδ, ἔξω βγ: αβ + αγ: αβ — αγ: βδ — δγ. σχ. 136.

Καθότι κέντρον μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αβ γράψω κύκλον τὸν βηε, καὶ ἔχω, ἐπεκτείνων τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου μέχρι τῆς περιφερείας, βγ × γη = εγ × γζ (πρ. λε'. βε. γ'). Ἄλλ' ἡ εγ = αβ + αγ, ἢ

δι' $\gamma\zeta = \alpha\beta - \alpha\gamma$, ή δι' $\gamma\eta = \beta\delta - \delta\gamma$. ὥςτε $\beta\gamma$ ($\beta\delta - \delta\gamma$) = ($\alpha\beta + \alpha\gamma$) ($\alpha\beta - \alpha\gamma$), εἴτε $\beta\gamma : \alpha\beta + \alpha\gamma :: \alpha\beta - \alpha\gamma : \beta\delta - \delta\gamma$.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς. β'.

Ἐάν εἰς τρίγωνον ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος μετὴν βάσιν τοῦ τριγώνου, ταμεῖ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ἀναλόγως, καὶ ἂν εὐθεῖα τις τέμνῃ ἀναλόγως τὰς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου, αὕτη θελεῖ εἶναι παράλληλος μετὴν βάσιν τοῦ τριγώνου.

Εἰς τὸ τρίγ. $AB\Gamma$ ἄγω τὴν ΔE παράλληλον μετὴν βάσιν $B\Gamma$, καὶ λέγω ὅτι $AD : DB :: AE :: EG$. σخ. 137.

Ἄγω τὰς διαγωνίους BE , $\Gamma\Delta$, καὶ ἔχω τρίγ. $B\Delta E =$ τρίγ. $\Gamma E\Delta$ (πρ. λη'. βιβ. α'), ὡς οὕτων ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων, ἀλλὰ τὸ μὲν τρίγ. $B\Delta E$ ἔχει τὸ αὐτὸ ὕψος μετὸ τρίγ. $A\Delta E$, ὡς εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον E περατουμένων ἀμφοτέρων, ὥςτε τρίγ. $A\Delta E : \text{τρίγ. } B\Delta E :: AD : DB$ (πρ. κ'). Τὸ δὲ τρίγ. $\Gamma E\Delta$ ἔχει τὸ αὐτὸ ὕψος μετὸ τρίγ. $A\Delta E$, ὡς εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Δ περατουμένων ἀμφοτέρων, ὥςτε τρίγ. $A\Delta E : \text{τρίγ. } B\Delta E (= \text{τρίγ. } \Gamma E\Delta) :: AE : EG$. Ὡς διὰ τὴν ταυτότητα τῶν λόγων $AD : DB :: AE : EG$ (πρ. ια'. βιβ. ε').

β'. Ἐς $AD : DB :: AE : EG$, τότε λέγω ὅτι ἡ ΔE εἶναι παράλληλος μετὴν $B\Gamma$. Καθότι ἐπειδὴ καὶ τὰ τρίγωνα $A\Delta E$, $B\Delta E$ εἶναι ἰσοῦψή, διὰ τοῦτο τρίγ. $A\Delta E : \text{τρίγ. } B\Delta E :: AD : DE$ (πρ. α'). ἔτι ἐπειδὴ καὶ τὰ τρίγωνα $A\Delta E$, $\Gamma E\Delta$ εἶναι ἰσοῦψή, διὰ τοῦτο τρίγ.

$ΑΔΕ:τριγ. ΓΕΔ::ΑΕ:ΕΓ..$ ἀλλ ἐξ ὑποθέσεως $ΑΔ:ΔΒ::ΑΕ:ΕΓ..$ ὥς διὰ τὴν ταυτότητα τῶν λόγων $τριγ. ΑΔΕ:τριγ. ΒΔΕ::τριγ. ΑΔΕ:τριγ. ΓΕΔ$ (πρ. α'. πρ. ια'. βιβ. ε').) ϵ καὶ διὰ τοῦτο $τριγ. ΒΔΕ = τριγ. ΓΕΔ$ (πρ. ζ' βιβ. ε').) ὥς ἡ $ΔΕ$ εἶναι παράλληλος μετὰ τὴν $ΒΓ$ (πρ. λθ' βιβ. α').

Π ῥ ι σ μ α α'.

Ὡς ἂν ἀπὸ τινος σημείου ἐκτὸς παραλλήλων ἄξω τυχούσας εὐθείας ἐπὶ τῶν παραλλήλων, αἱ ἀχθησόμεναι εὐθεῖαι τμηθήσονται ὑπὸ τῶν παραλλήλων εἰς τμήματα ἀνάλογα. Οὕτως ἂν ἀπὸ τοῦ σημείου $Α$ ἄξω τὰς $ΑΒ, ΑΓ$, ἔσαι $ΑΔ:ΔΒ::ΑΕ:ΕΓ$.

Π ῥ ι σ μ α β'.

Ὡς αἱ διαμέτροι τῶν κύκλων εἶναι ἀνάλογοι μετὰ τὰς χορδὰς τὰς ὑποτείνουσας ὅμοια τύξα: ὅ ἐστιν οἱ κύκλοι εἶναι ὅμοια σχήματα. Καθότι ἔσωσαν συνεφαπτόμενοι οἱ κύκλοι $ΑΓΔ$, αἰσθ (σχ. 138), Ἀπὸ τοῦ $Α$ σημείου ἄγω διάμετρον τοῦ μείζονος κύκλου τὴν $ΑΒ$, ἣτις θέλει εἶναι καὶ τοῦ μικροῦ (πρ. ια'. βιβ. γ').) ἄγω τὴν χορδὴν $ΑγΓ$, καὶ ἔχω $ΑΒ:Αβ::ΑΓ:Αγ$ (πρ. α'). Καθότι ἂν ἄξω τὰς χορδὰς $ΒΓ, βγ$, ἢ γων. $ΑΓΒ = γων. Αγβ = 90^\circ$ (πρ. λα'. βιβ. γ'): τουτέστιν ἡ $ΒΓ, βγ$ παράλληλοι, καὶ διὰ τοῦτο $βΒ:Αβ::γΓ:Αγ$, καὶ ἐν συνθέσει $ΑΒ:Αβ::ΑΓ:Αγ$. Ὡσαύτως ἤθελεν ἀποδειχθῆναι ὅτι καὶ $ΑΒ:Αβ::ΑΔ:αδ$. Καὶ διὰ τοῦτο καὶ $ΑΓ:Αγ::ΑΔ:αδ$.

Π ρ ὀ τ α σ ι ς γ'.

Ἐὰν εὐθεῖα τέμνη δίχα μίαν γωνίαν ἐνὲς τριγώνου

ἐπεκταθεῖσα ταμεῖ τὴν βάσιν εἰς τμήματα ἀνάλογα μετὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου.. καὶ ἂν τὰ τῆς βάσεως τμήματα ἐνὸς τριγώνου ἦναι ἀνάλογα μετὰς πλευρὰς αὐτοῦ, ἢ ἀπὸ τῆς τομῆς εἰς τὴν ὑποτείνουμένην γωνίαν ἀχθεῖσα εὐθεῖα ταμεῖ διχα αὐτήν.

α'. Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΑΓ ἔσω ἡ γων. ΔΑΒ = γων. ΔΑΓ, τότε λέγω ὅτι $\Delta\Gamma : \Delta B :: \Lambda\Gamma : \Lambda B$. σχ. 139.

Ἄγω τὴν ΓΕ παράλληλον μετὰ τὴν ΔΑ.. ἐπεκτείνω τὴν ΒΑ ἕως οὗ νὰ συμπέσῃ μετὰ τὴν ΓΕ.. καὶ οὕτως εἰς τὸ τρίγωνον ΕΒΓ οὗσης τῆς ΔΔ παράλληλου μετὰ τὴν ΕΓ, ἔξω $\Gamma\Delta : \text{Ε}\Delta :: \Lambda B : \Delta B$ (πρ. β'). Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ἡ ΔΔ ἥκται παράλληλος μετὰ τὴν ΕΓ, διὰ τοῦτο ἡ γων. ΑΕΓ = γων. ΔΑΒ (πρ. κθ'. βιβ. α') = γων. ΔΑΓ, ὡς οὗσης, ἐξ ὑποθέσεως, γων. ΔΑΓ = γων. ΔΑΒ.. ἀλλ' ἡ γων. ΔΑΓ = γων. ΑΓΕ, ὡς οὖσαι ἐναλλάξ, διὰ τοῦτο καὶ γων. ΑΓΕ = γων. ΑΕΓ (α' α'). ὅθεν ΑΓ = ΑΕ (πρ. ε'. βιβ. α').. ὥς ἡ ἀναλογία $\Gamma\Delta : \Delta B :: \text{Ε}\Delta : \Lambda B$ τρέπεται εἰς τὴν $\Delta\Gamma : \Delta B :: \Gamma\Lambda : \Lambda B$, ὅπερ ἐζητεῖτο.

β'. Ἐσω $\Delta\Gamma : \Delta B :: \Gamma\Lambda : \Lambda B$, τότε λέγω ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΑ διχοτομεῖ τὴν γων. ΒΑΓ.

Ἐπεκτείνω τὴν πλευρὰν ΒΑ, ἕως οὗ ἡ ΑΕ = ΑΓ, καὶ ἄγω τὴν ΓΕ.. καὶ ἔχω γων. ΑΕΓ = γων. ΑΓΕ (πρ. ε'. βιβ. α').. ἀλλ' ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, $\Gamma\Delta : \Delta B :: \Gamma\Lambda : \Lambda B$, καὶ ἡ ΓΑ = ΕΑ, διὰ τοῦτο $\Gamma\Delta : \Delta B :: \text{Ε}\Delta : \Lambda B$.. ὥς ἡ ΔΔ εἶναι παράλληλος μετὰ τὴν ΕΓ (πρ. β').. ὅθεν ἡ μὲν γων. ΔΑΒ = γων. ΑΕΓ, ἡ δὲ γων. ΔΑΓ = γων. ΑΓΕ (πρ. κθ'. βιβ.

α'). .. ὥστε ἡ γων. $\Delta AB =$ γων. $\Delta A\Gamma$ (ἀξ. α'),
ὅπερ ἐζητεῖτο.

Π ό ρ ι σ μ α α'.

Ὡς αὖ τὰ τμήματα τῆς βάσεως ἦναι ἴσα ἀλλή-
λοις, τὸ δοθέν τρίγωνον θέλει εἶναι ἰσοσκελὲς (πρό. πρ.
9'. βιβ. α').

Π ό ρ ι σ μ α β'.

Ὡς εὐκόλως ἤθελε διχοτομήσοις μίαν γωνίαν
ἐνὸς τριγώνου. Καθότι αὖ τις ἐπεκτείνει τὴν μίαν τῶν συν-
εχουσῶν πλευρῶν τὴν εἰρημένην γωνίαν τοσοῦτον, ὅση
εἶναι ἡ ἐτέρα .. καὶ συζεύξῃ τὸ πέρας αὐτῆς μὲ τὸ πέρας
τῆς βάσεως .. καὶ ἀξῇ ἀπὸ τῆς εἰρημένης γωνίας πα-
ράλληλον μὲ τὴν βάσιν τοῦ γεννηθέντος τριγώνου, αὕτη
ἡ παράλληλος ταμεῖ διχα τὴν γωνίαν.

Οὕτω γενομένης τῆς $AE = A\Gamma$, καὶ ἀχθείσης
τῆς EF , αὖ ἄχθῃ ἡ AD παράλληλος μὲ τὴν EF , ἡ
γων. BAD διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς AD .

Π ρ ό τ α σ ι ς δ'.

Τῶν ἰσογώνιων τριγώνων αἱ μὲν περὶ τὰς ἴσας γω-
νίας πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι, ὁμολογοὶ δὲ αἱ ὑποτείνουσαι
τὰς ἴσας γωνίας: ὅ ἐστι τὰ ἰσογώνια τρίγωνα εἶναι ὅμοια.

Ἐς ὧσαν τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$, αὖτε ἰσογώνια: ταυτίσιν
ἡ μὲν γων. $A =$ γων. α , ἡ δὲ γων. $B =$ γων. β ,
καὶ ἡ γων. $\Gamma =$ γων. ϵ , τότε λέγω ὅτι $AB:ad :: A\Gamma:$
 ae , καὶ ἐπομένως $AB:A\Gamma :: ad:ae$. σχ. 137.

Ἐφαρμόζω τὸ σημεῖον a ἐπὶ τὸ σημεῖον A , καὶ
οὕτως ἐφαρμοσθήσεται ἡ μὲν ad πλευρὰ ἐπὶ τὴν AB , ἡ
δὲ ae ἐπὶ τὴν $A\Gamma$, καὶ ἐπομένως ἡ δ εἰς θέλει εἶναι πα-

παλλήλος με τὴν BE καὶ με τὴν ΔE, ἣ δὲλα συμπίπτει με αὐτὴν (πρ. κη'. βιβ. α'). καὶ αὖ συμπίπτει.. ὥστε ἡ ΔB : AA :: EF : ΔE (πρ. β'). καὶ ἐν συνθέσει ΔB : AA :: AT : AE :: ὅς ἐστι ΔB : αδ :: AT : αε.

Ἐκατέρως ἡθελεν ἀποδείχθῃ καὶ AB : αδ :: BT : δε, καὶ AT : αε :: TB : εδ.

β'. Δλ' αὖ AB : αδ :: AT : αε, τότε καὶ ἐκ αλλὰς ἀνάλογα δεικνύτω εἶναι : τούτις AB : AT :: αδ : αε, ὅτερον εἶναι ὅτι αἱ πλευραὶ αἱ ὑποκείμεναι τὰς ἰσὰς γωνίας εἶναι ὁμόλογα.

II ὁ ρ : σ μ α β'.

Ὡς αὖ δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς τρεῖς πλευρὰς παρὰλλήλους ταῦτα τὰ τρίγωνα δεικνύτω εἶναι ὅμοια.. καὶ τὸ ἀνταλὺν αὐ ἦναι ὅμοια, ἔχουσι καὶ τὰς πλευρὰς παρὰλλήλους.

II ὁ ρ : σ μ α β'.

Ἐὰν τινος τριγώνου αἱ τρεῖς πλευραὶ ἦναι πρὸς ὁμοίαν με τὰς τρεῖς πλευρὰς ἑνὸς ἀλλου τριγώνου, ταῦτα τὰ τρίγωνα δεικνύτω εἶναι ὅμοια. Ἰαθόντι αὖ πάλιν τριγώνῳ τῷ ἐν τριγώνῳ 90° αἱ πλευραὶ αὐτοῦ δεικνύτω εἶναι παρὰλλήλας με τὰς πλευρὰς τοῦ ἀλλου τριγώνου, καὶ διὰ τοῦτο ὅμοια τὰ τρίγωνα (πρ. α').

II ὁ ρ : σ μ α γ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρας ταῦτα τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια (πρ. γ'. πρ. λβ'. βιβ. α').

II ὁ ρ : σ μ α δ'.

Ἐὰν δύο ἰσογώνων τριγώνων τμηθῇ μία ἴση γωνία

ὅπως ἔτυχεν, ἡ διατείνουσα εὐθεία ἐπεκταθεῖσα ταμεί-
 τας βάσεις τῶν τριγώνων εἰς τμήματα ἀνάλογα.. διότι
 γεννῶνται τρίγωνα ὅμοια. Ἐξωσαν ἰσογώνια τὰ τρίγωνα
 $\Delta B\Gamma$, $\Delta D E$ (σχ. 140).. καὶ ὥς ἀχθῇ ἀπὸ τῆς κοινῆς
 A γωνίας τυχούσα εὐθεία· ἡ AZ , τότε λέγω· οἱ BZ ·
 $Z\Gamma$ · ΔH · $H E$. Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἡ ΔE εἶναι παράλ-
 ληλὸς μετὰ τὴν $B\Gamma$, διὰ τοῦτο τὰ τρίγωνα $AZ\Gamma$, $\Delta H E$
 εἶναι ὅμοια, ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ ΔBZ , $\Delta D H$ (πορ. α').
 ὥς· ΔZ · ΔH · $Z\Gamma$, $H E$, καὶ ΔZ · ΔH · BZ · ΔH ,
 καὶ διὰ τὴν ταυτότητα τῶν λόγων $Z\Gamma$ · $H E$ · BZ · ΔH ,
 καὶ ἐναλλάξ $Z\Gamma$ · BZ · $H E$ · ΔH , ὅπερ ἐζητεῖτο.

Π. ὁ ρ. ι. σ. μ. α. ε'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἰσοσκελῆ ἔχωσιν ἢ τὴν ὑπὸ τῶν
 ἴσων σκελῶν περιεχομένην γωνίαν, ἢ μίαν τῶν περὶ τῇ
 βάσει ἴσην, ταῦτα τὰ τρίγωνα φέλουσιν εἶναι ὅμοια (πρόρ.
 γ'. προ. λβ'. βιβλ. α').

Π. ὁ ρ. ι. σ. μ. α. ς'.

Αἱ χορδαί, εἰς δύο κύκλους, αἱ ὑποτείνουσαι ὅμοια
 τόξα (ὁρ. ε') εἶναι ἀνάλογοι. Καθότι εἰς τοὺς κύκλους
 $A\Gamma B$, $A\gamma b$ (σχ. 138.) ἄγω τὰς χορδὰς $A E$, $A e$,
 ΓE , γe ὑποτείνουσας ὅμοια τόξα, εἴτε ἴσας γωνίας.. ὥς·
 ΔE · $A e$ · $E\Gamma$ · $e\gamma$, καὶ ἐναλλάξ ΔE · $E\Gamma$ ·
 $A e$ · $e\gamma$.

Π. ὁ ρ. ι. σ. μ. α. ζ'.

Ὡς ἐυκόλως ἤθελεν αἶσαι τις, δύο εὐθείας παράλ-
 λήλους. Καθότι ἂν τις γράψῃ δύο κύκλους συνεφαπτεμέ-
 νους, ὡς τὸν $A\Gamma B$, $A\gamma b$, καὶ ἄξῃ δύο τυχούσας κτι-

νὰς χορδὰς τὰς ΑΓ, ΑΕ, αὶ ἀχθόμεναι χορδαὶ: ΓΕ, γ ε ὁνομασι εἶναι παραλλήλα.

Π ὁ ρ ι σ μ α. η'.

"Αν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ ἀλλήλων παρατοῦνται εἰς δύο παραλλήλους εἰς τμήματα ἀναλόγως. Ἐσώσαν παραλλήλοι αὶ ΑΒ, ΓΔ (σχ. 141) εἰ τότε λέγω εἴ: ΕΚ: ΘΚ: ΚΖ: ΚΗ. Καθότι ἐντεῦθεν καὶ τὰ τρίγωνα ΕΚΘ, ΗΚΖ ἔχουσι καὶ τὰς τρεῖς γωνίας ἰσας, καὶ ὁ κατὰ κορυφὴν καὶ καθὸ ἐναλλαξὶ διὰ τοῦτο ΕΚ: ΘΚ:: ΖΚ: ΗΚ: ὁ ἐξυ εἴτε ἐκτὸς τῶν παραλλήλων (πρ. α'. πρ. β'), εἴτε ἐκτὸς ἡγῆθ' σημείων, καὶ ἀχθόμεναι εὐθεῖαι ἔσονται ἀνάλογαι.

Π ρ ο τ α σ ε ε'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσιν ἀνλόγους τὰς τρεῖς πλευρὰς: τὰ αὐτὰ τὰ τρίγωνα θήσονται εἶναι ἰσογώνια, ἔχοντα ἰσὰς τὰς γωνίας, ὥς περ ὑποτίθεται αὶ ὁμολογοὶ πλεωραῖ. Ἐχέτωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ ἀνλόγους τὰς πλευρὰς: τουτέστιν ἔστω ΑΒ: ΒΓ:: αβ: βγ, καὶ ΓΒ: ΓΑ:: γβ: γα, καὶ ΑΒ: ΑΓ:: αβ: αγ εἰ τότε λέγω ὅτε ἡ γων. Α = γων. α, καὶ ἡ γων. Β = γων. αβγ, καὶ ἡ γων. Γ = γων. βγα. σχ. 142.

Πρὸς τῇ βγ εὐθείᾳ καὶ πρὸς ταῖς σημείας β καὶ γ εὐκείῃ τὴν μὲν γων. γβδ = γων. Β, τὴν δὲ γων. βγδ = γων. Γ, καὶ ἐπομένως ἔσται καὶ ἡ πλεον γων. δ = γων. Α: ὁ ἐστὶ τὰ τρίγωνα δβγ, ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνια εἰ καὶ διὰ τοῦτο ΑΒ: ΒΓ:: δβ: βγ (πρ. δ'). ἀλλ', εἰ ἐκ τούτων ΑΒ: ΒΓ:: αβ: βγ, ὁ δὲ διὰ τὴν ταυτέτητα τῶν λόγων καὶ αβ: βγ:: δβ: βγ, καὶ διὰ τοῦτο δβ =

αβ (πρ. θ'. βιβ. ε'). ὡσαύτως ἤθελεν ἀποδειχθῆ καὶ ἡ $\delta\gamma = \alpha\gamma$.. ὥσε το τρίγ. $\delta\beta\gamma = \text{τρίγ. } \alpha\beta\gamma$ (πρ. η'. βιβ. α')., ἀλλὰ τὸ τρίγωνον $\delta\beta\gamma$ κατεσκευάσαι ἰσογώνιον μετὰ τὸ τρίγωνον $\alpha\beta\gamma$, διὰ τοῦτο καὶ τὸ τρίγωνον $\alpha\beta\gamma$ εἶναι ἰσογώνιον καὶ μετὰ τὸ τρίγωνον $\alpha\beta\gamma$: ὅ ἐστιν ἡ μὲν γων. $A = \text{γων. } \alpha$, ἡ δὲ γων. $B = \text{γων. } \alpha\beta\gamma$, ἡ δὲ γων. $\Gamma = \text{γων. } \beta\gamma\alpha$, αἵτινες δηλονότι ὑποτείνονται ὑπὸ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, ὡς προστέθη.

Π ρ ό τ α σ ι ς ε'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην, καὶ τὰς πλευρὰς τὰς περὶ τὴν ἴσην γωνίαν ἀναλόγους, ταῦτα τὰ τρίγωνα ἔσονται ἰσογώνια, καὶ ἔξουσιν ἴσας τὰς γωνίας, ὥς περ ὑποτείνουσιν αἱ ὁμολογοὶ πλευραί.

Εἰς τὰ τρίγωνα $\alpha\epsilon\gamma$, $\alpha\epsilon\zeta$ οὗσης κοινῆς τῆς γωνίας A , ἔσω καὶ $\alpha\Gamma : \alpha\epsilon :: \alpha\gamma : \alpha\epsilon$, τότε λέγω ὅτι ταῦτα τὰ τρίγωνα εἶναι ἰσογώνια. σχ. 138.

Ἄν ἡ γων. $\alpha\gamma\epsilon = \text{γων. } \alpha\Gamma\epsilon$, τὰ τρίγωνα $\alpha\epsilon\gamma$, $\alpha\epsilon\Gamma$ θέλονσιν εἶναι ἰσογώνια (πρ. γ'. πρ. λβ'. βιβ. α'), εἰδὲ καὶ θέν εἶναι, ἔσω μία ἄλλη, ὡς ἡ γων. $\alpha\zeta\epsilon = \text{γων. } \alpha\Gamma\epsilon$, καὶ τότε ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα $\alpha\zeta\epsilon$, $\alpha\Gamma\epsilon$ εἶναι ἰσογώνια, διὰ τοῦτο $\alpha\Gamma : \alpha\epsilon :: \alpha\zeta : \alpha\epsilon$ (πρ. δ')., ἀλλ', ἐξ ὑποθέσεως, καὶ $\alpha\Gamma : \alpha\epsilon :: \alpha\gamma : \alpha\epsilon$, ὅθεν $\alpha\zeta : \alpha\epsilon :: \alpha\gamma : \alpha\epsilon$ (πρ. ια'. βιβ. ε')., ὥσε $\alpha\zeta = \alpha\gamma$ (πρ. θ'. βιβ. ε')., τουτέστι τὸ σημεῖον ζ πρέπει νὰ συμπίπτῃ μετὰ τὸ σημεῖον γ .

Π ρ ό ρ ι σ μ α. α'.

Ὅσε αἱ ὁμολογοὶ χορδαὶ ὑποτείνουσιν ἴσας γωνίας.

Οὕτως αἱ χορδαὶ $ΑΓ$, $Δγ$ ὑποτείνουσιν ἴσας γωνίας τὰς $ΑΕΓ$, $Δεγ$.

Π ό ρ ι σ μ α. β'.

"Ωσε τὰ ὅμοια τῶν ὑποτείνουσι γωνίας τριγώνων ὁμοίων. "Εξωσαν κύκλοι ὁμόκεντροι οἱ $ΑΒΓ$, $αβγ$ (σχ. 143). "Αγω τὴν διάμετρον $ΑΒ$, τὴν ἡμιδιάμετρον $ΚΓ$ καὶ τὰς χορδὰς $ΒΓ$, $βγ$, καὶ τότε τὰ τρίγωνα $ΚΒΓ$, $Κβγ$ θέλουσιν εἶναι ὅμοια. Καθότι ἡ μὲν γων. $ΒΚΓ$ εἶναι κοινὴ, αἱ δὲ πλευραὶ $ΚΒ:ΚΓ::Κβ:Κγ$ (πόρ. α'. προ. β'): τουτέστιν ἀνάλογοι.

Π ρ ό τ α σ ι ς. ζ'.

"Εὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην, καὶ ἀνάλογους τὰς πλευρὰς τὰς περὶ τὴν μίαν τῶν λοιπῶν γωνιῶν, καὶ τὴν τρίτην τοῦ αὐτοῦ εἶδους, ταῦτα τὰ τρίγωνα ἔσονται ἰσογώνια, καὶ ἔξουσιν ἴσας τὰς γωνίας, ὥς περ ὑποτείνουσιν αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ.

Εἰς τὰ τρίγωνα $ΑΒΓ$, $αβγ$ ἔσω ἡ μὲν γων. $Α =$ γων. $α$, αἱ δὲ $ΒΑ:ΒΓ::βα:βγ$, καὶ αἱ γωνίαι $Γ$ καὶ $γ$ ἐν ταυτῇ ἢ ὀξεῖαι, ἢ ἀμβλείαι, τότε λέγω ὅτι ταῦτα τὰ τρίγωνα θέλουσι εἶναι ἰσογώνια. σχ. 144.

Εἰ δὲ καὶ δὲν εἶναι: τουτέστιν ἂν ἡ γων. $ΑΒΓ$ δ' ἐν εἶναι ἴση μὲ τὴν γων. $αβγ$, θατέρω αὐτῶν θέλει εἶναι μείζων.. καὶ ἔσω τοιαύτη ἡ γων. $ΑΒΓ$, ἔξωσαν δ' ἐν ταυτῇ ὀξεῖαι καὶ αἱ γωνίαι $ΒΓΑ$, $βγα$. Τότε ἐκτελῶ τὴν γων. $ΑΒΔ =$ γων. $β$, καὶ διὰ τοῦτο τὰ τρίγωνα $ΑΒΔ$, $αβγ$ θέλουσιν εἶναι ἰσογώνια (πόρ. γ'. προ. λβ'. βιβ. α'). καὶ ἐχομένως τότε $ΒΑ:ΒΔ::βα:βγ$ (πρ. θ'). ἀλλ', ἐξ ὑποθέσεως, καὶ $ΒΑ:ΒΓ::βα:βγ$,

διὰ τοῦτο $BA : BF :: BA : BD$ (πρ. ια'. βιβ. ε').
 ὥς $BF = BD$ (πρ. θ'. βιβ. ε'): ὅ ἐστι τὸ τρίγ. GBD
 εἶναι ἰσοσκελές, καὶ διὰ τοῦτο ἡ γων. $BDF =$ γων. G .
 ἀλλ', ἐξ ὑποθέσεως, ἡ γων. G ὀξεῖα, ὀξεῖα λοιπὸν θέ-
 λει εἶναι καὶ ἡ γων. BDF , καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἐφεξῆς αὐ-
 τῆς γωνίας ἡ BDA πρέπει νὰ ἦναι ἀμβλεία (πρ. ιγ'.
 βιβ. α'), ἥ τις δηλονότι δέδεικται ἴση μὲ τὴν ὀξείαν γων.
 γ , ὅπερ εἶναι ἄτοπον. Ἄν λοιπὸν καὶ ἡ γων. ABF ἀδυ-
 νατῇ νὰ ἦναι ἄνισος μὲ τὴν γων. β , ἔπεται ἀναγκάτως
 τὰ τρίγωνα ABF , $αβγ$ νὰ ἦναι ἰσογώνια.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἤθελεν ἀποδεχθῇ τὸ πρᾶγ-
 μα, καὶ ἂν ἐν ταυτῷ αἱ γωνίαι Γ καὶ γ ἦσαν ἀμβλείαι.

Εἰ δὲ καὶ ἐν ταυτῷ ἦσαν ὀρθαί, τότε τὸ πρᾶγμα
 ἐδείκτο οὐδεμιᾶς ἀποδείξεως. Καθότι οὕσης, ἐξ ὑποθέσεως,
 τῆς γων. $A =$ γων. α , καὶ τῆς γων. $\Gamma = 90^\circ =$ γων.
 γ , τὰ τρίγωνα ABF , $αβγ$ ἤθελον εἶναι ἰσογώνια.

Σ η μ ε ί ω σ ι ς.

"Αντις παρατηρήσῃ τὴν φύσιν τῶν ἰσογωνίων τριγώ-
 νων, οὗτος ἤθελεν ἰδοῖ ὅτι ταῦτα ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ
 τρίγωνα ἐγγεγραμμένα ἐν τοῖς ὁμοίοις τμήμασι τῶν κύ-
 κλων (ὁρ. ι'. βιβ. γ'): ἔχοντα λέγω ἴσας τὰς γωνίας
 τὰς ἐν τμήμασι. Οὕτως ὄντων ὁμοίων τῶν κυκλικῶν
 τμημάτων AEF , $Αεγ$ (σχ. 138) τὰ τρίγωνα AEF ,
 $Αεγ$ εἶναι ὁμοία. β'. ὅτι ἂν μὲν ταῦτα τὰ ἴμοια τμήμα-
 τα ἦναι ἡμικύκλια, τὰ ἐγγεγραμμένα τρίγωνα θέλουσιν
 εἶναι ὀρθογώνια. ἂν δὲ μείζονα ἡμικυκλίων, ὀξυγώνια,
 καὶ ἂν ἐλάσσονα ἡμικυκλίων, ἀμβλυγώνια, καὶ τούτου
 ἔνεκεν προσετέθη εἰς τὴν ζ'. πρότασιν τὸ νὰ ἦναι ἡ τρίτη

γωνία τοῦ αὐτοῦ εἶδους : τουτέστιν ἡ ὀξεὶα εἰς ἀμφοτέρα τὰ τρίγωνα ἢ ἀμβλεία, ἀλλέως τὰ τμήματα, ἔνθα ἤθελον εἶναι τὰ παραβαλλόμενα τρίγωνα, θέν ἤθελον εἶναι ὅμοια.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς. η'.

Εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα, ἂν ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας, τὰ γενητόμενα τρίγωνα εἰσονται ὅμοια καὶ ἀλλήλοις καὶ μετὰ τὸ ὅλον.

Ἐξῶ τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ $AB\Gamma$, ἔχον ὀρθὴν γωνίαν τὴν $BA\Gamma$.. ἔξω καὶ κάθετος ἡ AD , τότε λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα BDA , $ΓAD$, $AB\Gamma$ εἶναι ὅμοια. σχ. 145. Καθότι εἰς τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$, BDA ἡ μὲν γων. $\Gamma AB =$ γων. $\Lambda DB = 90^\circ$, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ δὲ γων. ABD κοινή.. ὥστε τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$, BDA εἶναι ἰσογώνια (πρόγ. λβ' βιβ. ζ'). ἔθεν καὶ ὅμοια (πρ. δ').

β'. Εἰς τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$, ΓAD ἡ μὲν γων. $\Gamma AB =$ γων. $\Lambda D\Gamma = 90^\circ$, ἡ δὲ γων. $\Delta \Gamma A$ κοινή.. ὥστε τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$, ΓAD εἶναι ἰσογώνια, ἔθεν καὶ ὅμοια.

γ'. Ἀλλ' ἂν τὰ τρίγωνα BDA , ΓAD εἶναι ὅμοια μετὰ καὶ τὸ αὐτὸ τρίγωνον : τὸ $AB\Gamma$, δῆλον ὅτι εἶναι ὅμοια καὶ ἀλλήλοις (ἀξ. α').

Π ρ ό ρ ι σ μ α. α'.

Ὡς εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ἡ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας καταγομένη κάθετος εἶναι μέσων ἀναλογον τῶν τμημάτων τῆς ὑποτείνουσας. Οὕτως ἐπειδὴ καὶ τὰ τρίγωνα ΓAD , BDA εἶναι ὅμοια.. καὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων αἱ πλευραὶ αἰ ὑποτείνονται τὰς ἴσας γωνίας ὁμόλογοι (πρ. δ'), διὰ τοῦτο $\Gamma D : \Lambda D :: \Lambda D : BD$,

εἴτε $ΑΔ^2 = ΓΔ \times ΒΔ$, ὅπερ εἶδομεν εἰς τὸ (πρό. πρ. λβ'. βιβ. γ').

Π ό ρ ι σ μ α. β'.

Ὡς ἐν τοῖς κύκλοις ἡ ἀπὸ τῆς περιφερείας ἐπὶ τὴν διάμετρον ἀγομένη κάθετος, εἶναι ὕψη μὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ τετραγώνου τῆς ἡμιδιαμέτρου ἀποθέσει τοῦ τετραγώνου τοῦ διαστήματος τοῦ ἀπολαμβανομένου ὑπὸ τῆς καθέτου καὶ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. Οὕτως ἐπειδὴ $ΓΕ^2 = ΑΕ \times ΕΒ$ (σχ. 92.) (πορ. α'), ἂν ὀνομάσωμ τὴν ΓΕ, χ τὴν ΕΚ, καὶ α τὴν ΗΑ, ἡ ἐξίσωσις θέλει τραπεῖ εἰς τὴν $\psi^2 = (\alpha + \chi)(\alpha - \chi) = \alpha^2 - \chi^2$, καὶ διὰ τοῦτο $\psi = \sqrt{\alpha^2 - \chi^2}$.

Π ό ρ ι σ μ α. γ'.

Ἐκατέρα τῶν περιεχουσῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρὰ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῆς τε ὑποτείνουσας καὶ τοῦ τμήματος αὐτῆς τοῦ ἀπολαμβανομένου ὑπὸ τῆς καθέτου καὶ τῆς εἰρημένης πλευρᾶς. Οὕτως ἐπειδὴ καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΓΑΔ εἶναι ὅμοια, διὰ τοῦτο $ΓΔ : ΑΓ :: ΑΓ : ΓΒ$, εἴτε $ΑΓ^2 = ΓΒ \times ΓΔ$.

β'. Ἐπειδὴ καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΒΑΔ εἶναι ὅμοια, διὰ τοῦτο $ΒΔ : ΑΒ :: ΑΒ : ΒΓ$, εἴτε $ΑΒ^2 = ΒΓ \times ΒΔ$, ὡς ἐθεωρήθη εἰς τὸ (πρό. β'. προ. μζ. βιβ. α').

Π ό ρ ι σ μ α. δ'.

Ἐὰν μία εὐθεῖα τμηθῇ κατὰ τυχὸν σημεῖον, τὸ ἐκ τῶν τμημάτων ὀρθογώνιον θέλει εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν τετραγώνων τῶν τμημάτων. Ἐςω ΒΓ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα (σχ. 145), καὶ ᾧς τμηθῇ κατὰ τυχὸν σημεῖον τὸ

Δ, τότε λέγω ὅτι $ΒΔ^2 : ΒΔ \times ΔΓ :: ΒΔ \times ΔΓ : ΔΓ^2$.
 Καθότι ἐπειδὴ $ΒΔ : ΑΔ :: ΑΔ : ΔΓ$ (πρόρ. α'). καὶ διὰ
 τοῦτο καὶ $ΒΔ^2 : ΑΔ^2 :: ΑΔ^2 : ΔΓ^2$ (πρόρ. γ'. πρ. γ'.
 βιβ. ε'). ἄλλα $ΑΔ^2 = ΒΔ \times ΔΓ$. ὥς $ΒΔ^2 :$
 $ΒΔ \times ΔΓ :: ΒΔ \times ΔΓ : ΔΓ^2$: ὁ ἐστὶ $ΒΔ^2 \times ΔΓ^2 =$
 $ΒΔ^2 \times ΔΓ^2$.

Π ρ ό τ α σ ι ς. 9'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ ἀφέλῃ τις μέρος προ-
 σαχθέν.

Ἔσω ΑΔ ἡ δοθείσα εὐθεῖα, ὥς νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπ'
 αὐτῆς ἓν τρίτον. σχ. 146.

Ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἄγω τὴν Αε ἄπειρον εὐθεῖαν,
 ὥς νὰ ἐμποῖ τυχούσαν γωνίαν μετὰ τὴν ΑΒ. ἐπὶ τῆς Αε
 εὐθείας λαμβάνω τυχὸν σημεῖον: τὸ Β. ἀπὸ τῆς Αε εὐ-
 θείας τέμνω τμήματα ἴσα μετὰ τὸ Αβ: τοιούτως $Αβ =$
 $βγ = γδ$ (πρ. γ'. βιβ. α'). ζευγνύω τὰ σημεῖα δ, Δ διὰ
 τῆς δ Δ εὐθείας. ἄγω τὴν βΒ παράλληλὸν μετὰ τὴν δΔ,
 καὶ ἔχω $Αβ : ΑΒ :: Αδ : ΑΔ$ (πρ. β'). καὶ ἐναλλάξ $Αβ :$
 $Αδ :: ΑΒ :: ΑΔ$. ἄλλ', ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ $Αδ = \frac{1}{3} Αδ$
 διὰ τοῦτο καὶ ἡ $ΑΒ = \frac{1}{3} ΑΔ$, ὥς ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ι ς. ι'.

Τὴν δοθείσαν ἄτμητον εὐθεῖαν νὰ τμήῃ τις ὁμοίως
 μετὰ τὴν δοθείσαν τετμημένην.

Ἔσω αδ ἡ δοθείσα ἄτμητος εὐθεῖα, καὶ ἡ ΑΔ ἡ
 δοθείσα τετμημένη κατὰ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. σχ. 147.

Ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἄγω τὴν Αδ = αδ, ὥς νὰ
 ἐμποῖ τυχούσαν γωνίαν μετὰ τὴν ΑΔ. ζευγνύω τὰ ση-

μεῖα Δ , ὃ διὰ τῆς $\Delta\delta$ εὐθείας .. ἀπὸ τῶν σημείων B καὶ Γ ἄγω παραλλήλους τὰς $B\beta$, $\Gamma\gamma$ μετὰ τὴν $\Delta\delta$, καὶ λέγω ὅτι ἡ $\Delta\delta$ τέτμηται ὁμοίως μετὰ τὴν $A\Delta$ κατὰ τὰ σημεῖα β , καὶ γ .

Καθεύτει ἐπειδὴ καὶ ἡ $B\beta$ ἤχθη παράλληλος μετὰ τὴν $\Gamma\gamma$, διὰ τοῦτο $AB : BG :: A\beta : \beta\gamma$ (πρ. β').

Εἴτα ἐπειδὴ καὶ ἡ $\Gamma\gamma$ ἤχθη παράλληλος μετὰ τὴν $\Delta\delta$, διὰ τοῦτο $AG : GD :: A\gamma : \gamma\delta$.. καὶ ἐπομένως $B\Gamma : \Gamma\Delta :: \beta\gamma : \gamma\delta$ (πρ. ζ'. βιβ. ε'). : ὃ ἐστὶν ἡ $\alpha\delta$, εἴτε ἡ ταύτη ἴση $\Delta\delta$ τέτμηται ὁμοίως μετὰ τὴν δοθεῖσαν τετμημένην εὐθεῖαν $A\Delta$, ὡς ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ι ς ι α'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, νὰ προσεῦρῃ τις τρίτην ἀνάλογον.

"Ἐςωσαν AB , καὶ $\alpha\beta$ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι. σχ. 148.

Ἀπὸ τοῦ B πέρατος τῆς AB εὐθείας, ἄγω πρὸς ὀρθὰς μετὰ αὐτὴν τὴν $B\Gamma$ ἴσην μετὰ τὴν $\alpha\beta$ (πρ. β'. βιβ. α'). .. ζευγυνῶ τὰ σημεῖα A , Γ .. πρὸς τῷ σημείῳ Γ τῆς $A\Gamma$ εὐθείας .. ἐκτελῶ τὴν γων. $AG\Delta = 90^\circ$ (πρ. κγ'. βιβ. α'). .. ἐπεκτείνω τὴν AB εὐθεῖαν ἕως νὰ συμπέσῃ μετὰ τὴν $\Gamma\Delta$, καὶ λέγω ὅτι ἡ εὐθεῖα $B\Delta$ εἶναι ἡ ζητούμενη.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ $AB : B\Gamma :: B\Gamma : B\Delta$ (πρόρ. α'. πρ. κ')., διὰ τοῦτο ἡ $B\Delta$ εἶναι τρίτη ἀνάλογος τῶν AB , $B\Gamma$, εἴτε τῶν AB , $\alpha\beta$, ὡς ἐζητεῖτο.

Π ό ρ ι σ μ α.

"Ὡς εἰς πᾶντα κύκλον τὸ μέρος τῆς διαμέτρου τὸ ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ τῆς καθέτου καὶ τῆς περιφερείας

εἶναι τρίτον ἀνάλογον τοῦ λοιποῦ μέρους τῆς διαμέτρου καὶ τῆς καθέτου. Οὕτως ἐπειδὴ $AE : GE :: GE : EB$ (πορ. β'. προ. η'), δια τούτο ἡ EB εἶναι τρίτη ἀνάλογος τῆς AE καὶ EB (σχ. 92.).

Π ρ ό τ α σ ι ς ιβ'.

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν νὰ προστεύρητις τετάρτην ἀνάλογον.

Ἔσσαν $ZZ, HH, \Theta\Theta$ αἱ τρεῖς δοθεῖσαι εὐθεῖαι σχ. 138.

Ἐλτελῶ τὴν $AB = ZZ$, καὶ τὴν $A\beta = HH$.. γράφω κύκλους περὶ αὐτάς: τὸν $A\beta\gamma$, $AB\Gamma$.. ἐναρμύζω εἰς τὸν κύκλον $A\Gamma B$ τὴν εὐθεῖαν $B\Gamma = \Theta\Theta$ (πορ. α'. βιβ. δ')... ἄγω τὴν $A\Gamma$ χορδὴν, εἴτα τὴν $\beta\gamma$, καὶ λέγω ὅτι ἡ $\beta\gamma$ εἶναι ἡ ζητούμενη.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ αἱ διάμετροι εἶναι ἀνάλογοι μετὰς χορδὰς (πόρ. α'. προ. β'), δια τούτο $AB : A\beta :: B\Gamma : \beta\gamma$.. ἀλλ', ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ μὲν $AB = ZZ$, ἡ δὲ $A\beta = HH$, ἡ δὲ $B\Gamma = \Theta\Theta$, ὥς $ZZ : HH :: \Theta\Theta : \beta\gamma$: τουτέστιν ἡ $\beta\gamma$ τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν.

Π ρ ό τ α σ ι ς ιγ'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν νὰ προστεύρητις μέσην ἀνάλογον.

Ἔσσαν $AB, \beta\gamma$ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι σχ. 149.

Ἐπεκτείνω τὴν AB , ἕως οὗ τὸ μέρος $B\Gamma = \beta\gamma$.. περὶ τὴν $A\Gamma$, ὡς διάμετρον, γράφω κύκλον τὸν $\Gamma\Delta A$.. ἀπὸ τοῦ B σημείου, κοινοῦ τῶν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ἀνάγω πρὸς ὀρθὰς μετὰ τὴν διάμετρον τὴν $B\Delta$, καὶ λέγω ὅτι ἡ $B\Delta$ εἶναι ἡ ζητούμενη.

Καθότι ἐπειδὴ $\Delta B^2 = AB \times B\Gamma$ (πόρ. β'. προ. η'),

διὰ τοῦτο $AB : \Delta B :: \Delta B : B\Gamma$.. ἀλλ', ἐκ τῆς κατασκευῆς, $B\Gamma = \beta\gamma$, διὰ τοῦτο καὶ $AB : \Delta B :: AB : \beta\gamma$: τουτέστιν ἡ ΔB μέση ἀνάλογος τῶν AB καὶ $\beta\gamma$.

Π ρ ό τ α σ ι ς ιδ'.

Ἐὰν δύο παραλληλόγραμμα ἦναι ἴσα ἀλλήλοις, καὶ ἔχωσι καὶ μίαν γωνίαν ἴσην, ἔξουσιν ἀντιπεπονηθότως τὰς περὶ τὴν ἴσην γωνίαν πλευράς.. καὶ ἐὰν δύο παραλληλόγραμμα ἔχῃσι μίαν γωνίαν ἴσην, καὶ ἀντιπεπονηθότως τὰς περὶ ταύτην τὴν γωνίαν πλευράς, ταῦτα τὰ παραλληλόγραμμα θέλουσιν εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

α'. Ἐξω παραλ. $M =$ παραλ. N , καὶ ἡ γων. $AB\Gamma =$ γων. ΔBE , τότε λέγω ὅτι $AB : BE :: \Delta B : B\Gamma$. σχ. 150.

Τίθῃμι τὴν βᾶσιν BE ἐπ' εὐθείας μετὰ τὴν βᾶσιν AB , καὶ ἐχομένως καὶ ἡ ΔB θέλει εἶναι ἐπ' εὐθείας μετὰ τὴν $B\Gamma$, ἀλλέως αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι $AB\Gamma$, ΔBE δὲν θέλουσιν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις (πρ. ιε'. βιβ. α'), ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.. ἐκπληρῶ τὸ παραλληλόγραμμον Π , καὶ ἔχω παραλ. $M : \text{παραλ. } \Pi :: AB : BE$ (πρ. α'). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ παραλ. $N : \text{παραλ. } \Pi :: \Delta B : B\Gamma$.. ἀλλὰ παραλ. $N =$ παραλ. M , ἐξ ὑποθέσεως.. ὥστε παραλ. $M : \text{παραλ. } N :: \Delta B : B\Gamma$, καὶ διὰ τὴν ταυτότητα τῶν λόγων $AB : BE :: \Delta B : B\Gamma$ (πρ. ια'. βιβ. ε').

β'. Ἐξω $AB : BE :: \Delta B : B\Gamma$, καὶ ἡ γων. $AB\Gamma =$ γων. ΔBE , τότε λέγω ὅτι παραλ. $M =$ παραλ. N .

Ἐκτελῶ τὴν ὁμοίαν κατασκευὴν. Καὶ ἐπειδὴ τὰ παραλληλόγραμμα M , καὶ Π εἶναι ἰσοϋψῆς διὰ τοῦτο

παραλ. $M : \text{παραλ. } \Pi :: AB : BE$ (πρ. α'). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ παραλ. $N : \text{παραλ. } \Pi :: \Delta B : B\Gamma$.. ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, $AB : BE :: \Delta B : B\Gamma$, διὰ τοῦτο παραλ. $M : \text{παραλ. } \Pi :: \text{παραλ. } N : \text{παραλ. } \Pi$ (πρ. ια'. βιβ. ε'). ὥςτε παραλ. $M = \text{παραλ. } N$ (πρ. θ'. βιβ. ε').

Π ρ ό τ α σ ι ς. ιε'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἦναι ἴσα ἀλλήλοις καὶ ἔχωσι καὶ μίαν γωνίαν ἴσην, ἔξουσιν ἀντιπεποιθώς τὰς περὶ τὴν ἴσην γωνίαν πλευράς.. καὶ ἐὰν δύο τριγώνων ἡ μία γωνία ἦναι ἴση καὶ ἀντιπάσχουσιν αἱ περὶ τὴν ἴσην γωνίαν πλευραί, ταῦτα τὰ τρίγωνα θέλουσιν εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

Ἐξω τρίγ. $AB\Gamma = \text{τριγ. } \alpha\Gamma\beta$, καὶ ἡ γων. $\Lambda\Gamma\beta = \text{γων. } \alpha\Gamma\beta$, τότε λέγω ὅτι $\Gamma\Lambda : \beta\Gamma :: \Gamma\alpha : \Gamma\beta$. σχ. 151.

Τῶν τε τῶν βάσιν $\Gamma\beta$ ἐπ' εὐθείας μετὰ τὴν βάσιν $\Gamma\Lambda$, καὶ ἐχομένως καὶ ἡ $\alpha\Gamma$ θέλει εἶναι ἐπ' εὐθείας μετὰ τὴν $\Gamma\beta$, ἀλλέως αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι $\Lambda\Gamma\beta$, $\alpha\Gamma\beta$ δὲν θέλουσιν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις (πρ. ιε'. βιβ. α'), ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.. ἄγω τὴν $\Lambda\alpha$ εὐθεῖαν, καὶ ἔχω τριγ. $\Lambda\beta\Gamma : \text{τριγ. } M :: \beta\Gamma : \Gamma\alpha$ (πρ. α'), καθ' ὅσον ἰσοϋψῆ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τριγ. $\alpha\Gamma\beta : \text{τριγ. } M :: \beta\Gamma : \Gamma\alpha$, εἴτε τριγ. $\alpha\Gamma\beta : \text{τριγ. } M :: \beta\Gamma : \Gamma\alpha$.. διότι τριγ. $\alpha\Gamma\beta = \text{τριγ. } \Lambda\beta\Gamma$, ἐξ ὑποθέσεως.. ὥςτε διὰ τὴν ταυτότητα τῶν λόγων $\beta\Gamma : \Gamma\alpha :: \beta\Gamma : \Gamma\alpha$, καὶ ἀνάπαλιν $\Gamma\Lambda : \beta\Gamma :: \Gamma\alpha : \Gamma\beta$.

β'. Ἐξω $\Gamma\Lambda : \beta\Gamma :: \Gamma\alpha : \Gamma\beta$, καὶ ἡ γων. $\Lambda\Gamma\beta$

$\equiv \gamma\omega\nu$. $\alpha\Gamma\beta$, τότε λέγω ὅτι τὸ $\text{τριγ. } \alpha\beta\gamma \equiv \text{τριγ. } \alpha\Gamma\beta$.

Ἐκτελῶ τὴν ὁμοίαν κατασκευὴν. Καὶ ἐπειδὴ τὰ $\text{τριγ. } \alpha\beta\gamma$, M εἶναι ἰσοϋψῆ, διὰ τοῦτο $\text{τριγ. } \alpha\beta\gamma$: $\text{τριγ. } M :: \Gamma\beta : \Gamma\alpha$. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ $\text{τριγ. } \alpha\Gamma\beta$: $\text{τριγ. } M :: \Gamma\beta : \Gamma\alpha$. ἄλλ', ἐξ ὑποθέσεως, $\Gamma\alpha : \Gamma\beta :: \Gamma\alpha : \Gamma\beta$. ὁθεν διὰ τὴν ταυτότητα τῶν λόγων $\text{τριγ. } \alpha\beta\gamma$: $\text{τριγ. } M :: \text{τριγ. } \alpha\Gamma\beta$: $\text{τριγ. } M$. ὥςτε $\text{τριγ. } \alpha\beta\gamma \equiv \text{τριγ. } \alpha\Gamma\beta$ (πρ. ια'. βιβ. ε').

Π ρ ό τ α σ ι ς. ις'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ᾗναι ἀνάλογαι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἔσαι ἴσον μὲ τὸ ὑπὸ τῶν μέσων.. καὶ ἐὰν δύο ὀρθογώνια ᾗναι ἴσα ἀλλήλοις, αἱ βάσεις αὐτῶν ἔξουσιν ἀντιπεπονηθώς μὲ τὰ ὕψη. (α).

Ἔστω $\alpha\alpha : \beta\beta :: \gamma\gamma : \delta\delta$, τότε λέγω ὅτι ὀρθογ. $\alpha\alpha \times \delta\delta = \text{ὀρθ. } \beta\beta \times \gamma\gamma$. σχ. 152.

Ποιῶ τὴν $AB = \alpha\alpha$.. αἶρω πρὸς ὀρθὰς μὲ αὐτὴν τὴν $AD = \delta\delta$.. ἐκπληρῶ τὸ παραλληλόγραμμον AG .. ἔτι ποιῶ τὴν $EZ = \beta\beta$.. αἶρω πρὸς ὀρθὰς μὲ αὐτὴν τὴν $EO = \gamma\gamma$.. ἐκπληρῶ τὸ παραλληλόγραμμον EH .

(α) Ἀριθμητικῶς θεωρῶντες τὸ πρᾶγμα, ἔχει πάντοτε τὸ γινόμενον τὸ ἐκ τῶν ἄκρων ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τὸ ἐκ τῶν μέσων, πλὴν ὅχι καὶ γεωμετρικῶς, εἴτε εἰς τὰς ἐπιφανείας.. εἶναι ἀνάγκη δηλοῦντινὰ ᾗναι καὶ ὁ προσδιορισμὸς; τουτέστι τὸ νὰ ᾗναι ὀρθογώνια, ἢ ἰσογώνια τὰ παραλληλόγραμμα (πρ. ιδ'). - Ὡς αὕτη ἡ πρότασις περιέχεται εἰς τὴν ιδ'. πρότασιν.

Ἐπειδὴ καὶ, ἐξ ὑποθέσεως, $\alpha\alpha : \beta\beta :: \gamma\gamma : \delta\delta$ διὰ τοῦτο καὶ αἱ τούτων ἴσαι θέλουσιν εἶναι ἀνάλογοι : τουτέστιν $AB : EZ :: EO : \Delta\Delta$. Ἀλλὰ τοῦτο τί — ἄλλο εἶναι, ἢ πλευραὶ παραλληλογράμμων περὶ ὀρθὴν γωνίαν ἀντιπεπονητόως ; Ὡς ἐπὶ ὀρθ. $AB = \text{ὀρθ. } EO$ (πρ. ιδ'), εἴτε $AB \times \Delta\Delta = EZ \times EO$: ὅ ἐστιν $\alpha\alpha \times \delta\delta = \beta\beta \times \gamma\gamma$.

β'. Ἐς $\omega \alpha \times \delta\delta = \beta\beta \times \gamma\gamma$, εἴτε $AB \times \Delta\Delta = EZ \times EO$, τότε λέγω ὅτι $AB : EZ :: EO : \Delta\Delta$.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἐν ὀρθογώνιῳ ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ἡ βᾶσις αὐτοῦ πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὸ ὕψος (ὀρ. β'. βιβ. β')., ἔπεται ἀναγκαίως δύο ὀρθογωνίων ὄντων ἴσων ἀλλήλοις, αἱ βᾶσεις αὐτῶν νὰ ἀντιπάσχῃσι μὲ τὰ ὕψη, ἀλλέως ἢ ἐξίσωσις δὲν ἤθελε διασωθῇ.

Π ό ρ ι σ μ α. α'.

Ὡς ἐν δύο ἴσα ὀρθογώνια ἔχωσιν ἴσα τὰ ὕψη, ἔξουσι καὶ τὰς βᾶσεις ἴσας.. καὶ ἐν ἴσας τὰς βᾶσεις, καὶ τὰ ὕψη.

Π ό ρ ι σ μ α. β'.

Ὡς ἐν δύο χορδαὶ τέμνωσιν ἀλλήλαις, τὰ τμήματα αὐτῶν ἔξουσι λόγον ἀντιπεπονητότα πρὸς ἀλλήλα. Καθότι ἐπειδὴ (πρ. λε'. βιβ. γ'.) ὀρθ. $\Delta\Gamma \times B\Gamma = \text{ὀρθ. } \alpha\Gamma \times \beta\Gamma$ (σχ. 120.), τοῦτου ἕνεκεν $\Delta\Gamma : \alpha\Gamma :: \beta\Gamma : B\Gamma$.

Π ό ρ ι σ μ α. γ'.

Ὡς ἐν ἡ μία χορδὴ ἥναι διάμετρος καὶ ἡ ἄλλη διατετμημένη πρὸς ὀρθὰς, τότε τὸ ἐκ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου ὀρθογώνιον θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον θατέρου τῶν τμημάτων τῆς πρὸς ὀρθὰς διατετμημένης.

Οὕτως (σχ. 92.) ἐπειδὴ ἡ ΓΔ τέμνεται πρὸς ὀρθὰς ὑπὸ τῆς ΑΒ διαμέτρου, καὶ διὰ τοῦτο καὶ δῖχα.. καὶ ἐπειδὴ ὀρθ. $ΑΕ \times ΕΒ = \text{ὀρθ. } ΓΕ \times ΕΔ$., καὶ ἐπειδὴ $ΓΕ = ΕΔ$ (πρ. γ'. βιβ. γ'.), διὰ τοῦτο ὀρθ. $ΑΕ \times ΕΒ = ΕΔ^2$.

Π ό ρ ι σ μ α δ'.

Ὡς ἂν ἀπὸ ἐνὸς τῶν ἐν κύκλῳ σημείων, ἐκτὸς τοῦ κέντρου, ἀχθῶσι πρὸς τὴν περιφέρειαν δύο εὐθεῖαι, καὶ ἐπεκταθῶσιν ἐκ τοῦ ἀπέναντο μέρους μέχρι τῆς περιφέρειας, γενήσονται δύο τρίγωνα ὁμοία. Οὕτως ἂν ἀπὸ τοῦ σημείου Γ (σχ. 120.) ἄξω τὰς ΓΑ, ΓΒ εὐθείας, καὶ ἐπεκτείνω τὴν μὲν ΑΓ μέχρι τοῦ Β σημείου, τὴν δὲ ΒΓ μέχρι τοῦ Α, ἔξω δύο τρίγωνα ὁμοία τὰ ΑΓΑ, ΒΓΒ.. διότι βέβαια ἔχου $ΑΓ : ΓΑ :: ΒΓ : ΓΒ$. (πρ. ζ').

Π ό ρ ι σ μ α ε'.

Παντὸς τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου ἐν κύκλῳ τὸ ἐκ τῶν διαγώνιων ὀρθογώνιον εἶναι ἴσον μετὰ τὰ δύο ὀρθογώνια τὰ ἐκ τῶν ἀντικειμένων πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου: τουτέστιν $ΑΔ \times ΓΒ = ΑΒ \times ΓΔ + ΓΑ \times ΒΔ$. σχ. 111.

Ἄν ἡ γων. α. δὲν ᾖ ἰση μετὰ τὴν γων. ΔΓΒ, ἐκτελῶ τὴν γων. ΕΓΑ = γων. ΔΓΒ. Καὶ τότε εἰς τὰ τρίγωνα ΕΓΑ, ΔΓΒ ἡ μὲν γων. ΓΑΕ = γων. ΓΒΔ (πρ. κα'. βιβ. γ'), ἡ δὲ γων. ΕΓΑ = γων. ΔΓΒ, ἐκ τῆς κατασκευῆς καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ τρίτη αὐτῶν ἴση.. ὥς τε $ΑΓ : ΑΕ :: ΓΒ : ΒΔ$ (πρ. δ'). τουτέστιν $ΑΕ \times ΓΒ = ΑΓ \times ΒΔ$.

Ἐτι ἐπειδὴ ἡ γων. ΕΓΑ = γων. ΔΓΒ, ἐκ τῆς κατασκευῆς καὶ διὰ τοῦτο ἀφαιρεθείσης κοινῆς τῆς γων.

ΕΓΒ, μένει γων. ΒΓΑ = γων. ΔΓΕ.. αλλά και γων.
 ΓΒΑ = γων. ΕΔΓ (πρ. κα'. βιβ. γ'). .. ὥς και ἡ
 τρίτη ἴση καὶ διὰ τοῦτο ὅμοια τὰ τρίγωνα ΓΕΔ, ΓΑΒ,
 καὶ ἐκ τούτου $\Gamma\Delta : \Delta\epsilon :: \Gamma\beta : \alpha\Gamma$, εἴτε $\Delta\epsilon \times \Gamma\beta =$
 $\alpha\beta \times \Gamma\Delta$. Τώρα προσίθῃμι τὰς δύο ἐξισώσεις, καὶ ἔχω
 $\alpha\beta \times \Gamma\Delta + \Gamma\alpha \times \beta\Delta = \Delta\epsilon \times \Gamma\beta + \Delta\epsilon \times \Gamma\beta$
 $= (\Delta\epsilon + \Delta\epsilon) \cdot \Gamma\beta = \alpha\Delta \times \Gamma\beta$.

Π ρ ό τ α σ ι ς ι ζ'.

Ἐάν τρεῖς εὐθεῖαι ἦναι συνεχῶς ἀνάλογαι, τὸ ὑπὸ
 τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον θέλει εἶναι ἴσον μὲ
 τὸ τετράγωνον τῆς μέσης.. καὶ ἐάν ἐν ὀρθογώνιον ἦναι
 ἴσον μὲ ἐν τετράγωνον, ἡ βάσις τοῦ τετραγώνου θέλει
 εἶναι μέσον ἀνάλογον τῆς βάσεως καὶ ὕψους τοῦ ὀρθο-
 γωνίου.

Ἐπειδὴ καὶ ἡ συνεχὴς ἀναλογία διαφέρει ὁλοτελῶς
 τῆς διακεκριμένης, εἰμὴ καθὺ τὸ δεύτερον ἡγούμενον εἶ-
 ναι ὁ αὐτὸς ὁρος μὲ τὸ πρῶτον ἐπόμενον (ὅρ. θ'. βιβ. ε'). ..
 ὥς ὅσα ἐλέχθησαν εἰς τὴν μὴ συνεχὴ ἀναλογίαν (πρ.
 ις.) .. τὰ αὐτὰ ἤθελον λεχθῶσι καὶ εἰς τὴν συνεχὴ.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὡς ἐ δύναται τις νὰ μεταμορφώσῃ ἐν σχῆμα ὁποῖον-
 δήποτε εἰς τετράγωνον. Καθότι συνίστημι παραλληλόγραμ-
 μον ὀρθογώνιον ἴσον μὲ τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον σχῆμα
 (πρ. με'. βιβ. α'). .. εἴτα εὐρίσκω μέσον ἀνάλογον τῆς
 βάσεως καὶ ὕψους αὐτοῦ, καὶ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ θέλει
 εἶναι τὸ ζητούμενον.

Π ρ ο τ α σ ε ι ς ιη'.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ ἀναγράψητις πολύγωνον εὐθύγραμμον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον μὲ τὸ δοθὲν πολύγωνον εὐθύγραμμον.

Ἔστω $\alpha\beta$ ἡ δοθείσα εὐθεῖα, καὶ $ΑΒΓΔ$ τὸ δοθὲν πολύγωνον εὐθύγραμμον. σχ. 153.

Ἀναλύω εἰς τρίγωνα τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον σχῆμα : ὅ ἐστιν ἄγω τὴν $ΔΒ$.. πρὸς τοῖς πέρασι τῆς $\alpha\beta$ εὐθείας.. κάμνω τὴν μὲν $\gamma\omega\nu$. $\alpha\beta\delta = \gamma\omega\nu$. $ΑΒΔ$, τὴν δὲ $\gamma\omega\nu$. $\beta\alpha\delta = \gamma\omega\nu$. $ΒΑΔ$.. ὥςτε καὶ ἡ $\gamma\omega\nu$. $\alpha\delta\beta = \gamma\omega\nu$. $ΑΔΒ$ (πόρ. γ'. προ. λβ'. βιβ. α'). Ἐπὶ ἐκτελῶ τὴν μὲν $\gamma\omega\nu$. $\delta\beta\gamma = \gamma\omega\nu$. $ΔΒΓ$, τὴν δὲ $\gamma\omega\nu$. $\beta\delta\gamma = \gamma\omega\nu$. $ΒΔΓ$, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ $\gamma\omega\nu$. $\gamma = \gamma\omega\nu$. Γ .

Ὡςτε ἐπειδὴ καὶ τὰ τρίγωνα $\alpha\beta\delta$, $ΑΒΔ$, ὡσαύτως καὶ τὰ $\delta\beta\gamma$, $ΔΒΓ$ εἶναι, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἰσογώνια.. καὶ αἱ γωνίαι αὐτῶν εἶναι γωνίαι τῶν πολυγώνων εὐθύγραμμων $\alpha\beta\gamma\delta$, $ΑΒΓΔ$, διὰ τοῦτο ταῦτα τὰ πολύγωνα εἶναι ἰσογώνια.

Ἐπειδὴ πάλιν καὶ τὰ τρίγωνα $\alpha\beta\delta$, $ΑΒΔ$ εἶναι ἰσογώνια, διὰ τοῦτο ἔξω $\alpha\beta : \beta\delta :: ΑΒ : ΒΔ$ (πρ. δ'). ὡσαύτως ἐπειδὴ καὶ τὰ τρίγωνα $\delta\beta\gamma$, $ΔΒΓ$ εἶναι ἰσογώνια, διὰ τοῦτο $\beta\delta : \beta\gamma :: ΒΔ : ΒΓ$, καὶ οὕτως τεταραγμένως $\alpha\beta : \beta\gamma :: ΑΒ : ΒΓ$. Ὡςτε τὰ εὐθύγραμμά $\alpha\beta\gamma\delta$, $ΑΒΓΔ$ εἶναι ὅμοια, καὶ ὁμοίως κείμενα. (α).

(α) Ἐκ ταύτης τῆς προτάσεως κρίνεται οἱ πῶς αἱ τῆς γεωγραφίας τ. παραστάσις ὑπενόησι τῶν μεγάλων διὰ τῶν ὁμοίων μακρῶν.

Π ρ ό τ α σ ι ς. ιθ'.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ἐν λόγῳ διπλασίονι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἐξωσαν ὅμοια τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, $\alpha\beta\gamma$: τουτέστιν ἔσω γων. $B = \gamma\omega\nu. \beta$, καὶ $AB: B\Gamma :: \alpha\beta: \beta\gamma$, τότε λέγω ὅτι $\text{τριγ. } AB\Gamma: \text{τριγ. } \alpha\beta\gamma :: B\Gamma^2: \beta\gamma^2$. σχ. 154,

Μετὰ τὴν $B\Gamma$, καὶ $\beta\gamma$ εὐρίσκω τρίτην ἀναλογον τὴν BD (πρ. ια'). ἄγω τὴν DA .

Ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, $AB: B\Gamma :: \alpha\beta: \beta\gamma$, ἄρα καὶ ἐναλλάξ $B\Gamma: \beta\gamma :: AB: \alpha\beta$. ἀλλ', ἐκ τῆς κατασκευῆς, $B\Gamma: \beta\gamma :: \beta\gamma: BD$, ὅθεν διὰ τὴν ταυτότητα τῶν λόγων $AB: \alpha\beta :: \beta\gamma: BD$. ὥστε $\text{τριγ. } AB\Delta = \text{τριγ. } \alpha\beta\gamma$ (πρ. ιε').

Ἀλλ', ἐκ τῆς κατασκευῆς, $B\Gamma: \beta\gamma :: \beta\gamma: BD$. ὥστε $B\Gamma: BD :: B\Gamma^2: \beta\gamma^2$ (ὁρ. ι'. βιβ. ε'). ἀλλὰ $\text{τριγ. } AB\Gamma: \text{τριγ. } AB\Delta :: B\Gamma: BD$ (πρ. α'). ὥστε $\text{τριγ. } AB\Gamma: \text{τριγ. } AB\Delta :: B\Gamma^2: \beta\gamma^2$ (πρ. ια'. βιβ. ε'), καὶ διὰ τοῦτο $\text{τριγ. } AB\Gamma: \text{τριγ. } \alpha\beta\gamma :: B\Gamma^2: \beta\gamma^2$, ὡς ἀποδείχθέντος ἡδὴ $\text{τριγ. } \alpha\beta\gamma = \text{τριγ. } AB\Delta$, ὅπερ ἐζητεῖτο.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὡς οὖν τριῶν εὐθειῶν συνεχῶς ἀναλόγων, ἂν ἀναγραφῶσι τρίγωνα ὅμοια ἐπὶ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας, ἔξουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην εὐθειαν.

Π ρ ό τ α σ ι ς. κ'.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα διαιροῦνται εἰς τρίγωνα ἴσατε τὸ πλῆθος, ὅμοια, καὶ ὁμόλογα μετὰ ὅλα. καὶ πολύγωνον πρὸς πολύγωνον ἔχει ἐν λόγῳ διπλασίονι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

"Εξωσαν ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, αβγδε, τότε λέγω ὅτι $ΑΒΓΔΕ : αβγδε :: ΑΒ^2 : αβ^2$, οὔσης δηλ. τῆς γων. Δ = γων. δ. σχ. 155.

α'. Ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, τὰ ΑΒΓΔΕ, αβγδε εἶναι ὅμοια, διὰ τοῦτο εἶναι ἰσογώνιά τε καὶ ἰσόπλευρα (ὅρ α'). ὥς ἐν ἀπὸ μιᾶς γωνίας ἄξω εὐθείας πρὸς τὰς λοιπὰς γωνίας, ἔξω εἰς ἑκάτερον τῶν πενταγώνων τρία τρίγωνα : ἰσάριθμα δηλονότι.

Ἐπειδὴ καὶ εἰς τὰ τρίγωνα Μ, Ο ἡ μὲν γων. ΑΒΓ = γων. αβγ, ἡ δὲ ΑΒ : ΒΓ :: αβ : βγ, ὥς οὔσαι γωνίαι καὶ πλευραὶ ὁμοίων πολυγώνων, διὰ τοῦτο τὸ τριγ. Μ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ τριγ. Ο, ὡσαύτως καὶ τὸ τριγ. Ξ, μὲ τὸ τριγ. Ρ. ἔπειδὴ λοιπὸν καὶ τὰ τρίγωνα Μ καὶ Ο εἶναι ἰσογώνια : ὁ ἐστὶν ἐπειδὴ ἡ γων. ΒΓΑ = γων. βγα, καὶ, ἐξ ὑποθέσεως, ὁλόκληρος ἡ γων. ΒΓΔ = γων. βγδ, διὰ τοῦτο ἡ γων. ΑΓΔ = γων. αγδ. ὡσαύτως ἠθέλειν ἀποδειχθῆ καὶ ἡ γων. ΑΔΓ = γων. αδγ, καὶ διὰ τοῦτο τὸ τρίγωνον Ν ὅμοιον μὲ τὸ τρίγωνον Π (πρόρ. γ'. πρ. δ').

γ'. Διὰ τὴν ὁμοιότητα λοιπὸν τῶν εἰρημένων τριγώνων ἐγὼ ἔχω τριγ. Μ : τριγ. Ο :: ΑΓ² : αγ² .. ὡσαύτως καὶ τριγ. Ν : τριγ. Π :: ΑΓ² : αγ² (πρ. ιθ'). ὥς καὶ διὰ τὴν ταυτότητα τῶν λόγων τριγ. Μ : τριγ. Ο :: τριγ. Ν : τριγ. Π. καὶ διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τριγ. Ν : τριγ. Π :: τριγ. Ξ : τριγ. Ρ. Ἄλλ' ἅπαντα τὰ ἡγούμενα τὰ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔχουσι πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα, ὥς ἐν ἡγούμενον πρὸς ἐν ἐπόμενον (πρ. α'. βιβ. ε'). ἅπαντα δὲ τὰ ἡγούμενα καὶ ἐπόμενα εἶναι οὐ-

δὲν ἄλλο, ἢ τὰ δοθέντα πολύγωνα, ὥς: $ABΓΔΕ$:
 $αβγδε$: :: τριγ. M : τριγ. O : ὃ ἐστὶ τὰ πολύγωνα εἶναι
 ὁμολογα μὲ τὰ ἐξ αὐτῶν γεγόμενα τρίγωνα.

δ'. Ἀλλὰ τριγ. M : τριγ. O : :: AB^2 : $αβ^2$.. ὥς
 καὶ $ABΓΔΕ$: $αβγδε$: :: AB^2 : $αβ^2$. (πρὶ ια'. βιβ. ε').

Π ό ρ ι σ μ α α'.

Ὡς οὖν τριῶν εὐθειῶν συνεχῶς ἀναλόγων, ἂν
 ἀναγραφῶσιν ἐπὶ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας ὁμοια πολύ-
 γωνα, ταῦτα ἔξουσιν πρὸς ἄλληλα, ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν
 τρίτην.

Π ό ρ ι σ μ α β'.

Ἄν ᾖναι ἐγνωσμένη ἡ ἀναφορὰ δύο ὁμολόγων πλευ-
 ρῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων, θέλει γνωσθῇ καὶ ἡ τῶν
 πολυγώνων ἀναφορά.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ὁμοίων πολυγώ-
 νων ἔχουσιν πρὸς ἄλληλα λόγον διπλασίονα τῶν ὁμολόγων
 πλευρῶν: τουτέστιν $ABΓΔΕ$: $αβγδε$: :: AB^2 : $αβ^2$, τοῦ-
 του ἔτεκεν οὗτος ἐγνωσμένου τοῦ $\frac{AB}{αβ}$, εἴτε $\frac{AB}{αβ}$, ἤθελε
 γνωσθῇ καὶ τὸ $\frac{ABΓΔΕ}{αβγδε}$. Οὕτως ἂν $AB = 6$ ποσὶ, καὶ
 $αβ = 2$ ποσὶ, τότε $ABΓΔ$: $αβγδε$: :: 36 : 4 :: 9 :
 1 :: 3^2 : 1^2 .

Π ό ρ ι σ μ α γ'.

Ὡς εὐκόλως ἤθελεν ἀναγράψοι τις σχῆμα ὅμοιον
 ἐν λόγῳ δοθέντι μὲ τὸ δοθὲν πολύγωνον. Ἄν, φέρε εἰ-
 πεῖν, καὶ ὁ ζητούμενος λόγος ᾖναι ὡς 3 : 2 , τότε δὲν
 πρέπει τις νὰ κάμῃ τὰ ὁμολογα αὐτῶν πλευρὰ ὡς 3 : 2 ..
 διότι τότε τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν ἤθελον εἶναι ὡς 3^2 : 2^2 .

ἀλλὰ τοιαῦτα, ὥστε νὰ ἔχωσιν πρὸς ἀλλήλα, ὡς 3 πρὸς 2. Ὡςτε οὕτως τῆς μὲν $AB=3$, τῆς δὲ $BF=2$ (σχ. 149.), καὶ τῆς AB πλευρᾶς τοῦ δοθέντος πολυγώνου, αὐτῶν τὴν μέσσην ἀνάλογον αὐτῶν: τὴν BD (πρ. γ'), καὶ ἐπ' αὐτὴν ἀναγράψω τὸ ἴμοιον σχῆμα, τοῦτο θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον. Οὕτως ἂν $AB=50$ ποσ., τότε $3:2::50^2:\chi=1666\frac{2}{3}$, καὶ διὰ τοῦτο $\sqrt{1666\frac{2}{3}}=40\pi$, $824=40\pi$, 9^d , 107 , ἡ ζητουμένη πλευρά.

Π ό ρ ι σ μ α δ'.

Μίας μόνης πλευρᾶς γνωσθείσης ἑνὸς τακτικοῦ σχήματος καὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ, ἤθελε γνωσθῇ καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. Καθότι ἐπειδὴ καὶ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ ἥμισυ ὕψος αὐτοῦ (πρ. γ'. πρ. β').. καὶ ἐπειδὴ πᾶν πολύγωνον ἀναλύεται εἰς τρίγωνα, δῆλον ὅτι αὐτὸ πολλαπλασιάσῃ τις τὸ κεφάλαιον τῶν πλευρῶν τοῦ τακτικοῦ σχήματος διὰ τοῦ ἡμίσεος ὕψους, τὸ γινόμενον ἔχει νὰ παριστῇ τὸ ἐμβαδόν.

Καθότι ἔσω ἐγνωσμένη ἡ πλευρὰ AF τοῦ ἐξαγώνου $AFZBA$ (σχ. 133), οὕτως δηλονόει τὸ ὕψος εἶναι $=AK$, τότε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ $AFZBA=6 AF \times \frac{1}{2} AK$, εἴτε $=3 AF=AK$: τουτέστιν ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς περιδιαμέτρου ἐπὶ τὸ ὕψος.

Π ό ρ ι σ μ α ε'.

Ὡςτε τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κύκλου εἶναι ἴσον μὲ τὴν περιφέρειαν ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν ἀκτίνα, ἢ μὲ τὴν ἡμιπερίφειραν ἐπὶ τὴν ἀκτίνα.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ πᾶς κύκλος δύναται νὰ ἐκληφθῇ

ὡς πολύγωνον τακτικὸν ἔχον ἀπείρους τὰς πλευράς, καὶ διὰ τοῦτο ἀναλυόμενος εἰς τρίγωνα ὅμοια, ὧν περ τὸ ὕψος εἶναι αὐτὴ ἡ ἀκτίς, τοῦτου ἕνεκεν ὀνομάζωμεν τὴν ἀκτὶνα ἡ ἡμιδιάμετρον, καὶ Π τὴν περιφέρειαν, ἔξω δὲ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου $= \frac{\alpha}{2} \Pi$, ἢ $= \alpha \frac{\Pi}{2}$: εἴτε ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς περιφέρειας ἐπὶ τὴν ἀκτὶνα: τοὔτεστιν ἂν κάμω τὴν ἡμιπεριφέρειαν πλευρὰν ἐνὸς ὀρθογωνίου καὶ τὴν ἀκτὶνα ἄλλην, τοῦτο τὸ ὀρθογώνιον θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.

Ἄλλ' ἐπειδὴ καὶ κατὰ τὸν Ἀρχιμήδην ἡ διάμετρος ἔχει πρὸς τὴν περιφέρειαν, ὡς 7 : 22, ἡ κατὰ τὸν Αὐδριανὸν Μέτιον ὡς 113 : 355, τοῦτου ἕνεκεν γινώσκων τις τὴν ἡμιδιάμετρον ἢ διάμετρον ἐνὸς κύκλου, αὐτὸς γινώσεται καὶ τὴν περιφέρειαν. Οὕτως ἂν εἷς κύκλος ἔχῃ διάμετρον $= 20^{\text{ποσ.}}$, ἡ περιφέρεια αὐτοῦ θέλει εἶναι $= 62^{\text{ποσ.}}$. $\frac{6}{7} \times 5^{\text{ποσ.}} = 314\frac{2}{7}$ ποσὶ τετραγωνικοῖς.

Π ρ ό τ α σ ι ς κα'. (α).

Ἐὰν δύο εὐθύγραμμα ἦναι ὅμοια μὲ ἐν τρίτῳ, ταῦτα θέλουσιν εἶναι καὶ ἀλλήλοις ὅμοια.

Ἐξωσαν τὰ Α καὶ Β ὅμοια μὲ τὸ Γ, τότε λέγω ὅτι καὶ τὸ Α εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ Β. σχ. 156.

Ἐπειδὴ καὶ ὅμοια σχήματα ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ τὸ νὰ ἔχωσιν ἴσας τὰς γωνίας: ἐκάστην ἐκάσῃ, καὶ ἀναλόγους τὰς πλευράς τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας (ὁρ. α'). καὶ ἐπειδὴ τὸ εὐθύγραμμον Α εἶναι ὅμοιον, ἐξ ὑποθέσεως,

(α) Αὕτη ἡ πρότασις διὸ εἶναι πρότασις, ἀλλ' ἀξίωμα.

μὲ τὸ εὐθύγραμμον Γ , διὰ τοῦτο ἀμφότερα ἔχουσιν ἴσας καὶ τὰς γωνίας : ἐκάστην ἐκάστη, καὶ ἀναλόγους τὰς πλευρὰς τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας.. ὡσαύτως καὶ τὸ B μὲ τὸ Γ , ὥςτε καὶ τὸ A μὲ τὸ B (ἀξ. α΄), καὶ διὰ τοῦτο καὶ ὅμοια.

Π ρ ό τ α σ ι ς. κβ΄.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ᾗναι ἀνάλογοι, καὶ τὰ ἐπ' αὐτῶν ἀναγραφησόμενα ὅμοια καὶ ὁμοίως εὐθύγραμμα θέλουσιν εἶναι ἀνάλογα.. καὶ ἂν τέσσαρα εὐθύγραμμα ᾗναι ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν ἀνάλογοι θέλουσιν εἶναι.

α΄. Ἐς ω $AB : \alpha\beta :: \Gamma\Delta : \gamma\delta$. σχ. 157.

Ἐπὶ τῶν AB , $\alpha\beta$ ἀναγράφω τὰ K καὶ Λ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα εὐθύγραμμα.. ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν $\Gamma\Delta$, $\gamma\delta$ τὰ M , καὶ N , καὶ λέγω ὅτι $K : \Lambda :: M : N$.

Ἐγὼ ἔχω $K : \Lambda :: AB^2 : \alpha\beta^2$ (πρ. ιθ΄).. ὡσαύτως καὶ $M : N :: \Gamma\Delta^2 : \gamma\delta^2$. (πρ. κ΄).. ἀλλ', ἐξ ὑποθέσεως, $AB : \alpha\beta :: \Gamma\Delta : \gamma\delta$, τούτου ἕνεκεν $AB^2 : \alpha\beta^2 :: \Gamma\Delta^2 : \gamma\delta^2$ (πρόρ. γ΄. προ. δ΄. βιβ. ε΄).. ὥςτε $K : \Lambda :: M : N$ (πρ. ια΄. βιβλ. ε΄).

β΄. Ἐς ω $K : \Lambda :: M : N$, τότε λέγω ὅτι καὶ $AB : \alpha\beta :: \Gamma\Delta : \gamma\delta$.

Ἐγὼ ἔχω $K : \Lambda :: AB^2 : \alpha\beta^2$ (πρ. ιθ΄), καὶ $M : N :: \Gamma\Delta^2 : \gamma\delta^2$ (πρ. κ΄).. ἀλλ', ἐξ ὑποθέσεως, $K : \Lambda :: M : N$.. ὥςτε καὶ $AB^2 : \alpha\beta^2 :: \Gamma\Delta^2 : \gamma\delta^2$ (πρ. ια΄. βιβλ. ε΄).. καὶ διὰ τοῦτο καὶ $AB : \alpha\beta :: \Gamma\Delta : \gamma\delta$ (πρόρ. γ΄. προ. δ΄. βιβ. ε΄).

Π ρ ό τ α σ ι ς. κγ'.

Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα ἔχουσι πρὸς ἀλλήλα λόγον συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Ἐξώσαν ἰσογώνια τὰ παραλληλόγραμμα Μ, καὶ Ν, τότε λέγω ὅτι $M:N$, ὡς $AB:BA$ καὶ $BE:BF$ εἴτε $M:N::\frac{AB}{BA} \cdot \frac{BE}{BF}$ εἴτε $\frac{M}{N} = \frac{AB}{BA} \times \frac{BE}{BF}$. σχ. 158.

Τῶν τε τῆν ΒΔ ἐπ' εὐθείας μετὰ τὴν ΑΒ, καὶ οὕτω καὶ ἡ ΒΕ θέλει εὐρεθεῖν ἐπ' εὐθείας μετὰ τὴν ΒΓ, ἀλλέως ἢ γων. ΑΒΓ οὔσα κατὰ κορυφήν μετὰ τὴν γων. ΕΒΔ, δὲν θέλει εἶναι ἴση μετὰ αὐτὴν κατὰ τὴν ὑπόθεσιν.. ἐκπληρῶ τὸ παραλληλόγραμμον Ξ. Καὶ ἐπεὶ δὴ τὰ παραλληλόγραμμα Μ, καὶ Ξ εἶναι ἰσοῦψη, διὰ τοῦτο $M:\Xi::AB:BA$ (πρ. α'). ὁθεν $\Xi = \frac{M \times BA}{AB}$. Διὰ τοῦ αὐτοῦ λόγου καὶ $N:\Xi::BE:BF$.. ὁθεν $\Xi = \frac{N \times BF}{BE}$ καὶ ἐχομένως $\frac{M \times BA}{AB} = \frac{N \times BF}{BE}$ (ἀξ. α'), εἴτε $\frac{M}{N} = \frac{AB}{BA} \times \frac{BF}{BE}$ ὥς $M:N::\frac{AB}{BA} \cdot \frac{BE}{BF}$.

Ἄν δὴλ. $AB=10$, καὶ $BF=8$, καὶ $BA=5$, καὶ $BE=12$, τότε $\frac{M}{N} = \frac{10}{5} \times \frac{8}{12} = \frac{80}{60} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

Π ό ρ ι σ μ α α'.

Ὡς τε καὶ τὰ ἰσογώνια τρίγωνα ἔχουσι πρὸς ἀλλήλα λόγον συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, ὡς ὄντα ὑποδιπλάσια τῶν παραλληλογράμμων.

Π ό ρ ι σ μ α β'.

Ὡς τε τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμά τε καὶ τρίγωνα ἔχουσι πρὸς ἀλλήλα, ὡς τὸ γινόμενον τῶν πλευρῶν τοῦ

πρώτου πρὸς τὸ γινόμενον τῶν πλευρῶν τοῦ δευτέρου τῶν περιεχόντων τὴν ἴσην γωνίαν δηλονότι. Καθότι ἐπειδὴ
 $M : N :: \frac{AB}{BA} : \frac{BE}{BF} \dots$ καὶ ἐπειδὴ $\frac{AB}{BA} : \frac{BE}{BF} = \frac{AB}{BA} \times \frac{BF}{BE}$
 $= \frac{AB \times BF}{BA \times BE} = AB \times BF : BA \times BE$, διὰ τοῦτο $M :$
 $N :: AB \times BF : BA \times BE$.

Π ὁ ρ ι σ μ α γ'.

Ὡς εἰ ἂν $BF = BE$, τότε $M : N :: AB : BA$,
 ἣτις εἶναι ἡ πρώτη πρότασις τούτου τοῦ βιβλίου.

Π ὁ ρ ι σ μ α δ'.

Ἄν δύο τρίγωνα ἔχωσι μόνον μίαν γωνίαν ἴσην,
 καὶ μὴ ἀναλόγους τὰς πλευράς, τότε τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν
 ἔξουσι πρὸς ἀλλήλα ὡς τὰ γινόμενα τῶν πλευρῶν τῶν
 περὶ τὴν ἴσην γωνίαν. Καθότι ἂν $M : N :: AB \times BF :$
 $BA \times BE$, ἔσαι καὶ $\frac{M}{2} : \frac{N}{2} :: AB \times BF : BA \times BE$.

Π ὁ ρ ι σ μ α ε'.

Ἐκ τριῶν μεγεθῶν τὸ πρῶτον ἔχει πρὸς τὸ τρίτον
 λόγον συγκείμενον ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτε-
 ρον μέγεθος, καὶ τὸ δεύτερον πρὸς τὸ τρίτον. Ἐξώσαν τρία
 μεγέθη ὅποιαδήποτε, ὡς τὰ A, B, Γ , τότε λέγω ὅτι
 ἔξει $A : \Gamma :: \frac{A}{B} : \frac{\Gamma}{B} :: AB : B\Gamma$. Καθότι ὄντος $\frac{A}{B} = \frac{A}{B}$
 $\times \frac{B}{\Gamma}$ καὶ διὰ τοῦτο $A : \Gamma :: \frac{A}{B} : \frac{\Gamma}{B}$.

Π ρ ὁ τ α σ ι ς. κδ'.

Παντὲς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον
 παραλληλόγραμμα εἶναι ὅμοια καὶ ἀλλήλοις καὶ μὲ τὸ
 ὅλον.

Ἐξω $\Delta\Gamma$ τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον, τότε λέγω
ὅτι τὰ $\Delta\Gamma$, $\Delta\Theta$, $\Delta\Lambda$ εἶναι ὅμοια. σχ. 159.

Τὰ τρίγωνα $\Delta\Gamma\Delta$, $\Delta\Theta\Delta$, $\Delta\Lambda\Delta$ εἶναι ἰσογώνια
(πρ. κθ'. βιβ. α') , καὶ διὰ τοῦτο ὅμοια (πρ. δ'). ὥστε
ἐξω $\Delta\Gamma : \Delta\Theta :: \Delta\Theta : \Delta\Lambda :: \Delta\Lambda : \Delta\Lambda$. ἀλλ' ἡ μὲν
 $\Delta\Gamma = \Delta\Delta$, ἡ δὲ $\Delta\Theta = \Delta\Delta$, ἡ δὲ $\Delta\Lambda = \Delta\Delta$, διὰ
τοῦτο ἐξω καὶ $\Delta\Gamma : \Delta\Theta :: \Delta\Theta : \Delta\Lambda :: \Delta\Lambda : \Delta\Lambda$: του-
τέστι τὰ παραλληλόγραμμα $\Delta\Gamma$, $\Delta\Theta$, $\Delta\Lambda$ ἔχουσι περὶ
τὰς ἴσας γωνίας ἀναλόγους τὰς πλευράς, καὶ διὰ τοῦτο
ὅμοια (ὅρ. α').

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὡς αὖ ἐντὸς παραλληλογράμμου ἐγγραφῇ ὅμοιον
παραλληλόγραμμον μὲ κοινὴν γωνίαν, αἱ πλευραὶ αὐτοῦ
ἐπεκταθεῖσαι μέχρι τῶν πλευρῶν τοῦ ὅλου παραλληλο-
γράμμου θέλουσιν ἐκτελέσει ἄλλο παραλληλόγραμμον
ὅμοιον καὶ μὲ τὸ μέρος καὶ μὲ τὸ ὅλον. Οὕτως οὗτος τοῦ
παραλληλογράμμου $\Delta\Gamma$ ὅμοιου μὲ τὸ $\Delta\Gamma$, αὖ ἡ $\Delta\Theta$ καὶ
 $\Delta\Lambda$ ἐπεκταθεῖσαι μέχρι τῶν σημείων Δ , καὶ Δ , τὸ γε-
νησόμενον παραλληλόγραμμον $\Delta\Delta$ θέλει εἶναι ὅμοιον
μὲ τὸ $\Delta\Delta$.

Π ρ ό τ α σ ι ς. κέ.

Νὰ συζητήσῃς εὐθύγραμμον ὅμοιον μὲ τὸ δοθὲν,
καὶ ἴσον μὲ ἑτερον δοθὲν.

Ἐξω M τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον, οὗτινος ζητεῖται
ὅμοιον. καὶ N , οὗτινος ζητεῖται ἴσον. σχ. 160.

Παρά μὲν τὴν AB εὐθείαν ἀναγράφω ὀρθογώνιον
τὸ $AB\Gamma\Delta = M$ (πρ. μέ'. βιβ. α'). παρά δὲ τὴν AD
εὐθείαν, τὸ ὀρθ. $AD\Delta Z = N$, μετὰ δὲ τὴν AB , καὶ

ΑΖ ευθείαν εὐρίσκω μέσσην ἀνάλογον τὴν ΗΘ, καὶ ἐπ' αὐτὴν γράφω τὸ εὐθύγραμμον Ξ ὅμοιον μὲ τὸ Μ (πρ. ιη.). καὶ λέγω ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον.

Καθότι ἐπειδὴ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, τὰ εὐθύγραμματα Ξ καὶ Μ εἶναι ὅμοια, διὰ τοῦτο $M : \Xi :: AB^2 : HO^2$ (πρ. ιθ''). ἐπειδὴ πάλιν καὶ τὰ ὀρθογώνια ΑΒΓΔ, ΑΔΕΖ εἶναι ἰσοϋψῆ, διὰ τοῦτο $AB\Gamma\Delta : A\Delta EZ :: AB : AZ$ (πρ. α'). ἀλλ', ἐκ τῆς κατασκευῆς, τὸ μὲν $AB\Gamma\Delta = M$, τὸ δὲ $A\Delta EZ = N$, διὰ τοῦτο $M : N :: AB : AZ :: AB^2 : HO^2$ (ὁρ. ζ'. βιβ. ε'). ὥςτε $M : N :: M : \Xi$ (πρ. ια'. βιβ. ε'). καὶ διὰ τοῦτο $\Xi = N$ (πρ. θ'. βιβ. ε') : ὁ ἐς τὸ εὐθύγραμμον Ξ εἶναι καὶ ὅμοιον μὲ τὸ Μ καὶ ἴσον μὲ τὸ Ν, ὡς ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ι ς κς'.

Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου ἀφαιρεθῇ παραλληλόγραμμον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον μὲ τὸ μειωτέον, ἔχον κοινὴν γωνίαν μὲ αὐτὸ, ἔξουσιν ἀμφοτέρω κοινὴν τὴν διάμετρον.

Ἐςω ΑΒΓΔ τὸ μειωτέον καὶ ΔΕΖΗ τὸ ἀφαιρετέον, καὶ ΔΑ : ΔΓ :: ΔΕ : ΔΗ, τότε λέγω ὅτι ἡ διάμετρος ΔΒ θέλει διέλθει διὰ τοῦ σημείου Ζ. σχ. 161.

Εἰδὲς μὴ, ἅς διέλθῃ δι' ἐνὸς ἄλλου σημείου, ὡς διὰ τοῦ Θ.. ἄγω τὴν ΗΘ παραλληλὴν μὲ τὴν ΔΓ, καί μοι προκύπτουσι δύο ὅμοια παραλληλόγραμμα τὰ ΔΚΘΗ, ΔΑΒΓ (πρ. χδ'), καὶ διὰ τοῦτο $\Delta K : \Delta H :: \Delta A : \Delta \Gamma$. ἀλλ', ἐξ ὑποθέσεως, καὶ $\Delta A : \Delta \Gamma :: \Delta E : \Delta H$, ὅθεν $\Delta E : \Delta H :: \Delta K : \Delta H$ (πρ. ια'. βιβ. ε'). ὥςτε $\Delta E = \Delta K$ (πρ. ια'. βιβ. ε'), ὁ περ εἶναι ἄτοπον. Ὡς...

Π ό ρ ι σ μ α.

"Ως φυλαττομένης τῆς αὐτῆς γωνίας $\Delta\Delta\Gamma$: ὅς ἐστι τῆς αὐτῆς ἀναφορᾶς δύο δυνάμειων ἐνεργουσῶν πρὸς ἓν σῶμα κατὰ τὴν $\Delta\Delta$ καὶ $\Delta\Gamma$, τὸ σῶμα ἔχει νὰ διέλθῃ τὴν $\Delta\Gamma$ διαγώνιον.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς. κζ.

Ἐκ πάντων τῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἀναγραφομένων ἑλλειπῶν παραλληλογράμμων, ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων μὲ τὸ ἐπὶ τῆς ἡμισείας, τὸ ἐκ τῆς ἡμισείας εἶναι τὸ μέγιστον.

"Εσω AB ἡ δαθείσα εὐθεῖα, τετμημένη εἰς α κατὰ τὸ Γ σημεῖον. σχ. 162.

Ἐπὶ τῆς ἡμισείας GB ἀναγράφω τὸ παραλληλόγραμμον $\Gamma\Delta$, καὶ μὲ αὐτὸ ὅμοιον τὸ HO : ὅς ἐστι περὶ τὴν BE διάμετρον (πρ. κδ'). ὥσπερ αὐτῶς καὶ ἐπὶ τῆς ἡμισείας AG τὸ AE , καὶ ἐπὶ τῆς AH οὐσῆς μείζονος τῆς ἡμισείας τὸ AZ , ὄντων ὁμοίων μὲ τὸ HO , καὶ λέγω ὅτι τὸ $AE > AZ$ καὶ παντὸς ἄλλου, πλην τοῦ ἐπὶ τῆς AB .

Καθότι τὸ $\Gamma Z = Z\Delta$, καθὸ παραπληρώματα. προσίθῃμι κοινῶς τὸ HO , καὶ ἔχω $\Gamma\Theta = H\Delta$. ἀλλὰ τὸ $\Gamma\Theta = AK$ (πρ. λς'. βιβ. α'). ὥς $AK = H\Delta$. καὶ προσθέμενος κοινῶς τὸ ΓZ , ἔξω $AZ = H\Delta + \Gamma Z = \gamma\nu\omega\mu. \alpha\beta\gamma.$ ἀλλὰ $\gamma\nu\omega\mu. \alpha\beta\gamma < \Gamma\Delta$, ὡς μέρος καὶ ὅλον, ὅθεν καὶ $AZ < \Gamma\Delta$. ἀλλὰ $\Gamma\Delta = AE$, διὰ τοῦτο καὶ $AE > AZ$. "Ως τὸ παρ. AE : τὸ ἐπὶ τῆς ἡμισείας δηλ. τῆς δαθείσης AB , καὶ ὄν ὁμοίων μὲ τὸ ἑλλειμμα $\Gamma\Delta$: τὸ ἐπὶ τῆς ἡμισείας, εἶναι μείζον τοῦ AZ , τοῦ ἐπὶ

τῆς ΑΗ καὶ ἔχοντος ὅμοιον τὸ ἔλλειμμα τὸ ΗΘ μὲ τὸ ΓΔ (πρ. κθ'), ὡς ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς. κη'.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ ἀναγράφητις παραλληλόγραμμον ἴσον μὲ τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον καὶ ἔλλειπον κατὰ παραλληλόγραμμον ὅμοιον μὲ τὸ δοθὲν.. πλὴν τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον, οὗ τινος ζητεῖται ἴσον, νὰ μὴ ᾖναι μείζον τοῦ ἐπὶ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένου μετὰ ἔλλειμματος ὁμοίου μὲ τὸ ἐπὶ τῆς ἡμισείας.

Ἔστω ΑΒ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, ἐφ' ἣν ζητεῖται νὰ ἀναγραφῇ τὸ παραλληλόγραμμον Μ τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον, οὗ τινος ζητεῖται ἴσον, καὶ Ν τὸ παραλληλόγραμμον, οὗ τινος ζητεῖται ὅμοιον. σχ. 163.

Ἐγὼ εἶχα τὴν ΑΒ κατὰ τὸ σημεῖον Γ.. ἀναγράφω ἐπὶ τῆς ΑΓ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΔ ὅμοιον μὲ τὸ δοθὲν Ν (πρ. ιη').. ἐκπληρῶ τὸ παραλ. ΑΕ. Ἀν λοιπὸν καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΔ ᾖναι ἴσον μὲ τὸ Μ, τὸ ζητούμενον ἔλαβε πέρας (πρ. κε')·, διότι τὸ παραλ. ΑΔ εἶναι ἴσον μετὰ τοῦ ἔλλειμματος ΓΕ, τοῦ ὄντος ὁμοίου καὶ μὲ τὸ ΑΔ καὶ μὲ τὸ Ν. εἶδ' καὶ εἶναι ἀνιστον, ἐπειδὴ ἕνεκα τῆς ὑποθέσεως, ἀδυνατεῖ νὰ ᾖναι ἔλασσον, θέλει εἶναι μείζον. Ὡς εὗρισκω τὴν ὑπεροχὴν αὐτοῦ (πρόρ. πρ. μέ. βιβ. α'). καὶ τότε ἴσον μὲ αὐτὴν καὶ ὅμοιον μὲ τὸ παραλ. ΓΕ γράφω τὸ παραλ. ΔΗ (πρ. κε').. ἄγω τὴν διαγώνιον ΔΒ, καὶ διὰ τοῦ σημείου Η ἄγω παραλλήλους μὲ τὴν ΑΒ καὶ ΒΕ τὰς ΚΖ, ΘΘ.

Τὸ παραλ. ΓΕ = παραλ. ΔΗ + γνωμ. αβγ = παραλ. ΔΗ + Μ, ἐκ τῆς κατασκευῆς.. ἀλλ' ὁ γνωμ.

$\alpha\beta\gamma = \text{παραλ. } \Lambda\text{H}$, ὡς εἶναι γνωστόν.. ὥς τὸ παραλ.
 $\Lambda\text{H} = \text{M}$, καὶ ἐπιγέγραπται καὶ ἐπὶ τῆς AB μετὰ ἐλ-
 λείμματος τοῦ ΘZ , ὅντος ὁμοίου μὲ τὸ ἐπὶ τῆς ἡμισείας
 ΓB (πρ. κθ')... ὥς τὸ παραλ. ΛH εἶναι τὸ ζητούμενον.

Π ο ρ ι σ μ α .

Ὡς εἰς τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον, οὗτινος ζη-
 τεῖται ὅμοιον ἐλλείπον, ἥναι τετράγωνον, τότε αὕτη ἡ
 πρότασις τρέπεται εἰς τὴν ε'. τοῦ β'. βιβλίου: τουτέστι
 τὸ, ἂν εὐθεῖα γραμμὴ (ἡ AB) τμηθῇ εἰς ἴσα (κατὰ τὸ
 Γ), καὶ εἰς ἄνισα (κατὰ τὸ Θ), τὸ ἐκτῶν ἀνίσων μερῶν
 ὀρθογώνιον θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἡμι-
 σείας ἀποθέσει τοῦ τετραγώνου τοῦ μεταξὺ τῶν τομῶν:
 $\Theta\epsilon\sigma\iota\nu \Lambda\Theta \times \Theta\text{B} = \Gamma\text{B}^2 - \Gamma\Theta^2$: τουτέστιν ἐπειδὴ καὶ
 ὑπετέθη τὸ $\Lambda\Delta (= \Gamma\text{E}) > \text{M}$, διὰ τοῦτο ὑπῆρξε
 χρεῖα νὰ ἀφαιρεθῇ ἐξ' αὐτοῦ ἡ ὑπεροχὴ: τουτέστι τὸ $\text{H}\Delta$
 $(= \Gamma\Theta^2)$, καὶ οὕτως ἡ διαφορὰ: τουτέστιν ὁ γνωμ. $\alpha\beta\gamma$
 $(= \Lambda\text{H})$ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον, ὡς ἔχουσα ἐλλειμ-
 μα τὸ ΘZ τὸ ὅν ὁμοιον μὲ τὸ ΓE , καὶ διὰ τοῦτο καὶ
 μὲ τὸ N .

Π ρ ό τ α σ ε ι ς. κθ'.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ ἀναγράψῃ τις παραλ-
 ληλόγραμμον ἴσον μὲ τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον, καὶ ὑπερ-
 βάλλον κατὰ τὸ παραλληλόγραμμον ὅμοιον μὲ τὸ δοθὲν.

Ἐς AB ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, ἐφ' ἧς ζητεῖται νὰ
 ἀναγραφῇ τὸ παραλληλόγραμμον.. M τὸ δοθὲν εὐθύγραμ-
 μον, οὗτινος ζητεῖται ἴσον, καὶ N τὸ παραλληλόγραμ-
 μον, οὗτινος ζητεῖται ὅμοιον ὑπερβάλλον. σχ. 164.

Τέμνω δίχα τὴν AB κατὰ τὸ σημεῖον Γ .. ἀνα-

γράφω ἐπὶ τῆς ΓΒ τὸ παραλ. ΒΕ ὁμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον μὲ τὸ Ν.. ἐκτελῶ τὸ παραλ. ΕΘ ὁμοιον μὲ τὸ παραλ. ΒΕ καὶ ἴσον μὲ τὸ παραλ. ΒΕ + Μ (προ. μέ. βιβ. α'). ἐπεκτείνω τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΖΒ μέχρι τοῦ Δ καὶ Η σημείου.. ἐκπληρῶ τὸ παραλ. ΑΘ, καὶ λέγω ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον.

Καθότι, ἐκ τῆς κατασκευῆς, παραλ. ΕΘ = παραλ. ΕΒ + Μ.. ἀλλὰ παραλ. ΕΘ = παραλ. ΕΒ + γνωμ. αβγ.. ὥς γνομ. αβγ = Μ.. ἀλλὰ γνωμ. αβγ = παραλ. ΑΘ, ὥς τὸ παραλ. ΑΘ = Μ, ἐπιγέγραπται δὲ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΒ δοθείσης εὐθείας καὶ μετὰ ὑπερβάλλοντος παραλληλογράμμου τοῦ ΒΘ τοῦ ὅντος ὁμοίου μὲ τὸ ΕΒ. (πρ. κδ.) ὥς διὰ τοῦτο καὶ μὲ τὸ δοθὲν Ν.

Π ῥ ὁ ρ ι σ μ α.

Ὡς ἂν τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον, οὗτινος δηλουότι ζητεῖται ὁμοιον ὑπερβάλλον, ἦναι τετράγωνον, τότε αὕτη ἡ πρότασις τρέπεται εἰς τὴν ζ'. τοῦ β. βιβ. λίου τὸ, ἂν εὐθεῖα γραμμὴ (ἡ ΑΒ) τμηθῇ εἰς ἴσα (κατὰ τὸ Γ), καὶ εἰς αὐτὴν προσεῖθῇ εὐθεῖα τις ἐπ' εὐθείας (ἡ ΑΔ), τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἐκ τῆς δοθείσης καὶ τῆς προσκειμένης εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἡμισείας μετὰ τῆς προσκειμένης ἀποθέσει τοῦ τετραγώνου τῆς ἡμισείας: τούτέστιν $ΑΔ \times ΒΔ = ΓΔ^2 - ΓΒ^2$.

Π ρ ὁ τ α σ ι ς. λ'.

Τὴν δοθείσαν πεπερασμένην εὐθεῖαν νὰ τμήηται κατὰ μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

Ἐξω ΑΒ, ἡ δοθείσα εὐθεῖα. σχ. 165.

Τέμνω τὴν ΑΒ εὐθεῖαν οὕτω πως κατὰ τὸ Γ, ὥς

ὀρθογώνιον τὸ ἐκ τῆς ὅλης AB καὶ τοῦ τμήματος GB νὰ ᾖσαι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἑτέρου τμήματος AG (πρ. α'. βιβ. β').: τουτέστιν $AB \times GB = AG^2$.. ἀλλὰ πάντα ἐξίσωσις τρέπεται εἰς ἀναλογίαν, διὰ τοῦτο $AB : AG :: AG : GB$.. ὥς ἡ AB τέμνεται κατὰ τὸν μέσον καὶ ἄκρου λόγον (ὄρ. γ'), ὡς ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ι ς. λα'.

Εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας σχῆμα εἶναι ἴσον μὲ τὰ ἐπὶ τῶν λοιπῶν δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου ἀναγραφόμενα ὁμοίως σχήματα.

"Εξω τριγώνου ὀρθογώνιον τὸ $ABΓ$, καὶ ὅμοια σχήματα τὰ M , N , Ξ , τότε λέγω ὅτι $M = N + \Xi$. σχ. 166.

Καθότι ἐπειδὴ $M : BΓ^2 :: N : AΓ^2 :: \Xi : AB^2$ (πρ. κ').. καὶ ἐπειδὴ $M + N + \Xi : BΓ^2 + AΓ^2 + AB^2 :: M : BΓ^2$ (πρ. α'. βιβ. ε'), διὰ τοῦτο καὶ ἐναλλάξ $M + N + \Xi : M :: BΓ^2 + AΓ^2 + AB^2 : BΓ^2$.. καὶ ἀφαιρέσει $N + \Xi : M :: AΓ^2 + AB^2 : BΓ^2$.. ἀλλὰ $BΓ^2 = AΓ^2 + AB^2$ (πρ. μζ'. βιβ. α').. ὥς καὶ $M = N + \Xi$ (πρ. θ'. βιβ. ε').

Π ό ρ ι σ μ α.

"Ως ἐπειδὴ καὶ οἱ κύκλοι εἶναι ὅμοια σχήματα (πρ. β'. πρ. β'), ἐξ οὗ καὶ τὰ τούτων ἡμίσεις, εἴτε ἡμικύκλια (ὄρ. ι'. βιβ. γ') διὰ τοῦτο ἡμικ. $BΓA =$ ἡμικ. $AΓΔ +$ ἡμικ. ABE . σχ. 167.

"Ως ἀφαιρεθέντων κοινῶς τῶν κοινῶν χωρίων, μένει τριγ. $ABΓ$ ἴσον μὲ τὰς δύο μηννοειδεῖς: τουτέστιν $\alpha = \beta + \gamma$.

"Ὡς αὖ τὸ ὀρθογώνιον τριγώνον $AB\Gamma$ ἦν ἰσοσκε-
λές, τότε ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ἦθελεν εἶναι
διπλάσιον ἑκατέρας τῶν μηνοειδῶν, καὶ διὰ τοῦτο αὐται
ἴσαι ἀλλήλαις, ὅπερ Ἰπποκράτης ὁ Χίος πρῶτος ἀπέδειξεν.

Π ρ ό τ α σ ι ς λβ'.

Ἐὰν δύο τριγώνων ἦναι ἀνάλογοι τε αἱ δύο πλευραὶ
καὶ παράλληλοι αἱ ὁμόλογοι, ταῦτα τὰ τρίγωνα θέλουσιν
εἶναι ὅμοια.

Ἐστω $AB : A\Gamma :: \alpha\Gamma : \alpha\gamma$.. καὶ ἡ μὲν AB παράλ-
ληλος μὲ τὴν $\alpha\Gamma$, ἡ δὲ $A\Gamma$ μὲ τὴν $\alpha\gamma$, τότε λέγω ὅτι
συντεθέντων τῶν τριγώνων $AB\Gamma$, $\alpha\Gamma\gamma$ κατὰ τὴν Γ γω-
νίαν, ἡ $\Gamma\gamma$ εὐθεῖα θέλει εἶναι ἐπ' εὐθείας μὲ τὴν $B\Gamma$:
τουτέστιν ὅμοια τὰ τρίγωνα. σχ. 168.

Καθότι ἡ γων. $A =$ γων. β (πρ. κθ'. βιβ. α')...
ὡσαύτως καὶ ἡ γων. $\alpha = \beta$.. ὅθεν καὶ ἡ γων. $A =$ γων.
 α (ἀξ. α')... ἀλλ', ἐξ ὑποθέσεως, $AB : A\Gamma :: \alpha\Gamma : \alpha\gamma$..
ὥς τε τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$, $\alpha\Gamma\gamma$ εἶναι ὅμοια (πρ. δ')... ἀλλ'
 AB εἶναι παράλληλος μὲ τὴν $\alpha\Gamma$, ἄρα καὶ ἡ $B\Gamma$ μὲ τὴν
 $\Gamma\gamma$ (πρόρ. α'. πρ. δ'), καὶ ἐχομένως ἐπ' εὐθείας, αὖ ἡ
μία τεθῇ μετὰ τὴν ἄλλην, εἴτε ἡ $B\gamma$ εὐθεῖα γραμμὴ : ὅθεν
τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$, $\alpha\Gamma\gamma$ εἶναι ὅμοια.

Π ρ ό τ α σ ι ς λγ'.

Εἰς τοὺς ἴσους κύκλους αἱ γωνίαι, καὶ πρὸς τῷ κέν-
τρῳ καὶ πρὸς τῇ περιφερείᾳ, εἶναι ἀνάλογοι μὲ τὰτε ὑπο-
τείνοντα αὐτὰς τόξα καὶ μὲ τοὺς τομεῖς.

Ἐσώσαν ἴσοι οἱ κύκλοι $AB\Gamma$, $\alpha\beta\gamma$, τότε λέγω
ὅτι γων. $BA\Gamma : \gamma\omega\nu. \beta\alpha\gamma :: \tau\omicron\zeta. B\Gamma : \tau\omicron\zeta. \beta\gamma :: \tau\omicron\mu.$
 $BK\Gamma : \tau\omicron\mu. \beta\kappa\gamma$. σχ. 169.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἡ γων. ΒΚΓ εἶναι ἐν μέρος τοιούτου τῶν τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν τῶν περὶ τὸ σημεῖον Κ (πρόρ. β'. πρ. ιγ'. βιβ. α'): οἷον τὸ τοξ. ΒΓ τῆς ὕλης περιφερείας ΑΒΓ, εἴτε τῶν 360°. διότι πᾶσα περιφέρεια καταμετρεῖ τέσσαρας ὀρθὰς γωνίας, καὶ οὔτε πλέον, οὔτε ἔλαττον, τούτου ἕνεκεν εἰς ἓνα κύκλον μία γωνία ἔχει τοσαύτας μονάδας ἐκ τῶν 360, ὅσας καὶ τὸ ὑποτείνον αὐτὴν τόξον: ὅθεν εἶναι ἀνάλογα.. καὶ ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, οἱ κύκλοι ἐνταῦθα εἶναι ἴσοι, διὰ τοῦτο ἔξω γων. ΒΚΓ: τοξ. ΒΓ:: γων. βγκ: τοξ. βγ, καὶ ἐναλλάξ γων. ΒΚΓ: γων. βγκ:: τοξ. ΒΓ: τοξ. βγ.

β'. Ἐπειδὴ καὶ ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ γωνία εἶναι ἡμίση τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ, ἂν ὑποτείνεται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ τόξου (πρ. κ'. βιβ. γ').. καὶ τὰ ἡμίσητα ἔχουσιν ὡς τὰ ὅλα (πρ. δ'. βιβ. ε'), διὰ τοῦτο γων. Α: γων. α.: τοξ. ΒΓ: τοξ. βγ.

γ'. Ἐπειδὴ καὶ οἱ τομεῖς ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ τρίγωνα μετὰ κοίλης τῆς βάσεως, καὶ ἐνταῦθα διὰ τὴν ἰσότητά τῶν κύκλων οἱ τομεῖς εἶναι ἰσοῦψεῖς, διὰ τοῦτο καὶ τομ. ΒΚΓ: τομ. βγκ:: τοξ. ΒΓ: τοξ. βγ. (πρ. α').

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὡς εἰς τοὺς ἀνίσους κύκλους τὰ τόξα τὰ ὑποτείνοντα ἴσας γωνίας, εἴτε πρὸς τῷ κέντρῳ, εἴτε πρὸς τῇ περιφερείᾳ, εἶναι ὁμόλογα καὶ μετὰς λοιπὰς περιφερείας καὶ μετὰ ὁλοκλήρους (πρ. ε'. βιβ. γ'), καὶ ἐπομένως ἀνάλογοι αἱ χορδαὶ αἱ ὑποτείνουσαι ἴσας γωνίας.. καὶ τούτου ἕνεκεν καὶ αἱ διαμέτροι δύο κύκλων, ὡς ὑποτείνουσαι δηλ.

ὁρθαῖς γωνίας εἶναι ἀνάλογαι, ὡς εἶδομεν, μὲ τὰς χορδὰς τὰς ὑποτείνουσας ἴσας γωνίας (πόρ. β'. πρ. β').

ΒΙΒΛΙΟΝ ΙΑ'. (α).

ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΩΝ. Α'.

Ὁ ρ ο ι.

α'. Στερεὸν λέγεται τὸ ἔχον τρεῖς διαστάσεις : μῆκος, πλάτος, καὶ βάθος.

(α) Εἰς τὰ πρῶτα ἑξ βιβλία ὁ γεωμέτρης ἐξέθετο τὸ μέτρον καὶ ἀναφορὰν τῶν γραμμῶν καὶ ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν, εἰς δὲ τὸ ζ', η', καὶ θ', τὰ πάθη τῶν ἀριθμῶν : τουτίς τὴν ἀριθμητικὴν, ἥτις δηλοῦσι παρ' ἡμῶν ἐκτέθη ἀνὰ μέρος πρότερον, εἰς δὲ τὸ ι., τὰ πάθη τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν, ἀπερ' δηλοῦσι στήκουσιν εἰς τὴν ἀνάλυσιν ἢ ἀλγεβρᾶν, εἰς δὲ τὸ ια' καὶ ιβ', τὸ μέτρον καὶ ἀναφορὰν τῶν στερεῶν, εἰς ἅπερ καὶ ἐμβαίνομεν.

Στερεῖον λοιπὸν εἶναι πᾶν ἐκεῖνο, ὅπερ ἔχει μῆκος, πλάτος, καὶ βάθος, καὶ ἐν ταυτῷ ἀντίστασιν καὶ βαρύτητα : τουτίς τε ἅπαντα τὰ σώματα. Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ὁ γεωμέτρης φρονεῖν πολυλά ὀλίγον περὶ τῆς ἀντικυπίας καὶ βαρύτητος τῶν σωμάτων, τοῦτον εὗρκεν εἶναι ταῦτα : τὰς ιδιότητας εἰς τοὺς φυσικοὺς, ἐξετάζει τὰ σώματα μόνον ὡς ἐκτατὰ, εἴτε ὡς ἔχοντα μόνον μῆκος, πλάτος, καὶ βάθος. Καὶ τοῦτου εὗρκεν τὸ γεωμετρικὸν σῶμα διαφέρειν τοῦ φυσικοῦ, ὡς ὅν ἄνευ βαρύτητος καὶ ἀντικυπίας, καὶ ἐπομένως σῶμα γεωμετρικὸν ἢ στερεὸν εἶναι λίξις σκῆλον μὲ τὴν δοχὴν. Καὶ τὸ μὲν μῆκος τῶν σωμάτων ἐκτίθεται διὰ τῶν γραμ-

β'. Τὰ πέρατα τοῦ σφαιροῦ εἶναι ἐπιράνεια.

γ'. Εὐθεῖα εἶναι ὀρθή πρὸς ἐν ἐπίπεδον, ὅταν ᾖ πρὸς ὀρθὰς μὲ πᾶσας τὰς ἀπὸμείνας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὕτως ἐν τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ ἐπίπεδῳ, ὡς ἡ ΑΒ. διότι ἡ γων. ΓΒΑ = γων. ΕΒΑ = 90°. σχ. 176.

δ'. Ἐπίπεδον εἶναι ὀρθὸν πρὸς ἐπίπεδον, ὅταν μία εὐθεῖα ἀχθεῖται πρὸς ὀρθὰς εἰς τὴν κοινὴν τομὴν μὲ θάτερον ἐπίπεδον, ἥναι ὀρθήκαί μὲ τὸ ἕτερον. Οὕτως αὐτῆς ΑΒ οὕσης πρὸς ὀρθὰς μὲ τὸ ΕΗ, εἴτε μὲ τὸ ΕΖ, ἥναι καὶ ἡ γων. ΑΒΕ = 90°. τότε τὸ ΕΖ εἶναι ὀρθὸν πρὸς τῷ ΓΔ. σχ. 187.

ε'. Κλίσις εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον λέγεται ἡ γωνία

μὲν, τὸ δὲ πλάτος διὰ τῶν ἐπιφανειῶν, τὸ δὲ βάθος, εἴτε τὸ τριγῶν διαστατὸν διὰ τῶν σφαιρῶν.

Καὶ ἔκαστον μὲν τῶν σωμάτων ὡς κατέχον ἐν μέρει τοῦ κενροῦ διαστήματος ἔχει τριπλῆς διαστάσεις. ὁ ἀνθρώπος ὁ ὅμως νοῦς ἀπαντᾷ οὐδεμίαν δυσκολίαν εἰς τὸ νὰ τὰ ἐνωσῇ ἰδίως, καὶ εἴτε εἰς τὸ νὰ δώτῃ ὑπαρξεν καὶ γένεσιν εἰς αὐτὰ. Καθεστὶ αὖ δυνάμει κίνησιν, ὡς εἰπομεν κατ' ἀρχαίς, εἰς τὴν σφαίραν αἰμαρὶς, ὑποτρεφείνῃ νὰ ἰᾷ καθ' ὁδὸν σημεῖα, ἔξι γραμμῶν, καὶ αὖ εἰς αὐτὴν δώσῃ κίνησιν μὴ ἐπ' εὐθείας, ἔξι ἐπιφανειῶν ἐκ τῶν ἐσθίντων σημείων, καὶ αὖ εἰς αὐτὴν δώσῃ κίνησιν μὴ ἐπ' εὐθείας, ἔξι ὀγκον, ἢ σῶμα γεωμετρικόν· αὐτοῦ βάρους, δηλονότι καὶ ἀντιστοίχως. Ὡς τε πᾶν σῶμα εἶναι δυνατόν νὰ ἐκληθῇ ὡς γινόμενον ἐκ κινήσεως μᾶς ἐπιφανείας, κινήσεως ὅμως μετὰ γωνίας.

Ἐπειδὴ ὅμως καὶ ἡ κίνησις μᾶς εὐθείας ἢ γραμμῆς εἶναι δυνατόν νὰ γίνῃ καὶ ἐπ' εὐθείας, τότε τὸ γινόμενον θάλλει εἶναι οὔτε ἐπιφανεια, οὔτε σῶμα, ἀλλ' ὅπερ καὶ πρότερον· μονάδις δηλονότι τοῦ αὐτοῦ εἶδους, ὅπερ δηλ. εἶναι τῆς ἀρθομητικῆς καὶ ὅχι τῆς γεωμετρικῆς, ἐξ οὗ συνάγεται, ὅτι οὐδεὶς ἀριθμὸς εἶναι ἐπίπεδος ἢ σφαιρικός.

ἡ γενομένη ἐξ αὐτῆς τῆς εὐθείας καὶ μιᾶς ἄλλης ζευγυ-
ούσης τὰ πέρατα αὐτῆς τε καὶ τῆς καθέτου τῆς ἀπὸ
τοῦ μετεώρου πέρατος ἐκείνης ἀχθείσης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.
Οὕτω κλίσις τῆς AB εἶναι ἡ γων. $ABΓ$, οὗσης καθὺ-
του τῆς $ΑΓ$ τῆς ἀπὸ τοῦ A πέρατος τῆς BA ἀχθείσης.
σχ. 170. (α).

ζ'. Κλίσις ἐπιπέδου, ἥτις καὶ γωνία ἐπίπεδος ἐνο-
μάζεται, πρὸς ἐπίπεδον λέγεται ἡ γωνία ἡ γενομένη
ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων πρὸς ὀρθὰς μετὰ τὴν κοι-
νὴν τομὴν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου (ἐφ' ἑκάτερον τῶν ἐπι-
πέδων).

Οὕτως οὗσης κοινῆς ταμῆς τῆς ZE τῶν δύο ἐπι-
πέδων $ΔΕ$, ZH , καὶ οὐσῶν πρὸς ὀρθὰς μετὰ αὐτὴν τῶν
εὐθειῶν BA , $BΓ$, ἡ γων. $ABΓ$ εἶναι ἡ κλίσις τοῦ ἐπι-
πέδου $ΔΕ$ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ZH . σχ. 171.

ζ'. Δύο ἐπίπεδα λέγονται πῶς κλίνονται ὁμοίως
ἐπὶ δύο ἐπιπέδων, ὅταν αἱ γωνίαι τῆς κλίσεως αὐτῶν
ᾗναι ἴσαι.

η'. Παράλληλα ἐπίπεδα λέγονται τὰ ἀσύμπτωτα.

θ'. Ὅμοια σφαιρὰ σχήματα λέγονται τὰ ὑπὸ ὁμοίων
καὶ ἴσων τῷ πλῆθος ἐπιπέδων περιεχόμενα.

ια'. Γωνία σφαιρὰ λέγεται ἡ σύμπτωσις εἰς ἓν ση-

(α) Κυρίως ὅμως λέγω ἐγὼ, κλίσις μιᾶς εὐθείας πρὸς ἓν ἐπι-
πέδον ἤθελον εἶναι ἡ γωνία ἡ ὑπὸ αὐτῆς καὶ τῆς πρὸς ὀρθὰς
ἀχθείσης ἀπὸ πέρατος αὐτῆς, ὡς ἡ γων. ABZ : τοῦτ' ἐστὶ τὸ ἀνα-
πλήρωμα τῆς γων. $ABΓ$. Καθότι ἡμῖς μίαν καθέτην πρὸς ἓν
ἐπίπεδον λέγομεν ὅτι κλίνει τελείως.

μείον πλειόνων, ἢ δύο γραμμῶν καὶ μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κειμένων, ὡς ἡ γων. Α. σχ. 190.

ι'. Ἰσα καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματα λέγονται τὰ ὑπὸ ὁμοίων καὶ ἴσων τό, τε πλήθος καὶ μέγεθος ἐπιπέδων περιεχόμενα.

ιβ'. Πρίσμα εἶναι σχῆμα στερεὸν περιεχόμενον ὑπὸ ἐπιπέδου, ἐξ ὧν τὰ μὲν ἐναντία δύο εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια καὶ παράλληλα, ἅπερ καὶ βάσεις οἰομάζονται, τὰ δὲ λοιπὰ παραλληλόγραμμα. Καὶ ἂν μὲν αἱ βάσεις ᾖναι τρίγωνα, τὸ πρίσμα λέγεται τριγωνικόν, ὡς τὸ ΑΒΓΖΕΔ, εἰ δὲ παραλληλόγραμμα, παραλληλεπίπεδον, εἰ δὲ πεντάγωνον, πενταγωνικόν, ὡς τὸ ΗΘΚΛ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. σχ. 172. (α).

ιγ'. Τετραέδρον εἶναι σχῆμα στερεὸν περιεχόμενον ὑπὸ τεσσάρων τριγώνων ἰσοπλεύρων καὶ ἴσων τὸ μέγεθος, ὅκταέδρον δὲ τὸ ὑπὸ ὀκτῶ, καὶ εἰκοσάεδρον τὸ ὑπὸ εἴκοσι.

ιδ'. Κύβος, ἢ καὶ ἐξάεδρον εἶναι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ἑξ τετραγώνων ἴσων τὸ μέγεθος περιεχόμενον, ἔχον ἴσας ἀλλήλαις ἀπάσας τὰς ἐπιπέδους ἐπιφανείας.

ιε'. Δωδεκάεδρον εἶναι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων τὸ μέγεθος περιεχόμενον.

Π ρ ό τ α σ ι ς. α'. (β).

Εὐθεῖα γραμμὴ ἀδυνατεῖ νὰ ᾖ μέρος ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου, καὶ μέγος μετεώριος.

(α) Ἡ γένεσις τοῦ πρίσματος γίνεται, τῆς βάσεως κινήσεως παραλλήλως ἐαυτῇ ἐπίπτος εὐθείας.

(β) Πρὸς ὅμως, νὰ πραγματοποιήσῃ περὶ στερεῶν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐκδύσῃ τὰ ἰδιόματα τῶν εὐθεiῶν γραμμῶν κατὰ τὰς διαφορὰς

Εἰ δὲ καὶ εἶναι δυνατόν, ἔξω τῆς $AB\Gamma$ εὐθείας τὸ μὲν AB ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΔE , τὸ δὲ $B\Gamma$ μετεώρως. σχ. 173.

Ἄλλ' ἐπίπεδον εἶναι οὐδὲν ἄλλο, εἰμὴ ἐφ' ὃ ἀρμόζεται εὐθεῖα γραμμὴ (ὅρ. ε'. βιβ. α'). ὥστε τὸ ΔE εἶναι καὶ ἐπίπεδον, καὶ μὴ. Εἴτα ἐγὼ δύναμαι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΔE νὰ ἐπεκτείνω τὸ μέρος AB μέχρι τοῦ σημείου Z , καὶ οὕτως ἔξω δύο εὐθείας: τὰς $AB\Gamma$, ABZ : ὅ ἐστι τὰ σημεῖα A, B, Z , καὶ A, B, Γ ἐπ' εὐθείας (ὅρ. γ'. βιβ. α'), ὅπερ εἶναι ἀτύχατον.

Π έ ρ ι σ μ α.

Ὡς οὕτε ἐπίπεδον δύναται νὰ ᾖ μέρος ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου καὶ μέρος μετεώρως. Καθότι εἶναι δυνατόν νὰ ᾖ ἡ εὐθεῖα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου διὰ πάσης εὐθείας, ὡς διὰ τῆς AZ , $A\Gamma$, καὶ τότε ἐπειδὴ ἡ $A\Gamma$ ἀδυνατεῖ νὰ ὑπάρξῃ καὶ ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου καὶ μετεώρως, διὰ τοῦτο οὕτε τὸ αὐτῆς ἐπίπεδον.

Π ρ ό τ α σ ι ς. β'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, κείνται ἐφ' ἐνὸς ἐπιπέδου.. καὶ αἱ πλευραὶ παντὸς τριγώνου κείνται ἐφ' ἐνὸς ἐπιπέδου.

α'. Αἱ εὐθεῖαι AB , $\Gamma\Delta$ ᾗς τέμνωσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ σημεῖον E , τότε λέγω ὅτι κείνται ἐφ' ἐνὸς ἐπιπέδου. σχ. 174.

αὐτῶν θέσεις ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα, καὶ τῶν ἐπιπέδων ὡς πρὸς ἀλλήλας, ἐπεὶ ὡς φαίνεται, καὶ ὁ Εὐκλείδης περὶ.

Εἰ δὲ καὶ εἶναι δυνατόν ἐν μέρος, ὡς τὸ ΑΕ, τῆς ΑΒ ὥς ἡναι ἔξω τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου, εἴτε μετεώρως, καὶ μέρος, ὡς τὸ ΕΒ, ὥς κῆται ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου.. ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον (πρ. κ'). ὥστε...

β'. Ἐπειδὴ λοιπὸν καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ κείνται ἐφ' ἐνὸς ἐπιπέδου, ζευγνύω τὰ πέρατα αὐτῶν Γ καὶ Β δι' εὐθείας ΓΒ.. καὶ ἐπειδὴ πᾶσα εὐθεῖα κείται ὁλόκληρος ἐφ' ἐνὸς ἐπιπέδου, τούτου ἕνεκεν τὸ τρίγωνον ΕΓΒ κείται ἐφ' ἐνὸς ἐπιπέδου, ἀλλ' ὥς ἐπίπεδον ἤθελε κείται μέρος ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου καὶ μέρος μετεώρως (πρ. πρ. α'), ὅπερ εἶναι ἀδύνατον.

Π ό ρ ι σ μ α. α'.

"Ως διὰ δύο εὐθειῶν ἀλλήλας διατεμνουσῶν δύναμαι νὰ ἄξω ἐπίπεδον.

Π ό ρ ι σ μ α. β'.

"Ως διὰ τριῶν σημείων, ὡς τὸ Ε, Γ, Β, δύναμαι νὰ ἄξω ἐπίπεδον.

Π ό ρ ι σ μ α. γ'.

"Ως ἂν ἐν ἐπίπεδον ἔχῃ ἐφηρμοσμένα τρία σημεία καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τρία σημεία ἄλλου ἐπιπέδου, ταῦτα τὰ ἐπίπεδα θέλουσιν εἶναι ἐφηρμοσμένα ἐπ' ἀλλήλα.

Π ρ ό τ α σ ι ς. γ'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνωσιν ἀλλήλα, εὐθεῖα γραμμὴ θέλει εἶναι ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ.

Τὰ ἐπίπεδα ΑΒ, ΓΔ ὥς τέμνωσιν ἀλλήλα, τότε λέγω ὅτι ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ ΕΖ εἶναι εὐθεῖα. σχ. 175.

Καθότι ἐπιβεβῆ καὶ τὰ ἐπίπεδα $AB, \Gamma\Delta$ εἶναι ἀδαθῇ (ὅρ. δ'. βιβ. α'). εὐθείων ὅτι ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ ἀδυνα-
τεῖ νὰ μὴ ᾖ γραμμὴ, εἴτα θέλει εἶναι καὶ εὐθεῖα,
ἀλλέως ἐκ τῶν δύο σημείων E καὶ Z ἐγὼ δύναμαι νὰ
ἄξω δύο εὐθείας: τὰς EHZ, EZ , καὶ τότε αἱ δύο
εὐθεῖαι περιέξουσιν χωρίον, ὅπερ εἶναι ἀδύνατον.

Π Ὑ Ρ Ι Σ Μ Α.

Ὡς εἶναι δυνατόν διὰ μιᾶς εὐθείας, ὡς τῆς EZ ,
νὰ διαχθῶσι μυρία ἐπίπεδα.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ. δ'.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπισταθῇ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς το-
μῆς δύο εὐθειῶν ἀλλήλας διατεμνουσῶν, πρὸς ὀρθὰς θέ-
λει εἶναι μὲ τὸ δι' αὐτῶν ἐπίπεδον.

Λέ εὐθεῖαι $\Gamma\Delta, EZ$ ἃς τέμνωσιν ἀλλήλας κατὰ
τὸ σημεῖον B .. καὶ ἐφιστάσθω ἡ BA πρὸς ὀρθὰς ἐπ' αὐ-
τὰς εἰς τὸ B σημεῖον, τότε λέγω ὅτι αὐτὴ ἀγθῇ ἐπίπεδον
διὰ τῶν $\Gamma\Delta, EZ$, ἡ BA θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς καὶ μὲ
αὐτὸ. σχ. 176.

Ζευγνύω τὰ σημεία Γ, E διὰ τῆς εὐθείας GE , καὶ
τὰ Δ, Z διὰ τῆς DZ , καὶ ἔχω τὰ τρίγωνα ΓBE ,
 $ZB\Delta$ εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, εἰς ὅπερ κεῖνται καὶ αἱ
διατεμνουσαι (πρ. β'). ἄλλ', ἐξ ὑποθέσεως, ἡ AB
ἐφίσταται πρὸς ὀρθὰς μὲ τὰς εὐθείας $\Gamma\Delta, EZ$, ἄρα
καὶ μὲ τὰ τρίγωνα $\Gamma BE, ZB\Delta$. Ὡσαύτως αὐτὸς ἐξεύγνυσεν
τὰ σημεία Γ, Z καὶ E, Δ διὰ δύο εὐθειῶν, ἤθελον
ἔχει καὶ ἄλλα δύο τρίγωνα, ὡς τὰ $Z\Gamma B, E\Delta B$, ἐφ'
ἅπερ ἡ AB ἤθελεν εἶναι πρὸς ὀρθὰς. Ἀλλὰ ταῦτα τὰ
τρίσσερα τρίγωνα εἶναι ἄλλο, εἰμὴ τὰ διὰ τῶν εὐθειῶν

ΓΔ, ΕΖ ἐπίπεδον, ὥς· ἡ ΑΒ ἐφίσταται πρὸς ὀρθὰς με-
τὸ ἐπίπεδον τῶν διὰ τῶν εὐθειῶν ΓΔ ΕΖ...

Π ὁ ρ ε σ μ α. α'.

Ὡς· ἂν μία εὐθεῖα ἐφίσταται πρὸς ὀρθὰς με' ἐν ἐπί-
πεδον, πρὸς ὀρθὰς θέλει εἶναι καὶ με' πᾶσαν εὐθεῖαν κει-
μένην ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· καὶ συμβαλλούσαν με' τὸ
πέρασ αὐτῆς.

Π ὁ ρ ε σ μ α. β'.

Ἄν μία εὐθεῖα ἐφίσταται πρὸς ὀρθὰς με' ἐν ἐπίπε-
δον, πρὸς ὀρθὰς θέλει εἶναι καὶ με' πᾶσαν εὐθεῖαν ἀγώ-
μένην ἀπὸ τοῦ κάτω πέρατος αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

Π ρ ὁ τ α σ ο ι ς ε ἰ ς.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπισθῇ ἐπὶ τῆς συμπτώσεως τριῶν
εὐθειῶν πρὸς ὀρθὰς με' αὐτάς, καὶ τρεῖς αὐταὶ εὐθεῖαι θέ-
λουσιν εἶναι ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου.

Ἔςωσαν ΓΒ, ΔΒ, ΕΒ αἱ τρεῖς δοθεῖσαι εὐθεῖαι..
Β τὸ σημεῖον τῆς συμπτώσεως αὐτῶν.. καὶ ἡ ΑΒ πρὸς
ὀρθὰς με' ἐκάστην αὐτῶν εἰς τὸ σημεῖον Β, τότε λέγω
ὅτι αἱ τρεῖς αὐταὶ εὐθεῖαι θέλουσιν εἶναι ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέ-
δου τοῦ ΖΗ. σχ. 177.

Εἰ δὲ καὶ εἶναι δυνατόν, ἔσω ἡ μία τούτων, ὥς ἡ
ΓΒ, μὴ ἐπὶ τῷ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΖΗ, ἀλλὰ μετέωρος.
Τότε ἐπειδὴ καὶ αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΒ διατίμουνσιν
ἀλλήλας, διὰ τοῦτο δύναμαι νὰ ἄξω δι' αὐτῶν ἐπέκτατον
τὸ ΑΘ (πρ. β'), ὥς· νὰ τάμη τὸ ἐπίπεδον ΖΗ κατὰ
τὴν ΒΘ, ἥτις οὖσα κοινὴ τομὴ τῶν δύο ἐπιπέδων θέ-
λει εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ (πρ. γ'). Ἄλλ' αὕτη ἡ ΒΘ
εὐθεῖα, ὥς κεκμένη ἐπὶ τοῦ ΖΗ ἐπιπέδου τοῦ ἄνω πρὸς

ὀρθὰς μετὰ τὴν ΒΑ, εἶναι πρὸς ὀρθὰς μετὰ τὴν ΒΑ (πρόρ. β'. προ. δ'). ὥς ἡ γων. $\Theta ΒΑ = \gammaων. ΓΒΑ = 90^\circ$ τουτέστι τὸ ὅλον ἴσον μετὰ τὸ μέρος, ἢ ἀπὸ δύο σημείων: τῶν Θ καὶ Γ ἡχθησαν δύο κάθετοι πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον Β, ὅπερ εἶναι ἀδύνατον (πρόρ. ιβ'. προ. λβ'. βιβ. α'). ὥς καὶ ἡ ΓΒ κεῖται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ὡς καὶ αἱ ΔΒ, ΕΒ, ὅπερ ἐξητεῖτο.

Π ὁ ρ ι σ μ α.

Ὡς ἂν τρεῖς εὐθεῖαι ἦναι πρὸς ὀρθὰς μετὰ μίαν τετάρτην εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, αὗται αἱ τρεῖς θέλουσι κεῖνται ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καὶ τὸ ἐπίπεδον θέλει εἶναι ὡσαύτως πρὸς ὀρθὰς μετὰ αὐτήν.

Π ρ ὁ τ α σ ι ς. 5'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἦναι πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, παράλληλοι θέλουσιν εἶναι αἱ εὐθεῖαι.

Ἐς ὧν ΑΒ καὶ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΕΖ, τότε λέγω ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος μετὰ τὴν ΓΔ. σχ. 178.

Ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ ἐφίστανται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΕΖ, διὰ τοῦτο δύναμαι νὰ συζεύξω τὰ πέρατα αὐτῶν Β, Δ διὰ τῆς ΒΔ εὐθείας, καὶ οὕτως αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ θέλουσιν εἶναι πρὸς ὀρθὰς μετὰ τὴν ΒΔ (πρόρ. β'. προ. δ'): ὅθεν ἡ γων. $ΑΒΔ = \gammaων. ΓΔΒ = 90^\circ$, εἴτε γων. $ΑΒΔ + \gammaων. ΓΔΒ = 180^\circ$. ὥς ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος μετὰ τὴν ΓΔ (πρ. κη'. βιβ. α').

Π ὁ ρ ι σ μ α. α'.

Ὡς ἂν μία εὐθεῖα ἦναι πρὸς ὀρθὰς ἐφ' ἑνὸς ἐπι-

πέδου, καὶ παράλληλος μὲ μίαν εὐθεΐαν, καὶ αὕτη θί-
λει εἶναι πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Οὕτως ἂν
ἡ AB ᾖ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τοῦ EZ ἐπιπέδου, καὶ πα-
ράλληλος μὲ τὴν $\Gamma\Delta$, τότε ἐπειδὴ καὶ ἡ γων. $\Gamma\Delta B$
 $=$ γων. $AB\Delta$ (πρ. κθ'. βιβ. α'). καὶ ἐξ ὑποθέσεως ἡ
γων. $AB\Delta = 90^\circ$, διατοῦτο καὶ ἡ γων. $\Gamma\Delta B = 90^\circ$.

Π ό ρ ι σ μ α β'.

Διὰ δύο παραλλήλων διάγεται ἐπίπεδον. Καθότι
ἂν ἀπὸ παντὸς σημείου τῆς AB ἄξω πρὸς πᾶν σημείου
τῆς $\Gamma\Delta$ εὐθείας παραλλήλους μὲ τὴν $B\Delta$, ἔχει νὰ ὑφαν-
θῇ ἐπίπεδον.

Π ό ρ ι σ μ α γ'.

Διὰ πρὸς δύο πρὸς ὀρθὰς ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου εὐ-
θειῶν διάγεται ἐπίπεδον, διότι δηλονότι αὗται εἶναι πα-
ράλληλοι πρὸς ἀλλήλας.

Ἄν ὅμως καὶ αἱ ὀρθαὶ ᾖσαν ἐπὶ γραμμῆς, τότε
πάντοτε δὲν ἤθελε στήγεται ἐπίπεδον.

Π ό ρ ι σ μ α δ'.

Ὡς διὰ δύο εὐθειῶν μὴ παραλλήλων, ἢ μὴ δια-
τεμνουσῶν ἀλλήλας (πόρ. α'. προ. β') δὲν διάγεται
ἐπίπεδον. (α).

(α) Κυρίως, ὅμως ἀμφότερα ταῦτα τὰ συμβεβηκότα δύν εἶ-
ναι δύο, ἀλλ' ἔν. Καθέτι ἂν μία εὐθεΐα παρόλληλος μὲ μίαν ἄλ-
λην κλινῇ ἐπ' αὐτὴν, ἔχῃ νὰ συμπέσῃ μὲ αὐτὴν, διότι δηλονό-
τι κίνται ἀμφότεραι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς ζ'.

Ἐάν δύο εὐθεῖαι ἦναι παράλληλοι, καὶ ληφθῶσιν ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ εὐθεῖα ἡ ζευ-
γυῖούσα ταῦτα τὰ σημεῖα, θέλει κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου
τῶν παραλλήλων.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ διὰ τῶν παραλλήλων διάγεται
ἐπίπεδον (πόρ. β'. πρ. ζ'.), ὁ δὴλον ὅτι ἅπαντα τὰ ση-
μεῖα αὐτῶν θέλουσι κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.. ἀλλ' ἐπί-
πεδον εἶναι ἐκεῖνο, ἐφ' οὗ ἐφαρμόζεται εὐθεῖα γραμμῇ
(ὅρ. ε'. βιβλ. α'.). ὥς ὄντων τῶν περάτων τῆς εὐθείας,
ἐξ ὑποθέσεως, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, καὶ ὁλόκληρος ἡ εὐθεῖα
θέλει κεῖται ἐπ' αὐτοῦ.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς η'.

Ἐάν δύο εὐθεῖαι ἦναι παράλληλοι, καὶ θάτερα αὐ-
τῶν πρὸς ὀρθὰς ἐφ' ἐνὸς ἐπιπέδου, καὶ ἡ ἑτέρα αὐτῶν
πρὸς ὀρθὰς θέλει εἶναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Ἔστω AB πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου EZ , καὶ
παράλληλος μὲ τὴν $\Gamma\Delta$, τότε λέγω ὅτι καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ πρὸς
ὀρθὰς θέλει εἶναι ἐπὶ τοῦ EZ ἐπιπέδου. σχ. 178.

Ἐπεκτείνω τὴν $\Gamma\Delta$, ἕως οὗ νὰ συμβῇ μὲ τὸ ἐπί-
πεδον EZ κατὰ τὸ σημεῖον Δ .. διὰ τῶν παραλλήλων
 AB , $\Gamma\Delta$ ἄγω τὸ ἐπίπεδον $\Lambda\Delta$. Τότε ἐπειδὴ καὶ ἡ BA
εἶναι κοινὴ τομὴ τῶν δύο ἐπιπέδων.. καὶ ἡ AB πρὸς ὀρ-
θὰς μὲ τὴν BA (πόρ. β'. πρ. ὅ'.) ὁ δὲ διὰ τοῦτο καὶ τὸ $\Lambda\Delta$
ἐπίπεδον πρὸς ὀρθὰς θέλει εἶναι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου EZ
(ὅρ. ὅ'.).. ὥς καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ πρὸς ὀρθὰς θέλει εἶναι ἐπὶ τοῦ
 EZ ἐπιπέδου, ὅπερ εἶναι καὶ α', πόρισμα τῆς ζ'. προ-
τάσεως.

Π ρ ό τ α σ ι ς. 9.

Δύο παράλληλοι με μίαν τρίτην καὶ μὴ οὖσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι.

Ἐξώσαν αἱ AB , $ΓΔ$ παράλληλοι μετὰ τὴν EZ τὴν οὖσαν μὴ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τότε λέγω ὅτι καὶ ἡ AB θέλει εἶναι παράλληλος μετὰ τὴν $ΓΔ$. σχ. 179.

Ἐπὶ τῆς EZ εὐθείας λαμβάνω τυχὸν σημεῖον τὸ $Θ$.. καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἄγω πρὸς ὀρθὰς μετὰ τὴν EZ τὰς $ΘΗ$, $ΘΙ$.. καὶ οἱ αὐτῶν ἄγω τὸ ἐπίπεδον $ΗΘΙ$.

Ἐπειδὴ λοιπὸν καὶ αἱ εὐθεῖαι $ΘΗ$, $ΘΙ$ εἶναι πρὸς ὀρθὰς μετὰ τὴν $ΘΕ$, ἡ $ΘΕ$ θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $ΗΘΙ$ (πρ. δ')... ἀλλ', ἐξ ὑποθέσεως, αἱ $ΑΗ$, $ΓΙ$ εἶναι παράλληλοι μετὰ τὴν $ΕΘ$, διὰ τοῦτο αἱ $ΑΗ$, $ΓΙ$ εἶναι πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου $ΗΘΙ$ (πρ. η')... ἀλλ' ὅταν δύο εὐθεῖαι ᾖναι πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, αὗται εἶναι καὶ παράλληλοι (πρ. ζ')... ὥστε ἡ $ΑΗ$ εἶναι παράλληλος μετὰ τὴν $ΓΙ$, εἴτε ἡ $ΑΒ$ μετὰ τὴν $ΓΔ$.

Π ρ ό τ α σ ι ς. 10.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσιν εἰς ἓν σημεῖον ᾖναι παράλληλοι μετὰ ἄλλας δύο εὐθείας κειμένας ἐπ' ἄλλου ἐπιπέδου καὶ συμπίπτουσας εἰς ἓν σημεῖον, καὶ γωνίαι τῶν συμπτώσεων θέλουσιν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Ἐξώσαν αἱ εὐθεῖαι $ΒΑ$, $ΓΑ$ παράλληλοι μετὰ τὰς $ΕΔ$, $ΖΔ$, τότε λέγω ὅτι γων. $ΒΑΓ =$ γων. $ΕΔΖ$. σχ. 180.

Τέμνω ἐκ τῆς $ΑΒ$ τὴν $Αβ = Δε$, καὶ ἐκ τῆς $ΑΓ$

τὴν $\Delta\gamma = \Delta\zeta$.. ζευγνύω τὰ πέρατα αὐτῶν .. καὶ ἐπει-
δὴ εἶναι καὶ παράλληλοι, διὰ τοῦτο ἔχω $\beta\epsilon = \Delta\Delta$,
καὶ $\gamma\zeta = \Delta\Delta$ (πρ. λγ'. βιβ. α').

Ὡς καὶ $\beta\epsilon = \gamma\zeta$ (αξ. α') καὶ παράλληλοι, ὥς
οὗτης ἑκατέρας αὐτῶν παραλλήλου μετὴν $\Delta\Delta$ (πρ. θ').
ζευγνύω τὰ πέρατα τούτων τῶν δύο ἴσων παραλλήλων
διὰ τῶν βγ καὶ εζ, καὶ ἔχω $\beta\gamma = \epsilon\zeta$.. ὥς τὰ τρίγωνα
 $\beta\Delta\gamma$, $\epsilon\Delta\zeta$ εἶναι ἰσόπλευρα, καὶ διὰ τοῦτο καὶ γων. $\beta\Delta\gamma$
 $=$ γων. $\epsilon\Delta\zeta$ (πρ. η'. βιβ. α'), εἴτε γων. $\beta\Delta\Gamma =$ γων.
 $\epsilon\Delta\text{Z}$.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς. ια'.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου μετέωρου νὰ κατὰξῃ τις
κάθετον ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου.

Ἐξω Λ τὸ δοθὲν μετέωρον σημεῖον, καὶ $\text{B}\Gamma$ τὸ
ὑποκείμενον ἐπίπεδον. σχ. 181.

Ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου $\text{B}\Gamma$ ἄγω τυχοῦσαν
εὐθεῖαν τὴν ΔE .. κατὰγω ἐπ' αὐτῆς ἀπὸ τοῦ δοθέντος ση-
μείου Λ κάθετον τὴν ΔZ (πρ. ιβ'. βιβ. α').. καὶ ἂν μὲν
ἡ ΔZ ᾖ καθετος καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον $\text{B}\Gamma$ (ὅρ. γ'),
τὸ ἐπιταχθὲν ἔλαβε τέλος.. εἰ δὲ μὴ, ἀπὸ τοῦ Z σημείου
ἄγω τὴν ZH ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $\text{B}\Gamma$ πρὸς ὀρθὰς μετὴν
 ΔE .. κατὰγω ἐπ' αὐτῆς ἀπὸ τοῦ Λ σημείου κάθετον τὴν
 $\Lambda\Theta$, καὶ λέγω ὅτι αὕτη εἶναι ἡ ζητούμενη κάθετος.

Καθότι ἐπειδὴ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ ΔE εἶναι
πρὸς ὀρθὰς μετὲν ἑκατέρας ZA , ZH , διὰ τοῦτο θέλει
εἶναι πρὸς ὀρθὰς καὶ μετὸ δὲ αὐτῶν ἐπίπεδον τὸ $\text{Z}\Lambda\Theta$
(πρ. δ').. ὅθεν ἂν ἄξω διὰ τοῦ Θ σημείου τὴν KL
παράλληλον μετὴν ΔE , αὕτη θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς

μέ τὸ ἐπίπεδον ΖΑΘ (πρ. η΄), καὶ ἐπομένως καὶ μετὰ πάντων εὐθειῶν ἀγομένην ἀπὸ τοῦ πέρατος αὐτῆς Θ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου : τούτῃς μετὰ τὴν $\Theta\Lambda$: ὅ εἰς η $\Theta\Lambda$ εἶναι πρὸς ὀρθὰς μετὰ τὴν ΚΛ .. ἀλλ' ἡ ΑΘ ἤχθη πρὸς ὀρθὰς καὶ μετὰ τὴν ΖΗ .. ἔθεν θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς καὶ μετὰ τὸ δι' αὐτῶν ἐπίπεδον : τὸ ΒΓ (πρ. δ΄).. ὥς η ΑΗ ἤχθη ἀπὸ τοῦ Α σημείου κάθετος ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου ΒΓ .

Π ρ ό τ α σ ι ς ιβ΄.

Νὰ ὑψώγηται ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὅντος ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου, πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν.

Ἔσω ΒΓ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, καὶ Μ τὸ δοθὲν ἐπ' αὐτοῦ σημεῖον. σχ. 181.

Κατὰ τὴν παρελθοῦσαν πρότασιν ἀπότινος τυχόντος σημείου τοῦ Α κατὰ γωγὰν κάθετον ἐπ' αὐτοῦ τὴν ΑΘ .. εἴτα ἀπὸ τοῦ Μ σημείου ἀνάγω τὴν ΜΝ παράλληλον μετὰ τὴν $\Theta\Lambda$ (πρ. λα΄. βιβ΄. α΄.), ἥτις θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς μετὰ τὸ ἐπίπεδον ΒΓ (πρ. η΄).

Ἡ ἂν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΓ διὰ τοῦ σημείου Μ ἄξω δύο εὐθείας, καὶ μετὰ μίαν αὐτῶν ἐκ τῆς κοινῆς τομῆς ὑψώσω πρὸς ὀρθὰς τὴν ΜΝ (πρ. ια΄. βιβ΄. α΄.), αὕτη θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς καὶ μετὰ τὸ ἐπίπεδον ΒΓ (πρ. δ΄). Καθότι ἂν ἡ ΒΛ (σχ. 176) ὑψωθῇ πρὸς ὀρθὰς μετὰ τὴν εὐθεῖαν ΕΖ , καὶ ἐτι μετὰ τὴν $\Gamma\Delta$, τότε θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς καὶ μετὰ τὸ δι' αὐτῶν ἐπίπεδον τὸ ΕΔΖΓ .

Π ρ ό τ α σ ι ς ιγ΄.

Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι ἀδύνατον νὰ ὑψωθῶσι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

"Εξω Α τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τοῦ ΒΓ ἐπιπέδου.
σχ. 182.

"Αν λοιπὸν καὶ ἦναι δυνατὴ ἡ ὕψους πρὸς ὀρθὰς
δύο εὐθειῶν ἐξ ἑνὸς σημείου, ἔσωσαν αἱ ΑΔ, ΑΕ.. ἀλλ'
ἂν αὗται ἦναι πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΒΓ,
θέλουσιν εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι (πρ. 5').
ἀλλ' αἱ παράλληλοι εἶναι ἀσύμπτωτοι (ἔρ. η'. βιβ. α').
ὥς εἶναι μὴ ἀληθὲς ὅτι αἱ ΑΔ, ΑΕ ὑψώθησαν πρὸς ὀρ-
θὰς μὲ τὸ ἐπίπεδον ΒΓ.

Π ό ρ ι σ μ α α'.

"Ὡς οὔτε ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ μετεώρου σημείου εἶναι
δυνατὸν νὰ καταχθῶσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου δύο κά-
θετοι. Καθότι οὐσῶν τῶν εἰρημένων καθετῶν πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ
τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, θέλουσιν εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας
παράλληλοι διὰ τὴν (πρ. 5'): ὃ ἐστὶ καὶ ἀσύμπτωτοι καὶ
συμπίπτουσιν εἰς ἓν σημεῖον μετεώρως, ὅπερ εἶναι ἄτοπον.

Π ό ρ ι σ μ α β'.

"Αφ' ἑνὸς σημείου μετεώρου ἡ κάθετος πρὸς τὸ ὑ-
ποκείμενον ἐπίπεδον εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἀπασῶν τῶν εὐθειῶν
τῶν ἀγομένων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου. Οὕτως ἔστω ἡ ΕΑ κά-
θετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΓ. "Αγὼ τὴν ΖΗ εὐθεῖαν ἐπὶ
τοῦ ΒΓ ἐπιπέδου, καὶ τότε ἡ ΕΑ θέλει εἶναι κάθετος
καὶ ἐπ' αὐτήν (πορ. α'. πρ. 8').. ὥς εἰ ἂν ἀπὸ τοῦ ση-
μείου Ε ἄξω μυρίας εὐθείας ἐπὶ τῆς ΖΗ, ἡ ΕΑ θέλει
εἶναι ἡ ἐλαχίστη, ὡς οὔσης μόνης μιᾶς τῆς ΕΑ καθετου
(πορ. β. προ. λβ'. βιβ. α'). β'. ἐπειδὴ παντὸς τριγώ-
νου ἡ μείζων γωνία ὑποτείνεται ὑπὸ τῆς μείζονος πλευ-
ρᾶς (πρ. 18'. βιβ. α'), ἐξ ἀνάγκης ἡ ΕΑ θέλει εἶναι ἡ

ελαχίστη ἀπασῶν τῶν εὐθειῶν τῶν ἀχθισομένων ἀπὸ τοῦ Ε σημείου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΓ.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς ιδ'.

Ἐκεῖνα τὰ ἐπίπεδα, πρὸς ἅπερ εἶναι πρὸς ὀρθὰς ἡ αὐτὴ εὐθεῖα, εἶναι παράλληλα πρὸς ἀλλήλα.

Πρὸς τὰ ἐπίπεδα ΓΔ, ΕΖ ἔσω ἡ ΑΒ εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς, τότε λέγω ὅτι τὸ ἐπιπ. ΓΔ εἶναι παράλληλον μὲ τὸ ἐπιπ. ΕΖ. σχ. 183.

Εἰ δὲ καὶ δὲν εἶναι παράλληλα, ἐπεκτενόμενα θήλουσι συμπίπτει ἐκ τοῦ ἐνὸς μέρους (ὄρ. η'). καὶ ἔσω ἡ ΟΗ εὐθεῖα ἡ σύμπτωσις.

Ἀπὸ τοῦ σημείου λοιπὸν Κ τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς ἄγω τὰς εὐθείας ΚΑ, ΚΒ.. καὶ ἔσαι γων. ΚΑΒ = 90°, καὶ γων. ΚΒΔ = 90° (πορ. β'. προ. δ'). ὥσε αἱ εὐθεῖαι ΑΚ, ΒΚ εἶναι πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι (πρ. κη'. βιβ. α'). ἄλλ' αἱ παράλληλοι συμπίπτουσιν οὐδέποτε (ὄρ. η'. βιβ. α'). ὥσε εἶναι ψευδὴς ἡ ὑπόθεσις τοῦ, ὅτι τὰ ἐπίπεδα ΓΔ, ΕΖ δὲν εἶναι παράλληλα.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς ιε'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσιν εἰς ἓν σημεῖον ἦναι παράλληλοι μὲ ἄλλας δύο εὐθείας κειμέναι ἐπ' ἄλλου ἐπιπέδου καὶ συμπίπτούσας εἰς ἓν σημεῖον, καὶ τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα θέλουσιν εἶναι παράλληλα.

Ἐςωσαν αἱ ΑΒ, ΓΒ παράλληλοι μὲ τὰς ΔΕ, ΖΕ, τότε λέγω ὅτι καὶ τὸ ἐπίπεδον ΓΑ θέλει εἶναι παράλληλον μὲ τὸ ΖΔ. σχ. 184.

Ἀπὸ μὲν τοῦ Β σημείου ἄγω κάθετον τὴν ΒΗ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΖΔ (πρ. ια).. ἀπὸ δὲ τοῦ Η σημείου ἄγω

τὰς εὐθείας $ΗΘ$, $ΗΚ$ παραλλήλους μετὰ τὰς εὐθείας $ΕΔ$, $ΕΖ$, ὥςτε θέλουσιν εἶναι παράλληλοι καὶ μετὰ τὰς εὐθείας $ΑΒ$, $ΓΒ$ (πρ. θ'). .. ἀλλ' αἱ γωνίαι $ΘΗΒ$, $ΚΗΘ$ εἵναι ὀρθαὶ (πορ. β'. πρ. α'). ὅθεν ὀρθαὶ θέλουσιν εἶναι καὶ αἱ γωνίαι $ΑΒΗ$, $ΓΒΗ$ (πρ. κθ'. βιβ. α'). .. ἀλλ' ἂν ἡ εὐθεῖα $ΒΗ$ ᾖ πρὸς ὀρθὰς μετὰ τὰς εὐθείας $ΒΑ$, $ΒΓ$, πρὸς ὀρθὰς θέλει εἶναι καὶ μετὰ τὸ δι' αὐτῶν ἐπίπεδον $ΓΑ$ (πρ. δ'). .. καὶ ἐκεῖνα τὰ ἐπίπεδα πρὸς ἅπερ ἡ αὐτὴ εὐθεῖα εἶναι πρὸς ὀρθὰς, εἶναι παράλληλα πρὸς ἄλληλα (πρ. ιθ'). ὥςτε τὰ ἐπίπεδα $ΓΑ$, $ΖΔ$ εἶναι παράλληλα πρὸς ἄλληλα.

Π ρ ό τ α σ ι ς ις'.

Ἐὰν δύο παράλληλα ἐπίπεδα τέμνωνται ὑπὸ τινος ἐπιπέδου, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ θέλουσιν εἶναι παράλληλοι.

Ἐςωσαν παράλληλα τὰ ἐπίπεδα $ΑΒ$, $ΓΔ$, τεμνόμενα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου $ΕΖ$, τότε λέγω ὅτι αἱ εὐθεῖαι $ΗΕ$, $ΖΘ$ εἶναι παράλληλοι. σχ. 185.

Αἱ γραμμαὶ $ΗΕ$, $ΖΘ$ εἶναι εὐθεῖαι (πρ. γ'). .. ἀλλ', ἐξ ὑποθέσεως, τὰ ἐπίπεδα $ΑΒ$, $ΓΔ$ εἶναι παράλληλα: ὅ ἐστιν ἀσύμπτωτα (ὅρ. η'). .. ὥςτε καὶ αἱ ἐπ' αὐτῶν εὐθεῖαι $ΗΕ$, $ΖΘ$ ἀσύμπτωτοι, εἴτε παράλληλοι πρέπει νὰ ᾖναι. Καθότι ἂν ἐπεκτεινόμεναι συμπέσωσι, τότε μέρος μὲν αὐτῶν κείσεται ἐπὶ τῶν ὑποκειμένων ἐπιπέδων, μέρος δὲ ἔξω αὐτῶν, ἢ μετεώρως, ὅπερ εἶναι ἄτοπον (πρ. α').

Π ρ ό τ α σ ι ς ιζ'.

Ἐάν δύο εὐθεῖαι τέμνονται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, τὰ τμήματα αὐτῶν θέλουσιν εἶναι ἀνάλογα.

Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ αἱ τέμνονται ὑπὸ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΗΘ, ΚΛ ΜΝ, τότε λέγω ὅτι $ΑΕ:ΕΒ :: ΓΖ:ΖΔ$. σχ. 186.

Ἐπὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ ἄγω τὰς εὐθείας ΑΓ, ΕΖ, ΒΔ: ζευγνύων δηλονότε τὰς τομὰς τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ.. ἄγω ὡσαύτως καὶ τὴν εὐθείαν ΓΒ.

Τώρα ἐπειδὴ καὶ, ἐξ ὑποθέσεως, τὰ δύο ἐπίπεδα ΚΛ, ΜΝ εἶναι παράλληλα, καὶ τέμνουσι τὸ τριγωνικὸν ἐπίπεδον ΓΒΔ, διὰ τοῦτο αἱ ΗΖ, ΒΔ εἶναι παράλληλοι (πρ. ις'). καὶ διὰ τοῦτο $ΓΗ:ΗΒ :: ΓΖ:ΖΔ$ (πρ. β'. βιβ. ζ'). Διὰ τοὺς αὐτοὺς δὲ λόγους καὶ $ΓΗ:ΗΒ :: ΑΕ:ΕΒ$.. καὶ διὰ τὴν ταυτότητα τῶν λόγων $ΑΕ:ΕΒ :: ΓΖ:ΖΔ$. Ὡς....

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὡς ἂν δύο εὐθεῖαι ἄρχονται μὲν ἀπ' ἐνὸς σημείου, διαπερῶσι δὲ παράλληλα ἐπίπεδα, τέμνονται ὑπ' αὐτῶν ἀναλόγως. Οὕτως αἱ εὐθεῖαι ΓΒ, ΓΔ, αἵτινες ἄρχονται μὲν ἀπὸ τοῦ σημείου Γ, διαπεροῦσι δὲ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα ΚΛ, ΜΝ, τέμνονται ὑπ' αὐτῶν οὕτως ὥς $ΓΗ:ΗΒ :: ΓΖ:ΖΔ$.

Π ρ ό τ α σ ι ς ιη.

Ἐάν εὐθεῖαι τις ἦναι πρὸς ὀρθὰς μὲ ἐν ἐπίπεδον, πρὸς ὀρθὰς μὲ αὐτὸ θέλουσιν εἶναι καὶ ἅπαντα τὰ δι' αὐτῆς ἀγόμενα ἐπίπεδα.

Ἐξω πρὸς ὀρθὰς ἡ AB εὐθεΐα μὲ τὸ ἐπίπεδον $\Gamma\Delta$.
σχ. 187.

Διὰ τῆς AB λοιπὸν εὐθείας ἄγω τὸ ἐπίπεδον EZ ,
οὗτως κοινὴ τομὴ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου $\Gamma\Delta$ θέλει εἶναι ἡ
 EH εὐθεΐα, καὶ ὅπερ λέγω ὅτι θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς μὲ
τὸ $\Gamma\Delta$ ἐπίπεδον.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ AB εἶναι πρὸς
ὀρθὰς μὲ τὸ ἐπίπεδον $\Gamma\Delta$, θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς καὶ
μὲ πᾶσαν εὐθεΐαν διερχομένην διὰ τοῦ πέρατος αὐτῆς B
(πρ. β'. πρ. δ'.): τουτέστι μὲ τὴν κοινὴν τομὴν EH .
Ὡς τὸ EZ ἐπίπεδον εἶναι πρὸς ὀρθὰς μὲ τὸ ἐπίπεδον
 $\Gamma\Delta$ (β'. δ').

Τὰ αὐτὰ ἤθελον ἀποδειχθῶσι καὶ δι' ὅσα ἄλλα ἐπί-
πεδα ἤθελον διαχθῶσι διὰ τῆς AB εὐθείας. Ἐπειτα αὖ
ἐγὼ δώσω κίνησιν εἰς τὴν εὐθεΐαν AB παραλλήλως ἐαυ-
τῇ ἐπὶ τῆς EH εὐθείας, εἰς πᾶσαν τοποθεσίαν θέλει εἶ-
ναι πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν EH . Ὡς αὖ δοθῇ νὰ ἔῃ σημεία
καθ' ὁδόν, τὸ περιγραφησόμενον ἐπίπεδον θέλει εἶναι
πρὸς ὀρθὰς μὲ τὸ ἐπίπεδον $\Gamma\Delta$.

Π ρ ό τ α σ ι ς ιθ'.

Ἐάν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἦναι πρὸς ὀρ-
θὰς μὲ ἄλλο τρίτον, πρὸς ὀρθὰς μὲ αὐτὸ θέλει εἶναι καὶ
ἡ τούτων κοινὴ τομὴ.

Ἐξωσαν τὰ διατέμνοντα ἄλληλα ἐπίπεδα $\Gamma\Delta$, EZ
πρὸς ὀρθὰς πρὸς τὸ ἐπίπεδον $E\Gamma$, τότε λέγω ὅτι καὶ ἡ
κοινὴ αὐτῶν τομὴ AB θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς πρὸς τὸ
αὐτὸ ἐπίπεδον $E\Gamma$. σχ. 188.

Εἰδὲ καὶ δὲν εἶναι, ἐγὼ δύναιμαι νὰ ὑψώσω ἀπὸ

τοῦ σημείου Β ἄλλην εὐθείαν, ὡς τὴν ΒΙ, ἐπὶ τοῦ ΓΔ ἐπιπέδου πρὸς ὀρθὰς μὲν μετὰ τὴν ΗΔ, τὴν δὲ ΒΛ ἐπὶ τοῦ ΕΖ ἐπιπέδου πρὸς ὀρθὰς μετὰ τὴν ΕΘ. Ἄλλ' ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι ἀδύνατον νὰ ὑψωθῶσι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς (πρ. 17'). Ὡς αἱ δύο εὐθεῖαι ΒΙ, ΓΔ εἶναι ἀνάγκη νὰ τραπῶσιν εἰς μίαν καὶ κοινὴν εἰς τὰ δύο ἐπίπεδα, εἰς τὴν ΑΒ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ ΑΒ θελεῖ εἶναι πρὸς ὀρθὰς μετὰ τὸ ἐπίπεδον ΕΚ.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὡς αὖν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἀλλήλα ἦναι κεκλιμένα πρὸς ἓν τρίτον, κεκλιμένη θελεῖ εἶναι πρὸς αὐτὸ καὶ ἡ τούτων κοινὴ τομὴ.

Π ρ ό τ α σ ι ς. κ'.

Ἐὰν σφραγὴ γωνία περιέχεται ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, τὸ κεφάλαιον τῶν δύο θελεῖ εἶναι μείζον τῆς τρίτης πάντῃ μεταλαμβανομένων.

Ἐστω σφραγὴ γωνία ἡ πρὸς τῷ Α σημείῳ, περιεχομένη ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν ΒΑΓ, ΒΑΔ, ΓΑΔ. σχ. 189.

Εἰ μὲν καὶ ἦσαν ἴσαι ἀλλήλαις, τὸ πρᾶγμα ἤθελεν εἶναι οὐκ ὀρθὸν σαφές. Ἐστω λοιπὸν ἡ μία τούτων μείζων, ὅσον καὶ αὖ θελῇ, ἑκατέρας τῶν λοιπῶν, ὡς ἡ ΒΑΓ. Τότε ἀφαιρῶ ἐξ αὐτῆς τὴν γων. ΒΑΕ = γων. ΒΑΔ, τέμνω τὴν ΑΕ = ΑΔ, διὰ τοῦ σημείου Ε διάγω τὴν ΒΓ, ὥστε νὰ ὑπαντήσῃ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εὐθείας. ἄγω τὰς εὐθείας ΒΔ, καὶ ΓΔ.

Τώρα εἰς τὰ τρίγωνα ΒΑΕ, ΒΑΔ ἔγω, ἐκ τῆς κα-

τασκευῆς, ἔχω γων. $BAE = \text{γων. } BA\Delta$, καὶ $AE = A\Delta$, καὶ κοινὴν τὴν AB πλευρὰν, ὥς τε καὶ ἡ βᾶσις $BE = B\Delta$ (πρ. δ'. βιβ. α'). Ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον $B\Delta\Gamma$ αἱ πλευραὶ $B\Delta + \Delta\Gamma > B\Gamma$ (πρ. κ'. βιβ. α'), καὶ ἡ $B\Delta = BE$, ὡς δέδεικται, διὰ τοῦτο ἡ λοιπὴ $\Delta\Gamma > E\Gamma$. Ὡς τε εἰς τὰ τρίγωνα $E\Delta\Gamma$, $\Gamma A\Delta$ ἡ μὲν $AE = A\Delta$, ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ δὲ $A\Gamma$ κοινὴ, ἡ δὲ $\Delta\Gamma > E\Gamma$, διὰ τοῦτο καὶ ἡ γων. $\Gamma A\Delta > \text{γων. } E\Delta\Gamma$ (πρ. κε'. βιβ. α'). Ὡς τε ἡ γων. $BA\Delta + \text{γων. } \Gamma A\Delta > \text{γων. } BAE + E\Delta\Gamma$. ἀλλὰ γων. $BAE + \text{γων. } E\Delta\Gamma = \text{γων. } BA\Gamma$, ὡς μέρη καὶ ὅλον. Ὡς τε γων. $BA\Delta + \text{γων. } \Gamma A\Delta > \text{γων. } BA\Gamma$. Ὡς τε τὸ κεφάλαιον τῶν δύο εἶναι μείζον τῆς τρίτης. Ὡς αὐτως βέβαια ἤθελεν ἀποδειχθῆ καὶ τὸ ὅτι γων. $BA\Delta + \text{γων. } BA\Gamma > \text{γων. } \Gamma A\Delta$.

Π ρ ό τ α σ ι ς. κ α'.

Πάσης σφραγῆς γωνίας τὸ κεφάλαιον τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν ἐπιπέδων γωνιῶν εἶναι ἔλασσον τεσσάρων ὀρθῶν.

Ἐξω σφραγῆς γωνία ἡ A , τότε λέγω ὅτι γων. $ZAH + \text{γων. } HAE + \text{γων. } EAD + \text{γων. } DAG + \text{γων. } GAB + \text{γων. } BAZ < 360^\circ$. σχ. 190.

Ἄγω ἐπίπεδον ἀπέναντι τῆς σφραγῆς γωνίας τέμνον τὰ σκέλη αὐτῆς, καὶ οὕτω μοι γεννᾶται πυραμὶς ἔχουσα κορυφὴν μὲν τὸ σημεῖον A , βάσιν δὲ τὸ ἑξαγώνον $B\Gamma\Delta E H Z$, οὗτοι αἱ πλευραὶ μεταβάλλουσι τὰς μὲν ἐπιπέδους γωνίας τῆς σφραγῆς εἰς τρίγωνα, τὰ δὲ σημεία $B, \Gamma, \Delta, E, H, Z$ εἰς γωνίας σφραγῆς.

Ἐπειδὴ λοιπὸν καὶ αἱ γωνίαι $B, \Gamma, \Delta, E, H, Z$

εἶναι $\zeta\sigma\epsilon\alpha\iota$, διὰ τοῦτο ἔξω γωνι. $AHZ + \gamma\omega\nu. AHE >$
 $\gamma\omega\nu. ZHE..$ ὡσαύτως καὶ γων. $AEB + AED > \gamma\omega\nu.$
 HEA , καὶ οὕτως ἐφεξῆς (πρ. κ'): ὁ ἐξιν αἱ δύο συνι-
 χεῖς γωνίαι τῶν τριγωνικῶν ἐπιπέδων εἶναι μείζονες τῆς
 ἐσωτερικῆς γωνίας τοῦ πολυγώνου, καὶ διὰ τοῦτο τὸ κε-
 φalaίον τῶν γωνιῶν τῶν τριγωνικῶν ἐπιπέδων τῶν ἐπὶ
 τῶν πλευρῶν HZ, HE, ED , καὶ τὰ ἐξῆς, εἶναι μείζον
 τοῦ κεφαλαίου τῶν ἐσωτερικῶν τοῦ πολυγώνου $BΓΔΕΗΖ$:
 ταυτέσι τῶν ὀκτὼ ὀρθῶν γωνιῶν (πόρ. ιδ', προτ. λβ'. βιβ'.
 α'). ἀλλ' ἅπασαι αἱ γωνίαι τῶν τριγωνικῶν ἐπιπέδων $BAF,$
 $ΓΑΔ$, κτξ = 12 ὀρθαῖς (κατὰ τὴν αὐτήν).. ὥςτε ἀφαι-
 ρεθέντων ἐκ τούτων πλείον, ἢ ὀκτὼ ὀρθῶν, μένουσιν αἱ
 γωνίαι $ZAH + HAE + EAD + ΔΑΓ + ΓΑΒ +$
 $ΒΑΖ$ ἐλάσσονες τεσσάρων ὀρθῶν.

Π ό ρ ι σ μ α. α'.

Ὡςτε εἶναι ἀδύνατον νὰ συστήσῃ τις $\zeta\sigma\epsilon\alpha\iota$ γωνίαν
 διὰ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων. Καθότι τότε αὕτη
 ἡ $\zeta\sigma\epsilon\alpha\iota$ γωνία ἤθελε τραποεῖ εἰς ἐπίπεδον, ἢ ἐν σημείον,
 περὶ ὕπερ δηλονότι ἤθελον εἶναι αἱ τεσσαρες ὀρθαί. (πόρ.
 β'. προ. ιγ'. βιβ'. α').

Π ό ρ ι σ μ α. β'.

Ἐπὶ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, οὗσης ἐκάστης = 60° ,
 συνίσταται $\zeta\sigma\epsilon\alpha\iota$ γωνία. Καθότι $3 \times 60^\circ = 180^\circ$, αἱ
 τινες δηλονότι εἶναι ἐλάσσονες τῶν τεσσάρων ὀρθῶν. Καί
 τοιαῦτα εἶναι τὰ τετράεδρα, εἴτε τὸ πρῶτον εἶδος τῶν
 τακτικῶν $\zeta\sigma\epsilon\alpha\iota$ ων, ἔχοντα δι' ἑῶρας τρίγωνα ἐπίπεδα.

Π ό ρ ι σ μ α. γ'.

Ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, οὔσης ἐκάστης $= 90^\circ$, συνίσταται σερεὰ γωνία. Καθότι $3 \times 90^\circ = 270^\circ < 4 \times 90^\circ$. Καὶ τοιαῦτα εἶναι οἱ κύβοι, ἢ ἑξάεδρα, ἅπερ δηλονότι ἔχουσι τετράγωνα δι' ἑδρας, καὶ διὰ τοῦτο τακτικά.

Π ό ρ ι σ μ α. δ'.

Ὑπὸ τεσσάρων ἐπιπέδων γωνιῶν, οὔσης $= 60^\circ$, συνίσταται σερεὰ γωνία. Καθότι $4 \times 60^\circ = 240^\circ < 4 \times 90^\circ$. Καὶ τοιαῦτα εἶναι τὰ ὀκτάεδρα, ἅπερ δηλονότι ἔχουσι δι' ἑδρας τρίγωνα ἰσόπλευρα, καὶ διὰ τοῦτο τακτικά.

Π ό ρ ι σ μ α. ε'.

Ὑπὸ πέντε ἐπιπέδων γωνιῶν, οὔσης ἐκάστης $= 60^\circ$, συνίσταται σερεὰ γωνία. Καθότι $5 \times 60^\circ = 300^\circ < 4 \times 90^\circ$. Καὶ τοιαῦτα εἶναι τὰ εἰκοσάεδρα, ἅπερ δηλονότι ἔχουσι δι' ἑδρας τρίγωνα ἰσόπλευρα, καὶ διὰ τοῦτο τακτικά.

Π ό ρ ι σ μ α. ς'.

Ὑπὸ ἑξ' ἐπιπέδων γωνιῶν, οὔσης ἐκάστης $= 60^\circ$, εἶναι ἀδύνατος ἡ σύστασις γωνίας σερεᾶς. Καθότι $6 \times 60^\circ = 4 \times 90^\circ$ δηλονότι. Καὶ τούτου ἔνεκεν δὲν δίδεται τακτικὸν σχῆμα σερεῶν ἔχον πλείονας τῶν εἴκοσι ἐδρῶν.

Π ό ρ ι σ μ α. ζ'.

Ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, οὔσης ἐκάστης $= 108^\circ$, συνίσταται σερεὰ γωνία. Καθότι $3 \times 108^\circ = 324^\circ < 4 \times 90^\circ$. Καὶ τοιαῦτα εἶναι τὰ δωδεκάεδρα, ἅπερ

δηλονότι ἔχουσι πεντάγωνα ἐπιπέδους ἐπιφανείας, καὶ διὰ τοῦτο τακτικά, ὡς οὗσης τοῦ τακτικοῦ πενταγώνου τῆς γωνίας $= 108^\circ$ (πόρ. α'. πρ. ια'. βιβ. δ').

Π ό ρ ι σ μ α. η'.

ὑπὸ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, οὗσης ἑκάστης $= 120^\circ$, ὡς δηλονότι ἡ γωνία τοῦ τακτικοῦ ἑξαγώνου (πόρ. α'. πρ. ιε'. βιβ. δ'), εἶναι ἀδύνατος ἡ σύστασις γωνίας σφραγῆς. Καθότι $3 \times 120^\circ = 360^\circ = 4 \times 90^\circ$ δηλονότι. Καὶ τοῦτου ἕνεκεν δὲν εἶδεται σχῆμα σφραγῶν τακτικὸν ἔχον ἐπιφανείας ἑξάγωνα.

Καὶ τοῦτου ἕνεκεν τὰ τακτικά σχήματα εἶναι πεντε : τετράεδρον, κύβος, ὀκτάεδρον, ὠδοκαέδρον, εἰκοσάεδρον, καὶ πλεον οὐδέν.

Π ρ ό τ α σ ι ς κβ'.

Ἐὰν ὡς τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν περ αἱ δύο νὰ ᾖναι μείζονες τῆς τρίτης πάντῃ μεταλαμβάνομεναι, ἔχουσαι ἴσα τὰ σκέλη, αἱ τὰ πέρατα τῶν σκελῶν ζευγνύουσαι εὐθεῖαι θέλουσι συστήει τρίγωνον.

Ἐςωσαν αἱ τρεῖς δοθεῖσαι γωνίαι Α, Δ, Η, καὶ ἔςωσαν αἱ μὲν γων. ΕΔΖ + γων. ΘΗΙ > γων. ΒΑΓ, ἡ δὲ ΑΒ = ΑΓ = ΔΕ = ΔΖ = ΗΘ = ΗΙ, τότε λέγω ὅτι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΒΓ, ΕΖ, ΘΙ συνίσωσι τρίγωνον : ὅ ἐστι τὸ κεφάλαιον τῶν δύο εἶναι μείζον τῆς τρίτης (πρ. κ'. βιβ. α'). σχ. 191.

Πρὸς τῷ σημείῳ Δ τῆς ΖΔ εὐθείας συνίστημι γων. ΖΔΚ = γων. ΓΑΒ, τέμνων τὴν ΔΚ = ΑΒ .. πρὸς δὲ τῷ αὐτῷ σημείῳ Δ τῆς ΚΔ εὐθείας συνίστημι γωνίαν : τὴν ΚΔΕ = γων. ΘΗΙ .. ἄγω τὰς εὐθείας ΚΖ, ΚΕ.

Ἐπειδὴ, καὶ ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ μὲν γων. $\angle \Delta \Gamma \text{Κ}$
 $=$ γων. $\Gamma \text{ΑΒ}$, αἱ δὲ πλευραὶ αἱ περιέχουσαι τὰς ἴσας
γωνίας εἶναι ἴσαι, διὰ τοῦτο καὶ ἡ $\text{ΚΖ} = \text{ΒΓ}$ (πρ. δ'.
βιβ. α'). διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ $\text{ΚΕ} = \text{ΘΙ}$. Ὡς το
τρίγωνον ΚΕΖ συνίσταται ἐκ τριῶν εὐθειῶν ἴσων μὲ τὰς
 ΒΓ , ΕΖ , ΘΙ , καὶ τούτου ἕνεκεν τὸ κεφάλαιον τῶν δύο εἶναι
μεῖζον τῆς τρίτης πάντοτε (κατὰ τὴν αὐτήν) .. διότι οὗ-
σης τῆς γων. $\angle \Delta \Gamma \text{Κ} <$ γων. $\text{ΚΔΕ} +$ γων. ΕΔΖ , θέ-
λει εἶναι καὶ ἡ $\text{ΚΖ} < \text{ΚΕ} + \text{ΕΖ}$ (πρ. ιθ'. βιβ. α'):
ὁ ἐστὶν αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΚΖ , ΚΕ , ΕΖ περιέξουσιν χωρίον,
εἴτε τρίγωνον.

Π ρ ό τ α σ ι ς κγ'.

Ἐκ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, ὧν περ αἱ μὲν δύο νά
ᾖναι μείζονες τῆς τρίτης πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, τὸ δὲ
κεφάλαιον τῶν τριῶν ἔλασσον τεσσάρων ὀρθῶν, νά συστή-
σῃ τις γωνίαν σφραγῶν.

Ἔσωσαν αἱ τρεῖς δοθεῖσαι ἐπίπεδοι γωνίαι ΒΑΓ ,
 ΓΑΔ , ΔΑΕ ἐγγεγραμμέναι δηλονότι περὶ τὸ κέντρον Λ .
σχ. 192.

Ζευγνύω τὰ σκέλη τῶν τριῶν δοθεισῶν γωνιῶν διὰ
τῶν χορδῶν ΒΓ , ΓΔ , ΔΕ .. ἐξ αὐτῶν συνίστημι τρίγω-
νον τὸ ΗΘΖ .. περὶ αὐτὸ περιγράφω τὸν κύκλον ΗΘΖ
(πρ. ε'. βιβ. δ'), οὗτινος δηλονότι ἡ διάμετρος ΙΘ θέ-
λει εἶναι ἐλάσσων τῆς διαμέτρου ΑΒ .. διότι οὐσῶν τῶν
τριῶν χορδῶν $\text{ΗΘ} + \text{ΘΖ} + \text{ΖΗ} = \text{ΒΓ} + \text{ΓΔ} +$
 ΔΕ , ἐκ τῆς κατασκευῆς, αἱ μὲν $\text{ΗΘ} + \text{ΘΖ} + \text{ΖΗ}$
καταμετροῦσιν ὁλόκληρον τὸν κύκλον ΗΘΖ , ὅχι δ' ὁμῶς
καὶ αἱ $\text{ΒΓ} + \text{ΓΔ} + \text{ΔΕ}$ τὸν ΒΓΔΕ . Ἀπὸ τοῦ κέν-

τρον λοιπὸν I ὑψὺ πρὸς ὀρθὰς τὴν εὐθείαν IK πρὸς τὸ ἐπίπεδον HOZ , πλὴν τοσαύτην, ὥς τὸ ταύτης τετραγώνου IK^2 νὰ ᾔηται ἵσον μὲ τὴν ὑπεροχὴν τοῦ AB^2 πρὸς τὸ IO^2 : ὁ ἐστὶ τὸ $IK^2 = AB^2 - IO^2$, εἴτε $AB^2 = IK^2 + IO^2$. Ἀπὸ τοῦ σημείου K ἄγω τὰς εὐθείας KH , KO , KZ , καὶ λέγω ὅτι ἡ γωνία K εἶναι ἡ ζητουμένη σεριὰ γωνία.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἡ εὐθεῖα IK ἥκται πρὸς ὀρθὰς πρὸς τὸν κύκλον HOZ , διὰ τοῦτο $KH = KO = KZ$, ὡς οὕσης ἐκάστης αὐτῶν $= \sqrt{IK^2 + IO^2}$ (πρ. μζ'. βιβ. α'). ἄλλ', ἐκ τῆς κατασκευῆς, $AB = (\sqrt{IK^2 + IO^2})$, διὰ τοῦτο $KH = KO = KZ = AB$. ἄλλ' ἡ $AB = AG = AD = AE$. Ὡς τὰ σκέλη τῆς σεριᾶς γωνίας εἶναι ἴσα, ἕκαστον ἐκάσῳ, μὲ τὰ σκέλη τῶν ὁδοεισῶν ἐπιπέδων γωνιῶν: τοιούτοις μὲ τὰ AB , AG , AD , AE . ἄλλ', ἐκ τῆς κατασκευῆς, καὶ ἐκάστη τῶν βάσεων HO , OZ , ZH γέγονεν ἴση μὲ ἐκάστην τῶν βάσεων τῶν ἐπιπέδων BG , GD , DE . ὥς εἴλει ἥσθαι καὶ γων. $OKH = \text{γων. } BAG$, καὶ γων. $OKZ = \text{γων. } GAD$, καὶ γων. $ZKH = \text{γων. } DAE$ (πρ. η'. βιβ. α'): ὁ ἐστὶν ἡ σεριὰ γωνία $OKHZ$ συνεχᾶθη ἐκ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ἐκάστης ἴσης μὲ ἐκάστην τῶν τριῶν ὁδοεισῶν ἐπιπέδων γωνιῶν BAG , GAD , DAE , ὡς ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ι ς κδ'.

Ἐὰν σεριὸν περιέχεται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, τὰ ἐναντίον ἐπίπεδα αὐτοῦ θείλουσιν εἶναι ἴσατε καὶ παραλληλόγραμμα.

Ἐςω AB τὸ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχό-

μενον ζερεόν, τότε λέγω ὅτι ἐπιπ. $ZA = BD$ ἐπιπ., ὡσαύτως καὶ ἐπιπ. $ZΓ =$ ἐπιπ. $ΘΔ$, καὶ ὅτι εἶναι παραλληλόγραμμα. σχ. 193.

Καθότι ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον $ΑΓ$ τέμνει τὰ παράλληλα ἐπίπεδα ZA , BD , διὰ τοῦτο αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου $ΑΓ$, HA , $ΓΔ$ εἶναι παράλληλοι (πρ. ις'). .. διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ $ΑΔ$ παράλληλος μὲ τὴν $ΗΓ$. "Ὡς τὸ ἐπίπεδον $ΑΔΓΗ$ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ὡσαύτως ἤθελον ἀποδειχθῶσι παραλληλόγραμμα καὶ ἅπαντα τὰ λοιπὰ ἐπίπεδα, ὑρ' ὧν περιέχεται τὸ ζερεόν AB .

β'. Εἰς τὰ ἀπεναντίου παραλληλόγραμμα τὰ ZA , BD , ἄγ' αὖ τὰς διαγωνίους τὴν ZA , BD .. καὶ ἐπειδὴ, ὡς δέδεικται, ἡ μὲν $ZΘ$ εἶναι παράλληλος μὲ τὴν BE , ἡ δὲ $ΑΘ$ μὲ τὴν $ΔΕ$, διὰ τοῦτο καὶ γων. $ZΘΑ =$ γων. $BEΔ$ (πρ. ι'). Εἰς τὰ τρίγωνα λοιπὸν $ZΘΑ$, $BEΔ$ οὔσης τῆς μὲν γων. $ZΘΑ =$ γων. $BEΔ$, τῆς δὲ $ZΘ = BE$, τῆς δὲ $ΑΘ = ΔΕ$, ὡς οὔσαι ἀπεναντίου πλευραὶ παραλληλογράμμων (πρ. λθ'. βιβλ. α'). εἴλει ἦναι τρίγ. $ZΑΘ =$ τρίγ. $ΒΔΕ$ (πρ. θ'. βιβλ. α') .. ἀλλὰ ταῦτα τὰ τρίγωνα εἶναι ἡμίσεα τῶν παραλληλογράμμων ZA , BD (πρ. μα'. βιβλ. α'). "Ὡς τὸ παραλ. $ZA =$ παραλ. BD .

Τοῦτο αὐτὸ ἤθελε λεχθῆ καὶ περὶ τῶν λοιπῶν ἀπεναντίου παραλληλογράμμων.

Π ρ ό τ α σ ι ς. κς'.

Ἐὰν παραλληλεπίπεδον τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου πα-

παλληλῶν μὲ τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα, τὰ τμήματα ἔξουσιν, ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν.

"Εξω ΑΗ τὸ παραλληλεπίπεδον, τεμνόμενον ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΚΜ παραλληλῶν μὲ τὰ ἐπίπεδα ΑΘ, ΒΗ, τότε λέγω ὅτι $\text{σερ. } \text{AM} : \text{σερ. } \text{KH} :: \text{βασ. } \text{AN} : \text{βασ. } \text{ΚΓ. σχ. 124.}$

Ἐπειδὴ καὶ ἐν ἐπιπέδον, εἴτε μίᾳ ἐπιφάνεια, δὲν εἶναι ἄλλοτε, εἰμὴ γινόμενον δύο εὐθειῶν, ἢ κινήσας εὐθείας παρ' εὐθείαν (πρ. μς'. βιβ. α'). καὶ ἐπειδὴ σερ. δὲν εἶναι ἄλλοτε, εἰμὴ κινήσας ἐπιπέδον παρ' εὐθείαν (σημ. εἰς τὴν ἀρχὴν τούτου τοῦ βιβλ.) διὰ τοῦτο πᾶν σερ. παραλληλεπίπεδον εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἰδίαν βάσιν ἐπὶ τὸ ὕψος. Ὡςτε $\text{AM} = \text{AN} \times \text{AE}$, καὶ $\text{KH} = \text{ΚΓ} \times \text{ΚΛ}$, καὶ ἐκ τούτου $\text{AM} : \text{KH} : \text{AN} \times \text{AE} : \text{ΚΓ} \times \text{ΚΛ}$. Ἀλλ', ἐξ ὑποθέσεως, τὸ ἐπίπεδον ΚΜ εἶναι παραλληλὸν μὲ τὸ ΑΘ, διὰ τοῦτο $\text{AE} = \text{ΚΛ}$. Ὡςτε $\text{AM} : \text{KH} :: \text{AN} :: \text{ΚΓ}$.

Π ρ ό τ α σ ι ς. κς'.

Πρὸς τὴν δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ ἐπ' αὐτῆς σημείῳ καὶ συστήσῃ τις γωνίαν σερ. ἴσην μὲ τὴν δοθείσαν.

"Εξω ΑΒ ἡ δοθείσα εὐθεῖα, Α τὸ ἐπ' αὐτῆς δοθὲν σημεῖον, καὶ ΕΓΔΘ ἡ δοθείσα σερ. γωνία, σχ. 195.

Ἐπὶ τῆς ΓΘ εὐθείας λαμβάνω τυχόν σημεῖον τὸ Θ.. ἀπ' αὐτοῦ ἄγω κάθετον τὴν ΘΖ πρὸς τὸ διὰ τῶν ΓΔ, ΓΕ ἐπίπεδον (πρ. ια'). ἄγω διὰ τοῦ σημείου Ζ τὴν ΔΕ.. ζευγνύω τὰ μὲν σημεῖα Γ, Ζ διὰ τῆς ΖΓ εὐθείας, τὰ δὲ σημεῖα Θ, Δ, Ε διὰ τῶν εὐθειῶν ΘΔ, ΘΕ, καὶ μοι γεννῶνται τέσσαρα τριγωνικὰ ἐπίπεδα, τρία μὲν τὰ

ΘΓΔ, ΘΓΕ, ΔΓΕ, ὑφ' ὧν περιέχεται ἡ δοθείσα σελεία γωνία Γ, καὶ τέταρτον τὸ ΘΓΖ.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ λοιπὸν εὐθείᾳ ΒΑ, καὶ τῷ ἐπ' αὐτῆς σημείῳ Α συνίστημι τὴν μὲν γων. ΒΑΙ=ΔΓΕ, τὴν δὲ γων. ΒΑΚ=γων. ΔΓΖ.. τέμνω ἀπὸ τῆς ΒΑ τὴν ΑΗ=ΓΔ, καὶ τὴν ΑΙ=ΓΕ.. ἄγω τὴν ΗΙ.. ἀπὸ τοῦ σημείου Κ ὑψῶ πρὸς ὀρθὰς τὴν ΚΛ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΚΗΑΙ (πρ. β'). καὶ ΖΘ.. ζευγνύω τὸ σημεῖον Λ μὲ τὰ σημεία Α, Η, Ι καὶ λέγω ὅτι ἡ γωνία Α εἶναι ἡ ζητούμενη γωνία.

Καθότι ἡ μὲν γων. ΗΑΙ=γων. ΔΓΕ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ δὲ γων. ΗΑΛ=γων. ΔΓΘ ὡδὲ πρὸς. Ἐπειδὴ τὸ τριγ. ΗΑΙ=τριγ. ΔΓΕ (πρ. δ'. βιβ. α'), ὡς οὐσῶν, ἐκ τῆς κατασκευῆς, τῶν τε γων. ΗΑΙ, ΔΓΕ ἴσων καὶ τῶν σκελῶν αὐτῶν.. καὶ ἐπειδὴ ἐντεῦθεν καὶ ἐκ τῆς κατασκευῆς τὸ τριγ. ΗΑΚ=τριγ. ΔΓΖ (πρ. κ'. βιβ. α'), διὰ τοῦτο ΗΚ=ΔΖ.. ἀλλὰ ταῦτα εἶναι καὶ πλευραὶ τῶν τριγ. ΗΚΛ, ΔΖΘ, ἔτι δὲ, καὶ ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ μὲν ΚΛ=ΖΘ, ἡ δὲ γων. ΗΚΛ=ΔΖΘ, καθὼ οὐθαί, διὰ τοῦτο ΗΛ=ΔΘ (πρ. δ'. βιβ. α'). Ὡς τε τριγ. ΗΑΛ=τριγ. ΔΓΘ (πρ. η'. βιβ. α'). Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ γων. ΛΑΙ=γων. ΘΓΕ.

Ὡς ἐπειδὴ καὶ ἡ σελεία γων. Α περιέχεται ὑπὸ ἐπιπέδῳ ὁμοίῳ τε καὶ ἴσῳν τότε πλήθος καὶ μέγεθος μὲ τὴν γων. Γ, διὰ τοῦτο εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις (ὁρ. ι'). συνίσταται δὲ καὶ πρὸς τῷ Α δοθέντι σημείῳ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ, ὡς ἐζητεῖτο.

Π ό ρ ι σ μ α .

"Ως αἱ ἀπὸ τῶν περάτων τῶν ἴσων σκελῶν, εἰς τὰς ἴσας ζσερεὰς γωνίας, ἀχθεῖσθαι κάθετοι πρὸς τὰ ἀπεναντίον ἐπίπεδα εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις. Οὕτως αἱ ἀπὸ τῶν σημείων Λ καὶ Θ ἀχθεῖσθαι κάθετοι: ΛK , ΘZ πρὸς τὰ ἐπίπεδα HAI , $\Delta\Gamma\text{E}$ εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Π ρ ό τ α σ ι ς. κζ.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ συστήσῃ τις ζσερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον μὲ τὸ δοθέν.

"Ες ω AB ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, καὶ $\Gamma\Delta\text{E}\text{H}\text{K}$ τὸ δοθὲν ζσερεὸν παραλληλεπίπεδον. σχ. 196.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, AB , καὶ τῷ ἐπ' αὐτῆς σημείῳ Λ συνίστημι γωνίαν ζσερεὰν τὴν ABAI ἴσην μὲ τὴν δοθείσαν Γ (πρ. κς'): ὅ ἐστιν ἐκτελῶ τὰς περιεχοῦσας ταύτην ἐπιπέδους γωνίας ἴσας μὲ τὰς ἐκείνην: ἐκάστην δηλονότι ἐκάστη, πλὴν τὰ σκέλη αὐτῶν ὅχι ὡς ἔτυχε, ἀλλὰ κάμνω τὴν $\text{AB}:\text{AI}::\Gamma\Delta:\Gamma\text{E}$, καὶ τὴν $\text{AB}:\text{A}\Lambda::\Gamma\Delta:\Gamma\Theta$.. ἐκπληρῶ τὰ παραλληλόγραμμα AZ , AN , BI .. ἀναγράφω καὶ τὰ ἀπεναντίον τούτων παράλληλα ἐπίπεδα, ἅπερ δηλονότι φέλουσιν εἶναι καὶ παραλληλόγραμμα καὶ ἴσα μὲ τὰ ἀπεναντίον (πρ. κδ'), καί μοι γεννᾶται τὸ ζσερεὸν παραλληλεπίπεδον ΛO , ὅπερ ἐπειδὴ καὶ περιέχεται ὑπὸ ὁμοίων καὶ ἴσων τῶ πληθοῦς ἐπιπέδων (ὅρ. Σ'), ὡς τὸ δοθὲν $\Delta\Gamma\text{E}\text{H}\text{K}$ ζσερεὸν παραλληλεπίπεδον, διὰ τοῦτο εἶναι ὅμοιον μὲ αὐτὸ, καὶ ἔτι καὶ ἐπὶ τῆς δοθείσης AB εὐθείας καὶ κείμενον ὁμοίως, ὡς ἐζητεῖτο.

Π ρ ό τ α σ ι ς κή.

Ἐάν σεριόν παραλληλεπίπεδον τμηθῇ δι' ἐπιπέδου κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον παραλλήλων, τὰ τμήματα θέλουσιν εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

Ἐστω AB τὸ σεριόν παραλληλεπίπεδον. σχ. 197.

Ἄγω τὸ ἐπίπεδον $ΓΘΕΔ$ κατὰ τὰς διαγωνίους $ΓΘ$, $ΔΕ$, καί μοι γεννῶνται δύο πρίσματα τριγωνικά $ΓΖΘΕΑΔ$, καὶ $ΓΒΘΕΗΔ$, ἅπερ λέγω ὅτι εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ τῶν παραλληλεπιπέδων τὰ ἀπεναντίον ἐπίπεδα εἶναι καὶ ἴσα καὶ παραλληλόγραμμα, διὰ τοῦτο εἰς τὰ δύο πρίσματα ἔχω παραλ. $ΑΘ =$ παραλ. $ΔΒ$, καὶ παραλ. $ΔΖ =$ παραλ. $ΗΘ$ (πρ. κδ'). ὥσαύτως καὶ τριγ. $ΔΑΕ =$ τριγ. $ΔΗΕ$ (πρ. λζ. βιβ. α'). καὶ ἔτι τριγ. $ΓΖΘ =$ τριγ. $ΓΒΘ$. Ἄλλ' αὐτὰ ταῦτα μετὰ τοῦ κοινοῦ ἐπιπέδου $ΓΔΕΘ$ περιέχουσι τὰ πρίσματα.. ὥςτε πρισ. $ΓΖΘΕΑΔ =$ πρισ. $ΓΒΘΕΗΔ$ (ὁρ. ι').

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὡςτε τὸ τριγωνικὸν πρίσμα εἶναι ὑποδιπλάσιον τοῦ παραλληλεπιπέδου τοῦ ἔχοντος διπλάσιαν τὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Οὕτω τὸ πρισ. $ΓΖΘΕΑΔ = \frac{\text{πρισ. } AB}{2}$.. διότι ἀμφοτέρω εἶχονσι τὸ αὐτὸ ὕψος $ΑΖ$, καὶ τὸ μὲν πρίσμα ἔχει βάσιν τὸ τριγ. $ΔΑΕ$, τὸ δὲ παραλληλεπίπεδον τὸ παραλ. $ΔΑΕΗ = 2$ τριγ. $ΔΑΕ$.

Π ρ ό τ α σ ι ς κθ'. καὶ λ'.

Τὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

Δύο περιζήσεις δύνανται νὰ ἐπακολουθήσωσιν εἰς τὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν: τουτέστιν ἢ νὰ διαμένωσιν ἐντὸς τεσσάρων ἀπεναντίον παραλλήλων ἐπιπέδων, ἢ μόνον μεταξύ δύο.. καὶ ἔσω πρῶτον τὸ πρῶτον: ὃ ἔστιν ἔσωσαν τὰ παραλληλεπίπεδα $AHBD\Delta$, $AH\Lambda I\Lambda$ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως AH καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ΛO . σχ. 198.

Τὸ τριγωνικὸν πρίσμα $\Delta EIO\Delta$ = τρ. πρι. $\Gamma HK\Lambda BZ$.. διότι ἀμφότερα περιέχονται ὑπὸ ἐπιπέδων ἴσων κατὰ τε τὸ πλῆθος καὶ μέγεθος (ὁρ. ι')... εἰς ταῦτα δὲ τὰ ἴσα προσίθῃμι κοινῶς πρῶτον τὸ τριγωνικὸν πρίσμα $PEH\Lambda Z$, εἴτα ἀφαιρῶ κοινῶς τὸ τριγωνικὸν πρίσμα $\Gamma PIMNB$, καὶ οὕτως ἔχω παραλληλεπ. $AHBD\Delta$ = παραλληλεπ. $AH\Lambda I\Lambda$.

β'. Ἐσωσαν τὰ παραλληλεπίπεδα $AHBD\Delta$, $AHK\Lambda$ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως AH καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ΛO , νὰ ἐκκλίνῃ ὁμῶς τὸ $AHK\Lambda$ ἐκ τῶν δύο πλευρῶν τοῦ $AHBD\Delta$, ὥς νὰ διαμένωσιν ἀμφότερα μόνον μεταξύ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων: τῆς βάσεως λέγω καὶ τοῦ ἀπέναντι αὐτῆς ἐπιπέδου. σχ. 199.

Ἐπεκτείνω τὰ πλευρὰ IM , $K\Lambda$, καὶ τὰ OB , $\Delta\Gamma$, εἰς ὅ νὰ συμπέσωσι κατὰ τὰ σημεῖα N , O , Ω , Π .. ἄγω καὶ τὰς $Z\Pi$ καὶ HO , καὶ οὕτως ἔχω παραλληλεπ. $AHO\Pi\Lambda$ = παραλληλεπ. $AHBD\Delta$ (κατὰ τὸ α'. μέρος). Ἀλλὰ τὸ πρίσμα $AZ\Pi\Lambda M\Lambda$ = πρι. $EHO\kappa I\Gamma E$, ὡς περιεχομένων ἀμφοτέρων ὑπὸ ἴσων παραλληλεπιπέδων.. ὥς εἰς ταῦτα προσιθέμενος κοινῶς τὸ σκεῖν

AZANHA, ἔξω παραλληλεπ. **AHKMEA** = παραλληλεπ. **AHUNA** = παραλληλεπ. **AHBΔΔ**, ὡς προετίθη.

Π ό ρ ι σ μ α α'.

Ὡς πᾶν παραλληλεπίπεδον εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος, καὶ δύναται νὰ ἐκληφθῇ καὶ ὡς γινόμενον ἐκ τῆς κινήσεως ἐνὸς παραλληλογράμμου παραλλήλως ἑαυτῷ ἐπὶ τινα εὐθείαν οὕσαν ἴσην μὲ τὸ ὕψος: ὡς δηλονότι τὸ **AΘΔΕ**, ἢ **AMNE** παρὰ τὴν **AZ** εὐθεΐαν.

Π ό ρ ι σ μ α β'.

Πᾶν πρίσμα τριγωνικὸν εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος, ὡς ὃν ἡμῖς τοῦ παραλληλεπίπεδου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος (πορ. προ. κή'), ἢ γινόμενον τῆς βάσεως τοῦ παραλληλεπίπεδου ἐπὶ τὸ ἡμῖς ὕψος.

Π ό ρ ι σ μ α γ'.

Εἶναι δυνατόν νὰ μεταβάληται πᾶν παραλληλεπίπεδον πάσης γωνίας εἰς ὀρθογώνιον, καὶ τὸ ἀνάπαλιν.

Π ρ ό τ α σ ι ς λα'.

Τὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

Τῶν παραλληλεπίπεδων **ΑΓ**, **ΔΖ** ἔξω ἡ μὲν βασ. **ΑΒ** = βασ. **ΔΕ**, τὸ δ' ὕψ. **ΓΒ** = ὕψ. **ΖΕ**, τότε λέγω ὅτι **σερ. ΑΓ** = **σερ. ΔΖ**. σχ. 200.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ πᾶν παραλληλεπίπεδον εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ γινόμενον τῆς ἰδίας βάσεως ἐπὶ τὸ ἑαυτοῦ ὕψος: (πορ. α'. πρ. λ'), διὰ τοῦτο **σερ. ΑΓ** = **ΑΒ × ΓΒ**, καὶ **σερ. ΔΖ** = **ΔΕ × ΖΕ**.. ἀλλ', ἐξ ὑπο-

Θέσεως, οἱ παράγοντες εἶναι ἴσοι ἑκάτερος ἑκατέρῳ: ὁ ἐξ ἑνὸς τὸ μὲν $AB = \Delta E$, τὸ δὲ $\Gamma B = ZE$, διὰ τοῦτο θί-
λουσιν εἶναι ἴσα καὶ τὰ τούτων γινόμενα: τουτέστι $\varsigma \epsilon\rho. \Delta \Gamma = \varsigma \epsilon\rho. \Delta Z$.

Π ό ρ ι σ μ α.

"Ως καὶ τὰ τριγωνικὰ πρίσματα τὰ ἐπὶ ἴσων βά-
σεων καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι ἴσα ἀλλήλοις, ὡς ὄντα
ἡμίσεα τῶν παραλληλεπίπεδων (πορ. πρ. κη.).

Π ρ ό τ α σ ε ι ς λβ.

Τὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος,
ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν.

Εἰς τὰ παραλληλεπίπεδα $\Delta \Gamma$, $E\text{H}$ ἐς τὸ ὕψ. $\Gamma B = \text{ὕψ. } HZ$, τότε λέγω ὅτι $\varsigma \epsilon\rho. \Delta \Gamma : \varsigma \epsilon\rho. E\text{H} :: \beta \alpha \varsigma. AB : \beta \alpha \varsigma. EZ$. σχ. 201.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ πᾶν παραλληλεπίπεδον εἶναι
οὐδὲν ἄλλο, ἢ γινόμενον τῆς ἰδίας βάσεως ἐπὶ τὸ ἴδιον
ὕψος (πορ. α'. πρ. λ.), διὰ τοῦτο $\varsigma \epsilon\rho. \Delta \Gamma = AB \times \Gamma B$, καὶ $\varsigma \epsilon\rho. E\text{H} = EZ \times HZ$. ὥς $\varsigma \epsilon\rho. \Delta \Gamma : AB \times \Gamma B :: \varsigma \epsilon\rho. E\text{H} : EZ \times HZ$ (ὁρ. ζ. βιβ. ε'). καὶ ἐναλ-
λαξ $\varsigma \epsilon\rho. \Delta \Gamma : \varsigma \epsilon\rho. E\text{H} :: AB \times \Gamma B : EZ \times HZ :: AB : EZ$ (πρ. γ'. βιβλ. ε'), ὡς οὕσης $\Gamma B = HZ$, ἐξ ὑπο-
θέσεως. (α).

(α) Δῆλον ὅτι αὕτη ἡ πρότασις πραγματικῶς ταυτίζεται με-
τὰν κέ. Καθότι ἂν τις ἐφαρμύσῃ τὰ ἴσα ὕψη θίβη γινηθῇ ἐν
παραλληλεπίπεδον τεμνόμενον ὑπὸ ἐπίπεδον παραλλήλου μετὰ
ἀπώσαντιον ἐπίπεδα τοῦ παραλληλεπίπεδου.

Π ό ρ ι σ μ α.

"Ως τὰ τριγωνικά πρίσματα τὰ ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν, ὡς ὄντα ὑποδιπλάσια τῶν παραλληλεπιπέδων τῶν ἔχόντων τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος (πορ. πρ. λη').

Π ρ ό τ α σ ι ς λγ'.

Τὰ ὅμοια παραλληλεπίπεδα ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν.

"Εξωσαν ὅμοια παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΟ, ΓΜ καὶ ὁμόλογοι αἱ πλευραὶ αὐτῶν ΑΒ, ΓΔ, τότε λέγω ὅτι $\text{σερ. ΑΟ} : \text{σερ. ΓΜ} :: \text{ΑΒ}^3 : \text{ΓΔ}^3$. σχ. 196.

Ἐπειδὴ καὶ, ἐξ ὑποθέσεως, τὰ παραλληλόγραμμα ΑΝ, ΓΚ εἶναι ὅμοια, διὰ τοῦτο ἔξω παραλ. ΑΝ : παραλ. ΓΚ :: $\text{ΑΒ}^2 : \text{ΓΔ}^2$ (πρ. κ. βιβ. ζ'). β'. Ἐπειδὴ καὶ τὰ σερεῖ ΑΟ, ΓΜ εἶναι ὅμοια εἴτε ἰσογώνια διὰ τοῦτο ἔξω $\text{ΑΙ} : \text{ΓΕ} :: \text{ΑΒ} : \text{ΓΔ}$ (πρ. δ'. βιβ. ζ').

Τώρα πολλαπλασιάζω, ὅρου ἐφ' ὅρου, τὴν πρώτην ἀναλογίαν διὰ τῆς δευτέρας, καὶ ἔχω παραλ. $\text{ΑΝ} \times \text{ΑΙ} : \text{παραλ. ΓΚ} \times \text{ΓΕ} :: \text{ΑΒ}^3 : \text{ΓΔ}^3$ (πορ. α'. πρ. δ'. βιβ. ε'). .. ἀλλὰ παραλ. $\text{ΑΝ} \times \text{ΑΙ} = \text{σερ. ΑΟ}$, καὶ παραλ. $\text{ΓΚ} \times \text{ΓΕ} = \text{σερ. ΓΜ}$. (πορ. α'. πρ. λ'). ὥς $\text{σερ. ΑΟ} : \text{σερ. ΓΜ} :: \text{ΑΒ}^3 : \text{ΓΔ}^3$.

Π ό ρ ι σ μ α α'.

"Ως ἂν ἦναι τέσσαρες εὐθεῖαι συνεχῶς ἀνάλογοι, τότε ὡς ἡ πρώτη ἔχει πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτω καὶ τὸ ἐπὶ τῆς πρώτης παραλληλεπίπεδον πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς δευτέρας ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον. Καθότι καὶ ὁ λόγος

τῆς πρώτης πρὸς τὴν τετάρτην εἶναι τριπλασίον τοῦ, ὅν ἔχει· ἢ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν (ὅρ. ι'. βιβ. ε').

Π ό ρ ι σ μ α β'.

Ἄν τὸ ὕψος ἐνὸς παραλληλεπιπέδου ᾗναι ἴσον μετὰ τοῦ μήκους καὶ πλάτους τῆς βάσεως, τότε τὸ παραλληλεπιπέδον ὀνομάζεται κύβος (ὅρ. ιδ'). καὶ ἐπομένως τότε τὰ ὅμοια παραλληλεπίπεδα εἶναι ἴσα μετὰ τοὺς κύβους μὲς τῶν πλευρῶν.

Π ρ ό τ α σ ι ς λδ'.

Αἱ βάσεις τῶν ἴσων παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόμεναι μετὰ τῶν ὕψων, καὶ ὡς περ παραλληλεπιπέδων αἱ βάσεις ἀντιπάσχουσι μετὰ τῶν ὕψων, ταῦτα εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

Ἐς τὸ παραλληλεπ. $AB =$ παραλληλεπ. EZ , τότε λέγω ὅτι βὰς. $AD : βὰς. EO :: ὕψ. EH : ὕψ. AG :$ ὑποτιθεμένων δηλονότι διὰ τῶν EH, AG , ἀλλέως ἤθελον μεταφέρει αὐτὰ εἰς ὀρθὰ, ἢ ὀρθογώνια (πορ. γ'. πρ. λ'). σχ. 202.

Ἐπειδὴ καὶ πᾶν παραλληλεπιπέδον εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος (πορ. α'. πρ. λ'), διὰ τοῦτο εἰρ. $AB = βὰς. AD \times ὕψ. AG$, καὶ εἰρ. $EZ = βὰς. EO \times ὕψ. EH$.. ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως εἰρ. $AB =$ εἰρ. EZ , διὰ τοῦτο καὶ βὰς. $AD \times ὕψ. AG = βὰς. EO \times ὕψ. EH$.. ἀλλὰ πᾶσα ἐξίσωσις τρέπειται εἰς ἀναλογίαν, διὰ τοῦτο βὰς. $AD : βὰς. EO :: ὕψ. EH : ὕψ. AG$.

β'. Ἐς τὸ βὰς. $AD : βὰς. EO :: ὕψ. EH : ὕψ. AG$, τότε λέγω ὅτι παραλληλεπ. $AB =$ παραλληλεπ. EZ . Ἰαθότι ἐπειδὴ βὰς. $AD : βὰς. EO :: ὕψ. EH : ὕψ. AG$, διὰ τοῦτο βὰς. $AD \times ὕψ. AG = βὰς. EO \times ὕψ. EH$..

ἀλλὰ βαπ. $ΑΔ \times \upsilon\phi.$ $ΑΓ = \text{σερ. } ΑΒ,$ καὶ βαπ. $ΕΘ \times \upsilon\phi.$ $ΕΗ = \text{σερ. } ΕΖ$ (κατὰ τὸ αὐτὸ), ὥς· $\text{σερ. } ΑΒ = \text{σερ. } ΕΖ.$

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὡς· καὶ τῶν τριγωνικῶν ἴσων πρισμαίων, ὡς ὄντων ἡμίσεων τῶν παραλληλεπιπέδων τῶν ἐχόντων τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ διπλασίαν τὴν βάσιν (πορ. πρ. κη'), ἀντιπάσχουσιν αἱ βάσεις μετὰ τὰ ὕψη.. καὶ ἂν αἱ βάσεις δύο τριγωνικῶν πρισμαίων ἀντιπάσχωσι μετὰ τὰ ὕψη, ταῦτα τὰ πρίσματα θέλουσιν εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

Π ρ ό τ α σ ι ς λέ'.

Ἐάν ἀπὸ τῆς κορυφῆς δύο ἴσων γωνιῶν ἐπιπέδων ἀχθῇσι δύο εὐθεῖαι μετεώροι, ὥς· θατέρω αὐτῶν νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τῶν σκελῶν τῆς γωνίας, ὅσον ἢ ἐτέρα.. καὶ ἀπὸ τινος σημείου τῶν μετεώρων εὐθειῶν καταχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τῶν ἀπέναντι ἐπιπέδων τῶν διὰ τῶν ἴσων γωνιῶν.. καὶ συζευχθῶσι τὰ πέρατα τῶν καθέτων μετὰ τὰς κορυφὰς τῶν ἴσων γωνιῶν, αἱ γεννητόμεναι γωνίαι ἔκ τε τῶν μετεώρων εὐθειῶν καὶ τῶν συζευγνόντων τὰ πέρατα τῶν καθέτων μετὰ τὰς κορυφὰς τῶν ἴσων γωνιῶν θέλουσιν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Ἔσω ἐπίπεδος γων. $ΗΑΙ = \text{γων. } ΔΓΕ..$ ὕψὺ μετεώρως τὴν $ΑΔ$ καὶ $ΓΘ$, πλὴν οὕτως, ὥς· ἢ μὲν γων. $ΛΔΗ = \text{γων. } ΘΓΔ$, ἢ δὲ γων. $ΛΑΙ = \text{γων. } ΟΓΕ..$ ἄγω καθεύως τὰς $ΛΚ$, $ΘΖ$, καὶ λέγω ὅτι γων. $ΛΔΚ = \text{γων. } ΟΓΖ.$ σχ. 203.

Πρὶν ὁμῶς νὰ κατὰξω τὰς καθεύους $ΛΚ$, $ΘΖ$, ἐγὼ λαμβάνω τὰ σημεῖα $Λ$, καὶ $Θ$ οὕτως, ὥς· ἢ $ΑΔ = ΓΘ.$

Αἱ γωνίαι A καὶ Γ εἶναι σεριαί τε καὶ ὑπαι ἀλλή-
 λαις· ὡς περιεχόμεναι ὑπὸ ἴσων ἐπιπέδων γωνιῶν κατὰ
 τε τὸ πλήθος καὶ μέγεθος (ὅρ. ι.)... ἀλλ' αἱ ἀπὸ τῶν
 περὶ τῶν τῶν ἴσων σκελῶν εἰς τὰς σεριὰς γωνίας ἀχθεῖ-
 σαι κάθεται ἐπὶ τὰ ἀπειραυτίον ἐπίπεδα εἶναι ἴσαι ἀλλή-
 λαις (πορ. πρ. κς.)_ε. διὰ τοῦτο $\Lambda K = \Theta Z$. Ὡς εἰς τὰ
 τρίγωνα $\Lambda \Delta K$, $\Theta \Gamma Z$ ἐγὼ ἔχων $\Lambda K = \Theta Z$ καὶ $\Delta \Lambda$
 $= \Gamma \Theta$, ἐκ τῆς κατασκευῆς· ὅ ἐστιν ἔχων $\Delta \Lambda : \Lambda K ::$
 $\Gamma \Theta : \Theta Z$, καὶ ὀρθὰς τὰς γωνίας $\Delta K \Lambda$, $\Theta Z \Gamma$, ἔξω ἰσο-
 γώνια τὰ τρίγωνα (πρ. ζ'. βιβ. σ'). .. τοιούτοις τὴν γων.
 $\Lambda \Delta K =$ γων. $\Theta \Gamma Z$, ὡς προσετέθη.

Π ρ ό τ α σ ι ς. λς.

Τὸ ἐκ τριῶν εὐθειῶν ἀναλόγων συνιστάμενον παραλ-
 ληλεπίπεδον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐκ τῆς μέσης παραλληλε-
 πίπεδον ἰσογώνιον.

"Εξωσαν ἀνάλογοι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι A , B , Γ . σχ.
 204.

Πρὸς τῷ σημείῳ K τῆς KI εὐθείας συνίστημι τυχοῦ-
 σαν γωνίαν σεριὰν τὴν K (πρ. κς') .. ἐκτελῶ τὴν μὲν
 $KI = A$, τὴν δὲ $K\Delta = B$, καὶ τὴν $KH = \Gamma$..
 καὶ ἐκπληρῶ τὸ παραλληλεπίπεδον KZ (πρ. κς'). Εἰ-
 τα πρὸς τῷ σημείῳ Ω τῆς ΩP εὐθείας συνίστημι γωνίαν
 σεριὰν τὴν $\Omega =$ γων. K , ἐκτελῶν τὴν $\Omega P = \Omega M =$
 $\Omega H = B$.. ἐκπληρῶ τὸ παραλληλεπίπεδον ΩO , καὶ
 λέγω ὅτι σερ. $KZ =$ σερ. ΩO .

Καθότι ἐπειδὴ ἡ γων. $IKH =$ γων. $P\Omega H$, καὶ
 $KI : \Omega P :: \Omega M : HK$, ἐκ τῆς κατασκευῆς, διὰ τοῦτο πα-
 ραλ. $HI =$ παραλ. $P\Omega$ (πρ. ιθ'. βιβ. σ') : ὅ ἐστιν τὰ

σερεὰ ΚΖ, ΩΟ ἔχουσιν ἴσας τὰς βάρεις. Ἀλλ' ἡ εὐ-
θεία ΚΔ ἀπέχει τῶν ΚΙ καὶ ΚΗ, ὥς ἡ ΩΜ τῶν ΩΡ,
καὶ ΩΠ, καὶ ἐν ταυτῷ ἡ ΚΔ = ΩΜ = Β, διὰ τοῦτο
αἱ ἀπὸ τῶν σημείων Δ, Μ ἀχθησόμεναι κάθετοι θέλουσιν
εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις, εἴτε αἱ ὑπ' αὐτῶν ὑποτετινόμεναι γω-
νίαι (πρ. λε'): ὅςτις τὰ σερεὰ ΚΖ, ΩΟ εἶναι καὶ ἰσο-
ὑψη, καὶ διὰ τοῦτο ἴσα ἀλλήλαις (πρ. λβ'). .. ἀλλὰ τὸ
μὲν ΚΖ συνετέθη ὑπὸ τῶν εὐθειῶν Α, Β, Γ, τὸ δὲ
ΩΟ ὑπὸ τῆς εὐθείας Β καὶ μὲ ἴσας γωνίας, ὥς γέγονε
τὸ ζητούμενον.

Π ό ρ ι σ μ α. α'.

Ἦσσε ἂν εἷς κύσος ἦναι ἴσος μὲ ἐν παραλληλεπίπε-
δον ὀρθογώνιον, ἡ κυσικὴ αὐτοῦ ρίζα θέλει εἶναι μέ-
σαντες ἀναλογον τῶν δύο πλευρῶν τοῦ παραλληλεπιπέδου
καὶ ἴση μὲ τὴν τρίτην.

Π ό ρ ι σ μ α. β'.

Πάν παραλληλεπίπεδον ὀρθόν, εἴτε ὀρθογώνιον,
εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν αὐτοῦ πλευρῶν.
Ἦσσε σερεὸν ἠθέλεν εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ γινόμενόν τι ἐκ
τῆς κινήσεως μιᾶς μόνης γραμμῆς ἐπὶ μίαν ἄλλην γραμ-
μὴν, εἴτα τῆς γεννηθείσης ἐπιφανείας ἐπὶ δευτέραν γραμ-
μὴν. Οὕτως ἂν ἡ ΚΗ εὐθεῖα κινήθῃ ἐπὶ τὴν ΚΙ εὐθεῖαν,
ἔχει νὰ γεννηθῇ ἡ ΗΙ ἐπιφάνεια. καὶ ἂν ἡ ΗΙ ἐπιφάνεια
ἐπὶ τὴν ΚΔ, ἔχει νὰ γεννηθῇ τὸ σερεὸν ΚΖ, ὑποτιθε-
μένου δηλονότι νὰ εἰδῶνται σημεῖα τινα καθ' ὁδόν. Καὶ
ἐπομένως εἶναι ἀδιάφορον ἢ νὰ κινήσω τὴν ΚΗ ἐπὶ τὴν
ΚΙ, ἢ τὴν ΚΙ ἐπὶ τὴν ΚΗ, ἢ τὴν ΚΔ ἐπὶ τὴν ΚΙ...
διότι τὸ γεννησόμενον σερεὸν θέλει εἶναι πάντοτε τὸ ΚΖ.

Π ρ ο τ α σ ι ς. λζ'.

Ἐάν τεσσαρες εὐθείαι ἦναι ἀνάλογοι, καὶ τὰ ἐπὶ αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα παραλληλεπίπεδα θέλουνται εἶναι ἀνάλογα. καὶ εἰάν τὰ ἐπὶ τεσσάρων εὐθειῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα παραλληλεπίπεδα ἦναι ἀνάλογα, ἀνάλογοι θέλονται εἶναι καὶ αὐταὶ αἱ εὐθείαι.

Ἐστω $AB:ΓΔ::EZ:ΗΘ$. σχ. 205.

Ἀναγράφω ἐπὶ αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ παραλληλεπίπεδα $AK, ΓΛ, EM, ΗΝ$ (πρ. κζ'). καὶ λέγω ὅτι $σερ. AK:σερ. ΓΛ::σερ. EM:σερ. ΗΝ$.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ, ἐξ ὑποθέσεως, $AB:ΓΔ::EZ:ΗΘ$, διὰ τοῦτο καὶ $AB^3:ΓΔ^3::EZ^3:ΗΘ^3$ (πρ. γ'. πρ. δ'. βιβ. ε'). ἄλλα $σερ. AK:σερ. ΓΛ::AB^3:ΓΔ^3$, καὶ $σερ. EM:σερ. ΗΝ:ΕΖ^3:ΗΘ^3$ (πρ. λγ'). ὥςτε διὰ τὴν ταυτότητα τῶν λόγων $σερ. AK:σερ. ΓΛ::σερ. EM:σερ. ΗΝ$.

β'. Ἐστω ἤδη $σερ. AK:σερ. ΓΛ::σερ. EM:σερ. ΗΝ$, καὶ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, τότε λέγω ὅτι καὶ $AB:ΓΔ::EZ:ΗΘ$. Καθότι τότε $σερ. AK:σερ. ΓΛ::AB^3:ΓΔ^3$, καὶ $σερ. EM:σερ. ΗΝ::EZ^3:ΗΘ^3$ (κατὰ τὴν αὐτήν).. ὥςτε διὰ τὴν ταυτότητα τῶν λόγων $AB^3:ΓΔ^3::EZ^3:ΗΘ^3$, καὶ διὰ τοῦτο $AB:ΓΔ::EZ:ΗΘ$ (πρ. δ'. πρ. ε'. βιβ. ε').

Π ρ ο τ α σ ι ς. λη'.

Ἐάν ἐπίπεδον ἦναι ὀρθόν πρὸς ἐπίπεδον, καὶ ἀπὸ τινος σημείου θιγέρον τῶν ἐπιπέδων καταχθῇ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐτέρου ἐπιπέδου, αὕτη θέλει πέσει ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων.

"Εξω πρὸς ὀρθὰς τὸ ἐπίπεδον $\Gamma\Delta\Delta$ πρὸς τὸ AB , καὶ $\Delta\Delta$ ἢ τούτων κοινὴ τομὴ. σχ. 206.

Ἀπό τινος τυχόντος σημείου τοῦ ἐπιπέδου $\Gamma\Delta\Delta$: ὡς τὸ E , κατὰ γω κάθετον ἐπὶ τοῦ AB , καὶ λέγω ὅτι ἔχει νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς $\Delta\Delta$, ἀλλέως, ἂν ἦναι δυνατόν, ἄς πέσῃ ἔξωθεν αὐτῆς, ὡς εἰς τὸ σημεῖον Θ : ὅςιν ἐξ ὧ κάθετος ἡ $E\Theta$. Τώρα ἀπὸ τοῦ σημείου Θ ἄγω κάθετον πρὸς τὴν $\Delta\Delta$ εὐθεῖαν τὴν ΘZ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου AB , ἢ τις θελεῖ εἶναι κάθετος καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον $\Gamma\Delta\Delta$ (ὁ. δ'). καὶ διὰ τοῦτο ἂν ἄξω τὴν ZE εὐθεῖαν, αὕτη θέλει εἶναι πρὸς ὀρθὰς μὲ τὴν $Z\Theta$ (πρό. β'. πρ. δ'): ὅςιν τὸ τρίγωνον EOZ συνέχει δύο ὀρθὰς γων.: τὴν EZO , καὶ EOZ , ὅπερ εἶναι ἄτοπον. Ὡς...

Π ρ ό τ α σ ι ς. λθ'.

Ἐὰν παραλληλεπιπέδου αἱ πλευραὶ τῶν δύο ἀπεναντίον ἐπιπέδων τμηθῶσι δίχα, καὶ διὰ τῶν τομῶν διαχθῶσι δύο ἐπίπεδα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ καὶ ἡ διαγώνιος τοῦ παραλληλεπιπέδου ταμνοῦσι δίχα ἀλλήλας.

Τετμήσθωσαν δίχα αἱ πλευραὶ $\Delta\Delta$, $B\Gamma$ τοῦ ἐπιπέδου $\Delta\Gamma$ τοῦ παραλληλεπιπέδου $Z\Gamma$ κατὰ τὰ σημεῖα K , Λ , M , N , ὡσαύτως καὶ αἱ πλευραὶ ZE , $T\Theta$ κατὰ τὰ σημεῖα H , I , Π , Ω . καὶ διὰ τῶν τομῶν διαχθῶσι τὰ ἐπίπεδα $Η\Lambda$, ΠN , ὧν περ κοινὴ τομὴ ἔστω ἡ OP καὶ ΘA ἡ διαγώνιος, τότε λέγω ὅτι ἡ OP καὶ $A\Theta$ τέμνουσι δίχα ἀλλήλας. σχ. 207.

Ζευγνύω τὸ σημεῖον O μὲ τὰ σημεῖα A καὶ Γ , ὡσαύτως καὶ τὸ σημεῖον P μὲ τὰ σημεῖα Z καὶ Θ .

Ἐπειδὴ καὶ ἡ AB εἶναι παράλληλος μὲ τὴν $\Delta\Gamma$, διὰ

τοῦτο ἡ γων. $OMA = \gammaων.$ $ON\Gamma$, καθὸ ἐναλλάξ.. ὡ-
σαύτως εἶναι καὶ ἡ $AM = N\Gamma$, καθὸ ἡμίσειαι δύο ἴσων
εὐθειῶν, καὶ ἡ $MO = ON$, ὡς οὔσης ἑκατέρας αὐτῶν =
 $BA = \Lambda\Gamma$.. ὥς ἡ γων. $AOM = \gammaων.$ ΓON (πρ. ἡ'.
βιβ. α')., ὅ ἐστιν ἡ $AO\Gamma$ εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ, ὡσαύτως
ἤθελεν ἀποδειχθῆ καὶ ἡ $ZP\Theta$. Ἐπειδὴ λοιπὸν αὗται αἱ
εὐθεῖαι ζευγύουσιν εὐθείας ἴσας καὶ παραλλήλους :
τὰς AZ , $\Gamma\Theta$ (διότι ἑκατέρα τούτων εἶναι παράλληλος
μὲ τὴν ΔE (πρ. θ').), διὰ τοῦτο εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις :
τουτέστιν ἡ $A\Gamma = Z\Theta$, ἔτι δὲ κεῖνται καὶ ἐφ' ἐνὸς ἐπι-
πέδου, ὡσαύτως καὶ ἡ διαγώνιος $A\Theta$ (πρ. ζ').).

Εἰς τὰ τρίγωνα λοιπὸν ASO , ΘSP ἡ μὲν γων.
 $\Sigma AO = \gammaων.$ ΣOP , ἡ δὲ γων. $\Sigma OA = \gammaων.$ $\Sigma P\Theta$,
καθὸ ἐναλλάξ, ἡ δὲ πλευρὰ $AO = P\Theta$, ὡς οὐσῶν
ἡμίσεων τῶν πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου $A\Gamma\Theta Z$..
ὥς $OS = SP$, καὶ $AS = \Sigma\Theta$ (πρ. κς'. βιβ. α').: ὁ
ἐστὶν ἡ κοινὴ τομὴ τῶν δύο ἐπιπέδων καὶ ἡ διαγώνιος τοῦ
παραλληλεπιπέδου τέμνουσι δίχα ἀλλήλας.

Π ό ρ ι σ μ α.

"Ὡς αἱ διαγώνιοι παντὸς παραλληλεπιπέδου τέ-
μνουσι δίχα ἀλλήλας, ὡς δηλονότι καὶ αἱ τῶν παραλληλο-
γράμμων (πόρ. β' πρ. λδ').). Καθότι ἂν ἄξω καὶ ἄλλην
διαγώνιον εἰς τὸ $A\Gamma$ παραλληλεπίπεδον, αὕτη ἔχει νὰ
τμηθῇ δίχα ὑπὸ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων OP , καὶ
διὰ τοῦτο καὶ ὑπὸ τῆς διαγωνίου $A\Theta$.

Π ρ ό τ α σ ι ς. μ'.

Ἐὰν ἐκ δύο πρισμαίων τριγωνικῶν ἰσοῦσῶν, τὸ
μὲν ἔχῃ τρίγωνον τὴν βάσιν, τὸ δ' ἕτερον παραλληλό-

γραμμον διπλάσιον τοῦ τριγώνου, ταῦτα τὰ πρίσματα θέλουσιν εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

Ἐξωσαν ἰσοῦψή τὰ τριγωνικά πρίσματα ΑΓΕΔΑ, ΜΗΙΑΜ, καὶ ἡ βάσις ΑΒΓΘ = 2 βασ. ΜΗΖ, τότε λέγω ὅτι εἶναι ἴσα ἀλλήλοις. σχ. 208.

Ἐκπληρῶ τὰ παραλληλεπίπεδα ΑΕ καὶ ΜΙ.

Ἐπειδὴ καὶ, ἐξ ὑποθέσεως, παραλ. ΑΒΓΘ = 2 τριγ. ΜΗΖ.. καὶ ἐπειδὴ 2 τριγ. ΜΗΖ = παραλ. ΜΗΗΖ (πρ. μα'. βιβ. α'), δια τούτο παραλ. ΑΒΓΘ = παραλ. ΜΗΗΖ. Ἀλλὰ τὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι ἴσα ἀλλήλοις (τρ. λα').. ὥςτε σερ. ΑΕ = σερ. ΜΙ.. ἀλλ' ἑκάτερον τῶν πεισμάτων ΑΓΕΔΑ, ΜΗΙΑΜ εἶναι ὑποδιπλάσιον ἑκατέρων αὐτῶν τῶν σερεῶν (πρ. κη').. ὥςτε πρισ. ΑΓΕΔΑ = πρισ. ΜΗΙΑΜ.

Π ὁ ρ ι σ μ α.

Ὡς εἶναι ἀδιάφορον ἢ ἐν τρίγωνον νὰ κινηθῇ, ὅσον τὸ ὕψος, ἢ τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου παραλληλόγραμμον, ὅσον τὸ ὕψος, φθάνει μόνον νὰ σμικρύνηται τὸ παραλληλόγραμμον ἀδιακόπως οὕτως, ὥςτε, ὅταν φύατῃ εἰς τὸ πέρας τοῦ ὕψους, νὰ μεταβληθῇ εἰς εὐθεῖαν: τουτέστι εἰς ἑκάτερα τὰ συμβεβηκότα ἢ σερότης θέλει εἶναι ἴση..



ΒΙΒΛΙΟΝ. ΙΒ'.

ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΩΝ. Β'. (α).

"Ο ροι.

α'. Πυραμὶς εἶναι σχῆμα στερεὸν περιεχόμενον ὑπὸ ἐπιπέδων, ἐξ ὧν τὸ μὲν ἐν εἶναι τυχὸν πολὺπλευρον, ἢ τις καὶ βάσις λέγεται, τὰ δὲ λοιπὰ τρίγωνα ἀρχόμενα ἀπὸ τῆς βάσεως καὶ περατούμενα εἰς ἐν σημεῖον, ὃ περ καὶ κορυφή αὐτῆς ὀνομάζεται, ὡς ἡ ΑΒΓΔ. σχ. 211. Ἀπόθεμα δ' ὀνομάζεται ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως κάθετος. "Αν δ' ἡ βάσις τῆς πυραμίδος ᾗναι τρίγωνον, τριγωνικὴ ὀνομάζεται τότε ἡ πυραμὶς. ἂν δὲ τετράγωνον, τετραγωνικὴ. κτξ. Καὶ κόλουρος λέγεται ἡ τετμημένη, ὡς ἡ ΕΖΗΓΒΔ σχ. 211.

β'. "Αν ἡ βάσις τῆς πυραμίδος ᾗναι τακτικὸν πολύγωνον, εἴτε ἴσα πρὸς ἄλληλα τὰ τρίγωνα, ἢ πυραμὶς ὀνομάζεται τακτικὴ. Αὕτη δ' ὅμως ἔθελε γεννηθῆ, ἂν ἐκ τοῦ μεσαιτάτου τῆς βάσεως ἐγερθῇ εὐθεῖα καὶ ἐπ' αὐτὴν κινηθῇ ἡ βάσις παραλλήλως ἑαυτῇ τακτικῇ σμι-

(α) Ὁ Εὐκλείδης πραγματευσάμενος ἐν τῷ α' βιβλίῳ περὶ τῶν στερεῶν τῶν παραλλήλεπιπέδων, εὐταῦθα ἐμβαίνει εἰς τὴν ἔκφρασιν ἐκεῖνων τῶν στερεῶν, ἅπερ περατοῦνται ὑπὸ ἐπιφανείων κυρτῶν: τοιούτων εἰς κωνοὺς, κυλινδρούς καὶ σφαῖρας, ἐτι οὐ καὶ εἰς πυραμίδας.

κρυπνυμένη, πλὴν οὕτω πως, ὥς φθάσασα εἰς τὴν κορυφὴν νὰ μεταβληθῇ εἰς σημεῖον. Ἄν λοιπὸν ἡ ἐγεθείσα μετεώρως εὐθεῖα ἐγερθῇ πρὸς ὀρθάς, ἡ πυραμὶς ὀνομάζεται ὀρθή, εἰ δὲ πλαγίως, πλαγία.

γ'. Κῶνος εἶναι πυραμὶς ἔχουσα κύκλον διὰ βάσιν καὶ ἀπείρους τὸς τριγωνικὰς ἐπιφανείας. Οὗτος δ' ἤθελε γεννηθῇ, ἂν ληφθῇ τι σημεῖον ὡς τὸ α μετεώρως τινὸς κύκλου, καὶ συζευχθῇ διὰ τινος εὐθείας μετ' ἐν σημείον, καὶ ἐπικταυθῇ ἡ εὐθεῖα ἐκατέρωθεν ἀπροσδιορίζως, εἴτα ἡ εὐθεῖα συνεχομένη κατὰ τὸ εἰρημένον σημεῖον περιγραφῇ περὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ἕως οὗ νὰ φθάσῃ, ὅθεν ἤρξατο νὰ κινῆται. Ἡ ἂν κύκλος κινήθῃ παραλλήλως ἑαυτῷ, καὶ σμικρυνθῇ τακτικῶς, πλὴν οὕτω πως, ὥς νὰ μεταβληθῇ εἰς σημεῖον. Ἡ ἂν μὲν τῶν πλευρῶν διαμενουσῆς ἀκινήτου, ἡ ἄλλη περιγραφῇ περὶ αὐτήν, ἕως οὗ νὰ φθάσῃ, ὅθεν ἤρξατο νὰ κινῆται. Ἄξων τοῦ κῶνου λέγεται ἡ διαμένουσα ἀκίνητος πλευρὰ τοῦ τριγώνου, καὶ βάσις ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ τῆς ἐτέρας πλευρᾶς τοῦ τριγώνου γραφόμενος.

δ'. Κῶνος ὀρθὸς λέγεται, ὅταν ὁ ἄξων αὐτοῦ εἶναι πρὸς ὀρθάς μετ' τὴν βάσιν αὐτοῦ, καὶ σκαληνός, ὅταν μὴ πρὸς ὀρθάς.

ε'. Κυλινδρὸς ὀνομάζεται πρίσμα περιεχόμενον ὑπὸ τριῶν ἐπιφανειῶν: δύο κύκλων ἴσων καὶ παραλλήλων, οἵτινες καὶ βάσεις ὀνομάζονται, καὶ μίᾳ κυρτῆς ὡς ὁ ΑΒ σχ. 218. Οὗτος δ' ἤθελε γεννηθῇ, ἂν ἐκ τοῦ κέντρου ἐνὸς κύκλου ἐγείρωτο εὐθεῖα, καὶ ὁ κύκλος ἐκινεῖτο παραλλήλως ἑαυτῷ μέχρι τοῦ πέρατος τῆς εὐθείας, ὥς

δηλονότι εἶναι οὐδέν ἄλλο, ἢ πρίσμα ἔχον ἀπειροσὰς τὰς ἐπιπέδους ἐπιφανείας καὶ κύκλον βάσιν.

Ἄξιον δὲ τοῦ κυλίνδρου ὀνομάζεται ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐγερθεῖσα μετεώρως εὐθεία, ὡς ἡ ΕΖ, καὶ βάσις αὐτὸς ὁ κύκλος.

ς'. Κυλινδρος ὀρθὸς ὀνομάζεται, ὅταν ὁ ἄξων αὐτοῦ ᾖ πρὸς ὀρθὰς πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ, καὶ πλάγιος, ὅταν μὴ πρὸς ὀρθὰς. (α).

ζ'. Ὅμοιοι κύλινδροι καὶ κῶνοι λέγονται οἱ ἔχοντες τοὺς μὲν ἄξονας ἀναλόγους μὲ τὰς διαμέτρους τῶν βάσεων αὐτῶν, τὰς δὲ γωνίας : τοῦ ἄξονος μετὰ τῆς βάσεως, ἴσας ἀλλήλαις.

η'. Σφαῖρα εἶναι σχῆμα σφαιρὸν περιεχόμενον ὑπὸ μιᾶς μόνῃς ἐπιφανείας, ἧς περ ἅπαντα τὰ σημεῖα ἀπέχουσιν ἑξίσου ἀπ' ἐνὸς σημείου ἐντὸς τῆς σφαίρας, ὅπερ κέντρον αὐτῆς ὀνομάζεται.

Αὕτη δ' ἤθελε γεννηθῆ, ἂν τῆς διαμέτρου ἐνὸς ἡ μικκυκλίου διαμενούσης ἀκινήτου, τὸ ἡμικύκλιον περιεσρέφτο περὶ αὐτὴν, καὶ ἴσατο, ὅθεν ἤρξατο νὰ κινῆται.

θ'. Ἄξων τῆς σφαίρας λέγεται ἡ διαμείνουσα ἀκίνητος διάμετρος τοῦ ἡμικυκλίου, καὶ πόλοι τὰ δύο πέρατα

(α) Εἴται οἵτινες σοφίς ὅτι ἂν ἡ μία βᾶσις τοῦ κυλίνδρου τραπῇ εἰς ἓν μόνον σημεῖον, τότε ὁ κύλινδρος ἔχει νὰ τραπῇ εἰς κῶνον, καὶ ἂν ἡ βᾶσις τοῦ κῶνου ἐκ κύκλου τραπῇ εἰς πολύγωνον, ὁ κῶνος ἔχει νὰ μεταβληθῇ εἰς πυραμίδα, καὶ τοῦτου εἶναι ἐνδρισκεται ἀναφορὰ μετὰ κῶνον καὶ κυλίνδρου, καὶ κῶνον καὶ πυραμίδος.

αὐτῆς, καὶ κέντρον τῆς σφαίρας, τὸ κέντρον τοῦ ἡμι-
κυκλίου.

ί. Διάμετρος τῆς σφαίρας λέγεται πᾶσα εὐθεῖα ἡγ-
μένη διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα
τὰ μέρη τῆς περιφερείας. Καὶ κύκλοι μὲν μεγάλοι λέγον-
ται πᾶσα τομὴ κύκλου διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου καὶ
ἔχουσα διάμετρον τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας, κύκλοι
δὲ μικροὶ, πᾶσα τομὴ κύκλου μὴ διὰ τοῦ κέντρου διερ-
χομένη.

Π ρ ό τ α σ ι ς α'.

Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα ἔχουσι πρὸς ἄλ-
ληλα, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων.

Ἔσωσαν ὅμοια σχήματα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΙΚ,
ὧν περ ἔσω ΑΛ, ΖΜ διάμετρος, τότε λέγω ὅτι ΑΒΓΔΕ:
ΖΗΘΙΚ :: ΑΛ² : ΖΜ². σχ. 209.

Ἀπὸ μὲν τοῦ σημείου Ε ἄγω τὰς εὐθείας ΕΛ,
ΕΒ, ἀπὸ δὲ τοῦ Κ, τὰς ΚΜ, ΚΗ.

Εἰς τὰ τρίγωνα ΒΑΕ, ΗΖΚ ἐγὼ ἔχω γων. ΒΑΕ
= γων. ΗΖΚ, καὶ ΑΒ : ΑΕ :: ΖΗ : ΖΚ, διὰ τὴν ὁ-
μοιότητα δηλονότι τῶν ἐγγεγραμμένων πολυγώνων (ὁρ.
α'. βιβ. ζ')., ὥς τε τὰ τρίγωνα ΒΑΕ, ΗΖΚ εἶναι ἰσο-
γώνια (πρ. ζ'. βιβ. ζ') : τούτέσιν ἡ γων. ΑΒΕ = γων.
ΖΗΚ. Ἀλλ' ἡ μὲν γων. ΑΒΕ = γων. ΑΛΕ, ἡ δὲ
γων. ΖΗΚ = ΖΜΚ, καθὼ γωνίαι ἐν τῷ αὐτῷ τμήμα-
τι, διὰ τοῦτο γων. ΑΛΕ = γων. ΖΜΚ (ᾠξ. α'). Εἰς
τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΛΕΑ, ΗΖΜ ἐγὼ ἔχω τὴν μὲν γων.
ΑΛΕ = γων. ΖΜΚ, τὴν δὲ γων. ΛΕΑ = γων. ΜΚΖ:
καθὼ ἐν ἡμικυκλίῳ, ὥς τε τὰ τρίγωνα ΕΑΛ, ΗΖΜ εἰ-

ναὶ ὅμοια (πρ. δ'. βιβ. ζ'.), καὶ διὰ τοῦτο $ΑΛ:ΑΕ::$
 $ZM:ZK$, καὶ ἐναλλάξ $ΑΛ:ZM::ΑΕ:ZK$, καὶ ἔχο-
 μένως $ΑΛ^2:ZM^2::ΑΕ^2:ZK^2$ (πορ. β. πρ. δ'. βιβ.
 ε'.). .. ἀλλὰ πολυγ. $ΑΒΓΔΕ:πολυγ. ΖΗΘΙΚ::ΑΕ^2$
 ZK^2 (πρ. κ'. βιβ. ζ'.), ὥστε διὰ τὴν ταυτότητα τῶν λό-
 γων καὶ πολυγ. $ΑΒΓΔΕ:πολυγ. ΖΗΘΙΚ::ΑΛ^2:$
 ZM^2 .

Π ό ρ ι σ μ α ι α'.

Ὡς καὶ τὰ περὶ τοὺς κύκλους ὅμοια πολύγωνα
 ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων.
 Καθότι ἐπειδὴ καὶ τὰ περιγεγραμμένα εἶναι ὅμοια, καθό-
 τακτικά, μὲ τὰ ἐγγεγραμμένα πολύγωνα.. καὶ τὰ ὅμοια
 πολύγωνα ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν
 ὁμολόγων πλευρῶν (πρ. κ'. βιβ. ζ'.). .. καὶ τὰ τετράγω-
 να τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, κατὰ
 τὴν ἀνὰ χεῖρας πρότασιν, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέ-
 τρων, διὰ τοῦτο καὶ τὰ περιγεγραμμένα ὅμοια πολύγωνα
 ἔξουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων.

Π ό ρ ι σ μ α β'.

Αἱ περίμετροι τῶν ἐν τοῖς κύκλοις καὶ περὶ τοὺς
 κύκλους τακτικῶν πολυπλευρῶν ἔχουσι πρὸς ἄλληλας,
 ὡς αἱ διαμέτροι ἢ αἱ ὑποδιαμέτροι τῶν κύκλων. Καθότι
 ἐπειδὴ καὶ τὰ πολύγωνα $ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΙΚ$ εἶναι ὅμοια,
 διὰ τοῦτο ἔξω $ΑΕ:ZK::ΕΔ:ΚΙ::ΔΓ:ΙΘ::ΓΒ:$
 $ΘΗ::ΒΑ:ΗΖ::ΑΛ:ZM$, ἀλλ' ἅπαντα τὰ ἡγούμενα
 πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα, ὡς ἐν ἡγούμενου πρὸς ἐν ἐπόμενον,
 διὰ τοῦτο $ΑΕ+ΕΔ+ΔΓ+ΓΒ+ΒΑ:ZK+$
 $ΚΙ+ΙΘ+ΘΗ+ΗΖ+ZM::ΑΕ:ZK::ΑΛ:$

$ZM : \frac{AA}{2} : \frac{ZM}{2} :: A : a$: ὀνομασθεῖσων δηλονότι A καὶ α τῶν ἀκτίνων τῶν κύκλων.

Π ρ ό τ α σ ι ς β'.

Οἱ κύκλοι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμετρῶν.

Εἰς τοὺς κύκλους $ABΓΔ$, $EZHΘ$ ἔςωσαν διάμετροι αἱ $ΑΓ$, $ΕΗ$, τότε λέγω ὅτι ἐμβ. $ABΓΔ$: ἐμβ. $EZHΘ :: ΑΓ^2 ; ΕΗ^2$. σχ. 210.

Τὰ ἐν κύκλοις τακτικὰ ὅμοια πολύγωνα ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων (πρ. α'), ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ περὶ τοὺς κύκλους ὅμοια μὲ τὰ ἐγγεγραμμένα (πορ. α'. πρ. α'). ἄλλ' ὅσον καὶ ἂν σμικρύνῃ τις τὰς πλευρὰς τῶν ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων πολυγώνων, τοσοῦτον ἢ περίμετρος αὐτῶν πλησιάζει εἰς τὸν κύκλον, εἴτε εἰς τὴν σύμπτωσιν καὶ ἐφαρμογὴν αὐτῶν.. ὥς ἂν σμικρύνω ἀπείρως τὰς πλευρὰς καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου τακτικοῦ πολυγώνου, ἀμφοτέρω ἔχουσι νὰ συμπίσωσι μὲ τὸν κύκλον καὶ νὰ μεταβληθῶσιν εἰς κύκλον. Καὶ ἐπειδὴ καθ' ὅσον : ἐν ᾧ λέγω ἐσμικρύνετο τὸ μέγεθος τῶν πλευρῶν τῶν ὁμοίων πολυγώνων, τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν δὲν ἔλλειψαν ἀπὸ τοῦ νὰ διαμένωσι πάντοτε πρὸς ἀλλήλας, ὡς τὰ τετράγωνα καὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (πρ. κ'. βιβ. ζ'). καὶ τῶν διαμέτρων (πρ. α'), ἐπόμενον εἶναι καὶ εἰς τὸ πέρασ τοῦ σμικρυσμοῦ αὐτῶν νὰ μὴ μηδενισθῇ ἢ νὰ διαφθαρῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν πολυγώνων ὡς πρὸς τὰ τετρά-

γωνία τῶν διαμέτρων, εἴτε τῶν κύκλων ὡς πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἰδίων διαμέτρων. Ὡς...

Π ὁ ρ ι σ μ α α'.

Ὡς οἱ κύκλοι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς τὰ ἐν αὐτοῖς, ἢ τὰ περὶ αὐτοὺς περιγεγραμμένα πολύγωνα. α'. Καθότι οἱ κύκλοι εἶναι ὅρια καὶ τῶν ἐγγεγραμμένων ἐν αὐτοῖς, καὶ τῶν περιγεγραμμένων πολυγώνων, καὶ β'. διότι ἐκάτερα ἔχουσιν ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων τῶν κύκλων.

Π ὁ ρ ι σ μ α β'.

Οἱ κύκλοι εἶναι τακτικὰ σχήματα ὡς τοῦτο εἶδομεν (πορ. β'. πρ. β'. βιβ. 5'). Καθότι ἂν οἱ κύκλοι ἔχωσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων, καὶ ἂν τὰ τακτικὰ σχήματα ἔχωσιν, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων (πρ. α'), δὴλον ὅτι καὶ οἱ κύκλοι εἶναι τακτικὰ σχήματα ἔχοντα καὶ τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας ἀπειροσάς.

Π ὁ ρ ι σ μ α γ'.

Ὡς αἱ περίμετροι τῶν κύκλων, εἴτε αἱ περιφέρειαι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ διάμετροι ἢ αἱ ὑποδιάμετροι τῶν κύκλων, κατὰ δὲ τὸν Ἀρχιμήδην ἡ διάμετρος ἔχει πρὸς τὴν περιφέρειαν, ὡς 7 πρὸς 22.

Π ρ ὁ τ α σ ι ς γ'.

Πᾶσα πυραμὶς τριγωνικὴ διαφύεται εἰς δύο πυραμίδας τριγωνικὰς ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις καὶ μετὴν ὅλην, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, ἅπερ εἶναι μείζονα τῆς ἡμισείας ὀλικῆς πυραμίδος.

Ἐς $\Lambda\text{ΒΓΔ}$ ἡ τριγωνικὴ δοθεῖσα πυραμὶς. σχ.
211.

Τέμνω δὶχα ἅπαντα τὰ πλευρὰ τῶν τριγωνικῶν ἐπιπέδων τῆς πυραμίδος κατὰ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Ι. καὶ ἐκ τῶν τομῶν ἄγω τὰς εὐθείας $\text{ΕΖ, ΕΗ, ΕΙ, ΖΗ, ΖΚ, ΗΙ, ΗΚ, ΘΙ, ΘΚ, ΚΙ.}$

Τώρα ἐπειδὴ καὶ ἅπασαι αὗται αἱ εὐθεῖαι τέμνουσι δὶχα τὰ πλευρὰ τῶν τριγωνικῶν ἐπιπέδων, διὰ τοῦτο τὰ τέμνουσιν ἀναλόγως (πρ. β'. λιβ. ζ'). ὥς ἅπαντα τὰ τρίγωνα τῆς πυραμίδος $\Lambda\text{ΒΓΔ}$ εἶναι ἰσάριθμα καὶ ὅμοια μὲ τὰ τρίγωνα τῆς πυραμίδος $\Lambda\text{ΕΗΖ}$, ἕκασον ἑκάσῳ, καὶ διὰ τοῦτο αἱ πυραμίδες $\Lambda\text{ΒΓΔ, ΛΕΗΖ}$ εἶναι ὅμοιαι (ὅρ. θ'. βιβ. ια'). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἅπαντα τὰ τρίγωνα τῶν πυραμίδων $\Lambda\text{ΒΓΔ, ΕΒΙΘ}$ εἶναι καὶ ἰσάριθμα καὶ ὅμοια, καὶ διὰ τοῦτο ὅμοιαι καὶ αὗται αἱ πυραμίδες. Ὡς ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς $\Lambda\text{ΕΗΖ}$ εἶναι ὅμοια μὲ τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ΕΒΙΘ . Πλὴν εἶναι ὅχι ὀλιγώτερον καὶ ἴσαι ἀλλήλαις. Καθότι ἅπαντα τὰ περιέχοντα αὐτὰς τρίγωνα εἶναι ἴσα ἀλλήλοις, ἕκασον ἑκάσῳ. διότι εἰς τὰ τρίγωνα $\Lambda\text{ΕΖ, ΕΒΘ}$ ἡ μὲν $\Lambda\text{Ε} = \text{ΕΒ}$, ἐκ τῆς κατασκευῆς, αἱ δὲ γωνίαι αὐτῶν ἴσαι, ἑκάστη ἑκάστῃ, διὰ τὴν ὁμοιότητα αὐτῶν, διὰ τοῦτο τρίγ. $\Lambda\text{ΕΖ} = \text{τριγ. ΕΒΘ}$ (πρ. θ'. βιβ. α'). ὥς ἡ πυρ. $\Lambda\text{ΕΗΖ} = \text{πυρ. ΕΒΙΘ}$ (ὅρ. ι'. βιβ. ια').

β'. Τὸ πρ. $\text{ΕΙΓΗΚΘ} = \text{πρ. ΕΗΖΔΚΘ}$ (πρ. μ'. βιβ. ια'). Καθότι ἀμφοτέρω μὲν ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος, θύτερον δ' ἔχει διὰ βᾶσιν παραλληλόγραμμον διπλάσιον τῆς τριγωνικῆς βάσεως τοῦ ἑτέρου: τοιούτοις τὸ πα-

ραλ. $\Theta\Gamma\text{Κ} = 2$ τριγ. $\Theta\text{Κ}\Delta$, ὧντων δηλονότι τοῦ μὲν τριγ. $\Theta\text{Κ}\Delta =$ τριγ. $\Theta\text{ΚΙ}$ (πρ. λδ. βιβ. α'), τοῦ δὲ τριγ. $\Theta\text{ΚΙ} =$ τριγ. $\text{ΚΙ}\Gamma$, ὡς ὅντος ἐκάστου αὐτῶν ὑποδιπλασίου παραλληλογράμμου.

γ'. Ἄν ἡ ὁλόκληρος πυρ. $\Delta\text{Β}\Gamma\Delta =$ πυρ. $\Delta\text{ΕΗΖ} +$ πυρ. $\text{ΕΒΙ}\Theta +$ πριτ. $\text{ΕΙ}\Gamma\text{Η}\text{Κ}\Theta +$ πριτ. $\text{ΕΗΖ}\Delta\text{Κ}\Theta$, ὡς ὅλον καὶ μέρος. καὶ ἂν τὸ ἐν πριτ. $\text{ΕΙ}\Gamma\text{Π}\text{Κ}\Theta >$ πυρ. $\text{ΗΙ}\text{Κ}\Gamma$, ὡς ὅλον καὶ μέρος, ἢ τις εἶναι $=$ πυρ. $\text{ΕΒ}\Theta\text{Ι}$, δηλονότι πριτ. $\text{ΕΙ}\Gamma\text{Η}\text{Κ}\Theta +$ πριτ. $\text{ΕΗΖ}\Delta\text{Κ}\Theta >$ πυρ. $\Delta\text{ΕΗΖ} +$ πυρ. $\text{ΕΒΙ}\Theta$.

Π ό ρ ι σ μ α α'.

Ὡς εἰς πυραμίδα πᾶν ἐπίπεδον ἀχθὲν παραλλήλως μὲ τὴν βάσιν αὐτῆς, ἀφαιρεῖ ἀπὸ τῆς πυραμίδος πυραμίδα ὁμοίαν μὲ τὴν ὅλην.

Π ό ρ ι σ μ α β'.

Ὡς εἰς τῆς γενομένης πυραμίδος ἐκ τῆς παραλλήλου τομῆς μὲ τὴν βάσιν, εἶναι σχῆμα ὁμοίον μὲ τὴν βάσιν. ἂν δ' ἡ τομὴ γένη κατὰ τὸ ἡμισυ τῆς πυραμίδος ἢ γενομένης βάσεως θέλει εἶναι ὑποτετραπλάσια τῆς βάσεως τῆς δοθείσης πυραμίδος. Καθεύει τριγ. $\text{ΕΗΖ} =$ τριγ. $\text{ΒΙ}\Theta =$ τριγ. $\frac{\text{Β}\Gamma\Delta}{4}$, ὡς ἔχον ἡμισυ ὕψος καὶ ἡμισίαν βάσιν (πορ. γ' πρ. α' βιβ. ε').

Π ό ρ ι σ μ α γ'.

Ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς πυραμίδος, τακτικῆς ὁμως, εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρον τῆς βάσεως πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὸ ἡμισυ ἀπόθεμα, εἴτε ὕψος, ὡς οὔσης δηλονότι τῆς περιμέτρου βάσεως τριγώνων (πορ. γ' πρ. α' βιβ. ε').

Π ὁ ρ ῖ σ μ α. δ'.

Ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς κολούρου πυραμίδος, τακτικῆς ὅμως, εἶναι ἴση μετὰ τὰς δύο περιμέτρους τῶν βάσεων παραλληλαιοστάτης ἐπὶ τὸ ἡμισυ ἀπόθεμα, εἴτε ὕψος. Οὕτως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σκευοῦ $\beta\gamma\delta \Delta\Gamma\text{B} = (\beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta + \text{B}\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta\text{B}) \frac{\Lambda}{2} = \frac{\beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta + \text{B}\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta\text{B}}{2} \Lambda$, Λ ὅτος τοῦ ὕψους τῶν τραπέζιων.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ ἕκαστον τραπέζιον ἔχει παραλλήλους τὰς δύο ἀπεναντίον πλευράς, διὰ τοῦτο εἶναι ἴσον μετὰ δύο τρίγωνα ἔχοντα βάσεις αὐτὰς τὰς παραλλήλους, καὶ ὕψος τὴν τούτων διάστασιν. Οὕτω τραπέζ. $\beta\text{B}\Delta\delta = \text{τριγ. } \beta\Delta\text{B} + \text{τριγ. } \beta\Delta\delta = \frac{\text{B}\Delta}{2} \times \Lambda + \frac{\beta\delta}{2} \times \Lambda$ (πρ. γ'. πρ. α'. βιβ. ζ'). σχ. 213.

Π ρ ὁ τ α σ ι ς δ'.

Ἐὰν δύο ἰσοῦψεις τριγωνικαὶ πυραμίδες διαιρεθῶσιν εἰς δύο πυραμίδας τριγωνικὰς ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις καὶ μετὰ τὴν ὅλην, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα.. καὶ αἱ γεόμεναι πυραμίδες διαιρεθῶσιν, ὡς αἱ ὅλαι, καὶ τοῦτο γένηται ἅτε, τότε τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα ἔξουσιν πρὸς τὰ ἐν τῇ ἐτέρᾳ, ὡς ἡ βάση τῆς μιᾶς πρὸς τὴν βάση τῆς ἐτέρας.

Ἐξῶσαν τοῦ αὐτοῦ ὕψους αἱ πυραμίδες $\text{AB}\Gamma\Delta$, $\Lambda\text{M}\text{O}\text{N}$, καὶ τετμημέναι ὡς ἐν τῇ ἀνωτέρᾳ προτάσει, καὶ ἅς ὑποδιαιρεθῶσιν αἱ δευτέραι αὐτῶν πυραμίδες $\text{EB}\text{I}\Theta$, $\text{P}\text{M}\Sigma\Gamma$, ὡς αἱ ὅλαι, τότε λέγω ὅτι τὰ ἐν τῇ

μια πρίσματα ἔχουν· πρὸς τὰ πρίσματα τὰ ἐν τῇ ἐτέρᾳ
ὡς ΒΓΔ πρὸς ΜΟΝ. σχ. 211 καὶ 212.

Τὰ πρίσματα ΕΗΖΔΚΘ, ΡΗΩΝΥΤ εἶναι τοῦ
αὐτοῦ ὕψους, ὡς ἔχοντα τὸ ἡμισυ ὕψος ἰσοϋψῶν πυραμι-
δων.. ἀλλὰ τὰ ἰσοϋψῆ πρίσματα ἔχουσι πρὸς ἀλλήλα,
ὡς αἱ βάσεις (πρ. λβ· βιδ. ια'). ὥς πρὸς ΕΗΖΔΚΘ :
πρὸς ΡΗΩΝΥΤ :: βασ. ΘΔΚ : βασ. ΤΝΥ :: βασ. $\frac{ΒΓΔ}{4}$:
βασ. $\frac{ΜΟΝ}{4}$ (πέρ. β'· πρ. γ'). :: βασ. ΒΓΔ : βασ. ΜΟΝ.

Πολλαπλασιάζω τὸν πρῶτον λόγον διὰ τοῦ 2, καὶ ἔχω 2
πρὸς ΕΗΖΔΚΘ : 2 πρὸς ΡΗΩΝΥΤ :: βασ. ΒΓΔ :
βασ. ΜΟΝ.

Τώρα ἂν ὑποδιαίρῃσω τὰς δύο πυραμίδας ΕΒΙΘ,
ΡΜΣΤ, ὡς τὰς ἑλὰς ΑΒΓΔ, ΑΜΝΟ, αἵ τινες δηλο-
νότε εἶναι ἰσοϋψεῖς, ὡς ἔχουσαι τὸ ἡμισυ τοῦ ἰσοϋψοῦ
πυραμίδων, τὰ ἐν ταύταις ἐπόμενα δύο πρίσματα ἔχουσι
πρὸς ἀλλήλα, ὡς αἱ τῶν πυραμίδων βάσεις. Ἀλλ' αἱ
τῶν πυραμίδων ΕΒΙΘ, ΡΜΣΤ βάσεις εἶναι $\frac{1}{4}$ τῆς βά-
σεως τῶν ὀλικῶν πυραμίδων.. καὶ τὰ τεταρτημόρια εἶναι
οὐδὲν ἄλλο, ἢ ἀνάλογα (τοῦτο αὐτὸ ἠθέλει λεχθῆ, καὶ ἂν
εἰνέγκτο καὶ δευτέρα καὶ τρίτη ὑποδιαίρεσις τῶν γενομένων
πυραμίδων).. ὥς ἅπαντα τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρί-
σματα ἔχουσι πρὸς τὰ πρίσματα τὰ ἐν τῇ ἐτέρᾳ, ὡς αἱ βά-
σεις τῶν πυραμίδων.

Π ό ρ ι σ μ α.

Ὡς ἐπεὶ αἱ δύο τομαὶ ΕΗΖ, ΡΗΩ εἶναι ὅμοιαι
μὲ τὰς βάσεις ΒΓΔ, ΜΟΝ (πέρ. β'· πρ. γ') καὶ $\frac{1}{4}$ αὐτῶν

τῶν, διὰ τοῦτο ἂν $\beta\alpha\sigma. \text{ΒΓΔ} = \beta\alpha\sigma. \text{ΜΟΝ}$, τότε καὶ ἐπιπ. $\text{ΕΗΖ} = \text{ἐπιπ. ΡΙΙΩ}$.

Ἦ ρ ό τ α σ ι ς. ε'.

Αἱ τοῦ αὐτοῦ ὕψους τριγωνικαὶ πυραμίδες ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ βάσεις.

Ἐςωσαν τοῦ αὐτοῦ ὕψους πυραμίδες ΑΒΓΔ , ΑΜΟΝ , τότε λέγω ὅτι $\text{πυρ. ΑΒΓΔ} : \text{πυρ. ΑΜΟΝ} :: \beta\alpha\sigma. \text{ΒΓΔ} : \beta\alpha\sigma. \text{ΜΟΝ}$. σχ. 211 καὶ 212.

Ἄν κινήσω τὴν βάσιν ΒΓΔ τῆς πυραμίδος παραλλήλως ἑαυτῇ μέχρι τοῦ σημείου Α , ὥς καὶ νὰ ἔξῃ σημεία καθ' ὅθον καὶ νὰ σμικρύνηται συνεχῶς, ὥς εἰς τὸ σημείου Α νὰ μετασληθῇ εἰς σημείου, τὸ γεγόμενον σερεόν θέλει εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ (ἐρ. β'). Ὡς ἐνομασθέντος Α τῆς ὁδοῦ, καθ' ἣν κινεῖται ἡ βάση, τούτῃ τοῦ ὕψους τῆς πυραμίδος, τότε ἡ σερρότης τῆς πυραμίδος $= \text{Α} \times \beta\alpha\sigma. \text{ΒΓΔ}$. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ σερρότης τῆς πυραμίδος $\text{ΑΜΟΝ} = \alpha \times \beta\alpha\sigma. \text{ΜΟΝ}$, ἐνομασθέντος α δηλονότι τοῦ ὕψους τῆς πυραμίδος. Ἀλλὰ δύο ἴσων, διαιρουμένων δι' ἴσων, ἡ ἐξίσωσις φθείρεται ὁλοτελῶς, διὰ τοῦτο ἔξω $\frac{\text{πυρ. ΑΒΓΔ}}{\text{πυρ. ΑΜΟΝ}} = \frac{\text{Α} \times \beta\alpha\sigma. \text{ΒΓΔ}}{\alpha \times \beta\alpha\sigma. \text{ΜΟΝ}} = \frac{\beta\alpha\sigma. \text{ΒΓΔ}}{\beta\alpha\sigma. \text{ΜΟΝ}}$, ὡς ὑποτεθέντος $\text{Α} = \alpha$, ὥς $\text{πυρ. ΑΒΓΔ} : \text{πυρ. ΑΜΟΝ} :: \beta\alpha\sigma. \text{ΒΓΔ} : \beta\alpha\sigma. \text{ΜΟΝ}$.

Ἦ ό ρ ι σ μ α. α'.

Ὡς ἂν δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ἔχουσιν ἴσα ὕψη καὶ ἴσας τὰς βάσεις, αὐταὶ θέλουσιν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις. Οὕτως εἰς τὰς πυραμίδας ΑΒΓΔ , ΕΖΗΘ , ἔσω ἡ μὲν

βάσεις $B\Gamma\Delta = \beta\kappa\tau$. $Z\Theta\Theta$, τὰ δὲ ὕψη αὐτῶν ἴσα ἀλλήλοις, τότε $\text{πυρ. } \Lambda B\Gamma\Delta = \text{πυρ. } E Z\Theta\Theta$.

Ἡ ὁ ρ ι σ μ α. β'.

Ἄν εἰς πυραμίδας ἴσας τὸ ὕψος καὶ τὰς βάσεις, ἀχθῶσιν ἐπίπεδα παράλληλα μετὰ τὰς βάσεις καὶ εἰς ἑνὴν ἀπόστασιν ἀπὸ αὐτῶν, αἱ ἀφαιρεθησόμεναι πυραμίδες θέλουσιν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις. Οὕτως ἂν ἄξω τὰ ἐπίπεδα $\beta\gamma\delta$, $\zeta\eta\theta$ παράλληλως μετὰ τὰς βάσεις $B\Gamma\Delta$, $Z\Theta\Theta$ καὶ κατὰ ἴσον ἀπόστημα, τότε $\text{πυρ. } \Lambda\beta\gamma\delta = \text{πυρ. } E\zeta\eta\theta$ (σχ. 213).. οἷοι τε δηλονότι ἔχουσι καὶ τὰ ὕψη ἴσα, καὶ τὴν $\beta\alpha\sigma.$ $\beta\gamma\delta = \beta\alpha\sigma.$ $\zeta\eta\theta$, ὡς οὕσης τῆς μὲν $\beta\delta = \zeta\theta$, τῆς δὲ $\beta\gamma = \zeta\eta$, τῆς δὲ $\gamma\delta = \eta\theta$ (πρ. δ' βιβ. α'): ἡ βάσεων ἴσων ἐπιπέδων γωνιῶν περιεχουσὴν ἴσας στερεὰς γωνίας τὰς A , E .

Ἡ ὁ ρ ι σ μ α. γ'.

Ἄν εἰς μίαν πυραμίδα ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλως μετὰ τὴν βάσην καὶ κατὰ τὸ μέσον, ἡ ἀφαιρεθησόμενη πυραμὶς θέλει εἶναι $= \frac{1}{8}$ τῆς ὅλης. Καθότι ἔσω τὸ ἐπίπεδον $\beta\gamma\delta$ παράλληλον μετὰ τὴν βάσην $B\Gamma\Delta$ καὶ κατὰ τὸ μέσον τῆς πυραμίδος $\Lambda B\Gamma\Delta$, τότε ἡ μὲν πυραμ. $\Lambda B\Gamma\Delta = \Lambda \times B\Gamma\Delta$, ἡ δὲ $\text{πυρ. } \Lambda\beta\gamma\delta = \frac{\Lambda}{2} \times B\Gamma\Delta$, ὀνομασθέντων δὲ Λ , $\frac{\Lambda}{2}$ τῶν ὕψεων τῶν πυραμίδων. Ἄλλα $\text{τριγ. } \beta\gamma\delta = \text{τριγ. } \frac{B\Gamma\Delta}{4}$ (πρ. β'. πρ. γ'). ὥς $\text{πυρ. } \Lambda\beta\gamma\delta = \frac{\Lambda}{2} \times \frac{B\Gamma\Delta}{4} = \text{πυρ. } \frac{\Lambda B\Gamma\Delta}{8}$. Καὶ ἐχομένως κολουρ. $\text{πυρ. } \delta\gamma\beta B\Gamma\Delta : \text{πυρ. } \Lambda B\Gamma\Delta :: 7 : 8$, καὶ διὰ τοῦτο 2 πρὸς.

ΕΙΓΗΚΘ : πυρ. ΑΒΓΔ :: 5' : 8, και ἐντεῦθεν πριτ.

$$\text{ΕΙΓΗΚΘ} = \frac{5}{16} \text{ πυρ. ΑΒΓΔ. σχ. 212.}$$

Π ό ρ ι σ μ α. δ'.

Ἄν εἰς μίαν πυραμίδα ἀχθῇ ἐπίπεδον παραλλήλως μετὰ τὴν βάσιν καὶ εἰς $\frac{3}{4}$ ἀπὸ τῆς βάσεως, ἡ ἀφαιρεθησόμενη πυραμὶς θέλει εἶναι $\frac{1}{64}$ τῆς ὅλης. Οὕτως αὖ ἄξω εἰς τὴν πυραμίδα Αβγδ ἐπίπεδον παραλλήλως μετὰ τὴν βάσιν βγδ καὶ κατὰ τὸ μέσον, αὕτη θέλει εἶναι $= \frac{1}{8}$ πυρ.

$$\text{Αβγδ. (πόρ. γ')} = \text{καὶ διὰ τοῦτο} = \frac{1}{8 \times 8} \text{ τῆς πυρ. ΑΒΓΔ.}$$

Ἀλλὰ τὸ μέσον τῆς πυραμίδος Αβγδ εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς πυραμίδος ΑΒΓΔ.. Ὡςτε...

Π ό ρ ι σ μ α. ε'.

Ἐὰν δύο ἰσοῦψων τριγωνικῶν πυραμίδων, διαιρεθῶσιν εἰς δύο τριγωνικάς πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις καὶ μετὰ τὴν ὅλην, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα (πρ. γ'), τὰ ἐν τῇ μιᾷ πρίσματα ἦναι ἴσα μετὰ τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ, αἱ πυραμίδες θέλουσιν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις. Καθότι ἔξωσαν τὰ 2 πριτ. ΕΗΖΔΚΘ $=$ 2 πριτ. ΡΠΩΝΥΤ (σχ. 211. καὶ 212), τότε ἐπειδὴ 2 πριτ. ΡΠΩΝΥΤ $=$ 2 πριτ. ΕΗΖΔΚΘ :: βατ. ΒΓΔ : βατ. ΜΟΝ (πρ. δ'), διὰ τοῦτο καὶ βατ. ΒΓΔ $=$ βατ. ΜΟΝ.. ὥςτε πυρ. ΑΒΓΔ $=$ πυρ. ΑΜΟ, (πόρ. α').

Π ρ ό τ α σ ι ς. ς'.

Αἱ τοῦ αὐτοῦ ὕψους πυραμίδες καὶ πολυγώνους βάσεις ἔχονται, ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν.

Ἐπειδὴ πᾶν πολύγωνον διαιρεῖται εἰς τρίγωνα καὶ

τσαῦτα, ὅσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολυγώνου ἀποθέσει δύο, διὰ τοῦτο ἂν τις διαιρέσῃ τὰς δοθείσας βάσεις εἴτε πολυγωνα εἰς τρίγωνα, καὶ ἀπὸ τῶν σκελῶν τῶν τριγώνων ἀξὴ ἐπίπεδα μέχρι τῆς κορυφῆς τῶν πυραμίδων, αἱ δοθείσαι πυραμίδες αἱ τὰς πολυγώνους βάσεις ἔχουσαι θέλουσι διαιρεθῆναι εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας. Ἄλλ' αἱ ὑποψεῖς τριγωνικαὶ πυραμίδες ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν (πρ. ε'). ὥς ἐξουσιν ὡσαύτως καὶ αἱ τὰς πολυγώνους βάσεις ἔχουσαι.

β'. Ἄν ἐγὼ κινήσω μίαν ἐπιφάνειαν, ὅποιας ἐῖη ποτε καὶ ἂν ἔχη τὰς γωνίας, καὶ ἐκ τῆς κινήσεως αὐτῆς νὰ ἐκβῶνται σημεῖα καθ' ὅσων ἔχει νὰ γεννηθῇ σφαιρὸν, ὅπερ δηλοῦντι θέλει εἶναι πάντοτε ἀναλογον μετὰ τὴν κινουμένην τε ἐπιφάνειαν καὶ μετὰ τὸ μέγεθος τῆς κινήσεως, εἴτε ὕψος. Ὡς ἂν τὰ ὕψη δύο κινουμένων ἐπιφανειῶν ἢ βάσεων ἦναι ἴσα, τότε τὰ σφαιρὰ ἔσονται, ὡς αἱ βάσεις.

Π ρ ό τ α σ ι ς. ζ'.

Πᾶν πρίσμα τριγωνικὸν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας τριγωνικὰς ἴσας ἀλλήλαις.

Ἐξω πρίσμα τριγωνικὸν τὸ ΑΒΓΔΕΘ. σχ. 214.

Εἰς τὰ τρία παραλληλόγραμμα τοῦ πρίσματος ἄγω τρεῖς διαγωνίους τὰς ΘΓ, ΘΔ, ΑΓ. καὶ διὰ μὲν τῶν εὐθειῶν ΘΓ, ΘΔ ἄγω τὸ ἐπίπεδον ΘΓΔ, διὰ δὲ τῶν ΓΘ, ΓΔ, τὸ ΓΘΔ, καὶ μοι γεννῶνται τρεῖς πυραμίδες τριγωνικαὶ αἱ ΘΓΔΕ, ΘΑΒΓ, ΘΑΓΔ, αἵτινες δηλονότι λέγω ὅτι εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Καθότι ἡ μὲν πυραμὶς ΘΓΔΕ ἔχει διὰ βάσιν τὴν βάσιν τοῦ πρίσματος : τὴν ΕΓΔ, καὶ διὰ ὕψος τὸ ὕψος τοῦ

πρίσματος, ὡς ἔχουσα τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον Θ : σημεῖον λέγω τῆς κάτω βάσεως τοῦ πρίσματος .. ἡ δὲ πυραμὶς $\Theta\Lambda\Gamma$ ἔχει διὰ βάσιν τὴν ἑτέραν βάσιν τοῦ πρίσματος $\Theta\Lambda\Gamma$, καὶ διὰ ὕψος τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος, ὡς ἔχουσα τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον Γ : σημεῖον λέγω τῆς ἄνω βάσεως τοῦ πρίσματος .. ὥς περ. $\Theta\Gamma\Delta\epsilon =$ περ. $\Theta\Lambda\Gamma$ (πρ. ε'). Ἀλλ' ἡ πυραμὶς $\Theta\Lambda\Gamma =$ περ. $\Theta\Lambda\Gamma\Delta$, ὡς ἔχουσαι ἴσας τὰς τε βάσεις : τουτέστι βασι. $\Lambda\Gamma\Delta =$ βασι. $\Lambda\Gamma\Theta$ (πρ. λδ'. βιβ'. α'), καὶ τὰ ὕψη ἔχοντα τὴν κορυφὴν αὐτῶν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Γ (πρ. δ'). .. ὥς περ αἱ τρεῖς πυραμίδες $\Theta\Gamma\Delta\epsilon$, $\Theta\Lambda\Gamma$, $\Theta\Lambda\Gamma\Delta$, εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Π ό ρ ι σ μ α α'.

Ὡς περ ἡ εἰρηρότης μιᾶς πυραμίδος εἶναι ἴση μὲ $\frac{1}{3}$ τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Π ό ρ ι σ μ α β'.

Ὡς περ πᾶν τετράεδρον, ὡς ὅν πυραμὶς τριγωνικὴ, εἶναι ἴσον κατὰ τὴν εἰρηρότητα μὲ $\frac{1}{6}$ πρίσματος τριγωνικοῦ τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Π ό ρ ι σ μ α γ'.

Ὡς περ παντὸς τριγώνου, ἂν ἐν τῷ κινεῖσθαι ἐσμικρύνετο μὲ ἀναλογίαν συνεχῶς, ὥς περ νὰ μηδενισθῇ, τὸ γενόμενον σφαιρὸν ἐκ τῆς κινήσεως αὐτοῦ, ἂν δὲν ἐσμικρύνετο, ἔχει πρὸς τὸ γενόμενον σφαιρὸν, ἂν ἐσμικρύνετο, ὡς 3 : 1.

Π ό ρ ι σ μ α δ'.

"Ως ἡ εἰρήτης μιᾶς τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι ἴση μετὲν βάσιν ἐνὸς τριγωνικοῦ πρίσματος τῆς αὐτῆς βάσεως τε καὶ ὕψους ἐπὶ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὕψους αὐτοῦ.

Π ό ρ ι σ μ α ε'.

"Ως ἡ εἰρήτης μιᾶς τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι $= \frac{1}{6}$ τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος διπλάσιαν τὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Καθότι τὸ ταῦτου πρίσμα θέλει εἶναι διπλάσιον τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν ὑποδιπλάσιαν (πόρ. πρ. κη'. βιβ. ια').

Π ό ρ ι σ μ α ζ'.

"Ως ἡ πᾶσα πυραμὶς, ὅποιανδήποτε βάσιν καὶ ἂν ἔχη, εἶναι ἴση μετὲν $\frac{1}{3}$ τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν τε καὶ ὕψος. Καθότι ἂν ἐκπληρώσῃ τις τὸ παραλληλόγραμμον τῆς βάσεως μιᾶς τριγωνικῆς πυραμίδος, καὶ ἐπὶ τοῦ νέου τριγώνου συστήσῃ δευτέραν ἰσοῦσιν πυραμίδα, αὕτη θέλει εἶναι ἴση μετὲν πρώτην (πόρ. α'. πρ. ε'). καὶ εἴτε ἑκατέρα μὲν θέλει εἶναι ἴση μετὲν $\frac{1}{3}$ τριγωνικοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν τε καὶ ὕψος, ἀμφοτέραι δὲ $= \frac{1}{3}$ τετραγωνικοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν τε καὶ ὕψος, εἴτε διπλάσιαι τῶν τριγωνικῶν (πρ. κη'). Τοῦτο αὐτὸ ἤθελε λεχθῆ καὶ περὶ τῆς πενταγωνικῆς πυραμίδος, κτξ. Καθότι πᾶσα πολυγώνιος πυραμὶς εἶναι δυνατόν νὰ διαιρεθῇ εἰς τριγωνικάς πυραμίδας.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς. Ἡ'.

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἐξωταν ὅμοιαι τριγωνικαὶ πυραμίδες καὶ ὁμοίως κείμεναι αἱ $AB\Gamma\Delta$, $EOZH$, καὶ πλευραὶ αὐτῶν ὁμολόγοι αἱ AB , EB , τότε λέγω ὅτι πυρ. $AB\Gamma\Delta$: πυρ. $EOZH$:: AB^3 : EO^3 . σχ. 215.

Ἐπειδὴ καὶ αὗται αἱ πυραμίδες εἶναι ὅμοιαι, διὰ τοῦτο καὶ τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν θέλουσι εἶναι ὅμοια. Ὡς α'. εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα $BA\Gamma$, OEZ ἐκπληρῶ τὰ παραλληλόγραμμα $\Gamma A B K$, $ZE O P$. β'. εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα $\Gamma A \Delta$, $ZE H$ ἐκπληρῶ τὰ παραλληλόγραμμα $\Gamma A \Delta I$, $ZE H I I$. γ'. εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα $\Delta A B$, $HE \Theta$ ἐκπληρῶ τὰ παραλληλόγραμμα $\Delta A B N$, $HE \Theta O$. ἄγω τὰ ἀπεναντίου τούτων παράλληλα ἐπίπεδα, καὶ οὕτως ἔχω δύο παραλληλεπίπεδα ὅμοια : τὰ ΓN , $Z O$, ὡς περιέχοντα ὑφ' ὁμοίων ἐπιπέδων. Ὡς ἐξω παραλληλεπ. ΓN : παραλληλεπ. $Z O$:: AB^3 : EO^3 (πρ. λγ'. βιβ. ια.). Τώρα διαιρῶ τὸν πρῶτον λόγον διὰ τοῦ Θ , καὶ ἔχω $\frac{1}{\Theta}$ παραλληλεπ. ΓN : $\frac{1}{\Theta}$ παραλληλεπ. $Z O$:: AB^3 : EO^3 . (πρ. γ'. βιβ. ε'). ἀλλ' $\frac{1}{\Theta}$ παραλληλεπ. $\Gamma N =$ πυρ. $AB\Gamma\Delta$, καὶ $\frac{1}{\Theta}$ παραλληλεπ. $Z O =$ πυρ. $EOZH$ (πρ. ε'. πρ. ζ'). ὥς πυρ. $AB\Gamma\Delta$: πυρ. $EOZH$:: AB^3 : EO^3 (πρ. ια'. βιβ. ε').

Εἰ δὲ καὶ αἱ θαθεῖσαι πυραμίδες ἦσαν πολυγώνου, ἐγὼ ἤθελον τὰς διαιρέσαι εἰς τριγωνικάς, διαιρῶσας τὰς βάσεις αὐτῶν εἰς τοσαῦτα τρίγωνα, ὅσας πλευρὰς ἤθελον

ἔχει αἱ βράεις αὐτῶν ἀποβίαι δύο.. καὶ ἐπειδὴ αἱ γενή-
σασιναι τρυγῶν καὶ πυραμίδος ἠθέλον εἶναι ὅμοια, ὡς ὑπὸ
ὁμοίον ἐπιπέδων περικυλλόμεναι ἐγὼ ἠθέλον ἐξοίτας τῆ-
γωνικῶς πυραμίδας ἀναλόγους μὲ τοὺς κύβους τῶν ὁμο-
λόγων πλεονῶν. ΑΛΛ' ἅπαντα τὰ ἡγούμενα ἔχουσι πρὸς
ἅπαντα τὰ ἐπόμενα, ὡς ἐν ἡγούμενῳ πρὸς ἐν ἐπόμε-
νον διὰ τοῦτο ἠθέλον ἐξοίτην τὴν ὀκτακῆν πυραμίδα πρὸς τὴν
ὀκτακῆν ὡς κύβον πρὸς κύβον τῶν ὁμολόγων πλεονῶν.

II ὁ ρ ε σ μ α.

Ὡς αὖ ἡγαι τέσσαρες εὐθείαι συνεχρῶς ἀνάλογα,
καὶ ἐπὶ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας συστηθῶσι πυραμίδες ὁ-
μοιαὶ καὶ ὁμοίως κείμεναι, τότε αὗται αἱ πυραμίδες ἔχουσι
πρὸς ἀλλήλας ὡς ἡ πρώτη εὐθεία πρὸς τὴν τετάρτην..
διότι ἐπιδυνάμι οὗ λόγος αὐτῶν εἶναι τριπλασίων τοῦ λο-
γού, ὃν περ ἡ πρώτη ἔχει πρὸς τὴν δευτέραν (ὅρ. ε'
βιβ. ε').

II ρ ὁ τ α σ ε σ'.

Τῶν ἑῶν πυραμίδων αἱ βράεις ἀντιπάχουσι μὲ τὰ
ὑψη.. καὶ ἐκείναι τῶν πυραμίδων, ὧν περ αἱ βράεις ἀν-
τιπάχουσι μὲ τὰ ὑψη, εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Ἐξωσαν ἴσαι αἱ πυραμίδες ABΓΔ, EΟZH, τότε
λέγω ὅτι βαρ. ABI: βαρ. EΟΖ:: A: α, ὁμοκαθέτων
A, α τῶν ὑψών αὐτῶν. σχ. 215.

Καθότι ἐπιδυνά, ἐξ ὑποβίαιας, πυρ. ABΓΔ =
πυρ. EΟZH, διὰ τοῦτο καὶ 6 πυρ. ABΓΔ = 6 πυρ.
EΟZH: ἔστι σερ FN = σερ. ZO (πρ. ε'. πρ. ζ')...
διότι δηλονότι τὰ σέρια ταῦτα ἔχουσι ὁπλοκίας τὰς βί-
αιας, ἡ αἱ πυραμίδες καὶ τὰ αὐτὰ ὑψη, ἀλλὰ τῶν ἰσῶν

παραλληλεπίπεδον αἱ βάσεις ἀντιπάσχουσι μετὰ τὴν ὕψη
(πρ. λδ'. βιβ. ια'), ὥς βαρ. ΓΑΒΚ : βαρ. ΖΕΘΡ ::
Α : α, καὶ διὰ τοῦτο βαρ. ΑΒΓ : βαρ. ΕΘΖ :: Α : α
(πρ. γ'. βιβ. ε').

Ἔστω τώρα βαρ. ΑΒΓ : βαρ. ΕΘΖ :: Α : α, τότε
λέγω ὅτι καὶ πυρ. ΑΒΓΔ = πυρ. ΕΘΖΗ.

Καθότι ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, βαρ. ΑΒΓ : βαρ.
ΕΘΖ :: Α : α, διὰ τοῦτο ἔξω καὶ 2 βαρ. ΑΒΓ : 2 βαρ.
ΕΘΖ :: Α : α ὅς βαρ. ΓΑΒΚ : βαρ. ΖΕΘΡ :: Α : α..
ὥς ερ. ΓΝ = ερ. ΖΟ (πρ. λδ'. βιβ. ια'), καὶ
διὰ τοῦτο καὶ $\frac{1}{6}$ ερ. ΓΝ = $\frac{1}{6}$ ερ. ΖΟ : ὅς βαρ. ΑΒΓΔ = πυρ. ΕΘΖΗ (πρ. ε'. πρ. ζ').

Εἰ δὲ καὶ αἱ πυραμίδες ἦσαν πολυγώνιοι, ἐγὼ ἤ-
θελον διακρίνει τὰς βάσεις αὐτῶν εἰς τρίγωνα, καὶ ἐκ τῶν
σκελῶν ἠθελον ἄξοι ἐκτείνει μέχρι τῆς κορυφῆς αὐτῶν,
καὶ οὕτως ἠθελον μεταβάλλω αὐτὰς εἰς τριγωνικάς. Δευ-
τερον ἐπειδὴ καὶ πᾶσα πυραμὶς δύναται νὰ ἐκληφθῇ ὡς
γενόμενον ἐκ κινήσεως μιᾶς ἐπιφανείας, πλὴν μὲ τοιοῦτον
νόμον, ὥς νὰ τμηκρύνηται συνεχῶς μετὰ ἀναλογίαν ἢ κί-
νουμένη ἐπιφάνεια (ὁρ. β'). ὁ δὲ ἔλεγον ὅτι τὸ τοιοῦτον γε-
νόμενον θέλει εἶναι πάντοτε ἀνάλογον μετὰ τὸ μέγεθος τῆς
τε κινουμένης ἐπιφανείας καὶ τῆς κινήσεως.. ὥς ἂν αἱ ἐκ
δύο κινουμένων ἐπιφανειῶν, ἡ βάσεων, αἱ βάσεις ἀντι-
πάσχωσι μετὰ τὰ μεγέθη τῶν κινήσεων, τὰ γενόμενα, ἢ σε-
ρεὰ θέλουσιν εἶναι ἴσα.. καὶ ἐξ ἐναντίας, ἂν τὰ σε-
ρεὰ ἦναι ἴσα, αἱ βάσεις αὐτῶν θέλουσιν ἀντιπάσχει μετὰ
τὰ ὕψη. Ὡς α'. εἴτε τριγωνικά, εἴτε πολυγωνικά ἠθε-
λον εἶναι αἱ ἴσαι πυραμίδες, αἱ βάσεις αὐτῶν θέλουσιν

ἀντιπάσχει μὲ τὰ ὕψη.. καὶ β'. ἂν δύο πυραμίδων τὰ ὕψη ἀντιπάσχωσι μὲ τὰς βάσεις, αὗται αἱ πυραμίδες θί-
λουσιν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Π ρ ὁ τ α σ ι ε . ι .

Πᾶς κῶνος εἶναι ἐν τρίτον κυλίνδρου τῆς αὐτῆς τε
βάσεως καὶ ὕψους.

Ἔστω βάσις ἐκατέρων καὶ τοῦ δοθέντος κώνου καὶ
τοῦ κυλίνδρου, ὁ κύκλος ΑΒΓΔ, καὶ κῶνος ὁ αβδγ. σχ.
216 καὶ 217.

Ἐπειδὴ καὶ πᾶς κύκλος εἶναι δυνατόν νὰ ἐκληφθῇ
ὡς πολύγωνον τακτικόν ἔχον ἀπειροσὰς τὰς πλευράς
(πορ. β'. πρ. β'.).. καὶ ἐπειδὴ πᾶς μὲν κῶνος εἶναι οὐ-
δὲν ἄλλο, ἢ πυραμὶς ἔχουσα διὰ βάσιν κύκλον καὶ ἀπει-
ροσὰ τὰ περὶ αὐτὴν τρίγωνα (ερ. γ'.), πᾶς δὲ κύλιν-
δρος εἶναι πρίσμα ἔχον ἀπειροσὰ τὰ παραλληλόγραμμα
καὶ κύκλον διὰ βάσιν (ερ. ιε'.).. καὶ ἐπειδὴ πᾶσα πυ-
ραμὶς εἶναι ἴση μὲ $\frac{1}{3}$ τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος τὴν αὐ-
τὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος (πορ. α'. πρ. ζ'.), διὰ τοῦτο
πᾶς κῶνος εἶναι ἴσος μὲ $\frac{1}{3}$ ἐνὸς κυλίνδρου, ὅστις ἔχει τὴν
αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Ἐπειτα ἐπειδὴ πᾶσα ἐπιφάνεια κινουμένη γεννᾷ ὅχι
ἐπιφάνειαν, ἀλλὰ σφαιρὸν, ὁλόν ὅτι πᾶν σφαιρὸν θέλει
εἶναι ἀνάλογον μὲ τὸ μέγεθος τῆς τε βάσεως καὶ τῆς κι-
νήσεως.. καὶ ἐπειδὴ ἂν ἡ κινουμένη ἐπιφάνεια ἦναι τρίγω-
νον καὶ ἐν τῷ κινεῖσθαι σμικρύνεται τακτικῶς, ὥστε νὰ
μεταβλῇ εἰς σημεῖον, τὸ ἐξ αὐτῆς προκύπτον σφαιρὸν
θέλει εἶναι $\frac{1}{3}$ τοῦ προκύπτοντος σφαιροῦ τοῦ ἂν ἡ βάσις ἐν
τῷ κινεῖσθαι δὲν ἐσμικρύνετο (πρ. ζ'.), ὁλόν ὅτι θέ-

λουσιν ἀκολουθήσει αὐτὰ ταῦτα, καὶ ἂν ἡ κινουμένη ἐπι-
φάνεια ἤθελεν εἶναι σρογγύλη, εἴτε κύκλος.

Π ό ρ ι σ μ α α'.

Ὡς εἰς σερρότης παντὸς κώνου εἶναι ἴση με $\frac{1}{3}$ τῆς
βάσεως τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ
ὑψος, ἐπὶ τὸ ὑψος, ἢ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὑψους ἐπὶ τὴν βάσιν.

Π ό ρ ι σ μ α β'.

Ἄν εἰς κώνον ἀχθῇ ἐπίπεδον παραλλήλως με τὴν
βάσιν, ὁ ἀφαιρεθησόμενος κώνος θέλει εἶναι ὅμοιος με
τὸν ὅλον (πορ. α'. πρ. γ'. καὶ ὅρ. ε'). διότι δηλονότι αἱ
ἄξονες αὐτῶν ἐκτελοῦσιν ἴσας γωνίας με τὰς διαμέτρους
τῶν βάσεων. σχ. 217.

Π ό ρ ι σ μ α γ'.

Ἄν εἰς κώνον ἀχθῇ ἐπίπεδον παραλλήλως με τὴν
βάσιν καὶ κατὰ τὸ μέσον, ὁ ἀφαιρεθησόμενος κώνος θέ-
λει εἶναι $\frac{1}{8}$ τοῦ ὅλου, ὡς δηλονότι καὶ εἰς τὰς πυραμίδας
(πορ. γ'. πρ. ε'). Καθότι ἄγω τὸ ἐπίπεδον ζηθι παραλ-
λήλως με τὴν βάσιν βγδε καὶ κατὰ τὸ μέσον τοῦ κώνου,
καὶ τότε κων. αζηθι = $\frac{1}{8}$ κων. αβγδε.. καὶ ἐντεῦθεν καὶ
ὁ κύλινδρος κων. ζηθιβγδε = $\frac{7}{8}$ κων. αβγδε.

Π ό ρ ι σ μ α δ'.

Ἡ ἐπιφάνεια ἐνὸς κώνου ὀρθοῦ εἶναι ἴση με τὴν
περιφέρειαν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἥμισυ ἐνὸς ἀποθέματος:
τουτέστι = βγδε $\times \frac{\alpha\beta}{2}$, ὡς καὶ εἰς τὰς πυραμίδας δηλο-
νότι (πορ. γ'. πρ. γ'), καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἡμίσεια τῆς

ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τοῦ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ ὕψους : τουτέστι τῆς βγδς Χ αβ.

Π ό ρ ι σ μ α ε'.

β'. Ἡ ἐπιφάνεια ἐνὸς κώνου κολούρου ὀρθοῦ εἶναι ἴση μὲ τὰς δύο περιφερείας τῶν βάσεων ἐπὶ τὸ ἡμισυ ἐνὸς ἀποθέματος, εἴτε ἴση μὲ τὸ ἡμισυ τῶν δύο περιφερειῶν ἐπὶ ἐν ἀπόθεμα. Καθότι οὗτος ὁ κώνος εἶναι ἐν καὶ τὸ αὐτὸ μὲ μίαν κολούρον πυραμίδος, ἥς περ δηλονότι ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμισυ τῶν δύο περιμέτρων ἐπὶ τὸ ἀπόθεμα (πορ. δ'. πρ. γ').

Π ό ρ ι σ μ α ς'.

γ'. Ὡς ἡ ἐπιφάνεια ἐνὸς κώνου κολούρου ὀρθοῦ εἶναι ἴση μὲ τὴν δις περιφέρειαν ἐνὸς κύκλου ἀχθέντος ἐν τε τῷ μέσῳ τῶν δύο βάσεων καὶ παραλλήλως μὲ αὐτὰς ἐπὶ τὸ ἡμισυ ἀπόθεμα. Καθότι ἂν ἄξω ἐν ἐπίπεδον εἰς ἴσην ἀπόστασιν τῶν κύκλων ζηθεῖ, βγδς καὶ παραλλήλως μὲ αὐτοὺς, ὁ δὲ ἐξ αὐτοῦ ὅτι ὁ γεννησόμενος

$$\text{κύκλος} = \frac{\text{ζηδε} + \text{βγδε}}{2}.$$

Π ρ ό τ α σ ε ι ς ια' καὶ ιδ'.

Οἱ τοῦ αὐτοῦ ὕψους κῶνοι καὶ κύλινδροι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς αἱ βάσεις.. καὶ οἱ τῶν αὐτῶν βάσεων ἔχουσιν, ὡς τὰ ὕψη.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ εἰς κύλινδρος, ὡς ὁ ΑΒ (τχ. 218), εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ γενόμενον ἐκ τῆς κινήσεως τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος, ὅπερ ὀνομάζω Α (ἔρ. ε'), διὰ τοῦτο κυλ. ΑΒ = Α Χ βατ. ΑΘαΓ. Ὡς ὁ κύλινδρος ΑΒ ἔξει πρὸς πάντα ἄλλον κύλινδρον ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος, ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν. Καὶ ἐξ ἐναντίας, ἂν αἱ βά-

σεις δύο κυλινδρῶν ἦναι ἴσαι ἀλλήλαις· τότε οἱ κύλινδροι ἔξουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν. Ἐπειδὴ δὲ πάλιν οἱ κῶνοι εἶναι $\equiv \frac{1}{3}$ τῶν κυλινδρῶν τῶν ἔχοντων τὰς αὐτὰς βάσεις καὶ ὕψη (πρ. ε΄), ἔκ δια τούτου καὶ οἱ κῶνοι οἱ ἔχοντες τὰ αὐτὰ ὕψη ἔξουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν.. καὶ ἐξ ἐναντίας οἱ ἔχοντες τὰς αὐτὰς βάσεις, ἔξουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.

β΄. Ἐπειδὴ καὶ εἰς κῶνος εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ πυραμῖς ἔχουσα ἀπείριον σμικρὰς τὰς τριγωνικὰς πλευρὰς.. καὶ δύο ἰσοῦψεῖς πυραμίδες ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ βάσεις (πρ. ε΄), ἔκ τούτου ἕνεκεν καὶ δύο ἰσοῦψεῖς κῶνοι ἔξουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς αἱ βάσεις. Ἄλλ' εἰς κῶνος τῆς αὐτῆς βάσεως τε καὶ ὕψους μὲ ἓνα κυλινδρον εἶναι $\equiv \frac{1}{3}$ αὐτοῦ (πρ. ε΄), ἔκ ὧς καὶ οἱ τοῦ αὐτοῦ ὕψους κυλινδροι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν.

Π ρ ό τ α σ ε ι ς ιβ΄.

Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κυλινδροι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων αὐτῶν.

Ἐστῶσαν ὅμοιοι κῶνοι οἱ αβγδε, αζηθι, τότε λέγω ὅτι κων. αβγδε : κων. αζηθι :: βδ³ : ζθ³. σχ. 217.

Καθότι ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, οἱ κῶνοι αβγδε, αζηθι εἶναι ὅμοιοι, διὰ τούτου ἔξω ακ : ακ :: βδ : ζθ (ὅρ. ζ΄). β΄. Ἐπειδὴ καὶ αἱ βάσεις τῶν κῶνων εἶναι κύκλοι.. καὶ οἱ κύκλοι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων (πρ. β΄), ἔκ τούτου ἔξω βγδε : ζηθι :: βδ² : ζθ². Ὡς ἐκ πολλαπλασιαζόντων τὴν πρώτην ἀναλογίαν διὰ τῆς δευτέρας, ὅρον πρὸς ὅρον, ἔξω βγδε x ακ : ζηθι x ακ :: βδ³ : ζθ³. Τῷ α ἂν οἱ κῶνοι βγδε, ζηθι ἦναι ὁ-

θοί, τὰ γινόμενα βγδε : Χ ακ, ζηθι : Χ ακ παρισύδει τὴν
 στερότητα τῶν κώνων καὶ ἔχουσι διὰ παράγοντας τὴν βά-
 σιν καὶ ὕψος.. εἰ δὲ καὶ εἶναι πλάγιος, τότε ἐγὼ κατὰ
 γων ἀπὸ τῆς κορυφῆς πῶν κώνων κἀθετον τὴν (αλ
 ἐπὶ τὰς βάσεις, οὐσας παραλλήλους, ἔξω ὁμοία τρίγωνα
 τὰ ακλ, ακμ.. διότι ἡ μὲν γων. αλκ = ακμ = 90°
 ἡ δὲ γων. ακλ = γων. ακμ (ὁρ. ζ.) εἰς ακ : ακ ::
 αλ : ακ. Ὡς ἡ ἀναλογία βγδε : Χ ακ : ζηθι : Χ ακ :: βδδ :
 ζθδ τρέπεται εἰς τὴν βγδε : Χ αλ : ζηθι : Χ ακ :: βδδ : ζθδ
 (πρ. γ'. βιβ. ε'). .. ἀλλὰ βάσεις ἐπὶ τὸ ὕψος εἶναι οὐδέν
 ἄλλο, ἢ ἡ στερότης τοῦ κώνου (πρ. α'. πρ. ι.) εἰς ὥς
 κων. αβδε : κων. αζηθι :: βδδ : ζθδ.

Ἄλλ' αἱ κώνοι εἶναι $\frac{1}{3}$ τῶν κύλινδρων τῶν ἐχόντων
 τὰς αὐτὰς βάσεις τε καὶ ὕψη (πρ. ι.) .. καὶ τὰ ὑποπολ-
 λαπλάσια ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ πολλαπλάσια (πρ.
 δ'). εἰς ὥς καὶ οἱ ὅμοιοι κύλινδροι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους,
 ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων αὐτῶν : ὅς ἐστι 3
 κων. αβδε : 3 κων. αζηθι :: βδδ : ζθδ.

Π ρ ὅ τ α σ ι ε ς γ'.

Ἐάν κύλινδρος τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου
 μετὰ τὰς βάσεις αὐτοῦ, ὁ ὀλικὸς κύλινδρος ἔξει πρὸς θάτε-
 ρον τῶν μερῶν αὐτοῦ, ὡς οἱ ὅζονες αὐτῶν.

Ἄγω εἰς τὸν κυλ. ΑΒ τὸ ἐπίπεδον ΓΔ παραλλή-
 λως μετὰ τὴν βάση αὐτοῦ Αα καὶ μετὰ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς
 ββ, καὶ λέγω ὅτι κυλ. ΑΒ : κυλ. ΑΔ :: αζ. ΕΖ : αζ.
 ΗΖ : σχ. 218.

Ἐπειδή, ἔξ' ὑποθέσεως, τὸ ἐπίπεδον ΓΔ, ἤρθη
 παραλλήλως μετὰ τὰς βάσεις Αα, ββ, τούτου ἕνεκεν οἱ κύ-

λινδροι AB , AD εἶναι τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ διαφόρων ὕψεων, ἀλλ' οἱ κύλινδροι τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ διαφορῶν ὕψεων ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν (πρ. ια'). .. ὥσε κυλ. AB : κυλ. AD :: A : α : ὀνομασθέντων δηλονότι A καὶ α τῶν ὕψεων αὐτῶν. Καὶ ἂν μὲν οἱ κύλινδροι ᾖναι ὀρθοὶ, τότε τῶν ὕψεων αὐτῶν συμπιπτόντων με τοὺς ἄξονας, ἔχω κυλ. AB : κυλ. AD :: $\alpha\zeta$ EZ : $\alpha\zeta$. HZ . Εἰ δὲ καὶ οἱ κύλινδροι ᾖναι πλάγιοι, τότε ἄγων ἀπὸ τοῦ πέρατος τῶν ἄξόνων αὐτῶν καθέτους ἐπὶ τῶν βάσεων, ἔξω τὰς καθέτους ἀναλόγους με τοὺς ἄξονας αὐτῶν. Καθότι ἂν οἱ ἄξονες τῶν κυλινδρῶν ᾖναι ἐξ, ηζ, τότε ἄγων τὰς καθέτους $E\iota$, $\eta\kappa$, ἔξω $E\iota$: $\eta\kappa$:: $\epsilon\zeta$: $\eta\zeta$ (διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων $\epsilon\iota\zeta$, $\eta\kappa\zeta$). Καὶ ἐπειδὴ αἱ κάθετοι $\epsilon\iota$, $\eta\kappa$ εἶναι αὐτὰ τὰ ὕψη τῶν κυλινδρῶν AB , AD , διὰ τοῦτο κυλ. AB : κυλ. AD :: $\alpha\zeta$. EZ : $\alpha\zeta$. HZ .

Τοῦτο αὐτὸ ἤθελε λεχθῆ καὶ περὶ τοῦ κυλίνδρου GB : ὅεσι κυλ. AB : κυλ. GB :: $\alpha\zeta$. EZ : $\alpha\zeta$. EH .

Π ὁ ρ ι σ μ α α'.

Ὡς ἂν κύλινδρος τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου με τὰς βάσεις αὐτοῦ, τὰ τμήματα ἔχουσι πρὸς ἀλλήλα, ὡς οἱ ἄξονες αὐτῶν. Καθότι ἐπειδὴ καὶ ὁ κυλ. AB ἔχει πρὸς θάτερον τῶν τμημάτων AD , GB , ὡς οἱ ἄξονες αὐτῶν, διὰ τοῦτο καὶ κυλ. AD : κυλ. GB :: $\alpha\zeta$. HZ : $\alpha\zeta$. EH .

Π ὁ ρ ι σ μ α β'.

Ἄν κύλινδρος τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου με τὰς βάσεις αὐτοῦ, τότε καὶ ὁ ὀλικὸς κύλινδρος θέλει εἶ-

ναι ὁμοιος καὶ μὲ ἐκάτερον τῶν τμημάτων καὶ τὰ τμήματα πρὸς ἄλληλα.

Π ρ ό τ α σ ι ς ιε΄.

Τῶν ἴσων κῶνων καὶ κυλίνδρων αἱ βάσεις ἀντιπάσχουσι μὲ τὰ ὕψη.. καὶ ἐκεῖνοι οἱ κῶνοι καὶ κυλίνδροι, ὧν περ αἱ βάσεις ἀντιπάσχουσι μὲ τὰ ὕψη, εἶναι ἴσοι ἀλλήλοις.

Καθότι ἐπειδὴ καὶ εἰς κύλινδρος δύναται νὰ ἐκληφθῇ ὡς γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος (ὁρ. ε΄), διὰ τοῦτο ἂν ὀνομάσω K τὴν σφρόντητα ἐνὸς κυλίνδρου, A τὸ ὕψος αὐτοῦ, καὶ B τὴν βάσιν, ἔξω $K = AB$.. καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ $\kappa = \alpha\beta$ εἰς ἕνα ἄλλον κύλινδρον. Ὡς αὖ οἱ δύο κυλίνδροι ἦναι ἴσοι ἀλλήλοις: ὅ εἰς αὐτὸν $K = \kappa$, τότε καὶ τὰ τούτων ἴσα θέλονται εἶναι ἴσα: τούτεστι $AB = \alpha\beta$.. ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ πᾶσα ἐξίσωσις τρέπεται εἰς ἀναλογίαν, διὰ τοῦτο $A : \alpha :: \beta : B$.

Ἄλλ' ἐπειδὴ καὶ οἱ κῶνοι εἶναι τριτημόριον τῶν κυλίνδρων τῶν ἐχόντων τὰς αὐτὰς βάσεις καὶ ὕψη (πρ. ι΄).. καὶ ἐπειδὴ ἂν τὰ πολλαπλάσια ἦναι ἀνάλογα, εἶναι ὡσαύτως καὶ τὰ ὑποπολλαπλάσια (πρ. δ΄. βιβ. ε΄), διὰ τοῦτο ἂν δύο κῶνοι ἦναι ἴσοι κατὰ τὴν σφρόντητα καὶ A , α τὰ ὕψη αὐτῶν καὶ B , β αἱ βάσεις αὐτῶν, τότε $A : \alpha :: \beta : B$.

Ἐξω τώρα $A : \alpha :: \beta : B$: ὅ εἰς αὐτὸν ἀντιπάσχωσι δύο κυλίνδρων αἱ βάσεις μὲ τὰ ὕψη. Τότε ἐπειδὴ καὶ πᾶσα ἀναλογία τρέπεται εἰς ἐξίσωσιν, ἔξω $AB = \alpha\beta$. Καὶ ἐπειδὴ εἰς κύλινδρος δύναται νὰ ἐκληφθῇ ὡς γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος (ὁρ. ε΄), διὰ τοῦτο $AB =$

K , καὶ $\alpha\beta = \kappa$ καὶ ἐπομένως $K = \kappa$: τούτῳ ἡ σερ-
ρότης τῶν κυλίνδρων εἶναι ἴση. Ἀλλ' ἂν $K = \kappa$ τότε καὶ
 $\frac{K}{3} = \frac{\kappa}{3}$: τούτῳ καὶ ἡ σερρότης τῶν κώνων, ἂν αἱ βά-
σεις καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν ἦναι ἴσα, εἶναι ἴση (πρ. ι').

Π ρ ό τ α σ ε ι ς ις'.

Εἰς τὸν μείζονα δύο ὁμοκέντρων κύκλων νὰ ἐγγράφη-
τις πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιόπλευρον μὴ ψαῦον τοῦ
ἐλάττους κύκλου.

Ἐσώταν $AB\Gamma$, ΔEZ οἱ δύο δοθέντες κύκλοι καὶ
 K τὸ κοινὸν αὐτῶν κέντρον. σχ. 219.

Ἄγω τὴν AG διάμετρον τοῦ μείζονος κύκλου, ὡ-
σαύτως καὶ τὴν ΔH ἐφαπτομένην τοῦ ἐλάττους κύκλου,
διάγων αὐτὴν μέχρι τοῦ σημείου Θ τοῦ μείζονος κύκλου
καὶ οὕτως ἔχω γων. $H\Delta A = \gamma\omega\nu. H\Delta\Gamma$.. τέμνω τὸ
ἡμικύκλιον $AB\Gamma$ δίχα κατὰ τὸ B σημεῖον (πρ. λ'. βιβ.
γ'), ὡσαύτως καὶ τὸ τόξον AB , καὶ τοῦτο συνεχῶς ἕως
οὗ τὸ σημεῖον τῆς διατομῆς νὰ παρεμπέσῃ μεταξὺ τοῦ
 H σημείου καὶ A , καὶ ἔσω τὸ λ σημεῖον.. ἀπ' αὐτοῦ λοιπὸν
ἄγω τὴν AM παράλληλον μετὰ τὴν $H\Theta$, καὶ διὰ τοῦτο
πρὸς ὁρθὰς μετὰ τὴν διάμετρον GA .. ἄγω τὰς χορδὰς AA ,
 AM , αἵτινες δηλονότι θέλουσιν εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις..
διότι τὸ τοξ. $AA = \text{τοξ. } AM$. Ἄν λοιπὸν ἐφαρμώσω
κατὰ τὸ συνεχὲς εἰς τὸν κύκλου $AB\Gamma$ εὐθείας ἴσας μετὰ τὴν
 AA , ἐγγραφήσεται εἰς τὸν κύκλου πολύγωνον ἰσόπλευ-
ρον, ὅπερ θέλει εἶναι καὶ ἀρτιόπλευρον διὰ τὴν εἰς δίχα
διαίρεσιν τῆς περιφερείας, καὶ οὔτε θέλει ψαῦει τοῦ ἐλάτ-
τους κύκλου ΔEZ .. διότι ἂν ἡ AM δὲν ἐφάπτηται αὐτοῦ,
εἴτε μᾶλλον δὲν θέλουσιν ἐφάπτονται αὐτοῦ αἱ AA , AM .

ΠΕΡΙΣΜΑ

Ὡς τὸ ἐγγράφειν πολυγώνον, (ὡς διαιρεθείσης δί-
χα κατὰ τὸ συνεχές τῆς ἡμπεριφερείας, θιαρείται ὑπὸ
τετράδος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Εἰς τὴν μείζονα δύο ὁμοκέντρων σφαιρῶν νὰ ἐγ-
γράψῃ τις ἑστέον πολυέσθρον μὴ ψαῦδον τῆς ἐλάσσονος σφαί-
ρας τὴν ἐπιράνειαν.

Νευοήσθωσαν δύο σφαῖραι, ἡ καὶ τεταρτημόρια
σφαιρῶν ὁμοκέντρα, κοινὸν κέντρον ἔχοντα τὸ Κ. σχ. 220.

Τέμνω διάτινος ἐπιπέδου τὰς δοθείσας ὁμοκέντρους
σφαίρας διὰ τοῦ κέντρου Κ, ἔνθα ἡ τομὴ θέλει εἶναι μέ-
γιστος κύκλος (ὁρ. ι'), οὗτινος ἔξωσαν κοδράνται αἱ ΑΒ,
ΝΕ καὶ ἡμιδιάμετροι αἱ ΚΑ, ΚΒ, ΚΝ, ΚΕ. Εἰς τὸν
κοδράντην λοιπὸν ΑΒ ἐγγράψω πολυγώνον ἰσόπλευρον τὸ
ΑΗΔΒ μὴ ψαῦδον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου ΑΕ (πρ. ις').

Τέμνω ὡσαύτως διὰ δευτέρου ἐπιπέδου τὰς δοθείσας
ὁμοκέντρους σφαίρας διὰ τοῦ κέντρου Κ, ἔνθα ἡ τομὴ θέ-
λει εἶναι μέγιστος κύκλος, οὗτινος ἔξωσαν κοδράνται οἱ
ΑΓ, ΝΜ, καὶ ἡμιδιάμετροι αἱ ΚΑ, ΚΓ, ΚΝ, ΚΜ.
Εἰς τὸν κοδράντην λοιπὸν ΑΓ ἐγγράψω πολυγώνον τὸ
ΑΔΟΓ ἰσόπλευρον μὲ τὸ ΑΗΔΒ. ζευγυνύω τὰς γωνίας
τῶν δύο πολυγώνων διὰ τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΔΟ, ΗΛ..
ἄγω εἰς τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν εὐθείας παραλλήλους μὲ
αὐτὰς τὰς ΕΜ, ΠΩ, ΡΞ, καὶ λέγω ὅτι τὸ ζητούμενον
ἔλαβε πέρας.

Καθότι ἐπειθὴ καὶ αἱ πλευραὶ ΒΔ, ΓΟ τῶν εἰς
τούς μείζονας κύκλους ἐγγεγραμμένων πολυγώνων εἰν

ψαύουσι τῶν κύκλων τῆς μικρᾶς σφαίρας, δῆλον ὅτι ἂν ἄξω δι' αὐτῶν ἐπίπεδον τὸ ΒΔΟΓ, δὲν θέλει ψαύσει τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὸ μέρος ΕΠΩΜ.. ἀλλὰ τὸ ἐπίπεδον ΒΔΟΓ ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ἑδρα πολυέδρου σφαιροῦ.. ὥς ἂν ἄξω κατὰ τὸ συνεχές τοιαύτας ὁμοίας ἑδρας ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἔξω τὸ ζητούμενον σφαιρὸν πολυέδρον ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ μείζονι σφαίρᾳ μηδὲν ψαύου τῆς ἐλάσσονος κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ὅπερ ἐζητεῖτο.

Π ό ρ ι σ μ α α'.

Ὡς ἂν ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι εἰς τὴν σφαῖραν ΑΒΓ καὶ παράλληλοι μετὰς εὐθείας ΒΔ, ΓΟ, ΒΓ, ΔΟ (ὡσαύτως δηλονότι καὶ εἰς τὰς λοιπὰς ἑδρας), ἔχει νὰ περιγραφῇ πολυέδρον σφαιρὸν ὅμοιον μὲ τὸ ἐγγεγραμμένον.

Π ό ρ ι σ μ α β'.

Τὸ πολυέδρον λοιπὸν τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένον, ὡσαύτως καὶ τὸ περιγεγραμμένον, εἶναι κεφάλαιον πυραμίδων, βάσιν μὲν ἔχουσιν τὰς ἑδρας τοῦ πολυέδρου, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. Καθότι ἂν ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ ἄξω τέσσαρας ἀκτίνας εἰς τὰ σημεῖα Β, Δ, Ο, Γ ἔξω μίαν πυραμίδα τετράπλευρον τὴν ΚΒΟΓ.

Π ό ρ ι σ μ α γ'.

Τὰ ὅμοια πολυέδρα τὰ ἐγγεγραμμένα καὶ περιγεγραμμένα εἰς τὰς σφαῖρας ἔχουσι πρὸς ἀλλήλα, ὡς αἱ κύβοι τῶν ἡμισφαίρων αὐτῶν. Καθότι ἂν ἐγγράψω καὶ εἰς τὴν μικρὰν ὁμόκεντρον σφαῖραν πολυέδρον ὅμοιον μὲ τὸ εἰς τὴν μείζονα ἔξω πυραμίδας καὶ ἰσακτῖνους καὶ ὁμοταγεῖς, αἵτινες δηλονότι θέλουσιν εἶναι ὅμοιαι μετὰς εἰς τὴν μείζονα (πρ. α'. πρ. γ').. ἀλλ' αἱ ὅμοιαι κυρα-

μίδες ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς οἱ κύβη τῶν ἐμολογῶν αὐτῶν πλευρῶν (πρ. η'). .. ὥς πρρ. ΚΒΔΟΓ : πυρ. ΚΕΠΩΜ :: ΚΒ³ : ΚΕ³. Ἀλλὰ τὰ ἐν ταῖς σφαῖραις ἐγγεγραμμένα πολυέδρα εἶναι οὐδὲν ἄλλο, ἢ κεφάλαιον πυραμίδων (πορ. β.) .. καὶ ἅπασαι αὐταὶ ἔχουσι δι' ὁμολόγους πλευρὰς τὰς ἡμιδιαμέτρους τῶν σφαιρῶν .. καὶ ἅπαντα τὰ ἡγούμενα ἔχουσι πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα, ὡς ἐν ἡγούμενον πρὸς ἐν ἐπόμενον (πρ. α'. βιβ. ε'). .. Ὡς ...

Π ό ρ ι σ μ α δ'.

Τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένον πολυέδρον, ὡσαύτως καὶ τὸ περὶ τὴν σφαῖραν, εἶναι δυνατόν νὰ διαφέρῃ τῆς σφαίρας κατὰ τὴν σφαιρότητα ἔλασσον πάσης δοθείσης ποσότητος. Καθότι ἂν ἡ ἡμιδιάμετρος ΚΒ τῆς μείζονος σφαίρας ὑπερέχεν ἀπειροσῶς τὴν ἡμιδιάμετρον ΚΕ τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, τότε ἐπειδὴ καὶ τὸ ἐν τῇ μείζονι σφαίρᾳ ἐγγραφθὲν πολυέδρον εἴη ἥθελε ψαύεται τῆς ἐλάσσονος σφαίρας: ὅ ἐστιν ἥθελεν εἶναι μείζον αὐτῆς κατὰ τὴν σφαιρότητα, ἥτις δηλονότι ὑπερέχεται ἀπειροσῶς ὑπὸ τῆς μείζονος σφαίρας, τὸ πολυέδρον ἥθελεν ὑπερέχεται ὑπὸ τῆς μείζονος σφαίρας ἐτι ἀπειροσῶς: ὅ ἐστιν ἔλασσον πάσης πεπερασμένης δοθείσης ποσότητος.

Π ρ ό τ α σ ι ς ιη'.

Αἱ σφαῖραι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς οἱ κύβη τῶν ἰδίων διαμέτρων.

Ἐγγράφω εἰς δύο ὁμοκέντρους σφαῖρας πολυέδρα ὁμοια, ὡς τὰ ΒΓΟΔ, ΕΠΩΜ κτξ. (σχ. 220). (πρ. ζ.), ὧν περ δηλονότι αἱ σφαιρότητες ἔχουσι πρὸς ἀλλή-

λας, ὡς οἱ κύβοι τῶν ἡμιδιαμέτρων (πορ. γ'. πρ. ιζ'). περιγράφω περὶ τὰς εἰρημένους σφαίρας πολυέδρα ὅμοια μὲ τὰ ἐγγεγραμμένα (πορ. α'. τῆς αὐτῆς), ἅπερ ὁλο- νότι καὶ ταῦτα ἔχουσι πρὸς ἀλλήλα, ὡς οἱ κύβοι τῶν ἡμιδιαμέτρων (πορ. ια'. βιβ. ε').

Ἄλλ' ἐγὼ δύναμαι νὰ σμικρύνω τὰς ἑσθ' ἀκατα- παίσεις τῶν τε ἐγγεγραμμένων καὶ τῶν περιγεγραμμένων πολυέδρων, ὥς ἡ διάφορα αὐτῶν ὡς πρὸς τὰς σφαίρας νὰ ᾖναι εὐλαττων πάσης δοθείσης ποσότητος (πορ. δ'. τῆς αὐτῆς).. καὶ ἐπειδὴ κατ' αὐτὸν τὸν σμικρυνμὸν ὁ νόμος δὲν μεθ'υῖζεται: ὅτις αἱ σερόρητες τῶν πολυέδρων δὲν παύουσιν ἀπὸ τοῦ νὰ ἔχωσι πάντοτε, ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων, τοῦτου ἕνεκεν αὖ ἐγὼ σμικρύνω τὰς ἑσθ' τῶν πολυέδρων ἀπειρώς, ὥς τὰ ἐγγεγραμμένα καὶ πε- ριγεγραμμένα πολυέδρα νὰ συμπέσωσιν, οὐδαμῶς ὀλι- γώτερον καὶ τότε ταῦτα ἔχουσι πρὸς ἀλλήλα, ὡς οἱ κύ- βοι τῶν ἡμιδιαμέτρων. Ἀλλὰ τὰ τοιαῦτα πολυέδρα ἅπαν- τα ὁμοῦ κυρίως ἄλλο δὲν θέλουσιν εἶναι, εἰμὴ αὐταὶ αἱ σφαῖραι.. ὥς καὶ αἱ σφαῖραι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων.

Ἐπειτα ἡμεῖς εἶδομεν ὅτι τὰ ὅμοια παραλληλεπί- πεδα ἔχουσι πρὸς ἀλλήλα, ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (πορ. λγ'. βιβ. ια'), ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ πυρα- μίδες (πορ. η'), καὶ οἱ κύβοι, καὶ κύλινδροι (πορ. ιβ').. ὅμοια δὲ σερεὰ σχήματα κυρίως ἄλλο δὲν εἶναι, ἢ γεγώ- μενα ἐκ κινήσεως ὁμοίου ἐπιπέδου καὶ ὁμοίως ἀρχομέ- νου τῆς κινήσεως (ὁρ. θ'. βιβλ. ια', καὶ ὁρ. ζ'. βιβ. ιβ'). Ἀλλὰ καὶ τὰ ἡμικύκλια τί ἄλλο εἶναι, εἰμὴ σχήματα

ἑμῶν (πορ. β. πρ. β.); Αἱ δὲ σφαῖραι πᾶς - ἄλλως
γενοῦνται, εἴμῃ διὰ τῆς ὁμοίας κατασκευῆς. ἡ περιστροφὴς
τῶν ἡμικυκλίων περὶ τὴν ἰδίαν διάμετρον (ε. η'). Ὡς
καὶ αἱ σφαῖραι πρέπει ἵνα ἔχῃσι πρὸς ἀλλήλας, ὥς οἱ
κύβοι τῶν ἰσίων ἡμιδιαμέτρων.

Τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου

Τ Ε Λ Ο Σ.

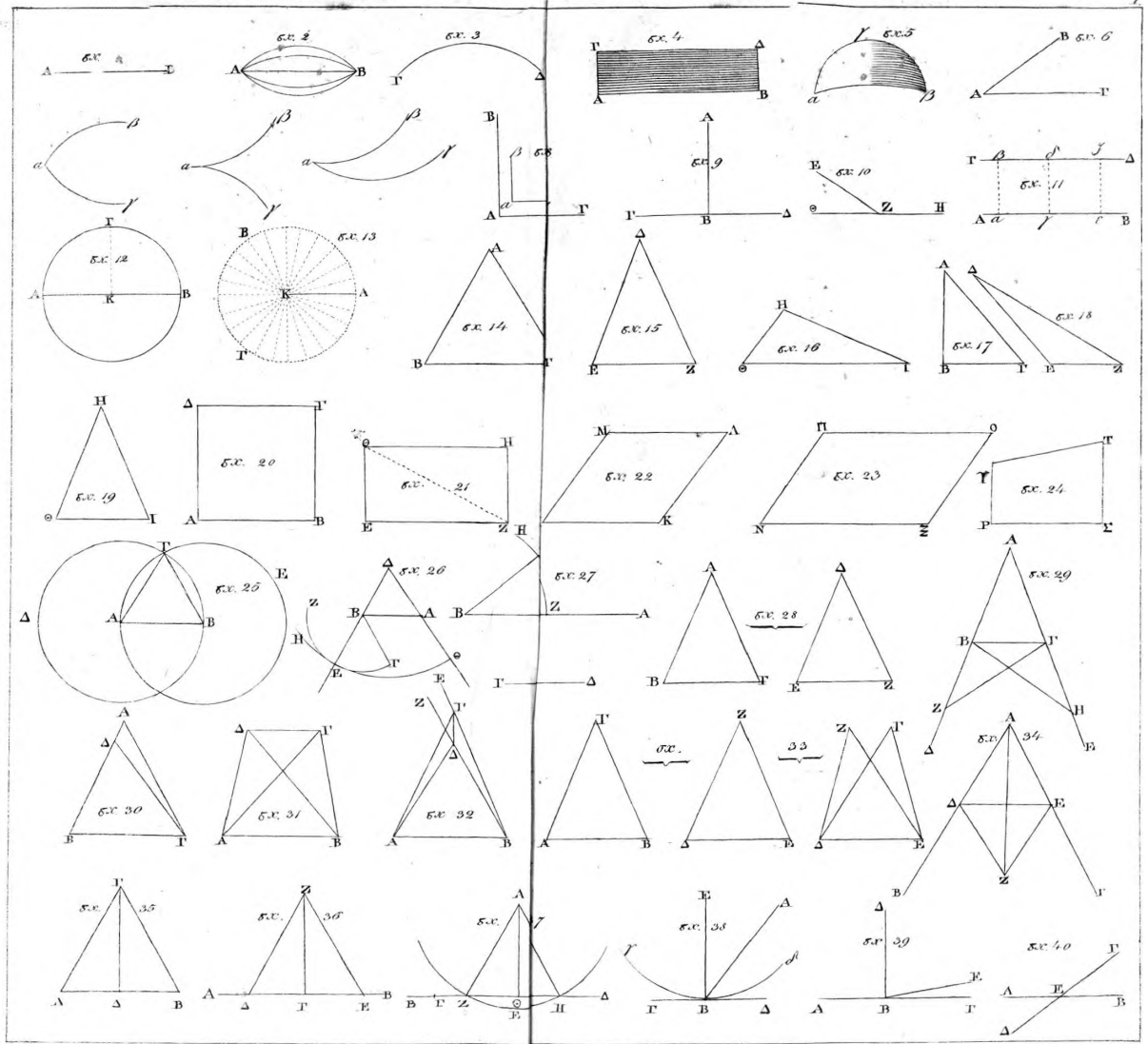
ΠΑΡΕΓΓΡΑΜΑΤΑ.

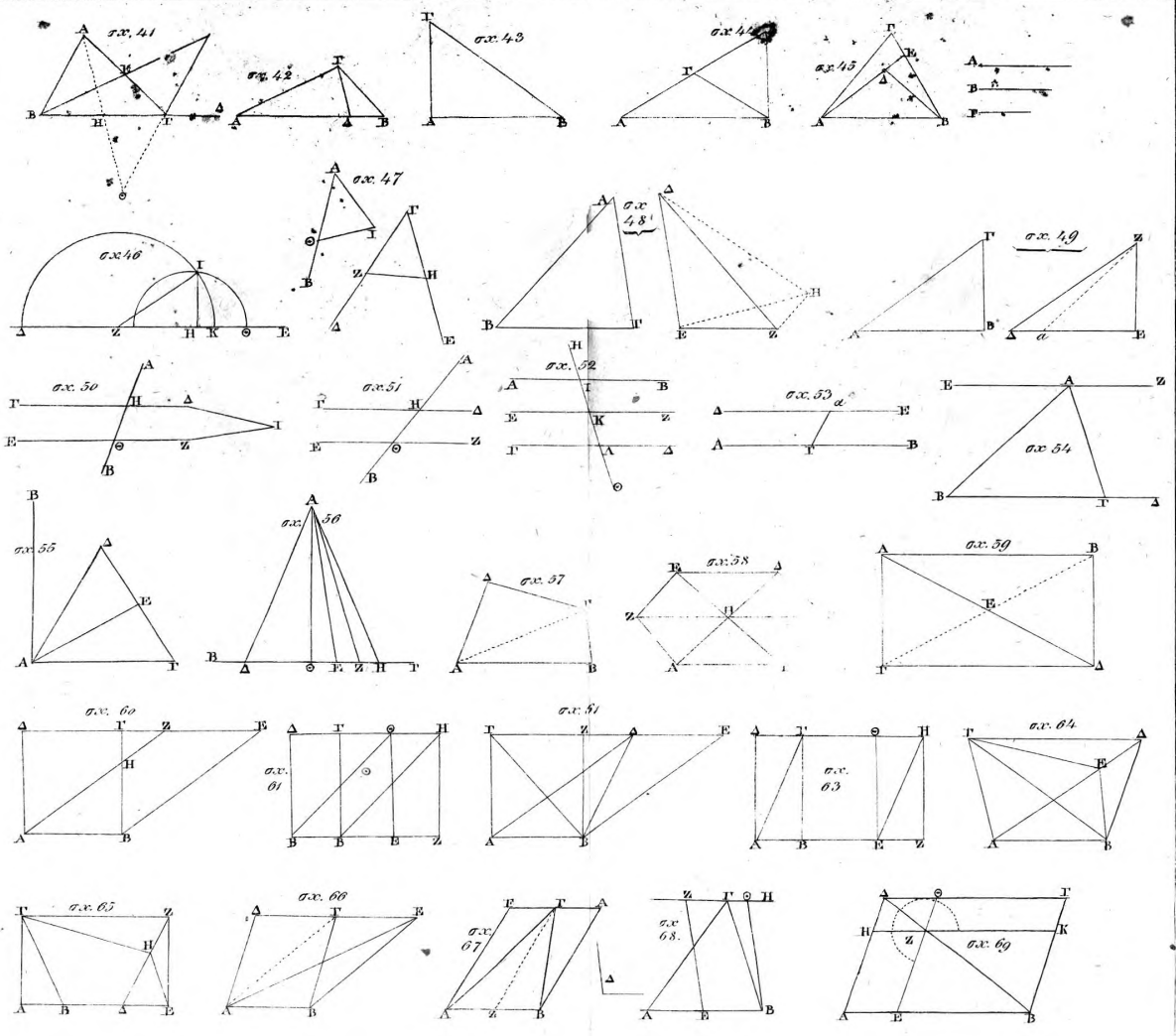
- Σελ. Στοιχοι
- 11 5 Ἀντί καθ' ἡμιδιάμετροι, γράψε καθ' ἡμιδιάμετροι τοῦ κύκλου ΒΓΔ
- 14 15 ἀντί τέμνων ἀπ' αὐτῆς τὴν $AB = AG$, γρ. τὴν $DB = AG$.
- 23 16 ἀντί ἔσω ἡ πλευρά $AB > AG$, γρ. $AB > AG$.
- 30 5 ἀντί ὥστε νὰ ἐκτέλεσθῇ τρίγ. τὸ ΑΘΙ, γρ. ΗΙΘ
- 43 24 ἀντί περὶ τῆς διαμέτρου AB , γρ. DB
- 45 20 ἀντί οἷα εἶναι τοῦ ΘΙ, γρ. ΖΙ
- 48 1 ἀντί $\Gamma Z\Delta = \text{παραλ. } \frac{AZ}{2}$, γρ. $\Gamma ZB = \text{παραλ. } \frac{AZ}{2}$
- 13 ἀντί $AB = B\Gamma \quad AG$, γρ. $AB = B\Gamma - AG$
- 18 ἀντί $\div B\Gamma : AG : \Gamma K$, γρ. $\div B\Gamma : AG : \Gamma K$
- — ἀντί τὸ δ' ὀρθογ. ΑΖ, γρ. εἰς δὲ τὸ ὀρθογ. ΑΖ
- 61 16 ἀντί ἔσω AB ἡ δοθεῖσα εὐθεία, γρ. ἔσω AB ἡ δοθεῖσα εὐθεία δίχα τετμημένη κατὰ τὸ Γ.
- 62 28 ἀντί $EA = AB + E\Delta$, γρ. $EA = AB + EA$
- 63 28 ἀντί τότε $2(3 - \sqrt{5}) = (\sqrt{5} - 1)$, γρ. $2(3 - \sqrt{5}) = (\sqrt{5} - 1)^2$
- 64 20 ἀντί $AB + \Delta B = 2AB + \Delta\Delta$, γρ. $AB + \Delta B = 2AB + \Delta B + \Delta\Delta$
- 72 3 ἀντί δ' ὅτι ἡ $\alpha E = \epsilon\Theta$, γρ. δ' ὅτι ἡ $\alpha E = \alpha\Theta$, εἴτε τοξ. $BE = \text{τοξ. } B\Theta$
- 91 27 ἀντί ἂν εἰς τρίγωνον ληφθῇ, γρ. ἂν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον

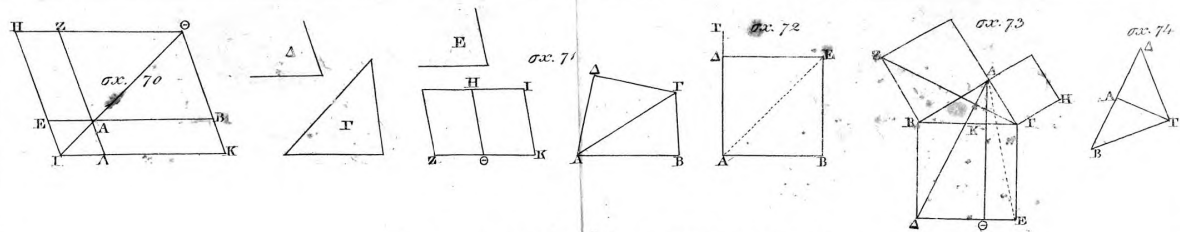
Σελ. Στοιχοι.

- 109 6 ἀντὶ ἐπειδὴ $B\Delta = AB \times B\Gamma$, γρ. $B\Delta = AB \times B\Gamma$.
- 123 3 ἀντὶ εἰς τὴν ἐξῆς $A : \Delta\epsilon :: \Gamma : \Gamma\mu$, γρ. $A : \Delta\epsilon :: \Gamma : \Gamma\mu$.
- 135 15 ἀντὶ εἴτε $\frac{20-1}{5} > \frac{12-1}{4}$, γρ. εἴτε $\frac{20}{5} - 1 > \frac{12}{4} - 1$.
- 143 12 ἀντὶ ἔξω $\Gamma\Delta : \epsilon\Lambda :: AB : \Delta B$, γρ. $\Gamma\Delta : \Delta B :: \epsilon\Lambda : AB$.
- 154 23 ἀντὶ πορ. α'. πρ. κ', γρ. πορ. α'. πρ. η'.
- 157 23 ἀντὶ εἴτε τριγ. αΓβ : τρι. Μ :: βΓ : Γα, γρ. τριγ. ΑβΓ : τριγ. Μ :: βΓ : ΓΑ.
- 166 20 ἀντὶ εἴτε $= 3 \text{ ΑΓ} = \text{ΑΚ}$, γρ. εἴτε $3 \text{ ΑΓ} \times \text{ΑΚ}$.
- 176 19 ἀντὶ ἐπ' εὐθείας (ἢ ΑΔ), γρ. ἐπ' εὐθείας (ἢ ΒΔ).
- 196 3 ἀντὶ εἶναι ὀρθαὶ (πορ. β'. πρ. α'), γρ. εἶναι ὀρθαὶ (πορ. β'. πρ. δ').
- 199 6 ἀντὶ ὥς εὐθείαι Βι, ΓΔ, γρ. ὥς εὐθείαι Βι, Γλ.
- 217 28 ἀντὶ $\text{ΚΙ} : \text{ΩΡ} :: \text{ΩΜ} : \text{ΗΚ}$, γρ. $\text{ΚΙ} : \text{ΩΡ} :: \text{ΗΩ} : \text{ΗΚ}$.
- 224 14 ἀντὶ ἢ ἂν μιᾶς τῶν πλευρῶν, γρ. ἢ ἂν μιᾶς τῶν πλευρῶν τριγώνου τινος.
- 234 2 ἀντὶ τότε καὶ ἐπιπ. ΕΗΖ = ἐπιπ. ΡΠΩ, γρ. τότε $\text{ΕΗΖ} = \text{ΒΠΩ}$.
- 250 3 ἀντὶ αἱ βάσεις καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν εἶναι ἴσα, γρ. αἱ βάσεις καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν ἀντιπάρχουσι.

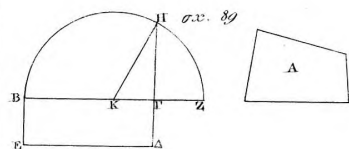
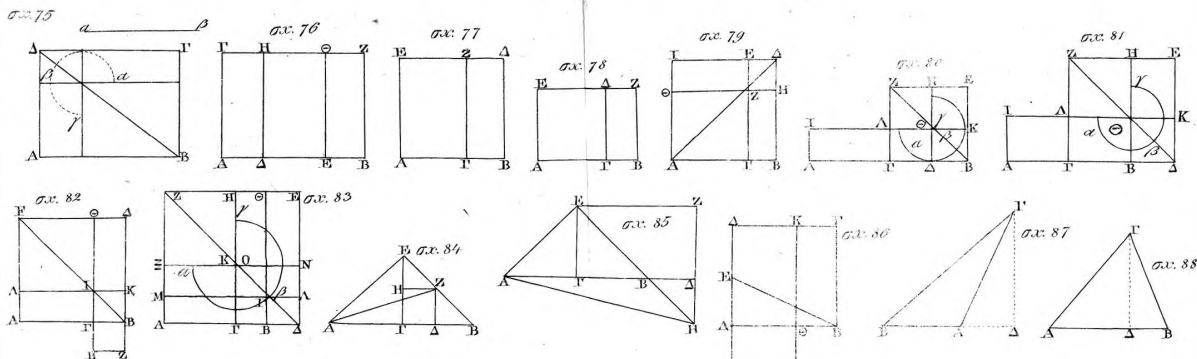
ΒΙΒΛΙΟΥ ΣΧΗΜΑΤΑ



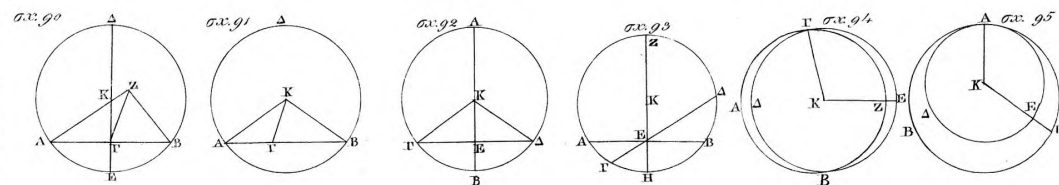


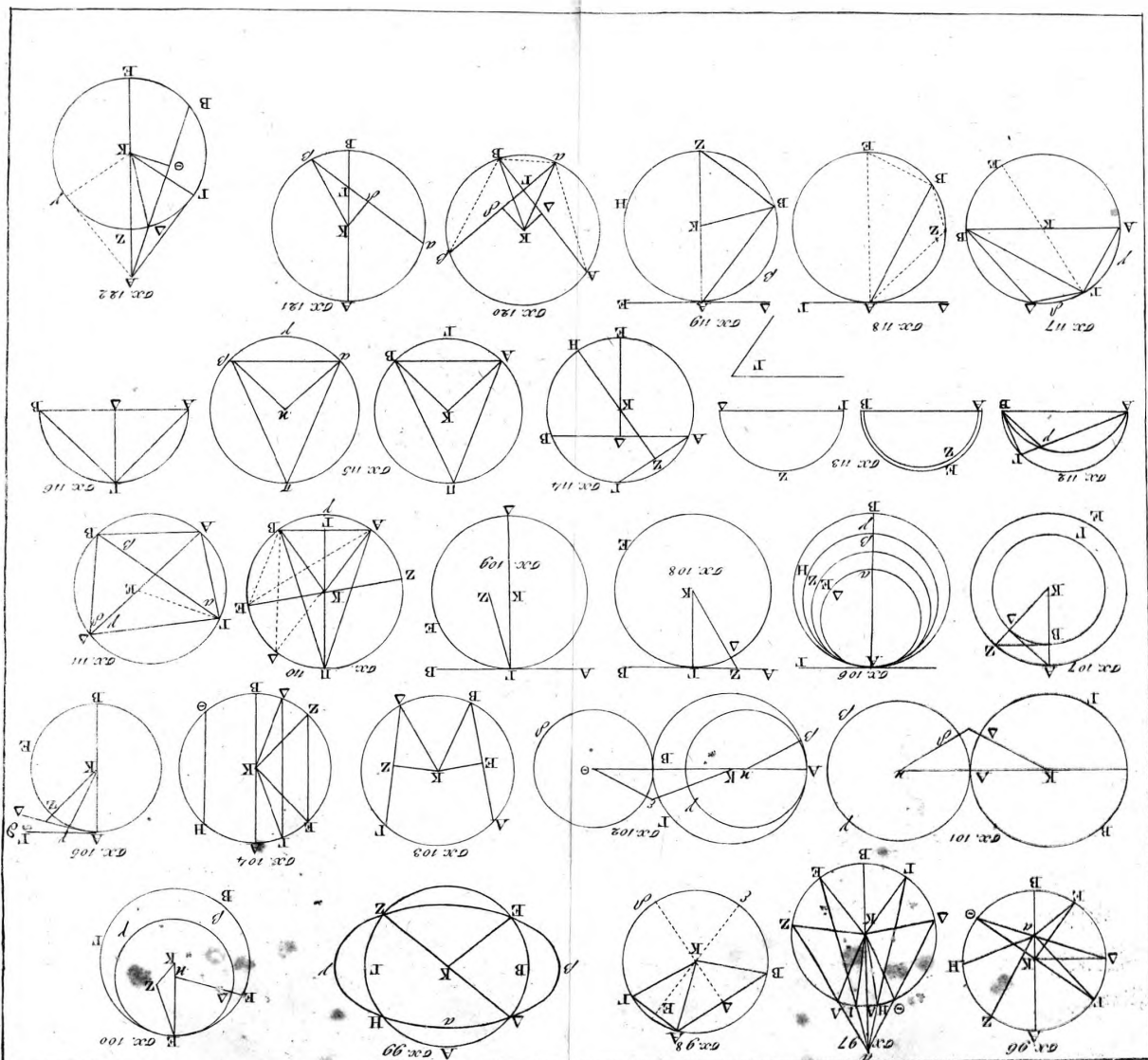


BIBΛΙΘ Β ΣΧΗΜΑΤΑ

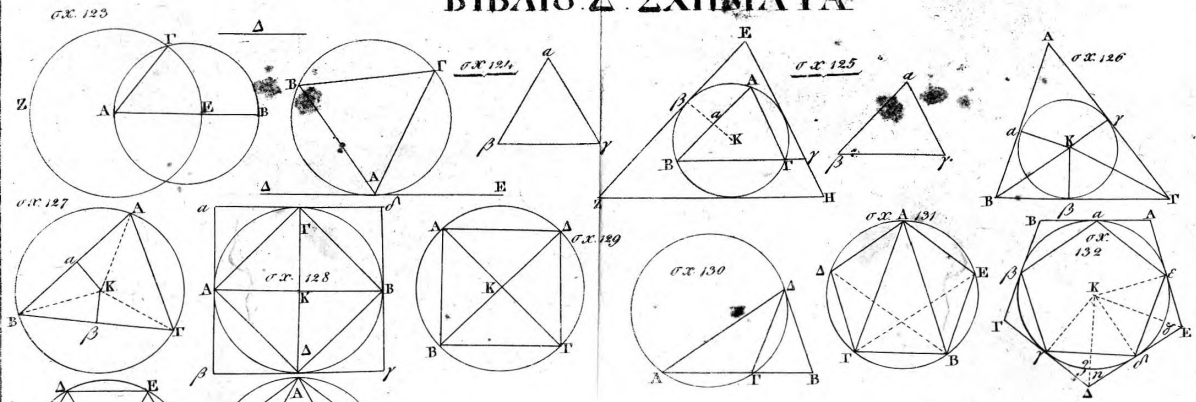


BIBΛΙΘ Γ ΣΧΗΜΑΤΑ

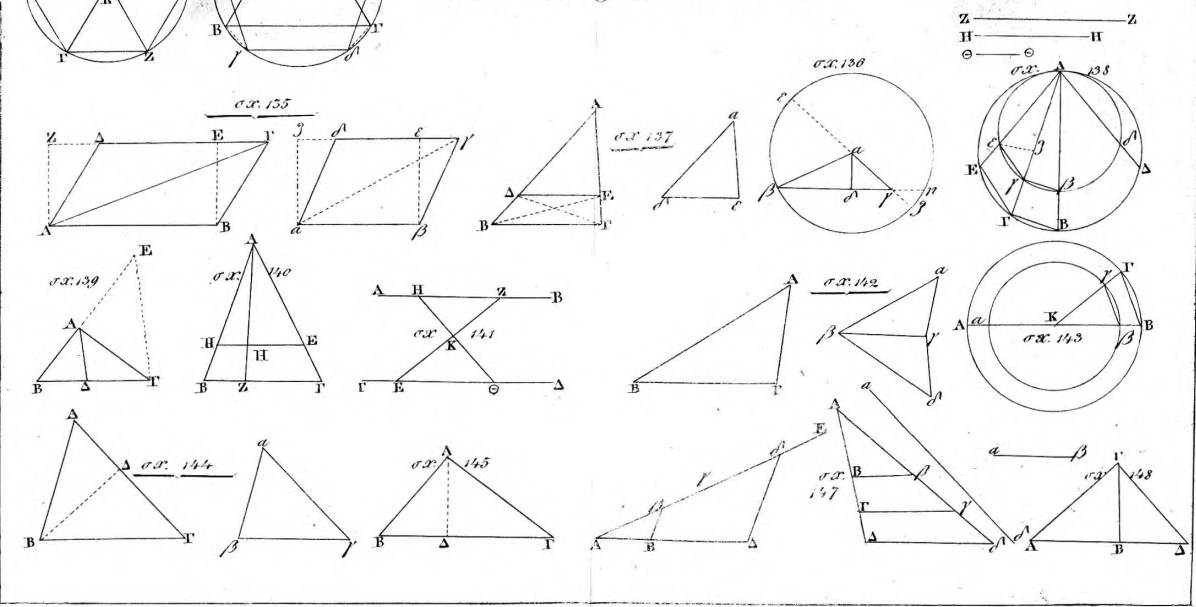


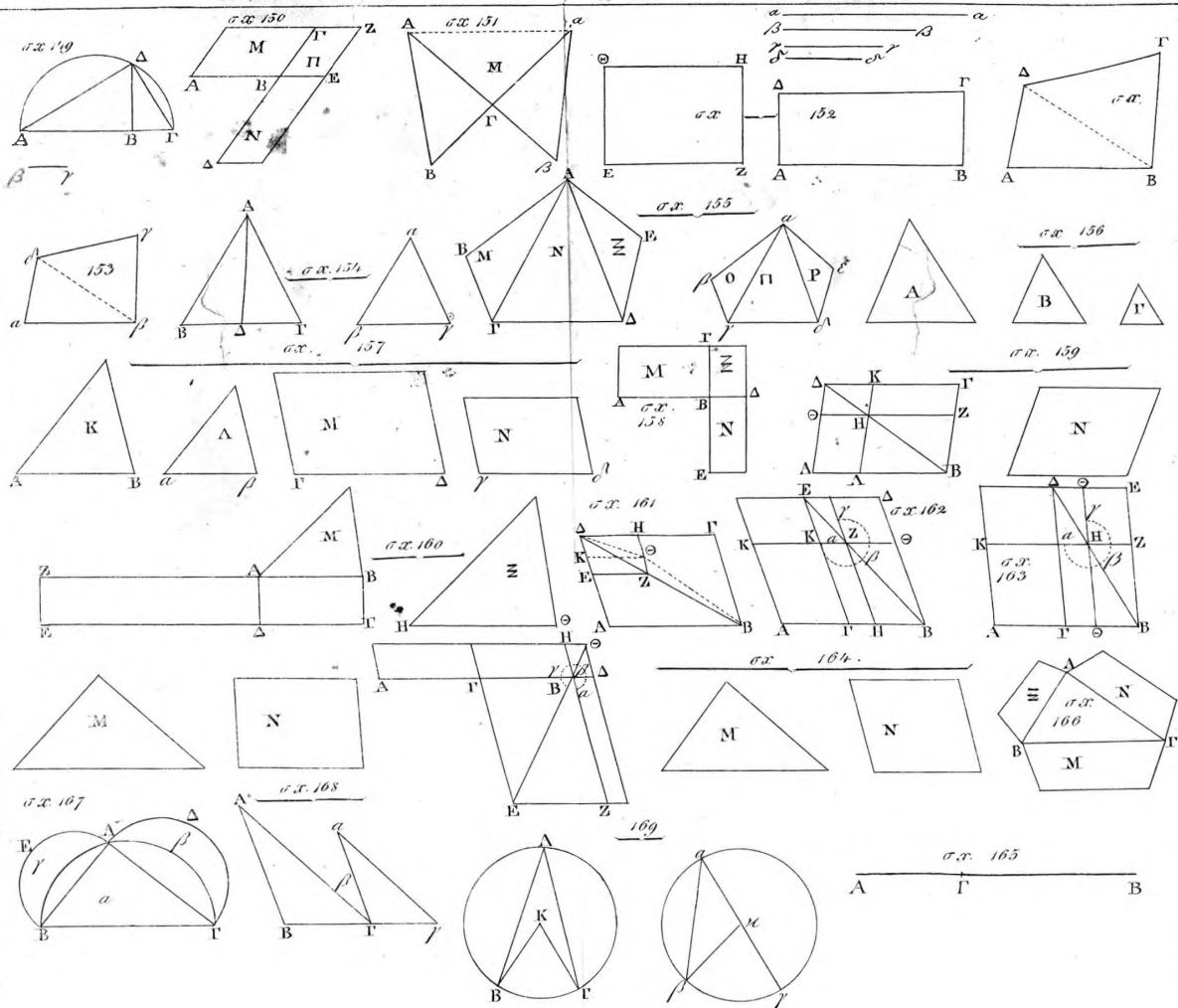


ΒΙΒΛΙΣ Δ' ΣΧΗΜΑΤΑ

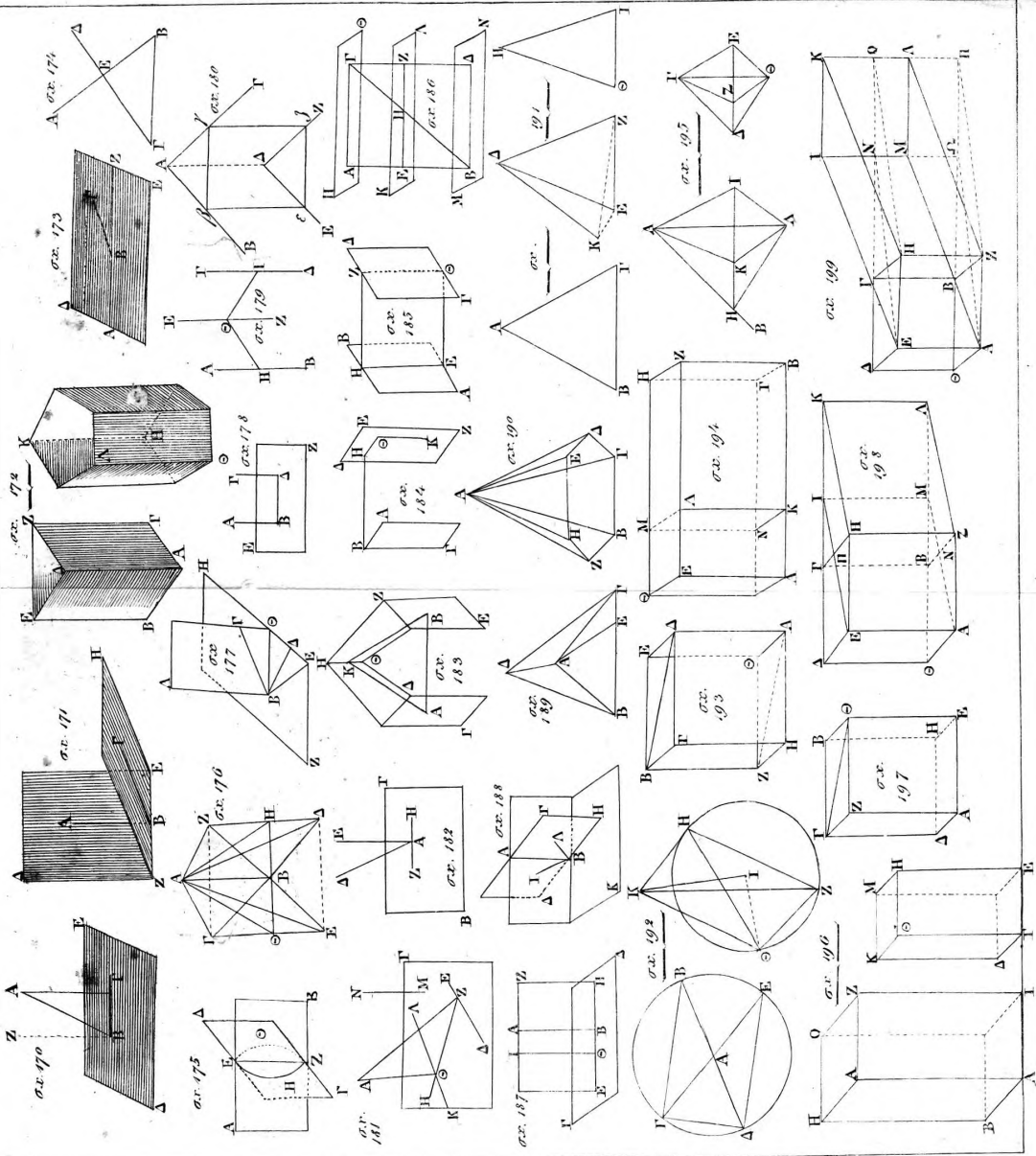


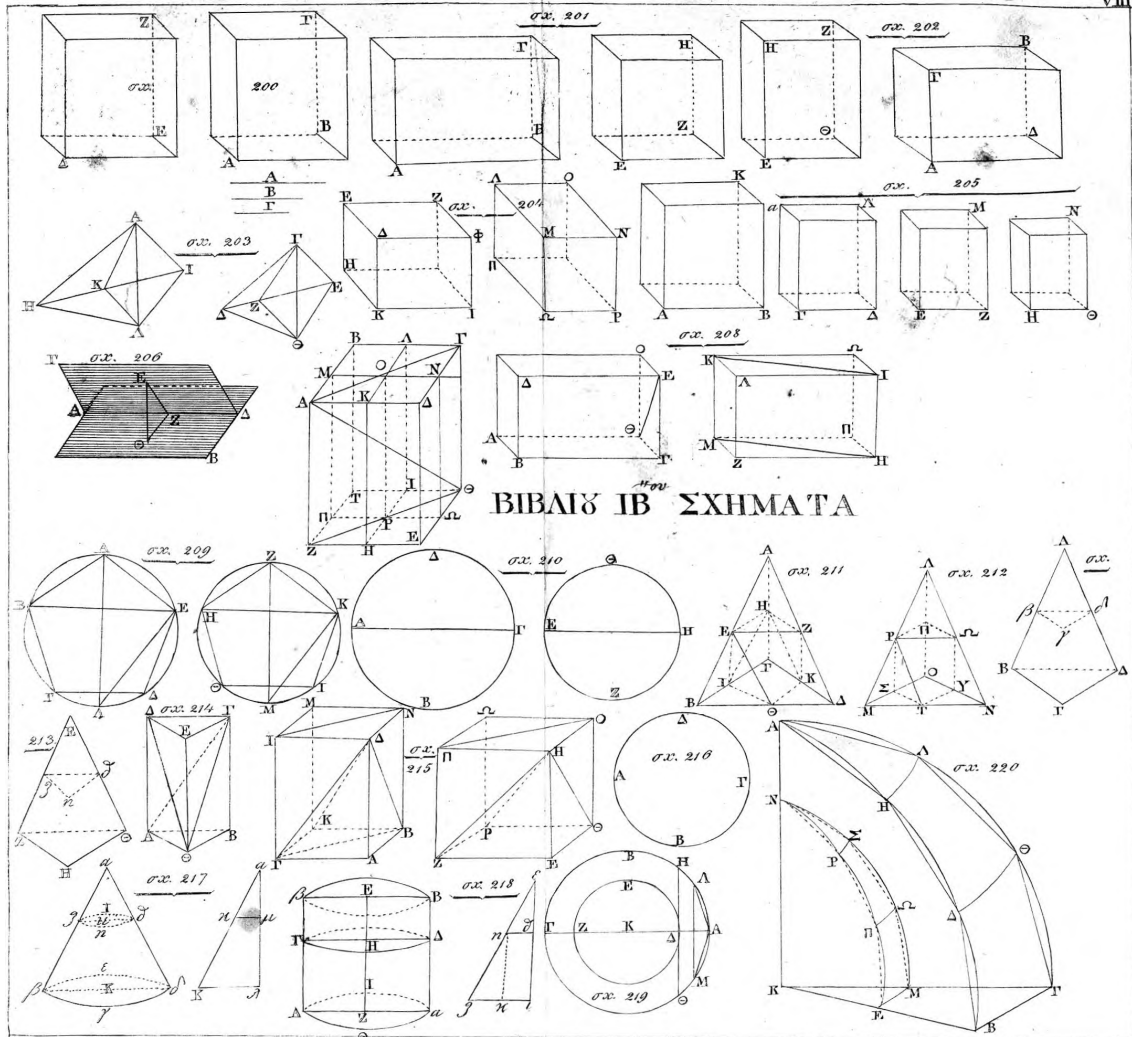
ΒΙΒΛΙΣ Ε' ΣΧΗΜΑΤΑ





ΒΙΒΛΙΣ ΤΑ ΣΧΗΜΑΤΑ





ΒΙΒΛΙΟ Β ΣΧΗΜΑΤΑ