
ΜΠΑΛΑΝΟΣ ΒΑΣΙΛΟΠΟΥΛΟΣ, ΑΡΧΙΠΡΕΣΒΥΤΕΡΟΣ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ, ΚΑΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΟΣ
ΝΕ: } Ἐτῶν
Κυδαλίμη τῦ πόνων κ' ἰδίων Μπαλάνυ διὰ Ἑλλάς.
Ὃς φάνεν ἀγχὰν, ἠ̈θεοῖσι τεοῖς
Πλίστειν δώματα χεδνὰ Μαθήσιος, ὅσσα τ' ἔασι
Τῆς χθονίων τεῦξαι κ' ὐρανίων σοφίης.
Coronat Virtus Cultores suos
Perpetuæ laudis monumentis.
Ἔτει τῆς Σωτηρίας ΑΨΝ'

Ant. Zuliani

ὉΔΟΥ͂ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ͂Σ

ΤΟ´ΜΟΣ ΔΕΥ´ΤΕΡΟΣ

Ἐν ᾧ πραγματεύεται περί τε τοῦ ΣΤΟΙΧΕΙΩ´ΔΟΥΣ τῆς ΓΕΩΜΕΤΡΙ´ΑΣ, διῃρημένου εἰς Ἐπίπεδον καὶ Στερεὸν, καὶ περὶ τὸ πρακτικοῦ αὐτῆς, διῃρημένου εἰς τὸ περὶ Κατασκευῆς καὶ χρήσεως τῶν ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩ͂Ν ὈΡΓΑ´ΝΩΝ, εἰς Μηκομετρίαν, Ὑψομετρίαν, Ἐπιπεδομετρίαν, Γεωδαισίαν, Εἰκονογραφίαν, Χωρογραφίαν, Στερεομετρίαν, καὶ Κοιλομετρίαν.

Πρὸς τούτοις τε περὶ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙ´ΑΣ, ἘΠΙΠΕ´ΔΟΥ ΤΕ ΚΑῚ ΣΦΑΙΡΙΚΗ͂Σ.

Νῦν πρῶτον τύποις ἐκδοθείσης, προσφωνηθείσης τε τοῖς Ἐκλαμπροτάτοις καὶ Εὐγενεστάτοις Υἱοῖς

ΚΑΡΑΓΙΩΑ´ΝΝΟΥ ΚΑῚ ΜΑΡΟΥ´ΤΖΗ,

Εὐπατρίδαις Ἰωαννίνων.

Μεθ᾽ ὅσης τε οἷόν τε ἦν ἐπιμελείας διορθωθείσης, παρὰ Γεωργίου Κωνσταντίνου, τοῦ ἐξ Ἰωαννίνων.

ἘΝΕΤΙΉΗΣΙΝ ἜΤΕΙ ΤΩ͂ι ΣΩΤΗΡΙ´Ωι, αψμθ´.

Ἐν τῇ Τυπογραφίᾳ Ἀντωνίου τοῦ Βόρτολι.

CON LICENZA DE' SUPERIORI, E PRIVILEGIO.

ΕΚΘΕΣΙΣ

ἈΚΡΙΒΕΣΤΑΤΗ ΤΩ͂Ν ΕἸΣ ΤῊΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚῊΝ ἈΝΗΚΟΝΤΩΝ ἘΠΙΣΤΉΜΗΝ.

ΠΡΟΟΊΜΙΟΝ.

ΠΆντας μὲν ἀνθρώπους Ἀριστοτέλης φύσει τοῦ εἰδέναι ὀρέγεσθαι, ἀρξάμενος οἶμαι ἐν προοιμίοις τῶν μετὰ τὰ Φυσικὰ ἀποδείκνυσι, πάνυ δὲ ὀλίγους εὑρίσκειν αὐτῆς διαρθρώσαντας τὸ μέρος, περὶ τὴν γνῶσιν τῶν ὄντων ὡς δεῖ ἀσχολουμένους, τῶν μὲν πρὸς τοὺς πόνους ἀποδειλιώντων, τῶν δὲ πρὸς ἡδονήν, ἢ ἄλλο τι τῶν φαινομένων ἀφορώντων καλῶν. ὅτι δὲ οὐδενὶ ἐφικτὸν εἰς τὰ τῆς θεωρίας ἀκριβῶς ἀναβῆναι ὕψη, ἐντεῦθεν δῆλον. Εἰς δύο γὰρ τῶν ὄντων γενικώτερον διῃρημένων, εἴς τε τὰ ἔνυλα, τὰ καὶ γενέσει καὶ φθορᾷ ὑποκείμενα, ὡς ἐν κινήσει ὄντα καὶ ῥοῇ διηνεκεῖ, καὶ παντοίας συνθέσεις τε καὶ διαιρέσεις, καὶ μεταβολὰς ποικίλας ἀποδεχόμενα, καὶ εἰς τὰ ἐκτὸς τῆς ὕλης, τὰ ἁπλᾶ φημι, ἀσύνθετά τε καὶ ἀδιαίρετα, καὶ πάσης ὡς εἰπεῖν, ἠλλοτριωμένα μεταβολῆς, διὸ καὶ μόνιμα καὶ ἀΐδια, καὶ ἀεὶ ὡσαύτως ἔχοντα. Τούτων οὖν οὕτω διῃρημένων, δύο καὶ τῆς Θεωρητικῆς τὰ καθολικώτερα μέρη ἀναφαίνονται, τὸ μὲν περὶ τὰ ἔνυλα καταγινόμενον, ὅπερ Φυσικὸν εἴωθε λέγεσθαι, τὸ δὲ τὰ ὑπὲρ τὴν ὕλην ἐρευνῶν, ἀνθ' ὅτου καὶ Μεταφυσικὸν τοῦτο καλοῦσι. Δεῖ δ' ὅμως τοῦ ἐγ-

ἐγκρατῆ γενέσθαι ἐφιέμενον τῆς τῶν ὄντων θεωρίας τε καὶ γνώσεως ἀπὸ τοῦ Φυσικοῦ ἄρξασθαι μέρους, κἀκείνῳ τὸν νοῦν ἱκανῶς προγυμνάσαντι, ἐπὶ τὸ Μεταφυσικὸν εἶτα μεταβῆναι· τοῦτο δὲ δυσχερέστατον μὴ μόνον τοῖς ἀμβλύτητι νοὸς κατεχομένοις, ἀλλά γε καὶ τοῖς ἀγχινοίᾳ καὶ ὀξύτητι ὁπωσοῦν τετιμημένοις. γένει γὰρ ἀλλήλων διενηνόχατον, καὶ κατὰ διάμετρον θάτερον θατέρου ἀφίσταται, οὗ ἕνεκα καὶ μέσου τινὸς δίκην κλίμακος δεῖται, ἵνα ὁ βουλόμενος ἀπὸ τῆς τῶν χαμαὶ καὶ ἐνύλων θεωρίας, ἐπὶ τὴν τῶν ὑψηλῶν, ὡς οὕτως εἰπεῖν, καὶ ἀΰλων ἀναβῆναι σκέψιν, ἀπονώτερόν τε καὶ εὐχερέστερον τοῦ ποθουμένου τύχῃ, καὶ εἰς πέρας τοῦ κυνηγεσίου εὐμηχανώτερον γένηται. Τοιαύτη δὲ ἡ Μαθηματικὴ ἐπιστήμη. περὶ ἃ γὰρ αὕτη καταγίνεται, τὴν μέσην ἀπειληφέναι χώραν τῶν τε χωριστῶν τῆς ὕλης, καὶ μὴ, πᾶσι σχεδὸν ὁμολογεῖται, τῶν μὲν ὡς διαιρετὰ ὑπερεχόμενα, τῶν δὲ ὡς ἀκίνητα ὑπερέχοντα, ἵνα δὲ καὶ κατὰ Πρόκλον εἴπω, τῶν μὲν τῇ ἁπλότητι λειπόμενα, τῶν δὲ τῇ ἀκριβείᾳ προϋπάρχοντα. διὸ καὶ κατ᾽ ἀφαίρεσιν ὄντα τὰ τοιαῦτα καλεῖται, ὡς μὴ δυνάμενα μὲν ἐκτὸς ὑπάρχειν ὕλης, χωριζόμενα δὲ τῇ ἐπινοίᾳ, καὶ καθ᾽ αὑτὰ θεωρούμενα ἄνευ κινήσεως, καὶ τῶν ἄλλων τῆς ὕλης παθῶν. Εἰ γοῦν τὰς τῶν ἐπιστημῶν πρὸς ἀλλήλας διαφορὰς ἐκ τῶν ἰδίων ὑποκειμένων λαμβάνειν ἔχομεν, πάντως γε καὶ ἡ Μαθηματικὴ ἐπιστήμη τῆς Φυσικῆς τε καὶ Μεταφυσικῆς τὴν μέσην ἔχει τάξιν λαχοῦσα, τῆς μὲν ὑπολειπομένη, τῆς δὲ ὑπερέχουσα. Τοσοῦτον δ᾽ ἀναγκαία ἡ τῶν Μαθηματικῶν θεωρία τοῖς φιλομαθέσιν, ὥστε ἄνευ ταύτης δυσχερέστατον παντὶ ἀπὸ τῆς τῶν μεριστῶν θεωρίας ἐπὶ τὴν τῶν ἀμερίστων μεταβῆναι ἐρευνᾶν καὶ μὴ ἀμβλυώττειν, ἀδύνατον γὰρ τοὺς τοῖς ὑλικοῖς συμπεπλεγμένους ὄντας ἀπὸ τῶν αὐτῶν ἀμέσως ἐπὶ τὰ νοητὰ ἀπροσκόπτως χωρεῖν, καὶ τῆς ὕλης πάντῃ κεχωρισμένα. ὅθεν δὴ καὶ τῶν πάλαι τινὲς Φιλοσόφων παρῄνουν τὰ Μαθηματικὰ τοῖς νέοις παραδιδόναι πρὸς συνεθισμὸν τῆς ἀσωμάτου τε καὶ ἀΰλου φύσεως. κατὰ γὰρ τὸν Ἀριστοτέλην ἔχομέν πως πρὸς ἐκεῖνα, ὡς πρὸς τὸ φῶς αἱ νυκτερίδες, καὶ καθάπερ οἱ ἀπό τινος σκοτεινοτάτου οἰκήματος καὶ ζοφώδους, πρὸς φωτεινότατον τόπον εὐθέως ἐρχόμενοι, μὴ πρότερον ἐν ἐλαχίστου φωτὸς δεκτικῷ ἐνδιατρίψαντες οἴκῳ, ἀποτυφλοῦνται τὰς ὄψεις τῷ ἀθρόῳ φωτὶ καὶ ὑπερβάλλοντι ἄφνω καταλαμπόμενοι, οὕτω γε καὶ οἱ ἀπὸ τῆς τῶν σωματικῶν καὶ ἐνύλων σκέψεως ἀμέσως ἤδη ἐπὶ τὴν τῶν ἀσωμάτων καὶ ἀΰλων μεταβαίνοντες θεωρίαν, ἀμβλυώττουσί πως τῷ νῷ, μηδόλως δυνάμενοι ἄνευ φαντασμάτων τοῖς ἐκείνων ἐνατενίσαι κάλλεσιν, καθὰ ἐν τῷ περὶ ψυχῆς Ἀριστοτέλης φησί. Προγυμναζόμενοι δὲ τὸν νοῦν ἐν τοῖς Μαθηματικοῖς, ἐθίζουσί πως κατὰ μικρὸν τῶν μὲν ἐνύλων ἀφίστασθαι, προσεγγίζειν δὲ τοῖς ἀΰλοις. οὐ γὰρ μόνον ἡ Μαθηματικὴ ἐπιστήμη περὶ τὰ κατὰ ἀφαίρεσιν ὄντα, ὡς εἴρηται, καταγίνεται, ἀλλὰ δὴ καὶ τὸν ἐπιστημονικὸν ἐν

ταῖς

ταῖς αὐτῆς ἀποδείξεσι τρόπον τηρεῖ, ἐκ προεγνωσμένων ἀρχῶν αὐτοπίστων τε καὶ ἀληθῶν τὰ ἴδια συνάγουσα συμπεράσματα, καὶ ἁρμοδίους τοὺς ἐν αὐτῇ γεγυμνασμένους πρὸς τὸ μανθάνειν παρασκευάζει. ὅθεν καὶ ὡς ἴδιόν τι τὸ τοιοῦτον κεκλήρωται ὄνομα, κἂν καὶ τὰς ἄλλας ἐπιστήμας τοῦ μανθάνειν ἕνεκα διδασκώμεθα, ὧν ἑκάστη ἀπὸ τοῦ ἰδίου ὑποκειμένου, ἢ τοῦ τέλους παρονομάζεται, αὕτη δὲ μόνη παρὰ τοῦ μαθήματος Μαθηματικὴ παρωνόμασται, τὸ δὲ μάθημα ἀπὸ τοῦ μανθάνω παράγεται ῥήματος, πρὸς γὰρ εὐμάθειαν αὕτη τοὺς ἀνθρώπους ποδηγετεῖ μᾶλλον. διὸ δὴ καὶ Σωκράτης ἐν Πολιτείᾳ φησὶν, ὄμμα γὰρ τῆς ψυχῆς ὑπὸ τῶν ἄλλων ἐπιτηδευμάτων ἀποτυφλούμενον καὶ κατορυττόμενον, ὑπὸ τῶν μαθημάτων μόνον ἀναζωπυρεῖσθαί τε καὶ ἀνεγείρεσθαι πέφυκεν. „ ‹‹ ‹‹

Ὑποκείμενον δὲ τῆς Μαθηματικῆς ἡ πεπερασμένη ἐστὶ ποσότης (ὡς παρὰ πᾶσιν ὁμολογεῖται) τῆς δὲ τοιαύτης ποσότητος δύο τὰ μέρη, συνεχὲς καὶ διωρισμένον, ὧν τὸ μὲν πηλίκον προσαγορεύεται, τὸ δὲ αὐτὸ τοῦτο ποσὸν, ὡς καὶ ἐν ἄλλοις εἴρηται. Τούτων δὲ ἑκάτερον διχῶς ἐνδέχεται ἐκλαμβάνεσθαι. Τὸ μὲν γὰρ ποσὸν, ἢ ὡς καθ᾽ αὑτὸ τὴν ὑπόστασιν ἔχον ὑποτίθεται, ἢ ὡς πρὸς ἄλλο κατὰ σχέσιν θεωρούμενον. Τὸ δ᾽ αὖ πηλίκον ὁμοίως, ἢ ὡς ἑστὸς καὶ ἀκίνητον, ἢ ὡς κινούμενον. ὅθεν δὴ τοῖς Πυθαγορείοις καθὰ Πρόκλος μαρτυρεῖ, ἐν τῷ α: τῶν εἰς τὸ α: τοῦ Εὐκλείδου ὑπομνημάτων αὐτοῦ, εἰς τέτταρα ἡ Μαθηματικὴ διανέμεται μέρη, Ἀριθμητικὴν φημὶ, Μουσικὴν, Γεωμετρίαν, καὶ Σφαιρικὴν, ταὐτὸν δ᾽ εἰπεῖν Ἀστρονομίαν. Καὶ τὴν μὲν Ἀριθμητικὴν τὸ καθ᾽ αὑτὸ ποσὸν θεωρεῖν ἐθέλουσι, τουτέστι τοὺς ἀριθμοὺς πρὸς ἀλλήλους, μόνον παραβαλλομένους, καὶ μὴ πρὸς ἄλλο τι, τὴν δὲ Μουσικὴν τὸ πρὸς ἄλλο ἀναφερόμενον πόσον, δηλ: τὸν ἦχον, ὡσαύτως δὲ καὶ τῇ μὲν Γεωμετρίᾳ ὑποκείμενον ἀπονέμουσι, περὶ ὃ καταγίνεται, τὸ πηλίκον, ὡς ἀκίνητον καὶ πάσης ὕλης ἐκτός. τῇ Ἀστρονομίᾳ δὲ τὸ ἐν κινήσει. Ἄλλοι δ᾽ αὖθις εἰς δύο τὴν Μαθηματικὴν διαιροῦντες οὐσίαν, εἰς τὰ νοητά φημι καὶ αἰσθητὰ, καλοῦντες μὲν νοητὰ, ὅσα ἐκτὸς τῆς ὕλης θεωρεῖται, αἰσθητὰ δὲ τὰ μετὰ τῆς ὕλης, δύο βούλονται εἶναι καὶ τῆς Μαθηματικῆς ἐπιστήμης τὰ ὁλοσχερέστερα μέρη, τὸ μὲν περὶ τὰ νοητὰ μόνον καταγινόμενον, τὸ δὲ περὶ τὰ αἰσθητὰ, ἑκάτερον δὲ τούτων ὑποδιαιροῦντες, ὀκτὼ ποιοῦσι τὰ πάντα τῆς ὅλης Μαθηματικῆς μέρη. ὃ γὰρ περὶ τὰ νοητὰ πραγματεύεται εἰς Ἀριθμητικὴν καὶ Γεωμετρίαν τέμνουσι, τὸ δ᾽ ἕτερον εἰς Μηχανικὴν, Ἀστρολογίαν, Ὀπτικὴν, Γεωδαισίαν, Κανονικὴν, καὶ Λογικήν. ἔξεστι δὲ καὶ τοῦτο ἐν τῷ αὐτῷ τοῦ Πρόκλου εὑρεῖν ὑπομνηματεύματι, ἔνθα εἰσὶν αἱ τῶν αὐτῶν μερῶν ἐξηγήσεις τε καὶ ὑποδιαιρέσεις ἀρκούντως τεθησαυρισμέναι. Παρὰ ταύτας δὲ καὶ ἄλλας αὖτις πολυπραγμονῶν εὕροι τῆς Μαθηματικῆς διαιρέσεις παρὰ τοῖς νεωτέροις γενομένας, μικρὸν μέντοι ἀλλήλων διαφερούσας.

Ὅτι

Ὅτι μὲν γὰρ ὑποκείμενον ἁπλῶς τῆς Μαθηματικῆς ἐπιστήμης τὸ συνεχές ἐστι ποσὸν καὶ διωρισμένον, καθὸ πεπεράτωται, καὶ ὅτι ἑκάτερον τούτων διχῶς ἐνδέχεται θεωρεῖσθαι, ὡς προηρμήνευται, καὶ τῇ μὲν Ἀριθμητικῇ τὸ διωρισμένον ὑπόκειται ποσὸν εἰς ἔρευναν, τῇ δὲ Γεωμετρίᾳ τὸ συνεχὲς, ἐκτὸς μέν τοι τῆς ὕλης ἑκάτερον, καὶ πρὸς ἄλλο μὴ ἀναφερόμενον, πάντες ὁμολογοῦσι. διενηνόχασι δὲ, ὅτι οἱ μὲν τόδε, οἱ δὲ τόδε τῆς Μαθηματικῆς μέρος περὶ τὸ μετὰ τῆς ὕλης συνεχὲς ποσὸν, ἢ διωρισμένον ἐθέλουσι καταγίνεσθαι, καὶ οἱ μὲν εἰς πλείω, οἱ δὲ εἰς ἐλάττω τὴν Μαθηματικὴν διαιροῦσιν ἐπιστήμην, ὡς ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον. Ἐπεὶ δὲ τῶν Μαθηματικῶν προβλημάτων τὸ μὲν εἰς θεωρίαν, τὸ δὲ εἰς πρᾶξιν συντείνει, διά τοι τοῦτο καὶ τῶν μερῶν σχεδὸν ἕκαστον τῆς Μαθηματικῆς εἰς δύο αὖθις ὑποδιαιρεῖται, Θεωρητικόν τε καὶ Πρακτικόν.

Ἡ μὲν οὖν τῆς Μαθηματικῆς ὅλης διαίρεσις τοιαύτη, πόσον δὲ ἀναγκαία τοῖς φιλομαθέσι, καὶ τί τὸ ταύτης ὑποκείμενον ἤδη εἴρηται. Ἐπεὶ δ᾽ ἐνταῦθα ἡμῖν πρόκειται περὶ τῶν Γεωμετρικῶν ἑρμηνεῦσαι προβλημάτων, πληρώσασιν ἤδη τὴν περί τε τοῦ πρακτικοῦ καὶ θεωρητικοῦ μέρους τῆς Ἀριθμητικῆς ἔρευναν, τοῦ Θεοῦ ἡγησαμένου, ἐπὶ τὸν σκοπὸν τὸν λόγον τρεπτέον, ἵνα μὴ μακρηγοροῦντες εἰκότως ἀκούσωμεν τὸ, κεντεῖ τὸν πῶλον περὶ τὴν νύσσαν, τὸ δὴ λεγόμενον.

Ἡ Γεωμετρία τοίνυν, περὶ ἧς ἐνταῦθα ὁ λόγος, μέρος οὖσα τῆς ὅλης Μαθηματικῆς, β': μετὰ τὴν Ἀριθμητικὴν τάξιν ἔχει, ὡς ἤδη εἴρηται, καὶ παρὰ πᾶσιν ὁμολογεῖται, ὑφ᾽ ἧς καὶ τελειοῦται ἅμα καὶ ὁρίζεται. ὅ, τι γὰρ ἐν αὐτῇ ῥητὸν καὶ γνωστὸν, τοῖς ἀριθμητικοῖς ἀφορίζεται λόγοις, διπλασίοις φημὶ, τριπλασίοις, καὶ τοῖς ἄλλοις. ὅτι δὲ καὶ ἐπιστήμη ἐστὶν, οὐδεὶς, οἶμαι, ἀντερεῖ. καὶ γὰρ τῇ Μαθηματικῇ ἐπιστήμῃ ὡς ὑπὸ γένος οἰκεῖον ὑπόκειται. Ὑποκείμενον δὲ ταύτης τὸ συνεχές ἐστι ποσὸν, ὃ καὶ πηλίκον προσαγορεύεται, καθὰ καὶ τοῦτο πρότερον εἴρηται. Θεωρητικὴ γάρ ἐστιν ἡ Γεωμετρία μεγεθῶν, σχημάτων, καὶ τῶν ἐν αὐτοῖς περάτων, ἔτι δὲ καὶ λόγων καὶ παθῶν τῶν αὐτῶν, καὶ παντοίων θέσεών τε καὶ κινήσεων, ἤτοι μεταμορφώσεων, τῇ κατὰ σύνθεσιν καὶ ἀνάλυσιν κεχρημένη μεθόδῳ. ἀπὸ μὲν γὰρ τοῦ ἁπλουστάτου ἀρχομένη σημείου ἐπὶ τὰ στερεὰ πρόεισι, τὰς πολυειδεῖς τούτων ἐρευνῶσα διαφορότητας, ἀπὸ δὲ τῶν συνθετωτέρων ἐπὶ τὰ ἁπλούστερα ἀνατρέχει, καὶ τὰς ἀρχὰς ἀπὸ τῆς πρὸ αὐτῆς ταύτας λαμβάνουσα. Κέχρηται δὲ περὶ τὰ μετὰ τὰς ἀρχὰς καὶ μεθόδῳ ἀποδεικτικῇ. Τὰ μὲν οὖν ὑπὸ τὴν θεωρίαν τῆς Γεωμετρίας ὑποπίπτοντα, σχήματά εἰσιν ἐπίπεδα καὶ στερεὰ, καὶ τὰ τούτων πάθη τε καὶ λόγοι. ὁποίας δὲ ταῦτα ῥητέον εἶναι φύσεως ἐπιστάσεως ἄξιον. Τευξόμεθα δέ γε τούτου, ἐὰν τῆς τριμεροῦς τοῦ καθόλου ἐπιμνησθῶμεν συστάσεως. ταῦτα γὰρ ἡ ἐν τοῖς αἰσθητοῖς τάττεται, ὥστ᾽ ἐν ἐκεί-

ναις

νοις τὴν ὕπαρξιν ἔχειν, καὶ ἀχώριστα ἐκείνων εἶναι, ἃ καὶ ἐν τοῖς πολλοῖς ἔλεγον, ἢ τῶν τῷδε ἐκτὸς ὑφεστάναι ὁμολογεῖται, ὧν τὰ ἐν ὕλῃ κατά τινα μιμητικὴν συνίστανται μέθεξιν, πρὸ τῶν πολλῶν δὲ ταῦτα εἰώθασι καλεῖν, ἢ τελευταῖον κατὰ ἀφαίρεσιν ἀπὸ τῶν πολλῶν συνίστασθαι ὑποτίθενται, τῇ ἐπινοίᾳ τὴν ὕπαρξιν ἔχοντα, ἃ καὶ ὑστερογενῆ καὶ μετὰ τὰ πολλὰ πάντες ἐκάλουν.

Τετραχῶς τοίνυν οὔσης τῆς τῶν καθόλου συστάσεως, Γεωμετρία πάντως οὔτε περὶ τὰ πρὸ τῶν πολλῶν καταγίνεται, οὔτε μὴν περὶ τὰ ὑστερογενῆ. ταῦτα μὲν γάρ εἰσι κατ' ἐπίνοιαν, ἐκεῖνα δὲ ἀπαθῆ, καὶ μηδόλως πληθυνόμενα, τῆς δὲ Γεωμετρίας τὰ ὑποκείμενα καὶ πραγματικῶς ὀφείλει ὑφίστασθαι, καὶ παντοίαις διαιρέσεσί τε καὶ μεταμορφώσεσιν ὑποκεῖσθαι, καὶ ἰσότητα δὲ καὶ ἀνισότητα πρὸς ἄλληλα ἐπιδέχονται. ὅθεν δὴ τῶν ἐν τοῖς πολλοῖς μόνον θεωρητικὴ γίνεται. ταῦτα γὰρ ὅτι μὲν πραγματικὴν ἔχουσι τὴν ὕπαρξιν, μαρτυρεῖ καὶ ἡ αἴσθησις. τίς γὰρ τοῖς ὀφθαλμοῖς ὑγιαίνων οὐχ ὁρᾷ κύκλον, τρίγωνον, τετράγωνον, καὶ τὰ λοιπὰ τῶν σχημάτων ἐν τοῖς οὖσι, καὶ ταῦτα ἐν τοῖς τεχνητοῖς, ὅτι δὲ καὶ ἀριθμῷ ἀπερίληπτα δῆλον ἐξ αὐτῆς τῆς προσηγορίας, λεγόμενα γὰρ ἐν τοῖς πολλοῖς εἶναι, πλῆθος ἑαυτῶν σημαίνουσιν. Ἐπεὶ δὲ καὶ τούτων τὰ μὲν τῇ αἰσθήσει ὑποκύπτει, τὰ δ' ἐν τῇ φαντασίᾳ τὴν ὑπόστασιν ἔχει, ζητητέον ἔτι περὶ τίνων ἡ Γεωμετρία τὴν διδασκαλίαν ποιεῖται, μῶν περὶ τῶν ἐν τῇ αἰσθήσει, ἢ γοῦν περὶ τῶν ἐν τῇ φαντασίᾳ; τριῶν γὰρ οὐσῶν κυριωτέρων γνωστικῶν τῆς ψυχῆς δυνάμεων, νοός, φαντασίας, καὶ αἰσθήσεως, ὁ μὲν νοῦς ἀκραιφνὴς ὢν καὶ ἀμιγὴς ὑλικῶν παθημάτων, ἁπλῇ τινι προσβολῇ τὰ ὑποπίπτοντα αὐτῷ πάντα γινώσκει, καὶ περὶ αὐτὰ ἐνεργεῖ ἀμέσως τοῖς ἐνεργείᾳ νοητοῖς συναπτόμενος, καὶ τούτοις ἐξομοιούμενος, τῶν καθόλου μᾶλλον ἀντιληπτικὸς ὑπάρχων. αἴσθησις δὲ μερικὴ γνῶσις οὖσα τῷ παρόντος δι' ὀργάνων ἐνεργεῖ ἔξωθεν διεγηγερμένη, καὶ συγκινουμένη τοῖς ἰδίοις ἀντικειμένοις. ἡ δὲ φαντασία μέσην χώραν νοός τε καὶ αἰσθήσεως ἔχουσα, ἐγείρεται μὲν ἀφ' ἑαυτῆς εἰς ἐνέργειαν, ὡς μηδαμῶς δεομένη τῶν ἔξω, ἐν ἑαυτῇ ἔχουσα τὰ γνωστά, μετὰ μερισμοῦ δέ γε καὶ διαστάσεως γινώσκει τὰ ὑπ' αὐτῆς γινωσκόμενα, ἀπὸ τῶν αἰσθήσεων ἀρχομένη, τὰ δὲ ταύτῃ ὑποπίπτοντα τῆς ἐκτὸς ὕλης καθαρεύουσιν, ἔχουσι μέντοι τὴν ἐν αὐτῇ νοητὴν λεγομένην ὕλην. Ὅθεν δὴ καὶ Ἀριστοτέλης παθητικὸν νοῦν ταύτην ὠνόμασε, τὸ μέσον ταύτης δεῖξαι βουλόμενος, καὶ τὴν κοινωνίαν τε καὶ διαφορὰν, ἣν ἔτυχεν ἔχουσα πρός τε τὸν νοῦν καὶ τὴν αἴσθησιν. Ἡ τοίνυν Γεωμετρία ὅτι γε μὴ περὶ τὰ νοητὰ ὡς ἴδια καταγίνεται ὑποκείμενα, μήτε γοῦν περὶ τὰ αἰσθητὰ, δῆλον. ἐκεῖνα μὲν γὰρ ἀσχημάτιστα ὅλως καὶ ἀμόρφωτα, καὶ παντὸς ὑλικοῦ καθαρεύοντα πάθους, ἔτι δὲ καὶ ἁπλούστατον καὶ μονοειδὲς τῶν σχημάτων ἕκαστον, λόγοι γὰρ ἄνευ

ὕλης

ὕλης εἰσί. ταῦτα δὲ ἐπιστημονικῇ θεωρίᾳ ἀνοίκεια, ἅτε δὴ ἀκριβείας πάσης ἀπολειπόμενα, καὶ τῆς ἐν τοῖς σχήμασι καθαρότητος. Λείπεται δὲ τὴν Γεωμετρίαν περὶ τῶν ἐν τῇ φαντασίᾳ καθόλου τὴν θεωρίαν ποιεῖσθαι, καὶ γὰρ ἐν τῇ φαντασίᾳ πολλά τε εἰσὶ τὰ ἑκάστου εἴδους σχήματα, κύκλοι, φημί, τρίγωνα, καὶ λοιπά, καὶ καθ' ἕνα μὲν λόγον ὑφίσταται, κοινωνοῦσι δὲ καὶ τῷ ὑποκειμένῳ, τῇ νοητῇ δηλ: ὕλῃ, διαφέρουσιν ἔμπης ἀλλήλων κατά τε τὸ μεῖζον καὶ ἔλαττον, διαιρέσεις τε παντοίας δέχονται, καὶ ἀφάς, καὶ τὰ ἄλλα τῶν σχημάτων πάθη. διὸ δὴ καὶ ὁ Γεωμέτρης ἄλλον μὲν ὁρᾷ κύκλον, κατ' ἄλλον δὲ θεωρεῖ, καὶ περὶ ἄλλων τὰς ἀποδείξεις ποιεῖται, ὡς Πρόκλος φησίν, ὁρᾷ μὲν γὰρ τὸν γεγραμμένον καὶ αἰσθήσει ὑποπίπτοντα, θεωρεῖ δὲ καὶ τὸν ἐν τῇ διανοίᾳ ἕνα ὄντα καὶ ἀπλούστατον, τὰς δ' ἀποδείξεις περὶ τῶν ἐν τῇ φαντασίᾳ ποιεῖται, τὴν γὰρ τῶν σχημάτων ἀκρίβειαν, καὶ πάνθ' ὅσα αὐτοῖς παρέπεται, τὰ ἐν τῇ φαντασίᾳ μόνα διασώζειν δύναται, τοὺς λόγους δὲ τῶν αὐτῶν ἡ διάνοια ἔχει, δι' ἧς καὶ ἐπιστήμην πορίζομεθα, τὰ δὲ αἰσθητὰ εἰκόνας χώραν ἀναπληροῖ.

Ὁρίζεται δὲ ἡ Γεωμετρία τισὶ μὲν οὕτω, Γεωμετρία ἐστὶν ἐπιστήμη γνωστικὴ μεγεθῶν καὶ σχημάτων, καὶ τῶν ἐν τούτοις περάτων, λόγων τε καὶ παθῶν θεωρητική. τισὶ δὲ οὕτω, Γεωμετρία ἐστὶν ἐπιστήμη περὶ ποσὸν καταγινομένη συνεχές, ἀκίνητον, συλλογιστικαῖς μεθόδοις δι' ἀξιωματικῶν ἀρχῶν, μῆκος, πλάτος καὶ βάθος μέτρον εὑρίσκουσα.

Εὕρηται δὲ α: ἡ γεωμετρία παρ' Αἰγυπτίοις, ὡς μαρτυρεῖ Πρόκλος ἐν τῷ β': τῶν εἰς τὸ α': τοῦ Εὐκλείδου ὑπομνημάτων αὐτοῦ, ἐκ τῆς τῶν χωρίων ἀναμετρήσεως λαβοῦσα τὴν γένεσιν, ὥσπερ καὶ παρὰ τοῖς Φοίνιξιν ἡ τῶν ἀριθμῶν ἀκριβὴς γνῶσις ἔλαβε τὴν ἀρχήν. τοῖς μὲν γὰρ Αἰγυπτίοις Γεωμετρία ἀναγκαία, διὰ τὴν τοῦ Νείλου ἄνοδον, ἀφανίζοντος τοὺς προσήκοντας ἑκάστοις ὅρους, Φοίνιξι δὲ Ἀριθμητικὴ διὰ τὰς πραγματείας, καὶ τὰ παρ' αὐτοῖς συναλλάγματα. Θαλῆς δὲ α: εἰς Αἴγυπτον ἀπελθὼν, καὶ ταύτην ἐκεῖ ἐκδιδαχθεὶς τὴν ἐπιστήμην, εἰς τὴν Ἑλλάδα μετήγαγε, πολλὰ μὲν αὐτὸς εὑρών, πολλῶν δὲ τὰς ἀρχὰς τοῖς μετ' αὐτὸν ὑφηγησάμενος, μετ' αὐτὸν δὲ ἄλλοι τε οὐκ ὀλίγοι σχηματίσαντες, μέγα ἐπὶ Γεωμετρίᾳ κεκτημένοι ὄνομα ἐπὶ τὸ ἐντελέστερον ταύτην ἤγαγον, ὧν εἷς καὶ Εὐκλείδης, ὁ τὴν Γεωμετρικὴν ἀρίστως συνταξάμενος στοιχείωσιν, ὡς ἔστιν ἰδεῖν ἐν τῷ αὐτῷ τοῦ Πρόκλου ὑπομνήματι.

Μέλλοντες οὖν καὶ ἡμεῖς ἐνταῦθα περὶ τῶν ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ διαλαβεῖν, πειρασόμεθα ὅσον ἔνι τὰ παρ' ἄλλοις εὑρεθέντα ἀναπτύξαι τε καὶ διασαφῆσαι, μετρίας τὰς περὶ αὐτῶν ἀποδείξεις ποιούμενοι, ἵνα μὴ παρὰ μὲν τὴν τῶν προβαλλομένων ἀσάφειαν ἀνωφελὴς γένηται ὁ πόνος, παρὰ δὲ τὴν τῶν ἀποδείξεων ὑπὲρ τὸ μέτρον ἔκτασιν, κόρον ἐπάγῃ τοῖς ἀναγινώσκουσι.

Διαι-

Διαιρεθήσεται δὲ τοίνυν ἡ παροῦσα Πραγματεία εἰς δύο τὰ καθολικώτερα, τὸ Στοιχειῶδες καὶ Πρακτικόν. Καὶ ἐν μὲν τῷ α΄: ὑποδιαιρουμένῳ εἰς ἐπίπεδον καὶ στερεὸν περὶ τῶν Γεωμετρικῶν προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων ὁ λόγος ἡμῖν ἔσται, τῶν στοιχείων λόγους ἐχόντων, διὸ δὴ καὶ Θεωρητικὸν αὐτὸ ἀποκαλέσας οὐκ ἂν ἁμάρτῃς, διὰ τὸ εἰς θεωρίαν μᾶλλον ἐμπίπτειν, ἐν δὲ τῷ β΄: περὶ τῶν Γεωμετρικῶν διαληψόμεθα πράξεων.

Περὶ τοῦ Στοιχειώδους μέρους τῆς Γεωμετρίας, ἤτοι τοῦ Θεωρητικοῦ.

Ἐπεὶ δὲ ἐν ἑκάστῃ ἐπιστήμῃ μὴ μόνον τὸ ἴδιον ἐπιστητὸν ὑποκείμενον προϋποτίθεσθαι δεῖ, καὶ προγινώσκεσθαι τοιαύτην γ᾽ ἔχειν φύσιν, ὥστε τὰ ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἐπιστήμης θεωρούμενα πάθη καθ᾽ αὑτὸ ταύτῃ ἐφαρμόττειν, ἀλλ᾽ οὐδὲν ἧττον ἀναγκαῖον καὶ τὰς ἀρχὰς ταύτης προεγνωσμένας πάσας εἶναι, ὅθεν χάριν καὶ ἡμῖν ἤδη προδηλωθέντος τοῦ ἐπιστητοῦ ὑποκειμένου τῆς παρούσης Πραγματείας, ὅπερ ἐστὶν ἡ συνεχὴς ποσότης, ἧς ἰδιαίτατον παρεπόμενον τὸ ἐπ᾽ ἄπειρον τέμνεσθαι, προὐργιαίτατόν ἐστι καὶ περὶ ἀρχῶν ταύτης εἰπεῖν. Ἀρχαὶ μὲν οὖν τῆς Γεωμετρίας εἰσὶν οἱ Ὅροι, τὰ Ἀξιώματα καὶ Αἰτήματα, περὶ ὧν ἐν τῷ α΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ ἀκριβέστερον ἡρμηνεύσαμεν. ὅθεν ὁ βουλόμενος ἐντελῆ τούτων γνῶσιν ἔχειν, ἐν ἐκείνῳ τὸν νοῦν προγυμναζέτω. ἵνα δὲ μὴ καὶ ὁ τοῦ παρόντος ἁψόμενος ἄπειρος ὅλως τῆς ἐκείνων γνώσεως ᾖ, καί πως τοῖς ῥηθησομένοις προσκόπτῃ, ἔδοξέ μοι κἀνταῦθα προεκθέσθαι τῶν ἄλλων τοὺς ὅρους. Ἰστέον δ᾽ ὅτι διττοῦ γένους εἰσὶν αἱ ἀρχαὶ τῆς Γεωμετρίας, ἡ μὲν γὰρ ἐκτός ἐστι πάσης διαστάσεως, μήκους δηλ:, πλάτους, καὶ βάθους, οἷόν ἐστι τὸ παρὰ τοῖς γεωμέτραις σημεῖον λεγόμενον, αἱ δὲ μετὰ διαστάσεως, τρεῖς δ᾽ αὗται, Γραμμή, Ἐπιφάνεια, καὶ Σῶμα. Πρωτίστη δὲ καὶ ἁπλουστάτη ἁπασῶν τὸ σημεῖόν ἐστιν, ἐξ οὗ καὶ Γραμμὴ συνίσταται. σημείου γὰρ ῥυέντος, καὶ ἴχνη ἐγκαταλιμπάνοντος, Γραμμὴ ἀποτελεῖται. διὸ καὶ ὅρος Γραμμῆς καὶ πέρατα τὰ σημεῖα λέγεται. ἐκ δὲ τῆς Γραμμῆς ἀποτελεῖται Ἐπιφάνεια, ὥσπερ ἐξ Ἐπιφανείας Σῶμα. ὅθεν ἡ μὲν Γραμμὴ ὅρος καὶ πέρας γίνεται Ἐπιφανείας, Ἐπιφάνεια δὲ Σώματος. ὥστε δῆλον ἐκ τούτων, ὡς τῶν μὲν ἐπιπέδων σχημάτων ὅροι εἰσὶν αἱ Γραμμαί, τῶν δὲ στερεῶν αἱ Ἐπιφάνειαι. ἵνα δὲ ὁ λόγος καθ᾽ ὁδὸν βαδίζῃ, ἀρκτέον ἤδη ἀπὸ τοῦ σημείου.

Ὅροι Γεωμετρίας.

Α΄: Σημεῖον μὲν οὖν ἐστι κατὰ τὸν Εὐκλείδην, οὗ μέρος οὐθέν, ταυτὸν δ᾽ ἐστὶν εἰπεῖν ἄτμητον ὅλως καὶ ἀμερές.

Β΄: Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές, διὸ καὶ ὑφ᾽ ἑνὸς διαστατὴ λέγεται, ἧς εἴδη τρία, εὐθεῖα, καμπύλη καὶ μικτή.

Γ΄. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται, ἢ ἡ ἴσον κατέχουσα διάστημα τὸ μεταξὺ τῶν ὁριζομένων αὐτὴν σημείων, ἢ ἡ ἐπ᾽

ἄκρον τεταμένη, οἷα ἡ α β, ταύτης γὰρ τὰ σημεῖα ἐπ' εὐθείας κεῖται, ὥστε μὴ τὰ μὲν ὑπεραιωρεῖσθαι, τὰ δὲ ὑποκεῖσθαι, τὸ δὲ μεταξὺ τῶν α β, σημείων διάστημα ἴσον ἐστὶ τῇ αὐτῇ α β, διὸ καὶ ἐπ' ἄκρον τέταται, ὑποτίθεται δὲ ἡ εὐθεῖα ἡ πεπερασμένη, ἡ ἄπειρος.

Δ': Καμπύλη γραμμή ἐστιν, ἥτις οὐ κεῖται ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις. ἧς δύο τὰ εἴδη, κυκλική, καὶ ἐλλειπτική, ὡς ἡ γ δ, καὶ ε ζ. Geom. Lib. 1. Fig. 1.

Ε': Μικτή ἐστιν, ἥτις ἔκ τε εὐθείας καὶ καμπύλης σύγκειται, ὡς ἡ θ κ, καὶ αἱ κερατοειδεῖς πᾶσαι, καὶ κισσοειδεῖς, ὡς ἡ λ μ, ἔτι δὲ καὶ αἱ ἑλικοειδεῖς, καὶ σπειροειδεῖς, ὧν εἴδη πλεῖστα, κυλινδρική, κωνική, σφαιρική, καὶ ἄλλαι.

ϛ': Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει, ἢ μέγεθος διχῇ διαστατόν. εἴδη δὲ ταύτης τρία, ἐπίπεδος, καμπύλη, καὶ μικτή.

Ζ': Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται. ἢ ἡ ἴσον διάστημα κατέχουσα τὸ μεταξὺ τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν γραμμῶν. Ὑποδιαιρεῖται δὲ ἡ ἐπίπεδος εἰς πεπερασμένην, οἷα ἡ ν ξ, καὶ εἰς ἄπειρον. Εἰώθασι δὲ οἱ τῶν Μαθηματικῶν παῖδες τὴν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν ἁπλῶς ἐπίπεδον καλεῖν ἄνευ προσθήκης τοῦ ἐπιφανείας ὀνόματος.

Η': Καμπύλη δὲ ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις οὐκ ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς κεῖται γραμμαῖς, ἢ ἡ μὴ κατέχουσα ἴσον διάστημα τὸ μεταξὺ τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν γραμμῶν. Πολλὰ δὲ ταύτης τὰ εἴδη, ἡ σφαιρική, ἡ κωνική, ἡ κυλινδρική, καὶ ἄλλαι. ἑκάστη δὲ τούτων ὑποδιαιρεῖται εἰς Κυρτὴν καὶ Κοίλην, καὶ Κυρτὴ μέν ἐστιν ἡ ἐξωτερικὴ τῶν καμπύλων σχημάτων ἐπιφάνεια, Κοίλη δέ, ἡ ἐσωτερικὴ τῶν αὐτῶν κενῶν τόπων.

Θ': Μικτὴ δὲ ἡ ἔκ τε ἐπιπέδου καὶ καμπύλης συγκειμένη, ὡς ἡ τοῦ κυλίνδρου καὶ κώνου. τούτων γὰρ καὶ τῶν ὁμοίων αὐτοῖς, ἡ μὲν βάσις ἐπίπεδός ἐστιν, ἡ δὲ λοιπὴ ἐπιφάνεια καμπύλη.

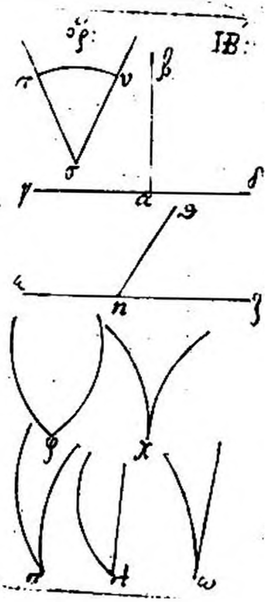
Ι': Σῶμά ἐστι τὸ μῆκος, πλάτος καὶ βάθος ἔχον, ἢ τὸ τριχῇ διαστατόν, ὃ καὶ στερεὸν λέγεται. οἷον τὸ π ρ. Πλεῖστα δὲ καὶ τούτου τὰ εἴδη, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς ὀψόμεθα.

ΙΑ': Ἐπίπεδος γωνία ἐστίν, ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις. Αἱ δὲ γραμμαὶ αὗται πλευραὶ καλοῦνται. Εἴδη δὲ τῆς ἐπιπέδου γωνίας τρία, Εὐθύγραμμος, Καμπυλόγραμμος, καὶ Μικτή.

ΙΒ'.

IB': Εὐθύγραμμος γωνία ἐστὶν, ἡ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένη γραμμῶν, ὡς ἡ σ, μέτρον δὲ ταύτης τόξον κύκλου ὑπὸ τῶν αὐτῆς πλευρῶν περιεχόμενον, γραφομένου μὲν ὡς ἀπὸ κέντρου τῆς τῶν γραμμῶν κλίσεως, διαστήματι δὲ τῷ τυχόντι, οἷον τὸ τυ. ὅσων γὰρ ἂν εἴη μοιρῶν τὸ τυ, τόξον, τοσούτων λέγεται εἶναι καὶ ἡ πρὸς τῷ σ, γωνία. Τρία δὲ ταύτης τὰ εἴδη, Ὀρθὴ, Ἀμβλεῖα, καὶ Ὀξεῖα. ὅταν μὲν οὖν εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν, ὡς ἡ αβ, ἐπὶ τὴν γδ. ἴσας γὰρ ἀλλήλαις ποιεῖ τὰς ὑπὸ γαβ, καὶ δαβ, γωνίας, ὧν ἑκατέρα ὀρθὴ λέγεται. μέτρον δὲ τῆς ὀρθῆς γωνίας κύκλου τεταρτημόριον. Ἀμβλεῖα δὲ ἡ μείζων ὀρθῆς, ὡς ἡ ὑπὸ εηθ, ἧς μέτρον τόξον κύκλου μεῖζον τεταρτημορίου. Ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάττων ὀρθῆς, ὡς ὑπὸ ζηθ, ταύτης δὲ μέτρον τόξον κύκλου ἔλαττον τεταρτημορίου.

Geom. Lib. 1. Fig. 2.



IΓ': Καμπυλόγραμμος δὲ, ἡ ὑπὸ καμπύλων περιεχομένη γραμμῶν, καὶ ταύτης δὲ εἴδη τρία, Ἀμφίκυρτος, Ἀμφίκοιλος, καὶ Κυρτόκοιλος. Ἀμφίκυρτος μὲν οὖν ἐστιν, ἡ ὑπὸ καμπύλων περιεχομένη γραμμῶν ἐντὸς τὸ κυρτὸν ἐχουσῶν, ὡς ἡ φ. Ἀμφίκοιλος δὲ ἡ ὑπὸ καμπύλων περιεχομένη γραμμῶν, ἐκτὸς τὸ κυρτὸν ἐχουσῶν, ὡς ἡ χ. Κυρτόκοιλος δὲ ἡ ὑπὸ καμπύλων περιεχομένη γραμμῶν, τῆς μὲν ἐκτὸς, τῆς δὲ ἐντὸς τὸ κυρτὸν ἐχούσης, οἵα ἡ τ.

IΔ': Μικτὴ δὲ γωνία ἐπίπεδός ἐστιν, ἡ ὑπό τε εὐθείας καὶ καμπύλης περιεχομένη γραμμῆς. δύο δὲ ταύτης τὰ εἴδη, εὐθύκυρτος, καὶ εὐθύκοιλος. καὶ εὐθύκυρτος μὲν ἐστιν, ἧς ἡ καμπύλη πλευρὰ ἐκτὸς τὸ κυρτὸν ἔχει, ὡς ἡ ψ. εὐθύκοιλος δὲ, ἧς ἡ καμπύλη πλευρὰ ἐντὸς τὸ κυρτὸν ἔχει, ὡς ἡ ω.

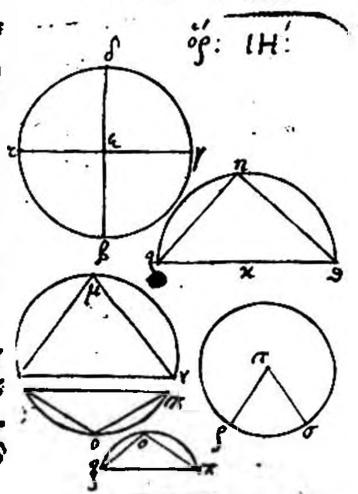
IE': Ὅρος ἐστὶν, ὅ τινός ἐστι πέρας, ὥσπερ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν σωμάτων, καὶ αἱ γραμμαὶ τῶν ἐπιφανειῶν, τὰ δὲ σημεῖα τῶν γραμμῶν, κἂν εἰσὶ πέρατα, οὐ μὴν εἰσὶ κυρίως ὅροι, ἀλλὰ καταχρηστικῶς.

ις': Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος, ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον. ἔστι δὲ τὸ μὲν ἐπίπεδον, τὸ δὲ στερεόν. καὶ ἐπίπεδον μὲν ἐστιν ἐπιφάνειά τις πεπερασμένη, γραμμῇ ἢ γραμμαῖς περιεχομένη, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς ὀψόμεθα. στερεὸν δὲ ἐστι σῶμα πεπερασμένον, ἐπιφανείᾳ, ἢ ἐπιφανείαις περιεχόμενον. Αὖθις τῶν ἐπιπέδων σχημάτων τὰ μὲν εἰσιν εὐθύγραμμα, τὰ δὲ καμπυλόγραμμα.

ΙΖ'. Καμπυλόγραμμα μὲν οὖν εἰσι τὰ ὑπὸ καμπύλων περιεχόμενα, γραμμῶν ὡς κύκλοι καὶ ἐλλείψεις.

ΙΗ'. Κύκλος μὲν οὖν ἐστι σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖται περιφέρεια, πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται. οἷον τὸ α β γ δ, σχῆμα, κύκλος ἐστίν, οὗ περιφέρεια μὲν λέγεται ἡ α β γ δ, καμπύλη γραμμή, κέντρον δὲ τὸ ε, σημεῖον, ἀφ' οὗ αἱ ε α, ε β, ε γ, ε δ, εὐθεῖαι προσπίπτουσαι πρὸς τὴν α β γ δ, περιφέρειαν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

ΙΘ'. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον, ὡς ἡ α γ, καὶ β δ, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σχήματος, ἑκατέρα γὰρ διὰ τοῦ ε, διέρχεται κέντρου, καὶ δίχα τὸν α β γ δ, τέμνει κύκλον, ὑπὸ τῆς α β γ δ, περατουμένη περιφερείας, ἑκατέρας δὲ τούτων ἡ ἡμίσεια, ἡμιδιάμετρος καλεῖται. Geom. Lib. 1. Fig. 3.



Κ'. Τμῆμα δὲ κύκλου ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας περιεχόμενον, ἔστι δὲ τριττὸν, Ἡμικύκλιον, Μεῖζον τμῆμα, καὶ Ἔλαττον.

ΚΑ'. Ἡμικύκλιον μὲν ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, οἷον τὸ ζ η θ, οὗ κέντρον τὸ κ, ὃ καὶ τοῦ κύκλου κέντρον ἐστί. Μεῖζον δὲ καὶ ἔλαττον τμῆμα κύκλου ἐστὶ τὸ ὑπό τε εὐθείας καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης τοῦ κύκλου περιφερείας, μείζονος μὲν τῆς τοῦ ἡμικυκλίου τὸ μεῖζον, ἐλάττονος δὲ τὸ ἔλαττον. καὶ τὸ μὲν μεῖζον ἔνδον περιέχει τὸ τοῦ κύκλου κέντρον, ὡς τὸ λ μ ν, τὸ δὲ ἔλαττον ἐκτὸς τοῦτο ἀφίησιν, ὡς τὸ ξ ο π. καλεῖται δὲ ἡ τοῦ τμήματος εὐθεῖα χορδὴ καὶ ὑποτείνουσα, ἡ δὲ περιφέρεια τόξον.

ΚΒ'. Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας, ὡς ἡ πρὸς τῷ ζ, ἡ θ, ἡ λ, ἡ ν, ἡ ξ, ἡ π.

ΚΓ'. Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστὶν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, ἥτις ἐστὶ βάσις τοῦ τμήματος, ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν, οἷα ἡ ὑπὸ ζ η θ, καὶ λ μ ν, καὶ ξ ο π.

ΚΔ'. Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστὶ σχῆμα ὑπό τε περιφερείας καὶ δύο ἡμιδιαμέτρων τοῦ

αὐτοῦ

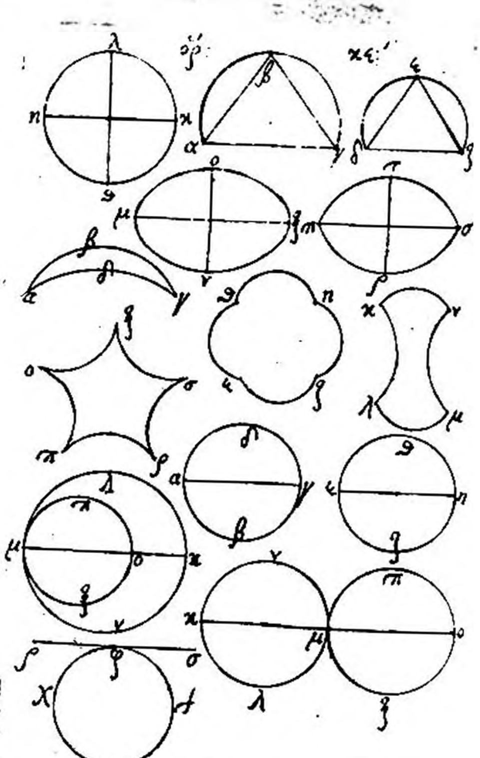
αὐτῷ περιεχόμενον κύκλου, δεῖ δὲ τὰς ἡμιδιαμέτρους ταύτας γωνίαν πρὸς τῷ κέντρῳ τοῦ κύκλου συνιστᾶν. τοιοῦτόν ἐστι τὸ ρ σ τ.

ΚΕ′. Ὅμοια τμήματα κύκλου ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, οἷα τὰ α β γ, καὶ δ ε ζ.

ΚϚ′. Τεταρτημόριον κύκλου ἐστὶ τόξον τὸ αὐτῷ ἐμπεριλαμβανόμενον μεταξὺ δύο διαμέτρων πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τεμνομένων, οἷον τὸ η θ, θ κ, κ λ, καὶ λ η.

ΚΖ′. Ἔλλειψίς ἐστι σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ καμπύλης γραμμῆς, ἢ γραμμῶν περιεχόμενον, οὗ τὸ μῆκος τῷ πλάτει ἄνισον, οἷα τὰ μ ν ξ ο, καὶ π ρ σ τ, ὧν τὸ μὲν ᾠοειδὲς ὀνομάζεται, τὸ δὲ φακοειδές. Κέντρον δὲ τῆς ἐλλείψεως ἐστὶ τὸ μεσαίτατον τῶν ἐν αὐτῇ σημείων, ἀφ᾽ οὗ πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι πρὸς τὴν περιφέρειαν ἄνισοί εἰσιν, ἡ δὲ μεγίστη ἁπασῶν καὶ ἐλαχίστη διάμετροι ἐλλείψεως λέγονται, ὡς αἱ μ ξ, ν ο, καὶ π σ, ρ τ. εἴδη δὲ τῆς ἐλλείψεως διάφορα, Κισσοειδὴς ἡ ὁμοία τῷ τοῦ κισσοῦ φύλλῳ, Μυρτοειδὴς ἡ ὁμοία τῷ τοῦ τῆς Μυρσίνης φύλλῳ. Ἱπποειδὴς ἡ ὁμοία τῷ τοῦ ἵππου ποδί. καὶ ἄλλα.

Geom. Lib. 1. Fig. 4.



ΚΗ′. Τῶν καμπυλογράμμων ἔτι σχημάτων εἰσὶ καὶ ὅσα ὑπὸ διαφόρων κύκλου τμημάτων σύγκειται, ὡς τὰ Μηνοειδῆ, καὶ ἄλλα, οἷα τὰ α β γ δ, ε ζ η θ, κ λ μ ν, ξ ο π ρ σ, καὶ τὰ παραπλήσια. ὧν τὰ μὲν ἐκτὸς τὸ κυρτὸν ἔχουσι, τὰ δὲ ἐντός, τὰ δὲ κατ᾽ ἄμφω, ὡς τὸ α β γ δ, μηνοειδές, καὶ τὸ κ λ μ ν, ἀξινοειδές.

ΚΘ′. Ἴσοι κύκλοι εἰσίν, ὧν αἱ διάμετροι εἰσὶν ἴσαι, ἢ ὧν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι εἰσίν, ὡς οἱ α β γ δ, καὶ ε ζ η θ.

Λ′. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἵτινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους, ὡς οἱ κ λ μ ν, καὶ μ ξ ο π.

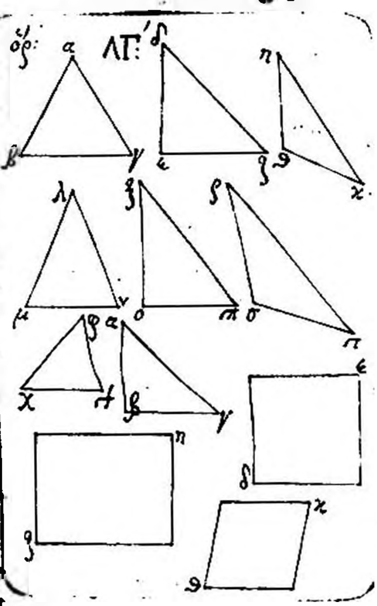
ΛΑ′. Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου, καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον, ὡς ἡ ρ σ, ἥτις ἐφάπτεται τοῦ φ χ ψ, κύκλου κατὰ τὸ φ, σημεῖον.

ΛΒ′. Εὐθύγραμμα δὲ σχήματά εἰσι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα, ὡς τὰ τρίπλευρα, τετράπλευρα, καὶ πολύπλευρα. καὶ τρίπλευρα μέν εἰσι τὰ ὑπὸ τριῶν,

τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, καὶ πολύπλευρα τὰ ὑπὸ πλειόνων, ἢ τεσσάρων πλευρῶν περιεχόμενα.

ΛΓ': Τῶν τριπλεύρων αὖθις τρία τὰ εἴδη, Ἰσόπλευρον, Ἰσοσκελὲς, καὶ Σκαληνόν, καὶ Ἰσόπλευρον μὲν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευρὰς, διὸ καὶ τρίγωνον ἰσόπλευρον ὀνομάζεται, ὃ καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι ἴσαι, οἷον τὸ α β γ. Ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνον πλευρὰς ἴσας ἔχον, τούτου δὲ εἴδη τρία, Ὀρθογώνιον, Ἀμβλυγώνιον, καὶ Ὀξυγώνιον. καὶ Ὀρθογώνιον μὲν ἐστι τὸ μίαν ἔχον ὀρθὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, οἷον τὸ δ ε ζ. Ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἀμβλεῖαν ἔχον τὴν αὐτὴν, ὡς τὸ η θ κ, καὶ Ὀξυγώνιον τὸ καὶ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον, ὡς τὸ λ μ ν. Σκαληνὸν δὲ τὸ καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἀνίσους ἔχον. τρία δὲ καὶ τούτου τὰ εἴδη, Ὀρθογώνιον, οἷον τὸ ξ ο π. Ἀμβλυγώνιον, οἷον τὸ ρ σ τ, καὶ Ὀξυγώνιον, οἷον τὸ φ χ ψ.

Geom. Lib. 1. Fig. 5.



ΛΔ': Παντὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, τοῦ δὲ ἰσοσκελοῦς αἱ δύο μόνον, τοῦ δὲ σκαληνοῦ καὶ αἱ τρεῖς ἄνισοι. Αὖθις παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὡς δείκνυται παρ' Εὐκλείδῃ βιβλ: α': Προτ: λ β': ὅθεν οὐδὲ τρίγωνον δύναται ἔχειν πλείους μιᾶς, ὀρθὰς ἢ ἀμβλείας γωνίας, οὔτε αὖθις τὴν μὲν ὀρθὴν, τὴν δὲ ἀμβλεῖαν. Ἔτι παντὸς μὲν τριγώνου αἱ δύο τῶν τριῶν περιεχουσῶν αὐτὸ γραμμῶν, ὁποιαιδήποτοῦν πλευραὶ καλοῦνται, ἡ δὲ λοιπὴ βάσις. τοῦ δὲ ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ μὲν τὸ ὁρίζοντι παραλλήλως κειμένη ὡς ἡ β γ, τοῦ α β γ, ὀρθογωνίου τριγώνου λέγεται βάσις, ἡ δὲ ἐπ' αὐτῆς πρὸς ὀρθὰς ἱσταμένη, ὡς ἡ α β, κάθετος, ἡ δὲ λοιπὴ α γ. ὑποτείνουσα. ἁπλῶς δὲ παντὸς τριγώνου ἑκάστη τῶν πλευρῶν ὑποτείνουσα λέγεται τῆς ἀπεναντίον γωνίας, οἷον τοῦ α β γ, τριγώνου ἡ μὲν α γ, ὑποτείνουσα λέγεται τῆς πρὸς τῷ β, ὀρθῆς γωνίας, ἡ δὲ α β, τῆς πρὸς τῷ γ, καὶ ἡ β γ, τῆς πρὸς τῷ α.

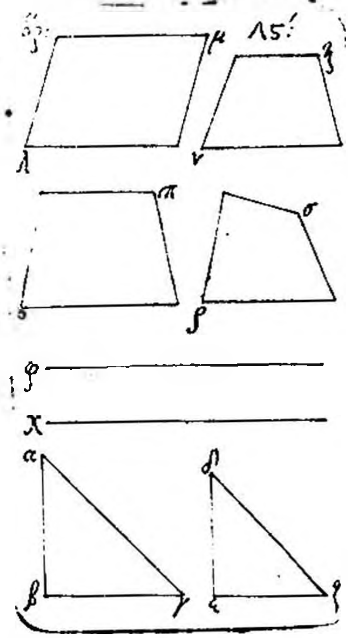
ΛΕ': Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων πέντε εἰσὶ τὰ εἴδη, Τετράγωνον, Ἑτερόμηκες, Ῥόμβος, Ῥομβοειδὲς, καὶ Τραπέζιον. καὶ Τετράγωνον μὲν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ὡς τὸ δ ε. Ἑτερόμηκες δὲ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δὲ, ὡς τὸ ζ η. Ῥόμβος δὲ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δὲ, οἷον τὸ θ κ. Ῥομβοειδὲς δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε

καὶ

καὶ γωνίας ἴσας ἔχον, ὃ ἔτε ἰσόπλευρον, ἔτε ὀρθογώνιον, οἷον τὸ λμ. Τραπέζιον δὲ ἁπλῶς τὸ παρὰ ταῦτα τετράπλευρον. τούτου δὲ δύο τὰ εἴδη, αὐτὸ τοῦτο Τραπέζιον, καὶ Τραπεζοειδές. καὶ Τραπέζιον μέν ἐστι τὸ τὰς δύο μόνον πλευρὰς παραλλήλους ἔχον, οὗ δύο τὰ εἴδη, Τραπέζιον ἰσοσκελές, καὶ τραπέζιον σκαληνόν. καὶ Ἰσοσκελὲς μὲν τραπέζιον λέγεται, τὸ τὰς συναπτούσας τὰς δύο αὐτοῦ παραλλήλους πλευρὰς ἴσας ἔχον, οἷον τὸ νξ. Σκαληνὸν δὲ τραπέζιον τὸ ἀνίσους ταύτας ἔχον, οἷον τὸ οπ. Τραπεζοειδὲς δὲ λέγεται, τὸ μηδόλως τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τινας παραλλήλους ἔχον, οἷον τὸ ρσ.

ΛϚ': Τῶν δὲ πολυπλεύρων ἕκαστον παρονομάζεται ὑπὸ τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν αὐτοῦ καὶ πλευρῶν. αἱ μὲν γὰρ πέντε εἰσὶ γωνίαι καὶ πέντε πλευραὶ, ὑφ' ὧν περιέχεται, πεντάγωνον ἤκουσεν, ἑξάγωνον δὲ τὸ καὶ γωνίας καὶ πλευρὰς ἓξ ἔχον, ὥσπερ καὶ ἑπτάγωνον τὸ ὑπὸ ἑπτὰ περιεχόμενον πλευρῶν, καὶ γωνίας ἑπτὰ ἔχον, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ἀναλόγως.

Geom. Lib. 1. Fig. 6.



ΛΖ': Παράλληλοι δὲ εὐθεῖαί εἰσιν, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι ἐπ' ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις, ὡς αἱ φχ.

ΛΗ': Παραλληλόγραμμα σχήματά εἰσιν, ὅσα τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους ἔχουσι, τοιαῦτά εἰσι τὰ τετράγωνα, οἱ ῥόμβοι, τὰ ῥομβοειδῆ, καὶ τὰ ἑτερομήκη, ἃ καὶ ἰδίως παράλληλα λέγεται. ὀρθογώνια δὲ ὅσα τὰς γωνίας ὀρθὰς ἔχει, οἷα τὰ τετράγωνα, καὶ ἑτερομήκη. Πᾶν δὲ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν.

ΛΘ': Τῶν ἐπιπέδων καὶ εὐθυγράμμων σχημάτων, τριπλεύρων, τετραπλεύρων, καὶ πολυπλεύρων, τὰ μέν εἰσι Κανονικὰ, τὰ δὲ Ἀκανόνιστα. καὶ Κανονικὰ μέν εἰσι τὰ Ἰσόπλευρά τε καὶ Ἰσογώνια. ὅθεν ἐν ἑκάστῳ εἴδει σχημάτων ἓν τοιοῦτόν ἐστιν. Ἀκανόνιστα δὲ τὰ λοιπὰ πάντα.

Μ': Ἰσοπερίμετρα ἐπίπεδα σχήματά εἰσιν, ὅσα τὰς ἑαυτῶν περιμέτρους ἴσας ἔχουσιν, κἄν τε ὁμογενῆ ὦσι, κἄν τε ἑτερογενῆ.

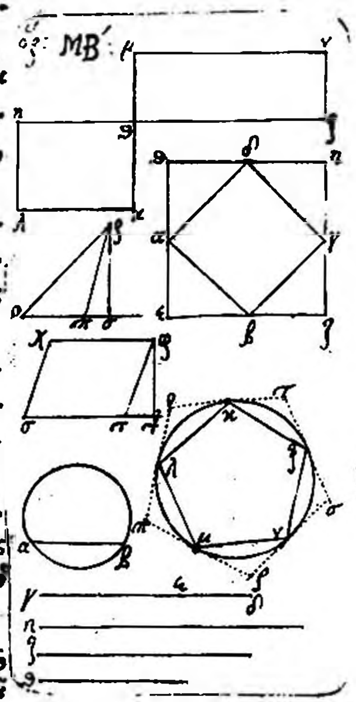
ΜΑ': Ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τάς τε γωνίας ἔχει κατὰ μίαν ἴσας, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον, οἷα τὰ αβγ, καὶ δεζ, τρίγωνα. Ὅμοια δὲ, καὶ ὁμοίως κείμενα, ὅσα πρός τε τόποις καὶ τῇ θέσει ὁμοίως ἔχουσιν.

ΜΒ': Ἀντιπεπονθότα σχήματά ἐστιν, ὅταν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι ὦσι. τοιαῦτά εἰσι τὰ λθ, θν. ὡς γὰρ ἡ κθ, πρὸς τὴν θζ, οὕτως ἡ μθ, πρὸς τὴν θκ.

ΜΓ': Ὕψος ἐστὶ παντὸς σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη, ὡς ἡ ρσ, τοῦ οπρ, τριγώνου, καὶ ἡ φψ, τοῦ στφχ, ῥομβοειδοῦς.

ΜΔ': Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν, ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται, ὥσπερ τὸ αβγδ, εἰς τὸ εζηθ.

Geom. Lib. 1. Fig. 7.



ΜΕ': Σχῆμα δ' ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἑκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται, ἅπτηται, ὡς τὸ εζηθ, περὶ τὸ αβγδ.

Μϛ': Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ὡς τὸ κλμνξ.

ΜΖ': Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον λέγεται περιγράφεσθαι, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἅπτηται, ὡς τὸ οπρστ.

ΜΗ': Κύκλος δὲ ὁμοίως εἰς σχῆμα λέγεται ἐγγράφεσθαι, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται, ὡς ἐν τῷ οπρστ.

ΜΘ': Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται, ἅπτηται, ὡς ὁ περὶ τὸ κλμνξ.

Ν': Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾖ τοῦ κύκλου, ὡς ἡ αβ.

ΝΑ': Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτω τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλαττον, οἷα ἡ γδ, τμηθεῖσα κατὰ τὸ ε, ὡς γὰρ ἡ αὐτὴ γδ, ἔχει πρὸς τὸ γε, αὐτῆς τμῆμα, οὕτως ἔχει καὶ τὸ γε, πρὸς τὸ εδ.

ΝΒ': Μέση ἀνάλογος εὐθεῖα λέγεται εἶναι ἡ μεταξὺ δύο εὐθειῶν οὕτω κειμένη, ὥστε ὡς ἔχει ἡ α': πρὸς αὐτήν, ἔχειν καὶ αὐτὴν πρὸς τὴν γ': ὡς ἡ ζ. ὡς γὰρ ἡ η, πρὸς αὐτήν, οὕτω καὶ αὕτη πρὸς τὴν θ, ἔχει.

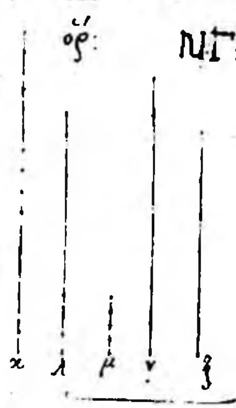
ΝΓ':

ΝΓ': Σύμμετρα μεγέθη λέγεται, τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα, οἷα τὰ κ λ, ὧν κοινὸν μέτρον τὸ μ.

ΝΔ': Ἀσύμμετρα δὲ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι, οἷα τὰ ν ξ.

ΝΕ': Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ὅταν τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρῆται.

Geom. Lib. 1. Fig. 8.



ΝϚ': Ἀσύμμετροι δὲ, ὅταν τοῖς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνοις μηδὲν ἐνδέχηται χωρίον κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

ΝΖ': Δυνάμει δὲ πολλαπλάσιος, ἢ ἄλλως πως εὐθεῖά τις ἑτέρας τινὸς εὐθείας λέγεται, ὅταν τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον πολλαπλάσιον ᾖ τοῦ ἀπὸ τῆς ἑτέρας τετραγώνου, ἢ ἄλλον τινὰ πρὸς αὐτὸ ἔχει λόγον.

ΝΗ': Δύνασθαι δὲ εὐθεῖαν τινα δύο, ἢ καὶ πλείους λέγομεν εὐθείας, ὅτι τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν εὐθειῶν τετραγώνοις, ἃς δύνασθαι λέγεται.

ΝΘ': Τούτων ὑποκειμένων, δείκνυται, ὅτι τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλήθει ἄπειροι, σύμμετροί τε καὶ ἀσύμμετροι, αἱ μὲν μήκει καὶ δυνάμει, αἱ δὲ μήκει μόνον.

Ξ': Καλείσθω οὖν ἡ μὲν προτεθεῖσα εὐθεῖα ῥητή.

ΞΑ': Καὶ αἱ μὲν ταύτῃ σύμμετροι, εἴτε μήκει καὶ δυνάμει, εἴτ' οὖν δυνάμει μόνον ῥηταί.

ΞΒ': Αἱ ἀσύμμετροι δὲ ταύτῃ ἄλογοι.

ΞΓ': Καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προτεθείσης εὐθείας ῥητῆς τετράγωνον, καλείσθω ῥητόν.

ΞΔ': Καὶ τὰ μὲν τούτῳ σύμμετρα, ῥητά.

ΞΕ': Τὰ δὲ ἀσύμμετρα, ἄλογα.

ΞϚ': Καὶ αἱ δυνάμεναι αὐτὰ ἄλογοι, εἰ μὲν τετράγωνον εἴη, αὐταὶ αἱ πλευραί; εἰ δὲ ἕτερά τινα εὐθύγραμμα, αἱ ἴσα αὐτοῖς τετράγωνα ἀναγράφουσαι.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΤΙΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ,

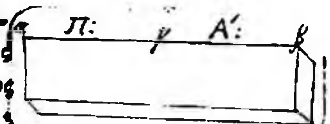
Τῶν Στοιχείου λόγον μᾶλλον ἐχόντων.

Πρότασις Α'.

Ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω ἀπὸ τοῦ α, σημείου ἐπὶ τὸ β, ἀγαγεῖν εὐθεῖαν γραμμήν. Ἀφεθήτω δὴ ὁ κανών, καὶ ἐφαρμοσθήτω ἀκριβῶς τοῖς α, καὶ β, σημείοις, ὥστε ἑκάτερον τούτων ἐφάπτεσθαι. τοῦ δὲ κανόνος τῇ ἀριστερᾷ χειρὶ πιεζομένου, καὶ οἱονεὶ στηριζομένου, λάβε τῇ δεξιᾷ τὸν διαβήτην, ἢ ἕτερόν τι γραφικὸν ὄργανον, καὶ θεὶς τὴν τούτου ἀκωκὴν ἐπὶ τὸ α, μετακόμισον αὐτὸ συνεχεῖ κινήσει ἐπὶ τὸ β, τοῦ κανόνος ἀεὶ ἁπτόμενον, καὶ ἕξεις τὸ ζητούμενον. Ὅτι μὲν γὰρ ἀκριβῶς οὕτως ἐγχαραχθήσεταί σοι εὐθεῖα, ἐκ τῆς τοῦ κανόνος κατασκευῆς δῆλον. Ὁποῖον δὲ δεῖ τὸν κανόνα εἶναι, εὑρήσεται ἐν ἀρχῇ τοῦ β'. μέρους τοῦ παρόντος, ἤτοι τοῦ πρακτικοῦ, ἔνθα περὶ κατασκευῆς τῶν Γεωμετρικῶν ὁ λόγος ἔσται Ὀργάνων.

Geom. Lib. 1. Fig. 9.



Ἄλλως. Λαβὼν σπαρτίον, ἢ λεπτόν τι σχοινίον βάψον αὐτὸ ἔν τινι βαφῇ, εἶτα ἐκτείνας αὐτὸ ἀπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὸ β, καὶ ἐν ἑκατέρῳ τούτων στηρίξας, ὕψωσον μικρὸν πρὸς ὀρθάς, καὶ ἄφες, καὶ ὄψει πάντως τὴν εὐθεῖαν ἀθρόαν ἠγμένην.

Ἄλλως. Λάβε μοι ῥάβδον τινά, καὶ στῆσον αὐτήν, πρὸς ὀρθὰς διὰ τῆς καθέτου μεταξὺ τῶν α, καὶ β, σημείων, φέρε εἰπεῖν κατὰ τὸ γ, ὥστε ἀφορῶντός σου ἀπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὸ β, τῆς ὀπτικῆς ἅπτεσθαι τὴν ῥάβδον γραμμῆς, καὶ κατ' εὐθεῖαν ἑκατέρῳ τῶν σημείων ὑπαντιάζειν. οὕτω γὰρ τῆς ῥάβδου κειμένης, ἐὰν ἀπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὸ γ, καὶ ἀπὸ τοῦ γ, ἐπὶ τὸ β, σχοινίον ἐκταθῇ, ἔσται τὸ ζητούμενον. Εἰ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὸ γ, ἢ τὸ ἀπὸ τοῦ γ, ἐπὶ τὸ β, διάστημα, ἢ γοῦν ἑκάτερον ἐπιμήκιστον εἴη, στῆσον τὸν αὐτὸν τρόπον ἐν μέσῳ τοῦ διαστήματος καὶ ἄλλας

τινὰς

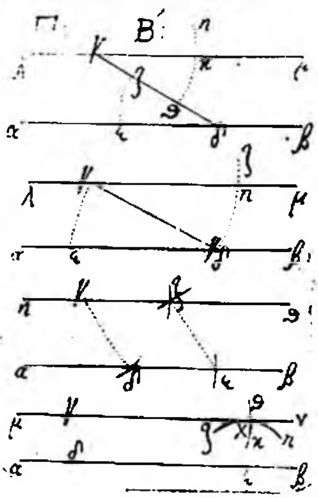
τινὰς ῥάβδους, ὥστε πάσας ἀπτέσθαι τῆς αὐτῆς ὀπτικῆς ἀκτῖνος, καὶ γενήσεταί σοι τὸ ἐπιταχθὲν ἀκριβέστερον. Τίς δὲ ἡ κάθετος, σημειωθήσεται ἔνθα καὶ περὶ τοῦ κανόνος ἐροῦμεν. Ἰστέον δ' ὅτι τῷ μὲν κανόνι χρώμεθα ἐν σμικροτάτοις ἐπιπέδοις, τῷ δὲ σπαρτίῳ ἐν μακροτέροις, καὶ ταῖς ῥάβδοις ἐν πολλῷ ἔτι μακροτέροις.

Πρότασις Β'.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω δὴ ἡ α β, δοθεῖσα εὐθεῖα, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον τὸ γ, δι' οὗ δεῖ εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν παράλληλον τῇ α β. Ἀπὸ τοῦ γ, σημείου ἀχθήτω ἐπὶ τῆς α β, ὡς ἔτυχεν ἡ γ δ, καὶ κέντροις μὲν τοῖς δ, καὶ γ, γραφήτωσαν δύο τόξα, τῷ αὐτῷ διαστήματι τὰ ε ζ, η θ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ θ η, ἀορίστου τὸ θ κ, τόξον ἴσον τῷ ε ζ, καὶ διὰ τῶν γ, καὶ κ, σημείων, ἀχθήτω ἡ λ μ, εὐθεῖα κατὰ τὴν ἀμφοτέρων, καὶ ἔσται αὕτη παράλληλος τῇ α β, κατὰ τὴν κζ': τοῦ α: Εὐκλείδου, ἡ γὰρ ὑπὸ ε δ ζ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ θ γ κ, κατὰ τὴν κατασκευήν.

Geom. Lib. 1. Fig. 10.

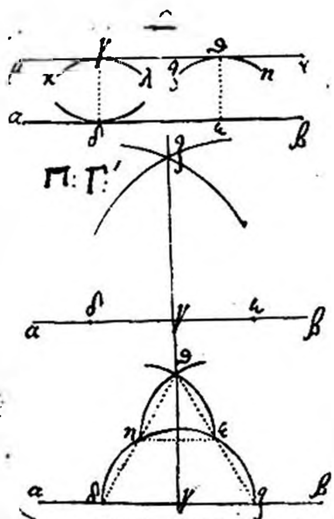


Ἄλλως. Ληφθήτω ἐπὶ τῆς α β, τυχὸν σημεῖον τὸ δ, καὶ κέντροις μὲν τοῖς δ γ, διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ δ γ, γραφήτωσαν τόξα τὰ γ ε, γ ζ, καὶ τὰ λοιπὰ γινέσθω ὡς πρότερον.

Ἄλλως. Κέντρῳ μὲν τῷ γ, διαστήματι δὲ τῷ τυχόντι, γραφήτω τόξον τέμνον τὴν α β, κατὰ τὸ δ, σημεῖον, ὡς κέντρου δὲ τοῦ δ, λαμβανομένου, γραφήτω καὶ ἕτερον τόξον τῷ αὐτῷ διαστήματι, καὶ τέμνον τὴν αὐτὴν α β, κατὰ τὸ ε, σημεῖον. εἶτα κέντροις μὲν τοῖς γ ε, διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ, γραφήτωσαν δύο τόξα πρὸς τὰ ἄνω τεμνόμενα ἀλλήλοις κατὰ τὸ ζ, διὰ δὲ τοῦ γ, καὶ ζ, διήχθω ἡ η θ, καὶ ἔσται παράλληλος τῇ α β, κατὰ τὴν λ δ': τοῦ α: τῶν Στοιχείων. εἰ γὰρ αἱ γ δ, ε ζ, ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, ὥσπερ καὶ αἱ δ ε, γ ζ, ὡς δῆλον ἐκ τῆς κατασκευῆς, ὥστε καὶ τὸ γ δ ε ζ, παραλληλόγραμμον ἔσται. Εἰ δὲ τὸ γ, σημεῖον ἐγγὺς εἴη τῆς α β, ληφθήτωσαν ἐπὶ τῆς αὐτῆς α β, γραμμῆς τὰ δ, καὶ ε, σημεῖα, ὡς ἔτυχεν, ἅπερ ὅσῳ μᾶλλον ἀλλήλων ἀφίστανται, τοσούτῳ καὶ κρείττονα εἰς κατασκευήν. εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ γ δ, γραφήτω τόξον τὸ ζ η. κέντρῳ δὲ τῷ γ, διαστήματι δὲ τῷ δ ε, γραφήτω ἕτερον τόξον τὸ θ κ, τέμνον τὸ ζ η, κατὰ τὸ χ, καὶ διὰ τῶν γ, καὶ χ, σημείων διήχθω ἡ μ ν, εὐθεῖα, καὶ ἔσται παράλληλος τῇ α β, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν πρότασιν.

Ἄλλως. Ἐκ μὲν τοῦ γ, δοθέντος σημείου ὡς ἀπὸ κέντρου γραφήτω τόξον ἀπτόμενον τῆς α β, κατὰ τὸ δ, ἐκ δὲ τοῦ ε, τυχόντος σημείου τῆς α β, γραφήτω τόξον τῷ αὐτῷ διαστήματι καθ' ἃ τὸ γ, ὑπάρχει μέρη, τὸ ζ η, ἀπὸ δὲ τοῦ γ, ἤχθω γραμμὴ ἀπτομένη τοῦ ζ η, τόξου κατὰ τὸ θ, καὶ αὕτη ἔσται παράλληλος τῇ α β. Διὰ δὲ τὸ ἀκριβέστερον γραφήτω καὶ ἀπὸ τοῦ δ, τὸ κ λ, τόξον τῷ αὐτῷ διαστήματι, καὶ ἀχθήτω ἡ μ ν, γραμμὴ, ὥστε ἅπτεσθαι ἑκατέρου τῶν κ λ, ζ η, τόξων, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθέν. καὶ γὰρ τὴν ιη': τοῦ γ': τοῦ Εὐκλείδου ἑκατέρα τῶν ὑπὸ γ δ ε, ε θ γ, ὀρθή ἐστιν, ἔστι δὲ καὶ τὴν αὐτὴν ὀρθὴ καὶ ἡ ὑπὸ δ γ θ, ἄρα καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ὑπὸ θ ε δ, ὁμοίως ὀρθή ἐστιν, ὥστε τὸ γ δ ε θ, ὀρθογώνιόν ἐστι, καὶ ἑπομένως παραλληλόγραμμον, παράλληλος ἄρα ἡ γ θ, τῇ δ ε. Ὅπως δ' ἔχωμεν εὐθεῖαν κύκλου ἀπτομένην ἀγαγεῖν, ἐδίδαξε μὲν Εὐκλείδης, εἰρήσεται δὲ καὶ ἐν τοῖς ἑξῆς.

Geom. Lib. I. Fig. 21.



Πρότασις Γ':

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

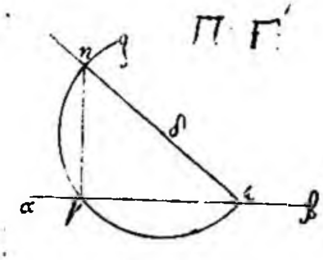
Πολλαχῶς καὶ αὕτη ἡ πρότασις δύναται προβάλλεσθαι, ἢ γὰρ τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τῆς δοθείσης ἔσται εὐθείας, ἢ μὴ, κἂν αὖθις ἐπὶ τῆς δοθείσης εἴη εὐθείας, ἢ ἐν μέσῳ ταύτης, ἢ ἐν τῷ πέρατι τῆς αὐτῆς ἔσται. Ὑποκείσθω δὴ α': εἶναι τὸ σημεῖον ἐπὶ τῆς εὐθείας, καὶ ἔστω δοθεῖσα μὲν εὐθεῖα ἡ α β, τὸ δὲ ἐπ' αὐτῆς δοθὲν σημεῖον τὸ γ, ἐν μέσῳ μέντοι τῆς αὐτῆς α β, ἀφ' οὗ δεῖ εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Εἰλήφθωσαν δὴ ἑκατέρωθεν τοῦ γ, ἴσα διαστήματα ὡς ἔτυχε, τὰ γ δ, γ ε, καὶ κέντροις μὲν τοῖς δ, καὶ ε, διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ γραφήτωσαν ἄνω, ἢ κάτω τῆς δοθείσης εὐθείας δύο τόξα τεμνόμενα κατὰ τὸ ζ, καὶ διὰ τοῦ ζ, καὶ γ, διήχθω ἡ γ ζ, εὐθεῖα, ἥτις κάθετος ἔσται ἐπὶ τῆς α β, κατὰ τὴν ια': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ.

Ἄλλως. Δοθήτω εὐθεῖα μὲν ἡ α β, σημεῖον δὲ τὸ γ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ γ, διαστήματι δὲ, ὡς ἔτυχε, τῷ γ δ, γραφήτω τόξον τὸ δ η ε ζ, τέμνον τὴν α β, κατὰ τὰ δ, καὶ ζ. Εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι τῷ αὐτῷ τμηθήτω τὸ ε η, τόξον, τοῦ αὐτοῦ δὲ διαστήματος φυλαττομένου κέντροις τοῖς ε, καὶ η, γραφήτωσαν δύο τόξα τεμνόμενα ἀλλήλοις κατὰ τὸ θ, καὶ διὰ τοῦ θ, καὶ γ, διήχθω ἡ θ γ, καὶ ἔσται αὕτη κάθετος ἐπὶ τῆς α β. ἡ γὰρ τοῦ κύκλου ἡμιδιάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ τοῦ ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἐγγραφομένου κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιε': τοῦ δ': Εὐ-

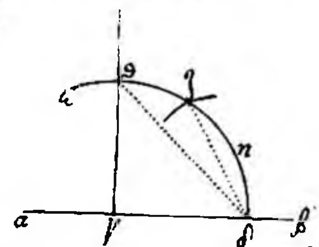
κλεί-

κλείδε, ὥστε ἕκαστος κύκλος εἰς ἓξ μέρη ἴσα τέμνεται τῇ ἰδίᾳ διαμέτρῳ. ἐπεὶ οὖν καὶ τὸ δεζ, ἡμικύκλιόν ἐστι, διαιρεθήσεται πάντως ὑπὸ τῆς γδ, ἡμιδιαμέτρου εἰς τρία ἴσα τὰ ζε, εη, ηδ, ἐπιζευχθεισῶν δὲ τῶν γη, ηθ, γε, εθ, ἔσται κατὰ τὴν η: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ ἴση ἡ ὑπὸ ηγθ, γωνία τῇ ὑπὸ εγθ, ἐπιζευχθεισῶν δὲ καὶ τῶν ηδ, εζ, ἔσται ἡ ὑπὸ δγη, ἴση τῇ ὑπὸ ζγε, κατὰ τὴν αὐτὴν, ὥστε καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ δγθ, ἴση ἔσται ὅλῃ τῇ ὑπὸ ζγθ, κατὰ τὸ β': ἀξίωμα τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἑπομένως ἡ θγ, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς αβ, κατὰ τὸν ι: ὅρον. ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα ἦκται γραμμή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

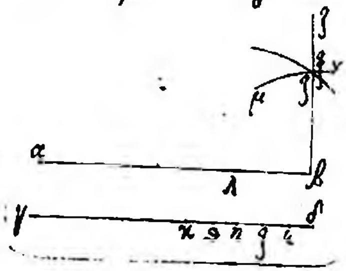
Geom. Lib. I. Fig. 12.



Ἄλλως. Ἔστω δοθεῖσα μὲν εὐθεῖα ἡ αβ, σημεῖον δ' ἐπ' αὐτῆς τὸ γ, ἀφ' οὗ δεῖ κάθετον ἐπὶ τῆς αβ, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Ληφθήτω δὴ τὸ δ, σημεῖον ἐκτὸς τῆς αβ, δοθείσης εὐθείας, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δγ, γραφήτω τόξον τὸ εγζ, τέμνον τὴν αβ, κατὰ τὰ γ, καὶ ε, ἀπὸ δὲ τοῦ ε, διὰ τοῦ δ, διήχθω ἡ εδη, τέμνουσα τὸ εγζ, τόξον κατὰ τὸ η. Εἶτα ἐπιζεύχθω ἡ γη, καὶ ἔσται αὕτη κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, κατὰ τὴν λα: τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἡ γὰρ ὑπὸ ηγε, γωνία ὀρθή ἐστι κατὰ τὴν αὐτὴν πρότασιν.



Ἄλλως. Δοθείσης ἤδη τῆς αβ, εὐθείας, καὶ τοῦ ἐπ' αὐτῆς σημείου τοῦ γ, ληφθήτω κέντρον τὸ αὐτὸ γ, διαστήματι δὲ ᾧ βούλει ἐπὶ τῆς αβ, γραφήτω τόξον τὸ δε. Εἶτα τῷ αὐτῷ διαστήματι, κέντρῳ δὲ τῷ δ, τμηθήτω τὸ δε, τόξον κατὰ τὸ ζ, καὶ διαιρεθήτω τὸ δζ, τόξον εἰς δύο ἴσα κατὰ τὸ η. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ δη, ἢ ηζ, τμηθήτω τὸ ζε, κατὰ τὸ θ, ἀπὸ δὲ τοῦ θ, ἐπὶ τὸ γ, ἤχθω ἡ θγ, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθὲν, τὸ γδθ, τεταρτημόριόν ἐστι κύκλου, ἡ μὲν γὰρ δζ, ἴση οὖσα τῇ δγ, κατὰ τὸ πόρ: τῆς ιε: τοῦ δ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὑποτείνει μοίρας κύκλου 60: ἡ δὲ θδ, 90: ὅσων ἐστὶ καὶ τὸ τεταρτημόριον, τοῦ κύκλου εἰς 360: διαιρουμένου, ὡς ῥηθήσεται.



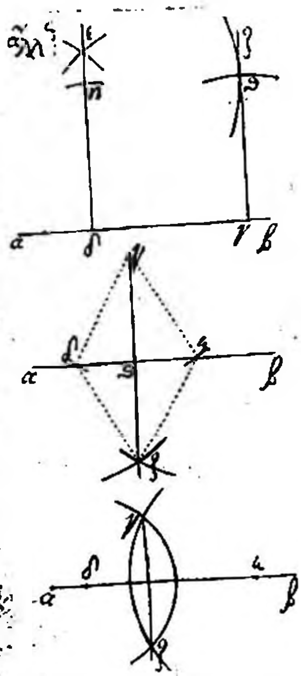
Ἄλλως. Ἔστω ἔτι δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ αβ, σημεῖον δ' ἐπ' αὐτῆς τὸ β, ἀκροπλεύτιον μέντοι, ἀφαιρεθήτω δὴ ἀπὸ τῆς γδ, ἑτέρας εὐθείας πέντε ἴσα μέρη τὰ δε, εζ, ζη, ηθ, θκ, καὶ ληφθήτωσαν ἐξ αὐτῶν μέρη τρία, ἅτινα μετενεχθήτωσαν ἐπὶ τῆς αβ, τεμνομένης κατὰ τὸ λ, εἶτα ληφθήτωσαν μέρη τέσσαρα, καὶ τῷ αὐτῷ διαστήματι, κέντρῳ δὲ τῷ β, γραφήτω τόξον τὸ μν. τούτου δὲ γεγραμμένου,

ληφθή-

ληφθήτωσαν καὶ τὰ πέντε μέρη ἀπὸ τῆς γ δ, καὶ τῷ τούτων διαστήματι κέντρῳ τῷ λ, γραφήτω ἕτερον τόξον τέμνον τὸ μ ν, κατὰ τὸ ξ, ἀπὸ δὲ τοῦ ξ, ἐπὶ τὸ β, ἤχθω ἡ ζ β, καὶ ἔσται κάθετος ἐπὶ τῆς α β, κατὰ τὴν μ': τοῦ α': Εὐκλείδου, ἐὰν δὲ λάβῃς καὶ ἑτέρους ἀριθμοὺς ἀναλόγως ἔχοντας τοῖς ῥηθεῖσι τὸ αὐτὸ πάντως γενήσεται. Ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς ξ λ, ἔσται τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν λ β, β ζ. καὶ δι' αὐτὸ τοῦτο ἡ ὑπὸ λ β ζ, γωνία ὀρθή ἐστι κατὰ τὴν μη': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ.

Ἄλλως. Δοθείσης ἤδη τῆς α β, σημείου δὲ τοῦ γ, ἀνεστάσθω ἀπὸ τοῦ δ, τυχόντος σημείου κάθετος ἐπὶ τῆς αὐτῆς α β, ἡ δ ε, κατά τινα τῶν ἀνωτέρω τρόπον, καὶ ἀπὸ τοῦ γ, σημείου τῇ δ ε, εὐθεῖα παράλληλος ἤχθω ἡ γ ζ, κατὰ τὴν λα': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, καὶ ἔσται δήπουθεν κάθετος ἐπὶ τῆς α β, κατὰ τὴν κθ': τοῦ αὐτοῦ. ἢ οὕτω, ληφθήτω ἡ δ η, ἴση τῇ δ γ, καὶ κέντροις μὲν τοῖς η, καὶ γ, διαστήματι δὲ τῇ δ γ, ἢ δ η, γραφήτωσαν δύο τόξα τεμνόμενα κατὰ τὸ θ, δι' οὗ ἤχθω ἡ γ ζ, καὶ ἔσται κάθετος ἐπὶ τῆς α β, κατὰ τὴν μϛ': τοῦ αὐτοῦ. Δυνατὸν δὲ ἀπὸ τῶν περάτων τινὸς εὐθείας κάθετον ἐπ' αὐτῆς ἀγαγεῖν καὶ κατὰ τὸν γ': καὶ δ': τρόπον τῆς παρούσης προτάσεως. ἐπειδὰν δὲ ἐκτὸς ᾖ τῆς εὐθείας τὸ σημεῖον, ὧδε ἡ πρᾶξις γενήσεται.

Geom. Lib. 1. Fig. 13.



Ἔστω τοίνυν ἡ α β, δοθεῖσα εὐθεῖα, σημεῖον δὲ τὸ γ, ἐκτὸς μέντοι τῆς αὐτῆς α β, ἀφ' οὗ δεῖ κάθετον ἐπὶ τῆς α β, ἀγαγεῖν, κέντρῳ μὲν δὴ τῷ γ, διαστήματι δὲ τῷ τυχόντι τόξα γραφήτωσαν ἐπὶ τῆς α β, τέμνοντα ταύτην κατὰ τὰ δ, καὶ ε, σημεῖα, κέντροις δὲ τοῖς αὐτοῖς δ, καὶ ε, σημείοις, καὶ διαστήματι ᾧ βούλει, τόξα γραφήτωσαν ὑπὸ τὴν α β, τεμνόμενα κατὰ τὸ ζ. εἶτα ἐπιζεύχθω ἡ γ ζ, τέμνουσα τὴν α β, κατὰ τὸ θ, καὶ ἔσται πάντως κάθετος ἐπ' αὐτῆς. ἐπιζευχθεισῶν γὰρ τῶν γ δ, γ ε, ζ δ, ζ ε, δείκνυται διὰ μὲν τῆς η': τοῦ α': τῶν τοῦ Εὐκλείδου, ἡ ὑπὸ δ γ ζ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ε γ ζ. αἱ γὰρ δ γ, ε γ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ κατὰ τὴν κατασκευήν, κοινὴ δὲ ἡ γ ζ, καὶ βάσεις αἱ δ ζ, ε ζ, ὁμοίως ἴσαι. διὰ δὲ τῆς δ': τοῦ αὐτοῦ ἡ ὑπὸ δ θ γ, γωνία δείκνυται ἴση τῇ ὑπὸ ε θ γ. αἱ δύο γὰρ δ γ, γ θ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς ε γ, γ θ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δ γ θ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ε γ θ.

Ἄλλως. Δοθείσης τῆς α β, εὐθείας, καὶ σημείου τοῦ γ, ληφθήτωσαν ἑκατέρωθεν τῆς αὐτῆς α β, τυχόντα σημεῖα τὰ δ, καὶ ε, καὶ κέντροις μὲν τοῖς δ ε, διαστήμασι δὲ τοῖς δ γ, ε γ, τόξα γραφήτωσαν τεμνόμενα κατὰ τὰ γ, καὶ ζ, καὶ ἐπιζευχθήτω ἡ γ ζ, ἥτις κάθετος ἔσται ἐπὶ τῆς α β. ἡ δεῖξις ἡ αὐτὴ τῇ ἀνωτέρα.

Εἰ δὲ

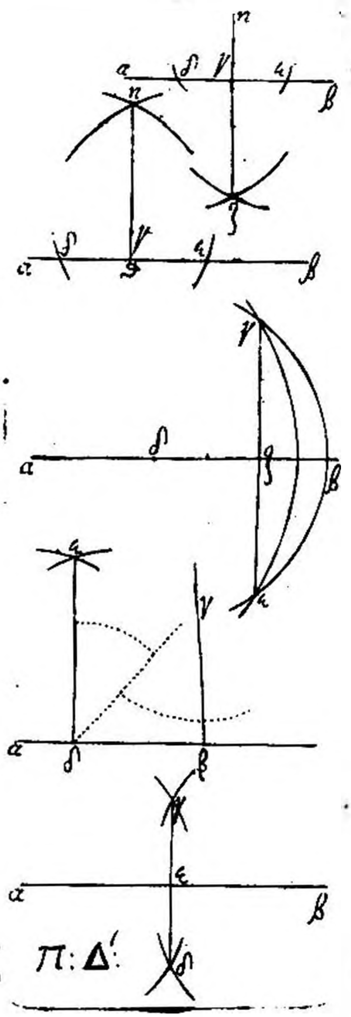
Εἰ δέ γε τὸ γ, σημεῖον προσεγγίζει λίαν τῇ α β, δοθείσῃ εὐθείᾳ· κέντρῳ μὲν τῷ γ, διαστήματι δὲ τῷ τυχόντι, τμηθήτω ἡ α β, κατὰ τὰ δ, καὶ ε, ὡς καὶ πρότερον. εἶτα κέντροις τοῖς δ, καὶ ε, διαστήματι δὲ μείζονι γραφήτωσαν κάτω τόξα τεμνόμενα κατὰ τὸ ζ, τὰ δὲ λοιπὰ γενέσθω ὡς πρότερον, καὶ ἕξεις τὸ προσταττόμενον. ὁ λόγος ἤδη σαφὴς ἐκ τῶν ἀνωτέρω.

Geom. Lib. I. Fig. 14.

Ἐὰν δὲ ἡ α β, δοθεῖσα εὐθεῖα ἐν τῷ πέρατι ᾖ τοῦ ἐπιπέδου, τμηθείσης τῆς α β, κατὰ τὰ δ ε, ὡς πρότερον. Ληφθήτωσαν τὰ αὐτὰ δ ε, σημεῖα ὡς κέντρα, διαστήματι δὲ τῷ τυχόντι γραφήτωσαν δύο τόξα ἄνω τεμνόμενα κατὰ τὸ η, καὶ διὰ τοῦ η, καὶ γ, ἤχθω ἡ γ θ, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθέν.

Ἐὰν δὲ τὸ γ, δοθὲν σημεῖον πρὸς τὸ πέρας ἀφορᾷ τῆς α β, ληφθήτωσαν δύο τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τῆς α β, καθ' ἓν αὐτῆς μέρος δὸς εἰπεῖν τὰ α δ, καὶ κέντροις μὲν τοῖς α, καὶ δ, διαστήμασι δὲ τοῖς α γ, καὶ δ γ, γραφήτωσαν ἄνω καὶ κάτω τόξα τεμνόμενα κατὰ τὰ γ, καὶ ε, καὶ ἤχθω ἡ γ ε, τέμνουσα τὴν α β, κατὰ τὸ ζ, ἥτις κάθετος ἔσται ἐπὶ τῆς α β, κατὰ τὴν γ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ.

Εἰ δὲ πλάγιαιον ἔτι δοθεῖσα εὐθεῖα α β, ἐν τῷ πέρατι ᾖ τοῦ ἐπιπέδου, καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον γ, πρὸς τὸ πέρας ἀτενίζῃ τῆς α β, εὐθείας, ἀνεστάσθω κατά τινα τῶν προτέρων τρόπων κάθετος ἐπὶ τῆς α β, ἡ δ ε, ἀπὸ τοῦ δ, τυχόντος σημείου, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀπὸ τοῦ γ, ἤχθω ἡ γ β. ὁ λόγος σαφὴς διὰ τῆς κ θ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὡς προείρηται.



Πρότασις Δ':

Τὴν δοθεῖσαν πεπερασμένην εὐθεῖαν δίχα τεμεῖν.

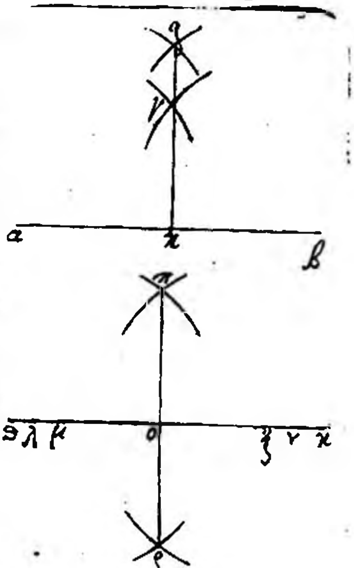
Δοθήτω τοίνυν εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ α β, καὶ ζητηθήτω τμηθῆναι δίχα. Κέντροις μὲν δὴ τοῖς α β, πέρασι τῆς αὐτῆς, διαστήματι δ' ᾧ βούλει τόξα γραφήτωσαν ἑκατέρωθεν τεμνόμενα κατὰ τὰ γ, καὶ δ, σημεῖα, καὶ διὰ τῶν γ, καὶ δ, διήχθω ἡ γ δ, εὐθεῖα τέμνουσα τὴν α β, κατὰ τὸ ε, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθέν. Ἡ γὰρ δ γ, εὐθεῖα κατὰ τὰ εἴδη προειρημένα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς α β, καὶ κατὰ τὴν ι: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ δίχα αὐτὴν τέμνει.

Εἰ δέ

Εἰ δέ γε ἡ τμηθησομένη εὐθεῖα ἐν τῷ πέρατι τοῦ ἐπιπέδου ᾖ, ὡς μὴ δύνασθαι ἑκατέρωθεν τῆς αὐτῆς τόξα γράφεσθαι, κέντροις μὲν τοῖς α, καὶ β, διαστήματι δὲ τῷ τυχόντι γραφήτωσαν τόξα τεμνόμενα κατὰ τὸ γ, εἶτα μείζονι, ἢ ἐλάττονι τοῦ προτέρου διαστήματι γραφήτωσαν κατὰ τὰ αὐτὰ μέρη ἕτερα τόξα τεμνόμενα κατὰ τὸ ζ, καὶ διὰ τῶν ζ, καὶ γ, διήχθω ἡ ζε, καὶ τμηθήσεται ἡ αβ, δίχα κατὰ τὸ κ, ἡ δεῖξις ἡ αὐτὴ τῇ ἀνωτέρω.

Ἐὰν δὲ μεγίστη ᾖ, ὥστε μὴ δύνασθαι τὸν διαβήτην μεῖζον τοῦ ἡμίσεως ταύτης ἐκτανθῆναι, ἀφαιρεθήτωσαν ἑκατέρωθεν τῆς αὐτῆς εὐθείας ἴσα μέρη τῷ τε πλήθει καὶ μεγέθει, τὸ δὲ ἐναπολειπόμενον μέσον ταύτης μέρος τμηθήτω δίχα κατά τινα τῶν εἰρημένων τρόπων, καὶ τμηθήσεται ἡ πᾶσα εἰς δύο ἴσα, κατὰ τὸ β': ἀξίωμα, ὡς ἡ θκ, ἀφ' ἧς ἀφῄρηνται μὲν ἑκατέρωθεν τὰ θλ, λμ, κν, νξ, ἴσα μέρη, τὸ δὲ μξ, τέτμηται δίχα κατὰ τὸ ο, διὰ τῆς πρ, γραμμῆς.

Geom. Lib. I. Fig. 15.



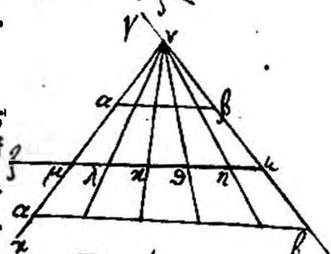
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τῶν εἰρημένων δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅπως ἔχωμεν διαιρεῖν τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς πλείονα τῶν δύο ἴσα μέρη κατὰ τὸ διπλάσιον ἀεὶ χωροῦντα, οἷον εἰς τέσσαρα, ὀκτὼ, ἑκκαίδεκα, δύο καὶ τριάκοντα, τέσσαρα καὶ ἑξήκοντα, καὶ τὰ λοιπά. Εἰς δύο γὰρ τὸ κατ' ἀρχὰς τῆς ὅλης διαιρεθείσης, ἐὰν ἑκάτερον ταύτης μέρος δίχα τμηθῇ, διαιρεθήσεται εἰς τέσσαρα, ἐὰν δὲ καὶ τούτων ἕκαστον τὸ αὐτὸ πάθῃ, διαιρεθήσεται εἰς ὀκτὼ, καὶ τούτου ἐφεξῆς γενομένου διαιρεθήσεται ἀεὶ κατὰ τὸ διπλάσιον.

Πρότασις Ε':

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην εἰς ὁσαδηποτοῦν μέρη τεμεῖν.

Κείσθω δὴ τὴν αβ, εὐθεῖαν πεπερασμένην εἰς πέντε ἴσα μέρη διελεῖν. Διὰ τοῦ β, σημείου ἤχθω ἡ δγ, εὐθεῖα τὴν τυχοῦσαν μετὰ τῆς αβ, ποιοῦσα γωνίαν, καὶ εἰλήφθω ἐπ' αὐτῆς τυχὸν σημεῖον τὸ ε, ἄνω, ἢ κάτω τῆς δοθείσης αβ, καὶ ἀπὸ τοῦ ε, παράλληλος τῇ αβ, ἤχθω ἡ εζ, ἀορίστως ἐπεκτεινομένη, ἀφ' ἧς ἀφῃρήσθωσαν πέντε μέρη ἴσα, τὰ εη, ηθ, θκ, κλ, λμ. Εἶτα ἀπὸ τοῦ α, διὰ τοῦ μ, ἤχθω ἡ αν, συμβάλλουσα τῇ δγ, κατὰ τὸ ν, ἀπὸ δὲ τοῦ ν, δι' ἑκάστου σημείου τῆς εζ, ἤχθωσαν εὐθεῖαι ἐπὶ τῆς αβ,



Π: Ε'

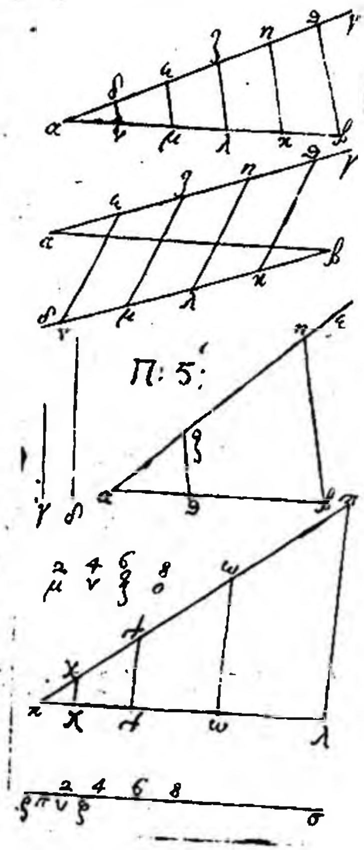
καὶ

καὶ τμηθήσεται εἰς πέντε μέρη ἴσα, ὥσπερ καὶ ἡ ε μ, κατὰ τὴν ι: τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχειωτοῦ.

Ἀπὸ τοῦ α, σημείου ἤχθω ἡ α γ, τυχοῦσαν ποιοῦσα γωνίαν, καὶ ἀφῃρήθωσαν ἀπὸ τῆς α γ, τὰ α δ, δ ε, ε ζ, ζ η, η θ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ θ β, καὶ ταύτῃ παράλληλοι ἤχθωσαν ἀφ' ἑκάστου σημείου τῆς α γ, αἱ η κ, ζ λ, ε μ, δ ν, τέμνουσαι τὴν α β, καὶ διαιρεθήσεται πάντως κατὰ τὴν προειρημένην πρότασιν ἡ α β, εἰς πέντε μέρη ἴσα.

Ἄλλως. Ἀπό τε τοῦ α, καὶ β, σημείου τῆς δοθείσης α β, εὐθείας ἤχθωσαν παράλληλοι εὐθεῖαι αἱ α γ, β δ, καὶ ἀφαιρεθήτωσαν ἀφ' ἑκατέρας τῶν α γ, β δ, τέσσαρα μέρη ἴσα ἀλλήλοις, τὰ α ε, ε ζ, ζ η, η θ, β κ, κ λ, λ μ, μ ν, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ε ν, ζ μ, η λ, θ κ, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθέν. Δείκνυται διὰ τῆς αὐτῆς ι: προτάσεως τοῦ ϛ': καὶ β': τοῦ αὐτοῦ. Δυνατὸν δέ τοι γενέσθαι καὶ διά τινων Γεωμετρικῶν ὀργάνων, ὧν τήν τε κατασκευὴν καὶ χρῆσιν ἐν τῷ β': μέρει τοῦ παρόντος, κατὰ τὸ δυνατὸν ἑρμηνεύσομεν.

Geom. Lib. 1. Fig. 16.



Πρότασις ϛ':

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην κατὰ τὸν δοθέντα λόγον τεμεῖν.

Κείσθω τὴν α β, δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν κατὰ τὸν λόγον τοῦ γ, μεγέθους ἐπὶ τὸ δ. Ἀπὸ τοῦ α, τοίνυν σημείου ἐξαχθήτω ἡ α ε, εὐθεῖα κατὰ τὴν τυχοῦσαν γωνίαν, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς αὐτῆς α ε, τὸ μὲν α ζ, μέρος ἴσον τῷ γ, τὸ δὲ ζ η, ἴσον τῷ δ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ β η, ταύτῃ δὲ παράλληλος ἤχθω ἡ ζ θ, καὶ τμηθήσεται δήπουθεν ἡ α β, κατὰ τὸ θ, ὥστε ἔχειν τὸ α θ, πρὸς τὸ θ β, ὡς ἔχει τὸ γ, πρὸς τὸ δ, κατὰ τὴν β': τοῦ ῥηθέντος ϛ':

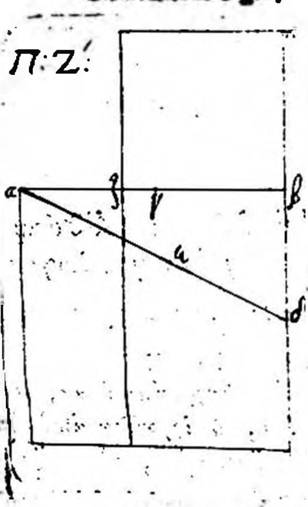
Τοῦτον τὸν τρόπον δύναται διαιρεῖσθαι ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ εἰς πλείονα μέρη κατὰ τὴν δοθεῖσαν ὁποιανδηποτοῦν ἀναλογίαν, γεωμετρικὴν φημί, ἀριθμητικήν, καὶ ἁρμονικήν, ἀφαιρουμένων τῶν μερῶν τῆς ἐξαγομένης εὐθείας ἴσων τοῖς τε πλήθει καὶ μεγέθει τοῖς δοθεῖσι μεγέθεσιν, ἢ ἀριθμοῖς. Οἷον κείσθω ἐπὶ παραδείγματος τεμεῖν τὴν κ λ, εὐθεῖαν εἰς μέρη φέρ' εἰπεῖν τέσσαρα ἀριθμητικῶς ἀνάλογα κατὰ τοὺς μ ν ξ ο, ἀριθμούς. Ἐξαχθήτω δὴ ἀπὸ τοῦ κ, ἡ κ π, εὐθεῖα καὶ τὴν τυχοῦσαν γωνίαν, ἀχθείσης δὲ καὶ τῆς ρσ, ἀορίστως, ἀφῃρήσθω ἀπ' αὐτῆς μέρη ὀκτὼ ἴσα ἀλλήλοις τὰ ρτ, τυ, υφ, καὶ λοιπά. Εἶτα ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τῆς κπ, τὸ μὲν κχ, ἴσον τῷ ρ2, τὸ δὲ χψ, ἴσον τῷ ρ4, τὸ δὲ ψω, ἴσον τῷ ρ6, καὶ τὸ ωπ, ἴσον τῷ ρ8, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ πλ, καὶ ταύτῃ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ωω, ψψ, χχ, καὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν τοῦ ς': Εὐκλείδου διαιρεθήσεται ἡ κλ, ἀναλόγως τῇ κπ, ἧς τὰ μέρη ἀνάλογα εἴληπται τοῖς μηξο, ἀριθμοῖς.

Πρότασις Ζ':

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Ἔστω ἡ αβ, δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη, ἣν δεῖ κατ' ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν. Τμηθήτω τοίνυν δίχα ἡ αβ, κατὰ τὸ γ, καὶ ἀπὸ τοῦ β, κάθετος ἐπ' αὐτῆς συσταθήτω ἡ βδ, ἴση τῇ βγ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ αδ, ἀφ' ἧς ἀφαιρεθήτω ἡ δε, ἴση τῇ βδ, ἢ βγ, τὸ δὲ ἐναπολειπόμενον εα, μετενεχθήτω ἐπὶ τῆς βα, καὶ τεμεῖ αὐτὴν κατὰ τὸ ζ, ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον. ὥστε ὡς ἔχει ἡ αβ, πρὸς τὴν βζ, οὕτως ἔχειν καὶ τὴν βζ, πρὸς τὴν ζα. κατὰ γὰρ τὴν ια: τοῦ β': Στοιχειωτοῦ, πληρωθέντος τοῦ σχήματος, ἐπειδὴ περ κατ' ἐκείνην ἡ δη, λαμβάνεται ἴση τῇ αδ, ἐὰν ἀπὸ τῆς αὐτῆς αδ, ἀφαιρεθῇ ἡ δε, ἴση τῇ δβ, λοιπὴ ἡ εα, ἴση ἔσται τῇ βη, τῇ δὲ βη, ἴση ἐστὶν ἡ βζ, ἄρα καὶ ἡ αε, ἴση ἔσται τῇ βζ. Ὅθεν διὰ τὸ εὐχερέστερον ἀρκεῖ μόνον τοῦ αβδ, συσταθέντος τριγώνου τὴν δε, ἀφαιρεῖν ἀπὸ τῆς αδ, τὸ δὲ λοιπὸν αὐτῆς μέρος μεταφέρειν ἐπὶ τῆς αβ, καὶ ἔσται τὸ προστεταγμένον.

Geom. Lib. 1. Fig. 17.



Πρότασις Η':

Τῆς δοθείσης εὐθείας, ἧς ἓν τῶν ἄκρων δίδοται, τὰ λοιπὰ δύο ἀνάλογα μέρη εὑρεῖν.

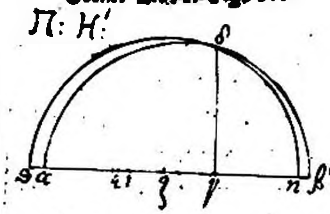
Δοθείσης ἤδη τῆς αβ, εὐθείας καὶ τοῦ γβ, μέρους αὐτῆς, ζητηθήτωσαν τὰ λοιπὰ δύο, ὥστε ἀναλόγως ἔχειν τῷ γβ. Εἰς ἐπίταξιν δὲ τούτων, εὑρεθήτω ἡ μέση ἀνάλογος τῶν αγ, γβ, μερῶν, καὶ ἔστω αὕτη ἡ γδ, εἶτα εἰλήφθω ἡ γε, ἴση τῇ γβ, τῆς δὲ γε, δίχα διῃρημένης κατὰ τὸ ζ, γραφήτω ἡμικύκλιον ἐπὶ τῆς αβ, ἐκτεινομένης, κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζδ, γραφήτω ἡμικύκλιον τὸ θδη, τέμνον τὴν αβ, κατὰ τὰ θ, καὶ η, καὶ ληφθήτω ἡ γι, ἴση τῇ γη, καὶ ἔσται ὡς ἡ αι,

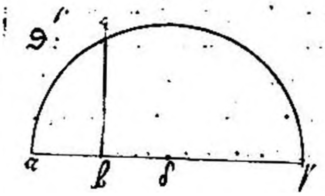
πρὸς

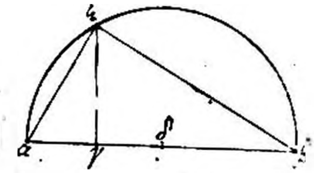
πρὸς τὴν ιγ, οὕτως ἡ ιγ, πρὸς τὴν γβ. Δείκνυται, ἐπεὶ ἡ γδ, μέση ἀνάλογός ἐστι τῶν αγ, γβ, ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν αγ, γβ, ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γδ, τετραγώνῳ κατὰ τὴν ιζ΄: τοῦ ϛ΄: τῶν Στοιχείων, ἔστι δὲ καὶ ἡ αὐτὴ γδ, μέση ἀνάλογος καὶ τῶν θγ, γη, ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν θγ, γη, ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γδ, τετραγώνῳ κατὰ τὴν αὐτήν, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν θγ, γη, ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αγ, γβ, ὀρθογωνίῳ, καὶ κατὰ τὴν ιϛ΄: τοῦ αὐτοῦ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι θγ, αγ, γβ, γη, ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ὡς ἔχει ἡ θγ, πρὸς τὴν αγ, ἔχει καὶ ἡ γβ, πρὸς τὴν γη, καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ θγ, πρὸς τὴν γβ, ἡ αγ, πρὸς τὴν γη. εἴληπται δὲ ἡ μὲν γι, ἴση τῇ γβ, ἡ δὲ γε, ἴση τῇ γη, ἄρα ὡς ἡ θγ, πρὸς τὴν γι, ἔχει καὶ ἡ αγ, πρὸς τὴν γε, καὶ διαιρέσει, ὡς ἡ θι, πρὸς τὴν ιγ, ἡ αε, πρὸς τὴν εγ, ἀλλὰ τῇ ιγ, ἴση ἐστὶν ἡ γβ, πάντως γε ὡς ἡ αε, πρὸς τὴν εγ, οὕτως ἔχει καὶ ἡ θι, πρὸς τὴν γβ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ιγ, ἴση τῇ θι, ὡς δειχθήσεται, ἄρα ὡς ἡ αε, πρὸς τὴν εγ, οὕτως ἔχει καὶ ἡ εγ, πρὸς τὴν γβ, ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ὅτι δὲ ἡ θι, ἴση ἐστὶ τῇ ιγ, δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ζ, κέντρον ἐστὶ τοῦ θηδ, ἡμικυκλίου, πάντως γε ἡ θζ, ἴση ἐστὶ τῇ ζη. Εἴληπται δὲ καὶ ἡ ιζ, ἴση τῇ ζγ, ἀφαιρουμένων ἄρα τῶν ιζ, ζγ, ἀπὸ τῶν θζ, ζη, αἱ λοιπαὶ θι, γη, ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ τῇ γη, ἴση εἴληπται ἡ γι, ἡ θι, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ γι. Τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας, ἧς τὸ τῶν ἄκρων δέδοται. τὰ λοιπὰ δύο ἀνάλογα εὕρηται μέρη, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Geom. Lib. I. Fig. 18.







Πρότασις Θ':

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν μέσην ἀνάλογον Γεωμετρικῶς προσευρεῖν.

Κείσθωσαν ἐπ᾽ εὐθείας αἱ δοθεῖσαι αβ, βγ, εὐθεῖαι, καὶ τμηθήτω ἡ ὅλη αγ, δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δα, ἢ δγ, ἡμικύκλιον ἐπ᾽ αὐτῆς γραφήτω τὸ αεγ, ἀπὸ δὲ τοῦ β, ἀνεστᾶσα κάθετος ἐπὶ τῆς αγ, ἡ βε, καὶ αὕτη ἔσται μέση ἀνάλογος τῶν αβ, βγ, δοθεισῶν εὐθειῶν κατὰ τὴν ιγ΄: τοῦ ϛ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ.

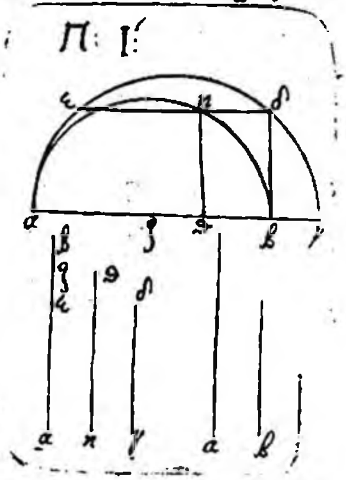
Ἄλλως. Ἔστωσαν δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, ὧν δεῖ μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν Γεωμετρικῶς. Διαιρεθήτω δὴ ἡ αβ, δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ ἀναγεγράφθω ἐπ᾽ αὐτῆς τὸ αεβ, ἡμικύκλιον, ἀπὸ δὲ τοῦ γ, ἀνεστάσθω κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ γε, τέμνουσα τὸ αεβ, ἡμικύκλιον κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε, εβ, καὶ ἡ *ε β, μέση ἔσται ἀνάλογος τῶν α β, β γ, κατὰ τὸ β': πόρισμα τῆς η': τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχειωτοῦ. Εἰδέ γε βούλει μέσην ἀνάλογον εὑρεῖν τῶν α β, α γ, ἕξεις πάντως κατὰ τὸ αὐτὸ πόρισμα τὴν α ε, εὐθεῖαν.*

Πρότασις Ι':

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀναλόγους εὑρεῖν εἰς διηχῆ ἀναλογίαν.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ α β, β γ, καὶ ζητηθήτωσαν αἱ δύο μέσοι αὐτῶν ἀνάλογοι εἰς διηχῆ ἀναλογίαν. Εὑρεθήτω δὴ ἡ μέση ἀνάλογος τῶν α β, β γ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, καὶ ἔστω αὕτη ἡ β δ, ἀπὸ δὲ τοῦ δ, σημείου ἤχθω παράλληλος ἡ δ ε, τῇ α γ, καὶ διαιρεθήτω ἡ α β, δίχα κατὰ τὸ ζ, καὶ γραφήτω ἐπ' αὐτῆς τὸ α η β, ἡμικύκλιον, τέμνον τὴν δ ε, κατὰ τὸ η, καὶ ἀπὸ τοῦ η, πιπτέτω κάθετος ἡ η θ, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθέν, ἡ γὰρ β δ, μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν α β, β γ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν α β, β γ, ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β δ, τετραγώνῳ, ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν α θ, θ β, ἴσον ἐστὶ διὰ τὰ αὐτὰ τῷ ἀπὸ τῆς θ η, τετραγώνῳ, ἡ δὲ θ η, ἴση τῇ β δ, κατὰ τὴν λδ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν α θ, θ β, ὀρθογών: ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β δ, τετραγώνῳ, ἑπομένως δὲ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν α β, β γ, ὀρθογωνίῳ, τέσσαρα ἄρα μεγέθη τὰ α β, β γ, α θ, θ β, ἀνάλογα ἔσονται, ἐὰν τὰ α β, β γ, ἄκρα ληφθῶσι, μέσα δὲ τὰ α θ, θ β, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν α θ, οὕτως ἡ θ β, πρὸς τὴν β γ, ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον. Δεῖ δὲ τὴν β γ, μὴ μείζονα εἶναι τῆς ἡμισείας τῆς ζ β. δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν α β, β γ, εὕρηνται αὐτῶν δύο μέσοι ἀνάλογοι εἰς διηχῆ ἀναλογίαν αἱ α θ, θ β, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Geom. Lib. I. Fig. 19.



Πρότασις ΙΑ':

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν μέσην ἀνάλογον Ἀριθμητικῶς εὑρεῖν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι α β, γ δ, εὐθεῖαι, ὧν δεῖ μέσην ἀνάλογον ἀριθμητικῶς εὑρεῖν. Ἀφαιρεθήτω οὖν ἀπὸ τῆς μείζονος α β, ἡ α ε, ἴση τῇ ἐλάττονι γ δ, καὶ τὸ λοιπὸν ε β, δίχα τμηθήτω κατὰ τὸ ζ, τῇ δὲ α ζ, ἴση εἰλήφθω ἡ η θ, καὶ αὕτη ἔσται πάντως μέση ἀνάλογος ἀριθμητικῶς τῶν α β, γ δ, ἴσῃ γὰρ ὑπεροχῇ ὑπερέχει ἡ μὲν α β, τῆς η θ, ἡ δὲ η θ, τῆς γ δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

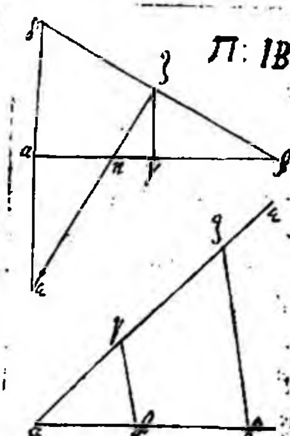
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἡ ἀριθμητικῶς μέση ἀνάλογος εὐθεῖα, ἡμίσειά ἐστι τῶν ἄκρων συναπτομένων.

Πρότασις ΙΒ':

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν μέσην ἀνάλογον Ἁρμονικῶς εὑρεῖν.

Τῶν αβ, βγ, ἤδη δοθεισῶν εὐθειῶν, καὶ τὸ αὐτὸ β, πέρας ἐχουσῶν, ζητείσθω ἡ μέση αὐτῶν ἁρμονικῶς ἀνάλογος. Εἰς εὕρεσιν δὲ ταύτης συσταθήτω κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ δε, καὶ ληφθήτω ἡ αδ, ἴση τῇ αε. Εἶτα ἐπιζεύχθω ἡ δβ, καὶ ἀπὸ τοῦ γ, ἀνεστάσθω κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ γζ, τέμνουσα τὴν δβ, κατὰ τὸ ζ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ζε, τέμνουσα καὶ αὕτη τὴν αγ, κατὰ τὸ η, καὶ ἡ βη, ἔσται ἡ ζητουμένη. Τῶν γὰρ δαβ, ζβγ, τριγώνων κατὰ τὴν δ': τοῦ ς': τοῦ Στοιχειωτοῦ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ, ὥστε ὡς ἔχει ἡ βα, πρὸς τὴν αδ, οὕτως ἔχει καὶ ἡ βγ, πρὸς τὴν γζ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν βγ, ἡ δα, ἤτοι ἡ αε, πρὸς τὴν γζ. Αὖθις τῶν αηε, γηζ, τριγώνων ἀνάλογον ὁμοίως εἰσὶν αἱ πλευραὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν, ἄρα ὡς ἔχει ἡ αε, πρὸς τὴν αη, ἔχει

Geom. Lib. 1. Fig. 20.



καὶ ἡ γζ, πρὸς τὴν γη, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ αε, πρὸς τὴν γζ, ἡ αη, πρὸς τὴν ηγ. ὡς δὲ ἡ αε, πρὸς τὴν γζ, δέδεικται ἔχειν καὶ ἡ βα, πρὸς τὴν βγ, ἄρα ὡς ἡ αβ, α: πρὸς τὴν βγ, γ': οὕτως ἔχει καὶ ἡ αη, διαφορὰ α: πρὸς τὴν μέσην, πρὸς τὴν ηγ, διαφορὰν μέσης παρὰ τὴν γ': τοῦτο δὲ ἴδιον τῆς ἁρμονικῆς ἀναλογίας, ὡς δῆλον ἐπὶ τοῦ θεωρητικοῦ τῆς Ἀριθμητικῆς μέρους, ἄρα αἱ αβ, βη, βγ, εὐθεῖαι ἁρμονικῶς εἰσιν ἀνάλογοι, καὶ ἑπομένως ἡ βη, μέση ἀνάλογός ἐστι τῶν αβ, βγ, κατὰ τὴν ἁρμονικὴν ἀναλογίαν. δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν αβ, βγ, εὕρηται μέση ἀνάλογος ἁρμονικῶς ἡ βη. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ΙΓ':

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τρίτην ἀνάλογον Γεωμετρικῶς εὑρεῖν.

Δεδόσθωσαν αἱ εὐθεῖαι αἱ αβ, αγ, καὶ ζητείσθω γ': αὐτῶν ἀνάλογος Γεωμετρικῶς. Συμπιπτέτωσαν δὴ αἱ αβ, αγ, κατὰ τὸ α, τὴν τυχοῦσαν ποιοῦσαι γωνίαν, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν κατὰ τὰ δ, καὶ ε. Εἶτα ληφθήτω ἡ βδ, ἴση τῇ αγ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ γβ, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀπὸ τοῦ δ, ἤχθω ἡ δζ, καὶ ἡ γζ, τρίτη ἔσται ἀνάλογος τῶν αβ, αγ. κατὰ γὰρ τὴν β': τοῦ ς': τοῦ Στοιχειωτοῦ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, ἔχει καὶ ἡ αγ, πρὸς τὴν γζ, ἀλλ' ἡ βδ, εἴληπται ἴση τῇ αγ,

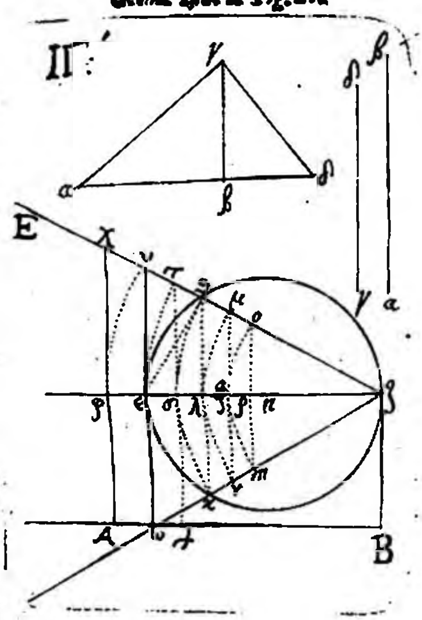
ἄρα

ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν αγ, ἡ αγ, πρὸς τὴν γζ. δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Ἄλλως. Κείσθωσαν αἱ αβ, βγ, δοθεῖσαι εὐθεῖαι πρὸς ὀρθάς, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ αγ, τῆς δὲ αβ, ἐκβληθείσης συμπεσάτω ἀπὸ τοῦ γ, σημείου κάθετος ἐπὶ τῆς αγ, ἡ γδ, καὶ ἡ βδ, γʹ. ἀνάλογος ἔσται τῶν αβ, βγ, ὥστε ἔχειν τὴν αβ, πρὸς τὴν βγ, ὡς ἡ αὐτὴ βγ, πρὸς τὴν βδ, κατὰ τὸ αʹ. πόρισμα τῆς ηʹ. τοῦ ϛʹ. τοῦ Στοιχειωτοῦ.

Εἰ δὲ αἱ δοθεῖσαι εἴησαν αἱ βδ, δγ, ἔσται αὐτῶν γʹ. ἀνάλογος ἡ βα. Εἰ δὲ ζητηθῇ καὶ δʹ. ἀνάλογος παρεωραμένης τῆς αʹ. εὑρεθήτω γʹ. ἀνάλογος τῶν λοιπῶν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Εἰ δέ γε καὶ εʹ. ζητηθῇ παροραθήτω ἡ βʹ. καὶ εὑρεθήτω τῶν λοιπῶν γʹ. ἀνάλογος, καὶ τοῦτο γενέσθω ἐπ' ἄπειρον.

Ἄλλως. Δοθεισῶν ἤδη τῶν αβ, γδ, καὶ ζητηθείσης γʹ. αὐτῶν ἀνάλογου, ληφθήτω ἡ εζ, ἴση τῇ αβ, μείζονι. δίχα δὲ ταύτης τμηθείσης κατὰ τὸ η, γραφέτω περὶ αὐτὴν ὁ εθζκ, κύκλος, ἐν ᾧ ἐναρμοσθήτωσαν αἱ ζθ, ζκ, ἴσαι ἑκατέρα τῇ γδ, ἐλάττονι τῶν δοθεισῶν. Εἶτα ἐπιζεύχθω ἡ θκ, τέμνουσα τὴν εζ, κατὰ τὸ λ, καὶ ἡ ζλ, γʹ. ἔσται ἀνάλογος τῶν αβ, γδ, δοθεισῶν εὐθειῶν. Τῆς γὰρ εθ, ἐπιζευγνυμένης, ἔσται ἡ ὑπὸ εθζ, γωνία ὀρθὴ κατὰ τὴν λαʹ. τοῦ γʹ. τοῦ Στοιχειωτοῦ. κατὰ δὲ τὸ πόρισμα τῆς ηʹ. τοῦ ϛʹ. τοῦ αὐτοῦ, ἔστιν ὡς ἡ εζ, πρὸς τὴν ζθ, ἡ ζθ, πρὸς τὴν ζλ.



Geom. Lib. 2. Fig. 21.

Εἰ δ' αὖθις κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζλ, τόξον γραφῇ τὸ μλν, καὶ ἡ μν, ἐπιζευχθῇ τέμνουσα τὴν εζ, κατὰ τὸ ξ, ἔσται ἡ ζξ, δʹ. ἀνάλογος ἐν τῷ λόγῳ τῆς α, πρὸς τὴν γ. Τῶν γὰρ θλζ, μξζ, ἀνάλογόν εἰσι αἱ πλευραὶ κατὰ τὴν δʹ. τοῦ ϛʹ. τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὥστε ὡς ἔχει ἡ θζ, πρὸς τὴν ζλ, γʹ. ἔχει, καὶ ἡ μζ, ἤτοι ἡ ζλ, ἴση γάρ, πρὸς τὴν ζξ, δʹ. Γραφομένου δὲ καὶ τοῦ οξπ, τόξου κέντρῳ μὲν τῷ αὐτῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζξ, καὶ τῆς οπ, ἐπιζευχθείσης, τμηθήσεται ἡ εζ, κατὰ τὸ ρ, καὶ ἡ ζρ, εʹ. ἔσται ἀνάλογος διὰ τὰ αὐτά. Τούτου δὲ ἀεὶ γενομένου ἕξεις ἐφεξῆς ἀνάλογον εὐθείας ἐπ' ἄπειρον κατὰ τὸν λόγον τῶν δοθεισῶν αβ, γδ, εὐθειῶν, ἐπὶ τὸ ἔλαττον μέντοι χωρούσας.

Εἰ δέ σοι βουλητὸν ἐπὶ τὸ μεῖζον τὴν ἀναλογίαν προβαίνειν, ληφθήτω ἡ ζσ, ἴση τῇ ἐλάττονι γδ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζε, ἴσῳ τῇ αβ, μείζονι,

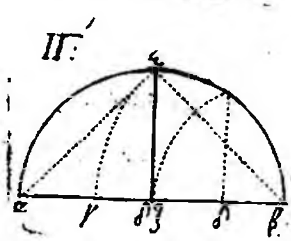
ζονι, γραφήτω τόξον τὸ ε τ, καὶ ἀπὸ τοῦ ε, παράλληλος τῇ λ θ, ἡ σ τ, ἤχθω ἡ ε υ, τέμνουσα τὴν ζ ε, ἐπ' ἄπειρον ἐκβληθεῖσαν κατὰ τὸ υ, καὶ ἔσται ἡ ζ υ, γ': ἀνάλογος τῶν γ δ, α β. Τῶν γὰρ ζ ε υ, ζ σ τ, τριγώνων αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσι κατὰ τὴν ἤδη ῥηθεῖσαν τοῦ ϛ': ὥστε ὡς ἔχει ἡ ζ σ, ἤτοι ἡ γ δ, ἴση γὰρ εἴληπται ταύτῃ ἡ ζ σ, πρὸς τὴν ζ τ, οὕτως ἔχει καὶ ἡ ζ ε, ἤτοι ἡ α β, πρὸς τὴν ζ υ, ἀλλ' ἡ ζ τ, ἴση εἴληπται τῇ α β, κατὰ τὸ α': ἄρα ἀξίωμα, ὡς ἔχει ἡ ζ σ, τουτέστιν ἡ γ δ, πρὸς τὴν ζ τ, ἤτοι τὴν α β, οὕτως ἔχει καὶ ἡ ε ζ, ἤτοι ἡ α β, πρὸς τὴν ζ υ, ἡ ζ υ, ἄρα γ': ἐστὶν ἀνάλογος τῶν γ δ, α β.

Ἐὰν δὲ λάβῃς τὴν ζ φ, ἴσην τῇ ζ υ, καὶ ἀπὸ τοῦ φ, ἀναστήσῃς κάθετον ἐπὶ τῆς ζ ε, ἐκβληθείσης, τέμνουσαν τὴν ζ θ, ἐκβληθεῖσαν καὶ αὐτὴν, κατὰ τὸ χ, ἡ ζ χ, δ': ἔσται ἀνάλογος. ὁμοίως δ' εὑρεθήσεται καὶ ε': καὶ ϛ': τῶν αὐτῶν γινομένων, καὶ αἱ λοιπαὶ ἐφ' ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον.

Ἵνα δὲ ἀχειρέστερον ἐξάγῃς τὰς καθέτους, συνεστάθω κάθετος ἐπὶ τῆς ζ ε, εὐθείας ἡ ζ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β, τυχόντος σημείου ἤχθω παράλληλος τῇ ζ ε, ἡ Β Λ. Εἶτα λαμβανομένης τῆς ζ σ, ἴσης τῇ ἐλάττονι γ δ, ληφθήτω ταύτῃ ἴση ἡ Β ψ, τῇ δὲ ζ ε, εἰλήφθω ἴση ἡ Β ω, καὶ τῇ ζ φ, ἡ Β Λ, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁμοίως. τοῦ γὰρ κανόνος ἐφαρμοττομένου τοῖς σ ψ, ε ω, φ Λ. ἕξεις τὰς σ τ, ε υ, φ χ, καθέτους.

Ἄλλως. Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι α β, β γ, τὸ αὐτὸ ἔχουσαι β, πέρας, τμηθείσης δὲ τῆς α β, μείζονος δίχα κατὰ τὸ δ, γραφήτω περὶ αὐτὴν ἡμικύκλιον τὸ α ε β, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ β γ, γραφήτω τόξον τὸ γ ε, τέμνον τὴν α ε β, περιφέρειαν κατὰ τὸ ε, ἀφ' οὗ κάθετος πιπτέτω ἐπὶ τῆς α β, ἡ ε ζ, καὶ ἔσται ἡ β ζ, γ': ἀνάλογος τῶν α β, β γ. Ἐπιζευχθεισῶν γὰρ τῶν α ε, ε β, τὰ α ε β, ε ζ β, τρίγωνα, ὅμοιά εἰσι. καὶ κατὰ τὴν δ': τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὡς ἡ α β, α': πρὸς τὴν β ε, τουτέστι τὴν β γ, β': ἴσαι γὰρ αἱ β γ, β ε, ὡς ἡμιδιάμετροι, οὕτως ἡ β ε, ἤτοι ἡ β γ, πρὸς τὴν β ζ. Ἐὰν δὲ τὰ αὐτὰ γένηται καὶ ἐπὶ τῶν β γ, β ζ, εὑρεθήσεται εὐθεῖα δ': ἀνάλογος τῶν α β, β γ, β ζ, καὶ ἐφεξῆς ἐπ' ἄπειρον κατὰ τὸν ἐλάττονα λόγον, κατὰ δὲ τὸν μείζονα ὧδε. Ἔστωσαν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σχήματος δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ β γ, β ζ, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαι τὸ β, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, σημείου τῆς ἐλάττονος, ἀνεστάθω κάθετος ἡ ζ ε. κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ β γ, γραφέτω τόξον τὸ γ ε, τέμνον τὴν ζ ε, κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ε β, ἐκβαλλομένης δὲ τῆς β γ, κατὰ τὸ συνεχὲς, συνεστάθω ἐπὶ τῆς β ε, κάθετος ἡ ε α, καὶ ἡ β α, ἔσται τρίτη ἀνάλογος τῶν β ζ, β γ. Τοῦτον τὸν τρόπον εὑρεθήσεται καὶ δ': καὶ ε': καὶ αἱ λοιπαὶ ἐφεξῆς ἐπ' ἄπειρον.

Geom. Lib. 1. Fig. 22.

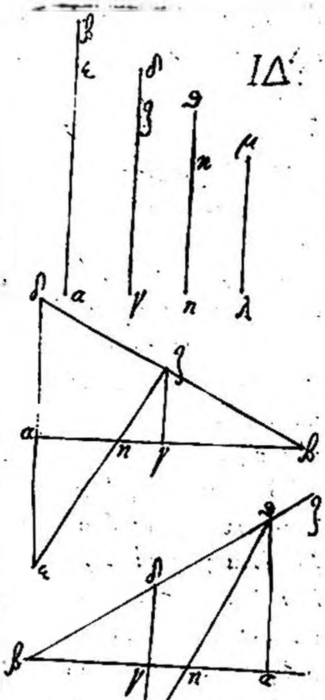


Πρότασις ΙΔ′:

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τρίτην ἀνάλογον Ἀριθμητικῶς εὑρεῖν.

Δοθήτωσαν αἱ αβ, γδ, εὐθεῖαι, καὶ ζητηθήτω αὐτῶν γ′: ἀνάλογος. Ἀφῃρήσθω δὴ ἀπὸ τῆς αβ, τῇ γδ, ἴση ἡ αε, καὶ ἔσαι ὑπεροχὴ ἡ βε, ταύτῃ δὲ ἴση ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς γδ, ἡ δζ. καὶ τῇ γζ, ἴση εἰλήφθω ἡ ηθ, καὶ αὕτη ἔσαι γ′: ἀνάλογος τῶν αβ, γδ. ἴσῃ γὰρ ὑπεροχῇ ὑπερέχει ἥτε αβ, τῆς γδ, καὶ ἡ γδ, τῆς ηθ. τοῦτο δὲ ἴδιον ἀριθμητικῆς ἀναλογίας. Ἐὰν δὲ καὶ ἀπὸ τῆς ηθ, ἀφαιρεθῇ ἡ θκ, ἴση τῇ δζ, καὶ τῇ ηκ, ἴση ληφθῇ ἡ λμ, ἕξεις αὐτῶν καὶ δ′: ἀνάλογον. Τοῦτον τὸν τρόπον εὑρήσεις καὶ ε′: καὶ ϛ′: ἐπὶ τὸ ἔλαττον, καὶ τοῦτο ἐπ᾽ ἄπειρον.

Geom. Lib. 2. Fig. 23.



Εἰδέ σοι βουλητὸν καὶ ἐπὶ τὸ μεῖζον χωρεῖν τὰς ἀναλόγους. Κείσθωσαν αἱ λμ, ηθ, καὶ ἐφῃρήσθω ἡ λμ, ἐλάττων τῆς ηθ μείζονος, τῇ δὲ γζ, ληφθείσῃ ἴσῃ τῇ ηθ, προστεθήτω ἡ ζδ, ἴση τῇ κθ, καὶ ἔσαι ἡ γδ, γ′: ἀνάλογος. Ἐὰν δὲ ἡ αε, ἴση ληφθῇ τῇ γδ, καὶ ταύτῃ προστεθῇ ἡ εβ, ἴση τῇ δζ, ἡ αβ, δ′: ἔσαι ἀνάλογος ἀριθμητικῶς, καὶ τοῦτο ἐπ᾽ ἄπειρον. Δύο ἄρα δοθεισῶν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΕ′:

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τρίτην ἀνάλογον Ἁρμονικῶς εὑρεῖν.

Δοθήτωσαν τοίνυν αἱ αβ, βη, τὸ αὐτὸ πέρας β, ἔχουσαι, καὶ ζητηθήτω γ′: αὐτῶν ἀνάλογος κατὰ τὴν ἁρμονικὴν ἀναλογίαν. Εἰς εὕρεσιν δὲ ταύτης, διήχθω διὰ τοῦ α, σημείου ἡ δε, κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, καὶ εἰλήφθω ἴση ἡ αδ, τῇ αε, καὶ τὰ λοιπὰ γενέσθω ὡς προσημειώθαι ἐν τῇ ιβ′: τοῦ παρόντος, καὶ ἔσαι ἡ βγ, ἡ ζητουμένη, τουτέστιν ὡς ἔχει ἡ αβ, α′: πρὸς τὴν βγ, γ′: οὕτως ἕξει καὶ ἡ αη, ὑπεροχὴ ἀναμέσον α′: καὶ β′: πρὸς τὴν ηγ, ὑπεροχὴν β′: παρὰ τὴν γ′: ὅτι δὲ τοῦτο οὕτως ἔχει. Δείκνυται διὰ τῆς αὐτῆς ιβ′:

Εἰδέ γε δοθῶσιν αἱ βγ, βη, καὶ ζητηθῇ ἡ βα, ἐχέτωσαν αἱ δοθεῖσαι βγ, βη, τὸ αὐτὸ β, πέρας, καὶ ἀπὸ τοῦ γ, ἀνεσάσθω κάθετος ἐπὶ τῆς βη, ἡ γδ, ὡς ἔτυχε, καὶ ἐκτεθήτω ἐπὶ τὸ ε, ὥστε τὴν γε, ἴσην εἶναι τῇ γδ. εἶτα ἀπὸ τοῦ β,

διὰ

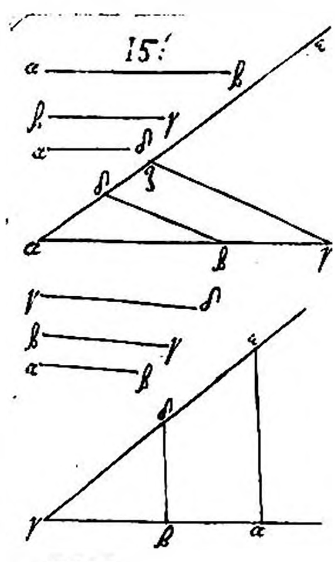
διὰ τοῦ δ, ἤχθω ἡ βζ, καὶ ἀπὸ τοῦ ε, διὰ τοῦ η, ἡ εηθ, τέμνουσα τὴν βζ, κατὰ τὸ θ, ἀφ' οὗ πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς βη, ἐκτεινομένης ἡ θα, καὶ ἡ βα, ἔσται ἡ ζητουμένη, ὥστε ὡς ἔχει ἡ α': βγ, πρὸς τὴν γ': βα, ἔχειν καὶ τὴν γη, διαφορὰν α': παρὰ τὴν βγ, β': πρὸς τὴν αη, διαφορὰν β': βη, παρὰ τὴν γ': βα. Δείκνυται διὰ τῆς ιβ': τοῦ παρόντος.

Πρότασις Ιϛ':

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν δ': ἀνάλογον ἐν συνεχεῖ ἢ διεζευγμένῃ ἀναλογίᾳ προσευρεῖν.

Εἰ καὶ περὶ τούτου τοῦ προβλήματος ἡρμήνευται ἐν τῇ ιγ': τοῦ παρόντος, δεδόσθωσαν ὅμως διὰ τὸ εὐχερέστερον καὶ ἐπὶ τῆς παρούσης εὐθεῖαι τρεῖς αἱ αβ, βγ, αδ, καὶ ζητηθήτω ἡ δ': αὐτῶν ἀνάλογος. Κείσθωσαν δὴ αἱ μὲν αβ, βγ, ἐπ' εὐθείας, ἡ δὲ αδ, ποιείτω μετὰ τῆς αβ, τὴν τυχοῦσαν γωνίαν, καὶ ἐκβληθήτω ἐπὶ τὸ ε, κατὰ τὸ συνεχές, εἶτα ἐπεζεύχθω ἡ δβ, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀπὸ τοῦ γ, ἤχθω ἡ γζ, τέμνουσα τὴν αδε, κατὰ τὸ ζ, καὶ ἡ δζ, δ': ἔσται ἀνάλογος τῶν αβ, βγ, αδ, κατὰ κατὰ τὴν ιβ': τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχειωτοῦ.

Geom. Lib. 1. Fig. 24.



Πρότασις ΙΖ':

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν δ': ἀνάλογον προσευρεῖν ἔχουσαν πρὸς τὴν γ': ὡς ἡ α': πρὸς τὴν β':

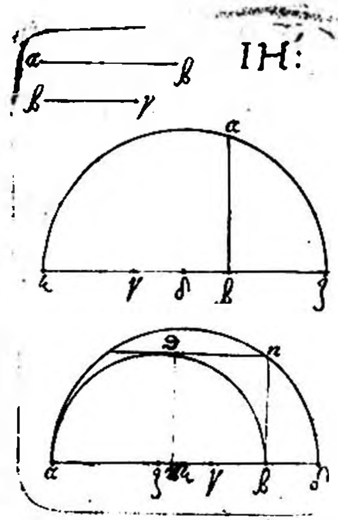
Ἔστωσαν αἱ τρεῖς δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, γδ, καὶ ζητηθήτω δ': αὐτῶν ἀνάλογος, ὥστε ἔχειν πρὸς τὴν γδ, ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ. Κείσθωσαν δὴ αἱ μὲν αβ, βγ, ἐπ' εὐθείας, ἡ δὲ γδ, τυχοῦσαν ποιείτω γωνίαν μετὰ τῆς βγ, καὶ τὰ λοιπὰ γενέσθω, ὡς πρότερον, καὶ ἡ δε, ἔσται ἡ ζητουμένη. ἕξει γὰρ πρὸς τὴν δγ, γ': ὡς ἡ αβ, α': πρὸς τὴν βγ, β': κατὰ τὴν β': τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχειωτοῦ.

Πρότασις ΙΗ':

Μέσης ἀναλόγου κειμένης καὶ τῆς τῶν ἄκρων διαφορᾶς αὐτὰ τὰ ἄκρα εὑρεῖν.

Κείσθω ἡ αβ, μέση ἀνάλογος, ἡ δὲ βγ, διαφορὰ τῶν ἄκρων, καὶ ζητείσθω τὰ ἄκρα. Τμηθήτω δὴ ἡ βγ, δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη κατὰ τὸ συνεχές, εἶτα ἀνεστάσθω ἀπὸ τοῦ β, κάθετος ἐπὶ τῆς βγ, ἡ βα, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δα, γραφήτω ἡμικύκλιον τὸ εαζ, καὶ αἱ εβ, βζ, εὐθεῖαι ἔσονται τὰ ζητούμενα ἄκρα. κατὰ γὰρ τὴν ιγ': τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχειωτοῦ ἡ βα, μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν εβ, βζ, διαφορὰ δὲ τῶν αὐτῶν εβ, βζ, ἐστὶν ἡ βγ, δοθεῖσα εὐθεῖα. Ἴσαι γὰρ αἱ δε, δζ, καὶ δγ, δβ. ἐὰν δὲ ἀπὸ τῶν δε, δζ, ἴσων ἴσαι ἀφαιρεθῶσιν αἱ δγ, δβ, ἐναπολειφθήσεται ἡ εγ, ἴση τῇ βζ, ὑπεροχὴ ἄρα τῆς εβ, πρὸς τὴν βζ, ἐστὶν ἡ βγ, δοθεῖσα εὐθεῖα, μέσης ἄρα ἀναλόγου δοθείσης καὶ τῆς τῶν ἄκρων διαφορᾶς, εὕρηται τὰ ἄκρα. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Geom. Lib. I. Fig. 25.

ΙΗ':



Πρότασις ΙΘ':

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, τῆς μὲν μείζονος ἀντ' ἄκρου ληφθησομένης, τῆς δ' ἐλάττονος ἀντὶ τῆς διαφορᾶς τῆς ἀναμέσον μέσης καὶ λοιπῆς ἐσχάτου, τὰς δύο λοιπὰς εὑρεῖν, ὧν ἀναμέσον ἡ δοθεῖσα διαφορά.

Δεδόσθω ἡ μείζων τῶν ἄκρων τριῶν ἀναλόγων εὐθειῶν, καὶ ἔστω αὕτη ἡ αβ. διαφορὰ δὲ τῆς μέσης καὶ λοιπῆς ἐσχάτου ἡ βγ. Ἤχθω ἡ αβ, καὶ τὸ συνεχὲς ἐπὶ τὸ δ, ὥστε εἶναι τὴν βδ, ἴσην τῇ βγ, διαφορᾷ. εἶτα διαιρεθήτω δίχα ἡ μὲν αδ, κατὰ τὸ ε, ἡ δὲ αβ, κατὰ τὸ ζ, καὶ κέντροις μὲν τοῖς ε, καὶ ζ, διαστήμασι δὲ τοῖς εα, ζα, γραφήτωσαν δύο ἡμικύκλια τὰ αηδ, αθβ, ἀπὸ δὲ τοῦ β, σημείου ἀνεστάσθω ἐπὶ τῆς αδ, κάθετος ἡ βη, καὶ ἀπὸ τοῦ η, ἤχθω παράλληλος τῇ αδ, ἡ ηθ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ θκ, καὶ αἱ βκ, κγ, ἔσονται αἱ ζητούμεναι, ὥστε ὡς ἔχει ἡ αβ, πρὸς τὴν βκ, οὕτως ἔχειν καὶ τὴν βκ, πρὸς τὴν κγ. κατὰ γὰρ τὴν λδ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, αἱ βη, κθ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐπεὶ δὲ ἡ μὲν βη, μέση ἀνάλογός ἐστι τῶν αβ, βδ, ἡ δὲ κθ, τῶν ακ, κβ, πάντως γε τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βδ, ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ακ, κβ, ὀρθογωθογωνίῳ. ἑκάτερον γὰρ ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς βη, ἢ κθ, τετραγώνῳ κατὰ τὴν ιζ′: τοῦ ϛ′: τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἑπομένως ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν ακ, ἔχει καὶ ἡ κβ, πρὸς τὴν βδ, κατὰ τὴν αὐτήν. ἡ δὲ βδ, ἴση εἴληπται τῇ γβ, ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν ακ, οὕτως ἔχει καὶ ἡ κβ, πρὸς τὴν βγ, καὶ δι᾽ ἀντιστροφῆς ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βκ, ἡ βκ, πρὸς τὴν κγ. δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν, καὶ τὰ ἑξῆς.

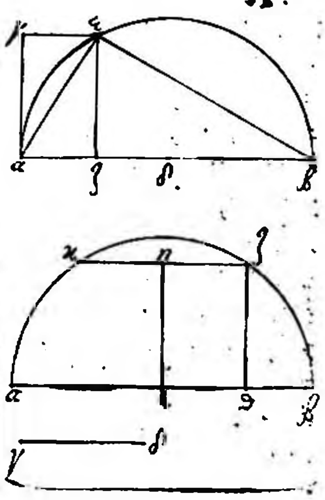
Πρότασις Κ′:

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τεμεῖν τὴν μείζονα, ὥστε τὴν ἐλάττονα μέσην εἶναι ἀνάλογον τῶν τῆς μείζονος τμημάτων, δεῖ δὲ τὴν ἐλάττονα μὴ μείζονα εἶναι τῆς ἡμισείας τῆς μείζονος, ἀλλ᾽ ἢ ἴσην, ἢ ἐλάττω.

Δοθήτωσαν αἱ αβ, αγ, εὐθεῖαι, καὶ κείσθωσαν ἀλλήλαις πρὸς ὀρθάς. Τμηθείσης δὲ τῆς αβ, μείζονος δίχα κατὰ τὸ δ, γραφήτω ἡμικύκλιον τὸ αεβ, καὶ ἤχθω παράλληλος τῇ αβ, ἡ γε, ἀπὸ δὲ τοῦ ε, πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ εζ, καὶ τμηθήσεται ἡ αβ, κατὰ τὸ ζ, ὥστε τὴν αγ, μέσην εἶναι ἀνάλογον τῶν αζ, ζβ. ἔστι γὰρ τῶν αὐτῶν αζ, ζβ, μέση ἀνάλογος ἡ εζ, κατὰ τὴν η′: τοῦ παρόντος. ταύτῃ δὲ ἴση ἡ αγ, κατὰ τὴν λδ′: τοῦ α′: τοῦ Στοιχειωτοῦ.

Geom. Lib. 1. Fig. 26.

Κ′:



Ἄλλως. Ἔστωσαν εὐθεῖαι αἱ αβ, γδ, μείζων μὲν ἡ αβ, ἐλάττων δὲ ἡ γδ, καὶ ζητείσθω τμηθῆναι ἡ αβ, εἰς δύο μέρη, ὥστε τὴν γδ, μέσην εἶναι ἀνάλογον τῶν μερῶν ἐκείνων. Τμηθήτω δὴ ἡ αβ, δίχα κατὰ τὸ ε, καὶ γραφήτω περὶ αὐτὴν ἡμικύκλιον τὸ αζβ, καὶ ἀπὸ τοῦ ε, ἀνεστάθω κάθετος ἡ εη, ἴση τῇ γδ, καὶ διὰ τοῦ η, ἤχθω παράλληλος τῇ αβ, ἡ κζ, ἤχθω δὲ καὶ τῇ εη, παράλληλος ἡ ζθ, τέμνουσα τὴν αβ, κατὰ τὸ θ, καὶ ἔσται ἡ γδ, μέση ἀνάλογος τῶν αθ, θβ, τμημάτων τῆς αβ. ἡ γὰρ θζ, μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν αθ, θβ, κατὰ τὴν η′: τοῦ παρόντος. αὕτη δὲ ἴση ἐςὶ τῇ εη, κατὰ τὴν λδ′: τοῦ α′: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἀλλ᾽ ἡ εη, εἴληπται ἴση τῇ γδ, ἡ γδ, ἄρα μέση ἀνάλογός ἐςι τῶν αθ, θβ. δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν, καὶ τὰ ἑξῆς.

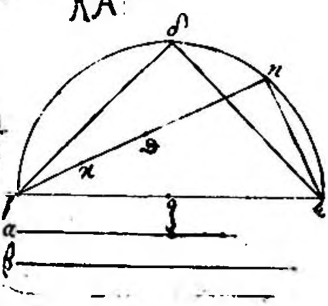
Πρότασις ΚΑ΄.

Δύο δοθεισῶν ἀνίσων εὐθειῶν τὴν μείζονα τεμεῖν, ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν τμημάτων αὐτῆς τετράγωνα, ἴσα εἶναι ὁμοῦ λαμβανόμενα τῷ ἀπὸ τῆς ἐλάττονος τετραγώνῳ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι α, καὶ β, ἐλάττων μὲν ἡ α, μείζων δὲ ἡ β, καὶ ζητείσθω τμηθῆναι ἡ β, ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν αὐτῆς τμημάτων τετράγωνα, ἴσα εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς α, τετραγώνῳ. Κείσθωσαν δὴ αἱ γ δ, δ ε, πρὸς ὀρθὰς, καὶ ἔστω ἑκατέρα αὐτῶν ἴση τῇ α. Ἐπιζευχθείσης δὲ τῆς γ ε, καὶ τμηθείσης δίχα κατὰ τὸ ζ, γραφέτω περὶ αὐτὴν ἡμικύκλιον τὸ γ δ ε. ὅτι δὲ τὸ γ δ ε, ἡμικύκλιον διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ δ, δειχθήσεται ἐν τοῖς τῶν τριγώνων θεωρήμασι.

Geom. Lib. I. Fig. 27.

ΚΑ



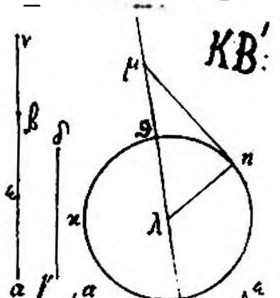
Κατὰ δὲ τὴν α΄. τοῦ δ΄. τοῦ Στοιχειωτοῦ ἐναρμοσθήτω εἰς τὸ γ δ ε, ἡμικύκλιον ἡ γ η, ἴση τῇ β, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ε η. εἶτα ἀφῃρήσθω τῆς γ η, ἡ η θ, ἴση τῇ η ε, καὶ τμηθήτω δίχα ἡ γ θ, κατὰ τὸ κ. Λέγω τὰ ἀπὸ τῶν γ κ, κ η, τετράγωνα ἴσα εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς γ δ, τετραγώνῳ. Κατὰ γὰρ τὴν ι΄. τοῦ β΄. τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἐπεὶ ἡ γ θ, δίχα τέτμηται κατὰ τὸ κ, προστέθη δὲ αὐτῇ ἐπ᾽ εὐθείας ἡ θ η, πάντως γε τὰ ἀπὸ τῶν γ η, η θ, τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν γ κ, κ η, ἀλλ᾽ ἡ η θ, ἴση εἴληπται τῇ ε η, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν γ η, η ε, τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν γ κ, κ η, τετραγώνων, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν γ η, η ε, τετραγώνοις ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν γ δ, δ ε, διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς γ ε, τετράγωνον τοῖς τε ἀπὸ τῶν γ δ, δ ε, καὶ γ η, η ε, κατὰ τὴν μζ΄. τοῦ α΄. τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν γ δ, δ ε, τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν γ κ, κ η, τετραγώνων. ἐπεὶ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν γ δ, δ ε, διπλάσιά ἐστι καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς γ δ. ἴση γὰρ ἡ γ δ, τῇ δ ε, εἴληπται, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς γ δ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν γ κ, κ η. εἴληπται δὲ ἡ μὲν γ δ, ἴση τῇ α, ἡ δὲ γ η, ἴση τῇ β. Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τέτμηται ἡ μείζων εἰς δύο μέρη, ὥστε τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐλάττονος τετραγώνῳ.

Πρότασις ΚΒ΄.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν εἴτε ἴσων, εἴτε ἀνίσων, τῇ μιᾷ τούτων εὐθεῖαν ἐπ' εὐθείας προσθεῖναι, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προστεθείσῃ καὶ τῆς προστεθείσης, ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ἑτέρας τετραγώνῳ.

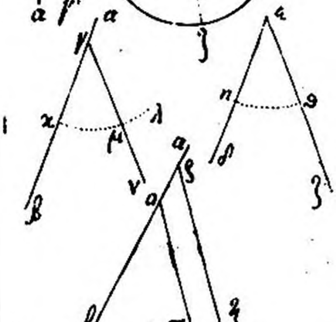
Δοθήτωσαν τοίνυν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ αβ, γδ, καὶ ζητείσθω προσθεῖναι τῇ αβ, εὐθείᾳ ἐπ' εὐθείας ἑτέρα τις εὐθεῖα, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προστεθείσῃ καὶ τῆς προστεθείσης ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς γδ, τετραγώνῳ. Τμηθήτω δίχα ἡ αβ, κατὰ τὸ ε, καὶ διαστήματι τῷ εβ, ἢ αε, γραφήτω κύκλος ὁ ζηθκ, ὡς ἀπὸ κέντρου τοῦ λ, ἀφ' οὗ ἤχθω ὡς ἔτυχεν ἡμιδιάμετρος ἡ λη, ἀπὸ δὲ τοῦ η, ἀνεστάσθω κάθετος ἐπὶ τῆς λη, ἴση τῇ γδ, ἡ ημ, καὶ ἀπὸ τοῦ μ, σημείου διὰ τοῦ λ, ἤχθω ἡ μλζ· τῇ δὲ αβ, προστεθήτω ἡ βν, ἴση τῇ θμ, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθέν. κατὰ γὰρ τὴν λϛ΄: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ ὑπὸ τῶν ζμ, μθ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μη, τετραγώνῳ, ἀλλ' ἡ μὲν ζμ, ἴση ἐστὶ τῇ αν, ἡ γὰρ ζθ, διάμετρος τοῦ κύκλου ἴση ἐστὶ τῇ αβ, κατὰ τὴν κατασκευὴν, καὶ προστεθῇ αὐτῇ ἡ βν, ἴση τῇ θμ, εἴληπται δὲ καὶ ἡ μη, ἴση τῇ γδ, ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν αν, νβ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γδ, τετραγώνῳ. δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 1. Fig. 28.



Πρότασις ΚΓ΄.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ δοθέντι σημείῳ ἴσην γωνίαν συστήσασθαι τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.



Δεδόσθω ἡ αβ, εὐθεῖα, πρὸς αὐτῇ δὲ σημεῖον τὸ γ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δεζ, καὶ ζητείσθω συστῆσαι πρὸς τῷ γ, σημείῳ τῆς αβ, εὐθείας γωνία ἴση τῇ ὑπὸ δεζ. Ληφθήτω δὴ ἐπὶ τῆς εδ, τυχὸν σημεῖον τὸ η, καὶ γραφήτω τόξον τὸ ηθ, καὶ τῷ αὐτῷ διαστήματι ὡς ἀπὸ κέντρου τοῦ γ, γραφήτω ἕτερον τόξον τὸ κλ. εἶτα ληφθήτω τὸ ηθ, διάστημα, καὶ τούτῳ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ κμ, καὶ διὰ τοῦ γ, καὶ μ, ἤχθω ἡ γν, εὐθεῖα, καὶ ἔσται ἡ ὑπὸ βγν, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ δεζ, κατὰ τὴν κγ: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ.

Εἰ δὲ τὸ δοθὲν σημεῖον ἐκτὸς ᾖ τῆς δοθείσης εὐθείας ὡς τὸ ξ, ληφθήτω τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς αβ, τὸ ο, καὶ πρὸς τῷ ο, σημείῳ συστάσθω κατὰ τὰ ἀνώτερω ἡ

ὑπὸ

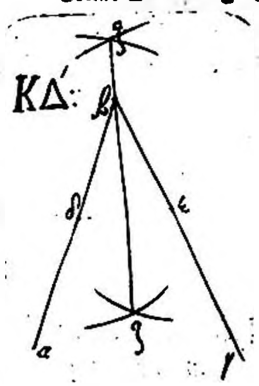
ὑπὸ βοπ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ δεζ, κἂν ἡ οπ, διὰ τοῦ ξ, διέλθῃ, γέγονε τὸ ἐπιταχθέν, εἰδὲ μή, ἤχθω τῇ οπ, παράλληλος ἀπὸ τοῦ ξ, σημείου ἡ ξρ, εὐθεῖα, καὶ ἡ ὑπὸ βρξ, γωνία ἴση ἔσται τῇ ὑπὸ δεζ, δοθείσῃ. ἴση γάρ ἐστι τῇ ὑπὸ βοπ, κατὰ τὴν κθ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἥτις γέγονεν ἴση τῇ ὑπὸ δεζ, δοθείσῃ γωνίᾳ. πρὸς τῇ δοθείσῃ ἄρα εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ δοθέντι σημείῳ ἴση γωνία συνέστη τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ, ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρότασις ΚΔ':

Τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν δίχα τεμεῖν.

Ἔστω δοθεῖσα γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, ἣν δεῖ δίχα τεμεῖν. Ληφθήτω δὴ τυχὸν σημεῖον τὸ δ, ἐπὶ τῆς αβ, καὶ ἀφῃρήσθω ἴση τῇ βδ, ἀπὸ τῆς βγ, ἡ βε, εἶτα κέντροις μὲν τοῖς δ, ε, διαστήματι δέ, ὅπερ ἔτυχε, τόξα γραφήτωσαν ἐντός, ἢ γοῦν ἐκτὸς τῆς δοθείσης γωνίας κατὰ τὸ ζ, τεμνόμενα, καὶ ἡ διὰ τῶν βζ, διερχομένη εὐθεῖα δίχα τεμεῖ τὴν ὑπὸ βαγ, γωνίαν κατὰ τὴν η': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ βδ, ἴση ἐστὶ τῇ βε, κοινὴ δὲ ἡ βζ, ἔστι δὲ καὶ βάσις ἡ δζ, βάσει τῇ εζ, ἴση, πάντως καὶ ἡ ὑπὸ δβζ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εβζ, ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Geom. Lib. 1. Fig. 29.



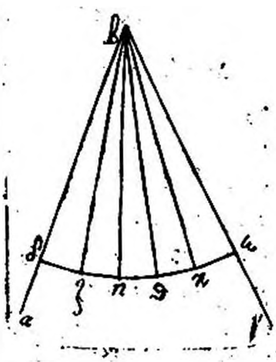
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτων δυνάμεθα συναγαγεῖν, καὶ ὅπως ἔχωμεν διαιρεῖν τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν εἰς πλείονα μέρη κατὰ τὸ διπλάσιον χωροῦντα, δηλονότι εἰς τέσσαρα, ὀκτώ, ἐκκαίδεκα, δύο καὶ τριάκοντα, καὶ τὰ λοιπά, ὑποδιαιρεμένων ἀεὶ τῶν μερῶν τῆς δοθείσης γωνίας εἰς δύο.

Πρότασις ΚΕ':

Τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν εἰς ὁσαδηποτοῦν μέρη ἴσα ἀλλήλοις τεμεῖν.

Κείσθω δὴ τὴν ὑπὸ αβγ, δοθεῖσαν εὐθύγραμμον εἰς πέντε μέρη ἴσα διελεῖν. Ἵνα δὲ τοῦτο Γεωμετρικῶς γένηται, κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ ὃ ἔτυχε, τὸ βδ, γραφήτω τόξον τὸ δε, καὶ διαιρεθήτω εἰς μέρη ἴσα πέντε, τὰ δζ, ζη, ηθ, θκ, κε, καὶ ἀπὸ τοῦ β, ἐφ' ἕκαστον σημεῖον τοῦ δθε, τόξου ἤχθωσαν εὐθεῖαι αἱ βζ, βη, βθ, βκ, καὶ διαιρεθήσεται ἡ ὑπὸ αβγ, γωνία ὁμοίως εἰς πέντε μέρη ἴσα ἀλλήλοις κατὰ τὴν κζ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τῶν εἰρημένων ἔξεστι συναγαγεῖν καὶ ὅπως δυνάμεθα διελεῖν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εἰς μέρη ὁσαδηποτοῦν ἄνισα κατὰ τὴν δοθεῖσαν ἀναλογίαν. ἐὰν γὰρ τόξον γραφῇ ὡς ἐπὶ τῆς παρούσης τὸ δε, καὶ τοῦτο εἰς τὰ δοθέντα μέρη διαιρεθῇ κατὰ τὴν δοθεῖσαν ἀναλογίαν, καὶ ἐφ' ἑκάστου σημείου εὐθεῖαι ἀχθῶσιν ἀπὸ τῆς δοθείσης γωνίας ἔσται τὸ ἐπιταχθέν.

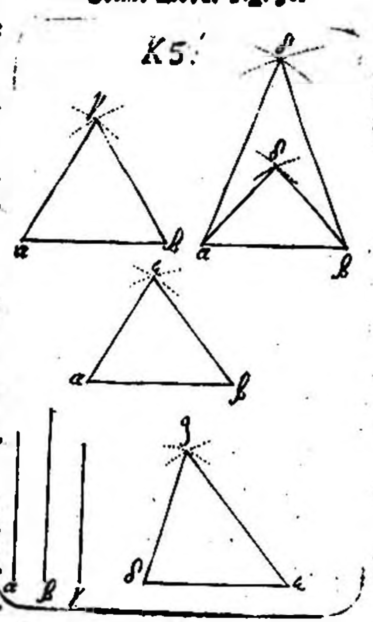
Πρότασις Κς'.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης πεπερασμένης εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Δοθήτω ἤδη ἡ αβ, πεπερασμένη εὐθεῖα, καὶ ἔστω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι. Κέντροις μὲν δὴ τοῖς α, καὶ β, διαστήματι δὲ τῷ αβ, τόξα γραφήτωσαν τεμνόμενα κατὰ τὸ γ, καὶ ἐπιζευχθήτωσαν αἱ αγ, γβ, εὐθεῖαι, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθὲν κατὰ τὴν α: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ.

Εἰ δὲ βούλει ἐπὶ τῆς αὐτῆς αβ, εὐθείας τρίγωνον ἰσοσκελὲς συστήσασθαι, κέντροις μὲν τοῖς αβ, διαστήματι δὲ μείζονι ἢ ἐλάττονι τοῦ αβ, γραφήτωσαν δύο τόξα τεμνόμενα κατὰ τὸ δ, καὶ ἐπιζευχθεισῶν τῶν δα, δβ, ἕξεις τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ αδβ, κατὰ τὸν κδ': ὅρον τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ.

Geom. Lib. 1. Fig. 30.



Σκαληνὸν δὲ βουλόμενος κατασκευάσαι, κέντροις μὲν τοῖς αὐτοῖς α, καὶ β, διαστήμασι δὲ ἀνίσοις γράψον τόξα τεμνόμενα κατὰ τὸ ε. Ἐπιζευχθεισῶν γὰρ τῶν αε, εβ, ἔσται τὸ εαβ, τρίγωνον σκαληνὸν κατὰ τὸν κε': ὅρον τοῦ αὐτοῦ.

Πρότασις ΚΖ'.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν ἴσων ταῖς δοθείσαις τρισὶν εὐθείαις, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι τρίγωνον συστήσασθαι.

Τριῶν ἤδη δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν α, β, γ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. Εἰλήφθω ἡ δε, ἴση μιᾷ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, δὸς εἰπεῖν τῇ α, καὶ κέντροις μὲν τοῖς δε, διαστήμασι δὲ ἴσοις τῇ β, καὶ γ, τόξα γραφήτωσαν τεμνόμενα κατὰ τὸ ζ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ζδ, ζε. καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθέν, κατὰ τὴν κβ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ.

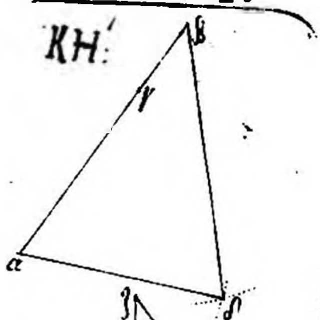
Πρό-

Πρότασις ΚΗʹ:

Εὐθείας πεπερασμένης δοθείσης τρίγωνον ἰσοσκελὲς συστήσασθαι ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς κατὰ κορυφήν.

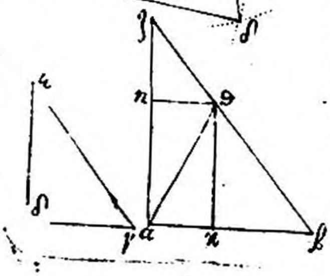
Δοθήτω ἡ α β, εὐθεῖα, καὶ ζητηθήτω ἐξ αὐτῆς τρίγωνον ἰσοσκελὲς συσταθῆναι, ὥστε ἔχειν ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς κατὰ κορυφήν. Τμηθήτω δὴ ἡ δοθεῖσα α β, εὐθεῖα κατ᾽ ἄκρον καὶ μέσον λόγον διὰ τῆς ζʹ: τοῦ παρόντος, κατὰ τὸ γ, καὶ κέντροις μὲν τοῖς α, β, διαστήμασι δὲ τοῖς α β, α γ, τόξα γραφήτωσαν κατὰ τὴν ἀμφοτέρων τεμνόμενα κατὰ τὸ δ, καὶ συσταθήσεται τὸ α β δ, τρίγωνον ἰσοσκελὲς κατὰ τὴν αὐτήν. ὅτι δὲ ἔχει ἑκατέραν τῶν ὑπὸ β α δ, β δ α, γωνιῶν διπλασίονα τῆς ὑπὸ α β δ, δείκνυται διὰ τῆς ιʹ: τοῦ δʹ: τοῦ Στοιχειωτοῦ.

Geom. Lib. I. Fig. 31.



Πρότασις ΚΘʹ:

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τρίγωνον συστήσασθαι ἔχον τὴν δοθεῖσαν γωνίαν καὶ ὕψος τὸ δοθέν.



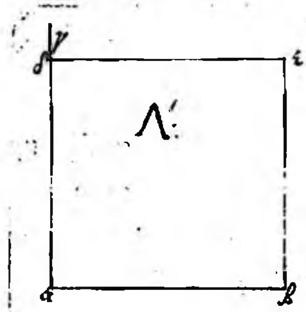
Δοθήτω εὐθεῖα μὲν ἡ α β, γωνία δὲ πρὸς τῷ γ, καὶ ὕψος τὸ δ ε, καὶ ζητηθήτω συσταθῆναι τρίγωνον ἐπὶ τῆς α β, ἔχον γωνίαν μὲν ἴσην τῇ πρὸς τῷ γ, ὕψος δὲ τῷ ε δ. Συνεστάσθω δὴ πρὸς τῇ α β, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ β, σημείῳ διὰ τῆς κγʹ: τοῦ παρόντος, γωνία ἡ ὑπὸ α β ζ, ἴση τῇ πρὸς τῷ γ, ἀπὸ δὲ τοῦ α, ἀνεστάσθω κάθετος ἐπὶ τῆς α β, κατὰ τὴν γʹ: τοῦ αὐτοῦ ἡ α η, καὶ παράλληλος τῇ α β, ἤχθω ἡ η θ, κατὰ τὴν βʹ: τοῦ αὐτοῦ, τέμνουσα τὴν β ζ, κατὰ τὸ θ, ἀφ᾽ οὗ πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς α β, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν γʹ: ἡ θ κ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ θ α, καὶ τὸ α θ β, ἔσται τὸ ζητηθέν. Συνίστη μὲν γὰρ ἐπὶ τῆς α β, ἔχει δὲ τὴν πρὸς τῷ β, γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ γ, δοθείσῃ, καὶ ὕψος τὸ θ κ, ἴσον τῷ δ ε, δοθέντι. ἡ μὲν γὰρ θ κ, ἴση ἐστὶ τῇ α η, κατὰ τὴν λδʹ: τοῦ αʹ: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἡ δὲ α η, εἴληπται ἴση τῇ δ ε. ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Λ':

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον συστήσασθαι.

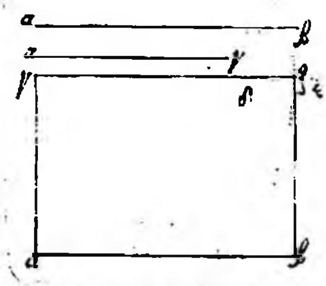
Δοθήτω εὐθεῖα ἡ αβ, ἐφ' ἧς δεῖ τετράγωνον συσταθῆναι, συνεστάθω δὴ πρὸς τῷ α, σημείῳ ἐπὶ τῆς αβ, εὐθείας πρὸς ὀρθὰς ἡ αγ, καὶ εἰλήφθω ἡ αδ, ἴση τῇ αβ. Εἶτα κέντροις μὲν τοῖς α, καὶ β, διαστήματι δὲ τῷ αβ, ἢ αδ, τόξα γραφήτωσαν τεμνόμενα κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ βε, δε, καὶ τὸ αβεδ, τετράγωνον ἔσται ἐπὶ τῆς αβ. ὅτι μὲν γὰρ ἰσόπλευρον, ἐκ τῆς κατασκευῆς δῆλον. ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον δείκνυται. τὸ γὰρ αβεδ, ἰσόπλευρον ὄν, ἔσται πάντως καὶ παραλληλόγραμμον. εἰ γὰρ μὴ, οὐδὲ ἰσόπλευρον πάντως ἔσται. ἐπεὶ δὲ παραλληλόγραμμον, δῆλον, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. κατὰ γὰρ τὸ κθ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ αἱ ὑπὸ δαβ, αβε, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' ἡ ὑπὸ δαβ, ὀρθὴ γέγονεν, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αβε, ὁμοίως ὀρθή ἐστι.

Geom. Lib.1. Fig.32.



κατὰ δὲ τὴν λδ': τοῦ αὐτοῦ, ἡ μὲν ὑπὸ δεβ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δαβ, ἡ δὲ ὑπὸ εδα, τῇ ὑπὸ αβε, ὥστε καὶ ἰσογώνιόν ἐστι τὸ αβεδ, σχῆμα. ἐπεὶ δὲ τῶν τετραπλεύρων σχημάτων τὸ ἰσόπλευρόν τε καὶ ὀρθογώνιον τετράγωνόν ἐστι, πάντως γε καὶ τὸ αβεδ, τετράγωνον ἔσται. Ἐπὶ τῆς αβ, ἄρα δοθείσης εὐθείας συνέστη τὸ αβεδ, τετράγωνον, ὅπερ ἔδει τὸ ζητούμενον.

Πρότασις ΛΑ':



Ἐκ δύο εὐθειῶν ἀνίσων ἑτερόμηκες συστήσασθαι.

Δοθήτωσαν αἱ αβ, αγ, ἐξ ὧν ὀφείλει ἑτερόμηκες συσταθῆναι. Κείσθωσαν δὴ αἱ δοθεῖσαι αβ, αγ, εὐθεῖαι ἀλλήλαις πρὸς ὀρθὰς κατὰ τὸ α, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ αγ, τόξον γραφήτω τὸ δε, κέντρῳ δὲ τῷ γ, καὶ διαστήματι τῷ αβ, γραφήτω καὶ ἕτερον τόξον τέμνον τὸ δε, κατὰ τὸ ζ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ βζ, γζ, καὶ τὸ αβζγ, ἔσται τὸ ζητούμενον. ὅτι μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν δοθεισῶν περιέχεται πλευρῶν, δῆλον ἐκ τῆς κατασκευῆς. Ὅτι δὲ καὶ ὀρθογώνιον, δείκνυται διά τε τῆς κθ': καὶ λδ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ. τοιοῦτον δ' ἐστὶ τὸ ἑτερόμηκες κατὰ τὸν λ': ὅρον τοῦ αὐτοῦ, ἄρα τὸ αβζγ, ἑτερόμηκές ἐστιν ὑπὸ τῶν δοθεισῶν αβ, αγ, περιεχόμενον πλευρῶν. ὅπερ ἔδει τὸ ζητούμενον.

Πρότασις ΛΒ′:

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας Ῥόμβον συστήσασθαι.

Δοθήτω τοίνυν ἡ αβ, εὐθεῖα, ἐφ' ἧς ὀφείλει Ῥόμβον συσταθῆναι. Ἀπὸ τοῦ α, τοίνυν σημείου ἤχθω ἡ αγ, ἴση τῇ αβ, τὴν τυχοῦσαν ποιοῦσα γωνίαν, ὀξεῖαν δηλ: ἢ ἀμβλεῖαν. καὶ κέντροις μὲν τοῖς β, καὶ γ, διαστήματι δὲ τῷ αβ, ἢ αγ, γραφήτωσαν τόξα ἔνδον τῶν αβ, αγ, τεμνόμενα κατὰ τὸ δ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ βδ, γδ, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθέν. Ὅτι μὲν γὰρ ἰσόπλευρον, δῆλον ἐκ τῆς κατασκευῆς. τῷ αὐτῷ γὰρ διαστήματι ἑκάστη τῶν πλευρῶν συνέστη. Ὅτι δὲ καὶ παραλληλόγραμμον, δείκνυται διὰ τῆς β′: τοῦ παρόντος. ὅτι δὲ οὐδ' ὀρθογώνιον, ἔχει τὸ πιστὸν ἐκ τῆς λδ′: τοῦ α′: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἀλλὰ μὴν τοιοῦτος ὁ Ῥόμβος, τὸ ἄρα αβδγ, συσταθὲν σχῆμα ἐπὶ τῆς δοθείσης αβ, εὐθείας, Ῥόμβος ἐστὶ κατὰ τὸ προσταχθέν.

Geom. Lib. 1. Fig. 33.

Πρότασις ΛΓ′:

Ἐκ δύο δοθεισῶν ἀνίσων εὐθειῶν ῥομβοειδὲς συστήσασθαι.

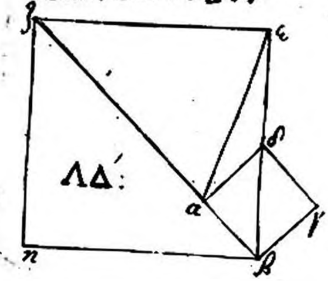
Δοθήτωσαν αἱ αβ, αγ, ἄνισοι εὐθεῖαι, ἐξ ὧν δεῖ ῥομβοειδὲς συσταθῆναι. Κείσθωσαν δὴ αἱ αβ, αγ, δοθεῖσαι εὐθεῖαι, ὥστε τὴν τυχοῦσαν ὀξεῖαν ποιεῖν γωνίαν τὴν ὑπὸ βαγ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ αγ, γραφήτω τόξον τὸ δε, κέντρῳ δὲ τῷ γ, καὶ διαστήματι τῷ αβ, γραφήτω ἕτερον τόξον τέμνον τὸ πρότερον κατὰ τὸ ζ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ βζ, γζ, εὐθεῖαι, καὶ τὸ αβζγ, ἔσται τὸ ζητούμενον. ὅτι μὲν γὰρ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον, ἐκ τῆς κατασκευῆς πιστοῦται. ὅτι δὲ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἔχει, δείκνυται διὰ τῆς λδ′: τοῦ α′: τοῦ Στοιχειωτοῦ. τοῦτο δὲ τοῦ ῥομβοειδοῦς σχήματος ἴδιον, κατὰ τὸν λβ′: ὅρον τοῦ αὐτοῦ. ἄρα ἐκ τῶν αβ, αγ, δοθεισῶν εὐθειῶν συνέστη τὸ αβζγ, ῥομβοειδὲς σχῆμα. ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρότασις ΛΔ'.

Ὑπεροχῆς διαμέτρου τετραγώνου τινὸς πρὸς τὴν αὐτοῦ πλευρὰν δοθείσης, τὴν τοῦ τετραγώνου εὑρεῖν πλευράν.

Ἔστω ἡ αβ, διαφορὰ διαμέτρου τινὸς τετραγώνου πρὸς τὴν αὐτοῦ πλευρὰν, καὶ ζητείσθω ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρά. Συνεστάθω δὴ ἐπὶ τῆς αβ, τετράγωνον τὸ αβγδ, καὶ διὰ τῶν β, καὶ δ, ἤχθω ἡ βδ, ὥστε τὴν δε, ἴσην εἶναι τῇ αδ, καὶ ἡ βε, ἔσται ἡ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου πλευρά. Ἀχθείσης γὰρ τῆς αβ, κατὰ τὸ συνεχὲς, συνεστάθω ἐπὶ τῆς βε, κάθετος ἡ εζ, τέμνουσα τὴν βζ, κατὰ τὸ ζ. αἱ γὰρ ὑπὸ ζεβ, αβε, ἐλάττονές εἰσι δύο ὀρθῶν. Εἶτα τῇ μὲν εβ, παράλληλος ἤχθω ἡ ζη, τῇ δὲ εζ, ἡ βη. καὶ τὸ βεζη, τετράγωνον, ἔσται τὸ ζητούμενον, οὗ πλευρὰ μὲν ἡ βε, διάμετρος δὲ ἡ βζ, ὑπερέχουσα τῆς βε, τῇ αβ, δοθείσῃ διαφορᾷ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ βεζ, ὀρθή ἐστι κατὰ τὴν κατασκευὴν, ἡ δὲ ὑπὸ αβδ, ἡμίσεια ὀρθῆς κατὰ τὸ α: πόρισμα τῆς λβ': τοῦ α: τῶν Στοιχείων: πάντως γε καὶ ἡ ὑπὸ εζβ, ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὥστε αἱ βε, ζε, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ κατὰ τὴν ς: τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ, κατὰ δὲ τὴν λδ': τὸ βεζη, τετράγωνόν ἐστι, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ἡ βε. Αὖθις ἐπεὶ αἱ δε, δα, ἴσαι εἰσὶ, δῆλον ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ δεα, δαε, γωνίαι ἴσαι ὁμοίως ἀλλήλαις εἰσὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ε: ἀφῃρημένων δὲ τῶν ὑπὸ δεα, δαε, ἴσων γωνιῶν ἀπὸ τῶν βεζ, ζαδ, ὀρθῶν, καὶ αἱ ἐναπολειπόμεναι ζεα, ζαε, ἴσαι ἔσονται, ὥστε κατὰ τὴν προειρημένην ς: πρότασιν καὶ αἱ ζα, ζε, εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶ, τῇ δὲ ζε, ἴση ἐστὶν ἡ βε, ἄρα ἡ ζα, ἴση ἐστὶ τῇ βε, ἡ ὅλη δὲ ζβ, ὑπερέχει τῆς βε, τῇ αβ, δοθείσῃ ὑπεροχῇ, ὑπεροχῆς ἄρα διαμέτρου τετραγώνου τινὸς δοθείσης, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 1. Fig. 34.



Πρότασις ΛΕ'.

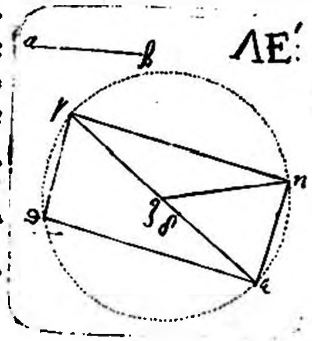
Μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν παραλληλογράμμου ὀρθογωνίου δοθείσης, καὶ τῆς διαφορᾶς ᾗ ἡ διάμετρος τὴν αὐτὴν ὑπερέχει πλευρὰν, τὸ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον συστήσασθαι.

Δοθήτω πλευρὰ μὲν παραλληλογράμμου τινὸς ὀρθογωνίου ἡ αβ, διαφορὰ δὲ τῆς διαμέτρου τοῦ παραλληλογράμμου πρὸς τὴν αὐτοῦ πλευρὰν ἡ γδ, καὶ ζητείσθω τὸ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον. Ἤχθω δὴ ἡ γδ, κατὰ τὸ συνεχὲς, φέρ' εἰπεῖν ἀπὸ τοῦ δ, ὥστε τὴν δε, ἴσην εἶναι τῇ αβ, καὶ τμηθήτω ἡ γε, δίχα κατὰ

 τὸ ζ,

τὸ ζ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζ γ, ἡμικύκλιον γραφήτω τὸ γ η ε. Εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ α β, τόξον γραφήτω τέμνον τὸ γ η ε, ἡμικύκλιον κατὰ τὸ η, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ε η, η γ, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ γ, παράλληλος ἤχθω τῇ ε η, ἡ γ θ, ἀπὸ δὲ τοῦ ε, ἡ ε θ, παράλληλος τῇ η γ, καὶ τὸ γ θ ε η, ἔσται τὸ ζητούμενον. Ὅτι μὲν γὰρ παραλληλόγραμμον, ἐκ τῆς κατασκευῆς δῆλον. Ὅτι δὲ καὶ ὀρθογώνιον, οὐ χαλεπὸν ἤδη δεῖξαι. Ἡ μὲν γὰρ ὑπὸ γ η ε, γωνία ὀρθή ἐστι κατὰ τὴν λα΄: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. Ἐπεὶ δὲ ἡ ε θ, παράλληλος ἦκται τῇ γ η, πάντως γε κατὰ τὴν κθ΄: τοῦ α΄: τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἡ ὑπὸ η ε θ, γωνία ὀρθή ἐστι. τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων κατὰ τὴν λδ΄: τοῦ αὐτοῦ, αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἄρα καὶ αἱ λοιπαὶ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ η γ θ, καὶ γ θ ε, ὀρθαί εἰσιν ἑκατέρα, ὥστε ὀρθογώνιόν ἐστι τὸ γ θ ε η, παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ δ' αὖθις ἡ δ ε, εἴληπται ἴση τῇ α β, ὥσπερ καὶ ἡ ε η, πάντως γε ἡ γ ε, διάμετρος ὑπερέχει τὴν α β, δοθεῖσαν αὐτοῦ πλευρὰν τῇ γ δ, δοθείσῃ διαφορᾷ. μιᾶς ἄρα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν παραλληλογράμμου ὀρθογωνίου δοθείσης, καὶ τῆς διαφορᾶς, ᾗ ἡ διάμετρος τὴν αὐτὴν ὑπερέχει πλευράν, συνέστη τὸ γ θ ε η, παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Geom. Lib. 1. Fig. 35.



Τέλος τοῦ Πρώτου τῆς Γεωμετρίας Βιβλίου.

ΣΤΟΙ-

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΠΕΡΙ ΚΥΚΛΟΥ, ΚΑΙ ΤΩΝ ΤΟΥΤΟΥ

Ἰδιωμάτων τε καὶ παθῶν.

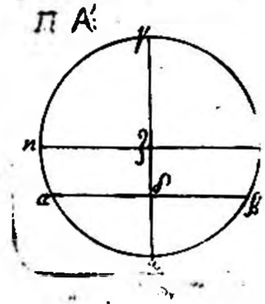
Πρότασις Α':

Κύκλου δοθέντος τὸ κέντρον αὐτοῦ εὑρεῖν.

Ἔστω κύκλος, οὗ τὸ κέντρον ζητεῖται, ὁ α β γ, καὶ ἄχθήτω ἐντὸς τοῦ κύκλου ἡ α β, εὐθεῖα, ὡς ἔτυχεν. Εἶτα τμηθήτω δίχα ἡ αὐτὴ α β, κατὰ τὸ δ, ἀπὸ δὲ τοῦ δ, ἀνεστάθω κάθετος ἐπ' αὐτῆς ἡ γ δ ε, καὶ τμηθήτω δίχα κατὰ τὸ ζ, καὶ τοῦτο ἔσται τὸ κέντρον τοῦ α β γ, δοθέντος κύκλου. Ἐπεὶ γὰρ ἡ α β, τέτμηται δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς ὑπὸ τῆς γ ε, ἡ γ ε, πάντως διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ α β γ, κύκλου κατὰ τὴν γ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, καὶ διάμετρός ἐστι τοῦ α β γ, κύκλου, ταύτης δὲ τὸ ἥμισυ ἡμιδιάμετρός ἐστι τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ὥστε κέντρον τοῦ α β γ, κύκλου τὸ ζ, ἐστί. Εἰ δὲ τύχωσι τεμνόμεναι ἄμφω δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αἱ εὐθεῖαι, ὡς αἱ η θ, γ ε, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ, οἷον τὸ ζ, ἔσται τὸ τοῦ κύκλου κέντρον. δοθέντος ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 2. Fig. 1.

Π Α':



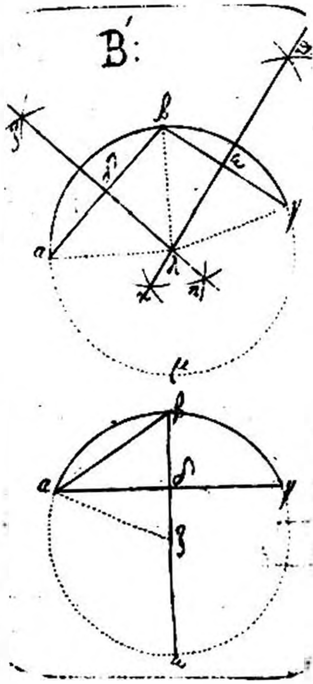
Πρότασις Β':

Τμήματος κύκλου δοθέντος τὸν κύκλον προσαναγράψαι, καὶ τὸ κέντρον αὐτοῦ εὑρεῖν.

Δοθήτω τὸ α β γ, τμῆμα, καὶ ζητηθήτω ὁ κύκλος, οὗ ἐστι τμῆμα. Ληφθήτω δὴ τυχὸν σημεῖον τὸ β, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ α β, β γ, ἑκατέρας δὲ τούτων δίχα τεμνομένης κατὰ τὰ δ, καὶ ε, συνεστάθωσαν ἐπ' αὐτῶν κάθετοι αἱ ζ η, θ κ, τεμνόμεναι κατὰ τὸ λ, καὶ τοῦτο ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ διαστήματι τῷ λ α, ἢ λ γ, ἀνα-

ἀναπληρωθήσεται ὁ αβγμ, κύκλος. Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ λα, λβ, λγ, αἵγε ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται κατὰ τὴν δ΄: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὥστε κέντρῳ μὲν τῷ λ, διαστήματι δὲ τῷ λα, γραφήσεται ὁ αβγμ, κύκλος.

Geom. Lib. 2. Fig. 2.



Ἢ οὕτως. Ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν αβ, βγ, δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνεται ὑπὸ τῶν ζη, θκ, πάντως γε κατὰ τὴν ἀνωτέρω τὸ τοῦ κύκλου κέντρον ἐφ᾽ ἑκατέρας τῶν ζη, θκ, ἐστὶν, οὗ τμῆμα τὸ αβγ, ἀλλ᾽ αἱ ζη, θκ, τέμνονται κατὰ τὸ λ, τὸ λ, ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον· τὸ γὰρ κέντρον κοινή ἐστι τομὴ τῶν διὰ τοῦ κέντρου ἀχθεισῶν ἐν παντὶ κύκλῳ.

Ἄλλως. Ἐπιζεύχθω ἡ αγ, καὶ τμηθήτω δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ κάθετος ἐπ᾽ αὐτῆς ἡ βδ, ἐξαγομένη κατὰ τὸ συνεχές. κἂν μὲν ἡ ὑπὸ δαβ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δβα, τὸ δ, πάντως ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, οὗ τμῆμά ἐστι τὸ αβγ, εἰ δὲ μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάττων ἡ ὑπὸ δβα, τῆς ὑπὸ δαβ, συνεστάθω πρὸς τῇ αβ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, ἡ ὑπὸ βαζ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ δβα, καὶ τὸ ζ, ἔσται τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου κύκλου κατὰ τὴν κε΄: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. Τμήματος ἄρα κύκλου δοθέντος τοῦ αβγ, προσαναγέγραπται ὁ αβγε, ζητούμενος κύκλος.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι καὶ τριῶν δοθέντων σημείων, δυνατὸν κύκλον καταγράψαι διὰ τῶν δοθέντων διερχόμενον σημείων. δοθέντων γὰρ τῶν αβγ, σημείων, ὡς ἐπὶ τοῦ α: διαγράμματος, καὶ τῶν αβ, βγ, ἐπιζευχθεισῶν, ἐὰν γένηται καὶ τὰ λοιπὰ, ὡς προηρμήνευται, ἔσται τὸ ζητούμενον.

Πρότασις Γ΄.

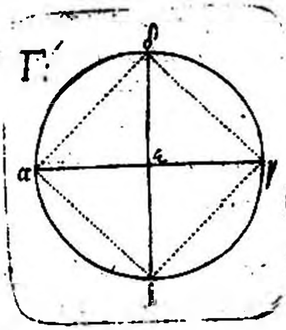
Τὸν δοθέντα κύκλον εἰς μέρη τέσσαρα ἴσα διελεῖν.

Ἔστω ὁ αβγδ, κύκλος, ὃν δεῖ εἰς μέρη τέσσαρα ἴσα ἀλλήλοις τεμεῖν. Εὑρεθήτω δὴ κατὰ τὴν α: τοῦ παρόντος, τὸ κέντρον αὐτοῦ, εἴγε ἄγνωστον εἴη, καὶ ἔστω τοῦτο τὸ ε, δι᾽ οὗ ἤχθω ἡ αεγ, ὡς ἔτυχε, καὶ συνεστάθω ἐπ᾽ αὐτῆς πρὸς ὀρθὰς πρὸς τῷ ε, σημείῳ ἡ δεβ, εὐθεῖα, περατουμένη ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, καὶ ὁ αβγδ, δοθεὶς κύκλος διαιρεθήσεται εἰς μέρη τέσσαρα ἴσα ἀλλήλοις, ἃ καὶ τεταρτημόρια λέγεται, τὰ αδ, δγ, γβ, βα. Ἐπιζεύχθω-

σαν

σαν δὴ αἱ αδ, δγ, γβ, βα, ὑποτείνουσαι. καὶ ἐπεὶ ἡ αε, ἴση ἐστὶ τῇ εγ, κοινὴ δὲ ἡ εδ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αεδ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δεγ, ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, πάντως καὶ αἱ αδ, δγ, ὑποτείνουσαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν δ΄: τοῦ α΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, καὶ διὰ τὴν κη΄: τοῦ γ΄: τοῦ αὐτοῦ, καὶ αἱ αδ, δγ, περιφέρειαι ἴσαι ὅμοιαι εἰσί. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσονται ἴσαι καὶ αἱ δγ, γβ, καὶ αἱ γβ, βα, καὶ αἱ βα, αδ, ὥστε ὁ αβγδ, κύκλος διῄρηται διὰ τῶν αεγ, δεβ, διαθεισῶν εἰς μέρη τέσσαρα ἴσα ἀλλήλοις τὰ αδ, δγ, γβ, βα, ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Geom. Lib. 2. Fig. 3.

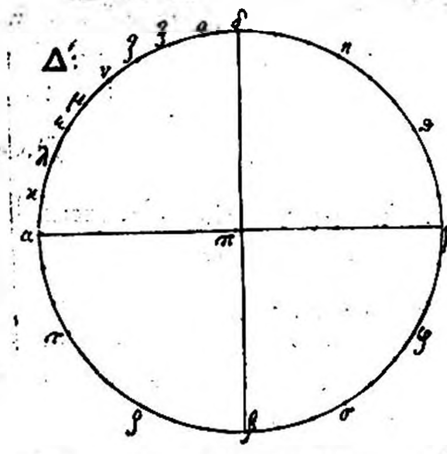


Πρότασις Δ':

Τὸν δοθέντα κύκλον εἰς μοίρας τριακοσίας καὶ ἑξήκοντα διελεῖν.

Ἔστω ὁ αβγδ, κύκλος διαιρεθησόμενος εἰς μοίρας τριακοσίας καὶ ἑξήκοντα. Διαιρεθήτω δὴ α: κατὰ τὴν πρώτην εἰς μέρη τέσσαρα τὰ αδ, δγ, γβ, βα, ἴσα ἀλλήλοις. εἶτα ἕκαστον τῶν αδ, δγ, γβ, βα, τεταρτημορίων διαιρεθήτω εἰς τρία ἴσα τὰ αε, εζ, ζδ, δη, καὶ λοιπά. καὶ διαιρεθήσεται ὁ κύκλος ὅλος εἰς δυοκαίδεκα μέρη ἴσα ἀλλήλοις, ὁ γὰρ 4: ἐπὶ τὸν 3: πολλαπλασ: τὸν 12: ποιεῖ. ἕκαστον δὲ τῶν δωδεκατημορίων διαιρεθήτω αὖθις εἰς τρία ἴσα τὰ ακ, κλ, λε, εμ, μν, νζ, ζξ, ξο, οδ, καὶ λοιπά, καὶ διαιρεθήσεται πάντως ὁ αὐτὸς κύκλος εἰς μέρη λϛ': ἕκαστον δὲ τῶν τριακονταεξημορίων διαιρεθήτω εἰς δύο, καὶ τούτων ἕκαστον εἰς πέντε, ἢ γοῦν ἕκαστον τῶν τριακονταεξημορίων εἰς πέντε, καὶ τούτων ἕκαστον εἰς δύο, τὸ αὐτὸ γὰρ ἔσται, καὶ διαιρεθήσεται ὁ κύκλος ὅλος εἰς τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν μερῶν. τὰ γὰρ ἓξ καὶ τριάκοντα μέρη διπλασιαζόμενα μὲν ποιοῦσι τὰ δύο καὶ ἑβδομήκοντα, ἅτινα πενταπλασιαζόμενα ποιοῦσι τὰ τριακόσια καὶ ἑξήκοντα μέρη, πενταπλασιαζόμενα δὲ ποιοῦσι τὰ ἑκατὸν καὶ ὀγδοήκοντα, ἅτινα διπλασιαζόμενα τὰ τριακόσια καὶ ἑξήκοντα ἀναδείκνυσι, καὶ ταῦτα μοῖραι προσαγορεύονται, ὧν ἕκαστον εἰς ἑξήκοντα αὖθις ὑποδιαιρεῖται, καὶ καὶ προσυποδιαιρεῖται, ὡς ἐν ἄλλοις Θεοῦ διδόντος δειξόμεθα.

Geom. Lib. 2. Fig. 4.



Διὰ δὲ τὸ εὐχερέστερον διῃρημένου τοῦ κύκλου εἰς μέρη τέσσαρα, καθ' ὃν εἴρηται τρόπον, ληφθήτω τοῦ διαβήτου μετὰ πάσης

ἀκρι-

ἀκριβείας τὸ τῆς απ, ἡμιδιαμέτρου διάστημα, καὶ ἀρξάμενος ἀφ' ἑνὸς τῶν τεσσάρων ἀρκτικῶν σημείων, δὸς εἰπεῖν ἀπὸ τοῦ γ, μετάφερε τοῦτο ἐπὶ τὸ η, ἀπὸ δὲ τοῦ η, ἐπὶ τὸ ζ, ἀπὸ δὲ τοῦ ζ, ἐπὶ τὸ α, ἀπὸ δὲ τοῦ α, ἐπὶ τὸ ρ, καὶ ἀπὸ τοῦ ρ, ἐπὶ τὸ σ, ἀπὸ δὲ τοῦ σ, εἴγε ἡ πρᾶξις μετ' ἀκριβείας γένηται, συμπεσεῖται τῷ γ. Ἀρξάμενος δὲ ἀπὸ τοῦ δ, μετάφερε τοῦτο ἐπὶ τὸ ε, ἀπὸ δὲ τοῦ ε, ἐπὶ τὸ τ, ἀπὸ δὲ τοῦ τ, ἐπὶ τὸ β, ἀπὸ δὲ τοῦ β, ἐπὶ τὸ φ, καὶ ἀπὸ τοῦ φ, ἐπὶ τὸ θ, ἀπὸ δὲ τοῦ θ, μεταφερόμενον συμπεσεῖται τῷ δ, καὶ διαιρεθήσεται ὁ κύκλος εἰς μέρη δυοκαίδεκα, ὧν ἕκαστον διαιρεθήτω εἰς τρία, καὶ τὰ λοιπὰ γενέσθω ὡς προηρμήνευται.

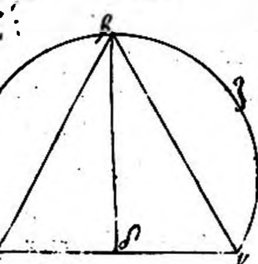
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δυνάμεθα συναγαγεῖν, καὶ ὅπως ἔξεστι τεταρτημόριον κύκλου εἰς μοίρας ϙ': διαιρεῖν. Διῃρημένου γὰρ τὴν ἀρχὴν εἰς γ': ἕκαστον δὲ τῶν τριῶν αὐτοῦ μερῶν αὖθις εἰς τρία, διαιρεθήσεται τὸ ὅλον εἰς θ': διῃρημένου δὲ καὶ ἑκάστου τῶν ἐννέα δίχα, διαιρεθήσεται εἰς ιη, ἐὰν δὲ καὶ τῶν ιη, ἕκαστον εἰς ε': διαιρεθῇ, διαιρεθήσεται τὸ ὅλον εἰς ϙ':

Geom. Lib. 2. Fig. 5.

Πρότασις Ε'.

Ε:



Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.

Ἔστω τεμεῖν δίχα τὴν αβγ, περιφέρειαν. Ἐπεζεύχθω δὴ ἡ αγ, εὐθεῖα, καὶ τμηθήτω δίχα κατὰ τὸ δ, διὰ τῆς δ': τοῦ α': τοῦ παρόντος, ἀφ' οὗ ἀνεστάθω κάθετος ἐπὶ τῆς αγ, ἡ δβ, καὶ τμηθήσεται ἡ αβγ, δίχα κατὰ τὸ β. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αβ, βγ, καὶ ἐπεὶ αἱ αδ, δγ, ἴσαι εἰσί, κοινὴ δὲ ἡ δβ, καὶ ἡ ὑπὸ αδβ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ γδβ, πάντως γε αἱ αβ, γβ, εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν δ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὥστε καὶ αἱ αεβ, γζβ, περιφέρειαι ἴσαι ὁμοίως εἰσὶ κατὰ τὴν κη': τοῦ γ': τοῦ αὐτοῦ.

Πρότασις ϛ'.

Τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου.

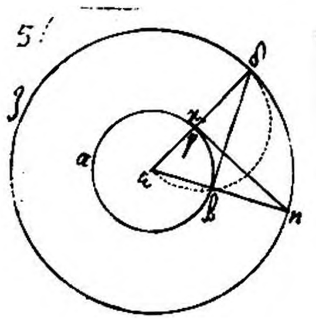
Ἔστω κύκλος μὲν ὁ αβγ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον, ἀφ' οὗ ζητεῖται ἐφαπτομένην εὐθεῖαν τοῦ αβγ, κύκλου ἀγαγεῖν, τὸ δ. Εὑρεθήτω δὴ τὸ ε, κέντρον τοῦ δοθέντος κύκλου αβγ, κατὰ τὴν α': τοῦ παρόντος, ἀφ' οὗ ὡς ἀπὸ κέντρου διαστήματι τῷ εδ, γραφήτω ὁ ζηδ, κύκλος, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εδ, τέμνουσα τὸν αβγ, κύκλον κατὰ τὸ γ, πρὸς ᾧ συνεστάθω κάθετος ἐπὶ τῆς εδ, ἡ γη. Εἶτα ἐπεζεύχ-

θωσαν

θωσαν αἱ ε η, δ β, καὶ ἡ δ β, ἐφάψεται τοῦ δοθέντος α β γ, κύκλου κατὰ τὴν ιζ′: τοῦ γ′: τοῦ Στοιχειωτοῦ.

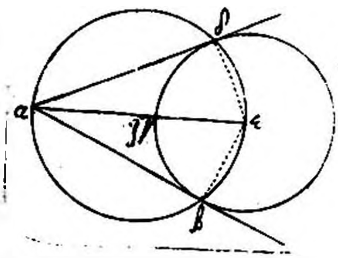
Ἄλλως. Ἐπεζεύχθω ἡ ε δ, καὶ τμηθείσης δίχα ταύτης κατὰ τὸ κ, κέντρῳ μὲν τοῦ κ, διαστήματι δὲ τοῦ ε κ, γραφήτω ἡμικύκλιον τὸ ε β δ, τέμνον τὸν α β γ, κύκλον κατὰ τὸ β. Εἶτα ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε β, δ β, καὶ ἡ δ β, ἅψεται τοῦ δοθέντος α β γ, κύκλου κατὰ τὸ β, ἡ γὰρ ὑπὸ ε β δ, γωνία ὀρθή ἐστι, κατὰ τὴν λα′: τοῦ γ′: τοῦ Στοιχειωτοῦ, κατὰ δὲ τὸ πόρισμα τῆς ις′: τοῦ αὐτοῦ, ἡ πρὸς ὀρθὰς τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου ἐπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου.

Geom. Lib. 2. Fig. 6.



Πρότασις Ζ′.

Κύκλου δοθέντος δύο εὐθείας ἁπτομένας αὐτοῦ ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου ἐκτὸς τοῦ κύκλου.



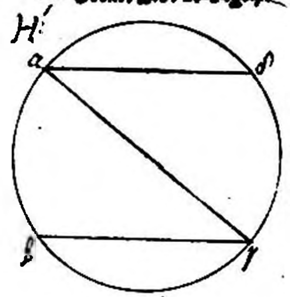
Ἀπὸ τοῦ α, ἤδη δοθέντος σημείου ἔξω ἐκβαλεῖν δύο εὐθείας ἁπτομένας τοῦ β γ δ, δοθέντος κύκλου. Εὑρεθήτω τοίνυν τὸ κέντρον αὐτοῦ, καὶ ἔστω τὸ ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ α ε, ταύτης δὲ δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ ζ, γραφήτω ἀπὸ τοῦ ζ, σημείου, διαστήματι τοῦ ζ α, ἡ ζ ε, κύκλος ὁ α β ε δ, τέμνων τὸν δοθέντα κύκλον κατὰ τὰ β, καὶ δ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α β, α δ, ἃς λέγω εἶναι τὰς ζητουμένας, καὶ ἐφάπτεσθαι τοῦ β γ δ, δοθέντος κύκλου. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ε β, ε δ, καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ α β ε, α δ ε, γωνιῶν ἐν ἡμικυκλίῳ ἐστὶ, πάντως γε κατὰ τὴν λα′: τοῦ γ′: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὀρθαί εἰσιν. ὥστε κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ις′: τοῦ αὐτοῦ, αἱ α δ, α β, εὐθεῖαι ἅπτονται τοῦ β γ δ, δοθέντος κύκλου, ἡ μὲν κατὰ τὸ δ, ἡ δὲ κατὰ τὸ β, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις Η′.

Δύο εὐθεῖαι ἐν κύκλῳ ἀλλήλαις μὴ τεμνόμεναι παράλληλοί εἰσιν, ἐὰν τὰ ὑπ' αὐτῶν ἑκατέρωθεν τοῦ κύκλου ἐναπολαμβανόμεναι τόξα ἴσα ὦσιν. ἐὰν δὲ αἱ εὐθεῖαι παράλληλοι ὦσι, τὰ ὑπ' αὐτῶν ἐναπολαμβανόμενα τόξα ἑκατέρωθεν τοῦ κύκλου ἴσα εἰσίν.

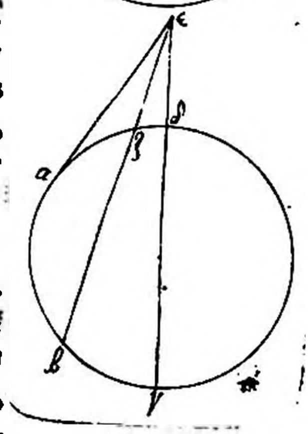
Εὐθεῖαι ἤδη αἱ α δ, β γ, ἐν κύκλῳ τοῦ α β γ δ, μὴ τεμνόμεναι ἀλλήλαις, ἐναπολαμβανέτωσαν δύο τόξα ἴσα τὰς α β, δ γ. Λέγω δὴ ταύτας παραλλήλους εἶναι. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ α γ. καὶ ἐπεὶ αἱ α β, δ γ, περιφέρειαι ἴσαι εἰσὶ, πάνπως γε καὶ αἱ ὑπὸ α γ β, γ α δ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν κζ΄: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὥστε κατὰ τὴν κζ΄: τοῦ α΄: τοῦ αὐτοῦ, αἱ α δ, β γ, εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσι. Διὰ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται ἔτι καὶ τὰ α β, δ γ, τόξα ἴσα εἶναι ἀλλήλοις. Κειμένων γὰρ τῶν α δ, β γ, εὐθειῶν παραλλήλως, καὶ τῆς α γ, ἐπιζευχθείσης, ἔσονται αἱ ὑπὸ δ α γ, β γ α, γωνίαι ἴσαι, αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν. ὥστε τὰ α β, δ γ, τόξα ἴσα εἰσὶν, ὅπερ ἦν τὸ β΄: δύο ἄρα εὐθεῖαι ἐν κύκλῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

~~Geom. Lib. 2. Fig. 7.~~



ΛΗΜΜΑ.

Ἐὰν κύκλου ἐκτὸς ληφθῇ τι σημεῖον, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου προσπέσωσι τρεῖς εὐθεῖαι, ὧν ἡ μὲν ἅπτηται τοῦ κύκλου, αἱ δὲ λοιπαὶ δύο τέμνωσιν αὐτὸν, αἱ μὲν τὸν κύκλον τέμνουσαι εὐθεῖαι, ἀντιπεπονθότως ἕξουσι πρὸς τὰ ἐκτὸς τοῦ κύκλου τμήματα αὐτῶν, ἡ δ' ἁπτομένη μέση ἀνάλογος ἔσται ἑκατέρας τῶν τεμνουσῶν καὶ τῶν ἐκτὸς τοῦ κύκλου τμημάτων.



Ληφθήτω δὴ ἐκτὸς τοῦ α β γ δ, κύκλου τυχὸν σημεῖον τὸ ε, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πιπτέτωσαν τρεῖς εὐθεῖαι αἱ α ε, ε β, ε γ, ὧν ἡ μὲν ε α, ἁπτέσθω τοῦ κύκλου κατὰ τὸ α, σημεῖον, ἡ δὲ ε β, τεμνέτω αὐτὸν κατὰ τὸ ζ, ὥσπερ καὶ ἡ ε γ, κατὰ τὸ δ. Λέγω ὅτι ὡς ἔχει ἡ ε β, ὅλη πρὸς τὴν ε γ, ὅλην, οὕτως ἔχει ἀντιπεπονθότως καὶ τὸ ε δ, τμῆμα τῆς ε γ, πρὸς τὸ τῆς ε β, τμῆμα τὸ ε ζ, ὡς δὲ ἑκατέρα τῶν ε β, ε γ, πρὸς τὴν ε α, οὕτως ἔχει καὶ ἡ ε α, πρὸς ἑκάτερον τῶν ε ζ, ε δ, τμημάτων, κατὰ γὰρ τὴν λϛ΄: τοῦ γ΄: τοῦ Εὐκλείδου τὸ ἀπὸ τῆς ε α, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν ε β, ε ζ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ε γ, ε δ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ε β, ε ζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ε γ, ε δ. τεσσάρων οὖν γραμμῶν ἐφεξῆς κειμένων τῶν ε β, ε γ, ε δ, ε ζ, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ε β, ε ζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων ε γ, ε δ, αἱ τέσσαρες δήπουθεν αὗται εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσι κατὰ τὴν ιϛ΄: τοῦ ϛ΄: τοῦ Εὐκλείδου, ὡς ἔχει ἄρα ἡ ε β, πρὸς τὴν ε γ, ἔχει ἡ ε δ, πρὸς τὴν ε ζ. ὅτι δὲ καὶ ἡ α ε, μέση ἐστὶν ἀνάλογος ἑκατέρας τῶν ε β, ε γ, καὶ τῶν ἐκτὸς τοῦ κύκλου αὐτῶν τμημάτων τῶν ε ζ, ε δ, δείκνυται διὰ τῆς ῥηθείσης λϛ΄: κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ιϛ΄: ἐὰν ἄρα κύκλου ἐκτὸς, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

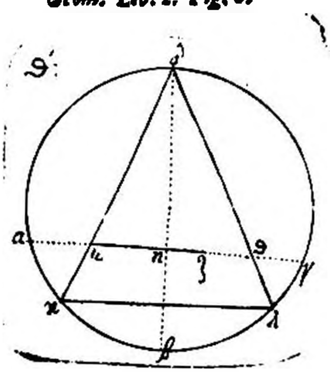
Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐκτὸς τοῦ κύκλου δύο εὐθειῶν προσπιπτουσῶν, ὥστε τέμνειν ἑκατέραν τὸν κύκλον, τὸ ἀπὸ τῆς μιᾶς καὶ τοῦ ἐναπολαμβανομένου αὐτῆς τμήματος μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ κυρτῆς περιφερείας περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς ἑτέρας καὶ τοῦ ἐναπολαμβανομένου αὐτῆς τμήματος μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς κυρτῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἐὰν δὲ δύο ὦσιν εὐθεῖαι πρὸς ἓν συμπίπτουσαι σημεῖον, καὶ ἑκατέρα τούτων τμηθῇ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς μιᾶς ὀρθογώνιον καὶ τοῦ πρὸς τὸ σημεῖον τμήματος αὐτῆς ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῆς ἑτέρας καὶ τοῦ τμήματος αὐτῆς, ὁ διὰ τῶν τομῶν αὐτῶν καὶ τοῦ τῆς μιᾶς πέρατος διερχόμενος κύκλος, διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ πέρατος τῆς ἑτέρας.

Πρότασις Θ'.

Δύο σημείων δοθέντων ἐντὸς τοῦ κύκλου, ἢ ἐκτός, οὐδετέρου μέντοι ἐπὶ τῆς περιφερείας, διὰ τῶν αὐτῶν σημείων εὐθείας ἀγαγεῖν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, τεμνούσας τὸν αὐτὸν κύκλον, ὥστε τὴν τὰς τομὰς ἐπιζευγνύουσαν τοῦ κύκλου, παράλληλον εἶναι τῇ τὰ δοθέντα σημεῖα ἐπιζευγνυούσῃ εὐθείᾳ.

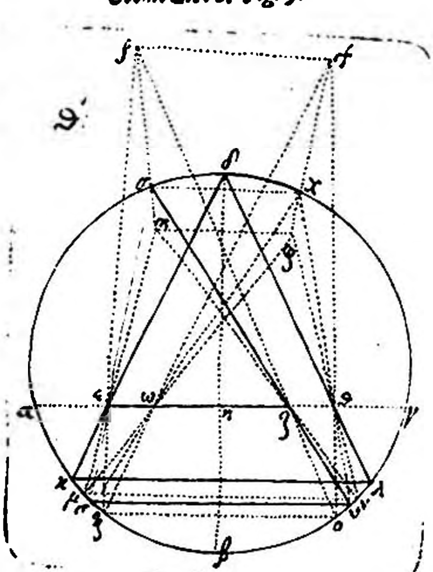
Ἔστω κύκλος ὁ αβγδ, σημεῖα δὲ τὰ εζ, ἐντὸς τοῦ κύκλου, καὶ ζητείσθω διὰ τῶν ε, καὶ ζ, σημείων εὐθείας ἐκβαλεῖν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, τεμνούσας τὸν κύκλον, ὥστε καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 2. Fig. 8.



Ἤχθω δὴ ἡ εζ, καὶ τὸ συνεχὲς ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ὥστε συμπίπτειν τῇ τοῦ αβγδ, δοθέντος κύκλου περιφερείᾳ κατὰ τὰ α, καὶ γ, σημεῖα, καὶ διαιρείσθω ἡ αγ, δίχα κατὰ τὸ η, καὶ ἤχθω κάθετος ἐπὶ τῆς αγ, διὰ τοῦ η, ἡ δβ, κἂν μὲν διῄρηται δίχα καὶ ἡ δοθεῖσα διὰ τῆς δβ, ὡς ἡ εθ. Συνεστάθω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ εδθ, ἐξαγομένων τῶν ἴσων πλευρῶν δε, δθ, μέχρι τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας πρὸς τὰ κ, καὶ λ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ κλ, καὶ αὕτη ἔσται παράλληλος τῇ δοθείσῃ κατὰ τὸ ἐπιταχθέν. αἱ γὰρ δεκ, δθλ, ἀφ' ἑνὸς σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ἐξαγόμεναι τοῦ δ, διὰ τῶν περάτων τῆς δοθείσης εὐθείας διέρχονται, τέμνουσαι τὸν κύκλον κατὰ τὰ κ, καὶ λ. Ὅτι δὲ ἡ κλ, παράλληλός ἐστι τῇ δοθείσῃ, δὸς εἰπεῖν, εθ, δῆλον. ἐπεὶ γὰρ ἀπὸ τοῦ δ, κατὰ κορυφὴν σημείου τοῦ εδθ, ἰσοσκελοῦς τριγώνου πέπτωκε κάθετος ἐπὶ τῆς εθ, βάσεως ἡ δη, πάντως γε αἱ ὑπὸ κδβ, λ δ β, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸ α': πόρισμα τῆς γ': προτάσεως τοῦ γ': βιβλίου τῶν καθ' ἡμᾶς Στοιχείων Εὐκλείδου. Ἑπομένως δὲ καὶ αἱ κ β, β λ, περιφέρειαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἀλλὰ καὶ αἱ α β, β γ, ἴσαι ὁμοίως εἰσὶ διὰ τὰ αὐτά. ἀφαιρουμένων ἄρα τῶν ἴσων β κ, β λ, ἐγκαταλείπονται αἱ α κ, γ λ, περιφέρειαι ἴσαι. ὥστε αἱ α γ, κ λ, εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσι κατὰ τὴν ἀνωτέρω. Εἰ δὲ ἡ τὰ δοθέντα ε, καὶ ζ, σημεῖα ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα εἰς ἄνισα τέμνεται ὑπὸ τῆς δ β, ὡς ἡ ε ζ, ἀχθήτω ἑκατέρωθεν κατὰ τὸ συνεχὲς τέμνουσα τὸν κύκλον κατὰ τὰ α, καὶ γ, σημεῖα, καὶ εἰλήφθω ἡ γ ϑ, ἴση τῇ α ε. καὶ συνεστάθω τὸ δ κ λ, ἰσοσκελὲς τρίγωνον, εἶτα

Geom. Lib. 2. Fig. 9.



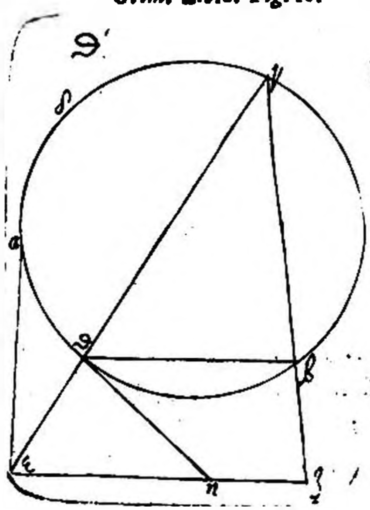
εἰλήφθωσαν αἵ τε κ μ, λ ν, καὶ μ ξ, ν ο, περιφέρειαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ἀπὸ δὲ τῶν μ, καὶ ν, σημείων ἀχθήτωσαν αἱ μ π, ν π, διὰ τῶν ε, καὶ ζ, διαβαίνουσαι σημείων, καὶ μὲν τὸ π, σημεῖον καθ' ὃ αἱ μ π, ν π, εὐθεῖαι συμπίπτουσιν, ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας πέσῃ, ἔσται τὸ ἐπιταχθέν. Ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ μ ν, παράλληλος ἔσται κατὰ τὴν ἀνωτέρω τῇ κ λ, ἑπομένως δὲ καὶ τῇ ε ζ. εἰ δὲ τὸ π, σημεῖον μὴ ἐν τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ πέσῃ, ἀχθήτωσαν διὰ τῶν ε, καὶ ζ, σημείων καὶ αἱ ξ ρ, ο ρ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ π ρ, τέμνουσα τὸν κύκλον κατὰ τὸ σ, ἀπὸ δὲ τοῦ σ, ἀχθήτωσαν ἔτι καὶ διὰ τῶν ε, καὶ ζ, δοθέντων σημείων αἱ σ τ, σ υ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ τ υ. Λέγω δὴ ταύτην παράλληλον εἶναι τῇ ε ζ. Συνεστάσθω γὰρ ἐπὶ μὲν τῆς μ ν, εὐθείας τρίγωνον, τὸ μ φ ν, ἐπὶ δὲ τῆς τ υ, τὸ τ χ υ, καὶ ἐπὶ τῆς ξ ο, τὸ ξ ψ ο, ὥστε τὸ μὲν μ φ ν, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον εἶναι τῷ μ π ν, τὸ δὲ τ χ υ, τῷ τ σ υ, καὶ τὸ ξ ψ ο, τῷ ξ ρ ο, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ π φ, σ χ, ρ ψ, καὶ πάντως γε κατὰ τὴν λ ϑ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἡ μὲν π φ, εὐθεῖα παράλληλος ἔσται τῇ μ ν, ἡ δὲ σ χ, τῇ τ υ, ἡ δὲ ρ ψ, τῇ ξ ο. Ἐπεὶ δὲ ἡ ε ϑ, παράλληλός ἐστιν ἑκατέρᾳ τῶν μ ν, ξ ο, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, δῆλον ἄρα ὅτι τῶν μ π ν, μ φ ν, τριγώνων, αἱ πλευραὶ ἀνάλογον τέμνονται κατὰ τὴν δ': τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὥστε ὡς ἔχει ἡ π μ, πρὸς τὴν μ ν, ἔχει καὶ ἡ π ε, πρὸς τὴν ε ζ, ὡς δὲ ἡ φ ν, πρὸς τὴν ν μ, ἡ φ ϑ, πρὸς τὴν ϑ ω, ἀλλ' ὡς ἡ π μ, πρὸς τὴν μ ν, ἔχει καὶ ἡ φ ν, πρὸς τὴν ν μ, κατὰ τὴν ζ': τοῦ ε': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ὡς ἔχει ἡ π ε, πρὸς τὴν ε ζ, ἔχει καὶ ἡ φ ϑ, πρὸς τὴν ϑ ω. Ἐπεὶ δὲ ἡ μ ν, τῇ ν μ, ἴση ἐστὶν (ἡ αὐτὴ γὰρ) ἄρα καὶ ἡ ε ζ, τῇ ϑ ω, ἴση ἐστὶ, καὶ τὰ π ε ζ, φ ϑ ω, τρίγωνα ὁμοίως ἴσα εἰσίν. ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνια, δῆλον. ἡ μὲν γὰρ ὑπὸ π ε ζ, γωνία ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ π μ ν, ἡ

δὲ

δὲ ὑπὸ φθω, τῇ ὑπὸ φνμ, ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ πμν, φνμ, ἴσαι εἰσὶ, διὰ τὸ ἰσογώνια γεγονέναι τὰ πμν, φνμ, τρίγωνα, ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ πεζ, φθω, ὁμοίως ἴσαι εἰσί. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ πζε, γων: ἴση τῇ ὑπὸ φωθ, ὥστε τὰ πεζ, φθω, τρίγων: ἰσογών: εἰσὶν, ἄρα ἡ πε, ἴση τῇ φθ. ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται καὶ ἡ ρε, ἴση τῇ ψθ, δύο δὴ αἱ πε, ερ, πλευραὶ ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς φθ, θψ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ρεπ, γων: ἴση τῇ ὑπὸ ψθφ, ὡς δείξομεθα, καὶ βάσις ἄρα ἡ ρπ, βάσει τῇ ψφ, ἴση ἐστὶ κατὰ τὴν δ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ σρε, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ χψθ, ἴση, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ρεσ, τῇ ὑπὸ ψθχ, ἴση, ὡς δειχθήσεται, ἄρα κατὰ τὴν κϛ': τοῦ αὐτοῦ καὶ ἡ εσ, ἴση ἐστὶ τῇ θχ, ἔστι δὲ καὶ ἡ εζ, τῇ θω, ἴση, ὡς δέδεικται, καὶ γων: ἡ ὑπὸ σεζ, τῇ ὑπὸ χθω. ἄρα κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν δ': τὸ πεζ, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ φθω, τριγώνῳ, καὶ κατὰ τὴν μ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, αἱ πφ, εθ, δ᾽θ: παράλληλοί εἰσιν, ἀλλ᾽ ἡ πφ, παράλληλός ἐστι τῇ τυ, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ ἡ τυ, παράλληλός ἐστι τῇ εζ, ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ὅτι δὲ ἡ ὑπὸ ρεπ, γων: ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ψθφ, δῆλον. αἱ μὲν γὰρ ὑπὸ ρεζ, ψθω, ἴσαι εἰσὶ διὰ τὸ ἴσας εἶναι καὶ τὰς ὑπὸ ρξο, ψοξ, αἱ δὲ ὑπὸ πεζ, φθω, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς ὑπὸ πμν, φνμ, ἴσαι καὶ αὐταί εἰσιν, ὥστε ἀφαιρουμένων τῶν ὑπὸ πεζ, φθω, ἴσων γωνιῶν ἀπὸ τῶν ρεζ, ψθω, ἐναπολείπονται αἱ ρεπ, ψθφ, ἴσαι, ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ἡ ρεσ, ἴση τῇ ψθχ.

Geom. Lib.2. Fig. 10.



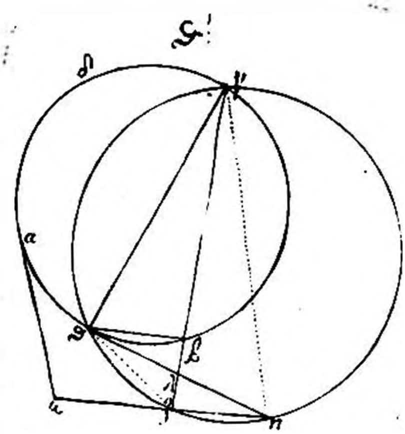
Εἰ δὲ τὰ εζ, σημεῖα ἐκτὸς ὦσι τοῦ κύκλου, ἀχθήτω ἀπὸ τοῦ ε, σημείου ἁπτομένη τοῦ κύκλου ἡ εα, κατὰ τὴν ϛ': τοῦ παρόντος, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ εζ, εἶτα εὑρεθήτω τρίτη ἀνάλογος τῶν εζ, εα, κατὰ τὴν ιγ': τοῦ α: τοῦ παρόντος, ἡ εη. Ἐπεὶ δὲ τοῦτο τριχῶς ἐνδέχεται συμβῆναι. ἢ γὰρ ἡ εη, εὑρεθεῖσα, ἐλάττων ἔσται τῆς εζ, ἢ μείζων, ἢ γοῦν ἴση. Ἔστω δὴ α: ἐλάττων, καὶ ἀπὸ τοῦ η, πιπτέτω καὶ ἑτέρα ἁπτομένη τοῦ δοθέντος κύκλου ἡ ηθ, κατὰ τὸ θ, σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ θ, ἤχθω ἡ εθγ, ἀπὸ δὲ τοῦ ζ, ἡ γζ, τέμνουσα τὸν κύκλον κατὰ τὸ β, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ θβ, καὶ ἔσται πάντως αὕτη παράλληλος τῇ εζ. Ἐπεὶ γὰρ αἱ ζε, εα, εη, ἀνάλογόν εἰσι, πάντως γε τὸ ὑπὸ τῶν ζε, εη, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς εα, τετραγώνῳ, ἀλλὰ τῷ ὑπὸ τῆς εα, τετραγώνῳ ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν γε, εθ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον κατὰ τὴν λϛ': τοῦ γ': τοῦ

Στοι-

Στοιχειωτοῦ, ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ζε, εη, ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν γε, εθ, ὀρθογωνίῳ, καὶ κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ ἀνωτέρω λήμματος ὁ διὰ τῶν θηζ, διερχόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ γ, κατὰ δὲ τὴν κβ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, αἱ ὑπὸ θγζ, θηζ, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ἀλλ' εἰσὶν καὶ αἱ ὑπὸ θηε, θηζ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. Δύο δὲ αἱ ὑπὸ θγζ, θηζ, δυσὶ ταῖς ὑπὸ θηζ, θηε, ἴσαι εἰσί, κοινῆς δὲ ἀφαιρεμένης τῆς ὑπὸ θηζ, ἐγκαταλειφθήσεται ἡ ὑπὸ θηε, ἴση τῇ ὑπὸ θγζ. ἐπεὶ δὲ τῇ ὑπὸ θγζ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ βθη, κατὰ τὴν λβ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, πάντως γε αἱ ὑπὸ βθη, θηε, ἴσαι εἰσί, καὶ κατὰ τὴν κζ': τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ, αἱ θβ, εζ, παράλληλοί εἰσιν.

Ἔστω β': ἡ εη, μείζων τῆς εζ, τῆς δὲ λοιπῆς κατασκευῆς γενομένης ὡς ἀνωτέρω, ἐπιζεύχθω ἡ θβ, καὶ ἔσται παράλληλος τῇ εζ. Ἐπεὶ γάρ εἰσιν αἱ ζε, εα, εη, ἑξῆς ἀνάλογον, πάντως γε κατὰ τὴν ιζ': τοῦ ϛ': Εὐκλείδου τὸ ὑπὸ τῶν ηε, εζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς εα, τετραγώνῳ, ἀλλὰ τούτῳ ἴσον ἐστὶ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν γε, εθ, εὐθειῶν περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, κατὰ τὸ ἀνωτέρω λῆμμα, ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ηε, εζ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν γε, εθ, καὶ κατὰ τὸ πόρισμα, τοῦ αὐτοῦ λήμματος, ὁ διὰ τῶν θζη, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ γ, ὡς ὁ θζηγ. Ἐπιζευχθεισῶν δὲ τῶν θζ, ηγ, ἔσται ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον τὸ θζηγ, καὶ κατὰ τὴν κβ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, αἱ ὑπὸ θζη, θγη, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἀπεναντίον γάρ, ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ θζη, θζε, δυσὶν ὀρθαῖς ὁμοίως εἰσὶν ἴσαι, κοινῆς ἄρα ἀφαιρεμένης τῆς ὑπὸ θζη, ἐγκαταλείπεται ἡ ὑπὸ θγη, ἴση τῇ ὑπὸ θζε. ἀλλ' ἡ ὑπὸ θζε, ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ζηθ, ζθη, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ θγη, ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ ζηθ, ζθη, ἀφαιρεμένων δὲ τῶν ἴσων τῆς τε ὑπὸ ζθη, καὶ ζγη, (ἴσαι γάρ, ὅτι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βεβήκασι περιφερείας τῆς ζη,) ἐγκαταλείπονται αἱ ὑπὸ ζηθ, ζγθ, ἴσαι, τῇ δὲ ὑπὸ ζγθ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ βθη, κατὰ τὴν λβ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἄρα ἡ ὑπὸ ζηθ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ηθβ, καὶ κατὰ τὴν κζ': τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ, ἡ βθ, τῇ ηε, παράλληλός ἐστι.

Geom. Lib. 2. Fig. 21.



Ἔστω γ': ἡ εζ, ἴση τῇ εὑρεθείσῃ τρίτῃ ἀναλόγῳ τῆς αὐτῆς εζ, καὶ εα, τούτου δὲ συμβαίνει τηνίκα ἡ εα, ἴση ἐστὶ τῇ εζ, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, πιπτέτω ἁπτομένη τοῦ αβγδ, δοθέντος κύκλου κατὰ τὸ θ, ἡ ζθ, εὐθεῖα· καὶ γενέσθω τὰ λοιπὰ τῆς κατασκευῆς, ὡς ἀνωτέρω ἡρμηνεύεται. Λέγω δὴ τὴν θβ, εὐθεῖαν παράλληλον εἶναι τῇ εζ. ἐπεὶ γὰρ αἱ αε, εζ, εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰ-

σὶ,

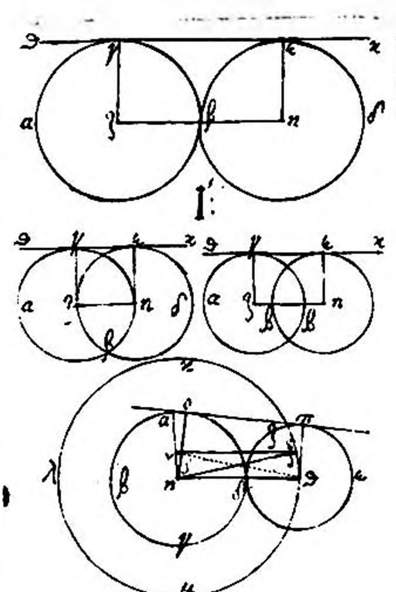
σι, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν γε, εθ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αε, τετραγώνῳ, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται, πάντως γε τὸ αὐτὸ ὀρθογώνιον ἴσον ἔσται καὶ τῷ ἀπὸ τῆς εζ, τετραγώνῳ, ὥστε κατὰ τὴν λϛ΄: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, γραφόμενος κύκλος περὶ τὸ θζγ, τρίγωνον, ἕξει τὴν μὲν γθε, εὐθεῖαν τέμνουσαν αὐτὸν, τὴν δὲ εζ, ἀπτομένην, καὶ κατὰ τὴν λβ΄: τοῦ αὐτοῦ ἡ ὑπὸ θζε, γωνία ἴση ἔσται τῇ ὑπὸ θγζ, ἀλλὰ κατὰ τὴν αὐτὴν πρότ: ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ θγζ, καὶ ἡ ὑπὸ βθζ, ἄρα ἡ ὑπὸ θζε, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βθζ, καὶ κατὰ τὴν κζ΄: τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ, ἡ θβ, παράλληλός ἐστι τῇ εζ, δύο ἄρα σημείων δοθέντων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Ι΄:

Δύο κύκλων δοθέντων ἐφαπτομένην ἀμφοτέρων εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστωσαν α: οἱ αβγ, βδε, κύκλοι ἴσοι, εἴτε ἀπτόμενοι ἀλλήλων, εἴτε τέμνοντες ἀλλήλους, διερχόμενοι διὰ τῶν κέντρων, ἢ μή, καὶ ζητείσθω ἀχθῆναι εὐθεῖα γραμμὴ ἀπτομένη ἀμφοτέρων.

Geom. Lib.2. Fig. 12.



Ι΄:

Εὑρεθήτω δὴ τὸ κέντρον ἑκατέρου, καὶ ἔστω τοῦ μὲν αβγ, τὸ ζ, τοῦ δὲ βδε, τὸ η, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ζη, ἐφ' ἧς συνεστάθωσαν κάθετοι ἀπὸ τῶν ζ, καὶ η, σημείων, ταὐτὸν δ' εἰπεῖν κέντρων, αἱ ζγ, ηε, εὐθεῖαι, τέμνουσαι τοὺς κύκλους κατὰ τὰ γ, καὶ ε, σημεῖα, δι' ὧν ἤχθω ἡ θγεκ, εὐθεῖα, ἥτις ἐφάψεται ἑκατέρου τῶν κύκλων, αἱ γὰρ ζγ, ηε, ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα ἐπὶ τῆς ζη, ἐπιζευγνύουσαι δὲ ταύτας αἱ ζη, γε, ἄρα καὶ αὗται ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν, ὥστε τὸ ζηεγ, ὀρθογώνιόν ἐστιν, ἡ γε, ἄρα ὀρθή ἐστιν ἐφ' ἑκατέρας τῶν ζγ, ηε, καὶ κατὰ τὸ πόρισμα, τῆς ιϛ΄: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἐφάπτεται τούτων αβγ, καὶ βδε, κύκλων.

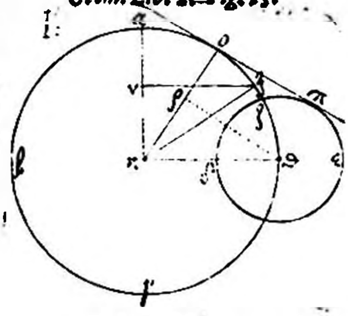
Ἔστωσαν β΄: ἄνισοι οἱ αβγδ, καὶ δεζ, κύκλοι. εἰ μὲν οὖν ὁ μείζων οὐ διέρχεται διὰ καὶ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάττονος, εὑρεθήτωσαν τὰ κέντρα τῶν αὐτῶν κύκλων, καὶ ἔστωσαν τὰ η, καὶ θ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ η, διαστήματι δὲ τῷ ηθ, γραφήτω ὁ κλμθ, κύκλος, ἀπὸ δὲ τοῦ η, ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς ηθ, ἐπιζευχθείσης ἡ ηα, ἀφ' ἧς ἀφῃρήσθω ἡ αν, ἴση τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τοῦ ἐλάττονος κύκλου, καὶ ἀπὸ τοῦ ν, ἤχθω παράλληλος τῇ ηθ, ἡ νξ, τέμνουσα τὸν κλμθ, κύκλον κατὰ τὸ ξ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ηξ, τῇ δὲ ὑπὸ ξηα, γωνίᾳ γενέσθω ἴση ἡ

ὑπὸ

ὑπὸ θ η ο, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἤχθω ἡ θ π, καὶ διήχθω ἡ ο π, ἥτις ἐφάψεται τῶν α β γ δ, καὶ δ ε ζ, κύκλων. Εἰλήφθω γὰρ ἡ η ρ, ἴση τῇ η ν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ θ ρ, καὶ ἐπεὶ παράλληλος τῇ η θ, ἤχθη ἡ ν ξ, πάντως γε ἡ ὑπὸ η ν ξ, γωνία ὀρθή ἐστιν. ὀρθὴ γάρ ἐστι καὶ ἡ ὑπὸ ν η θ. εἶτα ἐπεὶ τῶν θ η ρ, ξ η ν, τριγώνων αἱ δύο πλευραὶ ξ η, η ν, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς θ η, η ρ, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι κατὰ τὴν κατασκευὴν, δῆλον ὅτι κατὰ τὴν δ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, αἱ ὑπὸ η ν ξ, η ρ θ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἀλλ' ἡ ὑπὸ η ν ξ, γέγονεν ὀρθὴ, ὀρθὴ ἄρα ἔσται καὶ ἡ ὑπὸ η ρ θ. Ἐπεὶ δὲ αἱ ο ρ, θ π, ἴσαι εἰσὶ καὶ παράλληλοι, ἄρα καὶ αἱ ρ θ, ο π, ὁμοίως ἴσαι εἰσὶ καὶ παράλληλοι. αἱ δὲ ὑπὸ ο ρ θ, ρ θ π, γωνίαι εἰσὶν ὀρθαὶ, πάντως γε καὶ αἱ ὑπὸ ρ ο π, ο π θ, γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. ἴσαι γὰρ ταῖς ἀπεναντίον κατὰ τὴν λ δ': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ. κατὰ δὲ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ': τοῦ ῥηθέντος γ': ἡ ο π, ἅπτεται ἑκατέρου τῶν κύκλων. εἰ δὲ ὁ μείζων κύκλος διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάττονος, ὡς ὁ α β γ θ, ἐπιζεύχθω ἡ διὰ τῶν κέντρων η θ, καὶ συνεςάθω ἐπὶ τῆς η θ, πρὸς ὀρθὰς ἡ η α, εἶτα ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς η α, ἡ α ν, ἴση τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τοῦ ἐλάττονος κύκλου, τὰ δὲ λοιπὰ γενέσθω, ὡς προηρμήνευται, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθὲν, ὡς δῆλον ἐκ τῶν ἀνωτέρω.

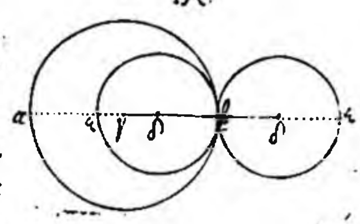
Geom. Lib. 2. Fig. 13.

I:



Πρότασις ΙΑ':

ΙΑ'



Κύκλου δοθέντος ἁπτόμενον αὐτοῦ καταγράψαι πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ.

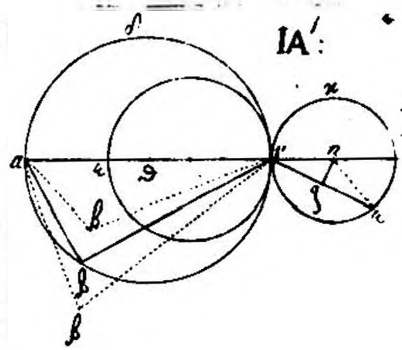
Δοθήτω α': κύκλος ὁ α β, καὶ ζητηθήτω γραφῆναι ἕτερος κύκλος τῷ τυχόντι διαστήματι ἁπτόμενος τοῦ α β, κατὰ τὸ β, σημεῖον, ἤτοι ἐντὸς, ἢ ἐκτός. Εὑρεθήτω δὴ τὸ κέντρον τοῦ α β, κύκλου, καὶ ἔστω τοῦτο τὸ γ, δι' οὗ ἤχθω ἡ β γ, ἐκτεινομένη ἑκατέρωθεν κατὰ τὸ συνεχές. Εἶτα εἰλήφθω τυχὸν διάστημα τὸ δ, ἢ ἐντὸς τοῦ κύκλου, ἢ ἐκτὸς, ἀφ' οὗ ὡς ἀπὸ κέντρου διαστήματι τῷ ε β, γραφήτω κύκλος ὁ ε β, καὶ ἐφάψεται οὗτος τοῦ α β, δοθέντος κατὰ τὸ β, σημεῖον, κατὰ γὰρ τὴν ια': καὶ ιβ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ. ἐπεὶ ἡ γ β, ἐκβαλλομένη διέρχεται διὰ τῶν κέντρων τῶν α β, καὶ ε β, κύκλων, καὶ διὰ τοῦ β, σημείου, τὸ β, σημεῖον πάντως ἔσται ἡ ἐπαφὴ τῶν κύκλων.

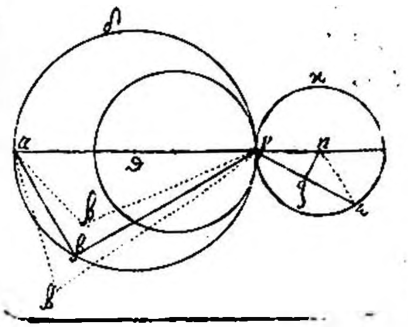
Ἔστω β': ὁ α β γ δ, δοθεὶς κύκλος, σημεῖον δὲ, καθ' ὃ ζητεῖται ἅπτεσθαι αὐτοῦ ἕτερός τις κύκλος, τὸ γ. δεδόσθω δὲ καὶ τὸ ε, σημεῖον ἢ ἐντὸς, ἢ ἐκτὸς

τοῦ

τοῦ κύκλου, δι' οὗ δεῖ τὸν ζητούμενον διέρχεσθαι κύκλον. Ἐπεζεύχθω δὴ ἡ εγ, καὶ τμηθήτω δίχα κατὰ τὸ ζ, ἀπὸ δὲ τοῦ ζ, ἀνεστάσθω κάθετος ἐπὶ τῆς εγ, ἡ ζη. εἶτα εὑρεθήτω τὸ κέντρον τοῦ αβγδ, κύκλου,

Geom. Lib. 2. Fig. 14.





δηλ: τὸ θ, καὶ διήχθω ἡ θγ, ἐκβαλλομένη ἑκατέρωθεν κατὰ τὸ συνεχές, ἥτις τεμεῖ τὴν ζη, κατὰ τὸ η, ἀφ' οὗ ὡς ἀπὸ κέντρου διαστήματι τῷ ηε, ἢ ηγ, γραφήτω κύκλος ὁ εγκ, καὶ οὗτος ἔσται ὁ ζητούμενος. Κατὰ γὰρ τὴν δ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, αἱ ηε, ηγ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὅτι δὲ καὶ ἅπτεται ὁ εγκ, τοῦ αβγδ, δείκνυται διὰ τῆς ια': καὶ ιβ': τοῦ γ': τοῦ αὐτοῦ, ἡ γὰρ θγ, διὰ τοῦ δοθέντος γ, σημείου καὶ τῶν κέντρων ἑκατέρου τῶν κύκλων διέρχεται.

Εἰ δὲ ἡ γε, διέλθῃ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ αβγδ, κύκλου, τμηθήτω μόνον ἡ γε, δίχα κατὰ τὸ η, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διαστήματι τῷ ηε, ἢ ηγ, γραφήτω κύκλος, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθέν. ὁ λόγος ἐκ τῶν ἀνωτέρω σαφής.

Ἔστω γ': ὁ εγκ, κύκλος, καὶ σημεῖον τὸ β, δι' οὗ ζητηθήτω διελθεῖν ἕτερον κύκλον ἁπτόμενον τοῦ εγκ, κατὰ τὸ γ. Ἐπεζεύχθω δὴ ἡ γβ, καὶ διὰ τοῦ η, κέντρου τοῦ εγκ, δοθέντος κύκλου διήχθω ἡ γη, ἐξαγομένη κατὰ τὸ συνεχὲς ἀορίστως. Ἀνεστάσθω δὲ ἐπὶ τῆς βγ, κάθετος ἀπὸ τοῦ α, ἡ βα, εἶτα τμηθήτω ἡ αγ, δίχα κατὰ τὸ θ, καὶ ἀπὸ τοῦ θ, διαστήματι τῷ θγ, ἢ θα, γραφήτω κύκλος καὶ διελεύσεται πάντως οὗτος διὰ τοῦ β, εἰ γὰρ μή, ἢ ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ κύκλου τὸ β, περιληφθήσεται, ἢ ἐκτὸς ἐναπολειφθήσεται. ὁποτέρως δ' ἂν συμβῇ, ἡ ὑπὸ γβα, γωνία οὐκ ἔσται ὀρθή. οὐ γάρ ἐστιν ἐν ἡμικυκλίῳ, ὅπερ ἄτοπον. Συνέστη γὰρ ἡ αβ, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς βγ, ὡς προείρηται. Εἰ δὲ τὸ γ, μόνον σημεῖον δοθῇ, καθ' ὃν δεῖ τὸν ζητούμενον κύκλον ἅπτεσθαι τοῦ δοθέντος, διήχθω μόνον ἡ γη, καὶ ἀπὸ τοῦ τυχόντος ἐπ' αὐτῆς σημείου, φέρ' εἰπεῖν τοῦ θ, διαστήματι τῷ θγ, γραφήτω κύκλος, καὶ ἔσω τὸ ἐπιταχθέν. ὁ λόγος σαφής. Κύκλου ἄρα δοθέντος, καὶ τὰ ἑξῆς.

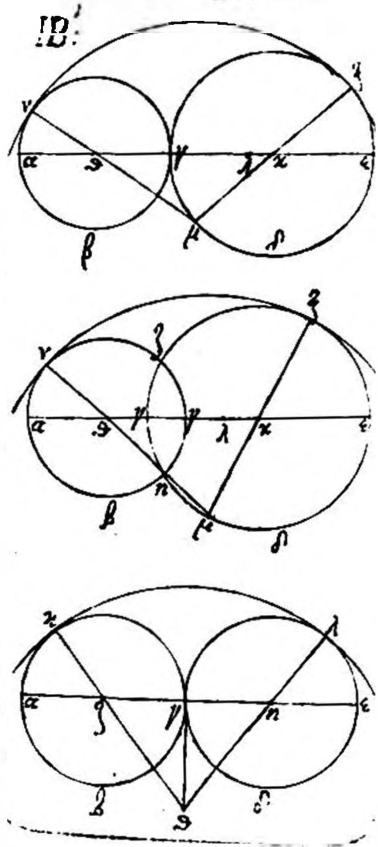
Πρότασις ΙΒ′:

Δύο κύκλων ἀνίσων δοθέντων, ὥστε μηδέτερον εἶναι ὅλον ἔνδον τοῦ ἑτέρου, ἁπτόμενον ἑκατέρου κύκλον καταγράψαι.

Δοθήτωσαν α′: κύκλοι ἄνισοι οἱ α β γ, γ δ ε, ἤτοι ἁπτόμενοι κατὰ τὸ γ, ἢ γοῦν τεμνόμενοι κατὰ τὰ ζ, καὶ η, σημεῖα, καὶ ζητηθήτω κύκλος γραφῆναι ἑκατέρου αὐτῶν ἁπτόμενος. Εὑρεθήτω δὴ τὰ κέντρα ἑκατέρου τῶν δοθέντων, καὶ ἔστω τοῦ μὲν ἐλάττονος α β γ, τὸ θ, τοῦ δὲ μείζονος γ δ ε, τὸ κ, καὶ διὰ τῶν θ, κ, κέντρων διήχθω ἡ α ε, τέμνουσα ἑκάτερον εἰς δύο ἡμικύκλια· εἶτα ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς γ κ, ἡμιδιαμέτρου τοῦ μείζονος κύκλου ἡ γ λ, ἴση τῇ γ θ, ἡμιδιαμέτρῳ τοῦ ἐλάττονος κύκλου, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ λ ε, τμηθήτω ὁ μείζων κύκλος κατὰ τὸ μ, ἀπὸ δὲ τοῦ μ, ἤχθωσαν διὰ τῶν θ, καὶ κ, κέντρων αἱ μ θ ν, μ κ ξ, εὐθεῖαι, καὶ τμηθήσονται οἱ κύκλοι, ὁ μὲν κατὰ τὸ ν, ὁ δὲ κατὰ τὸ ξ, τούτων δ᾽ οὕτω γενομένων, ληφθήτω κέντρον μὲν τὸ μ, διάστημα δὲ τὸ μ ν, καὶ γραφήτω ὁ ν ξ, κύκλος, καὶ ἔσται ἁπτόμενος τοῦ μὲν κατὰ τὸ ν, τοῦ δὲ κατὰ τὸ ξ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν θ ν, ἴση ἐστὶ τῇ γ λ, κατὰ τὴν κατασκευήν, ἡ δὲ θ μ, τῇ λ ε, πάντως γε ἡ ὅλη ν μ, ἴση ἐστὶ τῇ ὅλῃ γ ε, ἀλλὰ τῇ γ ε, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ μ ξ, ἄρα ἡ ν μ, ἴση ἐστὶ τῇ μ ξ, ὥστε ὁ κέντρῳ μὲν τῷ μ, διαστήματι δὲ τῷ μ ν, γραφόμενος κύκλος, διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ ξ, καὶ ἑπομένως ἐφάψεται ἑκατέρου, ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Geom. Lib. 2. Fig. 15.

ΙΒ′.

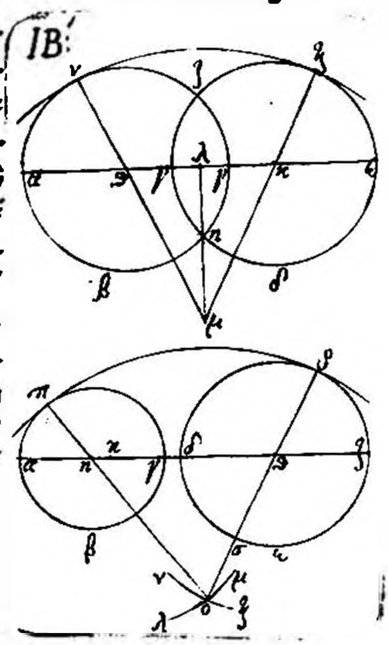


Ἔστωσαν β′: κύκλοι ἴσοι οἱ α β γ, γ δ ε, ὧν δεῖ τὸν ζητούμενον ἅπτεσθαι κύκλον. εἰ μὲν οὖν οἱ δοθέντες κύκλοι ἅπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ γ, ἤχθω διὰ τῶν κέντρων αὐτῶν ζ, καὶ η, ἡ α ε, ἥτις διελεύσεται πάντως καὶ διὰ τοῦ γ, κατὰ τὴν ιβ′: τοῦ γ′: τοῦ Στοιχειωτοῦ, πρὸς δὲ τῷ γ, συνεστάθω κάθετος ἡ γ θ, ἐπὶ τῆς α ε· καὶ ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς γ θ, δὸς εἰπεῖν τοῦ θ, ἤχθωσαν διὰ τῶν κέντρων τῶν κύκλων αἱ θ ζ κ, θ η λ, εὐθεῖαι. Εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θ κ, γραφήτω κύκλος, καὶ διελεύσεται πάντως καὶ διὰ τοῦ λ, κατὰ γὰρ τὴν δ′: τοῦ α′: τοῦ Στοιχειωτοῦ, αἱ ζ θ, η θ, εἰ-

σιν

σὶν ἴσαι, προστιθεμένων δὲ καὶ τῶν ζ κ, η λ, ἴσων, γενήσονται ἴσαι καὶ αἱ θ κ, θ λ. Ὅτι δὲ ὁ κ λ, κύκλος ἅπτεται ἑκατέρου τῶν δοθέντων, δῆλον ἐκ τῆς ἀνωτέρω. Εἰ δέ γε οἱ δοθέντες κύκλοι τέμνονται ἀλλήλοις κατὰ τὰ ζ, η, σημεῖα, ἤχθω ἡ α ε, διὰ τῶν θ κ, κέντρων, καὶ τμηθήτω ἡ θ κ, δίχα κατὰ τὸ λ, ἐφ' ἧς συνεστάθω κάθετος ἡ λ μ, ἀπὸ δὲ τοῦ τυχόντος σημείου, δὸς εἰπεῖν τοῦ μ, ἀχθήτωσαν διὰ τῶν κέντρων αἱ μ θ ν, μ κ ξ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ μ, διαστήματι δὲ τῷ μ ν, γραφήτω τόξον, καὶ διελεύσεται τοῦτο πάντως καὶ διὰ τοῦ ξ. Ὅτι μὲν οὖν ὁ κέντρῳ μὲν τῷ μ, διαστήματι δὲ τῷ μ ν, γραφόμενος κύκλος ἅπτεται τοῦ α β γ, κύκλου, δείκνυται διὰ τοῦ α: τρόπου τοῦ παρόντος. Ὅτι δὲ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ ξ, δῆλον. αἱ γὰρ θ μ, κ μ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν δ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, προστιθεμένων δὲ αὐταῖς τῶν ἴσων θ ν, κ ξ, ἴσαι ἔσονται καὶ αἱ μ ν, μ ξ, καὶ ἑκατέρα τούτων ἡμιδιαμέτρος ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Εἰ δὲ δοθῇ θάτερον τῶν κ, καὶ λ, σημείων, ἢ τῶν ν, καὶ ξ, ἠγμένης τῆς α ε, διὰ τῶν κέντρων τῶν δοθέντων κύκλων. καὶ ἐπ' αὐτῆς συνισταμένης τῆς γ θ, λ μ, καθέτου, ἤχθω ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου κ, ἢ ν, ἡ κ θ, εὐθεῖα, ἡ ν μ, καὶ τμηθήσεται ἡ μὲν γ θ, κατὰ τὸ θ, ἡ δὲ λ μ, κατὰ τὸ μ, ἀπὸ δὲ τοῦ θ, ἡ μ, ἤχθω διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἑτέρου κύκλου ἡ θ λ, ἡ μ ξ, καὶ τὰ λοιπὰ γενέσθω, ὡς πρότερον, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθέν.

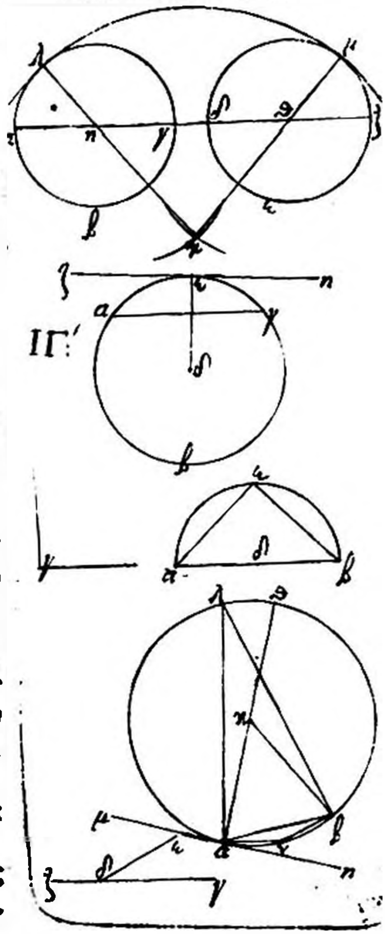
Geom. Lib. 2. Fig. 6.



Ἔστωσαν γ': οἱ α β γ, δ ε ζ, κύκλοι, καὶ ζητηθήτω γραφῆναι ἕτερός τις κύκλος ἑκατέρου ἁπτόμενος, κείσθωσαν δὲ ἄνισοι, καὶ ἔστω τοῦ μὲν α β γ, ἐλάττονος κέντρον τὸ η, τοῦ δὲ δ ε ζ, μείζονος τὸ θ, καὶ εἰλήφθω ἡ δ κ, ἴση τῇ α η, ἡμιδιαμέτρῳ τοῦ α β γ, ἐλάσσονος. εἶτα ἀπὸ μὲν τοῦ η, κέντρου τοῦ ἐλάσσονος, διαστήματι ἴσῳ τῇ δ ζ, διαμέτρῳ τοῦ μείζονος γραφήτω τόξον τὸ λ μ, ἀπὸ δὲ τοῦ θ, κέντρου τοῦ μείζονος, διαστήματι τῇ θ κ, γραφήτω ἕτερον τόξον τὸ ν ξ, τέμνον τὸ λ μ, κατὰ τὸ ο, ἀφ' οὗ ἤχθωσαν διὰ τῶν η, καὶ θ, κέντρων αἱ ο η π, ο θ ρ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ ο, διαστήματι δὲ τῇ ο π, γραφήτω κύκλος καὶ διελεύσεται οὗτος καὶ διὰ τοῦ ρ. Δείκνυται. ἐπεὶ αἱ θ κ, θ ο, εἰσὶν ἴσαι, ἐὰν ἀπ' αὐτῶν ἀφαιρεθῶσιν αἱ ἴσαι θ δ, θ σ, ἐναπολειφθήσονται αἱ δ κ, σ ο, ἴσαι, ἀλλ' ἡ δ κ, ἴση ἐστὶ τῇ η π, κατὰ τὴν κατασκευὴν, ἄρα καὶ ἡ σ ο, ἴση ἐστὶ τῇ αὐτῇ η π, εἴληπται δὲ καὶ ἡ η ο, ἴση τῇ σ ρ, ἡ ὅλη ἄρα ο π, ἴση ἐστὶ τῇ ὅλῃ ο ρ, ὥστε ὁ ἀπὸ τοῦ ο, γραφόμενος κύκλος διαστήματι τῇ ο π, διελεύσεται πάντως καὶ διὰ τοῦ ρ.

Εἰ δὲ οἱ δοθέντες κύκλοι ἴσοι ἀλλήλοις ὦσιν, ὡς οἱ α β γ, καὶ δ ε ζ, ἤχθω διὰ τῶν η, καὶ θ, κέντρων αὐτῶν ἡ α ζ, καὶ κέντροις μὲν τοῖς η, καὶ θ, διαστήματι δὲ τῷ τυχόντι, γραφήτωσαν δύο τόξα τεμνόμενα κατὰ τὸ κ, ἀπὸ δὲ τοῦ κ, ἤχθωσαν διὰ τῶν κέντρων η, καὶ θ, αἱ κ η λ, καὶ κ θ μ, εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ κ, διαστήματι δὲ τῷ κ λ, γραφήτω κύκλος, ὅστις διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ μ, αἱ γὰρ κ η, κ θ, ἐκ τῆς κατασκευῆς ἴσαι εἰσὶ, ταύταις δὲ προστιθεμένων καὶ τῶν η λ, θ μ, ἴσων εὐθειῶν, ἔσονται καὶ αἱ κ λ, κ μ, ἴσαι.

Geom. Lib. 2. Fig. 17.



Πρότασις ΙΓ':

Κύκλου δοθέντος ὡς ἔτυχε τεμνομένου ὑπό τινος εὐθείας, ἀποτεμνομένην αὐτοῦ εὐθεῖαν ἀγαγεῖν παραλλήλως τῇ τεμνούσῃ.

Δεδόσθω κύκλος ὁ α β γ, οὗ κέντρον τὸ δ, τεμνέτω δὲ αὐτὸν ὡς ἔτυχεν ἡ α γ, καὶ ζητηθήτω ἀχθῆναι ἑτέρα τις εὐθεῖα παράλληλος μὲν τῇ α γ, ἀπτομένη δὲ τοῦ α β γ, κύκλου. Ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ δ, κέντρου ἡ δ ε, ὥστε πρὸς ὀρθὰς τέμνειν τὴν α γ, τέμνουσαν τὸν κύκλον, διὰ δὲ τοῦ ε, ἤχθω ἡ ζ η, ὥστε πρὸς ὀρθὰς εἶναι ἐπὶ τῆς δ ε, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθέν. ἡ γὰρ ζ η, κατὰ τὴν ιϛ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἐκτὸς πίπτει τοῦ α β γ, κύκλου, καὶ κατὰ τὸν β': ὅρον τοῦ αὐτοῦ, ἅπτεται ἐκείνου. Ὅτι δὲ καὶ παράλληλός ἐστι τῇ α γ, τεμνούσῃ τὸν κύκλον, δείκνυται διὰ τῆς κη: τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ.

Πρότασις ΙΔ':

Ἐπὶ τῆς δοθείσης πεπερασμένης εὐθείας τμῆμα κύκλου γράψαι δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ.

Ἔστω ἡ α β, εὐθεῖα, ἐφ' ἧς ζητεῖται τμῆμα κύκλου συσταθῆναι, ὥστε δέχεσθαι γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ γ, δοθείσῃ. Εἰ μὲν οὖν ἡ δοθεῖσα γ, γωνία ὀρθή ἐστι, τμηθήτω ἡ α β, δοθεῖσα εὐθεῖα δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δ α, ἢ δ β, γραφήτω τὸ α ε β, ἡμικύκλιον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α ε, β ε, εὐθεῖαι, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθέν. ἡ γὰρ ὑπὸ α ε β, γωνία ὀρθή ἐστι,

κατὰ

κατὰ τὴν λα΄: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. Ἐπὶ τῆς αβ, ἄρα εὐθείας συνέστη τὸ αεβ, τμῆμα δεχόμενον τὴν δοθεῖσαν γωνίαν. Εἰ δὲ ἡ δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα εἴη, ὡς ἡ ὑπὸ γδε, ἢ ἀμβλεῖα, ὡς ἡ ὑπὸ ζδε, συνεστάθω ἐπὶ τῆς αβ, δοθείσης εὐθείας πρὸς τῷ α, δὸς εἰπεῖν, σημείῳ, γωνία μὲν ἡ ὑπὸ βαη, ἴση τῇ δοθείσῃ ὑπὸ εδγ, κάθετος δὲ ἡ αθ, τῇ δὲ ὑπὸ βαθ, γωνίᾳ γενέσθω ἴση ἡ ὑπὸ αβκ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ κ, διαστήματι δὲ τῷ κα, ἢ κβ, γραφήτω κύκλος ὁ αβλ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αλ, βλ, καὶ ἡ ὑπὸ αλβ, ἴση ἔσται τῇ ὑπὸ γδε, δοθείσῃ, κατὰ γὰρ τὴν λβ΄: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ ἡ ὑπὸ αλβ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βαη, αὕτη δὲ ἴση γέγονε τῇ ὑπὸ γδε, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αλβ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γδε. Δοθείσης δὲ τῆς ὑπὸ ζδε, ἀμβλείας γωνίας, συνεστάθω ἐπὶ τῆς αβ, ἡ ὑπὸ βαμ, ἴση τῇ ὑπὸ ζδε, δοθείσῃ, καὶ τὰ λοιπὰ γενέσθω ὡς πρότερον. εἶτα ἐπεζεύχθωσαν αἱ αν, βν, καὶ ἡ ὑπὸ ανβ, γωνία ἴση ἔσται τῇ ὑπὸ ζδε. κατὰ γὰρ τὴν ῥηθεῖσαν ἡ ὑπὸ ανβ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βαμ, ἀλλ' ἡ ὑπὸ βαμ, ἴση γέγονε τῇ ὑπὸ ζδε, δοθείσῃ, ἡ ἄρα ὑπὸ ανβ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζδε. Κύκλου ἄρα δοθέντος, καὶ τὰ ἑξῆς.

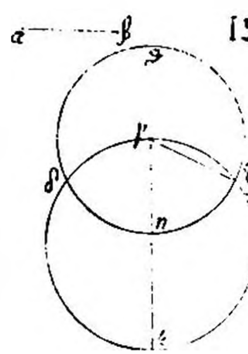
Πρότασις ΙΕ΄.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ.

Δοθήτω γωνία ἡ ὑπὸ γδε, κύκλος δὲ ὁ αὐτὸς αβλ, ἀφ' οὗ ζητεῖται τμῆμα ἀφελεῖν, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ γδε. Ἤχθω δὴ ἡ μη, ἁπτομένη τοῦ δοθέντος αβλ, κύκλου κατὰ τὸ α, πρὸς δὲ τῷ α, σημείῳ συνεστάθω ἡ ὑπὸ βαη, γωνία ἴση τῇ δοθείσῃ τῇ ὑπὸ γδε, καὶ τὸ αλβ, τμῆμα, δέξεται γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ, κατὰ τὴν λβ΄: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. Ἐὰν δὲ δοθῇ ἡ ὑπὸ ζδε, συνεστάθω ἡ ὑπὸ βαμ, ἴση τῇ ὑπὸ ζδε, καὶ τὸ ανβ, τμῆμα δεχθήσεται γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ κατὰ τὴν αὐτήν. *Geom. Lib. 2. Fig. 18.*

Πρότασις Ις΄.

Ις



Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι, δεῖ δὲ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν μὴ μείζονα εἶναι τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου.

Δεδόσθω εὐθεῖα μὲν ἡ αβ, κύκλος δὲ ὁ γδεζ, καὶ ζητηθήτω ἐναρμοσθῆναι εἰς αὐτὸν εὐθεῖα ἴση τῇ αβ, ἐλάττονι οὔσῃ τῆς τοῦ γδεζ, κύκλου διαμέτρου. Ἤχθω δὴ ἡ γε, διάμετρος, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ γ, διαστήματι

δὲ

δὲ ἴσῳ τῇ δοθείσῃ α β, γραφήτω ἕτερος κύκλος ὁ δ η ζ θ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ γ ζ, καὶ ἔσται ἴση τῇ α β, κατὰ τὴν α′: τοῦ δ′: τοῦ Στοιχειωτοῦ.

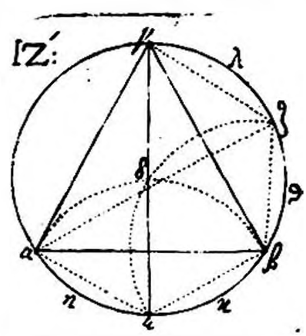
Πρότασις ΙΖ′:

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς α β γ, κύκλος, καὶ ζητηθήτω ἐγγραφῆναι εἰς αὐτὸν τρίγωνον ἰσόπλευρον. Εὑρεθήτω δὴ τὸ κέντρον τοῦ δοθέντος κύκλου, καὶ ἤχθω δι' αὐτοῦ ἡ γ δ ε, κέντρῳ δὲ τῷ ε, καὶ διαστήματι τῷ ε δ, γραφήτω τόξον τὸ α δ β, τέμνον τὸν δοθέντα α β γ, κύκλον κατὰ τὰ α, καὶ β, σημεῖα, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ α β, α γ, β γ, καὶ τὸ α β γ, τρίγωνον ἰσόπλευρον ἔσται. Ληφθήτω κέντρον μὲν τὸ β, διάστημα δὲ τὸ β ε, καὶ γραφήτω τὸ ε δ ζ, τόξον, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ α ε, ε β, β ζ, ζ α, ζ γ. Δείκνυται. Ἐπεὶ τοῦ μὲν διὰ τῶν α δ β, σημείων διερχομένου κύκλου κέντρον ἐστὶ τὸ ε, τοῦ δὲ διὰ τῶν ε δ ζ, τὸ β, πάντως γε αἱ ε α, ε β, ἴσαι εἰσίν, ὁμοίως δὲ καὶ αἱ β ε, β ζ, ὡς ἡμιδιάμετροι, ἀλλὰ τῇ α ε, ἴση ἐστὶν ἡ γ ζ, κατὰ τὴν δ′: τοῦ α′: τοῦ Στοιχειωτοῦ, κατὰ δὲ τὴν κη′: τοῦ γ′: τοῦ αὐτοῦ, αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας καὶ τὰς περιφερείας ἀφαιροῦσιν, ἄρα αἱ α η ε, γ λ ζ, περιφέρειαι ἴσαι εἰσίν, ὥσπερ καὶ αἱ ε κ β, β θ ζ. ὥστε προστιθεμένων τῶν ε κ β, β θ ζ, ἴσων ταῖς α η ε, γ λ ζ, ἴσαις περιφερείαις, ἔσται ἡ ὅλη α ε β, περιφέρεια τῇ ὅλῃ β ζ γ, ἴση, κατὰ δὲ τὴν κθ′: τοῦ γ′: τοῦ αὐτοῦ ἴση ἔσται καὶ ἡ α β, ὑποτείνουσα τῇ β γ, ὑποτεινούσῃ, τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται, καὶ ἡ α γ, ἴση τῇ α β, ὥστε αἱ τρεῖς α β, β γ, γ α, εὐθεῖαι ἴσαι εἰσίν. ἰσόπλευρον ἄρα τὸ α β γ, τρίγωνον, ἅπτεται δὲ καὶ τοῦ α β γ, κύκλου, κατὰ τὸν μϛ′: ἄρα ὅρον τοῦ παρόντος, τὸ α β γ, τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς τὸν δοθέντα α β γ, κύκλον, ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Geom. Lib.2. Fig.19.

ΙΖ′:



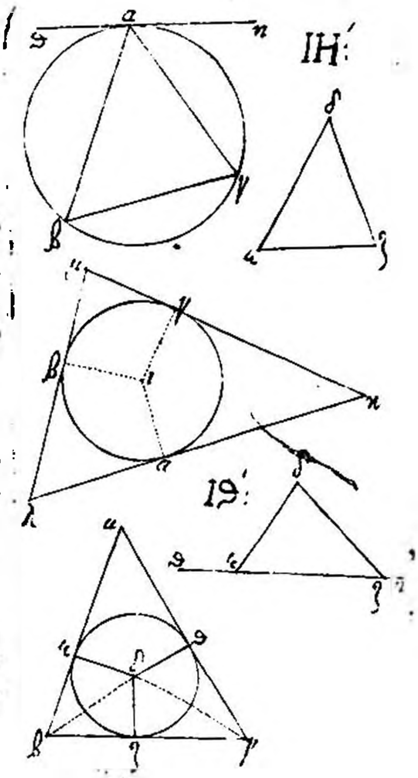
Πρότασις ΙΗ′:

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τρίγωνον ἐγγράψαι ἰσογώνιον τῷ δοθέντι.

Ἔστω δὴ ἐγγράψαι εἰς τὸν δοθέντα α β γ, κύκλον τρίγωνον ἰσογώνιον τῷ δ ε ζ, δοθέντι, ἵνα δὲ τοῦτο εὐμεθόδως γένηται, ἀχθήτω ἡ η θ, εὐθεῖα ἁπτομένη τοῦ α β γ, δοθέντος κύκλου κατὰ τὸ α, καὶ συνιστάσθω ἡ μὲν ὑπὸ θ α β, γωνία ἴση τῇ πρὸς τῷ ζ, τοῦ δοθέντος τριγώνου γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ η α γ, τῇ πρὸς τῷ ε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ β γ, εὐθεῖα, καὶ τὸ α β γ, τρίγωνον ἰσογώνιον ἔσται τῷ δ ε ζ, τριγώνῳ. κατὰ γὰρ τὴν λβ′: τοῦ γ′: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἡ ὑπὸ θ α β, ἴση

ἐστὶ

ἐστὶ τῇ ὑπὸ α γ β, ἡ δὲ ὑπὸ θ α β, γέγονεν ἴση τῇ ὑπὸ δ ζ ε, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ δ ζ ε, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ α γ β. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ α β γ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ δ ε ζ. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ β α γ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ ε δ ζ, ἴση ἐστίν. Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον, καὶ τὰ ἑξῆς. Geom. Lib. 2. Fig. 20.



Πρότασις ΙΘ΄.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τρίγωνον περιγράψαι, ἰσογώνιον τῷ δοθέντι.

Κείσθω περὶ τὸν α β γ, κύκλον τρίγωνον περιγράψαι ἰσογώνιον τῷ δοθέντι δ ε ζ. Εἰς δὲ τὴν τούτου κατασκευὴν ἐκβληθήτω ἡ ε ζ, ἐφ' ἑκάτερα κατὰ τὰ η, καὶ θ, ἀπὸ δὲ τοῦ ι, κέντρου τοῦ κύκλου ἤχθω ἡ ι α, καὶ τῇ μὲν ὑπὸ δ ε θ, γωνίᾳ, ἡ δ ζ η, (ὁποτέραν βούλει) γενέσθω ἴση ἡ ὑπὸ α ι β. Ἔστω οὖν ἐνταῦθα τῇ ὑπὸ δ ε θ, τῇ δὲ ὑπὸ δ ζ η, γενέσθω ὁμοίως ἴση ἡ ὑπὸ β ι γ, καὶ διὰ τῶν α, β, γ, ἀχθήτωσαν εὐθεῖαι ἁπτόμεναι τοῦ α β γ, δοθέντος κύκλου αἱ κ λ, λ μ, μ κ, καὶ τὸ κ λ μ, τρίγωνον περὶ τὸν α β γ, δοθέντα κύκλον περιγραφόμενον, ἰσογώνιον ἔσται τῷ δοθέντι δ ε ζ, τριγώνῳ. Κατὰ γὰρ τὴν ιη΄: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ι α λ, ι β λ, ὀρθή ἐστιν, ὥστε καὶ αἱ ὑπὸ α ι β, α λ β, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, τοῦ γὰρ τετραπλεύρου παντὸς αἱ τέσσαρες γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι, διὰ τὸ εἰς δύο ἀεὶ διαιρεῖσθαι τρίγωνα. ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ δ ε θ, δ ε ζ, γων: δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι, κατὰ τὴν ιγ΄: τοῦ α΄: τοῦ αὐτοῦ, ἄρα αἱ ὑπὸ α ι β, α λ β, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ δ ε θ, δ ε ζ, γέγονε δὲ ἴση τῇ ὑπὸ δ ε θ, ἡ ὑπὸ α ι β, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ α λ β, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δ ε ζ. ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ γ μ β, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ δ ζ ε, καὶ ἡ ὑπὸ α κ γ, τῇ ὑπὸ ε δ ζ. περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Κ΄.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Δεδόσθω τρίγωνον τὸ α β γ, εἰς ὃ ζητηθήτω κύκλος ἐγγραφῆναι. Τμηθήτω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ α β γ, α γ β, γωνιῶν δίχα διὰ τῶν β δ, γ δ, συμπιπτουσῶν

εὐθειῶν

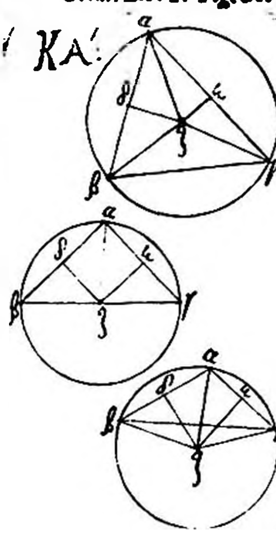
εὐθειῶν κατὰ τὸ δ, ἀφ' οὗ ὡς ἀπὸ κέντρου πιπτέτωσαν κάθετοι ἐπὶ τὰς τοῦ αβγ, δοθέντος τριγώνου πλευρῶν αἱ δε, δζ, δθ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δε, γραφήτω κύκλος, καὶ διελεύσεται πάντως καὶ διὰ τῶν ζ, καὶ θ, σημείων. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ εβδ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζβδ, δίχα γὰρ ἡ ὑπὸ εβζ, τέτμηται. καὶ ἡ ὑπὸ δεβ, τῇ ὑπὸ δζβ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, κοινὴ δὲ ἡ βδ, εὐθεῖα, πάντως γε κατὰ τὴν κς': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἡ εδ, ἴση ἐστὶ τῇ δζ· διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ δθ, καὶ δζ, ἴση, ὥστε αἱ τρεῖς δε, δζ, δθ, εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δε, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν ζ, θ. ὥστε ὁ εζθ, κύκλος ἐγγεγραμμένος ἐστὶν εἰς τὸ αβγ, τρίγωνον, ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρότασις ΚΑ'.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι.

Δοθήτω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ ζητηθήτω περὶ αὐτὸ κύκλος περιγραφῆναι. Τμηθήτω δὴ ἑκατέρα τῶν αβ, αγ, εὐθειῶν δίχα κατὰ τὰ δ, καὶ ε, σημεῖα, καὶ ἀπ' αὐτῶν συνεστάθωσαν κάθετοι ἐπὶ τὰς αβ, αγ, αἱ δζ, εζ, συμπίπτουσαι κατὰ τὸ ζ, ἀφ' οὗ ὡς ἀπὸ κέντρου διαστήματι τῷ ζα, γραφήτω κύκλος, ὅστις διελεύσεται καὶ διὰ τῶν β, καὶ γ, σημείων. Ἐπεὶ γὰρ αἱ αδ, δβ, εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις, κοινὴ δὲ ἡ δζ, καὶ αἱ ὑπὸ αδζ, βδζ, γωνίαι ὁμοίως ἴσαι, πάντως γε κατὰ τὴν δ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, αἱ αζ, βζ, ἴσαι εἰσί. διὰ τῆς αὐτῆς δειχθήσεται καὶ ἡ ζγ, τῇ ζα, ἡ ζβ, ἴση, ὥστε ὁ κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζα, ἡ ζβ, ἡ ζγ, γραφόμενος κύκλος, διελεύσεται καὶ διὰ τῶν λοιπῶν, καὶ ἐφάψεται τῶν τριῶν τοῦ δοθέντος τριγώνου γωνιῶν. διὸ δὴ καὶ περιγράφεσθαι λέγεται κατὰ τὸν μθ': τοῦ παρόντος ὅρον.

Geom. Lib. 2. Fig. 21.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

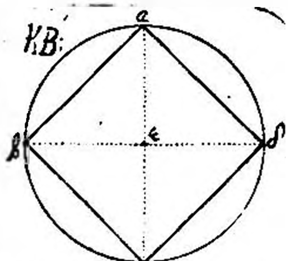
Δῆλον δ' ἐκ τούτων, ὅτι ἐὰν τὸ τρίγωνον ὀξυγώνιον εἴη, ἐντὸς αὐτοῦ πεσεῖται τὸ τοῦ κύκλου κέντρον. ἐὰν δὲ ὀρθογώνιον ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης, κἂν ἀμβλυγώνιον ἐκτός. καὶ ἀνάπαλιν ἐὰν τὸ κέντρον τοῦ περιγραφομένου κύκλου ἐντὸς τοῦ τριγώνου πίπτει, ὀξυγώνιόν ἐστι τὸ τρίγωνον. εἰδέ γε ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης, ὀρθογώνιον, καὶ ἀμβλυγώνιον ἐὰν ἐκτός.

Πρότασις ΚΒ΄:

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

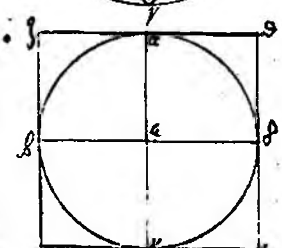
Ἔστω κύκλος ὁ α β γ δ, καὶ ζητηθήτω ἐγγράψαι εἰς αὐτὸν τετράγωνον. Ἀχθήτωσαν δὴ διὰ τοῦ ε, κέντρου τοῦ α β γ δ, δοθέντος κύκλου δύο διάμετροι τεμνόμεναι ἀλλήλαις πρὸς ὀρθὰς αἱ α γ, β δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α β, β γ, γ δ, δ α, καὶ τὸ α β γ δ, τετράγωνον, ἔσται ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν α β γ δ, δοθέντα κύκλον. κατὰ γὰρ τὴν δ΄: τοῦ α΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, αἱ α β, β γ, γ δ, δ α, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, κατὰ δὲ τὸ α΄: πόρισμα τῆς λβ΄: τοῦ αὐτοῦ, ἑκατέρα τῶν α β ε, γ β ε, γωνιῶν ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὥστε ἡ ὅλη α β γ, ὀρθή ἐστιν. Ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ὑπὸ β γ δ, γ δ α, καὶ δ α β, ὀρθαί εἰσιν ἑκάστη. τὸ δὲ ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τετράγωνόν ἐστι κατὰ τὸν κθ΄: ὅρον τοῦ αὐτοῦ, τὸ α β γ δ, ἄρα τετράγωνόν ἐστιν, ἅπτεται δὲ τοῦ δοθέντος κύκλου ἑκάστη τῶν αὐτῶν γωνιῶν. εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον ἐγγέγραπται τὸ α β γ δ, τετράγωνον, ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Geom. Lib. 2. Fig. 22.



Πρότασις ΚΓ΄:

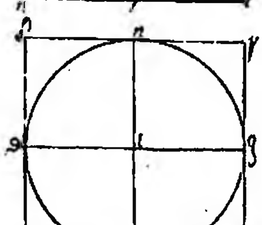
Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.



Ἔστω περὶ τὸν δοθέντα α β γ δ, κύκλον τετράγωνον περιγράψαι. Ἀχθήτωσαν δὴ διὰ τοῦ ε, κέντρου τοῦ α β γ δ, δοθέντος κύκλου αἱ α γ, β δ, διάμετροι τεμνόμεναι ἀλλήλαις πρὸς ὀρθὰς κατὰ τὸ ε, καὶ διὰ τῶν α β γ δ, σημείων ἤχθωσαν ἐπτόμεναι τοῦ αὐτοῦ κύκλου αἱ ζ η, η ι, ι θ, θ ζ, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθὲν κατὰ τὴν ζ΄: τοῦ δ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ.

Πρότασις ΚΔ΄:

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.



Ἔστω τετράγωνον τὸ α β γ δ, εἰς ὃ δεῖ κύκλον ἐγγράψαι. Τμηθήτω οὖν ἑκατέρα τῶν α β, β γ, αὐτοῦ πλευρῶν δίχα κατὰ τὰ ε, καὶ ζ, σημεῖα, καὶ ἀχθήτωσαν αἱ ε η, ζ θ, εὐθεῖαι ἡ μὲν τῇ β γ, ἡ δὲ τῇ α β, παράλληλος, τεμνόμεναι κατὰ τὸ ι, σημεῖον, ἀφ' οὗ ὡς ἀπὸ κέντρου, διαστήματι τῷ ι ε, ἢ ι ζ, γραφήτω κύκλος, καὶ ἔσται τὸ ζητούμενον. Δείκνυται διὰ τῆς η΄: τοῦ ῥηθέντος.

Πρότασις ΚΕ':

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

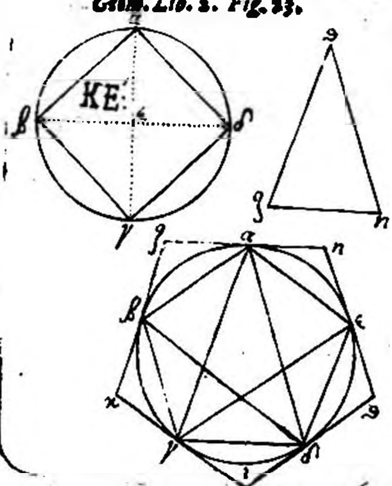
Ε"στω τετράγωνον, περὶ ὃ ζητεῖται κύκλος περιγραφῆναι, τὸ α β γ δ. ἀχθήτωσαν δὴ αἱ α γ, β δ, διαγώνιοι διάμετροι τοῦ δοθέντος α β γ δ, τετραγώνου, τεμνόμεναι κατὰ τὸ ε, ἀφ' οὗ ὡς ἀπὸ κέντρου διαστήματι τῷ ε α, ἢ ε β, γραφήτω κύκλος, καὶ διελεύσεται πάντως οὗτος καὶ διὰ τῶν λοιπῶν τριῶν σημείων. ὁ λόγος σαφὴς διὰ τῆς θ': τοῦ ῥηθέντος δ':

Πρότασις Κϛ':

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ε"στω κύκλος ὁ α β γ δ ε, εἰς ὃν ζητεῖται πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγραφῆναι, οὗ εἰς κατασκευὴν συνιστάσθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἐπὶ τῆς ζ η, τυχούσης εὐθείας κατὰ τὴν κη': τοῦ α': τοῦ παρόντος ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς κατὰ κορυφὴν, καὶ τούτῳ ὅμοιον ἐγγραφήτω εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, ὡς τὸ α γ δ. εἶτα διαιρεθήτω ἑκατέρα τῶν ὑπὸ α γ δ, α δ γ, δίχα διὰ τῶν γ ε, δ β, εὐθειῶν, καὶ ἐπιζευχθῶσαν αἱ αἱ α β, β γ, δ ε, ε α, εὐθεῖαι, καὶ τὸ α β γ δ ε, πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἔσται καὶ ἰσογώνιον κατὰ τὴν ια': τοῦ προειρημένου βιβλίου τοῦ Στοιχειωτοῦ.

Geom. Lib. 2. Fig. 23.



Πρότασις ΚΖ':

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Ε"στω κύκλος ὁ α β γ δ ε, περὶ ὃν ζητηθήτω πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγραφῆναι. Ε'γγραφήτω δὴ α': εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον τὸ α β γ δ ε, πεντάγωνον κατὰ τὴν ἀνωτέρω, διὰ δὲ τῶν α β γ δ ε, σημείων ἀχθήτωσαν εὐθεῖαι ἁπτόμεναι τοῦ κύκλου αἱ ζ η, η θ, θ ι, ι κ, κ ζ, καὶ τὸ ζ η θ ι κ, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἔσται καὶ ἰσογώνιον κατὰ τὴν ιβ': τοῦ ῥηθέντος.

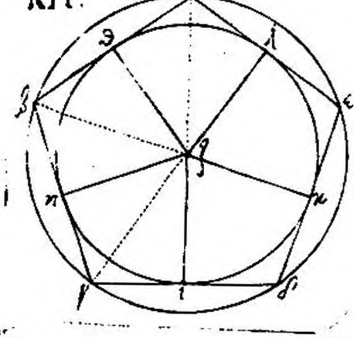
Πρότασις ΚΗ'.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω δὴ εἰς τὸ αβγδε, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον πεντάγωνον κύκλον ἐγγράψαι. Ἵνα δὲ τοῦτο γεωμετρικῶς γένηται, τμηθήτω ἑκατέρα τῶν αβ, βγ, δίχα κατὰ τὰ η, καὶ θ, σημεῖα, καὶ συνεστάθωσαν ἐπ' αὐτῶν κάθετοι, αἱ ηζ, θζ, ἀπὸ δὲ τοῦ ζ, σημείου ἀχθήτωσαν ὁμοίως ἐφ' ἑκάστης τῶν λοιπῶν γδ, δε, εα, αἱ ζι, ζκ, ζλ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζη, γραφήτω κύκλος, καὶ οὗτος πάντως γε διελεύσεται καὶ διὰ τῶν λοιπῶν θ, λ, κ, ι, σημείων. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ζα, ζβ, ζγ. καὶ ἐπεὶ αἱ θα, θβ, ἴσαι εἰσί, κοινὴ δὲ ἡ θζ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αθζ, τῇ ὑπὸ βθζ, ἴση, (ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα) πάντως γε καὶ αἱ αζ, βζ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν δ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ γζ, ἴση τῇ βζ, ὥστε δύο αἱ αζ, ζβ, δυσὶ ταῖς γζ, ζβ, ἴσαι εἰσίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ αβ, τῇ βγ, ἴση, κατὰ τὴν η': ἄρα τοῦ αὐτοῦ ἡ ὑπὸ θαζ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ηγζ, ἀλλ' ἡ μὲν θα, ἴση ἐστὶ τῇ ηγ, ἡμίσεια γὰρ ἑκατέρα τῶν ἴσων αβ, βγ, ἡ δὲ αζ, τῇ γζ, ὡς δέδεικται, ἄρα κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν δ': ἴση ἐστὶ καὶ ἡ θζ, τῇ ηζ.

Geom. Lib.2. Fig.24.

ΚΗ'



αὖθις ἐπεὶ αἱ ὑπὸ θαζ, ηγζ, γωνίαι εἰσὶν ἴσαι, καὶ τῇ μὲν ὑπὸ θαζ, ἡ ὑπὸ θβζ, τῇ δὲ ὑπὸ ηγζ, ἡ ὑπὸ ηβζ, πάντως γε ἡ ὑπὸ αβγ, γωνία δίχα τέτμηται διὰ τῆς ζβ, ταύτῃ δὲ ἴση καὶ ἡ ὑπὸ βαε, καὶ βγδ, ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ βαε, βγδ, δίχα τέτμηται διὰ τῶν ζα, ζγ, ὥστε αἱ ὑπὸ θαζ, λαζ, εἰσὶν ἴσαι. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αθζ, τῇ ὑπὸ αλζ, ἴση, καὶ κοινὴ ἡ αζ, εὐθεῖα, ἄρα κατὰ τὴν κς': τοῦ αὐτοῦ, ἡ θζ, ἴση ἐστὶ τῇ λζ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσονται καὶ αἱ λοιπαὶ ζκ, ζι, ἴσαι ἑκατέρα τῇ ζλ, ζθ, ζη. Ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζη, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν λοιπῶν θλκι, σημείων, καὶ ἐφάψεται τῶν αβ, βγ, γδ, δε, εα, πλευρῶν τοῦ δοθέντος πενταγώνου κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ις': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ.

Πρότασις ΚΘ:

Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον τὸ αβγδε, περὶ ὃ δεῖ κύκλον περιγράψαι. Τμηθήτω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ βαε, αβγ, γωνιῶν δίχα διὰ τῶν αζ, βζ, συμβαλλουσῶν εὐθειῶν κατὰ τὸ ζ, ἀφ᾽ οὗ ὡς ἀπὸ κέντρου διαστήματι τῷ ζα, γραφήτω κύκλος, ὃς διελεύσεται καὶ διὰ τῶν βγδε, σημείων. ὅτι μὲν γὰρ αἱ ζα, ζβ, εἰσὶν ἴσαι, δείκνυται διὰ τῆς ϛ: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ. Ὅτι δὲ καὶ αἱ ζε, ζδ, ζγ, ἐπιζευχθεῖσαι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶν καὶ ἀλλήλαις καὶ ἑκατέρᾳ τῶν ζα, ζβ, δῆλον, ἡ μὲν γὰρ ὑπὸ ζαε, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζβα, ἔστι δὲ καὶ ἡ μὲν αε, τῇ αβ, ἴση, ἡ δὲ αζ, τῇ βζ, ἄρα κατὰ τὴν δ': τοῦ αὐτοῦ ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ζα, τῇ ζε. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσονται καὶ αἱ λοιπαὶ ὁμοίως ἴσαι. ὥστε ὁ κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζα, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων.

Τέλος τοῦ Δευτέρου τῆς Γεωμετρίας Βιβλίου.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

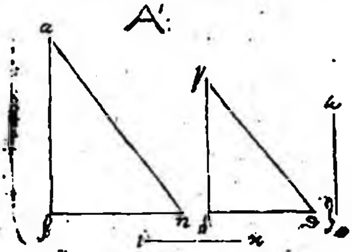
Πρότασις Α':

Ἐὰν ὦσι τρεῖς εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἡ α: πρὸς τὴν γ': τὸ ἐπὶ τῆς α: πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς β': ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τρίγωνον, ἢ τὸ ἐπὶ τῆς β': πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς γ':

Ἔστωσαν δὴ ἀνάλογον αἱ α β, γ δ, ε ζ, εὐθεῖαι, ἐπὶ δὲ τῶν α β, γ δ, ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα τρίγωνα τὰ α β η, γ δ θ. Λέγω ὅτι ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν ε ζ, οὕτως ἔχει καὶ τὸ α β η, τρίγωνον πρὸς τὸ γ δ θ, κατὰ γὰρ τὸν ἰ: ὅρον τοῦ ε': τοῦ Εὐκλείδου, ἡ α β, πρὸς τὴν ε ζ, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ πρὸς τὴν γ δ, ἀλλὰ τὸ α β η, τρίγωνον πρὸς τὸ γ δ θ, ὁμοίως διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, κατὰ τὴν ιθ': τοῦ ς': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν ε ζ, ἔχει καὶ τὸ α β η, τρίγωνον πρὸς τὸ γ δ θ, ὅπερ ἐστὶ τὸ α: Ὅτι δὲ καὶ τὸ ἐπὶ τῆς β': πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς γ': ἔχει ὡς ἡ α: πρὸς τὴν γ': δῆλον. Ἡ γὰρ ε ζ, ἐν ὑποδιπλασίονι λόγῳ ἐστὶ πρὸς τὴν α β, ἥπερ ἡ γ δ, ἀλλὰ καὶ τὸ γ δ θ, τρίγωνον ἐν ὑποδιπλασίονι ὁμοίως λόγῳ ἐστὶ πρὸς τὸ α β η, ἄρα ὡς ἡ ε ζ, α: πρὸς τὴν α β, γ': οὕτω καὶ τὸ γ δ θ, πρὸς τὸ α β η. Αὕτη ἡ πρότασις ἀληθεύει καὶ ἐπὶ παντὸς ἄλλου σχήματος, καὶ κύκλων. Τὰ γὰρ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα τετράπλευρα, ἢ πολύπλευρα, ἢ κύκλοι ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, ἢ τῶν διαμέτρων. ὥστε ὁ λέγων, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ α: πρὸς τὴν γ': τὸ ἐπὶ τῆς α: τετράπλευρον, ἢ πολύπλευρον, ἢ κύκλος, πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς β': ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον, οἶδεν, ὃ λέγει, καὶ τοῦτό ἐστι τὸ ἐν διπλασίονι λόγῳ εἶναι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, ἢ τῶν διαμέτρων.

Geom. Lib. 3. Fig. 1.

Α':



Πρότασις Β:

Ἐὰν εὐθεῖα εὐθείας διπλασία ᾖ, τὸ ἀπὸ τῆς διπλασίας τετράγωνον, ἢ ἄλλο τι σχῆμα, τετραπλάσιον ἔσται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ὁμοίου τε καὶ ὁμοίως κειμένου. Εἰ δὲ τριπλασία ᾖ ἡ εὐθεῖα, ἐννεαπλάσιον τὸ σχῆμα ἔσται, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν εἰδῶν τοῦ πολλαπλασίου ἀναλόγως.

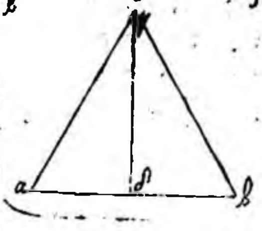
Ὑποκείσθω δὴ α: τὴν α β, διπλασίαν εἶναι τῆς γ δ. Ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ γ δ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὴν ε ζ, ὃν καὶ ἡ α β, πρὸς αὐτὴν, δῆλον ὅτι ἡ α β, τετραπλασία ἐστὶ τῆς ε ζ, ἀλλ᾽ ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν ε ζ, ἔσται καὶ τὸ α β η, σχῆμα πρὸς τὸ γ δ θ, ὡς δέδεικται διὰ τῆς προτέρου, ἄρα καὶ τὸ α β η, σχῆμα τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ γ δ θ. Ἔστω β': ἡ α β, τριπλασία τῆς γ δ, ἔσται πάντως καὶ ἡ γ δ, ὁμοίως τριπλασία τῆς ε ζ, ἀνάλογοι γὰρ ὑπετέθησαν. ὥστε ἡ α β, τῆς ε ζ, ἐννεαπλάσιος ἔσται κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ὡς δὲ ἡ α β, πρὸς τὴν ε ζ, ἐστὶ καὶ τὸ α β η, τρίγωνον πρὸς τὸ γ δ θ, ἄρα τὸ α β η, ἐννεαπλάσιον ἔσται τοῦ γ δ θ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων εἰδῶν τοῦ πολλαπλασίου κατὰ τὸ ἀνάλογον.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἰσογώνια λόγον ἔχουσι τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, ὡς καὶ παρὰ τοῦ Στοιχειωτοῦ δείκνυται, καὶ ὅτι τὰ τρίγωνα τὰ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, ὡσαύτως λόγον ἔχουσι τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, τῶν τὰς ἴσας περιεχουσῶν γωνίας. ἐὰν γὰρ παραλληλόγραμμον συσταθῇ ὑπὸ τῶν τὰς ἴσας περιεχουσῶν γωνίας πλευρῶν τῶν τριγώνων, ἑκάτερον αὐτῶν ἥμισυ ἔσται τοῦ ἰδίου παραλληλογράμμου κατὰ τὴν λ δ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ. Ἀλλὰ τὰ παραλληλόγραμμα ἔχουσιν ὡς εἴρηται τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν λόγον, ἄρα καὶ τὰ τρίγωνα ὁμοίως ἔχουσι λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν τῶν ἴσας περιεχουσῶν γωνίας. ~~Geom. Lib. 5 Fig. 2.~~

Πρότασις Γ:

Ἐὰν ἐν ἰσοπλεύρῳ τριγώνῳ κάθετος ἀπὸ μιᾶς τῶν αὐτοῦ γωνιῶν ἐπὶ τῆς ἀπεναντίον πλευρᾶς πέσῃ, ἡ πλευρὰ τοῦ τριγώνου δυνάμει ἐπίτριτός ἐστι τῆς καθέτου.



Ἔστω τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ α β γ, καὶ ἀπὸ τῆς ὑπὸ α γ β, αὐτοῦ γωνίας πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς α β, ἡ γ δ. Λέγω δὴ τὴν γ α, δυνάμει ἐπίτριτον εἶναι τῆς γ δ. τὸ γὰρ ἀπὸ τῆς γ α, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν γ δ, δ α, τετραγώνοις, κατὰ τὴν μ ζ': τοῦ α: Εὐκλείδου, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς α γ, τετράγωνον τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς α δ,

κατὰ

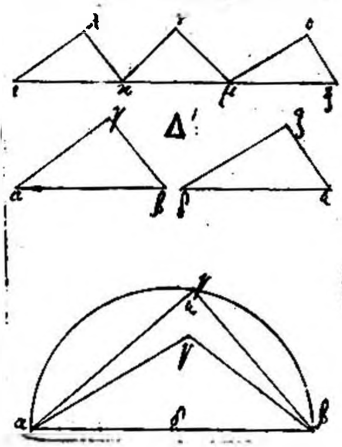
κατὰ τὴν ἀνατέρω. ἄρα καὶ συναμφότερα τὰ ἀπὸ τῶν γδ, δα, τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, ὥστε κειμένου τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, ἀντὶ μονάδος τετραγώνου, τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τεσσάρων τοιούτων μονάδων ἔσται περιεκτικὸν, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς γδ, τριῶν, ἀλλ' ὁ 4, τοῦ 3, ἐπίτριτός ἐστιν, ὡς ὅλον ἔχων τὸν 3, καὶ ἐν αὐτοῦ γ': μέρος, ἡ αγ, ἄρα δύναμει ἐπίτριτός ἐστι τῆς γδ, ἐὰν ἄρα ἐν ἰσοπλεύρῳ τριγώνῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Δ':

Ἐὰν ὦσι δύο τρίγωνα, ἢ καὶ πλείω ὀρθογώνια ἐπὶ ἴσων βάσεων, τὰ ἀπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ ἑνὸς τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ ἑτέρου τετραγώνοις, συναμφότερα συναμφοτέροις.

Ἔστωσαν ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν αβ, δε, τρίγωνα ὀρθογώνια τὰ αβγ, δεζ, ἔχοντα γωνίας ὀρθὰς τὰς πρὸς τῷ γ, καὶ ζ. Λέγω ὅτι συναμφότερα τὰ ἀπὸ τῶν αγ, γβ, τετράγωνα ἴσα ἐστὶ συναμφοτέροις τοῖς ἀπὸ τῶν δζ, ζε. κατὰ γὰρ τὴν μζ': τοῦ α': τοῦ Εὐκλείδου, τὸ μὲν ἀπὸ τῆς αβ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αγ, γβ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς δε, τοῖς ἀπὸ τῶν δζ, ζε, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δε, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αγ, γβ, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δζ, ζε. ἐὰν ἄρα ὦσι, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib.3. Fig. 3.



Πρότασις Ε':

Παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς δίχα τμηθείσης, ὁ ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς τομῆς περὶ τὴν αὐτὴν πλευρὰν γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας.

Ἔστω ὀρθογώνιον τὸ αβγ, τρίγωνον κατὰ τὸ γ, σημεῖον, καὶ τμηθήτω ἡ αβ, ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν γωνίαν δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δα, ἢ δβ, γραφήτω κύκλος. Λέγω δὴ ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ γ, σημείου. ἡμικύκλιον γὰρ ἔσται τὸ ἀπολαμβανόμενον τόξον ὑπὸ τῆς αβ, ἡ δὲ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστι κατὰ τὴν λα': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ.

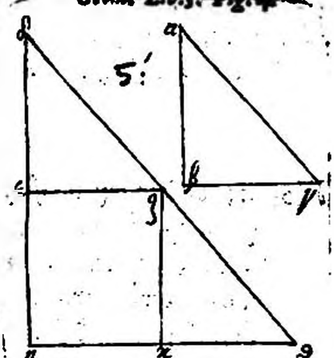
Ἄλλως. Κείσθω τὸν διὰ τῶν α, καὶ β, σημείων διερχόμενον κύκλον μὴ διέρχεσθαι καὶ διὰ τοῦ γ, πάντως γε ὁ κύκλος οὗτος διελεύσεται διά τινος σημείου ἐντὸς τοῦ γ, ἢ ἐκτὸς ὄντος. Ἔστω δὴ α': ἐκτὸς ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος, καὶ συνεστάθω ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἀπὸ τῶν α, καὶ β, περάτων ἡ ὑπὸ α ε β, γωνία, καὶ ἔσαι δηλαδὴ ὀρθὴ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ὑπὸ α γ β, ὀρθὴ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ α ε β, τῇ ὑπὸ α γ β, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς, ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὴν κ α: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ. τὸ αὐτὸ πάντως ἄτοπον ἕψεται, κἂν διὰ τοῦ ἐντὸς σημείου ὑποτεθῇ ὁ κύκλος διέρχεσθαι, παντὸς ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ϛ':

Ἐὰν ὦσι δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ὅμοια, τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τὰς ὀρθὰς γωνίας ὡς ἀπὸ μιᾶς τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν ὁμολόγων πλευρῶν, ὡς ἀπὸ μιᾶς κατὰ δύο τετραγώνοις.

Ἔστωσαν ὀρθογώνια ὅμοια τρίγωνα τὰ α β γ, δ ε ζ, ἔχοντα ὀρθὰς μὲν τὰς ὑπὸ α β γ, δ ε ζ, γωνίας, ἴσας δὲ τάς τε πρὸς τῷ α, καὶ δ, καὶ τὰς πρὸς τῷ γ, καὶ ζ. Λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῶν α γ, δ ζ, ὡς ἀπὸ μιᾶς τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν α β, δ ε, ὡς ἀπὸ μιᾶς καὶ τῶν β γ, ε ζ, ὁμοίως ὡς ἀπὸ μιᾶς τετραγώνοις. Ἤχθω γὰρ ἡ δ ε, κατὰ τὸ συνεχὲς, ὥστε τὴν ε η, ἴσην εἶναι τῇ α β, ἀπὸ δὲ τοῦ η, παράλληλος τῇ ε ζ, ἤχθω ἡ η θ, συμπίπτουσα τῇ δ ζ, ἐκβαλλομένῃ κατὰ τὸ θ, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς η θ, ἡ ζ κ. Δείκνυται, αἱ ε η, ζ κ, παράλληλοι εἰσὶ κατὰ τὴν κ η: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ. ὥστε κατὰ τὴν αὐτὴν ἡ ὑπὸ κ ζ θ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ε δ ζ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζ κ θ, ἴση τῇ ὑπὸ δ ε ζ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ θ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ ε ζ δ, ἴση ἐστίν. ἰσογώνιον ἄρα τὸ ζ κ θ, τρίγωνον τῷ δ ε ζ. ἀλλὰ καὶ τὸ α β γ, ὁμοίως ἰσογώνιόν ἐστι τῷ δ ε ζ, τριγώνῳ, τὸ ἄρα ζ κ θ, τρίγωνον, ἰσογώνιον ἐστὶ τῷ α β γ, ὅτι δὲ καὶ ἰσόπλευρον, δῆλον. ἡ γὰρ ζ κ, ἴση ἐστὶ τῇ ε η, κατὰ τὴν λ δ': τοῦ αὐτοῦ. ἡ δὲ ε η, γέγονεν ἴση τῇ α β, ἡ ζ κ, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ α β, καὶ κατὰ τὴν κ ϛ': τοῦ αὐτοῦ, τὸ ζ κ θ, ἴσον ἐστὶ τῷ α β γ, ὥστε ἡ κ θ, ἴση τῇ β γ, ἔστι δὲ καὶ ἡ η κ, ἴση τῇ ε ζ, ἡ ὅλη ἄρα η θ, ἴση ἐστὶ ταῖς β γ, ε ζ, ἡ δὲ η δ, ταῖς α β, δ ε, καὶ ἡ δ θ, ταῖς α γ, δ ζ, ἀλλὰ τὸ δ η θ, ὀρθογώνιόν ἐστι κατὰ τὸ η, κατὰ δὲ τὴν μ ζ': τοῦ αὐτοῦ, τὸ ἀπὸ τῆς δ θ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δ η, η θ, ἄρα τὸ ἀπὸ τῶν α γ, δ ζ, ὡς ἀπὸ μιᾶς, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπό τε τῶν α β, δ ε, ὡς ἀπὸ μιᾶς καὶ τῷ ἀπὸ τῶν β γ, ε ζ, ὁμοίως ὡς ἀπὸ μιᾶς, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

~~Geom. Lib. 5. Fig. 4.~~

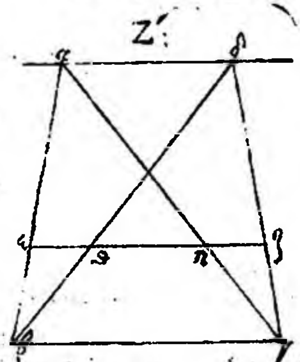


Πρό-

Πρότασις Ζ'.

Ἐὰν δύο, ἢ καὶ πλείω τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς ᾖ βάσεως, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἀχθῇ δέ τις εὐθεῖα τῇ βάσει παράλληλος, ἀναλόγως τὰ τρίγωνα τμηθήσεται.

Geom. Lib. 3. Fig. 5.



Ἔστωσαν τρίγωνα τὰ αβγ, δβγ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βγ, βάσεως καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς αδ, βγ, ἤχθω δὲ τῇ βγ, παράλληλος ἡ εζ. Λέγω ὅτι τὰ αβγ, δβγ, τρίγωνα ἀναλόγως τέμνεται. ὥστε ἔχειν τὸ αεη, τρίγωνον πρὸς τὸ εβγη, τραπέζιον, ὡς ἔχει καὶ τὸ δθζ, τρίγωνον πρὸς τὸ θβγζ, τραπέζιον. Ἐπεὶ γὰρ τὰ αβγ, αεη, καὶ δβγ, δθζ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσι, πάντως γε κατὰ τὴν δ': τοῦ ς': τῶν Στοιχείων, ἀνάλογον ἔχουσι τὰς πλευρὰς τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ἡ αε, πρὸς τὴν εη, ἡ δὲ δβ, πρὸς τὴν βγ, ὡς ἡ δθ, πρὸς τὴν θζ, καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν αε, ἡ βγ, πρὸς τὴν εη, ὡς δὲ ἡ δβ, πρὸς τὴν δθ, ἡ βγ, πρὸς τὴν θζ. ἀλλ' ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν αε, ἔστι καὶ ἡ δβ, πρὸς τὴν δθ, διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν εθ, τῇ αδ, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν αε, δέδεικται καὶ ἡ βγ, πρὸς τὴν εη, ἄρα καὶ ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν δθ, ἡ βγ, πρὸς τὴν εη. ὡς δὲ ἡ δβ, πρὸς δθ, δέδεικται καὶ ἡ βγ, πρὸς τὴν θζ, ἡ βγ, ἄρα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρός τε τὴν εη, καὶ θζ. καὶ κατὰ τὴν θ': τοῦ ε': τοῦ αὐτοῦ, αἱ εη, θζ, ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' ἡ εζ, ἤχθη παράλληλος τῇ αδ, τὰ αεη, ἄρα δθζ, τρίγωνα ἴσα εἰσὶ κατὰ τὴν λη': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ, εἰσὶ δὲ ἴσα καὶ τὰ αβγ, δβγ, κατὰ τὴν λζ': τοῦ αὐτοῦ. ἐὰν ἄρα ἀπὸ τῶν αβγ, δβγ, ἴσων τριγώνων ἀφαιρεθῇ ἴσα τὰ αεη, δθζ, τρίγωνα, ἐγκαταλείπονται ἴσα καὶ τὰ εβγη, θβγζ, τραπέζια, ὥστε ὡς ἔχει τὸ αεη, τρίγωνον πρὸς τὸ εβγη, τραπέζιον, ἔχει καὶ τὸ δθζ, τρίγωνον πρὸς τὸ θβγζ, τραπέζιον, ὅπερ ἦν τὸ προτεθέν. Ὅτι δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν αε, ἔχει ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν δθ, δῆλον, κατὰ γὰρ τὴν β': τοῦ ς': τῶν Στοιχείων, ὡς ἡ βε, πρὸς τὴν αε, ἡ βθ, πρὸς τὴν δθ, καὶ συνθέσει, ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν αε, ἡ δβ, πρὸς τὴν δθ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

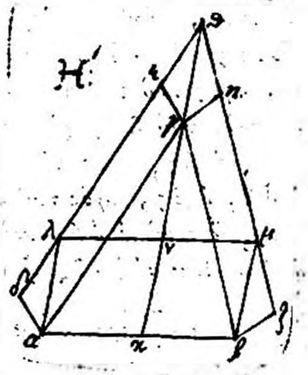
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ὦσιν ὁποσαοῦν τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἀχθῇ δέ τις εὐθεῖα τῇ βάσει παράλληλος τέμνουσα τὰ τρίγωνα, αἱ ὑπὸ τῶν πλευρῶν ἑκάστου τῶν τριγώνων ἐναπολαμβανόμεναι εὐθεῖαι, ἴσαι εἰσὶν, ὡς ἐνταῦθα ἤδη αἱ εη, θζ.

Πρότασις Η′:

Παντὸς τριγώνου ἐὰν ἐφ' ἑκατέρας τῶν πλευρῶν παραλληλόγραμμα ὁποιασοῦν συσταθῶσι, καὶ αἱ ἐκτὸς τῶν παραλληλογράμμων πλευραὶ ἐκβαλλόμεναι πρὸς ἕν τι συμπέσωσι σημεῖον, τὰ συσταθέντα παραλληλόγραμμα, ἴσα ἔσονται τῷ ὑπό τε τῆς βάσεως παραλληλογράμμῳ, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης εὐθείας ὑπό τε τῆς κατὰ κορυφὴν γωνίας τοῦ τριγώνου καὶ τοῦ σημείου, καθ' ὃ αἱ ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν εὐθεῖαι.

Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ συνεστάθω ἐπὶ τῶν αγ, βγ, αὐτοῦ πλευρῶν τὰ αδεγ, βζηγ, ὡς ἔτυχε παραλληλόγραμμα, ἐκβαλλόμεναι δὲ καὶ αἱ ἐκτὸς τῶν παραλληλογράμμων πλευραὶ δε, ζη, συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γθ. Λέγω δὴ τὰ αδεγ, βζηγ, παραλληλόγραμμα ἴσα εἶναι τῷ ὑπό τε τῆς αβ, καὶ γθ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ παραλλ: Ἐξήχθω γὰρ ἡ θγ, καὶ τὸ συνεχὲς ἀπὸ τοῦ γ, σημείου, τέμνουσα τὴν αβ, κατὰ τὸ κ, ἀπὸ δὲ τῶν α, καὶ β, ἤχθωσαν παράλληλοι τῇ θγκ, αἱ αλ, βμ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ λμ. καὶ ἐπεὶ τὰ αδεγ, καὶ αλθγ, παραλληλόγ: ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς αγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις αγ, δθ, πάντως γε ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ κατὰ τὴν λε: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἀλλὰ κατὰ τὴν αὐτὴν καὶ τὸ αλνκ, ἴσον ἐστὶ τῷ αλθγ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς γὰρ ἄμφω εἰσὶ βάσεως τῆς αλ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς αλ, κθ, τὸ ἄρα αδεγ, παραλλ: ἴσον ἐστὶ τῷ αλνκ, παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ βζηγ, παραλληλόγραμμον, ἴσον ἐστὶ τῷ βμνκ. τὰ δύο ἄρα παραλληλόγραμ: αδεγ, βζηγ, ἴσα ἐστὶ τοῖς αλνκ, βμνκ, συναμφότερα συναμφοτέροις. ἀλλὰ τὰ αλνκ, βμνκ, τουτέστι τὸ αλμβ, παραλληλόγραμμ: περιέχεται ὑπὸ τῆς αβ, καὶ γθ, ἑκατέρα γὰρ τῶν αλ, βμ, ἴση ἐστὶ τῇ γθ, κατὰ τὴν λδ′: τοῦ αὐτοῦ. Παντὸς ἄρα τριγώνου ἐὰν ἐφ' ἑκατέρας τῶν πλευρῶν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib.3. Fig.6.



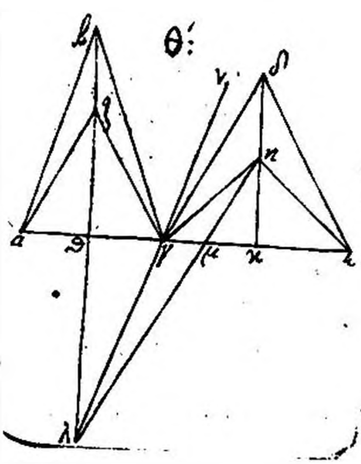
Πρό-

Πρότασις Θ'.

Τὰ ἐπὶ ἀνίσων βάσεων ὅμοια ἰσοσκελῆ τρίγωνα τῶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν βάσεων ἰσοσκελῶν τριγώνων, ἀνομοίων μὲν ἀλλήλοις τε καὶ τοῖς ὁμοίοις, ἰσοπεριμέτρων δὲ αὐτοῖς, μείζονά ἐστι συναμφότερα συναμφοτέρων.

Ἔστωσαν τρίγωνα ἰσοσκελῆ ὅμοια τὰ αζγ, γδε, ἐπὶ ἀνίσων βάσεων τῶν αγ, γε, ἔστωσαν δ' ἔτι ἐπὶ τῶν αὐτῶν αγ, γε, βάσεων καὶ ἕτερα δύο τρίγωνα ἰσοσκελῆ τὰ βαγ, γηε, ἀνόμοια μὲν καὶ ἀλλήλοις καὶ τοῖς ζαγ, δγε, ἰσοπερίμετρα δὲ τοῖς αὐτοῖς. Λέγω δὴ συναμφότερα τὰ ζαγ, δγε, ὅμοια ἰσοσκελῆ τρίγωνα, μείζονα εἶναι συναμφοτέρων τῶν βαγ, ηγε, ἀνομοίων. Κείσθωσαν γὰρ αἱ αγ, γε, βάσεις ἐπ' εὐθείας καὶ ἔστω ἡ γε, μείζων τῆς αγ, ἐπιζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ βζ, δη, ὧν γε κατὰ τὸ συνεχὲς ἐξαγομένων, τμηθήσονται αἱ αγ, γε, βάσεις δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς κατὰ τὰ θ, κ, σημεῖα, ὡς δειξόμεθα. καὶ διήχθω ἡ βθ, κατὰ τὸ λ, ὥστε τὴν θλ, ἴσην εἶναι τῇ βθ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λγ, λη, δείκνυται. Ἐπεὶ αἱ βθ, θλ, ἴσαι εἰσί, κοινὴ δὲ ἡ θγ, καὶ αἱ πρὸς τῷ θ, γωνίαι ὀρθαί, πάντως γε καὶ αἱ βγ, λγ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν δ': τοῦ α: τῶν Στοιχείων, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βγθ, τῇ ὑπὸ λγθ, ἴση. ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ βγθ, μείζων τῆς ὑπὸ ζγθ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ λγθ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ζγθ, τῇ δὲ ὑπὸ ζγθ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ζαθ, καὶ τῇ ὑπὸ ζαθ, ἡ ὑπὸ δγε, διὰ τὴν τῶν τριγώνων ὁμοιότητα, ἄρα ἡ ὑπὸ λγθ, τῆς ὑπὸ δγε, μείζων ἐστί, καὶ πολλῷ μᾶλλον τῆς ὑπὸ ηγε, ὥστε ἡ λγ, εὐθεῖα, ἐκβαλλομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ γδε, τριγώνου, ὡς ἤδη κατὰ τὸ ν, αἱ γὰρ ὑπὸ νγε, λγθ, κατὰ κορυφὴν γωνίαι ἴσαι ὀφείλουσι γενέσθαι, μείζων δὲ ἡ ὑπὸ λγθ, τῆς ὑπὸ δγε, ὡς δέδεικται. μείζων ἄρα ἔσται καὶ ἡ ὑπὸ νγε, τῆς αὐτῆς δγε, καὶ ἑπομένως ἐκτὸς ἡ λγν, πεσεῖται. Ἐπιζευχθήτω δὲ ἡ λη, καὶ τεμεῖ πάντως τὴν γε, ἐντὸς γὰρ τοῦ τριγώνου δγε, τὸ η, σημεῖον ἐστί· τεμνέτω δὴ κατὰ τὸ μ, καὶ ἐπεὶ αἱ αζ, ζγ, γδ, δε, ἴσαι εἰσὶ ταῖς αβ, βγ, γη, ηε, διὰ τὸ ἰσοπερίμετρα εἶναι τὰ αζγ, γδε, τοῖς αβγ, γηε, καὶ αἱ ἡμίσειαι αὐτῶν πάντως ἴσαι ἔσονται, αἱ ζγ, γδ, ἄρα ἴσαι εἰσὶ ταῖς βγ, γη, τουτέστι ταῖς λγ, γη, ἀλλ' αἱ λγ, γη, μείζονές εἰσι τῆς λη, κατὰ τὴν κ': τοῦ α: τῶν Στοιχείων, ἄρα καὶ αἱ ζγ, γδ, μείζονές εἰσι τῆς λη, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρων τῶν

Geom. Lib.3. Fig.7.



ζγ, γδ, ὡς ἀπὸ μιᾶς, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς λη, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῶν ζγ, γδ, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῶν ζθ, δκ, ὡς ἀπὸ μιᾶς μετὰ τοῦ ἀπὸ τῶν θγ, γκ, ὡς ἀπὸ μιᾶς, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ηλ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῶν ηκ, λθ, ὡς ἀπὸ μιᾶς μετὰ τοῦ ἀπὸ τῶν κμ, μθ, ὡς ἀπὸ μιᾶς κατὰ τὴν ε': τοῦ γ': τοῦ παρόντος. ἄρα τὸ ἀπὸ τῶν ζθ, δκ, ὡς ἀπὸ μιᾶς μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς θκ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῶν ηκ, λθ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς θκ, ἴση δὲ ἡ λθ, τῇ βθ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῶν ζθ, δκ, ὡς ἀπὸ μιᾶς μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς θκ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῶν βθ, ηκ, ὡς ἀπὸ μιᾶς μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς θκ, κοινοῦ δὲ ἀφαιρουμένου τοῦ ἀπὸ τῆς θκ, ἔσται ἄρα τὸ ἀπὸ τῶν ζθ, δκ, ὡς ἀπὸ μιᾶς, μεῖζον τοῦ ἀπὸ τῶν βθ, ηκ, ὡς ἀπὸ μιᾶς, κοινῶν δὲ ἀφαιρεθεισῶν τῶν ζθ, ηκ, ἐγκαταλείπεται ἡ δη, μείζων τῶν βζ, μείζων δὲ καὶ ἡ γκ, τῆς γθ, τὸ εἶναι μείζονα καὶ τὴν διπλασίονα αὐτῆς γε, τῆς διπλασίονος αγ, ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ηδ, κγ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν βζ, θγ, τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν δη, κγ, ἥμισύ ἐστι τὸ δγη, τρίγωνον, καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν βζ, θγ, τὸ βγζ, κατὰ τὴν μα': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ δγη, ἄρα τρίγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ βγζ, τριγώνου. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ δεη, μεῖζον τοῦ βαζ, ὥστε ὅλον τὸ γδεη, κοιλογώνιον μεῖζόν ἐστι τοῦ αβγζ, κοιλογωνίου. Κοινῶν δὲ προσκειμένων τῶν αγζ, γεη, τριγώνων, ἔσται πάντως γε καὶ συναμφότερα τὰ αγζ, γδε, τρίγωνα μείζονα συναμφοτέρων τῶν αγβ, γεη, τριγώνων, ἀλλὰ τὰ αγζ, γδε, εἰσὶν ὅμοια, τὰ δὲ αγβ, γεη, ἀνόμοια. Τὰ ἐπὶ ἴσων ἄρα βάσεων ὅμοια ἰσοσκελῆ τρίγωνα τῶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν βάσεων ἰσοσκελῶν τριγώνων ἀνομοίων μὲν ἀλλήλοις τε καὶ τοῖς ὁμοίοις, ἰσοπεριμέτρων δὲ αὐτοῖς, μείζονά ἐστι συναμφότερα συναμφοτέρων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ι':

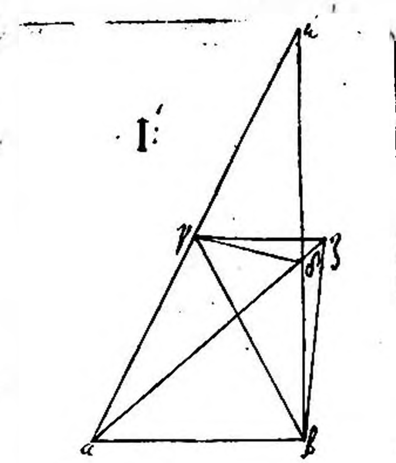
Τῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ἰσοπεριμέτρων τριγώνων τὸ ἰσοσκελές ἐστι μεῖζον.

Ἐπὶ τῆς αβ, τινὸς βάσεως ἔστω δύο ἰσοπερίμετρα τρίγωνα τὰ αβγ, αβδ, τὸ μὲν αβγ, ἰσοσκελές, τὸ δὲ αβδ, σκαληνόν. Λέγω δὴ τὸ αβγ, μεῖζον εἶναι τοῦ αβδ, ἤχθω ἡ αγ, ἐπὶ τὸ συνεχές. ὥστε τὴν γε, ἴσην εἶναι τῇ αγ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ εδ, γδ, καὶ ἐπεὶ τὸ αβδ, τρίγωνον ἰσοπερίμετρόν ἐστι τῷ αβγ, πάντως γε αἱ αδ, δβ, ἴσαι εἰσὶν ταῖς αγ, γβ, κοινὴ γὰρ ἑκατέροις τοῖς τριγώνοις ἡ αβ, βάσις, γέγονε δὲ καὶ ἡ αγε, ἴση ταῖς αγ, γβ, ἄρα αἱ αδ, δβ, ἴσαι εἰσὶ τῇ ὅλῃ αγε, ἀλλὰ τῆς αγε, μείζονές εἰσιν αἱ αδ, δε, δῆλον, ὅτι αἱ αὐταὶ αδ, δε, μείζονές εἰσι καὶ τῶν αδ, δβ, κοινῆς δὲ ἀφαιρουμένης τῆς αδ, ἐγκαταλείπεται καὶ ἡ δε, μείζων τῆς δβ· τῶν ἄρα εγδ, βγδ, τριγώνων, ἐπεὶ εἰσὶν αἱ δύο πλευραὶ εγ, γδ, ἴσαι δυσὶ ταῖς βγ, γδ, ἡ δὲ βάσις εδ, μείζων τῆς δβ, βάσεως, πάντως γε κατὰ τὴν κε': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἡ ὑπὸ εγδ,

γω-

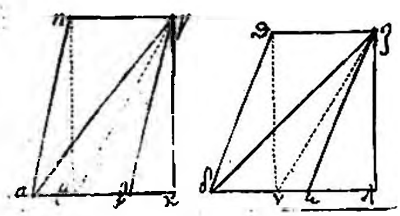
γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ β γ δ, ὥστε καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης ὑπὸ ε γ β, μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ε γ δ, ἀλλ' ἡ ὑπὸ ε γ β, ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ γ α β, γ β α, κατὰ τὴν λβ': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ, αὗται δὲ ἴσαι· ἡ ὑπὸ γ β α, ἄρα ἡμίσειά ἐστι τῆς ὑπὸ ε γ β, ὥστε ἡ ὑπὸ ε γ δ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ γ β α· γενέσθω ταύτῃ ἴση ἡ ὑπὸ ε γ ζ, καὶ ἔσται κατὰ τὴν κζ': τοῦ αὐτοῦ, ἡ γ ζ, παράλληλος τῇ α β, κατὰ δὲ τὴν λζ': τὸ α ζ β, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ α γ β, ἀλλὰ τὸ α ζ β, μεῖζόν ἐστι τοῦ α δ β, ἄρα καὶ τὸ α γ β, μεῖζόν ἐστι τοῦ αὐτοῦ α δ β. Τῶν ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ἰσοπεριμέτρων τριγώνων τὸ ἰσοσκελές ἐστι μεῖζον, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Geom. Lib.3. Fig.8.



Πρότασις ΙΑ':

Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ὕψη, καὶ ἀνάπαλιν, τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ πρὸς ἄλληλα ἔχοντα ὡς τὰ ὕψη, ἐπὶ ἴσων βάσεών ἐστιν.



Ἔστωσαν τρίγωνα μὲν τὰ α β γ, δ ε ζ, ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν α β, δ ε, παραλληλόγραμμα δὲ τὰ α β γ η, δ ε ζ θ, ἐπὶ τῶν αὐτῶν βάσεων α β, δ ε· καὶ πιπτέτω κάθετος ἀπὸ μὲν τοῦ γ, ἐπὶ τῆς α β, ἐκβαλλομένης ἡ γ κ, ἀπὸ δὲ τοῦ ζ, ἐπὶ τῆς δ ε, καὶ ταύτης ἐκβαλλομένης ἡ ζ λ. Λέγω, ὅτι τά τε α β γ, δ ε ζ, τρίγωνα, καὶ τὰ α β γ η, δ ε ζ θ, παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα ἔχουσιν, ὡς τὰ αὐτῶν ὕψη, δηλ: ὡς ἡ γ κ, κάθετος πρὸς τὴν ζ λ. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τῶν η, καὶ θ, παράλληλοι ταῖς γ κ, ζ λ, αἱ η μ, θ ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ μ γ, ν ζ, καὶ ἐπεὶ τὰ α β γ, μ κ γ, καὶ δ ε ζ, ν λ ζ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ κατὰ τὴν λη': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, πάντως γε ὡς τὸ α β γ, πρὸς τὸ δ ε ζ, ἔχει καὶ τὸ μ κ γ, πρὸς τὸ ν λ ζ, ἀλλὰ τὰ μ κ γ, ν λ ζ, ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ γ κ, λ ζ, κατὰ τὴν α': τοῦ ς': τοῦ αὐτοῦ, ἴση γὰρ ἡ μ κ, τῇ ν λ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι καὶ τὰς η γ, ζ θ, καὶ διὰ αὐτὸ τοῦτο ἰσοϋψῆ, ἄρα καὶ τὰ α β γ, δ ε ζ, πρὸς ἄλληλά ἐστιν, ὡς αἱ γ κ, ζ λ, αἵτινες τὰ τῶν αὐτῶν α β γ, δ ε ζ, τριγώνων, καὶ α γ, δ ζ, παραλληλογράμμων παριστῶσιν ὕψη, κατὰ τὸν μγ': ὅρον τοῦ παρόντος. Ἐπεὶ δὲ τὸ μὲν α γ, παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ α β γ, τριγώνου, τὸ δὲ δ ζ, τοῦ δ ε ζ, δῆλον, ὅτι καὶ τὰ α γ, δ ζ, παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα ἔχουσιν, ὡς αἱ γ κ, ζ λ, ἤτοι τὰ αὐτῶν ὕψη. Ὅτι δὲ

καὶ

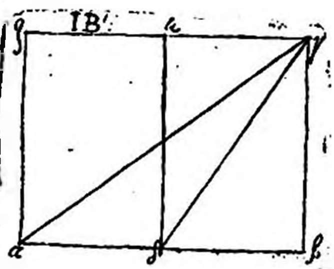
καὶ ἀνάπαλιν ἡ πρότασις ἀληθεύει, οὐ χαλεπὸν δεῖξαι. Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, δειχθήσεται τὸ μὲν αβγ, ἴσον τῷ μκγ, τὸ δὲ δεζ, ἴσον τῷ νλζ, καὶ ἑπομένως ἡ μὲν κβ, βάσις τῇ μκ, βάσει, ἡ δὲ δε, τῇ νλ, ἀλλ' ἡ μκ, ἴση τῇ νλ, ἄρα καὶ ἡ αβ, ἴση τῇ δε. Τὰ τρίγωνα ἄρα καὶ τὰ παραλλ: τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΒ':

Ἐὰν τρίγωνον διπλασίονα βάσιν ἔχῃ τῆς τοῦ παραλληλογράμμου, ᾧ τινι ἐν ταῖς αὐταῖς ᾖ παραλλήλοις, τὸ τρίγωνον ἴσον ἔσται τῷ παραλληλογράμμῳ.

Ἐχέτω δὴ τὸ αβγ, τρίγωνον τὴν αβ, αὐτοῦ βάσιν διπλασίονα τῆς αδ, βάσεως τοῦ αδεζ, παραλληλογράμμου, καὶ ἔστωσαν τό, τε αβγ, τρίγωνον καὶ αδεζ, παραλληλόγ: ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς αβ, ζγ. Λέγω τὸ αβγ, τρίγωνον ἴσον εἶναι τῷ αδεζ, παραλληλογράμμῳ. Ἐπιζεύχθω γὰρ ἡ δγ, καὶ ἐπεὶ τὰ αδγ, δβγ, τρίγωνα, ἐπὶ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν αδ, δβ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, πάντως γε κατὰ τὴν λη: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν, ὥστε τὸ ὅλον αβγ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ αδγ, ἀλλὰ τοῦ αὐτοῦ αδγ, διπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ αδεζ, παραλληλόγραμμον κατὰ τὴν μα: τοῦ αὐτοῦ, τὸ ἄρα αβγ, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ αδεζ, παραλληλ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Geom. Lib. 3. Fig. 9.



Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἡ βάσις παντὸς τριγώνου δίχα τμηθῇ, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ κάθετος ἐπὶ τῆς βάσεως πέσῃ, τὸ ὑπό τε τῆς καθέτου καὶ ἡμισείας τῆς βάσεως ἴσον ἐστὶ τῷ τριγώνῳ.

Πρότασις ΙΔ':

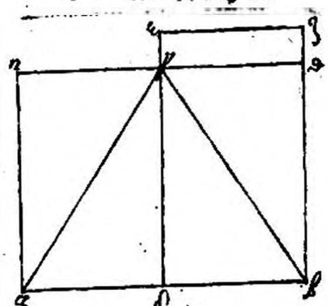
Ἐν παντὶ τριγώνῳ ἐὰν ἐπὶ τῆς ἡμισείας τῆς αὐτοῦ βάσεως παραλληλόγραμμον κατασκευασθῇ, ὥστε εἶναι τῷ τριγώνῳ ἰσοπερίμετρον, τὸ παραλληλόγραμμον μεῖζον ἔσται τοῦ τριγώνου.

Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, οὗ βάσις ἡ αβ, τμηθήτω δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ συνεστάθω ἐπὶ τῆς δβ, παραλληλόγραμμον ἰσοπερίμετρον τῷ αβγ, τριγώνῳ τὸ δεζβ. Λέγω δὴ τὸ δεζβ, παραλληλόγραμμον μεῖζον εἶναι τοῦ αβγ, τριγώνου. Διχῶς δέ τινι ἐνδέχεται συμβῆναι. εἰ γὰρ τὸ τρίγωνον ἰσοσκελὲς εἴη, ὀρθογώνιον ἔσται τὸ παραλληλόγραμμον, εἰ δὲ σκαληνόν, ῥομβοειδές. Ἔστω δὴ π: τὸ αβγ, τρίγω-

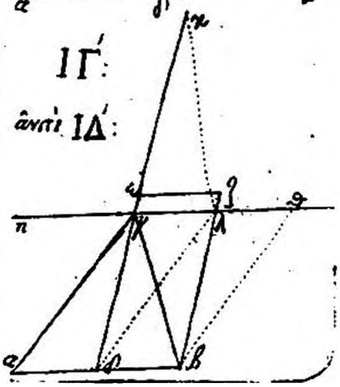
τρίγωνον ἰσοσκελὲς, καὶ διὰ τοῦ γ, σημείου ἤχθω παράλληλος τῇ α β, βάσει ἡ η θ, ἀπὸ δὲ τοῦ α, τῇ γ δ, ὁμοίως παράλληλος ἡ α η· καὶ ἐπεὶ ἡ γ δ α, γωνία ὀρθή ἐστι κατὰ τὸ α: πόρισμα τῆς γ': τοῦ γ': τῶν καθ' ἡμᾶς Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, πάντως γε ἡ α γ, μείζων ἐστὶ τῆς δ γ, κατὰ τὴν ιθ': τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ. ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ἡ γ β, τῆς β θ, μείζων, ἀλλ' αἱ γ θ, δ β, ἴσαι, εἰσὶν ἡ ὅλη α β· ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ γ δ β θ, παραλληλογράμμου ἐλάττων ἐστὶ τῆς περιμέτρου τοῦ α β γ, τριγώνου, τὸ δὲ γ δ β θ, παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ α γ β, τριγώνῳ κατὰ τὴν ια: τοῦ παρόντος, μεῖζον δὲ τὸ δ β ζ ε, τοῦ δ β θ γ, ἄρα τὸ δ β ζ ε, παραλληλ: ἰσοπερίμετρον ὂν τῷ α β γ, τριγώνῳ μεῖζον αὐτοῦ ἐστιν.

Ἔστω β': τὸ α β γ, τρίγωνον σκαληνὸν, καὶ κατεσκευάσθω ἐπὶ τῆς δ β, ἡμισείας τῆς αὐτοῦ α β, βάσεως ἰσοπερίμετρον τὸ δ β ζ ε, παραλληλόγραμμον. Λέγω δὴ καὶ τοῦτο μεῖζον εἶναι τοῦ α β γ, τριγώνου. Διήχθω γὰρ διὰ τοῦ γ, ὡς πρότερον παράλληλος τῇ α β, ἡ η θ, τέμνουσα τὴν β ζ, κατὰ τὸ λ. ἡ δὲ δ γ, ἐξαχθήτω ἀπὸ τοῦ γ, κατὰ τὸ συνεχὲς, ὥστε τὴν γ κ, ἴσην εἶναι τῇ γ δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δ λ, λ κ. Τὸ γοῦν δ β λ γ, παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ α β γ, τριγώνῳ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ια: τοῦ παρόντος, ἀλλὰ τοῦ δ β λ γ, μεῖζόν ἐστι τὸ δ β ζ ε, παραλληλόγραμμον. ἄρα τὸ αὐτὸ δ β ζ ε, μεῖζόν ἐστι καὶ τοῦ α β γ, τριγώνου, ᾧ περ ἰσοπερίμετρόν ἐστιν. ὅτι δὲ τὸ δ β λ γ, οὐ δύναταί ποτε ἰσοπερίμετρον εἶναι τῷ α β γ, τριγώνῳ, δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ γ κ, ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστι τῇ β λ. ἴση γὰρ εἴληπται τῇ γ δ, ταύτῃ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ β λ, κατὰ τὴν λδ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, πάντως γε καὶ ἡ κ λ, ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστι τῇ γ β, κατὰ τὴν λγ': τοῦ αὐτοῦ, ἔστι δὲ καὶ ἡ δ λ, ἴση τῇ α γ, κατὰ τὴν αὐτὴν λδ': αἱ δύο ἄρα δ λ, λ κ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς δυσὶ τοῦ α β γ, τριγώνου πλευραῖς α γ, γ β. Αὖθις ἐπεὶ ἡ γ κ, εἴληπται ἴση τῇ δ γ, ἡ ὅλη πάντως δ γ κ, ἴση ἐστὶ ταῖς δυσὶ τοῦ δ β λ γ, παραλληλογράμμου πλευραῖς δ γ, β λ, ἀλλ' αἱ δ λ, λ κ, μείζονές εἰσι τῆς δ κ, κατὰ τὴν κ: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ. ἄρα καὶ αἱ α γ, γ β, μείζονές εἰσι τῶν δ γ, β λ, ἡ δὲ ὅλη βάσις α β, ἴση ἐστὶ ταῖς δ β, γ λ, ἄρα ἡ τοῦ α β γ, τριγώνου περίμετρος, μείζων ἐστὶ τῆς περιμέτρου τοῦ δ β λ γ, παραλληλογράμμου. Ἐκ παντὸς ἄρα τριγώνου, ἐὰν ἐπὶ τῆς ἡμισείας τῆς αὐτοῦ βάσεως, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 3. Fig. 10.



ΙΓ' ἀντὶ ΙΔ':



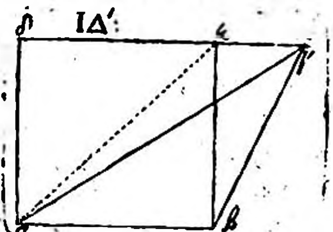
Πρό-

Πρότασις ΙΔ':

Ο"τε τρίγωνον τραπεζίῳ βάσιν ἔχῃ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ᾖ παραλλήλοις, εἰ μὲν τὴν μείζονα τῶν τοῦ τραπεζίου παραλλήλων πλευρῶν ἔχῃ τὸ τρίγωνον βάσιν, ἔλαττον ἔσται τὸ τραπέζιον τοῦ τριγώνου, ἢ διπλάσιον. εἰ δὲ τὴν ἐλάττονα, τὸ τραπέζιον μεῖζον ἔσται τοῦ τριγώνου, ἢ διπλάσιον.

Ε"στω τραπέζιον τὸ α β γ δ, καὶ αἱ τούτου πλευραὶ α β, γ δ, παράλληλοι, μείζων μέντοι ἡ δ γ, ἐλάττων δὲ ἡ α β. καὶ ἐχέτω α: τὸ α γ δ, τρίγωνον τὴν αὐτὴν δ γ, βάσιν τοῦ α β γ δ, τραπεζίου, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ὂν παραλλήλοις ταῖς α β, γ δ. ἐχέτω δ' ἔτι καὶ τὸ α β γ, τρίγωνον τὴν αὐτὴν α β, βάσιν τοῦ α β γ δ, τραπεζίου ἐν ταῖς αὐταῖς καὶ αὐτὸ ὂν παραλλήλοις. Λέγω δὴ

Geom. Lib. 3. Fig. 11.



ὅτι τὸ τραπέζιον τοῦ μὲν α γ δ, τριγώνου ἔλαττόν ἐστιν, ἢ διπλάσιον, τοῦ δὲ α β γ, μεῖζον ἢ διπλάσιον. Τὰ γὰρ α δ γ, α β γ, τρίγωνα ἴσα εἰσὶ συναμφότερα τοῦ α β γ δ, τραπεζίου. Ε'πεὶ δὲ τὸ α δ γ, τρίγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ α β γ, τριγώνου, ὅτι ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἄμφω εἰσὶ, τοῦ δὲ α δ γ, μείζων ἡ βάσις τῆς τοῦ α β γ, βάσεως, πάντως γε τοῦ μὲν α δ γ, τριγώνου ἔλαττόν ἐστιν ἢ διπλάσιον τὸ α β γ δ, τραπέζιον. τοῦ δὲ α β γ, μεῖζον ἢ διπλάσιον. τῆς γὰρ β ε, παραλλήλως ἀχθείσης τῇ α δ, τὸ α β ε δ, παραλληλ: διπλάσιόν ἐστι τοῦ α β γ, τριγώνου κατὰ τὴν μ α: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, προστιθεμένου δὲ τοῦ β ε γ, τριγώνου τοῦ α β ε δ, παραλληλογράμμῳ, τὸ ὅλον α β γ δ, μεῖζον ἔσται ἢ διπλάσιον τοῦ αὐτοῦ α β γ, τριγώνου. Ο"τε τρίγωνον ἄρα τραπεζίῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΕ':

Ε'ὰν ἐν τραπεζίῳ τὰς δύο ἀπεναντίον αὐτοῦ πλευρὰς παραλλήλους ἔχοντι τρίγωνον συσταθῇ ἔχον μὲν βάσιν τὴν μίαν τῶν λοιπῶν δύο τοῦ τραπεζίου πλευρῶν, τὴν δὲ κορυφὴν ἐν μέσῳ τῆς ἀπεναντίον τῆς αὐτοῦ βάσεως, τὸ τραπέζιον διπλάσιον ἔσται τοῦ τριγώνου.

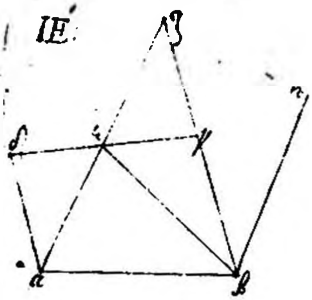
Τραπεζίου δὴ τοῦ α β γ δ, ἔστωσαν αἱ δύο ἀπεναντίον πλευραὶ α δ, β γ, παράλληλοι, καὶ τμηθήτω δίχα ἡ δ γ, κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπιζευχθῶσαν αἱ α ε, β ε, ὥστε συσταθῆναι τὸ α ε β, τρίγωνον ἐν τῷ α β γ δ, τραπεζίῳ, ἔχον βάσιν μὲν τὴν α β, τὴν δὲ κορυφὴν αὐτοῦ κατὰ τὸ ε, καθ' ὃ ἡ δ γ, δίχα τέτμηται, ἀπεναντίον οὖσα τῆς α β, τοῦ τριγώνου βάσεως. Λέγω ὅτι τὸ α β γ δ, τραπέζιον διπλάσιόν

ἐστι

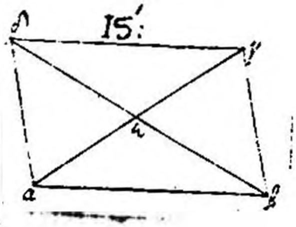
ἐστι τοῦ α ε β, τριγώνου. Διήχθωσαν γὰρ αἱ α ε, β γ, κατὰ τὸ συνεχὲς, ὥστε συμπίπτειν ἀλλήλαις κατὰ τὸ ζ. καὶ ἐπεὶ ἡ α δ, παράλληλός ἐστι τῆς β γ, πάντως γε ἡ ὑπὸ α δ ε, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ε γ ζ, ἔστι δὲ καὶ ὑπὸ δ ε α, ἴση τῇ ὑπὸ γ ε ζ, κατὰ κορυφὴν γὰρ, καὶ ἡ δ ε, τῇ ε γ, ἴση, ἄρα τὸ α δ ε, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ γ ε ζ, τριγώνῳ, καὶ ἡ α ε, πλευρὰ τῇ ε ζ, κατὰ τὴν κϛ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ. ὥστε τὰ α ε β, ε ζ β, τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ κατὰ τὴν λή: τοῦ αὐτοῦ, ἐπὶ ἴσων γὰρ εἰσι βάσεων, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς α ζ, β η, τὸ δὲ ὅλον α β ζ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ α ε β, ἀλλὰ τὸ α β ζ, ἴσον ἐστὶ τῷ α β γ δ, τραπεζίῳ. τοῖς γὰρ α δ ε, ε γ ζ, κοινοῦ προσκειμένου τοῦ α β γ ε, τραπεζίου γενήσεται τὸ α β γ δ, ἴσον τῷ α β ζ, τὸ δὲ α β ζ, δέδεικται διπλάσιον τοῦ α β ε, ἄρα καὶ τὸ α β γ δ, τραπέζιον διπλάσιόν ἐστι τοῦ αὐτοῦ α β ε, τριγώνου. Ἐὰν ἄρα ἐν τραπεζίῳ τὰς δύο ἀπεναντίον αὐτοῦ πλευρὰς, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 3. Fig. 10.

ΙΕ'



ΙϚ'



Πρότασις Ιϛ':

Ἅπαν τετράπλευρον διαιρεῖται εἰς τρίγωνα ἀνάλογα ὑπὸ τῶν αὐτοῦ διαμέτρων.

Ἔστω τετράπλευρον τὸ α β γ δ, διάμετροι δὲ αὐτοῦ αἱ α γ, β δ, τεμνόμεναι κατὰ τὸ ε. Λέγω ὅτι τὰ δ ε α, β ε α, δ ε γ, β ε γ, τρίγωνα ἀνάλογά ἐστι, καὶ ὡς ἔχει τὸ δ ε α, πρὸς τὸ β ε α, ἔχει καὶ τὸ δ ε γ, πρὸς τὸ β ε γ. ἢ ὡς τὸ α ε δ, πρὸς τὸ δ ε γ, ἔχει καὶ τὸ α ε β, πρὸς τὸ β ε γ. Κατὰ γὰρ τὴν α: τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὡς ἡ α ε, πρὸς τὴν ε γ, οὕτως ἔχει καὶ τὸ α ε δ, πρὸς τὸ δ ε γ, καὶ τὸ α ε β, πρὸς τὸ β ε γ, ἄρα καὶ ὡς τὸ α ε δ, πρὸς τὸ δ ε γ, ἔχει καὶ τὸ α ε β, πρὸς τὸ β ε γ, κατὰ τὴν ια: τοῦ ε: τοῦ αὐτοῦ. Ἐπεὶ δὲ ὡς ἡ δ ε, πρὸς τὴν ε β, ἔχει τὸ, τὸ δ ε α, πρὸς τὸ β ε α, καὶ τὸ δ ε γ, πρὸς τὸ β ε γ, ἄρα καὶ ὡς τὸ δ ε α, πρὸς τὸ β ε α, ἔχει καὶ τὸ δ ε γ, πρὸς τὸ β ε γ. Ἅπαν ἄρα τετράπλευρον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΖ':

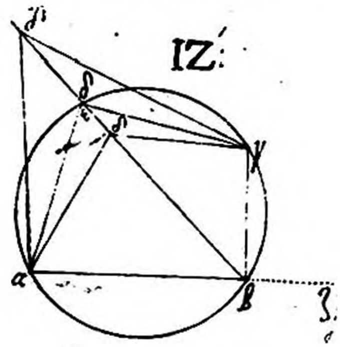
Ἐὰν κύκλος διὰ τριῶν τοῦ τετραπλεύρου σημείων, οὗ αἱ ἀπεναντίον γωνίαι ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς, γραφῇ, διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ δ':

Διὰ τριῶν ἤδη σημείων τῶν α, β, γ, τοῦ α β γ δ, τετραπλεύρου, οὗ αἱ ὑπὸ α β γ, α δ γ, καὶ β α δ, β γ δ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. Γραφήτω κύκλος ὁ α β γ δ.

Λέγω ὅτι διελεύσεται ὁ κύκλος καὶ διὰ τοῦ λοιποῦ σημείου δ. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αγ, βδ. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ αδβ, εγβ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν κα΄: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, πάντως γε κατὰ τὴν αὐτὴν ὁ διὰ τῶν αβγ, διερχόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ δ.

Ἄλλως. Δεδόσθω τὸν αβγ, κύκλον διερχόμενον διὰ τῶν α, β, γ, σημείων τοῦ αβγδ, τετραπλεύρου, μὴ διελθεῖν καὶ διὰ τοῦ δ. Τοῦτο δὲ διττῶς συμβήσεται, ἢ γὰρ ἐντὸς, ἢ ἐκτὸς τοῦ δ, διελεύσεται. Κείσθω δὴ α΄: ἐντὸς, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ, τέμνουσα τὸν αὐτὸν κύκλον κατὰ τὸ ε. Εἶτα ἐπεζεύχθωσαν καὶ αἱ αε, γε. καὶ ἐπεὶ τὸ αβγε, τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς τὸν αβγε, κύκλον, πάντως γε κατὰ τὴν κβ΄: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὥστε αἱ ὑπὸ αεγ, αβγ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς, ἀλλ' ὑπετέθησαν δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι καὶ αἱ ὑπὸ αδγ, αβγ, ἄρα αἱ ὑπὸ αεγ, αβγ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ αδγ, αβγ, κοινῆς δὲ ἀφαιρουμένης τῆς ὑπὸ αβγ, ἐγκαταλείπεται ἡ ὑπὸ αεγ, ἴση τῇ ὑπὸ αδγ, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς, ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὴν κα΄: τοῦ α΄: τοῦ αὐτοῦ. Τὸ αὐτὸ ἕψεται ἄτοπον κἂν ὁ κύκλος ὑποτεθῇ ἐκτὸς τοῦ δ, διέρχεσθαι. Ἐὰν ἄρα κύκλος, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 3. Fig. 13.



Πρότασις ΙΗ΄:

Παντὸς τετραπλεύρου ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον.

Ἐκβληθήτω δὴ τοῦ αβγδ, τετραπλεύρου ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ διαγράμματος κατὰ τὸ συνεχὲς ἡ αβ, πλευρὰ πρὸς τὸ ζ, σημεῖον. Λέγω τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ γβζ, ἴσην εἶναι τῇ ὑπὸ αδγ, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. κατὰ γὰρ τὴν ιγ΄: τοῦ α΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ αἱ ὑπὸ αβγ, γβζ, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ αβγ, αδγ, δυσὶν ὁμοίως ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, πάντως γε κατὰ τὸ α΄: ἀξίωμα αἱ ὑπὸ αβγ, γβζ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ αβγ, αδγ, κοινῆς δὲ ἀφαιρουμένης τῆς ὑπὸ αβγ, ἐγκαταλείπεται ἡ ὑπὸ γβζ, ἴση τῇ ὑπὸ αδγ, κατὰ τὸ γ΄: ἀξίωμα τοῦ Στοιχειωτοῦ. Παντὸς ἄρα τετραπλεύρου ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΘ':

Πᾶν τετράπλευρον ἐν κύκλῳ ἐγγραφόμενον, ἐὰν αἱ δύο ἀπεναντίον αὐτοῦ πλευραὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἰσί, τετράγωνόν ἐστιν, ἢ ἑτερόμηκες.

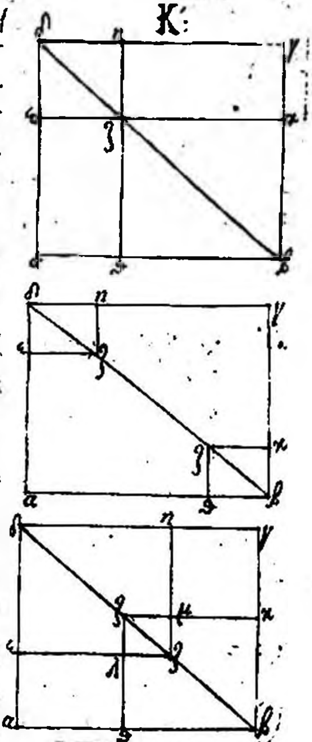
Ὁ λόγος τούτου πρόδηλος τοῖς καὶ ἄκροις χείλεσι, τὸ δὴ λεγόμενον, ἁψαμένοις τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων· κατὰ γὰρ τὴν λγ': τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ, καὶ αἱ λοιπαὶ δύο τοῦ αὐτοῦ τετραπλ: πλευραὶ ἴσαι τε εἰσὶ καὶ παράλληλοι. ὥστε ἐὰν ἰσόπλευρον ᾖ, ἔσται τετράγωνον, εἰ δὲ μή, ἑτερόμηκες.

Πρότασις Κ':

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Geom. Lib.3. Fig. 14.

K:



Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ αβγδ, περὶ δὲ τὴν τούτου διάμετρον παραλληλόγραμμα μὲν τὰ δεζη, καὶ ζθβκ, παραπληρώματα δὲ τὰ λοιπά. Τριχῶς δὲ τοῦτο συμβῆναι ἐνδέχεται, ἢ γὰρ τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα τοῦ δοθέντος παραλληλογράμμου καθ' ἓν σημεῖον μιᾶς τῶν αὐτῶν ἅπτονται γωνιῶν, ὡς ἐπὶ τοῦ α: ἐνταῦθα σχήματος, ἢ ἀπ' ἀλλήλων διΐστανται, ὡς ἐπὶ τοῦ β': ἢ γοῦν ἄλληλα τέμνουσιν, ὡς ἐπὶ τοῦ γ': κατὰ μὲν οὖν τὸν α: τρόπον, ὅτι τὰ ζα, ζγ, παραπληρώματα ἴσα εἰσί, δέδεικται προτάσει μγ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ. ὅτι δὲ καὶ κατὰ τὸν β': τὰ εαθζζ, ηγκζζ, ἴσα ὁμοίως εἰσὶ δῆλον. κατὰ γὰρ τὴν λδ': τοῦ αὐτοῦ τὰ δαβ, δγβ, τρίγωνα ἴσα εἰσί, ὁμοίως δὲ καὶ τὰ δεζ, δηζ, καὶ ζθβ, ζκβ, ἀφαιρουμένων δὲ ἀπὸ τῶν ἴσων δαβ, δγβ, τῶν δεζ, ζθβ, καὶ δηζ, ζκβ, τριγώνων, ἐναπολείπονται τὰ εαθζζ, ηγκζζ, παραπληρώματα ἴσα. Ὅτι δὲ τελευταῖον καὶ κατὰ τὸν γ': τρόπον τὰ εαθλ, ηγκμ, ἴσα εἰσὶ διὰ τῶν εἰρημένων καὶ τοῦτο σαφές· τῶν γὰρ ζθβ, ζκβ, ἴσων τριγώνων ἐὰν ἀφαιρεθῇ τὰ ζλζ, ζμζ, τρίγωνα, ἐγκαταλειφθήσεται τὰ λθβζ, μκβζ, τραπέζια ἴσα, ἐὰν δὲ ἴσοις τοῖς δεζ, δηζ, τριγώνοις προστεθῇ τὰ λθβζ, μκβζ, ἴσα, γενήσεται τὸ ὅλον χωρίον δελθβζ, ἴσον τῷ δημκβζ. Τούτων δ' ἀφαιρουμένων ἀπὸ τῶν δαβ, δγβ, ἴσων

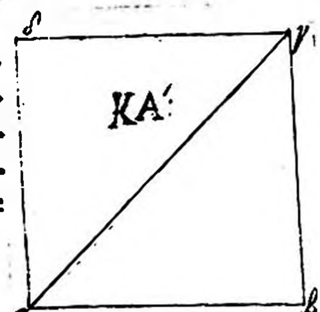
 τριτετραγώνων, ἐναπολειφθήσεται τὰ ε α θ λ, η γ κ μ, παραπληρώματα ἴσα. Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΚΑ΄.

Τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ τετραγώνου γραφόμενον τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ γραφομένου τετραγώνου.

Τοῦ πίνακος α β γ δ, τετραγώνου ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς α γ, διαμέτρου τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς α δ, πλευρᾶς δῆλον. κατὰ γὰρ τὴν μζ΄: τοῦ α΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ ἀπὸ τῆς α γ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπό τε τῆς α δ, καὶ δ γ, τετραγώνοις. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς α δ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δ γ, ἴση γὰρ καὶ ἡ α δ, τῇ δ γ, καὶ τὰ δύο ὁμοῦ τοῦ ἑνὸς χωρὶς, δὸς εἰπεῖν τοῦ ἀπὸ τῆς α δ, διπλάσιά εἰσιν, ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς α γ, τοῦ αὐτοῦ διπλάσιόν ἐστι. Τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου ἄρα τοῦ τετραγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib.3. Fig.15.

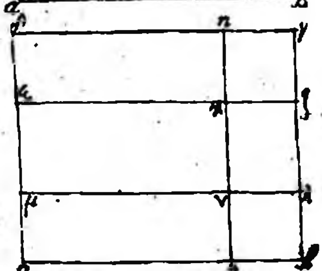


ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ τυχόντος παραλληλογράμμου γραφόμενον τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ὑφ' ὧν περιέχεται, τετραγώνοις. πιστοῦται δ' ἔτι καὶ διὰ τῆς μζ΄: τοῦ α΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ.

Πρότασις ΚΒ΄.

Ἅπαν παραλληλόγραμμον, ἐὰν ταῖς αὐτοῦ πλευραῖς παράλληλοι ἀχθῶσιν εὐθεῖαι, διαιρεθήσεται ὁμοίως εἰς παραλληλόγραμμα ἀνάλογα.



Ἐπὶ τοῦ α β γ δ, πίνακος παραλληλογράμμου, ἀχθήτωσαν εὐθεῖαι παράλληλοι ταῖς αὐτοῦ πλευραῖς δ γ, γ β, αἱ ε ζ, η θ, τεμνόμεναι κατὰ τὸ κ. Λέγω ὅτι τὰ ε η, κ γ, α κ, θ ζ, παραλληλόγραμμα ἀνάλογά εἰσι. κατὰ γὰρ τὴν α΄: τοῦ ς΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὡς ἡ δ η, πρὸς τὴν η γ, ἔχει τὸ, τε ε η, παραλληλόγρ: πρὸς τὸ κ γ, καὶ τὸ α κ, πρὸς τὸ θ ζ, ἰσοϋψῆ γὰρ, ὥστε κατὰ τὴν ια΄: τοῦ ε΄: τοῦ αὐτοῦ, ὡς ἔχει τὸ ε η, πρὸς τὸ κ γ, ἔχει καὶ τὸ α κ, πρὸς τὸ θ ζ. ὁμοίως διὰ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται καὶ τὰ β κ, ζ η, θ ε, κ δ, ἀνάλογα. Ἐὰν δὲ πλείους ἀχθῶσι παράλληλοι, καὶ διαιρεθήσεται τὸ αὐτὸ παραλληλόγραμμον εἰς πλείω παραλληλόγραμμα, καὶ ταῦτα ἀνάλογα ἔσται. Ἅπαν ἄρα παραλληλόγραμμον, καὶ τὰ ἑξῆς.

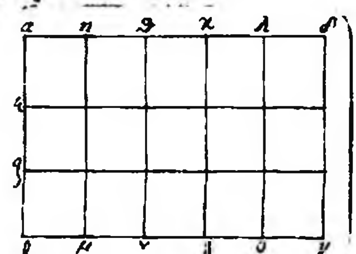
Πρό-

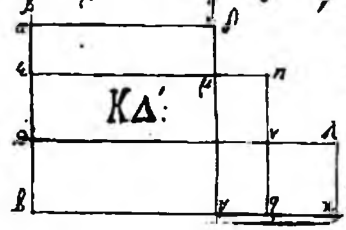
Πρότασις ΚΓ':

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου περιεκτικόν ἐστι τοσούτων τετραγώνων, ὅσαι εἰσὶ μονάδες ἐν τῷ διὰ πολλαπλασιασμοῦ, τῶν τῆς μιᾶς αὐτοῦ πλευρᾶς μερῶν ἐπὶ τὰ τῆς ἑτέρας, γινομένῳ ἀριθμῷ.

Ἔστω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ α β γ δ, οὗ ἡ μὲν α β, πλευρὰ διῃρήσθω εἰς μέρη τρία τὰ α ε, ε ζ, ζ β, ἡ δὲ α δ, εἰς πέντε τὰ α η, η θ, θ κ, κ λ, λ δ. Λέγω ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ α β γ δ, ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου περιέχει τετράγωνα, ὅσας καὶ ὁ ἐκ τοῦ 5, ἐπὶ τὸν 3, γινόμενος ἀριθμὸς περιέχει μονάδας. ὁ γὰρ 5, ἐπὶ τὸν 3, πολλαπλασιασθεὶς ποιεῖ τὸν 15, ἐὰν δὲ ἐφ' ἑκάστου σημείου τῶν τομῶν τῆς α δ, παράλληλοι ἀχθῶσιν εὐθεῖαι τῇ α β, διαιρεθήσεται τὸ α β γ δ, παραλληλ: εἰς μέρη πέντε τὰ α μ, η ν, θ ξ, κ ο, λ γ. Ἐὰν δὲ καὶ ἀπὸ τῶν τομῶν τῆς α β, ἀχθῶσιν ὁμοίως εὐθεῖαι παράλληλοι τῇ α δ, διαιρεθήσεται πάντως ἕκαστον τῶν α μ, η ν, θ ξ, κ ο, λ γ, τῶν προτέρων μερῶν εἰς μέρη τρία, ὥστε τὸ ὅλον α β γ δ, διαιρεθήσεται εἰς μέρη πεντεκαίδεκα, κἂν μὲν τὰ μέρη τῆς μιᾶς ἴσα ᾖ τοῖς μέρεσι τῆς ἑτέρας πλευρᾶς, τετράγωνα ἔσται ταῦτα καὶ ἴσα ἀλλήλοις. εἰ δ' ἄνισα παραλληλόγρ: ἀνάλογα μέντοι, ὡς προδέδεικται ἐν τῷ πρωτέρῳ.

Geom. Lib. 3. Fig. 16.





Πρότασις ΚΔ':

Τῶν ἰσοπεριμέτρων ὀρθογωνίων μέγιστον μὲν τὸ τὰς πλευρὰς ἴσας ἔχον, τὸ δὲ ἧττον ἀνίσους, μεῖζον τοῦ μᾶλλον ἀνίσους ταύτας ἔχοντος.

Ἔστωσαν δὴ ἰσοπερίμετρα ὀρθογώνια τὰ α β γ δ, ε β ζ η, θ β κ λ, καὶ ἐχέτω τὸ μὲν α β γ δ, τὰς πλευρὰς πάσας ἴσας, τὸ δὲ ε β ζ η, ἧττον ἀνίσους, καὶ τὸ θ β κ λ, μᾶλλον. Λέγω τοίνυν τὸ μὲν α β γ δ, μέγιστον εἶναι, τὸ δὲ ε β ζ η, μεῖζον τοῦ θ β κ λ. κατὰ γὰρ τὴν α: τοῦ ϛ': Εὐκλείδου, τὸ β μ, μεῖζόν ἐστι τοῦ γ η, μεῖζον γὰρ καὶ ἡ β γ, τῆς γ ζ, ἀλλὰ τὸ β μ, ἴσον ἐστὶ τῷ ε δ, ἴση γὰρ καὶ ἡ ε α, τῇ ε β, τὸ ὅλον ἄρα β δ, μεῖζόν ἐστι τοῦ β η. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ β η, μεῖζον τοῦ β λ. ὅτι δὲ ἡ β γ, μεῖζόν ἐστι τῆς γ ζ, δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ τὸ β η, ἰσοπερίμετρόν ἐστι τῷ β δ, ἐὰν ἡ β γ, ἴση ᾖ τῇ γ ζ, ἡ ὅλη β ζ, ἦν ἂν ἴση ταῖς δυσὶ τοῦ β δ, πλευραῖς β γ, α δ. ἀλλὰ τῇ β ζ, ἴση ἐστὶν ἡ ε η, ἔσται ἄρα καὶ ἡ ε η,

ἴση

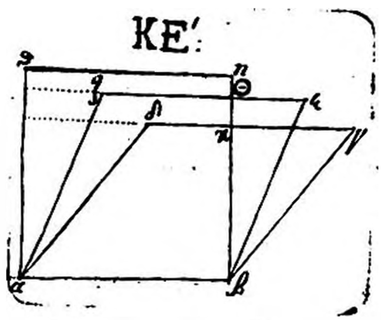
ἴση ταῖς λοιπαῖς δυσὶ τῇ αὐτῇ β δ, πλευραῖς α β, δ γ, καὶ τὸ β η, οὐκ ἂν ἦν ἰσοπερίμετρον τῷ β δ, ὑπερεῖχε γὰρ ταῖς ε β, η ζ, ὅπερ ἄτοπον, ὑπετέθη γὰρ ἰσοπερίμετρον. Διὰ τὰ αὐτὰ δείκνυται καὶ ὁ ζ κ, μὴ εἶναι ἴση τῇ β ζ. τῶν ἰσοπεριμέτρων ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΚΕ'.

Τῶν ἰσοπεριμέτρων τετραπλεύρων παραλληλογράμμων σχημάτων τὸ ὀρθογώνιον μέγιστόν ἐστι, μεῖζον δὲ τὸ ἧττον τὰς γωνίας ἀνίσους ἔχον τοῦ μᾶλλον ταύτας ἀνίσους ἔχοντος.

Ἔστωσαν ἰσοπερίμετρα τετράπλευρα τὰ α β γ δ, α β ε ζ, α β η θ, ὧν τὸ μὲν α β η θ, ἐχέτω τὰς γωνίας πάσας ἴσας, τὸ δὲ α β ε ζ, ἧττον ἀνίσους, καὶ τὸ α β γ δ, μᾶλλον. Λέγω δὴ μέγιστον μὲν εἶναι τὸ α β η θ, μεῖζον δὲ τὸ α β ε ζ, τοῦ α β γ δ. Ἤχθωσαν γὰρ αἱ γ δ, ε ζ, καὶ τὸ συνεχές, ὥστε συσταθῆναι, τὰ α κ, α Θ, ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα. καὶ ἐπεὶ τῷ μὲν α κ, ἴσον ἐστὶ τὸ α γ, τῷ δὲ α Θ, τὸ α ε, κατὰ τὴν λέ: τοῦ ά: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἔστι δὲ

Geom. Lib. 3. Fig. 17.



τὸ α κ, ἔλαττον τοῦ α Θ, πάντως γε καὶ τὸ α γ, ἔλαττόν ἐστι τοῦ α ε. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ α ε, ἔλαττον τοῦ α η. τὸ γὰρ α ε, ἴσον ἐστὶ τῷ α Θ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν λέ: τὸ δὲ α Θ, ἔλαττόν ἐστι τοῦ α η. τῶν ἰσοπεριμέτρων ἄρα τετραπλεύρων παραλληλογρ: καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Κϛ'.

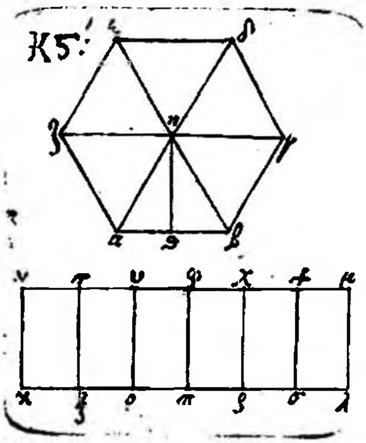
Παντὸς πολυγώνου ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου τὸ ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶν ὀρθογωνίῳ, τῷ ὑπό τε τῆς ἡμισείας τῆς αὐτοῦ περιμέτρου καὶ τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ αὐτοῦ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ πιπτούσης καθέτου περιεχομένῳ.

Ἔστω πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ α β γ δ ε ζ, οὗ κέντρον τὸ η. καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ η, κέντρου ἐφ' ἑκάστην γωνίαν εὐθεῖαι αἱ η α, η β, η γ, η δ, η ε, η ζ. Διαιρείσθω δὲ ἡ α β, δίχα κατὰ τὸ θ, καὶ πιπτέτω κάθετος ἐπ' αὐτῆς ἀπὸ

τοῦ

τοῦ η, κέντρου ἡ η θ. Ἔςω δ᾽ ἔτι καὶ τὸ κ λ μ ν, ὀρθογώνιον ἰσοπερίμετρον τῷ α β γ δ ε ζ, πολυγώνῳ, ὥςε τὴν μὲν κ λ, αὐτοῦ πλευρὰν ἴσην εἶναι τῇ ἡμισείᾳ τῆς περιμέτρου τοῦ αὐτοῦ πολυγώνου, τὴν δὲ κ ν, τῇ η θ, καθέτῳ. Λέγω τὸ α β γ δ ε ζ, δοθὲν πολύγωνον ἴσον εἶναι τῷ κ λ μ ν, ὀρθογωνίῳ. Διαιρεθήτω δὲ ἡ κ λ, εἰς μέρη ἴσα, ὅσαι καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ α β γ δ ε ζ, πολυγώνου, τὰ κ ξ, ξ ο, ο π, π ρ, ρ σ, σ λ, καὶ ἀφ᾽ ἑκάςου σημείου τῶν ξ, ο, π, καὶ λοιπῶν ἀχθήτωσαν παράλληλοι τῇ κ ν, αἱ ξ τ, ο υ, π φ, ρ χ, σ ψ· δείκνυται. Ἐπεὶ ἡ κ λ, ἴση ἐςὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς τοῦ α β γ δ ε ζ, πολυγώνου περιμέτρου, καὶ διῄρηται εἰς μέρη ἰσοπληθῆ ταῖς τοῦ πολυγώνου πλευραῖς, πάντως γε καὶ ἑκάςη τῶν κ ξ, ξ ο, ο π, π ρ, ρ σ, σ λ, ἴση ἐςὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς α β, ἢ β γ, ἢ γ δ, ἢ ἑτέρας τινὸς τῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν, καὶ τὰ κ τ, ξ υ, ο φ, π χ, ρ ψ, σ μ, μέρη τοῦ κ μ, ὀρθογωνίου ἰσοπληθῆ εἰσι τοῖς α η β, β η γ, γ η δ, δ η ε, ε η ζ, ζ η α, μέρεσι τοῦ πολυγώνου, ἕκαςον γὰρ πολύγωνον εἰς τοσαῦτα διαιρεῖται τρίγωνα, ὅσαι καὶ αἱ αὐτοῦ πλευραὶ, ἐςι δὲ καὶ ἑκάςη τῶν κ ν, ξ τ, ο υ, καὶ λοιπῶν καθέτων ἴση τῇ η θ, ἄρα ἕκαςον τῶν κ τ, ξ υ, ο φ; καὶ λοιπῶν ὀρθογωνίων ἴσον ἐςὶν ἑκάςῳ τῶν α η β, β η γ, καὶ λοιπῶν τοῦ α β γ δ ε ζ, πολυγώνου μερῶν κατὰ τὴν ι β᾽: τοῦ παρόντος, ἕκαςον γὰρ τῶν α η β, β η γ, καὶ λοιπῶν τοῦ πολυγώνου μερῶν παραβαλλόμενον ἑκάςῳ τῶν κ τ, ξ υ, καὶ λοιπῶν τοῦ κ μ, ὀρθογωνίου μερῶν, ἔχει βάσιν τε διπλασίονα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐςι παραλλήλοις. ἀλλὰ τὸ μὲν α β γ δ ε ζ, πολύγωνον σύγκειται ἐκ τῶν α η β, η β γ, καὶ λοιπῶν αὐτοῦ μερῶν, τὸ δὲ κ μ, ὀρθογώνιον ἐκ τῶν κ τ, ξ υ, καὶ λοιπῶν αὐτοῦ μερῶν, τὰ δὲ τοῦ κ μ, ὀρθογ: μέρη ἰσοπληθῆ εἰσι τοῖς τοῦ α β γ δ ε ζ, πολυγ: μέρεσιν, ὡς δέδεικται, ἄρα τὸ α β γ δ ε ζ, πολύγων: ἴσον ἐςὶ τῷ κ μ, ὀρθογ: Παντὸς ἄρα πολυγώνου ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου, καὶ τὰ ἑξῆς.

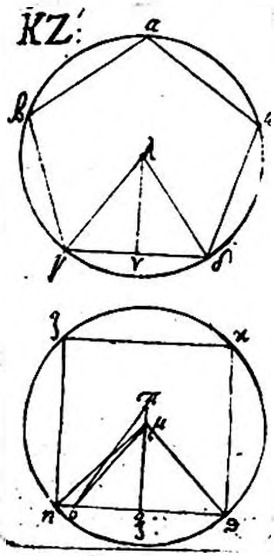
Geom. Lib.3. Fig.18.



Πρότασις ΚΖʹ.

Τῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων σχημάτων, ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων, τὸ πλείονας ἔχον τὰς πλευρὰς μεῖζόν ἐστιν.

Ἔστωσαν πολύγ: ἰσοπερίμ: ἰσόπλευρά τε καὶ ἰσογώνια τὰ α β γ δ ε, ζ η θ κ. Λέγω ὅτι τὸ α β γ δ ε, μεῖζον εἶναι τοῦ ζ η θ κ, ὡς πλείονας ἔχον καὶ τὰς γωνίας. Εὑρεθήτωσαν δὴ τὰ κέντρα, τῶν περὶ αὐτὰ κύκλων, τὰ λ, μ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λ γ, λ δ, μ η, μ θ· καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ λ, πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς γ δ, ἡ λ ν, ἀπὸ δὲ τοῦ μ, ἐπὶ τῆς η θ, ἡ μ ξ· καὶ ἐπεὶ τὸ α β γ δ ε, Geom. Lib. 5. Fig. 19. πολυγωνιώτερόν ἐστι, πάντως γε ἡ γ δ, πλεονάκις καταμετρεῖ τὴν τοῦ α β γ δ ε, περίμετρον, ἤπερ ἡ η θ, τὴν τοῦ ζ η θ κ. ἀλλ᾽ αἱ περίμετροι εἰσὶν ἴσαι, ἄρα ἡ η θ, μείζων ἐστὶ τῆς γ δ, ὥστε καὶ ἡ η ξ, τῆς γ ν, μείζων. Γενέσθω οὖν ἡ ξ ο, ἴση τῇ γ ν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ μ ο. ἐπεὶ δὲ ὡς ἡ η θ, πρὸς τὴν τοῦ ζ η θ κ, περίμετρον, ἔστι καὶ ἡ ὑπὸ η μ θ, γωνία πρὸς 4: ὀρθάς, ἰσόπλευρον γὰρ τὸ ζ η θ κ, πολύγωνον· καὶ αἱ πρὸς τῷ μ, κέντρῳ τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς ὑπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου ἀπολαμβανομέναις περιφερείαις, ὡς δὲ ἡ τοῦ ζ η θ κ, περιμετ: δηλον: ἡ α β γ δ ε, πρὸς τὴν γ δ, οὕτως αἱ 4: ὀρθαὶ γωνίαι, πρὸς τὴν ὑπὸ λ γ δ, ἄρα καὶ δι᾽ ἴσου, ὡς ἡ η θ, πρὸς τὴν γ δ, οὕτως ἡ ὑπὸ η μ θ, πρὸς τὴν ὑπὸ γ λ δ, ὡς δὲ ἡ η θ, πρὸς τὴν γ δ, ἔχει καὶ ἡ η ξ, πρὸς τὴν γ ν, ἄρα ὡς ἡ η ξ, πρὸς τὴν γ ν, δηλον: τὴν ο ξ, ἡ ὑπὸ η μ θ, πρὸς τὴν ὑπὸ γ λ δ, ἤτοι ἡ ὑπὸ η μ ξ, πρὸς τὴν ὑπὸ γ λ ν. ἀλλ᾽ ἡ η ξ, πρὸς τὴν ξ ο, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὑπὸ η μ ξ, γωνία, πρὸς τὴν ο μ ξ, ὡς ὀψόμεθα. ὡς δὲ ἡ η ξ, πρὸς τὴν ξ ο, ἡ ὑπὸ η μ ξ, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ γ λ ν, ὡς δέδεικται; ἄρα ἡ ὑπὸ η μ ξ, γωνία μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν ὑπὸ ο μ ξ, ἤπερ πρὸς τὴν ὑπὸ γ λ ν. ὥστε κατὰ τὴν ι: τοῦ ε: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἡ ὑπὸ ο μ ξ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ γ λ ν, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ μ ξ ο, ἴση τῇ λ ν γ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ μ ο ξ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς ὑπὸ λ γ ν. Γενέσθω δὲ ἴση ἡ ὑπὸ ξ ο π, τῇ ὑπὸ ν γ λ, ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ ξ, τῇ πρὸς τῷ ν, ἴση, καὶ ἡ ο ξ, τῇ γ ν, ἄρα κατὰ τὴν κϛʹ: τοῦ α: Στοιχ: ἡ ξ π, ἴση ἐστὶ τῇ ν λ, μείζων δὲ ἡ ξ π, τῆς ξ μ, μείζων ἄρα καὶ ἡ ν λ, τῆς ξ μ. ὥστε καὶ τὸ ὑπό τε τῆς λ ν, καὶ ἡμιπεριμέτρου

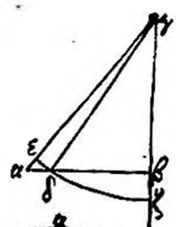


τοῦ

τοῦ α β γ δ ε, περιεχόμενον ὀρθογώνιον μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπό τε τῆς ξ μ, καὶ ἡμιπεριμέτρου τοῦ ζ η θ κ, ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπό τε τῆς λ ν, καὶ ἡμιπεριμέτρου ν δ ε α, ἴσον ἐστὶ τῷ α β γ δ ε, τὸ δὲ ὑπό τε τῆς ξ μ, καὶ ἡμιπεριμέτρου θ κ ζ, τῷ ζ η θ κ, καὶ τῶν αὐτῶν ἑτέρων, ἄρα τὸ α β γ δ ε, μεῖζόν ἐστι τοῦ ζ η θ κ. Τῶν ἰσοπεριμέτρ: ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

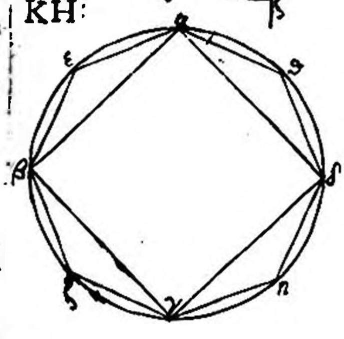
Ὅτι δὲ ἡ η ξ, πρὸς τὴν ξ ο, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ η μ ξ, γωνία πρὸς τὴν ο μ ξ, δῆλον. Κείσθω γὰρ τὸ α β γ, τρίγ: ὅμοιον τῷ η ξ μ, καὶ ἡ ὑπὸ γ δ β, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ μ ο ξ. ὥστε εἶναι ὡς ἡ η ξ, πρὸς τὴν ξ ο, τὴν α β, πρὸς τὴν β δ. ἀπὸ δὲ τοῦ γ, ὡς ἀπὸ κέντρου διαστήματι τῷ γ δ, γραφήτω τόξον τὸ ε δ ζ, τέμνον τὴν γ β, ἐκβαλλομένην κατὰ τὸ ζ. καὶ ἐπεὶ τὸ γ α δ, τρίγ: μεῖζον ὂν τοῦ γ ε δ, τομέως, μείζονα λόγον ἔχει πρὸς αὐτὸν, ἤπερ τὸ γ δ β, τρίγ: πρὸς τὸν γ δ ζ, τομέα, ὥστε καὶ συνθέσει τὸ γ α β, τρίγ: μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὸ γ δ β, τρίγ: ἤπερ ὁ γ ε ζ, τομεὺς πρὸς τὸν γ δ ζ, τομέα, ἀλλ' ὡς τὸ γ α β, τρίγ: πρὸς τὸ γ δ ζ, ἔχει καὶ ἡ α β, πρὸς τὴν β δ, κατὰ τὴν α: τοῦ ϛ': Στοιχ: ἄρα, ἡ α β, πρὸς τὴν β δ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ ε ζ, τομεὺς πρὸς τὸν γ δ ζ, τομέα. ἀλλ' ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸν τομέα, ἔχει καὶ γωνία ἡ ὑπὸ α γ β, πρὸς τὴν δ γ β, κατὰ τὴν λ ϛ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἡ α β, μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν β δ, ἤπερ ἡ ὑπὸ α γ β, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ δ γ β, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib.3. Fig.20.



Πρότασις ΚΗ'.

ΚΗ.



Τῶν ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἐγγραφομένων πολυγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων, τὸ πλείονας ἔχον τὰς πλευρὰς μᾶλλον προσεγγίζει τῷ κύκλῳ, καὶ ἡ τούτου περίμετρος μείζων ἐστίν, ἢ ἡ περίμετ: τοῦ ἐλάττονας ἔχοντος τὰς πλευράς.

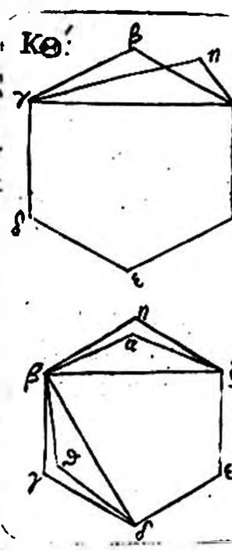
Ἔστωσαν εἰς τὸν α β γ δ, κύκλον ἐγγραφόμενα πολύγωνα τὰ α β γ δ, καὶ α ε β ζ γ η δ θ. Λέγω τὸ α ε β ζ γ η δ θ, τὸ ἔχον πλείονας τὰς πλευρὰς, μᾶλλον προσεγγίζειν τῷ κύκλῳ, καὶ τὴν τούτου περίμ: μείζονα εἶναι τῆς τοῦ α β γ δ, περιμέτ: ἐπεὶ γὰρ αἱ τοῦ κύκλου περιφέρειαι, αἱ ὑπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ α ε β ζ γ η δ θ, ὑποτεινόμεναι ἐλάττονές εἰσι τῶν ὑποτεινομένων ὑπὸ τῶν τοῦ α β γ δ, πλευρῶν, πάντως γε τὸ α ε β ζ γ η δ θ, στρογγυλώτερόν ἐστι, καὶ μᾶλλον προσεγγίζει τῷ κύκλῳ. Ὅτι δὲ καὶ ἡ αὐτοῦ περίμ: μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ α β γ δ, περιμ: δῆλον. αἱ μὲν γὰρ α ε, ε β, μείζονές εἰσι τῆς α β, κατὰ τὴν κ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, αἱ δὲ β ζ, ζ γ, τῆς β γ, αἱ δὲ γ η, η δ, τῆς γ δ, καὶ δθ, θα, τῆς δα. ὥστε ὅλη ἡ τοῦ αεβζγηδθ, περίμ: μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ αβγδ, περιμέτρου, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Τὸ αὐτὸ ἐννοητέον καὶ περὶ τῶν ἐγγραφομένων τοῖς ἴσοις κύκλοις πολυγώνων.

Πρότασις ΚΘ:

Τῶν ἰσοπεριμέτρων εὐθυγράμμων τῶν τὰς πλευρὰς ἰσοπληθεῖς ἐχόντων τὸ μέγιστον ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον.

Ἔστω εὐθύγραμμον τὸ αβγδεζ, μέγιστον πάντων τῶν ἰσοπεριμέτρων αὐτῷ, καὶ τὰς πλευρὰς ἰσοπληθεῖς ἐχόντων. Λέγω δὴ α: ὅτι ἰσόπλευρόν ἐστιν. εἰ γὰρ μὴ, ἔσται πάντως γε μία τῶν αὐτοῦ πλευρῶν ἐλάττων. Ἔστω οὖν ἡ αβ, ἐλάττων τῆς βγ. ἐπιζευχθείσης δὲ τῆς αγ, συνεστάθω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ αηγ, ὥστε εἶναι ἰσοπερίμετρον τῷ αβγ. τούτου γὰρ γενομένου, ἔσται τὸ αηγ, τρίγωνον μεῖζον τοῦ αβγ, τριγ: κατὰ τὴν ι: τοῦ παρόντος. κοινοῦ δὲ προσκειμένου τοῦ αγδεζ, ἔσται τὸ ὅλον αηγδεζ, μεῖζον τοῦ αβγδεζ, μεγίστου, ὅπερ ἄτοπον, ἰσόπλευρον ἄρα. Λέγω β': τὸ αὐτὸ καὶ ἰσογώνιον εἶναι. μὴ γὰρ, ἔστω τὸ ζαβγδε, ἰσόπλευρον, ἴσον τῷ αβγδεζ, ἔχον καὶ τὰς αὐτοῦ πλευρὰς ἰσοπληθεῖς, ἐχέτω δὲ τὴν ὑπὸ ζαβ, δὸς εἰπεῖν γωνίαν μείζονα τῆς ὑπὸ βγδ, καὶ ἐπιζευχθεισῶν τῶν βζ, βδ, συνεστάθωσαν τὰ βηζ, βθδ, ἰσοσκελῆ τρίγωνα, ὥστε τὰς ὑπὸ ζηβ, βθδ, γωνίας ἴσας ἔχειν, καὶ ἔσται πάντως ὅμοια. κατὰ δὲ τὴν θ: τοῦ αὐτοῦ, τὰ ζηβ, βθδ, τρίγωνα μείζονά εἰσι τῶν ζαβ, βγδ, συναμφότερα συναμφοτέρων. κοινοῦ δὲ προσκειμένου τοῦ ζβδε, ἔσται τὸ ὅλον ζηβθδε, μεῖζον τοῦ ζαβγδε, μεγίστου ὅπερ ἄτοπον, ἰσογώνιον ἄρα. δέδεικται δὲ καὶ ἰσόπλευρ: Τῶν ἄρα ἰσοπεριμ: εὐθυγράμμ: τῶν τὰς πλευρὰς, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib.3. Fig.21.



Τέλος τοῦ Τρίτου τῆς Γεωμετρίας Βιβλίου.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

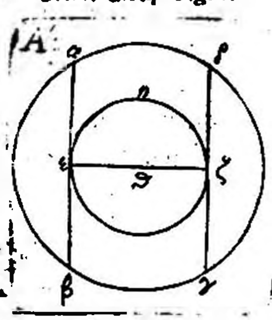
ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

Πρότασις Α':

Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ γραφομένων κέντρον διαφόρῳ διαστήματι, πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι αἱ τοῦ ἐλάττονος μὲν ἁπτόμεναι, ὑπὸ δὲ τοῦ μείζονος περατούμεναι ἴσαι εἰσὶ, καὶ δίχα κατὰ τὸ τῆς ἁφῆς ἑκάστη τέμνεται σημεῖον.

Ἔστωσαν δύο κύκλοι οἱ αβγδ, εζη, περὶ τὸ θ, γεγραμμένοι κέντρον, καὶ αἱ αβ, δγ, εὐθεῖαι ἁπτέσθωσαν μὲν τοῦ ἐλάττονος εζη, κύκλου, ἡ μὲν κατὰ τὸ ε, ἡ δὲ κατὰ τὸ ζ, περατούσθωσαν δὲ ὑπὸ τοῦ μείζονος αβγδ. Λέγω δὴ τὰς αβ, δγ, εὐθείας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι, καὶ δίχα τέμνεσθαι ἑκατέραν τὴν μὲν κατὰ τὸ ε, τὴν δὲ κατὰ τὸ ζ, σημεῖον. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ εθ, ζθ, καὶ ἐπεὶ αὗται ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸν δ': ὅρον τοῦ γ': τοῦ Εὐκλείδ. δῆλον ὅτι αἱ αβ, δγ, εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ κατὰ τὴν ιδ': τοῦ αὐτοῦ. Ἐπεὶ δὲ πάλιν αἱ μὲν θε, θζ, πρὸς ὀρθὰς πίπτουσιν ἐπὶ τὰς αβ, δγ, κατὰ τὴν ιϛ': τοῦ αὐτοῦ, πάντως γε αἱ αβ, δγ, τέμνονται καὶ δίχα ὑπὸ τῶν θε, θζ, κατὰ τὴν γ': τοῦ αὐτοῦ. Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib.4. Fig. 1.

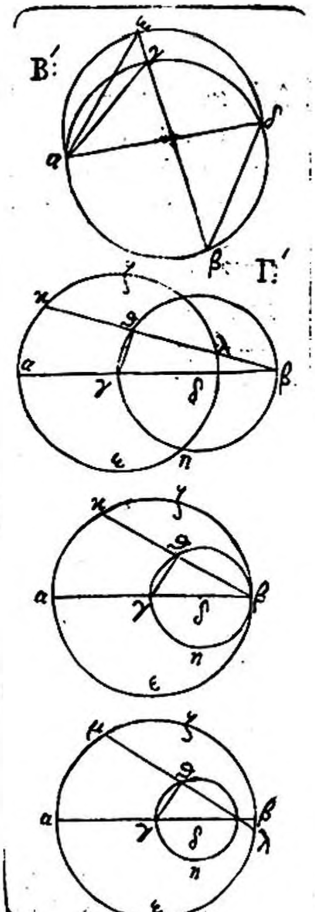


Πρότασις Β':

Ἐὰν δύο σημείων κειμένων ἐπί τινος ἐπιπέδου, δύο ἀφ' ἑκατέρου ἐκβληθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη, ὥστε γωνίας ἴσας ποιεῖν πρὸς ἀλλήλας συμπίπτουσαι, ὁ διά τε τῶν κειμένων σημείων, καὶ ἐμὸς τῶν καθ' ἃ αἱ γωνίαι συνίστανται, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ λοιποῦ.

Κειμένων ἤδη τῶν α, καὶ β, σημείων, ἐκβληθήτωσαν ἀφ' ἑκατέρου τούτων δύο εὐθεῖαι αἱ αγ, αδ, καὶ βδ, βγ, ποιοῦσαι γωνίας ἴσας πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ α γ β, β δ α· καὶ γραφήτω διὰ τῶν α, καὶ β, σημείων ὁ α β δ, κύκλος διερχόμενος καὶ διὰ τοῦ δ. Λέγω δὴ ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ γ. εἰ γὰρ μὴ, ἐκτὸς πάντως, ἢ ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ διελεύσεται. Ἔςω δὴ α: ἐκτὸς, καὶ ἐκβαλλέσθω ἡ β γ, κατὰ τὸ συνεχὲς ἀπὸ τοῦ γ, καθ᾽ ὃ δὲ σημεῖον τέμνει τὸν κύκλον ἡ ἐκβληθεῖσα, προσπιπτέτω ἡ α ε, εὐθεῖα, καὶ συςαθήσεται ἡ ὑπὸ α ε β, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ β δ α, κατὰ τὴν κα: τοῦ γ': τοῦ Εὐκλείδου, ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ α γ β, ὑπετέθη ἴση τῇ ὑπὸ β δ α, ἄρα ἡ ὑπὸ α ε β, ἴση ἐςὶ καὶ τῇ ὑπὸ α γ β, ἡ ἐντὸς τῇ ἐκτὸς, ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὴν ις': τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ. τὸ αὐτὸ ἄρα δειχθήσεται ἄτοπον συμβαίνειν, κἂν ὁ κύκλος ἐντὸς τοῦ γ, διέλθῃ σημείου. Ἐὰν ἄρα δύο σημείων κειμένων ἐπί τινος ἐπιπέδου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 4. Fig. 2.



Πρότασις Γ':

Ἐὰν ἐπὶ τῆς αὐτῆς δοθείσης εὐθείας δύο σημεῖα ληφθῶσι, καὶ ἀπ᾽ αὐτῶν ὡς ἀπὸ κέντρων κύκλοι ἄνισοι γραφῶσιν, ὥςε τὸν ἐλάσσονα διὰ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος διέρχεσθαι, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου, καθ᾽ ὃ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος τῶν κύκλων τέμνεται, εὐθεῖα ἀχθῇ, τέμνουσα ἑκάτερον τῶν κύκλων, ἡ ἐναπολαμβανομένη εὐθεῖα ὑπὸ τοῦ μείζονος κύκλου δίχα τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

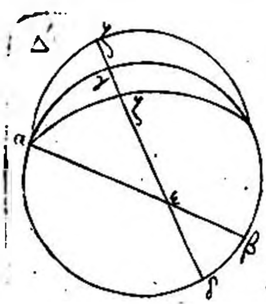
Ἐπὶ τῆς α β, τοίνυν δοθείσης εὐθείας εἰλήφθωσαν δύο σημεῖα τὰ γ, καὶ δ, καὶ ἀπ᾽ αὐτῶν ὡς ἀπὸ κέντρων γραφήτωσαν κύκλοι ἄνισοι οἱ α ε ζ, γ η θ, ἀπὸ δὲ τοῦ β, ἀχθήτω ἡ β κ, τέμνουσα, ὡς ἔτυχεν, ἀμφοτέρους τοὺς κύκλους. Λέγω τὴν κ λ, ἐναπολαμβανομένην ὑπὸ τοῦ α ε ζ, μείζονος κύκλου δίχα τέμνεσθαι κατὰ τὸ θ, ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος γ η θ, κύκλου. ἀλλ᾽ εἰ καὶ τετραχῶς συμβῆναι ἐνδέχεται, ἢ γὰρ δὴ ὁ ἐλάττων κύκλος τέμνει τὸν μείζονα, ὡς ἐπὶ τοῦ α: διαγράμματος, ἢ ἅπτεται τοῦ αὐτοῦ, ἢ γοῦν ἐντὸς αὐτοῦ ὅλος ἐςίν, ἡ δεῖξις μέντοι ἡ αὐτὴ ἐν ἑκάςῳ. Ἐπιζεύχθω γὰρ ἡ γ θ, καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ γ θ β, γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ ἐςὶν, ὡς ἐπὶ τοῦ α: καὶ β': διαγράμματος, δῆλον ὅτι ὀρθή ἐςι κατὰ τὴν λα: τοῦ γ': τοῦ Εὐκλείδου, ὥςε κατὰ τὴν γ': τοῦ αὐτοῦ ἡ κ λ, δίχα τέμνεται, ἡ γὰρ γ θ, διὰ τοῦ κέντρου ζου τοῦ α ε ζ, κύκλου διέρχεται, ἡ δὲ κ λ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ τέμνεται πρὸς ὀρθὰς ὑπὸ τῆς γ θ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ μὲν τοῦ β′: διαγράμματος ἡ κ β, ἐπὶ δὲ τοῦ γ′: ἡ μ λ, δίχα ἑκατέρα τέμνεσθαι κατὰ τὸ θ, σημεῖον. Ἐὰν ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο σημεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Δ′.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, ὁ διὰ τῶν περάτων τῆς μιᾶς γραφόμενος κύκλος διερχόμενος καὶ δι᾽ ἑνὸς τῶν τῆς ἑτέρας περάτων, διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ λοιποῦ.

Τεμνέτωσαν δὴ ἀλλήλας αἱ α β, γ δ, εὐθεῖαι κατὰ τὸ ε, σημεῖον, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν α ε, ε β, περιεχόμενον ὀρθογ: ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν γ ε, ε δ. Γραφήτω δὲ καὶ διὰ τῶν α, καὶ β, περάτων τῆς α β, εὐθείας κύκλος ὁ α δ β, ὥστε καὶ διὰ τοῦ δ, πέρατος τῆς γ δ, διέρχεσθαι. Λέγω δὴ ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ γ. εἰ γὰρ μὴ, διελεύσεται πάντως ἢ ἐκτὸς τούτου ἢ γοῦν ἐντός. Κείσθω δὴ ἐντὸς ὡς διὰ τοῦ ζ. καὶ ἐπεὶ αἱ ζ δ, α β, εὐθεῖαι τέμνουσαι ἀλλήλας ἐν κύκλῳ εἰσὶ, πάντως γε κατὰ τὴν λε′: τοῦ γ′: τοῦ Εὐκλείδ: τὸ ὑπὸ τῶν ζ ε, ε δ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν α ε, ε β, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἀλλὰ τῷ ὑπὸ τῶν α ε, ε β, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν γ ε, ε δ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν. ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ζ ε, ε δ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν γ ε, ε δ, καὶ ἑπομένως ἡ ζ ε, ἴση ἐστὶ τῇ γ ε, τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἄτοπον. ὁμοίως δειχθήσεται μηδὲ ἐκτὸς τοῦ γ, διέρχεσθαι. Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσι, καὶ τὰ ἑξῆς.

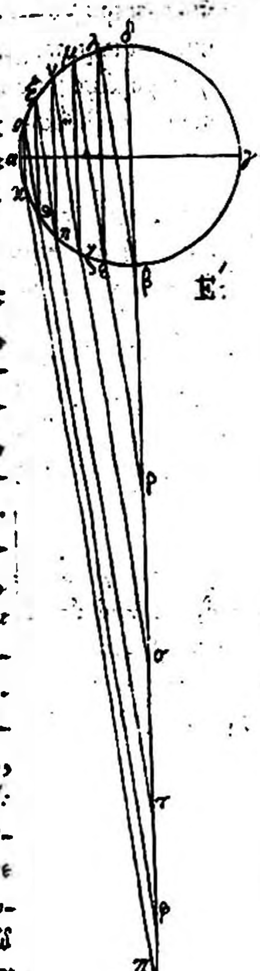
Geom. Lib.4. Fig.1.



Πρότασις Ε΄.

Παντὸς κύκλου ὑπὸ δύο διαμέτρων τεμνομένου πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις κειμένων, μιᾶς δὲ τῶν διαμέτρων ἀφ' ἑνὸς σημείου κατὰ τὸ συνεχὲς ἐξαγομένης, καὶ ἑνὸς τῶν τοῦ κύκλου τεταρτημορίων εἰς μέρη ἴσα διῃρημένου, ἀφ' ἑκάστου δὲ σημείου εὐθειῶν ἀγομένων παραλλήλων τῇ ἐξαχθείσῃ, ἐὰν ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς μὴ ἐξαχθείσης διαμέτρου διὰ τῆς κοινῆς τομῆς τῆς τε ἐλαχίστου παραλλήλου καὶ τοῦ διαιρεθέντος τεταρτημορίου εὐθεῖα ἀχθῇ, τέμνουσα τὴν ἐξαχθεῖσαν, ἡ ἐναπολαμβανομένη εὐθεῖα ὑπὸ τῆς τομῆς καὶ τῆς κοίλης τοῦ κύκλου περιφερείας, ἴση ἔσται ἁπάσαις ταῖς παραλλήλοις ὁμοῦ λαμβανομέναις.

Geom. Lib. 4. Fig. 4.



Ε΄.

Ἔστω δὴ κύκλος ὁ αβγδ, διάμετροι δὲ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις κείμεναι, καὶ τὸν κύκλον τέμνουσαι, αἱ αγ, βδ· ἐξαχθήτω δὲ καὶ ἡ βδ, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' ἄπειρον ἀπὸ τοῦ β, σημείου, καὶ διῃρήσθω τὸ αβ, τεταρτημόριον εἰς μέρη ἴσα τὰ βε, εζ, ζη, ηθ, θκ, κα, καὶ ἀφ' ἑκάστου σημείου τῶν εζη, καὶ λοιπῶν ἤχθωσαν παραλλήλως τῇ βδ, αἱ ελ, ζμ, ην, θξ, κο, εὐθεῖαι. ἀπὸ δὲ τοῦ α, πέρατος τῆς αγ, διαμέτρου διὰ τοῦ κ, κοινῆς τομῆς τῆς τε κο, ἐλαχίστης παραλλήλου καὶ τοῦ αβ, τεταρτημορίου ἤχθω ἡ ακπ. Λέγω τὴν πδ, ἴσην εἶναι ταῖς βδ, ελ, ζμ, ην, θξ, κο, παραλλήλοις. Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ λβ, μερ, νζσ, ξητ, οθφ. Δείκνυται. Ἐπεὶ αἱ βδ, ελ, ζμ, καὶ λοιπαὶ εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, πάντως γε τὰ εβ, λδ, ζε, μλ, καὶ λοιπὰ ἀπεναντίον τόξα ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ κατὰ τὴν ν: τοῦ β': τοῦ παρόντ: ἀλλὰ τὰ βε, εζ, ζη, καὶ λοιπὰ ἴσα εἴληπται, ἄρα καὶ τὰ δλ, λμ, καὶ λοιπὰ ἴσα εἰσίν, ὥστε κατὰ τὴν κζ': τοῦ γ': τοῦ Εὐκλείδου, αἱ ὑπὸ βλε, λεμ, γωνίαι ἴσαι εἰσί, βεβήκασι γὰρ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν βε, λμ, ὥστε αἱ βλ, μερ, εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσι κατὰ τὴν κζ': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ λε, δβρ, ὁμοίως παράλληλοι, ἄρα τὸ βλερ, τετράπλευρον παραλληλόγραμμόν ἐστι, καὶ ἑπομένως ἡ βρ, τούτου πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἀπεναντίον λε, κατὰ τὴν λδ': τοῦ αὐτοῦ.

διὰ

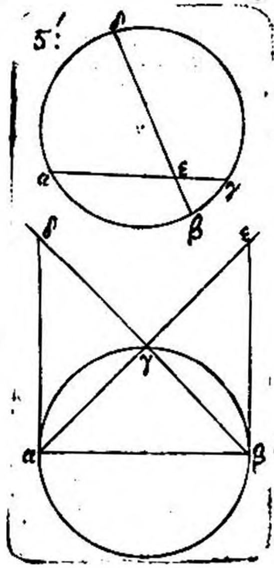
διὰ τὴν αὐτὴν δειχθήσεται καὶ ἡ μζ, τῇ ρσ, ἴση, καὶ ἡ νυ, τῇ σπ, καὶ ἡ ξθ, τῇ τφ, καὶ ἡ οχ, τῇ φπ, ὥστε ὅλη ἡ δπ, ἴση ἐστὶ ταῖς δβ, λε, μζ, νυ, ξθ, οχ, ὁμοῦ λαμβανομέναις. Παντὸς ἄρα κύκλου ὑπὸ δύο διαμέτρων τεμνομένου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ς'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας τὰ τῆς μιᾶς τμήματα ἀντιπεπονθότως ἔχει πρὸς τὰ τῆς ἑτέρας.

Ἐν κύκλῳ ἤδη τῷ αβγδ, τεμνέτωσαν ἀλλήλας αἱ αγ, βδ, εὐθεῖαι κατὰ τὸ ε, σημεῖον. Λέγω, ὅτι ὡς ἔχει τὸ δε, τμῆμα τῆς βδ, πρὸς τὸ αε, τῆς αγ, οὕτως ἔχει καὶ τὸ εγ, τῆς αβ, τμῆμα πρὸς τὸ εβ, τῆς βδ, τμῆμα. Κατὰ γὰρ τὴν λε': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ ὑπὸ τῶν δε, εβ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αε, εγ. ὥστε λαμβανομένου τοῦ μὲν δε, ἀντὶ τοῦ α: μεγέθους, τοῦ δὲ αε, β': τοῦ δὲ εγ, γ': καὶ τοῦ εβ, δ': ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, πάντως γε ὡς τὸ δε, πρὸς τὸ αε, ἐστὶ καὶ τὸ εγ, πρὸς τὸ εβ, κατὰ τὴν ις': τοῦ ς': τοῦ Εὐκλείδου. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 4. Fig. 5.



Πρότασις Ζ'.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου κάθετοι πρὸς τὰ αὐτῆς πέρατα ἀχθῶσι, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, πρὸς ἣν αἱ κάθετοι, καὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀπὸ τῶν περάτων τῆς διαμέτρου εὐθεῖαι ἀχθῶσι συμπίπτουσαι ταῖς καθέτοις, ἑκάτερον τῶν ὑπὸ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, καὶ τῶν ἐναπολαμβανομένων μερῶν αὐτῶν ὑπό τε τῆς κοίλης τοῦ κύκλου περιφερείας, καὶ τῶν τῆς διαμέτρου περάτων περιεχομένων ὀρθογωνίων, ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ αὐτοῦ κύκλου τετραγώνῳ.

Ἐπὶ τῆς αβ, τοίνυν διαμέτρου τοῦ αβγ, κύκλου ἀχθήτωσαν κάθετοι πρὸς τὰ α, καὶ β, αὐτῆς πέρατα αἱ αδ, βε, καὶ ληφθήτω σημεῖον ἐπὶ τῆς αγβ, περιφερείας τὸ γ, δι' οὗ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν α, καὶ β, εὐθεῖαι αἱ αε, βδ, συμπίπτουσαι ταῖς αδ, βε, καθέτοις κατὰ τὰ δ, καὶ ε. Λέγω ὅτι τό, τε ὑπὸ τῶν αε, αγ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βδ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώ-

νιον

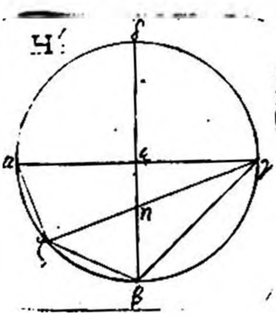
νιον ἴσον ἐστὶν ἑκάτερον τῷ ἀπὸ τῆς α β, τετραγώνῳ. Ἡ γὰρ ὑπὸ α γ β, γωνία ὀρθή ἐστι κατὰ τὴν λα: τοῦ γ': Εὐκλείδου, ὥστε ἡ μὲν α γ, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς β δ, ἡ δὲ β γ, ἐπὶ τῆς α ε. Ἐπεὶ δὲ ἐπὶ τὴν βάσιν ἑκατέρου τῶν α β ε, β α δ, ὀρθογωνίων τριγώνων κάθετος ἤχθη ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας, πάντως γε κατὰ τὸ β': πόρισμα τῆς η: τοῦ ς': τοῦ αὐτοῦ, ἡ α β, μέση ἀνάλογός ἐστι τῆς τε α ε, καὶ α γ, καὶ τῆς β δ, καὶ β γ. ὡς ἔχει ἄρα ἡ α ε, πρὸς τὴν α β, ἔχει καὶ ἡ α β, πρὸς τὴν α γ. ὡς δὲ ἡ β δ, πρὸς τὴν β α, ἔχει ἡ β α, πρὸς τὴν β γ, καὶ ἑπομένως τὸ ὑπό τε τῶν α ε, α γ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν β δ, β γ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς α β, τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα ἐπὶ τῆς διαμέτρου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Η΄:

Δύο διαμέτρων ἐν κύκλῳ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλας τεμνουσῶν, ἐὰν ἀφ' ἑνὸς τῶν τῆς μιᾶς περάτων εὐθεῖα ἀχθῇ τέμνουσα κατὰ τὰ τυχόντα σημεῖα τόν τε κύκλον καὶ τὴν λοιπὴν διάμετρον, τὸ ὑπό τε τῆς ἐναπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦτε πέρατος τῆς α: διαμέτρου καὶ τοῦ σημείου, καθ' ὃ ἡ β': τέμνεται, καὶ ὅλης τῆς τεμνούσης περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἐγγραφομένῳ τετραγώνῳ.

Ἔστωσαν δὴ ἐν κύκλῳ τῷ α β γ δ, δύο διάμετροι τέμνουσαι ἀλλήλας αἱ α γ, β δ, ἀπὸ δὲ τοῦ γ, πέρατος τῆς α γ, διαμέτρου ἤχθω ἡ γ ζ, τέμνουσα τόν τε κύκλον καὶ τὴν λοιπὴν διάμετρον ὡς ἔτυχεν. Ἐπεὶ δὲ τοῦτο διχῶς ἐνδέχεται συμβῆναι, ἢ γὰρ ἡ ἐξαχθεῖσα ἅπασα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, ἢ μέρος μὲν ταύτης ἐντὸς, μέρος δὲ ἐκτὸς, καὶ ἡ τοιαύτη τεμεῖ τὴν λοιπὴν διάμετρον ἐξαγομένην. Ἔστω α: ἐντὸς τοῦ κύκλου πεπτωκυῖα, καὶ τέμνουσα τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ ζ, τυχὸν σημεῖον, τὴν δὲ β δ, διάμετρον κατὰ τὸ η. Λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῆς τε γ η, καὶ γ ζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἐν τῷ α β γ δ, ἐγγραφομένῳ τετραγώνῳ. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ β γ, β ζ, καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ γ β δ, γ ζ β, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ, κατὰ τὴν κζ': τοῦ γ': Εὐκλείδου, ἐπὶ ἴσων γὰρ περιφερειῶν βεβήκασι τῶν δ γ, γ β, τεταρτημορίων, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ εἰσι μᾶλλον κύκλῳ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ β γ ζ, κοινὴ, πάντως γε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ β η γ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ γ β ζ, ἴση ἐστὶν, ὥστε τὰ γ β η, γ ζ β, τρίγωνα ὅμοιά εἰσι, καὶ κατὰ τὴν δ': τοῦ ς': τοῦ αὐτοῦ αἱ περὶ τὰς ἴσας αὐτῶν γωνίας πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γ ζ, πρὸς τὴν γ β, ἡ γ β, πρὸς τὴν γ η, καὶ ἑπομένως τὸ ὑπὸ τῶν γ η, γ ζ, δύο ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον

Geom. Lib. 4. Fig. 6.

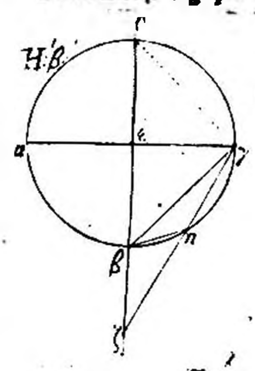


ἴσον

ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς γβ, μέσης ἀναλόγου τετραγώνῳ κατὰ τὴν ιζ΄: τοῦ ς΄: τοῦ αὐτοῦ. ἡ δὲ βγ, πλευρά ἐςι τετραγώνου ἐν τῷ αβγδ, ἐγγραφομένου κύκλῳ, ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν γη, γζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐςὶ τῷ ἐν τῷ αβγδ, ἐγγραφομένῳ τετραγώνῳ.

Πιπτέτω β΄: ἡ γζ, ἐκτὸς τοῦ κύκλου, τέμνουσα τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ η, τυχὸν σημεῖον, τὴν δὲ δβ, ἐκβαλλομένην κατὰ τὸ ζ. Λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν γζ, γη, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐςὶ τῷ ἐν τῷ αβγδ, κύκλῳ ἐγγραφομένῳ τετραγώνῳ. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ γβ, γδ, βη, εὐθεῖαι· καὶ ἐπεὶ τοῦ βηγδ, τετραπλεύρου ἐν τῷ αβγδ, κύκλῳ ἐγγραφομένου αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν κβ΄: τοῦ γ΄: Εὐκλείδου, πάντως γε αἱ ὑπὸ γδβ, γηβ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ γβδ, γβζ, ὁμοίως δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, κατὰ τὴν ιγ΄: τοῦ α΄: τοῦ αὐτοῦ, αἱ ἄρα ὑπὸ γδβ, γηβ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ γβδ, γβζ· ἀφαιρουμένων δὲ ἴσων τῶν ὑπὸ γδβ, γβδ, ἴσαι γὰρ αὗταί εἰσι διὰ τὸ ἐπὶ ἴσων βεβηκέναι περιφερειῶν τῶν γδ, γβ, τεταρτημορίων, ἐγκαταλείπονται αἱ ὑπὸ γηβ, γβζ, ἴσαι. ἔςι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βγη, κοινή, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ γβη, λοιπῇ τῇ ὑπὸ γζβ, ἴση ἐςί, καὶ τὸ γβη, τρίγωνον ἰσογώνιον τῷ γζβ, τριγώνῳ, ὥςε καὶ ὅμοιον· ἔςιν ἄρα κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν δ΄: τοῦ ς΄: Εὐκλείδου, ὡς ἡ γζ, πρὸς τὴν γβ, οὕτως ἡ γβ, πρὸς τὴν γη, καὶ ἑπομένως τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γζ, γη, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης γβ, τετραγώνῳ· ἀλλ' ἡ γβ, πλευρά ἐςι τοῦ ἐν τῷ αβγδ, κύκλῳ ἐγγραφομένου τετραγώνου, ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν γζ, γη, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐςὶ τῷ ἐν τῷ αβγδ, ἐγγραφομένῳ τετραγώνῳ. Δύο ἄρα διαμέτρων ἐν κύκλῳ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλας τεμνουσῶν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 4. Fig. 7.

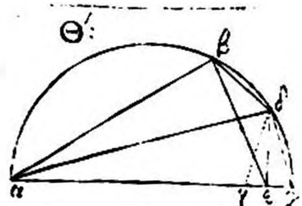


Πρότασις Θ΄.

Ἐὰν ἐν ἡμικυκλίῳ ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς διαμέτρου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ εὐθεῖα ἀχθῇ, καὶ ἡ ἐναπολαμβανομένη περιφέρεια ὑπό τε τῆς εὐθείας καὶ διαμέτρου δίχα τμηθῇ, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου, καθ' ὃ ἡ ἐναπολαμβανομένη τέμνεται περιφέρεια, κάθετος ἐπὶ τῆς διαμέτρου πέσῃ, ἡ ἐναπολαμβανομένη εὐθεῖα ὑπό τε τοῦ εἰλημμένου πέρατος τῆς διαμέτρου καὶ τοῦ σημείου, ἐφ' ὃ κάθετος πίπτει, μείζων ἐςὶ τῆς ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς διαμέτρου ἀχθείσης εὐθείας.

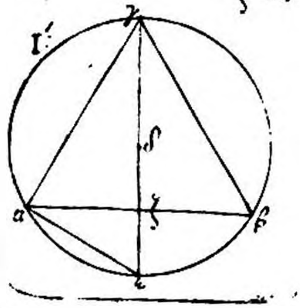
Ἔςω ἡμικύκλιον τὸ αβγ, ἐπὶ διαμέτρου τῆς αγ, καὶ ἀπὸ τοῦ α, πέρατος τῆς αγ, ἤχθω ἡ αβ, τέμνουσα τὸ αβγ, ἡμικύκλιον κατὰ τὸ β. Τμηθήτω δὲ καὶ ἡ βγ, δίχα κατὰ τὸ δ, ἀφ᾽ οὗ πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς αγ, διαμ: ἡ δε. Λέγω δὴ τὴν αε, μείζονα εἶναι τῆς αβ. εἰλήφθω δὴ ἡ αζ, ἴση τῇ αβ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ δζ, δβ, δγ, βε. καὶ ἐπεὶ ἡ δγ, μείζων ἐστὶ τῆς δε, τῇ δὲ δγ, ἴση ἐστὶν ἡ δβ, καὶ ἡ βδ, ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς δε, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δεβ, γωνίας τῆς ὑπὸ δβε, μείζων ἐστίν. ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ αβδ, γωνία ἐν ἐλάττονι οὖσα τμήματι μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αεδ, ὀρθῆς κατὰ τὴν λα: τοῦ γ: τοῦ Εὐκλείδου, τῆς δὲ ὑπὸ δβε, μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ δεβ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αβε, λοιπῆς τῆς ὑπὸ αεβ, πολλῷ μείζων ἐστίν, ὥστε καὶ ἡ αε, εὐθεῖα μείζων ἐστὶ τῆς αβ, κατὰ τὴν ιθ: τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Geom. Lib.4. Fig.8.



Πρότασις Ι:

Ἐὰν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ ἡ τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων μὲν ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου, ἐπίτριτος δὲ τῆς ἀπὸ μιᾶς τῶν αὐτοῦ γωνιῶν ἐπὶ τῆς ἀπεναντίον πλευρᾶς καθέτου.



Ἔστω δὴ τὸ αβγ, ἰσόπλευρον τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον τὸν αβγ, οὗ κέντρον τὸ δ. Λέγω δὴ τὴν γα, πλευρὰν τοῦ αβγ, τριγώνου δυνάμει τριπλασίονα εἶναι τῆς γδ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς γα, τετράγωνον τριπλάσιον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς γδ. Ἤχθω ἡ γδε, διάμετρος καὶ ἐπιζεύχθω ἡ αε. Ἐπεὶ οὖν ἡ αβ, τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ αβγ, κύκλου, καὶ τέμνεται δίχα ὑπὸ τῆς γε, ἡ αε, ἄρα περιφέρεια ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου, καὶ ἑπομένως ἴση τῇ γδ, ἀλλὰ τὸ τῆς γε, τετράγωνον τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς γδ, κατὰ τὴν β: τοῦ γ: τοῦ παρόντος. ἔστιν ἄρα τὸ αὐτὸ τετραπλάσιον καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς αε, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς γε, τετράγ: ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν γα, αε, τετραγώνοις, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν γα, αε, τετράγωνα τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αε, τετραγώνου, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αε, ἤτοι τοῦ ἀπὸ τῆς γδ, ἴση γὰρ ἡ γδ, τῇ αε, ὡς δέδεικται. Λέγω ἔτι τὴν γα, τῆς γζ, δυνάμει ἐπίτριτον εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς γα, τετράγ: τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αε, ὡς δέδεικται, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς γε, τετραπλάσιον, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς γε, τοῦ ἀπὸ τῆς γα, ἐπίτριτόν ἐστιν, ἤτοι ὡς ὁ 4, πρὸς τὸν 3, ἀλλ᾽ ὡς ἡ γε, πρὸς τὴν γα, ἔχει καὶ ἡ γα, πρὸς τὴν γζ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν γαε, γζα, τριγ: ὀρθογώνιον γὰρ ἑκάτερον, κοινὴν δὲ ἔχουσι τὴν ὑπὸ αγζ, ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αγ, ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς γζ, ὥστε ἡ αγ, τῆς γζ, δυνάμει ἐπίτριτός ἐστιν, ἤγουν ὡς ὁ 4, πρὸς τὸν 3. Ἐὰν ἄρα εἰς κύκλον καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρό-

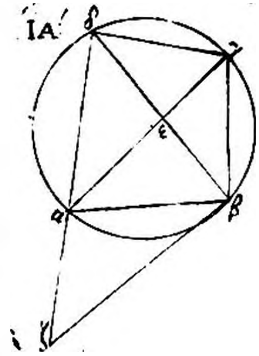
Πρότασις ΙΑ'.

Ἐὰν εἰς κύκλον τετράπλευρον ἐγγραφῇ, τὸ ὑπὸ τῶν διαγωνίων αὐτοῦ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ συναμφοτέροις τοῖς ὑπὸ τῶν ἀπεναντίων τοῦ αὐτοῦ πλευρῶν περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

Ἔστω εἰς κύκλον τὸν α β γ δ, ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον τὸ α β γ δ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ τούτου διαγώνιοι αἱ α γ, β δ. Λέγω δὴ τὸ ὑπὸ τῶν α γ, β δ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι συναμφοτέροις τοῖς ὑπὸ τῶν α δ, β γ, καὶ α β, δ γ, περιεχομένοις ὀρθογωνίοις. Ἐπεὶ δὲ αἱ ὑπὸ τῶν διαγωνίων γινόμεναι γωνίαι ἢ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἢ ἄνισοι, ἔστωσαν α: ἄνισοι, ὡς αἱ ὑπὸ δ ε γ, β ε γ, καὶ λοιπαί, καὶ ἤχθω ἡ δ α, κατὰ τὸ συνεχὲς ἀορίστως, πρὸς δὲ τῷ β, σημείῳ συνεστάτω ἡ ὑπὸ δ β ζ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ γ β α, καὶ γενήσεται τὸ δ β ζ, τρίγωνον ἰσογώνιον τῷ γ β α. ἡ μὲν γὰρ ὑπὸ ζ δ β, αὐτοῦ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ α γ β, διὰ τὸ ἐν τῷ αὐτῷ ἄμφω εἶναι τμήματι κατὰ τὴν κα: τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ. Γέγονε δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δ β ζ, ἴση τῇ ὑπὸ γ β α, πάντως γε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ δ ζ β, λοιπῇ τῇ ὑπὸ γ α β, ἴση ἐστὶν, ὥστε κατὰ τὴν δ': τοῦ ς': τοῦ αὐτοῦ, ὡς ἡ ζ δ, πρὸς τὴν δ β, ἡ α γ, πρὸς τὴν γ β, καὶ ἑπομένως τὸ ὑπὸ τῶν ζ δ, γ β, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν β δ, α γ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ κατὰ τὴν ις': τοῦ αὐτοῦ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ζ δ, γ β, ἴσον ἐστὶ συναμφοτέροις τοῖς ὑπὸ τῶν α β, δ γ, καὶ α δ, β γ, ὡς δειξόμεθα, ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν β δ, α γ, περιεχόμενον ὀρθογών: ἴσον ἐστὶ συναμφοτέροις τοῖς ὑπὸ τῶν α δ, β γ, καὶ α β, δ γ, ὅπερ ἦν τὸ ἐξ ἀρχῆς ὑποκειθέν.

Geom. Lib.4. Fig.9.

ΙΑ'

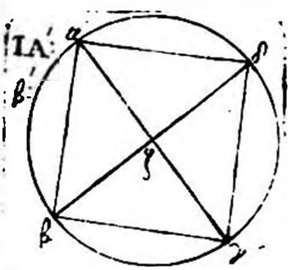


Ὅτι δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ζ δ, β γ, ἴσον ἐστὶ συναμφοτέροις τοῖς ὑπὸ τῶν α β, δ γ, καὶ α δ, β γ, δῆλον. Τὸ γὰρ ζ α β, τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ δ γ β. κατὰ γὰρ τὴν κβ: τοῦ γ': τοῦ παρόντος, ἡ ὑπὸ ζ α β, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δ γ β, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ α ζ β, ἴση τῇ ὑπὸ β α γ, ὡς δέδεικται, τῇ δὲ ὑπὸ β α γ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ γ δ β, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν κα: ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ α ζ γ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γ δ β. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ α β ζ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ γ β δ, ἴση ἐστίν. ἄρα ὡς ἡ ζ α, πρὸς τὴν α β, ἔστι καὶ ἡ δ γ, πρὸς τὴν γ β, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν δ': κατὰ δὲ τὴν ις': τοῦ αὐτοῦ, τὸ ὑπὸ τῶν ζ α, γ β, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν δ γ, α β, εἰλημμένης δὲ τῆς ζ δ, ὡς μιᾶς, πάντως γε τὸ ὑπὸ τῶν ζ δ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ συναμφοτέροις τοῖς ὑπὸ τῶν αβ, δγ, καὶ βγ, αδ.

Ἔστωσαν δ' ἔτι αἱ ὑπὸ τῶν διαγωνίων γινόμεναι γωνίαι ἴσαι, ὡς ἐπὶ τοῦ β': τούτου σχήματος. Λέγω ὅτι καὶ οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν αγ, βδ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ συναμφοτέροις τοῖς ὑπὸ τῶν αβ, δγ, καὶ βγ, αδ, περιεχομένοις ὀρθογωνίοις. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ αβδ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γβδ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αδβ, ἴση τῇ ὑπὸ βγα, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν κα: τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, πάντως γε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ βαδ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ βζγ, ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ αβδ, τρίγωνον ἰσογώνιον τῷ βζγ, τριγώνῳ, καὶ κατὰ τὴν προειρημένην δ': τοῦ ς': τοῦ αὐτοῦ, ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δα, ἔστι καὶ ἡ βγ, πρὸς τὴν γζ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βδ, γζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν βγ, δα, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Πάλιν ἐπεὶ ἡ ὑπὸ αβδ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γβδ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ γδβ, κατὰ τὴν εἰρημένην κα: πάντως γε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ βζα, λοιπῇ τῇ ὑπὸ βγδ, ἴση ἐστί. καὶ τὸ βζα, τρίγωνον ἰσογώνιον τῷ βγδ, τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δγ, ἡ βα, πρὸς τὴν αζ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βδ, αζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν δγ, αβ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, δέδεικται δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βδ, γζ, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν βγ, δα, ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βδ, αγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ συναμφοτέροις τοῖς ὑπὸ τῶν βγ, δα, καὶ γδ, αβ, περιεχομένοις ὀρθογωνίοις. Ἐὰν ἄρα εἰς κύκλον τετράπλευρον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 4. Fig. 10.

ΙΑ



Πρότασις ΙΒ'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο ἄνισοι διαχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ μείζων πρὸς τὴν ἐλάττονα, ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἐπὶ τῆς μείζονος εὐθείας περιφέρεια πρὸς τὴν ἐπὶ τῆς ἐλάττονος.

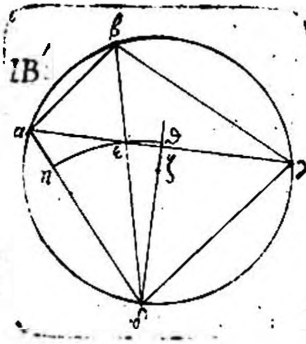
Διαχθήτωσαν ἐν κύκλῳ τῷ αβγδ, εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ αβ, βγ. Λέγω ὅτι ἡ βγ, εὐθεῖα πρὸς τὴν αβ, ἐλάττονα ἔχει λόγον, ἤπερ ἡ βγ, περιφέρεια πρὸς τὴν αβ, περιφέρειαν. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ αγ, καὶ τμηθείσης δίχα τῆς ὑπὸ αβγ, γωνίας ὑπὸ τῆς βδ, εὐθείας τεμνούσης καὶ τὴν αγ, εὐθεῖαν κατὰ τὸ ε, ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, δγ, εὐθεῖαι. ἀπὸ δὲ τοῦ δ, σημείου πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς αγ, ἡ δζ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ αβδ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γβδ, γωνίᾳ, πάντως γε καὶ ἡ αδ, περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ δγ, ὥστε κατὰ τὴν κθ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, καὶ αἱ αδ, δγ, εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶν, ἰσοσκελὲς ἄρα τὸ αδγ,

τρί-

τρίγωνον, καὶ ἡ αγ, αὐτοῦ βάσις δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς δζ. Αὖθις ἐπεὶ ἡ βγ, περιφέρεια μείζων ἐστὶ τῆς αβ, περιφερείας, μείζων πάντως ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ γδβ, γωνία τῆς ὑπὸ βδα, γωνίας, κατὰ γὰρ τὴν κϛ': τοῦ αὐτοῦ, ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἔστι δὲ ἡ αδ, εὐθεῖα ἴση τῇ δγ, ὡς δέδεικται, καὶ κοινὴ ἡ δε, ἄρα κατὰ τὴν κδ': τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ, ἡ γε, βάσις μείζων ἐστὶ τῆς εα, βάσεως, ὥστε καὶ ἡ δζ, κάθετος ἐπὶ τῆς εγ, πίπτει. Ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ μὲν αδ, μείζων ἐστὶ τῆς δε, αὕτη δὲ τῆς ζδ, κατὰ τὴν ιθ': τοῦ αὐτοῦ, δῆλον, ὅτι ὁ κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δε, γραφόμενος κύκλος τὴν μὲν αδ, εὐθεῖαν τεμεῖ, τῆς δὲ ζδ, ὑπερεκπεσεῖται. Γραφήτω δὴ τόξον τὸ ηεθ, ἀπὸ κέντρου τοῦ δ, διαστήματι δὲ τῷ δε, καὶ ἐκβληθήτω ἡ δζ, ἐπὶ τὸ θ. τούτων γὰρ οὕτω γενομένων, ἐπεὶ τὸ δεζ, τρίγωνον ἐλάσσονα λόγον ἔχει πρὸς τὸν δεθ, τομέα, ἤπερ τὸ δεα, τρίγωνον πρὸς τὸν δεη, τομέα, πάντως γε καὶ ἐναλλὰξ τὸ δεζ, τρίγωνον πρὸς τὸ δεα, τρίγωνον ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ δεθ, τομεὺς πρὸς τὸν δεη, τομέα, ὡς δὲ τὸ δζε, τρίγωνον πρὸς τὸ δεα, τρίγωνον, ἔχει καὶ ἡ ζε, βάσις πρὸς τὴν εα, βάσιν κατὰ τὴν α: τοῦ ϛ: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἄρα καὶ ἡ ζε, βάσις πρὸς τὴν εα, ἐλάττονα ἔχει λόγον, ἤπερ ὁ δθε, τομεὺς πρὸς τὸν δεη, τομέα. ἀλλ' ὁ δθε, τομεὺς πρὸς τὸν δεη, τομέα ἔχει ὡς ὑπὸ θδε, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ εδη, κατὰ τὴν ἐσχάτην τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἡ ζε, εὐθεῖα ἐλάττονα ἔχει λόγον πρὸς τὴν εα, ἤπερ ἡ ὑπὸ θδε, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ εδη, καὶ συνθέσει ἡ ζα, ἐλάττονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν εα, ἤπερ ἡ ὑπὸ ζδα, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ εδα, ὥστε καὶ τὰ τῶν ἡγουμένων διπλάσια ὁμοίως ἕξουσιν, ἡ γα, ἄρα πρὸς τὴν εα, ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὑπὸ γδα, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ εδα, καὶ διαιρέσει ἡ γε, πρὸς τὴν εα, ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὑπὸ γδε, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ εδα, ὡς δὲ ἡ γε, πρὸς τὴν εα, ἔχει καὶ ἡ γβ, πρὸς τὴν βα, κατὰ τὴν γ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἡ βγ, ἐλάττονα ἔχει λόγον πρὸς τὴν αβ, ἤπερ ἡ ὑπὸ γδβ, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ βδα, γωνίαν, ἀλλ' ὡς ἡ ὑπὸ γδβ, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ βδα, ἔχει καὶ ἡ βγ, περιφέρεια πρὸς τὴν αβ, περιφέρειαν, ἄρα ἡ βγ, εὐθεῖα πρὸς τὴν αβ, ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βγ, περιφέρεια πρὸς τὴν αβ, περιφέρειαν. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ δύο ἄνισοι εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 4. Fig. 11.

ΙΒ.



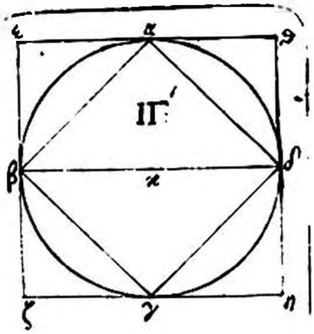
Πρό-

Πρότασις ΙΓʹ.

Τὸ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένον τετράγωνον τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν ἐγγεγραμμένου διπλάσιόν ἐστιν.

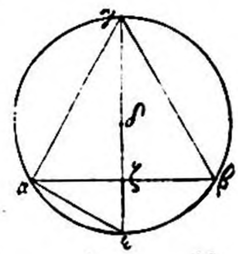
Ἔστω περιγεγραμμένον μὲν τετράγωνον περὶ τὸν αβγδ, κύκλον τὸ εζηθ, ἐγγεγραμμένον δὲ εἰς αὐτὸν τὸ αβγδ. Λέγω τὸ εη, διπλάσιον εἶναι τοῦ αγ, τετραγώνου. Διήχθω γὰρ ἡ διαγώνιος τοῦ αβγδ, διάμετρος ἡ βδ· καὶ ἐπεὶ ἑκάτερον τῶν αβγδ, εζηθ, τετραγώνων δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς βδ, ὅτι διὰ τοῦ κ, κοινοῦ διέρχεται κέντρου, τὸ δὲ ἥμισυ τοῦ εζηθ, περιγεγραμμένου, δηλ: τὸ εβδθ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ αβδ, ἡμίσεως τοῦ αβγδ, ἐγγεγραμμένου κατὰ τὴν μα: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὥσπερ καὶ τὸ ἕτερον ἥμισυ τὸ βζηδ, τοῦ βγδ, ἡμίσεως· δῆλον, ὅτι καὶ ὅλον τὸ εζηθ, περιγεγραμμένον διπλάσιόν ἐστι τοῦ αβγδ, ἐγγεγραμμένου, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Geom. Lib. 4. Fig. 12.



Πρότασις ΙΔʹ.

Ἡ τοῦ κύκλου διάμετρος δυνάμει ἐπίτριτός ἐστι τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου.



Ἔστω δὴ κύκλος ὁ αεβγ, ὅς καὶ ἀνωτέρω, οὗ διάμετρος ἡ γε, τρίγωνον δὲ ἰσόπλευρον ἐν αὐτῷ τὸ αβγ. Λέγω ὅτι ἡ γε, δυνάμει ἐστὶν ἐπίτριτος τῆς αγ, μιᾶς πλευρᾶς τοῦ αβγ, τριγώνου. Τῆς αὐτῆς γὰρ τοῦ ἐν τῇ δεκάτῃ γενομένης κατασκευῆς. ἐπεὶ ἡ αε, ἴση ἐστὶ τῇ γδ, ὡς δέδεικται ἐν ἐκείνῃ, ἡ δὲ γε, διπλασία τῆς γδ, πάντως γε διπλασία ἐστὶν ἡ αὐτὴ γε, καὶ τῆς αε, καὶ ἑπομένως τὸ ἀπὸ τῆς γε, τετράγωνον, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αε, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ἀνωτέρω βʹ: τοῦ δὲ ἀπὸ τῆς αε, τετραγώνου τριπλάσιον δέδεικται διὰ τῆς ἀνωτέρω ιʹ: τὸ ἀπὸ τῆς γα. οἵων ἄρα μερῶν τεσσάρων ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς γε, τετράγωνον, τοιούτων τριῶν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς γα, καὶ τοιούτου ἑνὸς τὸ ἀπὸ τῆς αε, ὥστε αἱ τρεῖς εὐθεῖαι γε, γα, αε, δυνάμει εἰσὶν ἀνάλογοι, ὡς οἱ 4, 3, 1, καὶ ὡς ἔχει ὁ 4, πρὸς τὸν 3, ἔχει δυνάμει καὶ ἡ γε, πρὸς τὴν γα, ἀλλ' ὁ τοῦ 4, πρὸς τὸν 3, λόγος ἐπίτριτός ἐστιν, ὡς εἴρηται ἐν τῷ βʹ: τῆς ἀριθμητικῆς μέρει, ἄρα καὶ ἡ γε, δυνάμει ἐπίτριτός ἐστι τῆς γα. Ἡ τοῦ κύκλου ἄρα διάμετρος, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρό-

Πρότασις ΙΕ'.

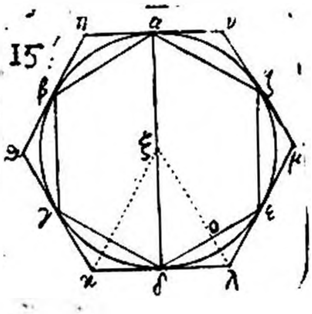
Ἐὰν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνίας κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ἀχθῇ, ἡ τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει ἐπίτριτος ἔσται τῆς ἠγμένης καθέτου.

Ἐγγραφήτω τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ α β γ, εἰς κύκλον τὸν αὐτὸν α ε β γ, καὶ ἀπὸ τοῦ γ, πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς α β, ἡ γ ζ, περατωμένη κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ α ε. Λέγω οὖν τὴν γ α, δυνάμει ἐπίτριτον εἶναι τῆς γ ζ. Ἐπεὶ γὰρ κάθετός ἐστιν ἡ γ ε, ἐπὶ τῆς α β, δῆλον, ὅτι καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει κατὰ τὸ α: πόρισμα τῆς γ': τοῦ γ': τῶν καθ' ἡμᾶς Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, καὶ διὰ τοῦ κέντρου διέρχεται κατὰ τὴν αὐτὴν γ': ὥστε ἡ γ ε, διάμετρός ἐστι τοῦ α ε β γ, κύκλου, τὸ δὲ γ α ε, ἡμικύκλιον· καὶ κατὰ τὴν κ α: τοῦ αὐτοῦ ἡ ὑπὸ γ α ε, γωνία ὀρθή, ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ γ ζ α, ὀρθή, τῶν ἄρα γ α ε, γ ζ α, τριγώνων αἱ ὑπὸ γ α ε, γ ζ α, γωνίαι ἴσαι, κοινὴ δὲ ἡ ὑπὸ α γ ζ, καὶ λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ γ ε α, γ α ζ, ἴσαι εἰσίν, ὥστε καὶ ἰσογώνια τὰ γ α ε, γ ζ α, καὶ κατὰ τὴν δ': τοῦ ς': τοῦ αὐτοῦ, ὡς ἡ ε γ, πρὸς τὴν γ α, ἡ α γ, πρὸς τὴν γ ζ, ἀλλ' ἡ ε γ, δυνάμει ἐπίτριτος δέδεικται τῆς γ α, ἐν τῷ πρώτῳ, καὶ ἡ γ α, ἄρα τῆς γ ζ, δυνάμει ἐπίτριτός ἐστιν. Ἐὰν ἄρα εἰς κύκλον τρίγωνον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Ις'.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς πολυγώνου ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου περιγεγραμμένου μὲν περὶ τὸν κύκλον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου αὐτοῦ, καὶ τῆς τοῦ κύκλου ἡμιδιαμέτρου περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἐγγεγραμμένου δὲ, τῷ ὑπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου, καὶ τῆς πιπτούσης καθέτου ἐπὶ μιᾶς τῶν αὐτοῦ πλευρῶν. *Geom. Lib. 4. Fig. 13.*

15.



Ἔστω ἐν κύκλῳ τῷ α β γ ε ζ, οὗ κέντρον τὸ ξ, ἐγγεγραμμένον μὲν πολύγωνον τὸ α β γ δ ε ζ, περιγεγραμμένον δὲ περὶ αὐτὸν τὸ π θ κ λ μ ν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ξ δ, ἡμιδιάμετρος, καὶ πιπτέτω ἐπὶ τῆς γ δ, κάθετος ἡ ξ ο. Λέγω δὴ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μὲν π θ κ λ μ ν, περιγεγραμμένου πολυγώνου ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αὐτοῦ, καὶ τῆς ξ δ, ἡμιδιαμέτρου περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. κατὰ γὰρ τὴν ιη': τοῦ γ': Εὐκλείδου, ἡ ξ δ, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς κ λ. ἀλλὰ κατὰ τὴν κ ς': τοῦ γ': τοῦ παρόντος, παντὸς πολυγώνου ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου τὸ ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς ἡμιπεριμέτρου

τοῦ

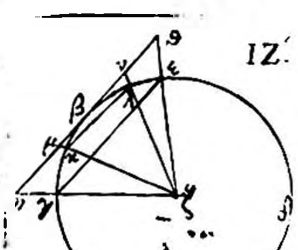
τοῦ αὐτοῦ καὶ τῆς πιπτούσης καθέτου ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ μιᾶς τῶν αὐτοῦ πλευρῶν, ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ η θ κ λ μ ν, πολυγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου αὐτοῦ, καὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ κύκλου περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ α β γ δ ε ζ, ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἴσον εἶναι τῷ ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αὐτοῦ, καὶ τῆς ξ ο, καθέτου περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Τὸ ἐμβαδὸν ἄρα παντὸς πολυγώνου ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΖ΄.

Εὐθείας γραμμῆς δοθείσης μείζονος τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, δυνατὸν περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγραφῆναι, οὗ ἡ περίμετρος ἐλάττων ἂν εἴη τῆς δοθείσης εὐθείας γραμμῆς.

Κείσθω τὴν α, εὐθεῖαν μείζονα εἶναι τῆς τοῦ β γ δ ε, κύκλου περιφερείας, οὗ κέντρον τὸ ζ, ὥστε ἔχειν τὴν αὐτὴν α, εὐθεῖαν πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ὡς ἡ ζ η, πρὸς τὴν ζ γ. Λέγω ὅτι δυνατὸν περὶ τὸν β γ δ ε, κύκλον πολύγωνον περιγραφῆναι, οὗ ἡ περίμετρος ἐλάττων ἔσται τῆς δοθείσης α, εὐθείας. Ἤχθω ἀπὸ τοῦ η, ἀπτομένη τοῦ β γ δ ε, κύκλου κατὰ τὸ β, ἡ η β θ, ὥστε τὴν β θ, ἴσην εἶναι τῇ β η, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ζ θ. Εἶτα διῃρήσθω ὁ β γ δ ε, κύκλος εἰς μέρη τέσσαρα, κἂν μὲν ἡ ὑποτείνουσα τὸ δ΄: τοῦ κύκλου μέρος ἐλάττων ᾖ τῆς ὑποτεινούσης τὴν γ β ε, περιφέρειαν, περιγραφήτω τὸ περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον τετράγωνον. εἰδὲ μὴ, διαιρεθήτω εἰς ὀκτὼ, ἢ εἰς ἑκκαίδεκα ἴσα μέρη, ἢ εἰς τὰ τούτων διπλάσια, ἕως οὗ γένηται ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγραφησομένου εἰς τὸν κύκλον πολυγώνου ἐλάττων τῆς γ ε, ὑποτεινούσης. Ἔστω δὴ ἐπὶ τοῦ παρόντος διῃρημένος ὁ κύκλος εἰς ὀκτὼ, καὶ ἡ κ λ, τοῦ ἐγγραφησομένου ὀκταγώνου εἰς αὐτὸν πλευρὰ ἐλάττων τῆς γ ε, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ζ κ, ζ λ, ἐκβαλλόμεναι κατὰ τὸ συνεχὲς, ὥστε τέμνειν τὴν η β θ, κατὰ τὰ μ, καὶ ν, καὶ ἡ μ ν, ἔσται πλευρὰ τοῦ περιγραφησομένου πολυγώνου, οὗ ἡ περίμετρος ἐλάττων ἔσται τῆς δοθείσης α, εὐθείας. Δείκνυται. ἡ ζ η, μείζων ἐστὶ τῆς ζ μ, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ι θ΄: τοῦ α΄: τῶν καθ' ἡμᾶς στοιχείων Εὐκλείδου, ὥστε κατὰ τὴν η: τοῦ πέμπτου τοῦ αὐτοῦ ἡ ζ μ, ἐλάττω λόγον ἔχει πρὸς τὴν ζ κ, ἤπερ ἡ ζ η, ἀλλ' ὡς ἡ ζ η, πρὸς τὴν ζ γ, ἢ τὴν ἴσην ταύτῃ ζ κ, ἔχει κατὰ τὴν ὑπόθεσιν καὶ ἡ δοθεῖσα α, εὐθεῖα πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ἡ ζ μ, ἄρα πρὸς τὴν ζ κ, ἐλάττονα ἔχει λόγον, ἤπερ ἡ α, εὐθεῖα πρὸς τὴν τοῦ β γ δ ε, κύκλου περιφέρειαν. Ἐπεὶ δὲ ὡς ἡ ζ μ,

Geom. Lib. 4. Fig. 14



πρὸς

πρὸς τὴν ζ κ, ἔχει καὶ ἡ μ ν, πρὸς τὴν κ λ, κατὰ τὴν β΄: τοῦ ϛ΄: τοῦ αὐτοῦ, παράλληλος γὰρ ἡ κ λ, τῇ μ ν, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς ζ κ, ζ λ, καὶ ζ μ, ζ ν, πάντως γε καὶ ἡ μ ν, πλευρὰ ὀκταγώνου περὶ τὸν β γ δ ε, περιγραφομένη κύκλον, ἐλάττονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν κ λ, πλευρὰν τοῦ ἐγγραφομένου ὀκταγώνου, ἤπερ ἡ α, εὐθεῖα πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ὡς δὲ ἔχει ἡ τοῦ περιγραφομένου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγραφομένου, ἔχει καὶ ὅλη ἡ τοῦ περιγραφομένου περίμετρος πρὸς ὅλην τοῦ ἐγγραφομένου περίμετρον, δῆλον ὅτι καὶ ἡ τοῦ περιγραφομένου ὀκταγώνου περὶ τὸν β γ δ ε, κύκλον περίμετρος, ἐλάττω λόγον ἔχει πρὸς τὴν τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ὀκταγώνου περίμετρον, ἢ ἡ α, πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. ἀλλ᾽ ἡ τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν β γ δ ε, κύκλον ὀκταγώνου περίμετρος ἐλάττων ἐστὶ τῆς τοῦ αὐτοῦ κύκλου περιμέτρου, ἄρα ἡ τοῦ περιγραφομένου ὀκταγώνου περίμετρος πολλῷ ἐλάττονα ἔχει λόγον πρὸς τὴν τοῦ β γ δ ε, κύκλου περιφέρειαν, ἤπερ ἡ α, δοθεῖσα εὐθεῖα, καὶ κατὰ τὴν ι: τοῦ ε: Εὐκλείδου, ἡ τοῦ περιγραφομένου ὀκταγώνου περίμετρος περὶ τὸν β γ δ ε, κύκλον ἐλάττων ἐστὶ τῆς δοθείσης α, εὐθείας, μείζονος οὔσης τῆς τοῦ αὐτοῦ κύκλου περιφερείας. Εὐθείας ἄρα γραμμῆς δοθείσης μείζονος, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Α΄:

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τῶν περιγραφομένων πολυγώνων περὶ τὸν κύκλον τοῦ πλείονας ἔχοντος τὰς πλευρὰς ἡ περίμετρος ἐλάττον ὑπερέχει τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. καὶ ἀνάπαλιν, οὗ ἡ περίμετρος ἐλάττονα ἔχει λόγον πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ἐκεῖνο ἔχει πλείονας τὰς πλευράς, τῶν δὲ ἐγγραφομένων τοὐναντίον.

Β΄: Ἔτι δυνατὸν ἐγγραφῆναι πολύγωνον, οὗ ἡ περίμετρος μείζων ἔσται τῆς δοθείσης εὐθείας, ἐλάττονος οὔσης τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. Κείσθω γὰρ τὴν α, εὐθεῖαν ἔχειν πρὸς τὴν τοῦ β γ δ ε, κύκλου περιφέρειαν ὡς ἡ ζ γ, πρὸς τὴν ζ η, καὶ τὰ λοιπὰ γενέσθω ὡς πρότερον. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ ζ μ, μείζονα λόγον ἔχειν πρὸς τὴν ζ κ, ἤπερ ἡ ζ η, δῆλον ὅτι καὶ ἀνάπαλιν ἡ ζ κ, μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν ζ μ, ἢ τὴν ζ η, ἀλλ᾽ ὡς ἡ ζ κ, πρὸς τὴν ζ μ, ἔχει καὶ ἡ ζ γ, πρὸς τὴν αὐτὴν ζ μ, ἴσαι γὰρ αἱ ζ κ, ζ γ, ὡς δὲ ἡ ζ γ, πρὸς τὴν ζ η, ὑπετέθη καὶ ἡ α, πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ἡ ζ κ, ἄρα πρὸς τὴν ζ μ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ α, πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ἀλλ᾽ ὡς ἡ ζ κ, πρὸς τὴν ζ μ, ἔχει καὶ ἡ κ λ, πρὸς τὴν μ ν, ὡς δὲ ἡ κ λ, πρὸς τὴν μ ν, καὶ ὅλη ἡ τοῦ ἐγγραφομένου πολυγώνου περίμ: πρὸς ὅλην τὴν τοῦ περιγραφομένου, ἄρα καὶ ἡ τοῦ ἐγγραφομένου πολυγώνου περίμ: πρὸς τὴν τοῦ περιγραφομένου μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ δοθεῖσα α, εὐθεῖα πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ἡ δὲ τοῦ περιγραφομένου πολυγώνου περίμετρος μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἡ τοῦ ἐγγραφομένου ἄρα πολυγώνου περίμετρος πολλῷ μείζονα ἔχει λόγον πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ἤπερ ἡ α, εὐθεῖα, καὶ ἑπομένως μείζων ἐστὶ τῆς α, δοθείσης ἐλάττονος τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

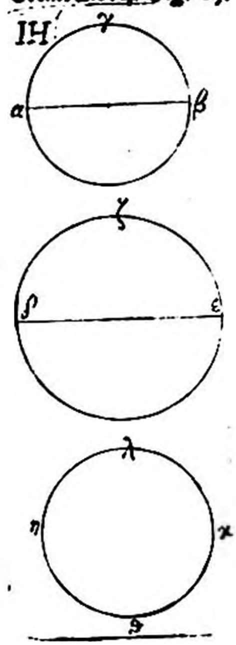
Γʹ: Τῶν ἐγγραφομένων πολυγώνων εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον τοῦ τὰς πλείονας ἔχοντος πλευρὰς ἡ περίμετρος, μείζων ἐστὶ τῆς περιμέτρου τοῦ τὰς ἐλάττονας πλευρὰς ἔχοντος· καὶ ἀνάπαλιν, οὗ ἡ περίμετρος μείζων, ἐκεῖνο ἔχει καὶ πλευρὰς πλείονας. ὅθεν καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἔλαττον ἐλλείπει.

Πρότασις ΙΗʹ:

Τῶν ἀνίσων κύκλων αἱ διάμετροι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον πρὸς τὰς περιφερείας.

Geom. Lib. 4. Fig. 15.

ΙΗʹ



Ἔστωσαν κύκλοι ἄνισοι οἱ αβγ, δεζ, ὧν διάμετροι αἱ αβ, δε. Λέγω, ὅτι ἡ αβ, διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ αβγ, κύκλου περιφέρειαν, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν καὶ ἡ δε, διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ δεζ, κύκλου περιφέρειαν. εἰ γὰρ μή, ἡ μία τούτων πάντως ἕξει ἐλάττονα λόγον, ἡ δὲ ἑτέρα μείζονα. Κείσθω δὴ τὴν μὲν αβ, διάμετρον μείζονα λόγον ἔχειν πρὸς τὴν τοῦ αβγ, κύκλου περιφέρειαν, ἤπερ ἡ δε, πρὸς τὴν τοῦ δεζ, περιφέρειαν. Κείσθω δ' ἔτι καὶ ἡ ηθκλ, περιφέρεια ἐλάττων τῆς τοῦ δεζ, κύκλου περιφερείας, ὥστε τὴν δε, διάμετρον τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον πρὸς τὴν αὐτὴν ηθκλ, περιφέρειαν, ὃν καὶ ἡ αβ, διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ αβγ, κύκλου περιφέρειαν. Τούτων γὰρ οὕτω κειμένων, δυνατὸν κατὰ τὸ βʹ: πόρισμα τῆς ἀνωτέρω ἐγγραφῆναι εἰς τὸν δεζ, κύκλον πολύγωνον, οὗ ἡ περίμετρος μείζων ἔσται τῆς ηθκλ, περιφερείας, ὥστε τὴν δε, διάμετρον ἐλάττονα λόγον ἔχειν πρὸς τὴν τοῦ αὐτοῦ πολυγώνου περίμετρον, ἢ πρὸς τὴν τοῦ ηθκλ, κύκλου περιφέρειαν. Ἐννοείσθω δὲ εἰς τὸν αβγ, κύκλον ἕτερον ὅμοιον πολύγωνον ἐγγεγραμμένον, ὥστε τὴν αβ, διάμετρον αὐτοῦ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον πρὸς τὴν τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου πολυγώνου περίμετρον, ὃν καὶ ἡ δε, διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου εἰς τὸν δεζ, κύκλον περίμετρον. τὰ γὰρ ὅμοια σχήματα ἀνάλογον ἔχουσι τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας αὐτῶν πλευράς. Ἐπεὶ δὲ ἡ αβ, διάμετρος μείζονα μὲν λόγον ἔχει πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ εἰς τὸν αβγ, κύκλον ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, ἤπερ πρὸς τὴν τοῦ αὐτοῦ κύκλου περιφέρειαν, ὃν δὲ πρὸς τὴν τοῦ αβγ, περιφέρειαν ἔχει, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ ἡ δε, πρὸς τὴν ηθκλ, περιφέρειαν κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, πάντως γε καὶ ἡ δε, διάμετρος μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ εἰς τὸν δεζ, κύκλον ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, ἤπερ πρὸς τὴν ηθκλ, περιφέρειαν, ἀλλ' ὑπετέθη ἔχειν καὶ ἐλάττονα, ἄτοπον ἄρα, καὶ ἑπομένως ἡ δε,

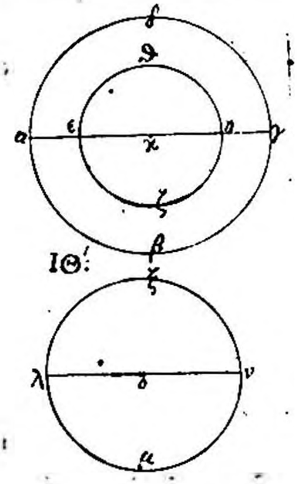
διά-διαμέτρος οὐκ ἔχει ἐλάττονα λόγον πρὸς τὴν δ ε ζ, περιφέρειαν τῆς τῆς α β, διαμέτρου πρὸς τὴν α β γ, περιφέρειαν. Τῶν ἀνίσων ἄρα κύκλων αἱ διάμετροι, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΘ'.

Ἡ ζώνη πρὸς τὸν κύκλον ἔχει, ὡς τὸ τῆς ζώνης ὀρθογώνιον πρὸς τὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ αὐτοῦ κύκλου τετράγωνον.

Ἔστω ζώνη ἡ ὑπὸ τῶν α β γ δ, ε ζ η θ, ὁμοκέντρων κύκλων περιεχομένη, ὧν κέντρον τὸ κ, καὶ τυχὼν κύκλος ὁ λ μ ν ξ, οὗ κέντρον τὸ ο. Λέγω τὴν α β γ δ, ε ζ η θ, ζώνην ἔχειν πρὸς τὸν λ μ ν ξ, κύκλον, ὡς τὸ ὑπὸ τῶν α ε, ε γ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον. (τοῦτο γὰρ ζώνης καλεῖται ὀρθογώνιον) πρὸς τὸ τῆς λ ο, τετράγωνον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ α γ, τέτμηται εἰς ἴσα τὰ α κ, κ γ, καὶ ἄνισα τὰ α ε, ε γ, πάντως γε κατὰ τὴν ε'. τοῦ β'. τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ ὑπὸ τῶν α ε, ε γ, ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ε κ, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς α κ, τετραγώνῳ. ἀλλ' ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸν ἀφαιρεθέντα ἀπ' αὐτοῦ ε ζ η θ, κύκλον ἔχει ὡς τὸ ἀπὸ τῆς α γ, διαμέτρου τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε η, διαμέτρου, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς α γ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε η, τετράγωνον, ἔχει καὶ τὸ ἀπὸ τῆς α κ, ἡμιδιαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε κ. ἄρα ὁ α β γ δ, κύκλος ἔχει πρὸς τὸν ε ζ η θ, κύκλον, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς α κ, τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε κ. οἵ τε γὰρ κύκλοι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἡμιδιαμέτρων τετράγωνα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν αὐτῶν ἡμιδιαμέτρων. ὥστε καὶ ἐναλλὰξ ὡς ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς α κ, τετράγ. ὁ ε ζ η θ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε κ, τετράγ. πᾶσιν ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν. ἄρα κατὰ τὴν ιθ'. τοῦ ε'. τοῦ αὐτοῦ, ἔστι καὶ τὸ λοιπὸν, δηλ. ἡ δοθεῖσα ζώνη, πρὸς τὸ λοιπὸν τὸ ὑπὸ τῶν α ε, ε γ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ὡς ὅλον δηλ. ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς ὅλον τὸ ἀπὸ τῆς α κ, τετράγωνον. ὡς δὲ ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς α κ, τετράγ. ἔχει καὶ ὁ ε ζ η θ, κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε κ, τετράγωνον ὡς δέδεικται, ἄρα ἡ δοθεῖσα ζώνη ἔχει πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν α ε, ε γ, περιεχόμενον ὀρθογ. ὡς ὁ ε ζ η θ, κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε κ, τετράγ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ δοθεῖσα ζώνη πρὸς τὸν ε ζ η θ, κύκλον, τὸ ὑπὸ τῶν α ε, ε γ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε κ, τετράγ. ὡς δὲ ὁ ε ζ η θ, κύκλος πρὸς τὸν λ μ ν ξ, ἔχει καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ε κ, τετράγ. πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λ ο, ἄρα καὶ δι' ἴσου ὡς ἡ δοθεῖσα ζώνη πρὸς τὸν λ μ ν ξ, κύκλον, ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν α ε, ε γ, περιεχόμενον ὀρθογ. πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λ ο, τετράγωνον. Ἡ ζώνη ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 4. Fig. 16.



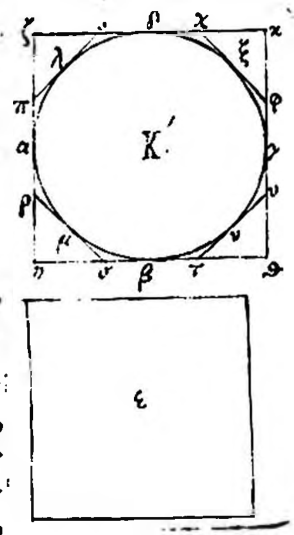
ΙΘ'.

Πρότασις Κ′.

Σχήματός τινος δοθέντος, οὗ τὸ ἐμβαδὸν μεῖζον ἂν εἴη τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ δοθέντος κύκλου, δυνατὸν περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πολύγωνον περιγράψαι, οὗ τὸ ἐμβαδὸν ἔλαττον ἔσται τοῦ δοθέντος σχήματος.

Ἔστω σχῆμα μεῖζον τοῦ αβγδ, κύκλου τὸ ε. Λέγω δή, ὅτι περὶ τὸν αβγδ, κύκλον δυνατὸν περιγραφῆναι πολύγωνον, οὗ τὸ ἐμβαδὸν ἔλαττον ἔσται τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ σχήματος. Περιγραφήτω ᾆ: τετράγωνον περὶ τὸν αβγδ, κύκλον τὸ ζηθκ, κἂν μὲν τοῦτο ἔλαττον εἴη τοῦ ε, σχήματος, ἔσται τὸ ὑποτεθέν. εἰ δὲ μεῖζον, ἢ γοῦν ἴσον, διαιρεθήτω ἑκάστη τῶν αδ, δγ, γβ, βα, περιφερειῶν δίχα κατὰ τὰ λμνξ, καὶ ἀχθήτωσαν ἁπτόμεναι τοῦ κύκλου κατὰ τὰ αὐτὰ τῶν τομῶν αἱ πο, χφ, υτ, σρ, καὶ περιγραφήσεται ὀκτάγωνον τὸ οπρστυφχ, ἔλαττον τοῦ ηζθκ, τετραγώνου κατὰ τὸ ᾆ: πόρισμα τῆς ιη: τοῦ παρόντος. εἰ δὲ καὶ τὸ οπρστυφχ, ὀκτάγωνον μὴ εἴη ἔλαττον τοῦ ε, σχήματος. Γραφήτω περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον ἑκκαιδεκάγωνον, καὶ τοῦτο ἔλαττον ἔσται τοῦ περιγεγραμμένου ὀκταγώνου. εἰ δὲ καὶ τοῦτο οὐκ ἂν εἴη ἔλαττον τοῦ ε, διαιρεθήτω ἑκάστη τῶν τοῦ ἑκκαιδεκαγώνου πλευρῶν δίχα, καὶ περιγραφήσεται πολύγωνον ἔλαττον καὶ τοῦ ἑκκαιδεκαγώνου, καὶ τοῦτο γενέσθω ἐπ᾽ ἄπειρον, καὶ εὑρεθήσεται πάντως πολύγωνον περὶ τὸν δοθέντα κύκλον περιγραφόμενον ἔλαττον τοῦ ε. ὅσον γὰρ αἱ τοῦ περιγραφομένου πολυγ: περὶ τὸν κύκλον γωνίαι πληθύνονται, τοσοῦτον τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ἐλαττοῦται. εἰ δ᾽ αὖ τὸ ε, χωρίον ἔλαττον ὑποτεθῇ τοῦ αβγδ, κύκλου, δυνατὸν ἐγγραφῆναι πολύγωνον μεῖζον τοῦ αὐτοῦ ε, χωρίου εἰς τὸν αὐτὸν αβγδ, κύκλον τῇ αὐτῇ κεχρημένοις ἐφόδῳ.

Geom. Lib. 4. Fig. 17.



Πρότασις ΚΑ′.

Τὸ τοῦ κύκλου ἐμβαδὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ αὐτοῦ καὶ ἡμιπεριφερείας περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

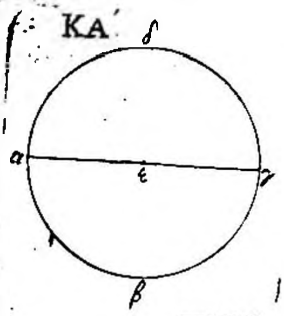
Τὸ τοῦ αβγδ, κύκλου ἐμβαδὸν, οὗ κέντρον τὸ ε, καὶ διάμετρος ἡ αγ, λέγω ἴσον εἶναι τῷ ὑπό τε τῆς αε, ἡμιδιαμέτρου, καὶ αδγ, ἡμιπεριφερείας περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. εἰ γὰρ μή, ἢ μεῖζον ἔσται τὸ αὐτὸ ὀρθογώνιον, ἢ ἔλαττον τοῦ αβγδ, κύκλου. ἐπεὶ δὲ οὔτε μεῖζον, οὔτε μὴν ἔλαττον, ἴσον ἄρα. Κείσθω γὰρ μεῖζον, καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω δοθέντος σχήματος, οὗ τὸ ἐμβαδὸν μεῖζόν ἐστι τοῦ

δοθέν-

δοθέντος κύκλου, δύναται περιγραφῆναι πολύγωνον περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, οὗ τὸ ἐμβαδὸν ἔλαττον ἔσται τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ δοθέντος σχήματος· πάντως γε καὶ περὶ τὸν α β γ δ, κύκλον δυνατὸν περιγραφῆναι πολύγωνον, οὗ τὸ ἐμβαδὸν ἔλαττον ἔσται τοῦ περιεχομένου ὀρθογωνίου ὑπό τε τῆς α ε, ἡμιδιαμέτρου καὶ α δ γ, ἡμιπεριφερείας τοῦ κύκλου. ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν παντὸς πολυγώνου τοῦ περὶ κύκλον περιγεγραμμένου ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου αὐτοῦ, καὶ τῆς τοῦ κύκλου ἡμιδιαμέτρου κατὰ τὴν ι ϛ′: τοῦ παρόντος, ἡ δὲ τοῦ περιγραφομένου πολυγώνου ἡμιπερίμετρος μείζων ἐστὶ τῆς ἡμιπεριφερείας τοῦ κύκλου, ὡς περιεκτικοῦ, ἄρα τὸ ἤδη περιγεγραμμένον πολύγωνον περὶ τὸν α β γ δ, κύκλον μεῖζόν ἐστι τοῦ περιεχομένου ὀρθογωνίου ὑπό τε τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ αὐτοῦ κύκλου α ε, καὶ τῆς α δ γ, ἡμιπεριφερείας, δέδεικται δὲ καὶ ἔλαττον, ἄτοπον ἄρα. Κείσθω δὲ ἔλαττον τὸ αὐτὸ ὀρθογώνιον τοῦ δοθέντος α β γ δ, κύκλου. ὅτι δὲ καὶ τοῦτο ἀδύνατον, δῆλον. κατὰ γὰρ τὴν ἀνωτέρω δυνατὸν ἐγγραφῆναι εἰς τὸν α β γ δ, κύκλον πολύγωνον μεῖζον τοῦ αὐτοῦ ὀρθογωνίου. Ἐπεὶ δὲ ἡ ἡμιπερίμετρος τοῦ αὐτοῦ πολυγώνου ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἡμιπεριφερείας τοῦ α β γ δ, κύκλου ὡς περιεχομένου, πάντως γε τὸ αὐτὸ πολύγωνον ἔσται καὶ ἔλαττον τοῦ ὑπό τε τῆς α ε, ἡμιδιαμέτρου, καὶ α δ γ, ἡμιπεριφερείας περιεχομένου ὀρθογωνίου, ὅπερ ἄτοπον.

Geom. Lib. 4. Fig. 18.

ΚΑ



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτων δῆλον, ὅτι ὁ κύκλος ἐστὶν ἴσος ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, οὗ ἡ μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ἡ δὲ ἑτέρα τῇ ὅλῃ περιφερείᾳ, τὸ γὰρ τοιοῦτον ὀρθογώνιον τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ περιγραφομένῳ ὀρθογωνίῳ ὑπό τε τῆς ἡμιδιαμέτρου καὶ ἡμιπεριφερείας τοῦ κύκλου κατὰ τὴν ι β′: τοῦ γ′: τοῦ παρόντος.

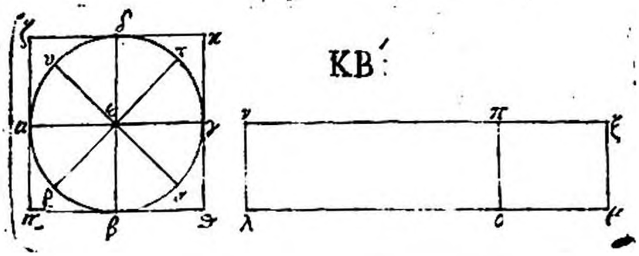
Πρότασις ΚΒ′:

Τὸ περιγραφόμενον περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ κύκλου καὶ τῆς διπλασίας τῆς αὐτοῦ διαμέτρου περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἔστω κύκλος ὁ α β γ δ, οὗ κέντρον τὸ ε, καὶ γραφήτω περὶ αὐτὸν τετράγωνον τὸ ζ η θ κ. Εἰλήφθω δὲ καὶ ἡ λ μ, εὐθεῖα διπλασία τῆς α γ, διαμέτρου τοῦ δοθέντος κύκλου, ἡ δὲ λ ν, ἴση τῇ α ε, ἡμιδιαμέτρῳ τοῦ αὐτοῦ, καὶ συμπληρούσθω τὸ λ μ ξ ν, ὀρθογώνιον. Λέγω ὅτι τὸ λ μ ξ ν, ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ζ η θ κ, τετραγώνῳ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ λ μ, διπλασία εἴληπται τῆς α γ, διαμέτρου, τῇ δὲ α γ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ζ κ, πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, αὕτη δὲ ἡ ζ κ, διπλασία ἐστὶ τῆς α ε, ἡμιδια-

με-μέτρου, καὶ τῇ αε, ἴση ἔλκεται ἡ λν, πάντως γε αἱ τρεῖς αὗται εὐθεῖαι λμ, ζκ, λν, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ὡς ἔχει ἡ λμ, πρὸς τὴν ζκ, ἔχει καὶ ἡ ζκ, πρὸς τὴν λν, καὶ κατὰ τὴν ιζ′: τοῦ ς′: Εὐκλείδου, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων λμ, λν, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης ζκ, τὸ λμξν, ἄρα ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ζηθκ, τετραγώνῳ. Τὸ περὶ κύκλον ἄρα περιγραφόμενον τετράγωνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Geom. Lib. 4. Fig. 13.



Πρότασις ΚΓ′:

Τὸ περὶ κύκλον περιγραφόμενον τετράγωνον ἔχει πρὸς τὸν αὐτὸν κύκλον, περὶ ὃν περιγράφεται, ὡς ὁ ιδ′: ἀριθμὸς πρὸς τὸν ια′:

Ἔστω δὴ περιγεγραμμένον περὶ τὸν αβγδ, κύκλον τὸ ζηθκ, τετράγωνον. Λέγω τοῦτο ἔχειν πρὸς τὸν αὐτὸν κύκλον ὡς ὁ ιδ′. ἀριθμὸς πρὸς τὸν ια′: κατὰ γὰρ τὴν κα′: τοῦ παρόντος ὁ αβγδ, κύκλος ἴσος ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ ὑπό τε τῆς αε, ἡμιδιαμέτρου αὐτοῦ, καὶ τῆς αδγ, ἡμιπεριφερείας. Ἔστω δὲ τοῦτο τὸ λοπν, ἡ γὰρ λν, ἴση ἕλκεται τῇ αε, ἡμιδιαμέτρῳ, κείσθω δὲ καὶ ἡ λο, ἴση τῇ αδγ, ἡμιπεριφερείᾳ, ὁ αβγδ, ἄρα κύκλος ἴσος ἐστὶ τῷ λπ, ἔστι δὲ κατὰ τὴν ἀνωτέρω καὶ τὸ λξ, ἴσον τῷ ζηθκ, τετραγώνῳ, καὶ κατὰ τὴν α′: τοῦ ς′: Εὐκλείδου, τὸ λξ, πρὸς τὸ λπ, ἔχει ὡς ἡ λμ, πρὸς τὴν λο, ἄρα καὶ τὸ ζηθκ, τετράγ: πρὸς τὸν κύκλον ἔχει ὡς ἡ λμ, πρὸς τὴν λο, ἀλλ᾽ ἐὰν ἡ λμ, ὑποτεθῇ μοιρῶν 14: ἡ λο, ἔσται σχεδὸν τοιούτων 11: τὸ ζηθκ, ἄρα τετράγωνον ἔχει πρὸς τὸν αβγδ, κύκλον ὡς ὁ 14: πρὸς τὸν 11: ὅτι δὲ ἡ λμ, ἔχει πρὸς τὴν ἡμιπεριφέρειαν τοῦ κύκλου δηλ: τὴν λο, ὡς ὁ 14: σχεδὸν πρὸς τὸν 11: δείξομεθα ἐν τοῖς ἑξῆς, ἔνθα περὶ τοῦ τρόπου τῆς εὑρέσεως τοῦ λόγου τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν αὐτοῦ περιφέρειαν ἐγγύτερον τῆς ἀληθείας ὁ λόγος ἔσται. Τὸ περὶ κύκλον ἄρα περιγραφόμενον τετράγωνον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΚΔʹ.

Ἅπας κύκλου τομεὺς ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς ἡμιδιαμέτρου, καὶ τῆς ἡμισέως τῆς ἀπολαμβανομένης περιφερείας ὑπὸ τῶν τὴν πρὸς τὸ κέντρον γωνίαν τοῦ τομέως περιεχουσῶν εὐθειῶν.

Ἔστω ἐπὶ τοῦ κέντρου αβγδ, κύκλου τομεὺς ὁ ερβσ, καὶ ἡ ρσ, περιφέρεια τμηθήτω δίχα κατὰ τὸ β. Καὶ κείσθω τῇ βσ, ἴση ἡ ομ, τῇ δὲ βε, ἡ οπ. Λέγω δὴ τὸ οξ, ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ερβσ, τομεῖ. Κατὰ γὰρ τὴν λγʹ: τοῦ ϛʹ: Εὐκλείδου, οἱ ἐν ἴσοις κύκλοις τομεῖς, καὶ μᾶλλον οἱ ἐν τῷ αὐτῷ ὄντες ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ περιφέρειαι. Ἔστω γοῦν ὁ κύκλος διῃρημένος εἰς τέσσαρας τομεῖς τοὺς ερβσ, εσγτ, ετδυ, ευαρ. ὡς ἔχει ἄρα ἡ ρβσ, περιφέρεια πρὸς τὴν σγτ, ἔχει καὶ ὁ ερβσ, τομεὺς πρὸς τὸν εσγτ, ὡς δὲ ἡ σγτ, πρὸς τὴν τδυ, ἔχει ὁ εσγτ, τομεὺς πρὸς τὸν ετδυ, ὡς δὲ ἡ τδυ, περιφέρεια πρὸς τὴν υαρ, ὁ ετδυ, τομεὺς πρὸς τὸν ευαρ, καὶ συνθέσει ἄρα ὡς αἱ ρβσ, σγτ, τδυ, υαρ, περιφέρειαι πρὸς τὴν ρβσ, οὕτως οἱ ερβσ, εσγτ, ετδυ, ευαρ, τομεῖς ὁμοῦ, ἤτοι ὁ πᾶς κύκλος πρὸς τὸν ερβσ, τομέα, ἀλλ᾽ ὡς ἅπασα ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια πρὸς τὴν ρβσ, περιφέρειαν, ἔχει καὶ ἡ ἡμιπεριφέρεια αβγ, πρὸς τὴν ἡμίσειαν βσ, ἄρα ὡς ἡ ἡμιπεριφέρεια πρὸς τὴν βσ, ἡμίσειαν περιφέρειαν τῆς ρβσ, ἔχει καὶ ὁ πᾶς κύκλος πρὸς τὸν αρβσ, τομέα. ἀλλ᾽ ἡ μὲν λμ, ὑπετέθη ἴση τῇ ἡμιπεριφερείᾳ τοῦ αβγδ, κύκλου, ἡ δὲ ομ, τῇ βσ, ἄρα ὁ αβγδ, κύκλος ἔχει πρὸς τὸν ερβσ, τομέα ὡς ἡ λμ, πρὸς τὴν ομ, ὡς δὲ ἡ λμ, πρὸς τὴν ομ, κατὰ τὴν αʹ: τοῦ ϛʹ: Εὐκλείδου, ἔχει καὶ τὸ λξ, πρὸς τὸ οξ, ὁ αβγδ, ἄρα κύκλος ἔχει πρὸς τὸν τομέα ερβσ, ὡς τὸ λξ, ὀρθογώνιον πρὸς τὸ οξ. Ἐπεὶ δὲ τὸ λξ, ἴσον δέδεικται τῷ αβγδ, κύκλῳ, πάντως γε ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ οξ, τῷ ερβσ, τομεῖ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ Τετάρτου τῆς Γεωμετρίας Βιβλίου.

ΣΤΟΙ-

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

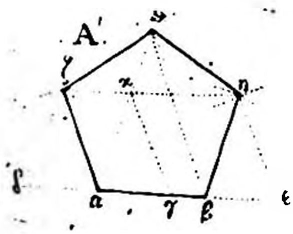
ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Πρότασις Α΄.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συστήσασθαι.

Δοθήτω δὴ εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ ζητηθήτω ἐπ' αὐτῆς πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συσταθῆναι. Τμηθήτω κατὰ τὸ γ, ἡ αβ, δοθεῖσα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὴν ζ': τοῦ α': τοῦ παρόντος, καὶ ἐξαχθήτω ἐφ' ἑκάτερα κατὰ τὸ συνεχές, ὥστε ἑκάτερον τῶν αδ, βε, μερῶν ἴσον εἶναι τῷ αγ, μείζονι τμήματι τῆς αβ, καὶ κέντροις μὲν τοῖς αδ, καὶ βε, διαστήματι δὲ τῷ αβ, τόξα γραφήτωσαν τεμνόμενα ἀλλήλοις, τὰ μὲν κατὰ τὸ ζ, τὰ δὲ κατὰ τὸ η, κέντροις δ' αὖθις τοῖς ζη, καὶ διαστήματι τῷ αὐτῷ αβ, γραφήτωσαν καὶ ἕτερα τόξα τεμνόμενα κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπιζευχθήτωσαν αἱ αζ, ζθ, θη, ηβ, ἐξ ὧν συσταθήσεται τὸ αζθηβ, πεντάγωνον, ὃ λέγω εἶναι ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον.

Geom. Lib. 5. Fig. 1.§



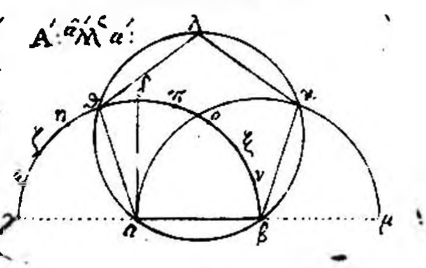
Ἐπιζευχθήτωσαν γὰρ αἱ δζ, αθ, θβ, ηε, κγ, ζη, καὶ ἐπεὶ τῶν δζα, βηε, τριγώνων, αἱ δύο πλευραὶ δζ, ζα, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς βη, ηε, ἔστι δὲ καὶ βάσις ἡ δα, βάσει τῇ βε, ἴση, πάντως γε κατὰ τὴν η': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἡ ὑπὸ δζα, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βηε, κατὰ δὲ τὴν δ': τοῦ αὐτοῦ καὶ ἡ ὑπὸ ζδα, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ηβε, ὥστε κατὰ τὴν κη': τοῦ αὐτοῦ αἱ ζδ, ηβ, παράλληλοί εἰσιν, ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ζη, δβ, παράλληλοί εἰσι κατὰ τὴν λγ': Ἐπεὶ δ' αὖθις τὰ δζα, ακγ, τρίγωνα ἐπὶ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν δα, αγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς δβ, ζη, πάντως γε κατὰ τὴν λη': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. κοινοῦ δὲ προσκειμένου τοῦ ζακ, ἔσονται καὶ τὰ δκ, γζ, τετράπλευρα, καὶ ἑπομένως παραλληλόγραμμα κατὰ τὴν λδ': τοῦ αὐτοῦ, ὥστε ἡ δζ, παράλληλός ἐστι τῇ αθ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ εη, παράλληλος τῇ θβ. ἔστιν οὖν ἡ μὲν θαβ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ζδα, ἡ δὲ ὑπὸ θβα, τῇ ὑπὸ ηεβ, ἀλλ' αἱ ὑπὸ ζδα, ηεβ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ θαβ, θβα, ὁμοίως ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ τὸ

θβα,

θβα, τρίγωνον ἰσοσκελές. Ὅτι δὲ καὶ ὅμοιόν ἐστι τοῖς δζα, βηε, τριγώνοις, δῆλον. ἰσογώνιον γάρ. Ἐπεὶ δὲ ἑκάτερον τῶν δζα, βηε, ἔχει ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει αὐτοῦ γωνιῶν διπλασίονα τῆς κατὰ κορυφὴν κατὰ τὴν κη΄: τοῦ α΄: τοῦ παρόντος, πάντως γε καὶ τὸ αθβ, τρίγωνον ἔχει ὁμοίως ἑκατέραν τῶν ὑπὸ θαβ, θβα, γωνιῶν διπλασίονα τῆς ὑπὸ αθβ, περὶ αὐτὸ δὲ γέγραπται τὸ αβηθζ, πεντάγωνον, ἄρα κατὰ τὴν ια΄: τοῦ δ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ αβηθζ, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον.

Ἄλλως. Δεδόσθω ἡ αβ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ α, κατὰ τὸ γ, ὥστε τὴν αγ, ἴσην εἶναι τῇ αβ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αγ, ἢ αβ, γραφήτω ἡμικύκλιον τὸ γδβ, πρὸς δὲ τῷ α, ἀνεστάσθω πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς βγ, ἡ αδ, καὶ διαιρεθήτω τὸ γδ, τεταρτημόριον εἰς πέντε μέρη ἴσα τὰ γε, εζ, ζη, ηθ, θδ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αθ. Διὰ δὲ τῶν θ, α, β, τριῶν σημείων γραφήτω κύκλος ὁ αβκλθ, καὶ διαιρεθήτω ἡ βκλθ, περιφέρεια εἰς μέρη τρία ἴσα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βκ, κλ, λθ, καὶ τὸ αβκλθ, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τι ἔσται καὶ ἰσογώνιον, ὁ λόγος ἐκ τῆς κατασκευῆς σαφής. Ἐὰν γὰρ καὶ ἀπὸ τοῦ β, κέντρου διαστήματι τῷ βα, ἡμικύκλιον γραφῇ τὸ ακμ, ἠγμένης τῆς αβ, κατὰ τὸ μ, καὶ τὰ λοιπὰ γένωνται ὡς πρότερον, ἔσονται αἱ τρεῖς εὐθεῖαι θα, αβ, βκ, ἴσαι, ἔτι δὲ καὶ αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ θαβ, αβκ, διὰ τὸ ἴσα τμήματα κύκλου εἶναι τὰ θβ, ακ. Διὰ τῶν αὐτῶν δὲ δειχθήσονται καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ καὶ γωνίαι ἴσαι.

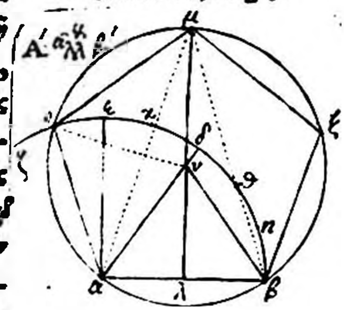
Geom. Lib. 5. Fig. 2.



Ἄλλως. Κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αβ, γραφήτω τόξον τὸ ηθδβ, καὶ ἀνεστάσθω ἀπὸ τοῦ α, κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ αδ, καὶ διῃρήσθω τὸ δβ, τεταρτημόριον εἰς μέρη πέντε τὰ βν, νξ, ξο, οπ, πδ. εἶτα εἰλήφθω τὸ δθ, ἴσον τῷ ἑνὶ τῶν βν, νξ, ξο, οπ, πδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αθ, τὰ δὲ λοιπὰ γενέσθω ὡς προηρμήνευται, καὶ ἔσται τὸ ζητούμενον.

Ἄλλως. Κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αβ, τόξον γραφήτω τὸ βδεζ, μεῖζον τεταρτημορίου, καὶ ἀνεστάσθω κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ αε. τὸ δὲ βδε, τεταρτημόριον διαιρεθήτω, ὡς καὶ πρότερον εἰς μέρη πέντε ἴσα ἀλλήλοις τὰ βη, ηθ, θδ, δκ, κε. καὶ ἀπὸ τοῦ α, διὰ τοῦ δ, πέρατος τοῦ γ΄: μέρους ἤχθω ἡ αδ. Εἶτα διῃρήσθω ἡ αβ, δίχα κατὰ τὸ λ, καὶ ἀνεστάσθω κάθετος ἐπ' αὐτῆς ἡ λμ, τέμνουσα τὴν αδ, κατὰ τὸ ν. ἀπὸ δὲ τοῦ ν, διαστήματι τῷ να, ἢ νβ, κύκλος γραφήτω ὁ αβμ. Λέγω δὴ τοῦτον διαιρεῖσθαι ὑπὸ τῆς αβ, εἰς μέρη πέντε ἴσα ἀλλήλοις, ὥστε συνίστασθαι ἐν αὐτῷ τὸ αβξμο, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αμ, μβ, ον, νβ, καὶ ἐπεὶ αἱ αβ, αο, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν ὡς ἐξ ἑνὸς κέντρου, κοινὴ δὲ ἡ α ν, δύο δὴ αἱ α β, α ν, δυσὶ ταῖς α ο, α ν, ἴσαι εἰσὶν, ἔστι δὲ καὶ ἡ ν ο, τῇ ν β, ἴση, ἄρα κατὰ τὴν η΄: τοῦ α΄: Εὐκλείδου, αἱ ὑπὸ ο α ν, ν α β, γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἀλλ' ἡ ὑπὸ ο α ν, τριπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ κ α ν, διὰ τὸ τριπλασίονα εἶναι καὶ τὴν ο δ, περιφέρειαν τῆς κ δ, περιφερείας, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ν α β, τριπλασίονά ἐστι τῆς ὑπὸ κ α δ, ὅλη δὲ ἡ ὑπὸ κ α β, τετραπλασία ἔσται τῆς αὐτῆς κ α δ. Ἐπεὶ δὲ τῇ κ α δ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ α μ ν, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν α ν, τῇ ν μ, πάντως γε αἱ ὑπὸ μ α β, γωνία τετραπλ: ἐστὶ τῆς ὑπὸ α μ ν, ταύτης δὲ διπλασία ἐστὶν ἡ ὑπὸ α ν λ, κατὰ τὴν κ΄: τοῦ γ΄: τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἡ ὑπὸ μ α β, διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ α ν λ, ταύτης δὲ διπλασία ἐστὶ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ α ν β, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ α ν λ, τῇ ὑπὸ λ ν β, κατὰ τὴν η΄: τοῦ α΄: τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἡ ὑπὸ μ α β, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ α ν β, ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ μ β α, ἴση τῇ αὐτῇ α ν β, ἀλλ' ἡ α ν β, διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ α μ β, ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν μ α β, μ β α, διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ α μ β, αἱ πρὸς τὴν βάσιν δηλονότι τῆς κατὰ κορυφὴν, ὥστε κατὰ τὴν ι α΄: τοῦ δ΄: τοῦ αὐτοῦ, ὑπὸ τῆς α β, βάσεως ἐπαναλαμβανομένης συνίσταται ἐν τῷ α ν β, κύκλῳ τὸ α β ξ μ ο, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Ὅτι δὲ ἡ ο δ, περιφέρεια τριπλασία ἐστὶ τῆς κ δ, συνάγεται ἐκ τῶν ἀνωτέρω. τὸ γὰρ ο ε, τόξον πέμπτον μέρος ἐστὶ τοῦ τεταρτημορίου, ὥσπερ καὶ τὸ ε κ, κ δ, καὶ λοιπά. Ἐπεὶ δὲ τὸ ε β, τεταρτημόριόν ἐστι, προστιθεμένου τοῦ ο ε, τὸ ο β, τόξον ἓξ περιέξει μέρη, ὧν τὰ μὲν τρία τὸ β δ, περιέχει, τὰ δὲ λοιπὰ τρία τὸ δ ο.

Geom. Lib. 5. Fig. 3.

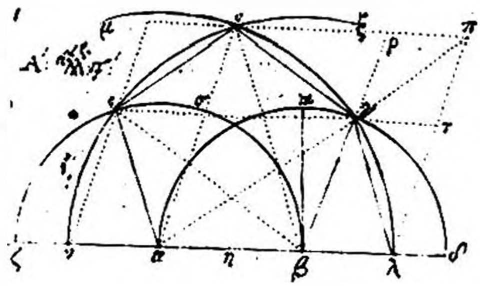


Ἄλλως. Ἐκβεβλήσθω ἡ α β, ἐφ' ἑκάτερα κατὰ τὸ συνεχὲς ἀορίστως, καὶ κέντροις μὲν τοῖς α, καὶ β, διαστήματι δὲ τῷ α β, ἡμικύκλια γραφέτωσαν τὰ α γ δ, β ε ζ. τμηθείσης δὲ τῆς α β, δίχα κατὰ τὸ η, ἀνεστάσθω κάθετος ἐπ' αὐτῆς ἀπὸ τοῦ β, σημείου ἡ β κ, τέμνουσα τὸ α γ δ, ἡμικύκλιον κατὰ τὸ κ, καὶ τὸ η κ, διάστημα μετενεχθήτω ἀπὸ τοῦ η, ἐπὶ τὸ λ, καὶ ν, καὶ κέντροις μὲν τοῖς α, καὶ β, διαστήματι δὲ τῷ α λ, ἢ β ν, τόξα γραφέτωσαν τὰ λ γ μ, ν ε ξ, τεμνόμενα μὲν κατὰ τὸ ο, τέμνοντα δὲ τὰ α γ δ, β ε ζ, ἡμικύκλια κατὰ τὰ γ, καὶ ε, σημεῖα, εἶτα ἐπιζεύχθωσαν αἱ β γ, γ ο, ο ε, ε α, εὐθεῖαι, καὶ τὸ α β γ ο ε, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἔσται καὶ ἰσογώνιον. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ ο, σημείου ἴση τε καὶ παράλληλος τῇ α λ, ἡ ο π, εὐθεῖα, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ α ο, λ π, λ γ, γ α, β ο, ν ε, ἤχθω δὲ καὶ ἡ β γ, τέμνουσα τὴν ο π, κατὰ τὸ ρ. καὶ ἐπεὶ αἱ ο π, α λ, ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι, πάντως γε κατὰ τὴν λ γ΄: τοῦ α΄: Εὐκλείδου, καὶ αἱ α ο, λ π, ὁμοίως ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν, ἀλλ' αἱ α λ, α ο, ἴσαι εἰσὶν ὡς ἀφ' ἑνὸς κέντρου, τὸ α π, ἄρα παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστίν. ὥστε κατὰ τὴν η΄: τοῦ αὐτοῦ, ἐπεὶ τὰ ο α π,

λ α π,

λαπ, τρίγωνα ἔχουσι τὰς δύο πλευρὰς οα, απ, ἴσας ταῖς δυσὶ λα, απ, καὶ τὴν βάσιν οπ, τῇ λπ, βάσει ἴσην, πάντως γε καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ οαπ, ἴσην ἔχει τῇ ὑπὸ λαπ, καὶ κατὰ τὴν δ΄: τοῦ αὐτοῦ ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ λγ, γο, εὐθεῖαι. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ νε, τῇ εο, ἴση, ἀλλ᾽ αἱ εο, ογ, ἴσαι εἰσὶν ὡς ῥηθήσεται, ἄρα καὶ αἱ λγ, νε, ὁμοίως ἴσαι εἰσίν. Ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ αε, τῇ βγ, ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ αν, τῇ βλ, πάντως γε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ νεα, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βγλ, ἡ δὲ ὑπὸ ενα, τῇ ὑπὸ γβλ, ἀλλὰ τῇ ὑπὸ γβλ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ γτλ, κατὰ τὴν λδ΄: τοῦ α΄: Εὐκλείδου, ἄρα ἡ ὑπὸ γτλ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ενα, καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν πρότ: τὸ ενλτ, παραλληλόγραμμόν ἐστιν, ὥστε ἡ ετ, εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ νλ, ἀφαιρουμένων δὲ τῶν ἴσων στ, αλ, ἐναπολείπονται ἴσαι αἱ σε, αν, ἀλλὰ τῇ αν, ἴση ἐστὶν ἡ βλ, ἄρα καὶ ἡ σε, ἴση ἐστὶ τῇ βλ, προστιθεμένων δὲ τῶν ἴσων αβ, σγ, ἔσται καὶ ἡ εγ, ἴση τῇ αλ, ἀλλὰ καὶ παράλληλος, ἄρα καὶ ἡ γλ, ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστι τῇ εα, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν λγ΄: τῇ δὲ γλ, ἴση δέδεικται ἡ γο, ἄρα αἱ γο, αε, ἴσαι εἰσίν. Ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ἡ εο, ἴση τῇ βγ, ἐπεὶ δὲ αἱ αε, βγ, ἴσαι εἰσὶ διὰ τὸ ἑκατέραν εἶναι ἴσην τῇ αβ, τὸ αβγοε, ἄρα πεντάγωνον ἰσόπλευρόν ἐστιν, ἑπομένως δὲ καὶ ἰσογώνιον. αἱ γὰρ αο, αγ, βο, βε, ἴσαι εἰσὶν ὡς ἡμιδιάμετροι ἴσων κύκλων. Καὶ ἐπεὶ πάλιν δι᾽ αὐτὸ τοῦτο ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ αε, αβ, ταῖς αβ, βγ, πάντως γε καὶ αἱ ὑπὸ εαβ, αβγ, γωνίαι ἴσαι εἰσίν. Αὖθις ἐπεὶ αἱ αε, εο, ἴσαι εἰσὶ ταῖς αε, αβ, ἴση δεικτέα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ αεο, γωνία τῇ ὑπὸ εαβ, διὰ τὸ καὶ τὰς βάσεις αο, βε, ἴσας εἶναι. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, καὶ ἡ ὑπὸ βγο, ἴση τῇ ὑπὸ αβγ, ὥστε αἱ τέσσαρες τοῦ πενταγώνου γωνίαι αἱ ὑπὸ οεα, εαβ, αβγ, βγο, ἴσαι εἰσίν. Ὅτι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ εογ, δειχθήσεται τὸν αὐτὸν τρόπον ἴση τῇ ὑπὸ αεο, ἢ βγο, δῆλον, ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβγοε, πεντάγωνον, δέδεικται δὲ καὶ ἰσόπλευρον: Ἐπὶ τῆς αβ, ἄρα δοθείσης, καὶ τὰ ἑξῆς.

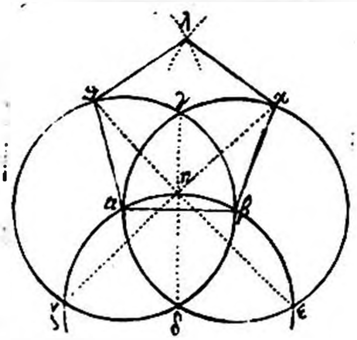
Geom. Lib. 5. Fig. 4.



Ὅτι δὲ αἱ εο, ογ, ἴσαι εἰσὶν οὐ χαλεπὸν καὶ τοῦτο δεῖξαι. αἱ δύο γὰρ εα, αο, ἴσαι εἰσὶ ταῖς δυσὶ γβ, βο, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ εαο, τῇ ὑπὸ γβο, ἴση, ὥστε καὶ ἡ εο, εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ ογ, κατὰ τὴν δ΄: τοῦ α΄: Εὐκλείδου.

Ἄλλως. Κέντροις μὲν τοῖς α, καὶ β, ὡς πρότερον, διαστήματι δὲ τῷ αβ, γραφήτωσαν δύο κύκλοι τεμνόμενοι κατὰ τὰ γ, καὶ δ, κέντρῳ δ᾽ αὖθις τῷ δ, καὶ διαστήματι τῷ δα, ἢ δβ, γραφήτω τόξον τέμνον τοὺς προτέρους δύο κύκλους κατὰ τὰ ε, καὶ ζ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ δγ, τέμνουσα τὸ εβαζ, τόξον κατὰ τὸ η. Εἶτα διὰ τοῦ η, σημείῳ διήχθωσαν αἱ ε η θ, ζ η κ, εὐθεῖαι τέμνουσαι τοὺς κύκλους κατὰ τὰ θ, καὶ κ, σημεῖα, ἀφ' ὧν ὡς ἀπὸ κέντρων διαστήματι τῷ α β, ἐκτὸς τῶν κύκλων γραφήτω τόξα τεμνόμενα κατὰ τὸ λ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ α θ, θ λ, λ κ, κ β, καὶ τὸ α β κ λ θ, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἔσται καὶ ἰσογώνιον. Ὅτι μὲν γὰρ ἰσόπλευρον ἐκ τῆς κατασκευῆς, δῆλον. ἑκατέρα γὰρ τῶν μὲν α θ, β κ, ἴση ἐστὶ τῇ α β, ὡς ἀφ' ἑνὸς κέντρου, τῶν δὲ θ λ, κ λ, ὡς τὸ αὐτὸ ἐχουσῶν διάστημα. ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον, οὐ χαλεπὸν δεῖξαι διὰ τῶν ἀνωτέρω. αἱ γὰρ α κ, α λ, β θ, β λ, θ κ, εὐθεῖαι, ἐὰν ἐπιζευχθῶσιν, ἴσαι ἔσονται κατὰ τὰ προειρημένα, κατὰ δὲ τὴν η': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, αἱ ὑπὸ α β κ, β κ λ, καὶ λοιπαὶ γωνίαι ἴσαι ἔσονται. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συνέστη, ὅπερ ἦν τὸ ἐξ ἀρχῆς προβληθέν.

Geom. Lib. 5. Fig. 5.

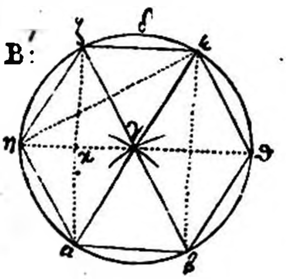


Πρότασις Β':

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συστήσασθαι.

Δοθήτω ἡ α β, καὶ ζητηθήτω συσταθῆναι ἐπ' αὐτῆς ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Συνεστάθω δὴ ἐπὶ τῆς δοθείσης α β, τρίγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ α β γ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ γ, διαστήματι δὲ τῷ γ α, ἢ γ β, γραφήτω κύκλος ὁ α β δ. εἶτα ἐξαχθήτωσαν αἱ α γ, β γ, ἐπ' εὐθείας κατὰ τὸ συνεχὲς τέμνουσαι τὸν α β δ, κύκλον κατὰ τὰ ε, καὶ ζ, σημεῖα, καὶ διαιρεθήτω ἑκάτερον τῶν α ζ, β ε, τόξων δίχα κατὰ τὰ η, καὶ θ, εἶτα ἐπιζεύχθωσαν αἱ β θ, θ ε, ε ζ, ζ η, η α, καὶ τὸ α β θ ε ζ η, ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἔσται καὶ ἰσογώνιον. Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ γ η, γ θ, α ζ, β ε· καὶ ἐπεὶ αἱ α γ, γ β, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ζ γ, γ ε, καὶ ἡ ὑπὸ α γ β, γωνία τῇ ὑπὸ ζ γ ε, ἴση, πάντως γε καὶ ἡ α β, βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ζ ε, καὶ τὸ α γ β, τρίγωνον ἴσον τῷ γ ζ ε, ἀλλὰ τὸ α γ β, ἰσόπλευρόν ἐστι κατὰ τὴν κατασκευήν, ἄρα καὶ τὸ ζ γ ε, ὁμοίως ἰσόπλευρόν ἐστι, τὰ δὲ ἰσόπλευρα καὶ ἰσογώνια, ἔστιν ἄρα ἡ ὑπὸ β α γ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ζ ε γ, ὥστε κατὰ τὴν κζ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, αἱ α β, ζ ε, εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν, ἀλλὰ καὶ ἴσαι, ἄρα κατὰ τὴν λγ': τοῦ αὐτοῦ καὶ αἱ ζ α, ε β, ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν, ὥστε καὶ αἱ ζ η α, ε θ β, περιφέρειαι ἴσαι εἰσίν. Ἐπεὶ δὲ ἑκα-

B:



τέρα

τέρα τούτων δίχα τέτμηται, αἱ τέσσαρες ἄρα ὑποτείνουσαι α η, η ζ, ε θ, θ β, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Αὖθις ἐπεὶ αἱ α γ, γ η, ἴσαι εἰσὶ ταῖς η γ, γ ζ, ἔστι δὲ καὶ βάσις ἡ α η, βάσει τῇ η ζ, ἴση, πάντως γε καὶ ἡ ὑπὸ α γ η, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ η γ ζ, ἐστὶ κατὰ τὴν η': τοῦ αὐτοῦ, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ α γ, γ ζ, ἴσαι, ἄρα κατὰ μετὰ τὴν δ': τοῦ αὐτοῦ ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ α κ, κ ζ, κατὰ δὲ τὴν γ': τοῦ γ': ἡ α ζ, πρὸς ὀρθὰς τέμνεται ὑπὸ τῆς γ η, ὥστε ἡ ὑπὸ γ κ α, γωνία ὀρθή ἐστιν, ἔστι δὲ ὀρθὴ καὶ ἡ ὑπὸ κ α β, κατὰ τὴν λα': τοῦ αὐτοῦ, αἱ α κ γ, ἄρα, κ α β, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, καὶ κατὰ τὴν κη': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ, αἱ η γ, α β, παράλληλοί εἰσι, καὶ ἑπομένως αἱ η γ α, γ α β, γωνίαι ἴσαι εἰσίν, ἀλλὰ τῇ ὑπὸ γ α β, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ α γ β, ἰσογώνιον γὰρ τὸ α γ β, τρίγωνον, ἄρα αἱ η γ α, α γ β, γωνίαι ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δ' ἔτι καὶ αἱ η γ, γ α, εὐθεῖαι ταῖς α γ, γ β, ἴσαι, πάντως γε καὶ αἱ α β, α η, ἴσαι εἰσίν, ἀλλὰ τῇ μετὰ α η, ἴση ἐστὶν ἑκάστη τῶν η ζ, ε θ, θ β, ὡς δέδεικται, τῇ δὲ α β, ἡ ε ζ. αἱ πᾶσαι ἄρα α β, β θ, θ ε, ε ζ, ζ η, η α, πλευραὶ ἴσαι εἰσὶ, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ἑξάγωνον ἰσόπλευρον, ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον δῆλον. Ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς η ε, εὐχερῶς δειχθήσεται ἡ ὑπὸ α η ζ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ η ζ ε, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς α η, η ζ, ταῖς η ζ, ζ ε, καὶ τὴν α ζ, τῇ η ε. Ὁμοίως δὴ δειχθήσονται καὶ αἱ λοιπαὶ δύο ἴσαι ἀλλήλαις, τῷ μὴ παντάπασιν ἀπείρῳ ὄντι τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

Ἄλλως. Τοῦ α β γ, τριγώνου συσταθέντος ὡς πρότερον, καὶ τοῦ α β δ, γεγραμμένου κύκλου, μετενεχθήτω τὸ α β, διάστημα ἐπὶ τὰ θ, ε, ζ, η, σημεῖα, καὶ διαιρεθήσεται ὁ κύκλος εἰς μέρη ἓξ ἴσα ἀλλήλοις. Ἐπιζευχθεισῶν δὲ τῶν β θ, θ ε, καὶ λοιπῶν ὑποτεινουσῶν, συσταθήσεται ἐπὶ τῆς α β, τὸ α β θ ε ζ η, ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε ὂν καὶ ἰσογώνιον κατὰ τὴν ιε': τοῦ δ': τοῦ Εὐκλείδου.

Πρότασις Γ':

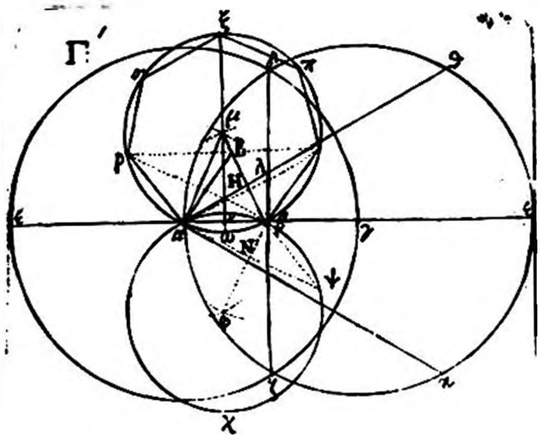
Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ἑπτάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συστήσασθαι.

Δοθήτω εὐθεῖα ἡ α β, καὶ ζητείσθω ἐπ' αὐτῆς συσταθῆναι ἑπτάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Ἤχθω δὴ ἡ α β, κατὰ τὸ γ, ὥστε τὴν β γ, ἴσην εἶναι τῇ α β, καὶ κέντροις μετὰ τοῖς α, καὶ γ, διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ α γ, γραφήτωσαν κύκλοι οἱ α δ ε ζ, καὶ γ δ ε ζ, τεμνόμενοι κατὰ τὰ δ, καὶ ζ, σημεῖα, ἀπὸ δὲ τῶν δ, καὶ ζ, κοινῶν τομῶν τμηθήτω ὁ α δ ε ζ, κύκλος τῷ α γ, διαστήματι κατὰ τὰ θ, καὶ κ, σημεῖα, καὶ ἀχθήτωσαν αἱ α θ, α κ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ β δ, τέμνουσα τὴν α θ, κατὰ τὸ λ, εἶτα κέντροις μετὰ τοῖς α β, διαστήματι δὲ τῷ δ λ, γραφήτωσαν τόξα τεμνόμενα κατὰ τὸ μ, ἀφ' οὗ ὡς ἀπὸ κέντρου γραφήτω κύκλος, ὁ α β ξ, ἀπὸ δὲ τοῦ μ, πιπτέτω κάθετος ἡ μ ν, εὐθεῖα ἐπὶ τῆς α β, καὶ τμηθήσεται ἡ α β, δίχα κατὰ τὴν γ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ. Ἐξαχθήτω δὲ ἀπὸ τοῦ μ, ἡ ν μ, εὐθεῖα κατὰ τὸ

σημ.

συνεχὲς, ὥστε τέμνειν τὴν τοῦ α β ξ, κύκλου περιφέρειαν κατὰ τὸ ξ, ἑκάτερον δὲ τῶν τόξων α ξ, β ξ, τμηθήτω εἰς τρία ἴσα τὰ β σ, ο π, π ξ, α ρ, ρ σ, σ ξ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ β ο, ο π, καὶ λοιπαὶ ὑποτείνουσαι, καὶ τὸ α β ο π ξ σ ρ, ἑπτάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἔσται καὶ ἰσογώνιον. Γραφήτωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν α, καὶ β, σημείων τῷ δλ, διαστήματι καὶ ἕτερα τόξα ἐπὶ θάτερα τὰ μέρη τεμνόμενα κατὰ τὸ φ, ἀφ᾽ οὗ ὡς ἀπὸ κέντρου γραφήτω καὶ ἕτερος κύκλος ὁ α β χ, ἴσος τῷ α β ξ, καὶ ἐφαρμοσθήτω ἡ β ο, ἐπὶ τὸ β ψ. Εἶτα ἐπιζεύχθωσαν αἱ α ο, α ψ, ἐφ᾽ ὧν πιπτέτωσαν κάθετοι ἀπὸ τῶν μ φ, κέντρων αἱ μ Η, φ Ν, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ Η β, Ν β, ἀπὸ δὲ τοῦ ο, ἤχθω παράλληλος τῇ α β, ἡ ο ρ,

Geom. Lib. 5. Fig. 6.



τέμνουσα τὴν μ Η, κατὰ τὸ Β, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ α Β, Δείκνυται. Ἐπεὶ οὖν ἐπὶ τῆς α ο, πέπτωκε πρὸς ὀρθὰς ἡ διὰ τοῦ κέντρου μ Η, πάντως γε κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν γ: αἱ α Η, Η ο, ἴσαι εἰσὶ, καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ α Η μ, γωνιῶν ὀρθή. ὥστε κατὰ τὴν δ᾽: τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἡ α Β, ἴση ἐστὶ τῇ Β ο, ὡς δειχθήσεται, ἄρα καὶ ἡ Β ο, ἴση ἐστὶ τῇ α β, τῇ δὲ ο Β, ἴση ἐστὶν ἡ α β, ἡ α β, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ β ο, ἀλλὰ τῇ β ο, ἴση ἐστὶν ἑκάστη τῶν ο π, π ξ, ξ σ, σ ρ, ρ α, ὡς ὑπόκειται, τὸ α β ο π ξ σ ρ, ἄρα ἑπτάγωνον ἰσόπλευρόν ἐστιν. Ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον, δῆλον. Ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς β ρ, ὁμοίως δειχθήσεται ἡ ὑπὸ α β ο, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ β α ρ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς α β, β ο, ταῖς β α, α ρ, καὶ τὴν α ο, τῇ β ρ. Ὁμοίως δὲ δειχθήσονται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἴσαι, ὥστε καὶ ἰσογώνιον, δέδεικται δὲ καὶ ἰσόπλευρον, ἐπὶ τῆς α β, ἄρα δοθείσης εὐθείας συνέστη ἑπτάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον κατὰ τὸ προσαχθέν. Λείπεται δὲ δεῖξαι, ὅτι τῇ β ο, εὐθείᾳ ἴση ἐστὶν ἡ α Β, καὶ ἑκάστη τῶν ο π, π ξ, καὶ λοιπῶν.

Ὅτι μὲν οὖν ἡ α Β, ἴση ἐστὶ τῇ β ο, οὐχ ἀλεπὸν συναγαγεῖν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ Β ο, παράλληλος ἤχθη τῇ α β, πάντως γε κατὰ τὴν κθ᾽: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ αἱ ὑπὸ Β ο α, β α ο, γωνίαι, καὶ αἱ ὑπὸ β Β ο, Β β α, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὥστε καὶ ἡ λοιπὴ Β Η ο, τῇ λοιπῇ β Η α, ἴση ὁμοίως ἐστὶν, ἀλλὰ τῇ ὑπὸ Β Η ο, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ Β Η α, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ Β Η α, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ β Η α, τῇ δὲ ὑπὸ Β ο Η, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ β α Η, ἄρα τῇ ὑπὸ Β α Η, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ β α Η, ὥστε τῶν Β α Η, Η α β, τριγώνων καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ α Β Η, Η β α ἴσαι εἰσίν.

καὶ

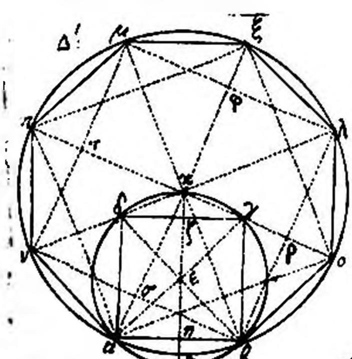
καὶ ἑπομένως αἱ Βα, αβ, πλευραὶ ἴσαι ὡσαύτως εἰσὶ, τῇ δὲ αΒ, ἴση δέδεικται ἡ Βο, ἄρα τῇ Βο, ἴση ἐστὶν ἡ αβ, καὶ κατὰ τὴν λγ΄: τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ ἴση ἐστὶν ἔτι καὶ ἡ αΒ, τῇ βο, ὅπερ ἔδει τὸ α.

Ὅτι δὲ τῇ αὐτῇ βο, ἴση ἐστὶ καὶ ἑκάστη τῶν οπ, πξ, καὶ λοιπῶν εὐθειῶν, δῆλον, ἡ γὰρ ξω, διὰ τοῦ κέντρου διέρχεται διὰ τὸ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνειν τὴν αβ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, ὥστε τὰ ξρω, καὶ ξοω, τόξα ἴσα ἐστὶν, ἑκάτερον γὰρ ἡμικύκλιον. εἰσὶ δὲ καὶ τὰ αω, βω, ἴσα διὰ τὸ καὶ τὰς αω, βω, ὑποτεινούσας αὐτῶν ἴσας εἶναι, ἀφαιρουμένων ἄρα τῶν αω, βω, ἴσων τόξων, ἐγκαταλείπονται τὰ ξρα, ξοβ, τόξα ἴσα, ἀλλ' ἑκάτερον τούτων τέτμηται εἰς τρία ἴσα τὰ βο, οπ, πξ, αρ, ρσ, σξ, ἄρα καὶ τὰ μέρη τοῖς μέρεσιν, ὥσπερ καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶν, ἑπομένως δὲ καὶ αἱ ταύτας ὑποτείνουσαι αἱ αρ, ρσ, σξ, ξπ, πο, οβ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἐπεὶ δὲ τῇ βο, δέδεικται ἴση ἡ αΒ, ταύτῃ δὲ ἡ αβ, πάντως γε ἡ αβ, ἴση ἐστὶ τῇ βο, τῇ δὲ βο, δέδεικται ἴση ἑκάστη τῶν οπ, πξ, καὶ λοιπῶν, ἄρα καὶ ἡ αβ, ἴση ἐστὶν ἑκάστῃ τῶν οπ, πξ, καὶ λοιπῶν εὐθειῶν. ὅπερ ἔδει τὸ β.

Πρότασις Δ΄:

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ὀκτάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συστήσασθαι.

Geom. Lib. 5. Fig. 7.



Δοθήτω ἡ αβ, καὶ ἔστω συστήσασθαι ἐπ' αὐτῆς ὀκτάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Συστήσθω δὲ α: ἐπὶ τῆς αβ, τετράγωνον τὸ αβγδ, καὶ ἤχθωσαν αἱ αγ, βδ, διάμετροι τοῦ τετραγώνου, τεμνόμεναι κατὰ τὸ ε, ἀφ' οὗ γραφήτω κύκλος ὁ αβγδ. Εἶτα τμηθήτω ἑκατέρα τῶν αβ, δγ, δίχα κατὰ τὰ ζ, καὶ η, σημεῖα, καὶ διὰ τῶν ζ, η, σημείων διήχθω ἡ θκ, διάμετρος τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ κ, ὡς ἀπὸ κέντρου διαστήματι τῷ κα, ἢ κβ, γραφήτω ὁ αβλμν, κύκλος, καὶ διὰ τῶν ακ, καὶ βκ, διήχθωσαν αἱ ακξ, βκμ, διὰ δὲ τῶν γκ, καὶ δκ, αἱ νδκλ, καὶ ογκπ, εὐθεῖαι, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βο, ολ, λξ, ξμ, μπ, πν, να, καὶ τὸ αβολξμπν, ὀκτάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἔσται καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βν, μν, λμ, βλ. καὶ ἐπεὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ βλμ, λμν, μνβ, νβλ, γωνιῶν, ὀρθή ἐστιν, ὡς ἐν ἡμικυκλίῳ κατὰ τὴν λα: τοῦ γ: τῶν Στοιχείων, δέδεικται αἱ βλ, λμ, μν, νβ, πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ κατὰ τὴν γ΄: τοῦ αὐτοῦ δίχα τέμνονται καὶ πρὸς ὀρθὰς ὑπὸ τῶν αξ, οπ. αἱ βρ, ἄρα ρλ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ βρο, λρο, γωνιῶν ὀρθή, ὥστε κοινῆς λαμβανομένης τῆς ρο, ἔσονται καὶ αἱ βο, ολ, ἴσαι

κατὰ

κατὰ τὴν δ΄: τοῦ α΄: τοῦ αὐτοῦ. αὖθις ἐπεὶ αἱ βλ, βν, ἴσαι εἰσὶν ὡς δέδεικται, καὶ ἑκατέρα δίχα τέτμηται, πάντως γε αἱ βρ, βσ, ἴσαι ὁμοίως εἰσὶν, ἐπεὶ δὲ καὶ αἱ κα, κο, εἰσὶν ἴσαι, τῇ δὲ κρ, ἴση ἐστὶν ἡ κσ, ὡς δειχθήσεται, ἄρα καὶ αἱ ρο, σα, ἴσαι ὡσαύτως εἰσίν. αἱ δύο δὴ βρ, ρο, δυσὶ ταῖς βσ, σα, ἴσαι εἰσὶν, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βρο, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ βσα, ἑκατέρα γὰρ ὀρθὴ ὡς δέδεικται. ἄρα καὶ αἱ βο, βα, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν δ΄: Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσονται καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις, ἰσόπλευρον ἄρα τὸ αβολξμπν, ὀκτάγωνον. Ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον, ὑστέρως δειχθήσεται, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς βλ, λμ, μν, νβ, αο, οξ, ξπ, πα. Ὅτι δ᾽ ἔτι καὶ αἱ κρ, κσ, εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶ, δῆλον. αἱ γὰρ ρτ, σφ, ἴσαι εἰσὶ διὰ τὸ πρὸς ὀρθὰς τέμνεσθαι, καὶ παραλλήλους εἶναι τὴν μὲν τῇ βν, τὴν δὲ τῇ βλ. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας ὀκτάγωνον καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Ε΄:

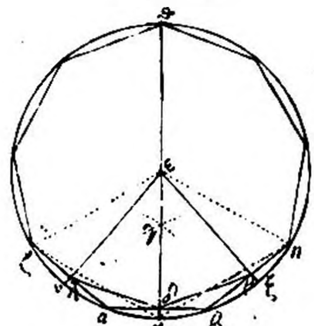
Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ἐννεάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συστήσασθαι.

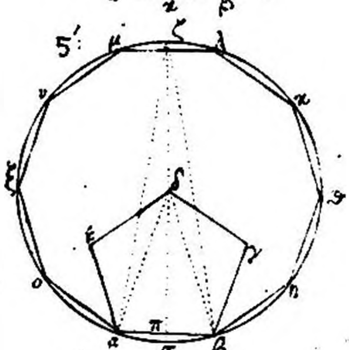
Δοθήτω ἡ αβ, εὐθεῖα, καὶ ζητηθήτω συστῆσαι ἐπ᾽ αὐτῆς ἐννεάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Κέντροις τοίνυν τοῖς α, καὶ β, διαστήματι δὲ τῷ αβ, τόξα γραφήτωσαν τεμνόμενα κατὰ τὸ γ, ἀπὸ δὲ τοῦ γ, πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ γδ, ἐκβαλλομένη ἑκατέρωθεν κατὰ τὸ συνεχὲς ἀορίστως, καὶ εἰλήφθω τὸ γε, ἴσον τῷ βδ, τῷ ἡμίσει ἀμέλει τῆς αβ, κέντρῳ δὲ τῷ ε, καὶ διαστήματι τῷ εα, ἢ εβ, γραφήτω κύκλος ὁ αβηθζ, τεμνόμενος ὑπὸ τῆς γδ, ἐκβαλλομένης κατὰ τὰ θ, καὶ κ. εἶτα εἰλήφθω τῷ αβ, τόξῳ ἑκατέρωθεν ἴσα τόξα, τὰ αζ, καὶ βη, ἑκάτερον δὲ τῶν ζθ, ηθ, διαιρεθήτω εἰς τρία ἴσα, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ αζ, βη, καὶ λοιπαὶ ὑποτείνουσαι, καὶ ἔσται τὸ προσταχθέν. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ζκ, κη, καὶ ζε, εη, καὶ ἐπεὶ ἡ κθ, διὰ τοῦ κέντρου διέρχεται τέμνουσα τὴν αβ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου πρὸς ὀρθὰς, πάντως γε καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, καὶ ἡ αδ, ἴση ἐστὶ τῇ δβ, ὥστε καὶ τὰ ακ, κβ, τόξα ἴσα ὁμοίως ἐστὶν, εἴληπται δὲ καὶ τὰ αζ, βη, ἴσα. ἐὰν δὲ ἴσοις ἴσα προστεθῇ τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα, ἄρα καὶ τὰ ζκ, κη, τόξα ἴσα εἰσὶν, καὶ αἱ τούτων ἔτι ὑποτείνουσαι ζκ, κη, ἀλλὰ καὶ αἱ ζε, εη, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὡς ἀπὸ τοῦ κέντρου, αἱ δύο ἄρα κζ, ζε, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς κη, ηε, ἀλλὰ καὶ βάσις ἡ εκ, κοινὴ, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ εζκ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εηκ, ὥστε τὸ ζκηε, παραλληλόγραμμόν ἐστι κατὰ τὴν λδ΄: τοῦ α΄: τοῦ στοιχειωτοῦ, καὶ ἑπομένως ἡ ζκ, πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ εη, ταύτῃ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ εκ, ἄρα καὶ ἡ ζκ, ἴση ἐστὶ τῇ εκ, τῇ δὲ ζκ, ἴση δέδεικται ἡ κη, αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι ζκ, κε, κη, ἴσαι εἰσὶν, ὥστε ἑκατέρα τῶν ζκ, κη, ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ αβηθζ, κύκλου ἡμιδιαμέτρῳ, καὶ μεί-

ζει

ξεῖ αὐτὸν ἑξάκις κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιε΄: τοῦ δ΄: τοῦ αὐτοῦ, τὸ ζ κ, ἄρα τόξον ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ α β η θ ζ, κύκλου, τὸ δὲ ζ κ η, γ΄: ἀλλὰ τὸ ζ κ η, περιέχει τὴν δοθεῖσαν α β, τρίς, ἴση γὰρ τῇ α β, εἴληπται ἑκατέρα τῶν α ζ, β η, ὅλος ἄρα ὁ κύκλος περιέξει τὴν α β, ἐννεάκις, ὥστε περιενεχθεῖσα ἡ α β, ἀπὸ τοῦ η, ἑξάκις, ἀφίξεται ἐπὶ τὸ ζ, καὶ συσταθήσεται ἐννεάγωνον ἰσόπλευρον. Ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον δῆλον. Τμηθήτω γὰρ ἑκατέρα τῶν α ζ, β η, δίχα κατὰ τὰ λ, καὶ μ, διὰ τῶν ε λ, ε μ, εὐθειῶν, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ λ κ, κ μ, καὶ ἐπεὶ αἱ κ ε, ε ν, ἴσαι εἰσὶ ταῖς κ ε, ε ξ, καὶ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασι τῶν ν α κ, κ β ξ, πάντως γε καὶ αἱ ὑπὸ ν ε κ, κ ε ξ, γωνίαι ἴσαι εἰσίν. Αὖθις ἐπεὶ αἱ ε λ α, ε μ β, γωνίαι ἴσαι εἰσίν, ὡς ὀρθαί, ἐὰν ἄρα ἀφέλῃς τὰς α λ δ, β μ δ ἐναπολειφθήσονται αἱ ε λ δ, ε μ δ, ἴσαι, ἔστι δὲ κοινὴ ἡ ε δ, ἄρα κατὰ τὴν κ ς΄: τοῦ α΄: τοῦ αὐτοῦ καὶ ἡ λ δ, ἴση ἐστὶ τῇ δ μ, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ λ α, α δ, ἴσαι ταῖς δ β, β μ, ἄρα κατὰ τὴν η΄: τοῦ αὐτοῦ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ λ α δ, δ β μ· διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσονται καὶ αἱ λοιπαὶ ἴσαι. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας ἐννεάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συνέστη.

Geom. Lib. 5. Fig. 8.



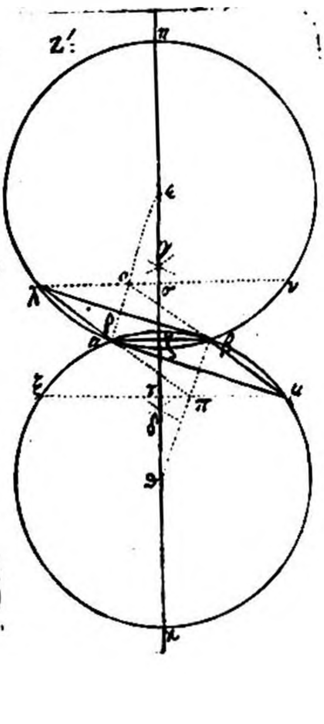


Πρότασις ς΄.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας δεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συστήσασθαι.

Δεδόσθω ἡ α β, εὐθεῖα, ἐφ' ἧς ζητηθήτω συστῆσαι δεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Συνιστάσθω δὴ ἀ: ἐπ' αὐτῆς τὸ α β γ δ ε, πεντάγωνον καθ' ὁποιονοῦν βούλει τρόπον τῶν προεκτεθέντων περὶ κατασκευῆς πενταγώνου ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου· εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δ α, ἢ δ β, γραφήτω ὁ α β ζ, κύκλος, ὃν ἡ α β, δεκάκις μεταφερομένη ἐπὶ τῆς αὐτοῦ περιφερείας, δεκάκις καταμετρήσει. Ἐπιζευγνυμένων δὲ τῶν β η, β θ, θ κ, καὶ λοιπῶν εὐθειῶν, συσταθήσεται τὸ α β η θ κ λ μ ν ξ ο, δεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἰσογώνιον. Τμηθήτω γὰρ ἡ α β, δίχα κατὰ τὸ π, καὶ διὰ τῶν π, καὶ δ, διήχθω ἡ π δ ζ, διάμετρος τοῦ α β ζ, κύκλου, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ δ α, δ β, ζ α, ζ β. Ἐπεὶ οὖν τοῦ α β δ, τριγώνου ἑκατέρα τῶν πρὸς τὴν βάσιν γωνιῶν διπλασία ἐστὶ τῆς κατὰ κορυφὴν τοῦ αὐτοῦ κατὰ τὴν ι: τοῦ δ΄: Εὐκλείδου, δῆλον ὅτι ἡ ὑπὸ δ α β, ...ία διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ α δ β, ἀλλ' ἡ ὑπὸ α δ β, διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ ..., κατὰ τὴν κ΄: τοῦ γ΄: τοῦ αὐτοῦ, πάντως γε ἡ ὑπὸ δ α β, τετραπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ αζβ. ἐπεὶ δὲ ἡ ὑπὸ αζβ, διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ δζα, ἄρα ἡ ὑπὸ δαβ, ὀκταπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ δζα, προστεθείσης δὲ τῆς ὑπὸ δαζ, τῇ ὑπὸ δαβ, ὅλη ἡ ὑπὸ ζαβ, ἐννεαπλασιός ἐστι τῆς ὑπὸ δζα· ἴσαι γὰρ αἱ ὑπὸ δζα, δαζ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν δζ, δα, εὐθειῶν, τῇ δὲ ὑπὸ ζαβ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ζβα, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ζβα, ἐννεαπλασιός ἐστι τῆς ὑπὸ δζα. ἀλλ' ὑπὸ δζα, βέβηκεν ἐπὶ τῆς ασ, περιφερείας, ἡ δὲ ὑπὸ ζβα, ἐπὶ τῆς αξζ, ἄρα καὶ ἡ αξζ, περιφέρεια ἐννεαπλασιός ἐστι τῆς ασ· διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ βθζ, περιφέρεια ἐννεαπλάσιος τῆς σβ, ἴσαι γὰρ αἱ ασ, σβ, ὥστε ὅλη ἡ αξζθβ, περιφέρεια ὀκτωκαιδεκαπλασιός ἐστι τῆς ασ, τῆς δὲ ὅλης αβ, ἐννεαπλάσιος, ἡ αβ, ἄρα ὑποτείνουσα ἅπαξ μὲν τὴν ασβ, μετροῦσα περιφέρειαν, ἐννεάκις δὲ τὴν αξζθβ, μετρεῖ ὅλον τὸν κύκλον δεκάκις. Τὸ αβηθκλμνξο, τοίνυν δεκάγωνον ἰσόπλευρόν ἐστιν. Ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον, δῆλον. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ αη, βο, εὐθεῖαι, δειχθήσονται αἱ ὑπὸ αβη, βαο, γωνίαι ἴσαι, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς αβ, βη, ταῖς βα, αο, καὶ τὴν αη, βάσιν τῇ βο. ὁμοίως δὲ δειχθήσονται καὶ αἱ λοιπαὶ ἴσαι, ὥστε καὶ ἰσογώνιον. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας συνίστη, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 5. Fig. 9.



Πρότασις Ζ′:

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ἑνδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συστήσασθαι.

Δεδόσθω ἡ αβ, καὶ ἔστω ἐπ' αὐτῆς συστήσασθαι ἑνδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Κέντροις μὲν δὴ τοῖς α, καὶ β, διαστήματι δὲ τῷ αβ, τόξα γραφήτωσαν ἑκατέρωθεν τεμνόμενα κατὰ τὰ γ, καὶ δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γδ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ γ, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' ἄπειρον, καὶ τμηθήσεται ἡ αβ, δίχα κατὰ τὸ ζ. εἶτα εἰλήφθω τὸ γε, αὐτῆς μέρος ἴσον τῷ γζ, κέντρῳ δὲ τῷ ε, καὶ διαστήματι τῷ εα, ἢ εβ, γραφήτω κύκλος ὁ αβη, ὃν ἡ αβ, ἑνδεκάκις δήπουθεν καταμετρήσει. εἰλήφθω γὰρ καὶ ἡ δθ, ἴση τῇ δζ, ἢ γζ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θβ, ἢ θα, γραφήτω κύκλος ὁ αβκ, καὶ ἔσται ἴσος τῷ αβη. Ἐπεὶ δὲ ἐν οἱῳδήποτε κύκλῳ δυνατὸν οἱονδήποτε γράφεσθαι πολύγωνον, ὑποκείσθω τὴν αλ, εὐθεῖαν, πλευρὰν εἶναι τοῦ ἐν τῷ αβη, ἐγγραφομένου ἑνδεκαγώνου, καὶ ταύτῃ ἴση εἰλήφθω

ἡ βμ,

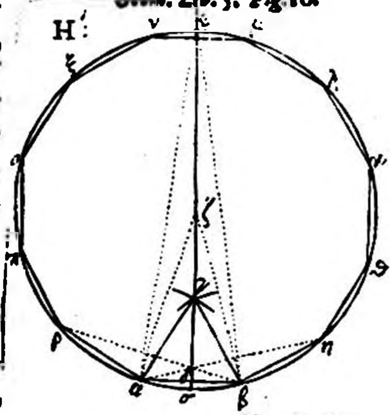
ἡ βμ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ αμ, βλ, αι, βθ. τῇ δὲ αβ, ἀπό τε τοῦ μ, καὶ λ, ἤχθω παράλληλος ἑκατέρα τῶν λν, μξ, τέμνουσαι τὰς αι, βθ, κατὰ τὰ ο, καὶ π, σημεῖα, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ βο, απ. Δείκνυται. ἐπεὶ αἱ λα, βμ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, κοινὴ δὲ ἡ αβ, πάντως γε αἱ λαβ, αβμ, περιφέρειαι ἴσαι εἰσίν, ὥστε καὶ αἱ ταύτας ὑποτείνουσαι λβ, αμ, ὡσαύτως ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ λαβ, γωνία τῇ ὑπὸ αβμ, ἴση, καὶ ἑπομένως αἱ λα, βμ, παράλληλοί εἰσιν, ἀλλὰ καὶ ἴσαι, αἱ αλ, ἄρα, βμ, ὁμοίως ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι κατὰ τὴν λγ΄: τοῦ α΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. Αὖθις ἐπεὶ αἱ αι, βθ, εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶν ὡς ἡμιδιάμετροι ἴσων κύκλων, καὶ ἡ ιζ, τῇ ζθ, ἴση, ἔστι δ᾽ ἔτι καὶ βάσις ἡ αζ, βάσει τῇ ζβ, ἴση κατὰ τὴν γ΄: τοῦ γ΄: τοῦ αὐτοῦ, πάντως γε καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ αιζ, βθζ, ἴσαι εἰσὶν, αἱ δὲ αι, βθ, παράλληλοι κατὰ τὴν κζ΄: τοῦ α΄: τοῦ αὐτοῦ. Ἐπεὶ δὲ πάλιν εἰς τὰς αβ, ξμ, πέπτωκεν ἡ αμ, εἰς δὲ τὰς αβ, λν, ἡ λβ, πάντως γε αἱ ὑπὸ βαμ, αμπ, ἴσαι εἰσὶν, ἀλλὰ τῇ μὲν ὑπὸ βαμ, ἴση ἐστὶ διὰ τὰ αὐτὰ ἡ ὑπὸ αβλ, ταύτῃ δὲ ἡ ὑπὸ βλο, ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ αμπ, βλο, γωνίαι ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ αλβ, βμα, ἴσαι, ἡ ὅλη ἄρα αλο, ὅλῃ τῇ βμπ, ἴση ἐστίν. ἀλλ᾽ ἡ μὲν αλ, ἴση ἐστὶ τῇ βμ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἡ δὲ λο, τῇ μπ, ὡς δειξόμεθα, κατὰ τὴν δ΄: ἄρα τοῦ αὐτοῦ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ αο, βάσις τῇ βπ, καὶ τὸ αλο, τρίγωνον ἴσον τῷ βπμ· ἀλλ᾽ ἡ αο, δέδεικται καὶ παράλληλος τῇ βπ, κατὰ τὴν λγ΄: ἄρα, τοῦ αὐτοῦ, αἱ οβ, απ, εὐθεῖαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αοβ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ απβ, κατὰ τὴν λδ΄: τοῦ αὐτοῦ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αολ, ἴση τῇ ὑπὸ βπμ, διὰ τὴν τῶν τριγώνων ἰσότητά τε καὶ ὁμοιότητα, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ βολ, ἴση ἐστὶν ὅλῃ τῇ ὑπὸ απμ, ὥστε τὸ λπμο, σχῆμα, ἐπεὶ αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, παραλληλόγραμμον δήπουθέν ἐστι κατὰ τὴν αὐτὴν λδ΄: καὶ ἑπομένως ἡ αλ, παράλληλός ἐστι τῇ βο, εἴληπται δὲ καὶ ἡ λο, παράλληλος τῇ αβ, ἄρα τὸ αλοβ, παπαραλληλόγραμμόν ἐστι, καὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν λδ΄: ἡ αλ, ἴση ἐστὶ τῇ βο, ἔστι δὲ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ αρλ, ἴση τῇ ὑπὸ βρο, κατὰ κορυφὴν γὰρ, ἡ δὲ ὑπὸ αλβ, τῇ ὑπὸ οβλ, ἐναλλὰξ γὰρ, κατὰ τὴν κϛ΄: ἄρα τοῦ αὐτοῦ ἡ λρ, ἴση ἐστὶ τῇ ρβ, κατὰ δὲ τὴν γ΄: τοῦ γ΄: πρὸς ὀρθὰς τέμνεται ὑπὸ τῆς αι, καὶ ἡ ὑπὸ αρλ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αρβ, δέδεικται δὲ καὶ ἡ λρ, τῇ ρβ, ἴση, κοινῆς ἄρα λαμβανομένης τῆς αρ, ἔσται καὶ ἡ αλ, βάσις τῇ αβ, βάσει ἴση κατὰ τὴν δ΄: τοῦ α΄: τοῦ αὐτοῦ. ἀλλ᾽ ἡ αλ, ὑπετέθη πλευρὰ ἐνδεκαγώνου τοῦ δυναμένου ἐγγραφῆναι ἐν τῷ αβη, κύκλῳ, ἄρα καὶ ἡ αβ, ἑνδεκάκις δύναται τὸν αὐτὸν καταμετρεῖν κύκλον, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ὅτι δὲ καὶ ἡ λο, τῇ πμ, ἴση ἐστὶ, δῆλον· αἱ γὰρ λσ, μτ, ἴσαι εἰσὶ διὰ τὸ ἴσας εἶναι καὶ τὰς λν, ξμ, καὶ δίχα τέμνεσθαι ὑπὸ τῆς ιθ. Ἐπεὶ δ᾽ ἑκατέρα τῶν λν, ξμ, παράλληλος εἴληπται τῇ αβ, καὶ ἴσον ταύτης ἀφίστανται, αἱ αι, βθ, πάντως ἀναλόγως τέμνονται κατὰ τὴν β΄: τοῦ ϛ΄: τοῦ αὐτοῦ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ια, πρὸς τὴν βθ, ἡ ιο, πρὸς τὴν θπ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ισ, ἴση τῇ θτ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ α ε σ, τῇ ὑπὸ π θ τ, ἴση, κατὰ τὴν δ′: ἄρα τοῦ α′: τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἡ ο σ, ἴση ἐστὶ τῇ π τ, ἀφαιρουμένων δὲ τῶν ἴσων ο σ, π τ, ἀπὸ τῶν ἴσων λ σ, μ τ, ἐγκαταλείπονται ἴσαι αἱ λ ο, π μ. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Η′:

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας δωδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συστήσασθαι.

Δεδόσθω εὐθεῖα ἡ α β, καὶ ζητηθήτω ἐπ᾽ αὐτῆς συστῆσαι δωδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Συνεστάσθω δὴ ἐπὶ τῆς α β, τὸ α β γ, τρίγωνον ἰσόπλευρον, τῆς δὲ α β, δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ δ, ἤχθω διὰ τῶν δ, καὶ γ, σημείων ἡ δ γ ε, κατὰ τὸ συνεχές, τῇ δὲ α γ, εἰλήφθω ἴση ἡ γ ζ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζ α, γραφέτω κύκλος ὁ α β ε, καὶ ἡ α β, εὐθεῖα δωδεκάκις αὐτὸν καταμετρήσει κατὰ τὰ η θ κ λ, καὶ λοιπὰ σημεῖα, ὥστε τὸ α β η θ κ λ μ ν ξ ο π ρ, δωδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἔσται. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ γ α, γ β, ζ α, ζ β, ε α, ε β. καὶ ἐπεὶ ἡ α β, μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς δ ε, τῆς διὰ τοῦ κέντρου, πάντως γε κατὰ τὴν γ′: τοῦ Στοιχειωτοῦ ἡ δ ε, κάθετός ἐστιν ἐπ᾽ αὐτῆς, καὶ κατὰ τὴν δ′: τοῦ α′: τοῦ αὐτοῦ ἡ ὑπὸ α γ δ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ β γ δ, ἡ ὅλη ἄρα α γ β, τῆς ὑπὸ α γ δ, διπλασία ἐστίν, ἀλλὰ τῇ ὑπὸ α γ β, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ γ α β, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ γ α β, διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ α γ δ, ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ α γ δ, διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ γ ζ α, ἴση γὰρ ταῖς δυσὶ γ ζ α, γ α ζ, κατὰ τὴν λ β′: τοῦ αὐτοῦ, αὗται δὲ ἴσαι ἀλλήλαις, διὰ τὸ ἴσας εἶναι καὶ τὰς γ α, γ ζ, πάντως γε ἡ ὑπὸ γ α β, τετραπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ γ ζ α, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ γ ζ α, διὰ τὰ αὐτὰ διπλασία τῆς ὑπὸ ζ ε α, ἄρα ἡ ὑπὸ γ α δ, ὀκταπλάσιός ἐστι τῆς ὑπὸ ζ ε α, προστιθεμένης δὲ τῆς ὑπὸ γ α ζ, διπλασίας οὔσης τῆς ὑπὸ ζ ε α, ἡ ὅλη ζ α β, δεκαπλάσιός ἐστι τῆς ὑπὸ ζ ε α, ἐὰν δὲ προστεθῇ καὶ ἡ ζ α ε, ἴση οὖσα τῇ ζ ε α, πάντως γε ἡ ὑπὸ ε α β, ὅλη γωνία ἑνδεκαπλάσιος γενήσεται τῆς ὑπὸ ζ ε α, ἀλλὰ τῇ ὑπὸ ε α β, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ε β α, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ε β α, ἑνδεκαπλάσιός ἐστι τῆς ὑπὸ ζ ε α. ἀλλ᾽ ἡ μὲν ὑπὸ ζ ε α, βέβηκεν ἐπὶ τῆς α σ, περιφερείας, ἡ δὲ ὑπὸ ε β α, ἐπὶ τῆς α π ε, ἄρα ἡ α π ε, περιφέρεια ἑνδεκαπλάσιός ἐστι τῆς α σ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ β θ ε, ἑνδεκαπλάσιος τῆς β σ, ὥστε ἡ ὅλη περιφέρεια α π ε θ β, τῆς α σ, ἢ σ β, δυοκαιεικοσαπλάσιος ἔσται, τῆς δὲ

Geom. Lib. 5. Fig. 10.



ὅλης

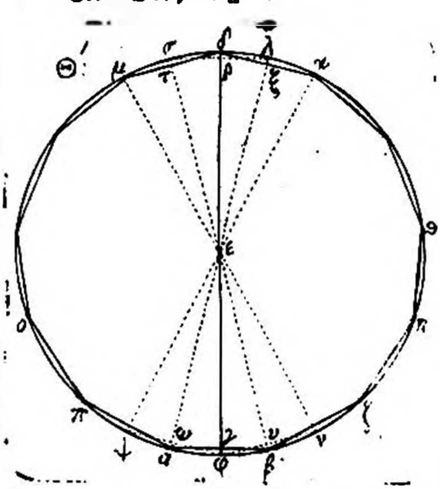
ὅλης α β, ἑνδεκαπλάσιος. ἡ α β, ἄρα ἅπαξ μετροῦσα τὴν α σ β, περιφέρειαν, μετρήσει πάντως τὴν β θ ε π α, ἑνδεκάκις, τὸν δὲ κύκλον α β ε, δωδεκάκις, καὶ τὸ α β η θ κ λ μ ν ξ ο π ρ, δωδεκάγωνον ἰσόπλευρόν ἐστιν. Ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον, δῆλον, ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ α η, β ρ, ἐπεὶ αἱ α β η, β α ρ, περιφέρειαι εἰσιν ἴσαι, ἴσαι δήπουθεν ἔσονται καὶ αἱ α η, β ρ, ὑποτείνουσαι κατὰ τὴν κθ': τοῦ γ': τοῦ αὐτοῦ, ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ὑπὸ α β η, β α ρ, γωνίαι ἴσαι δειχθήσονται, ὡσαύτως δὲ καὶ αἱ λοιπαί. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας δωδεκάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον συνέστη, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Θ':

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τρισκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συστήσασθαι.

Ἔστω ἐπὶ τῆς α β, δοθείσης εὐθείας τρισκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συστήσασθαι. Τμηθήτω ἡ α β, δίχα κατὰ τὸ γ, καὶ ἀνεστάθω κάθετος ἐπ' αὐτῆς ἡ γ δ, καὶ εἰλήφθω ἡ γ ε, διπλασία τῆς α β, δοθείσης, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ ε α, ἤτοι ε β, γραφήτω κύκλος ὁ α β δ, ὃν ἡ α β, τρισκαιδεκάκις, ὡς ὀψόμεθα καταμετρήσει. Ὑποκείσθω γὰρ τὴν τοῦ ἐγγραφησομένου ἐν τῷ α β δ, κύκλῳ τρισκαιδεκαγώνου πλευρὰν ἴσην εἶναι ἑκατέρᾳ τῶν δ κ, δ μ. ἐν παντὶ γὰρ κύκλῳ οἱονδήποτε πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον ἐγγραφῆναι δύναται, καὶ εἰλήφθω ἡ ε ρ, ἴση τῇ ε γ, καὶ ἀπὸ τοῦ β, διὰ τοῦ ε, ἤχθω ἡ β ε σ, τέμνουσα τὴν δ μ, κατὰ τὸ τ, ἀπὸ δὲ τοῦ α, διὰ τοῦ ε, ἤχθω ἡ α ε λ. Αὖθις ἀπὸ μὲν τοῦ μ, διὰ τοῦ ε, ἤχθω ἡ μ ε ν, ἀπὸ δὲ τοῦ κ, ἡ κ ε ψ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ψ φ, φ ν. καὶ ἐπεὶ

Geom. Lib. 5. Fig. 11.



αἱ α ε, β ε, ἴσαι εἰσὶν ταῖς σ ε, λ ε, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ α ε β, τῇ ὑπὸ σ ε λ, κατὰ κορυφὴν γὰρ, πάντως γε καὶ αἱ α β, σ λ, ἴσαι εἰσί, καὶ ἡ μὲν ρ λ, τῇ γ υ, ἡ δὲ ρ σ, τῇ γ α, ἔτι δὲ καὶ ἀλλήλαις, καὶ ἑκάτερον δὲ τῶν α ε β, σ ε λ, τριγώνων ἰσοσκελές ἐστιν, ἄρα αἱ ὑπὸ ε λ σ, ε α β, γωνίαι ἴσαι εἰσί, καὶ αἱ α β, σ λ, παράλληλοι. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσονται καὶ αἱ δ κ, ψ φ, ἴσαι τε καὶ παράλληλοι. Ἐπεὶ δὲ εἰς αὐτὰς πέπτωκεν ἡ γ δ, πάντως γε αἱ ὑπὸ κ δ ε, ε φ ψ, γωνίαι ἴσαι εἰσίν, ἀλλὰ τῇ ὑπὸ ε φ ψ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ε ψ φ, τὸ γὰρ ε φ ψ, τρίγωνον ἰσοσκελές ἐστιν, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ε ψ ω, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ε δ ξ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ

ψ ε ω,

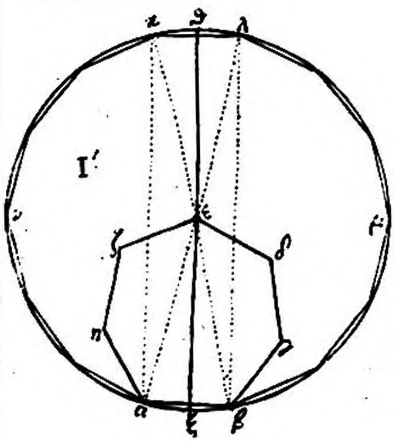
ψεω, ἴση τῇ ὑπὸ δεξ, ὡς κατὰ κορυφὴν, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ψωε, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δξε, τῇ δὲ ὑπὸ ψωε, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ κξε, κατὰ τὴν κθ': τοῦ α': Εὐκλείδου, ἄρα αἱ δξε, κξε, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ, καὶ ἑπομένως ὀρθαὶ, ὥστε κατὰ τὴν γ': τοῦ γ': τοῦ αὐτοῦ ἡ δκ, δίχα τέμνεται, καὶ ἡ δξ, ἴση ἐστὶ τῇ κξ, καὶ ἡ δλ, περιφέρεια τῇ δκ, ἔστι δὲ καὶ ἡ δλ, τῇ αφ, ἡ ὅλη ἄρα δκ, ἴση ἐστὶ τῇ αβ, ὥστε καὶ αἱ αὐτὰς ὑποτείνουσαι αβ, δκ, ἀλλ' ἡ δκ, ὑπετέθη ἴση τῇ τοῦ ἐγγραφομένου τρισκαιδεκαγώνου ἐν τῷ αβδ, κύκλῳ πλευρᾷ, πάντως γε καὶ ἡ αβ, πλευρὰ ἔσται τοῦ αὐτοῦ τρισκαιδεκαγώνου, καὶ τὸν αβδ, κύκλον τρισκαιδεκάκις καταμετρήσει. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Ι':

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τεσσαρεσκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συστήσασθαι.

Κείσθω δὴ ἐπὶ τῆς αβ, δοθείσης εὐθείας τεσσαρισκαιδεκάγωνον κατασκευάσαι ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. καὶ συνεστάσθω ἐπ' αὐτῆς τὸ αβγδεζη, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἑπτάγωνον. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ

Geom. Lib. 5. Fig. 12.



ε, διαστήματι δὲ τῷ εα, ἢ εβ, γραφέτω κύκλος ὁ αβθ, καὶ ἡ αβ, δοθεῖσα εὐθεῖα μετρήσει αὐτὸν τεσσαρισκαιδεκάκις. Τῶν γὰρ αε, βε, εὐθειῶν κατὰ τὸ συνεχὲς ἠγμένων, ὥστε τέμνειν τὸν αβθ, κατὰ τὰ κ, καὶ λ, ἐπεζεύχθωσαν αἱ κα, λβ, εὐθεῖαι, καὶ ἔσται ἡ ὑπὸ αεβ, διπλασία ἑκατέρας τῶν ὑπὸ ακε, βλε, κατὰ τὴν κ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ. Ἐπεὶ δὲ τῆς ὑπὸ αεβ, γωνίας τριπλάσιός ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ εαβ, εβα, ἡ μὲν γὰρ αεβ, βέβηκεν ἐπὶ τῆς αβ, περιφερείας, ἡ δὲ ὑπὸ εαβ, ἐπὶ τῆς εδγβ, καὶ ἡ ὑπὸ εβα, ἐπὶ τῆς εζα, ἑκατέρα δὲ τούτων τριπλάσιός ἐστι τῆς αβ, πάντως γε ἡ μὲν εαβ, ἑξαπλάσιός ἐστι τῆς ελβ, ἡ δὲ εβα, τῆς εκα, ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ λαβ, βέβηκεν ἐπὶ τῆς λμβ, περιφερείας, ἡ δὲ κβα, ἐπὶ τῆς κνα, καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ακβ, βλα, ἐπὶ τῆς αξβ, ἄρα ἥτε λμβ, καὶ κνα, περιφέρεια ἑξαπλάσιός ἐστι τῆς αβ, χωρὶς, συντιθέμεναι δὲ δωδεκαπλάσιον ποιοῦσι τὴν ὅλην. Προστιθεμένης δὲ τῆς κλ, ἴσης τῇ αβ, τρισκαιδεκαπλάσιος γενήσεται ἡ ανκλμβ, περιφέρεια, προστιθεμένης δ' ἔτι καὶ τῆς αβ, τεσσαρισκαιδεκαπλάσιος πάντως, ἔσται ὁ αβθ, κύκλος τῆς αξβ, περιφερείας, ἀλλ' ἡ αβ, δοθεῖσα εὐθεῖα ἅπαξ μετρεῖ τὴν αξβ,

περι-

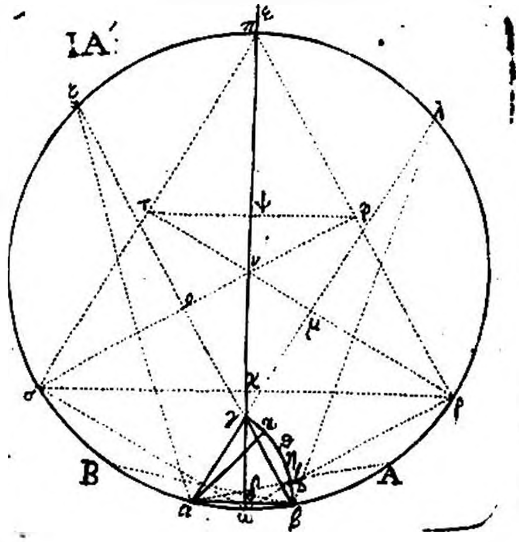
περιφέρειαν, μετρήσει δήπουθεν τὸν αβθ, κύκλον τεσσαρεσκαιδεκάκις. ὅπερ ἔδει τὸ προτεθέν.

Πρότασις ΙΑ':

Ε'πὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συστήσασθαι.

Δοθήτω ἡ αβ, εὐθεῖα, καὶ ζητείσθω ἐπ' αὐτῆς συστῆσαι πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Συνεστάθω δὴ α: ἐπὶ τῆς αβ, δοθείσης εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ αβγ· τῶν δὲ αγ, βγ, αὐτοῦ πλευρῶν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκβαλλομένων ἐπ' ἄπειρον, τμηθήτω ἡ αβ, δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ ἀπὸ τοῦ δ, ἀνεστάθω πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς αβ, ἡ δγε. Εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αβ, γραφήτω τόξον τὸ βγ, καὶ τμηθήτω εἰς μέρη πέντε ἴσα ἀλλήλοις τὰ βζ, ζη, ηθ, θκ, κγ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ακ, ἴση δὲ τῇ βακ, γωνίᾳ γενέσθω ἡ γβλ, καὶ τμηθήσεται ἡ αγ, ἐκβληθεῖσα ὑπὸ τῆς βλ, κατὰ τὸ λ, σημεῖον, τῆς δὲ αλ, δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ μ, συνεστάθω ἐπ' αὐτῆς κάθετος ἡ μν, γενομένης δὲ καὶ τῆς γαξ, γωνίας ἴσης τῇ βακ, καὶ τῆς βξ, δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ ο, συνεστάθω καὶ ἐπ' αὐτῆς κάθετος ἡ ον, ἀπὸ δὲ τοῦ ν, ὡς ἀπὸ κέντρου διαστήματι τῷ να, ἢ νβ, γραφήτω κύκλος ὁ αβπ, ὅστις διελεύσεται πάντως καὶ διὰ τῶν λξ, σημείων, ὡς δῆλόν τῳ καὶ μικρὸν ἐπιστήσαντι τέμνων τὴν μὲν μν, ἐκβαλλομένην κατὰ τὸ ρ, τὴν δὲ νο, κατὰ τὸ σ. Λέγω δὴ τὴν αβ, δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεντεκαιδεκάκις καταμετρεῖν τὸν αβπ, κύκλον. Ε'πιζεύχθωσαν γὰρ αἱ σρ, σπ, πρ, καὶ ἐπὶ μὲν τῆς πρ, πιπτέτω κάθετος ἀπὸ τοῦ ν, ἡ νφ, ἐπὶ δὲ τῆς πσ, ἡ ντ, ἐπιζεύχθω δὲ καὶ ἡ τφ. Δείκνυται. ἐπεὶ τοῦ αβγ, τριγώνου προσεκβλήθη κατὰ τὸ συνεχὲς ἡ αγ, πάντως γε κατὰ τὴν λβ': τοῦ α: τῶν Στοιχείων, ἡ ὑπὸ βγλ, ἐκτὸς γωνία ἴση ἐστὶ ταῖς δυσὶν ἐντὸς γωνίαις καὶ ἀπεναντίον, ταῖς ὑπὸ γαβ, γβα, ὥστε καὶ αἱ λοιπαὶ δύο γβλ, γλβ, ἴσαι εἰσὶ τῇ λοιπῇ κγβ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν.

Geom. Lib. 5. Fig. 13.



ἀλλὰ

ἀλλὰ τῇ α γ β, ἴση ἐστὶν ἡ γ α β, ἰσογώνιον γὰρ τὸ α γ β, τρίγωνον, αἱ ἄρα γ β λ, γ λ β, γωνίαι ὁμοῦ ἴσαι εἰσὶ τῇ γ α β, γέγονε δὲ τῇ β α κ, ἴση ἡ γ β λ, γωνία, ἄρα ἡ γ λ β, ἴση ἐστὶ τῇ γ α κ. Ἐπεὶ δὲ τῆς γ α κ, πενταπλάσιός ἐστιν ἡ γ α β, τῇ δὲ γ α κ, ἴση δέδεικται ἡ γ λ β, πάντως γε ἡ γ α β, πενταπλάσιός ἐστι καὶ τῆς α λ β. ἀλλ' ἡ μὲν γ α β, βέβηκεν ἐπὶ τῆς β ρ λ, περιφερείας, ἡ δὲ α λ β, ἐπὶ τῆς α ω β, ἄρα καὶ ἡ λ ρ β, περιφέρεια πενταπλάσιός ἐστι τῆς α ω β, περιφερείας. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ α σ ξ, περιφέρεια πενταπλάσιος τῆς α ω β, ὥστε αἱ λ ρ β, ξ σ α, ἴσαι εἰσί, κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς α β, ἔσται ἡ α β ρ λ, περιφέρεια ἴση τῇ β α σ ξ. Ἐπεὶ δ' ἑκατέρα τῶν α λ, β ξ, δίχα τέμνεται, κατὰ τὴν γ': δηπουθεν τοῦ γ': Στοιχ: ἴση ἐστὶν ἡ α ρ, τῇ β σ, κοινῆς δ' ἀφαιρουμένης τῆς α β, ἐναπολείπεται ἴση ἡ β ρ, τῇ α σ, ἐστι δὲ ἴση καὶ ἡ α ω, τῇ β ω, ἄρα καὶ ἡ ω ρ, τῇ ω σ, ἴση ἐστί, καὶ ἑπομένως ἡ ω ρ, ὑποτείνουσα τῇ ω σ, ὑποτεινούσῃ, κοινῆς δὲ λαμβανομένης τῆς ω π, ἐπεὶ δὴ καὶ ἡ σ π, ἴση ἐστὶ τῇ ρ π, ὡς δειχθήσεται, πάντως γε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ σ ω π, ἴση ἐστὶ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ρ ω π, δέδεικται δὲ καὶ ἡ σ ω, τῇ ω ρ, ἴση, κοινῆς ἄρα λαμβανομένης τῆς ω χ, δειχθήσεται ἴση καὶ ἡ σ χ, τῇ χ ρ, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ σ χ ω, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ρ χ ω, καὶ ἑπομένως ἡ ω χ, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς ρ σ. Αὖθις ἐπεὶ ἡ α ρ, ἴση δέδεικται τῇ ρ λ, ταύτῃ δὲ ἡ ξ σ, ἡ α ρ, πάντως ἴση ἐστὶ καὶ τῇ ξ σ, κοινῆς δὲ λαμβανομένης καὶ τῆς σ α, ἔσται ἡ σ ω ρ, ἴση τῇ ξ σ α. ἀλλ' ἡ ξ σ α, πενταπλάσιος δέδεικται τῆς α β, ἄρα καὶ ἡ σ ω ρ, πενταπλάσιός ἐστι τῆς αὐτῆς α β, τῇ δὲ σ ω ρ, ἴση ἐστὶν ἥτε σ ξ π, ὡς ὀψόμεθα, καὶ ρ λ π, ἑκατέρα ἄρα τῶν σ ξ π, ρ λ π, πενταπλάσιός ἐστι τῆς δοθείσης α β, ὅλος δὲ ὁ σ ρ λ ξ, κύκλος πεντεκαιδεκαπλάσιος. Ἡ α β, ἄρα πεντεκαιδεκάκις καταμετρεῖ τὸν α β π, κύκλον. ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον. Ὅτι δὲ ἡ σ π, ἴση ἐστὶ τῇ π ρ, δῆλον. Ἐὰν γὰρ ἐκ τῶν ἴσων ω σ π, ω ρ π, ἴσαι ἀφαιρεθῶσιν αἱ ω σ ξ, ω ρ λ, ἐναπολείπονται ἴσαι αἱ ξ π, π λ, εἰσὶ δὲ ἴσαι καὶ αἱ ξ σ, λ ρ, ἡ ὅλη ἄρα σ ξ π, ἴση ἐστὶ τῇ ὅλῃ ρ λ π, ὥστε καὶ αἱ ὑποτείνουσαι αὐτῶν σ π, ρ π, ἴσαι εἰσίν.

Ὅτι δ' ἔτι καὶ ἑκατέρα τῶν σ ξ π, ρ λ π, ἴση ἐστὶ τῇ σ ω ρ, δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ν φ, ἡ διὰ τοῦ κέντρου πέπτωκε πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς ρ π, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, πάντως γε ἡ ὑπὸ ν φ π, γωνία ὀρθή ἐστιν, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ φ ψ π, ὁμοίως ὀρθή, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν π τ, τῇ π φ, καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ τ π ψ, τῇ ὑπὸ φ π ψ, τὰ ἄρα π ψ φ, π φ ν, τρίγωνα ὀρθογώνιά ἐστιν, ἔχουσι δὲ καὶ τὴν ὑπὸ π ν φ, γωνίαν κοινήν, ἄρα καὶ ἡ ψ φ ν, ἴση ἐστὶ ψ π φ, ταύτῃ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ ν ρ φ, ἄρα καὶ ἡ ψ φ ν, ἴση ἐστὶ τῇ ν ρ φ. Ἐπεὶ δὲ τῇ ψ φ ν, ἴση ἐστὶν ἡ φ σ χ, διὰ τὸ ἐναλλάξ, πάντως γε καὶ ἡ φ σ χ, ἴση ἐστὶ τῇ ν ρ φ, τῇ δὲ φ σ χ, ἴση ἐστὶν ἡ ν ρ χ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν ν σ, ν ρ, ἡμιδιαμέτρων, ἡ ἄρα ν ρ φ, ἴση ἐστὶ τῇ ν ρ χ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ν φ ρ, τῇ ν χ ρ, ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, καὶ κοινὴ ἡ ρ ν, εὐθεῖα, κατὰ τὴν κϛ': ἄρα τοῦ α': Εὐκλείδου, ἡ φ ρ, εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ χ ρ, ἀλλ' ἡ μὲν φ ρ,

ἡμι-ἡμίσειά ἐστι τῆς ρ π, ἡ δὲ χ ρ, τῆς ρ σ, ἄρα καὶ ἡ ρ σ, ἴση ἐστὶ τῇ ρ π, ταύτῃ δὲ ἴση δέδεικται καὶ ἡ σ π, τὸ π σ ρ, τρίγωνον ἄρα ἰσόπλευρόν ἐστιν, ὅπερ ἦν τὸ ὑποχεθέν. Ὅτι μὲν οὖν τὸ ἐν τῷ α β π, κύκλῳ γραφόμενον πεντάγωνον κατὰ τὸν ἤδη προεκτεθέντα τρόπον, ἔχει τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ἴσας ἑκάστῃ τῇ δοθείσῃ α β, δέδεικται, ἰσόπλευρον ἄρα. Ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον, εὐχερῶς δειχθήσεται, ἀγομένων τῶν α Α, β Β, ὑποτεινουσῶν, καὶ λοιπῶν ἀνὰ δύο. Εἰ δέ σοι βουλητὸν τριακοντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐπὶ τῆς α β, συστήσασθαι, κέντρῳ μὲν τῷ π, διαστήματι δὲ τῷ π α, ἢ π β, γραφήτω κύκλος, καὶ ἡ α β, μετρήσει αὐτὸν τριακοντάκις.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τῶν ἤδη εἰρημένων ἐπί τε τοῦ παρόντος, καὶ τῶν πρὸ αὐτοῦ δῆλον, ὅτι ἕκαστον πολύγωνον εἴτε περιττόπλευρον, εἴτ' οὖν ἀρτιόπλευρον διπλασιασθῆναι δύναται, ἐὰν ἐπὶ μιᾶς τῶν αὐτοῦ πλευρῶν κάθετος ἀχθῇ, διάμετρος οὖσα τοῦ περιγραφομένου περὶ αὐτὸ κύκλου, καὶ τὸ μὲν κατὰ κορυφὴν αὐτῆς σημεῖον κέντρον ληφθῇ, διάστημα δὲ τὸ μεταξὺ τούτου τε καὶ ἑνὸς τῶν περάτων τῆς πλευρᾶς, ἐφ' ἧς ἡ κάθετος πίπτει, ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος τὸ π α, ἢ π β, διάστημα, καὶ τῷ αὐτῷ διαστήματι κύκλος γραφῇ.

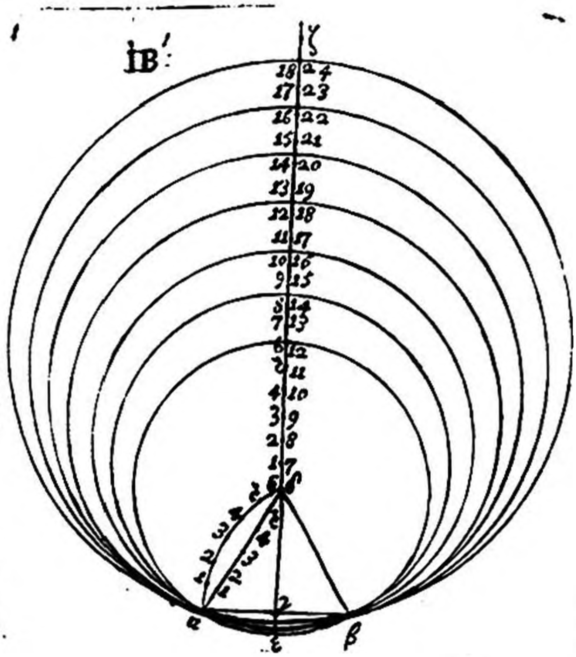
Πρότασις ΙΒ'.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πολύγωνα ἰσόπλευρά τε καὶ ἰσογώνια συστήσασθαι, ἀρχόμενα μὲν ἀπὸ τοῦ ἑξαγώνου, προϊόντα δὲ ἐπ' ἄπειρον κατὰ τὴν τῶν ἀριθμῶν φυσικὴν αὐξανόμενα πρόοδον.

Περὶ μὲν οὖν κατασκευῆς τριγώνου, τετραγώνου, πενταγώνου, καὶ τῶν λοιπῶν πολυγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων, τῶν καὶ Κανονικῶν προσαγορευομένων μέχρι τοῦ πεντεκαιδεκαγώνου, καὶ τῆς ἑκάστου ἔτι τούτων δείξεως, καὶ τὰ πρότερον σεσημειωμένα ἱκανά. περὶ δὲ τῶν ἑξῆς ἰδίως διαλαβεῖν ἀμήχανον, ἐπ' ἄπειρον γὰρ ἡ αὐτῶν χωρεῖ πρόοδος, τὸ δὲ ἐπ' ἄπειρον κατὰ τὸν Ἀριστοτέλην, ἀδιεξίτητον. Διὸ δὴ ἀναγκαῖον ἔφοδόν τινα ἐκθέσθαι, καθ' ἣν δυνατὸν ἐφ' οἱασδήποτε δοθείσης εὐθείας τὸ οἱονδήποτε πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον κατασκευάζεσθαι. Ἐρευνήθησαν δὲ ταύτην οἱ περὶ τὰ τοιαῦτα τὴν πᾶσαν αὐτῶν καταναλώσαντες σπουδὴν ἐκ τῆς τῶν κύκλων σχέσεως, ἣν πρὸς ἀλλήλους ἔτυχον ἔχοντες. ἔστι δὲ τοιαύτη.

Δεδόσθω τοίνυν ἡ α β, εὐθεῖα, καὶ κείσθω ἐπ' αὐτῆς διὰ τὸ εὐχερέστερον οἱονδήποτε πολύγωνον συστήσασθαι ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ἀπὸ τοῦ ἑξαγώνου ἀρχομένης, καὶ ἐπὶ τὸ μεῖζον χωροῦντας ἐπ' ἄπειρον. Τμηθήτω δὴ ἡ δοθεῖσα α β, δίχα κατὰ τὸ γ, καὶ κέντροις μὲν τοῖς α, καὶ β, διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ α β, γραφήτωσαν τόξα τεμνόμενα κατὰ τὸ δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γ δ, ἤχθω κατὰ τὸ συνεχὲς ἀπὸ τοῦ δ, ἐπ' ἄπειρον κατὰ τὸ ζ. Εἶτα διαιρεθήτω τὸ α δ, τόξον εἰς μέρη ἴσα ἀλλήλοις ἐξ, καὶ τῷ ἐκτὸς τούτῳ μέρει εἰλήφθωσαν ἐπὶ τῆς δζ, ἴσα διαστήματα τὰ 1, 2, 3, 4, καὶ λοιπὰ ἐφ' ὅσον βούλει. Τούτων δὲ εἰλημμένων, κέντροις μὲν τοῖς 1, 2, 3, 4, καὶ λοιποῖς σημείοις, διαστήμασι δὲ τοῖς 1α, 2α, 3α, 4α, 5α, καὶ λοιποῖς, γραφήτωσαν κύκλοι οἱ αβ6, αβ8, αβ10, αβ12, καὶ λοιποί. Λέγω τὸν μὲν αβ6, κύκλον καταμετρεῖσθαι ἑξάκις ὑπὸ τῆς αβ, τὸν δὲ αβ8, ἑπτάκις, τὸν

Geom. Lib. 5. Fig. 14.



δὲ αβ10, ὀκτάκις, τὸν δὲ αβ12, ἐννάκις, τὸν δὲ αβ14, δεκάκις, καὶ τῶν λοιπῶν ἕκαστον ἀναλόγως. Δείκνυται, ἡ αδ, τοίνυν εὐθεῖα ἡμιδιάμετρός ἐστι τοῦ αβ6, κύκλου, ὥστε κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιέ: τοῦ δ': τῶν Στοιχ: ἑξάκις αὐτὸν καταμετρεῖ, καὶ τὸ συνιστάμενον ἐν αὐτῷ ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν ἐστι, καὶ ἰσογώνιον. ἀλλὰ τῇ αδ, ἴση ἐστὶν ἡ αβ, ἄρα ἡ αὐτὴ αβ, ἑξάκις καταμετρεῖ τὸν αβ6, κύκλον, καὶ ἑπομένως ἑξάγωνον ἐπ' αὐτῆς ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συσταθήσεται. Ἐπεὶ δὲ ἡ μὲν α7, ἐφεκτός ἐστι τῆς α6, ἡ δὲ α8, ἐπόγδοος, ἡ δὲ α9, ἐπεννάτος, ἡ δὲ α10, ἐπιδέκατος τῆς αὐτῆς, καὶ τῶν λοιπῶν ἑκάστη λόγον τινὰ ἔχει πρὸς αὐτὴν τῶν τοῦ ἐπιμερῶς εἰδῶν, πάντως γε καὶ ὁ μὲν αβ8, κύκλος ἐφεκτός ἐστι τοῦ αβ6, ὁ δὲ αβ10, ἐπόγδοος, ὁ δὲ αβ12, ἐπεννάτος, ὁ δὲ αβ14, ἐπιδέκατος, καὶ τῶν λοιπῶν ἕκαστος πρὸς τὸν αὐτὸν αβ6, λόγον ἔχει, ὃν καὶ ἡ ἡμιδιάμετρος αὐτοῦ πρὸς τὴν ἐκείνου ἡμιδιάμετρον. οἱ γὰρ κύκλοι, ὡς ὀψόμεθα, λόγον ἔχουσιν, ὃν καὶ αἱ διάμετροι αὐτῶν καὶ ἡμιδιάμετροι. Τούτων οὖν οὕτως ἐχόντων, δῆλον, ὅτι ἡ α6, ἡμιδιάμ: τοῦ αβ6, κύκλου ἴση οὖσα τῇ αβ, ἑξάκις μὲν καταμετρεῖ τὸν αβ6, κύκλον, ἑπτάκις δὲ τὸν αβ8, καθ' ὃν ἔχει λόγον ὁ αὐτὸς αβ, κύκλος πρὸς τὸν αβ6, τὸν δὲ αβ10, ὀκτά-

ὀκτάκις, τὴν δὲ αβ 12, ἐννεάκις, τὴν δὲ αβ 14, δεκάκις, καὶ τὰς λοιπὰς κατὰ ἀναλογίαν ἀριθμητικὴν ἐφεξῆς. ὥστε ἐπειδὰν σοι βυλητὸν τὸ τυχὸν συστήσασθαι πολύγωνον ἐπὶ τῆς αβ, δὸς εἰπεῖν δωδεκάγωνον, σύστησον ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον, οἷον τὸ αβδ, εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δα, ἢ δβ, γραφέτω τόξον τὸ αεβ, καὶ διαιρεθήτω εἰς μέρη ἕξ, ὥσπερ καὶ τὸ αδ, λαβὼν δὲ τούτου τὸ ἕκτον μέρος, ἄφελε ἀπὸ τῆς δζ, μέρη ἓξ ἴσα τῷ ληφθέντι, ἀρχόμενος ἀπὸ τοῦ δ, ἀπὸ δὲ τοῦ ϛ': μέρους τῆς αζ, ὡς ἀπὸ κέντρου διαστήματι τῷ 6α, ἢ 6β, γράψον κύκλον λευκὸν, καὶ τῷ αβ, διαστήματι δίελε τὸν αὐτὸν κύκλον. Εἰ δέ σοι βυλητὸν τρισκαιδεκάγωνον, ἄφελε πρὸς τοῖς ἓξ καὶ μέρος ἕβδομον ἀπὸ τῆς δζ, καὶ τὰ λοιπὰ ποιῶν, ὡς πρότερον, συστήσεις πάντως ἐπὶ τῆς αζ, τρισκαιδεκάγωνον. Δεῖ δὲ τὴν κατασκευὴν γίνεσθαι μετὰ πάσης ἀκριβείας τε καὶ προσοχῆς. μικρὰ γὰρ παραδρομὴ τῆς χειρὸς, ἢ τοῦ ὀργάνου, μεγίστης ἀπάτης πρόξενος γίνεται.

Ὅτι μὲν οὖν τὸ οἱονδήποτε πολύγωνον κατὰ τὴν ἐκτεθεῖσαν συνιστάμενον ἔφοδον ἰσόπλευρόν ἐστι, φανερὸν, ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον, οὐ χαλεπὸν κατὰ τὰ πρότερον εἰρημένα ἀποδεῖξαι. Ἀγομένων τῶν ὑποτεινουσῶν ἀνὰ δύο, ὡς ἐπὶ τοῦ δωδεκαγώνου καὶ λοιπῶν, γέγονε. Δυνατὸν δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἄρχεσθαι τῆς τῶν πολυγώνων κατασκευῆς καὶ ἀπ' ἄλλου τοῦ τυχόντος. Δεῖ δὲ τὸ τόξον εἰς τρία διαιρεῖν, ἢ εἰς ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν, ὃν παρίστησι τὸ ἐξ οὗ ἀρχόμεθα, ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος. διῄρηται γὰρ εἰς ἕξ, ὅτι τὸ ἑξάγωνον εἰς κατασκευὴν πρῶτον ὑπετέθη.

Τέλος τοῦ Πέμπτου τῆς Γεωμετρίας Βιβλίου.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

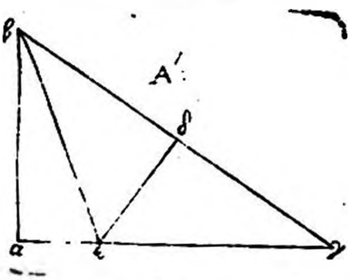
ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Πρότασις Α':

Μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν δοθείσης πλευρᾶς ὀρθογωνίου τριγώνου, καὶ τῆς ἐκ τῶν λοιπῶν δύο συνθέτου τὰς λοιπὰς δύο διακρίνειν πλευράς.

Ἔστω οὖν ἡ αβ, μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν τοῦ τριγώνου πλευρῶν, ἡ δὲ αγ, ἡ ἐκ τῶν λοιπῶν δύο αὐτοῦ πλευρῶν σύνθετος, καὶ ζητείσθω διαιρεθῆναι ἡ αγ, εἰς δύο, ὥστε ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ συσταθῆναι τὸ τρίγωνον. Κείσθω δὴ ἡ αβ, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς αγ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ βγ. Ταύτης δὲ δίχα διαιρεθείσης κατὰ τὸ δ, συνεστάθω κάθετος ἐπ' αὐτῆς ἡ δε, καὶ αἱ αε, εγ, ἔσονται αἱ λοιπαὶ δύο ζητούμεναι τοῦ τριγώνου πλευραί. Ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ βε, ἴση ἔσται τῇ εγ· ἐπεὶ γὰρ ἡ βδ, ἴση ἐστὶ τῇ δγ, καὶ κοινὴ ἡ δε, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βδε, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ γδε, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, πάντως γε καὶ ἡ βε, ἴση ἐστὶ τῇ εγ, κατὰ τὴν δ': τοῦ α: τοῦ Ἐπιχειρωτοῦ. Δοθείσης ἄρα τῆς αβ, τοῦ βαε, ζητουμένου τριγώνου, καὶ τῆς αγ, συνθέτου ἐκ τῶν λοιπῶν δύο αὐτοῦ πλευρῶν, εὕρηνται αὐτοῦ αἱ δύο πλευραὶ αε, εβ, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Geom. Lib. 6. Fig. 1.



Πρότασις Β':

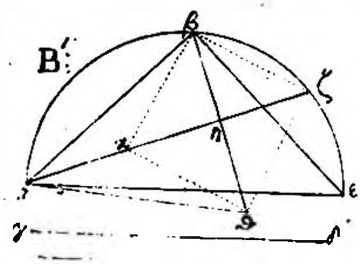
Ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου δοθείσης, καὶ τῆς ἐκ τῶν λοιπῶν δύο αὐτοῦ πλευρῶν συγκειμένης, τὰς αὐτὰς διακρίνειν πλευράς, καὶ τὸ τρίγωνον συστήσασθαι.

Κείσθω ἡ αβ, εὐθεῖα ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου, ἡ δὲ γδ, συγκειμένη ἐκ τῶν λοιπῶν δύο αὐτοῦ πλευρῶν, καὶ ζητείσθωσαν αἱ λοιπαὶ δύο τοῦ τριγώνου πλευραί. Συνεστάθω κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, πρὸς τὸ β, σημεῖον ἡ βε, καὶ

ἔστω

ἴσω ἴση τῇ α β, ἐπιζεύχθω δὲ ἡ α ε, καὶ γραφήτω ἡμικύκλιον περὶ αὐτὴν τὸ α β ε, ἐν ᾧ ἐφαρμοσθήτω ἀπὸ τοῦ α, σημείου ἡ α ζ, ἴση οὖσα τῇ δοθείσῃ γ δ, καὶ πιπτέτω ἐπ᾽ αὐτῆς κάθετος ἡ β η, ἐκτεινομένη κατὰ τὸ θ, ὥστε τὴν η θ, ἴσην εἶναι τῇ η β. Ἐπιζεύχθω δ᾽ ἔτι καὶ ἡ α θ. Λέγω δὴ τὸ α η θ, τρίγωνον εἶναι τὸ ζητούμενον, καὶ τὴν η θ, ἴσην τῇ η ζ. Ληφθήτω γὰρ ἡ κ η, ἴση τῇ η β, ἢ η θ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ β κ, κ θ, θ ζ, ζ β, καὶ ἐπεὶ ἡ β η, ἴση εἴληπται τῇ θ η, καὶ κοινὴ ἡ η κ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ β η κ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ θ η κ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ἄρα καὶ βάσις ἡ β κ, βάσει τῇ θ κ, ἴση ἐστὶ κατὰ τὴν δ΄: τοῦ α΄: Εὐκλείδου, καὶ ἡ ὑπὸ β κ η, γωνία τῇ ὑπὸ θ κ η. Διὰ τὰ αὐτὰ τοίνυν καὶ ἡ β ζ, εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ θ ζ, ὥστε δύο αἱ κ β, β ζ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς κ θ, ζ θ, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, κοινὴ δὲ ἡ κ ζ, βάσις, ἄρα κατὰ τὴν η΄: τοῦ αὐτοῦ ἡ ὑπὸ κ β ζ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ κ θ ζ, καὶ ὅλον τὸ κ β ζ, τρίγωνον ἴσον τῷ κ θ ζ, τριγώνῳ, καὶ ἑπομένως τὸ β κ θ ζ, χωρίον παραλληλόγραμμόν ἐστι, καὶ αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ πλευραὶ καὶ γωνίαι ἴσαι κατὰ τὴν λδ΄: τοῦ αὐτοῦ, ὥστε αἱ β ζ, κ θ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἔστι δὲ καὶ ἡ β η, τῇ θ η, ἴση ὡς δέδεικται, δύο δὴ αἱ ζ β, β η, δυσὶ ταῖς κ θ, θ η, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ζ β η, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ κ θ η, κατὰ τὴν κθ΄: τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ βάσις ἡ ζ η, βάσει τῇ κ η, ἴση ἐστὶν, εἴληπται δὲ καὶ ἡ κ η, ἴση τῇ θ η, πάντως γε καὶ ἡ ζ η, ἴση ἐστὶ τῇ η θ. ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Geom. Lib. 6. Fig. 2.



Πρότασις Γ΄:

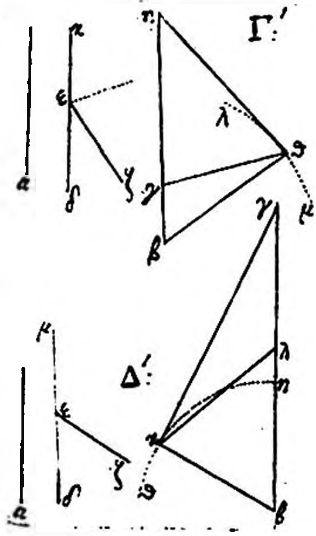
Βάσεως τριγώνου δοθείσης, καὶ τῆς τῶν λοιπῶν δύο αὐτοῦ πλευρῶν διαφορᾶς, ἔτι δὲ καὶ τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνίας, τὰς λοιπὰς τοῦ τριγώνου πλευρὰς εὑρεῖν, καὶ τὸ τρίγωνον συστήσασθαι.

Δεδόσθω βάσις μὲν ἡ α, εὐθεῖα, διαφορὰ δὲ τῶν πλευρῶν τοῦ ζητουμένου τριγώνου ἡ β γ, καὶ κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνία, ἡ ὑπὸ δ ε ζ, γωνία, καὶ ζητηθήτωσαν αἱ τέως πλευραί. Ἐκτανθήτω ἡ β γ, ἀορίστως, καὶ πρὸς τῷ γ, σημείῳ συνιστάσθω πρὸς αὐτῇ ἡ ὑπὸ η γ θ, γωνία ἴση τῇ ἡμισείᾳ τοῦ παραπληρώματος τῆς ὑπὸ δ ε ζ, ἤτοι τῆς ὑπὸ ζ ε κ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ ἴσῳ τῇ α, τόξον γραφήτω τὸ λ θ μ, τέμνον τὴν γ θ, κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ θ β. εἶτα γενέσθω ἡ ὑπὸ γ θ η, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ θ γ η, καὶ συσταθήσεται τὸ η β θ, τρίγωνον, καὶ τοῦτο ἔσται τὸ ζητούμενον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ γ θ η, γωνία ἴση γέγονε τῇ ὑπὸ θ γ η, αὕτη δὲ ἴση τῇ ἡμισείᾳ τῆς ὑπὸ ζ ε κ, πάντως γε αἱ ὑπὸ θ γ η, γ θ η, ὁμοῦ ἴσαι

εἰσὶ

εἰσὶ τῇ ὑπὸ ζεκ, καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ γηθ, κατὰ κορυφὴν τῇ λοιπῇ ὑπὸ δεζ. Ὥστε τὸ βηθ, τρίγωνον ἔχει κατὰ κορυφὴν μὲν γωνίαν τὴν δοθεῖσαν, εἴληπται δὲ καὶ ἡ βθ, αὐτοῦ βάσις ἴση τῇ δοθείσῃ α, ἔχει δ' ἔτι καὶ πλευρὰς τὰς βη, θη, ὧν διαφορὰ ἡ δοθεῖσα βγ, αἱ γὰρ ηγ, ηθ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν ε': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ. Βάσεως ἄρα τριγώνου δοθείσης καὶ τῆς τῶν λοιπῶν δύο αὐτοῦ πλευρῶν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 6. Fig. 3.



Πρότασις Δ′:

Βάσεως τριγώνου δοθείσης, καὶ τῆς ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ συγκειμένης, ἔτι δὲ καὶ τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνίας τὸ τρίγωνον συστήσασθαι.

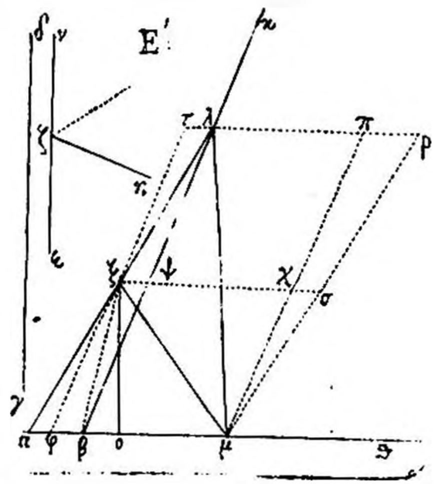
Δοθήτω βάσις μὲν τριγώνου τινὸς ἡ α, εὐθεῖα, ἡ δ' ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ συγκειμένη ἔστω ἡ βγ, καὶ κατὰ κορυφὴν γωνία τοῦ αὐτοῦ ἡ ὑπὸ δεζ, καὶ ζητηθήτω τὸ τρίγωνον. Κείσθω μὲν δὴ τοῦ β, διαστήματι δὲ ἴσῳ τῇ α, γραφήτω τόξον τὸ ηθ, καὶ πρὸς τοῦ γ, σημείῳ γενέσθω ἡ ὑπὸ βγκ, γωνία ἴση τῇ ἡμισείᾳ τῆς δοθείσης, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ βκ. Εἶτα γενέσθω ἡ ὑπὸ λκγ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ λγκ, καὶ τὸ λβκ, τρίγωνον ἔσται τὸ ζητούμενον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν ὑπὸ λκγ, γωνία ἴση γέγονε τῇ ὑπὸ λγκ, αὕτη δὲ τῇ ἡμισείᾳ τῆς δοθείσης δεζ, πάντως γε αἱ δύο ὁμοῦ λκγ, λγκ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ τῇ ὑπὸ δεζ, δοθείσῃ, ἡ δὲ λοιπὴ γλκ, τῇ λοιπῇ ζεμ. αἱ γὰρ δεζ, καὶ ζεμ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς, ὥσπερ καὶ αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γλκ, κατὰ τὴν ιγ': καὶ λβ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ. Ἐπεὶ δὲ ἡ γλκ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζεμ, πάντως γε κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ιγ': καὶ ἡ βλκ, ἴση ἐστὶ ὑπὸ δεζ, δοθείσῃ, ὥστε τὸ βλκ, τρίγωνον ἔχει κατὰ κορυφὴν μὲν γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ, εἴληπται δὲ καὶ βάσις αὐτοῦ ἡ βκ, ἴση τῇ α, δοθείσῃ, ἔχει δ' ἔτι καὶ πλευρὰς τὰς βλ, λκ, ἴσας τῇ βγ, δοθείσῃ. ἡ γὰρ λκ, ἴση ἐστὶ τῇ λγ, κατὰ τὴν ε': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ. Βάσεως ἄρα τριγώνου δοθείσης, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρό-

Πρότασις Ε′.

Διαφορᾶς δοθείσης τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τινὸς τριγώνου, ἐφ' ἧς κάθετος πίπτει ἀπὸ τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνίας, καὶ τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν, ἔτι δὲ καὶ τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνίας, τὸ τρίγωνον συστήσασθαι.

Δοθείσθω διαφορὰ μὲν τῶν τῆς βάσεως τοῦ ζητουμένου τριγώνου τμημάτων ἡ α β, συγκειμένη δὲ ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἡ γ δ, καὶ κατὰ κορυφὴν γωνία ἡ ὑπὸ ε ζ η, καὶ ζητηθήτω τὸ τρίγωνον. Ἤχθω δὴ ἡ α β, κατὰ τὸ συνεχὲς ἀορίστως ὡς ἡ α θ, καὶ πρὸς τῷ β, σημείῳ συνεστάθω ἡ ὑπὸ θ β κ, γωνία ἴση τῇ ἡμισείᾳ τοῦ παραπληρώματος τῆς δοθείσης ε ζ η, ἤτοι τῆς ὑπὸ η ζ ν. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ γ δ, τμηθήτω ἡ β κ, κατὰ τὸ λ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ α λ, πρὸς δὲ τῷ λ, σημείῳ γενέσθω ἡ ὑπὸ α λ μ, ἴση τῇ ἡμισείᾳ τῆς δοθείσης ε ζ η, καὶ ταύτῃ ἴση ἡ ὑπὸ λ μ ξ, καὶ τὸ α μ ξ, τρίγωνον ἔσται τὸ ζητούμενον. Ὅτι μὲν γὰρ ἡ κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνία ἡ ὑπὸ α ξ μ, ἴση ἐστὶ τῇ δοθείσῃ ε ζ η, δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ξ λ μ, ξ μ λ, γωνιῶν ἴση γέγονε τῇ ἡμισείᾳ τῆς δοθείσης ε ζ η, πάντως γε ἡ λοιπὴ λ ξ μ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ η ζ ν, παραπλήρωμα γάρ ἐστιν ἑκατέρα πρὸς δύο ὀρθάς.



Geom. Lib. 6. Fig. 4.

Ὅτι δὲ καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ α ξ, ξ μ, ἴσαι εἰσὶ συναμφότεραι τῇ δοθείσῃ γ δ, καὶ τοῦτο δῆλον, ἡ γὰρ ξ μ, ἴση ἐστὶ τῇ ξ λ, κατὰ τὴν ς: τοῦ α: τῶν Στοιχείων. κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς α ξ, αἱ δύο πάντως γε α ξ, ξ μ, ἴσαι εἰσὶ τῇ α ξ λ, αὕτη δὲ ἴση εἴληπται τῇ γ δ, δοθείσῃ, ἄρα καὶ αἱ α ξ, ξ μ, ἴσαι εἰσὶ τῇ γ δ. Λείπεται δὲ δεῖξαι, ὅτι καὶ ἡ α β, διαφορά ἐστι τῶν μερῶν τῆς αὐτοῦ α μ, βάσεως. εἰς ἐμπέδωσιν δὲ τούτου πιπτέτω ἀπὸ τοῦ ξ, κάθετος ἐπὶ τῆς α μ, ἡ ξ ο, καὶ τῇ μὲν β λ, ἤχθω παράλληλος ἀπὸ τοῦ μ, σημείου ἡ μ π, τῇ δὲ α λ, ἡ μ ρ, καὶ τῇ α μ, ἡ λ π ρ, καὶ ξ σ. Δείκνυται. κατὰ μὲν οὖν τὴν λ δ′: τοῦ α: τῶν Στοιχείων, ἡ μὲν β λ, ἴση ἐστὶ τῇ μ π, ἡ δὲ α λ, τῇ μ ρ, ἔτι δὲ καὶ ἡ λ π, τῇ β μ, καὶ ἡ λ ρ, τῇ α μ. Ἀφαιρουμένων δὲ τῶν ἴσων λ π, β μ, ἐναπολείπονται ἴσαι αἱ α β, π ρ, καὶ κατὰ τὴν η: τοῦ αὐτοῦ, ἡ ὑπὸ α λ β, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ρ μ π, ἀχθείσης δὲ διὰ τοῦ ξ, καὶ τῆς τ ξ φ, εὐθείας παραλλήλως τῇ β λ, διαχθήσεται διὰ τὰ αὐτὰ ἡ ὑπὸ β ξ φ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ σ μ χ, ἀλλὰ τῇ β ξ φ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ξ β ψ, κατὰ

τὴν

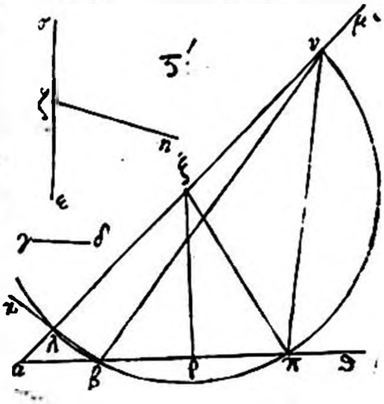
τὴν κθ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ ἡ ξβψ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ σμχ, αὕτη δὲ ἴση δέδεικται τῇ ὑπὸ ξλψ, ἤτοι τῇ ὑπὸ αλβ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ξβψ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ξλψ. ὥστε κατὰ τὴν ε': τοῦ αὐτοῦ, αἱ ξβ, ξλ, εὐθεῖαι ἴσαι εἰσί, δέδεικται δὲ τῇ ξλ, ἴση καὶ ἡ ξμ, αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι βξ, ξλ, ξμ, ἴσαι εἰσίν. ὥστε ὁ κέντρῳ μὲν τῷ ξ, διαστήματι δὲ τῷ ξλ, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν μ, καὶ β, σημείων. Ἐπεὶ δὲ ἐπὶ τῆς βμ, πέπτωκε κάθετος ἡ ξο, πάντως γε κατὰ τὴν γ': τοῦ γ': τοῦ αὐτοῦ, ἡ βμ, δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς ξο, ὥστε ἡ βο, ἴση ἐστὶ τῇ ομ, καὶ ἑπομένως διαφορὰ τῶν αο, ομ, τμημάτων τῆς αμ, βάσεως τοῦ αμξ, τριγώνου ἡ αβ, ἐστὶν εὐθεῖα. ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρότασις ϛ'.

Διαφορᾶς δοθείσης τῶν τε τῆς βάσεως τμημάτων καὶ πλευρῶν τινος τριγώνου, ἔτι δὲ καὶ τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνίας τὸ τρίγωνον συστήσασθαι.

Δοθήτω τῶν μὲν τῆς βάσεως τμημάτων τοῦ ζητουμένου τριγώνου διαφορὰ ἡ αβ, εὐθεῖα, τῶν δὲ πλευρῶν αὐτοῦ ἡ γδ, κατὰ κορυφὴν δὲ γωνία ἡ ὑπὸ εζη, καὶ ζητείσθω τὸ τρίγωνον. Ἀχθήτω δὴ ἡ αβ, κατὰ τὸ θ, ἀορίστως, καὶ πρὸς τῷ β, σημείῳ συνεστάσθω γωνία ἡ ὑπὸ αβκ, ἴση τῇ ἡμισείᾳ τῆς δοθείσης εζη. εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ γδ, τμηθήτω ἡ βκ, κατὰ τὸ λ, σημεῖον, καὶ διὰ τῶν α, καὶ λ, ἤχθω ἡ αλμ, καὶ ἔσται ἡ αλ, ἴση τῇ γδ. πρὸς δὲ τῷ β, σημείῳ συνεστάσθω κάθετος ἐπὶ τῆς βκ, ἡ βν, τέμνουσα τὴν αμ, κατὰ τὸ ν, καὶ τμηθήτω ἡ λν, δίχα κατὰ τὸ ξ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ ξ, διαστήματι δὲ τῷ ξλ, ἢ ξν, γραφείτω κύκλος ὁ λβν, τέμνων τὴν αβθ, κατὰ τὸ π, ὅστις διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ β, διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ λβν, γωνίαν. εἶτα

Geom. Lib. 6. Fig. 9.



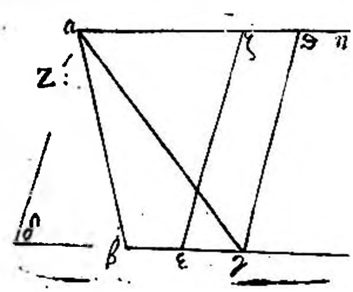
ἐπεζεύχθωσαν αἱ νπ, ξπ, εὐθεῖαι. ἀπὸ δὲ τοῦ ξ, πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς βπ, ἡ ξρ, καὶ τὸ αξπ, τρίγωνον ἔσται τὸ ζητούμενον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ξρ, πέπτωκε κάθετος ἐπὶ τῆς απ, βάσεως τοῦ αὐτοῦ τριγώνου, τεμεῖ δήπουθεν ταύτην μὲν εἰς δύο ἄνισα τὰ αρ, ρπ, τὴν δὲ βπ, εἰς δύο ἴσα τὰ βρ, ρπ, κατὰ τὴν γ'. τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ. ὥστε διαφορὰ τῶν αρ, ρπ, ἡ δοθεῖσά ἐστιν αβ. Ἐπεὶ δὲ αὖθις καὶ αἱ ξλ, ξπ, ἴσαι εἰσὶν ὡς ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν περιφέρειαν, πάντως γε διαφορὰ τῶν πλευρῶν αξ, ξπ, ἐστὶν ἡ αλ, ἴση οὖσα τῇ δοθείσῃ γδ. τὸ αξπ, ἄρα τρίγωνον ἔχει τήν τε τῶν τμημάτων τῆς αὐτοῦ βάσεως δοθεῖσαν δια-

φορὰν,

φορᾶς, καὶ τὴν τῶν πλευρῶν. Ὅτι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ α ξ π, κατὰ κορυφὴν αὐτῆς γωνία ἴση ἐστὶ τῇ δοθείσῃ ὑπὸ ε ζ η, δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ α β λ, γωνία ἴση γέγονε τῇ ἡμισείᾳ τῆς δοθείσης ε ζ η, ἡ δὲ λ β ν, ὀρθή, πάντως γε ἡ ὑπὸ ν β π, ἴση ἐστὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς ὑπὸ η ζ σ, παραπληρώματος τῆς ὑπὸ ε ζ η, πρὸς δύο ὀρθάς. ἐὰν γὰρ ἑκατέρα τῶν ε ζ η, η ζ σ, δίχα διαιρεθῇ τὸ τῆς μιᾶς ἥμισυ, παραπλήρωμα ἔσαι τοῦ ἡμίσεως τῆς ἑτέρας πρὸς μίαν ὀρθήν. Ἐπεὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ α β λ, ν β π, ἴσαι εἰσὶ μιᾷ ὀρθῇ. αἱ τρεῖς γὰρ α β λ, λ β ν, ν β π, ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς. Ἀφαιρουμένης οὖν τῆς λ β ν, ὀρθῆς, ἐναπολείπονται αἱ λοιπαὶ δύο α β λ, ν β π, μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι. ἀλλ' ἡ ὑπὸ α β λ, ἴση γέγονε τῇ ἡμισείᾳ τῆς δοθείσης ὑπὸ ε ζ η, ἡ λοιπὴ ἄρα ὑπὸ ν β π, παραπλήρωμά ἐστι τῆς αὐτῆς α β λ, πρὸς μιαν ὀρθήν, καὶ ἑπομένως ἴση τῇ ἡμισείᾳ τῆς ὑπὸ η ζ σ, ἔστι δὲ καὶ ἡ α ν, εὐθεῖα ἴση τῇ συγκειμένῃ ἐκ τῶν πλευρῶν τοῦ α ξ π, τριγώνου, ἄρα καὶ τὴν ἀνωτέρω ἑκατέρα τῶν ξ ν π, ξ π ν, ἴση ἐστὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς δοθείσης ε ζ η. ὥστε καὶ ἡ ν ξ π, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ η ζ σ. παραπλήρωμα γάρ ἐστιν ἑκατέρα πρὸς δύο ὀρθάς, ἡ μὲν τῶν ὑπὸ ξ ν π, ξ π ν, ἡ δὲ τῆς ὑπὸ ε ζ η. Ἐπεὶ δὲ πάλιν αἱ ὑπὸ ν ξ π, α ξ π, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν ιγ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὥσπερ καὶ αἱ ὑπὸ ε ζ η, η ζ σ, ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ μὲν τῶν ν ξ π, α ξ π, ἡ ν ξ π, ἀπὸ δὲ τῶν ε ζ η, η ζ σ, ἡ ὑπὸ ζ η σ, πάντως γε καὶ αἱ ἐναπολειπόμεναι α ξ π, ε ζ η, ἴσαι ἔσονται, ἀλλ' ἡ ε ζ η, ἐστὶν ἡ δοθεῖσα. τὸ ἄρα α ξ π, τρίγωνον ἔχει καὶ γωνίαν κατὰ κορυφὴν ἴσην τῇ δοθείσῃ. Διαφορᾶς ἄρα δοθείσης τῶν τε τῆς βάσεως τμημάτων, καὶ τὰ ἑξῆς.

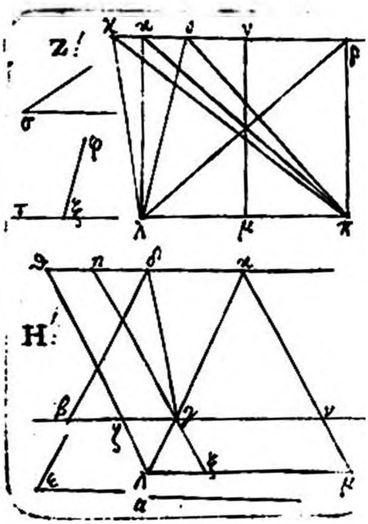
Πρότασις Ζ'.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ, καὶ ἀνάπαλιν. *Geom. Lib. 6. Fig. 6.*



Ἔστω ἀ: τρίγωνον τὸ α β γ, γωνία δὲ ἡ δ, καὶ ζητείσθω παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ δοθέντι α β γ, τριγώνῳ γωνίαν ἴσην ἔχον τῇ δ, δοθείσῃ. Τμηθήτω δὲ ἡ β γ, βάσις τοῦ τριγώνου δίχα κατὰ τὸ ε, πρὸς ᾧ συνεστάσθω γωνία ἴση τῇ δ, ἡ ὑπὸ γ ε ζ, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ α, σημείου παράλληλος ἤχθω τῇ β γ, ἡ α η, ἀπὸ δὲ τοῦ γ, ἡ γ θ, παράλληλος καὶ αὐτὴ τῇ ε ζ, καὶ τὸ ε θ, παραλληλόγραμμον, ἔσαι τὸ ζητούμενον. Ὅτι μὲν γὰρ τὸ ε θ, παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ α β γ, δοθέντι τριγώνῳ δῆλον διὰ τῆς ι α: τοῦ γ': τοῦ παρόντος. ἔχει δ' ἔτι καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ γ ε ζ, ἴσην τῇ δ, δοθείσῃ. ἄρα τῷ δοθέντι α β γ, τριγώνῳ συνέστη ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ε γ θ ζ, ὅπερ ἦν τὸ α΄: Ἔστω δὲ β΄: τὸ κ λ μ ν, παραλληλόγραμμον, καὶ γωνία ἡ ξ. καὶ ζητείσθω τρίγωνον ἴσον τῷ κ λ μ ν, παραλληλογράμμῳ ἔχον τὴν ξ, δοθεῖσαν γωνίαν. Ἐξαχθήτωσαν δὴ ἐπὶ τὸ συνεχὲς αἱ λ μ, κ ν, εὐθεῖαι, καὶ συνεστάθω πρὸς τῷ λ, σημείῳ γωνία ἴση τῇ ξ, ἡ ὑπὸ μ λ ο. εἶτα εἰλήφθω ἡ μ π, ἴση τῇ λ μ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ο π, καὶ τὸ ο λ π, τρίγωνον ἔσται τὸ ζητούμενον. ἔχει γὰρ γωνίαν τὴν ὑπὸ ο λ π, ἴσην τῇ δοθείσῃ ξ, καὶ ἴσον ἐστὶ τῷ κ λ μ ν, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ια΄: εἰ δὲ ἡ γωνία ὀξυτέρα εἴη, ὡς ἡ σ, συσταθήσεται τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ ρ λ π, τρίγωνον ἴσον ὂν καὶ αὐτὸ τῷ κ λ μ ν, δοθέντι παραλληλογράμμῳ, ἀμβλυτέρας δὲ οὔσης τῆς γωνίας, ὡς ἡ τ ξ φ, συσταθήσεται τὸ λ χ π, ἴσης δὲ τῇ κ λ μ, τὸ κ λ π. Τῷ δοθέντι ἄρα τριγώνῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 6. Fig. 7.



Πρότασις Η΄:

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

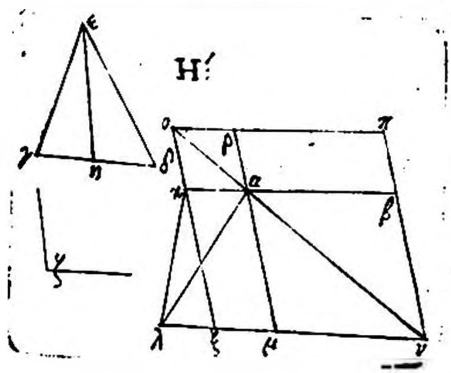
Ἔστω δὴ εὐθεῖα μὲν ἡ α, τρίγωνον δὲ τὸ β γ δ, καὶ γωνία ἡ ε. καὶ ζητείσθω παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ β γ δ, δοθέντι τριγώνῳ, ἔχον τὴν μίαν τῶν αὐτοῦ πλευρῶν ἴσην τῇ δοθείσῃ α, εὐθείᾳ, καὶ γωνίαν ὁμοίως ἴσην τῇ ε, δοθείσῃ. Συνεστάθω οὖν κατὰ τὴν ἀνωτέρω τὸ ζ γ η θ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ β γ δ, τριγώνῳ, ἔχον τὴν ὑπὸ ζ γ η, γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ ε, καὶ ἐξαχθήτω ἡ θ η, ἐπὶ τὸ συνεχὲς ἀορίστως. Εἶτα εἰλήφθω ἡ η κ, ἴση τῇ δοθείσῃ α, εὐθείᾳ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ, διὰ τοῦ γ, ἤχθω ἡ κ γ λ, τέμνουσα τὴν θ ζ, ἐκβαλλομένην ἐπὶ τὸ λ, καὶ ἀπὸ τοῦ λ, ἤχθω παράλληλος τῇ β γ, ἡ λ μ, ἀπὸ δὲ τοῦ κ, παράλληλος τῇ θ λ, ἡ κ μ, καὶ ἐξαχθήτωσαν αἱ ζ γ, η γ, ἐπὶ τὸ συνεχὲς ἐπὶ τὰ ν, καὶ ξ, σημεῖα. καὶ τὸ γ ξ μ ν, παραλληλόγραμμον, ἔσται τὸ ζητούμενον. Ὅτι μὲν γὰρ τὸ θ λ μ κ, παραλληλόγραμμόν ἐστι, δῆλον ἐκ τῆς κατασκευῆς. κατὰ δὲ τὴν μγ΄: τοῦ α΄: Εὐκλείδου, τὸ θ γ, ἴσον ἐστὶ τῷ γ μ, ἀλλὰ τὸ θ γ, γέγονεν ἴσον τῷ β γ δ, δοθέντι τριγώνῳ, ἄρα καὶ τὸ γ μ, ἴσον ἐστὶ τῷ β γ δ, τριγώνῳ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζ γ η, γωνία ἴση τῇ κατὰ κορυφὴν ξ γ ν, ἡ δὲ ὑπὸ ζ γ η, γέγονεν ἴση τῇ δοθείσῃ ε, ἀλλὰ καὶ ἡ γ ν,

εὐθεῖα

εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ η κ, αὕτη δὲ εἴληπται ἴση τῇ δοθείσῃ α. τὸ γ ξ μ ν, ἄρα παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ β γ δ, δοθέντι τριγώνῳ, ἔχον πλευρὰν ἴσην τῇ δοθείσῃ α, καὶ γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ ε.

Ἄλλως. Ἔστω αὖθις ἡ α β, δοθεῖσα εὐθεῖα, καὶ τρίγωνον μὲν τὸ γ δ ε, γωνία δὲ ἡ ζ, καὶ ζητηθήτω ὡς πρότερον παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ δοθέντι γ δ ε, τριγώνῳ. Διαιρεθήτω δὴ ἡ γ δ, βάσις τοῦ τριγώνου δίχα κατὰ τὸ η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ε η, ἐξαχθείσης δὲ τῆς α β, κατὰ τὸ συνεχὲς ἀπὸ τοῦ α, σημείου, εἰλήφθω ἡ α κ, ἴση τῇ η δ, καὶ πρὸς τῷ α, σημείῳ συνεστάθω γωνία μὲν ἡ ὑπὸ κ α λ, ἴση τῇ ὑπὸ η δ ε, ἡ δὲ ὑπὸ κ α μ, ἴση τῇ δοθείσῃ ζ. Ληφθήτω δὲ καὶ ἡ α λ, ἴση τῇ δ ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κ λ· καὶ παράλληλος τῇ κ α β, ἤχθω ἀπὸ τοῦ λ, ἡ λ ν, τέμνουσα τὴν α μ, κατὰ τὸ μ, καὶ εἰλήφθω ἡ μ ν, ἴση τῇ α β, ἀπὸ δὲ τοῦ κ, παράλληλος τῇ α μ, ἤχθω ἡ κ ξ. καὶ ἀπὸ τοῦ ν, διὰ τοῦ α, ἤχθω ἡ ν α ο, τέμνουσα τὴν ξ κ, ἐκβαλλομένην κατὰ τὸ ο. εἶτα ἀπὸ μὲν τοῦ ο, παράλληλος τῇ κ α β, ἤχθω ἡ ο π, ἀπὸ δὲ τοῦ ν, παράλληλος τῇ μ α, ἐκβαλλομένη ἡ ν π, καὶ ἔσται τὸ α β π ρ, παραλληλόγραμμον τὸ ζητούμενον. Τὸ γὰρ κ α μ ξ, παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ κ α λ, τριγώνου κατὰ τὴν μα': τοῦ α': Εὐκλείδου, ἀλλὰ τὸ κ α λ, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ η δ ε, τριγώνῳ κατὰ τὴν δ': τοῦ αὐτοῦ, τὸ κ α μ ξ, ἄρα παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι καὶ τοῦ η δ ε, τριγώνου, τοῦτο δὲ ἴσον τῷ γ η ε, κατὰ τὴν ή: τοῦ αὐτοῦ, ἢ α: τοῦ ϛ': τὸ κ α μ ξ, ἄρα παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ γ δ ε, δοθέντι τριγώνῳ, ἀλλὰ τὸ κ α μ ξ, παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ρ α β π, κατὰ τὴν μγ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ τὸ ρ α β π, ἴσον ἐστὶ τῷ γ δ ε, τριγώνῳ. Ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ρ α β, γωνία, ἴση τῇ ὑπὸ κ α μ, κατὰ κορυφὴν γάρ, αὕτη δὲ γέγονεν ἴση τῇ δοθείσῃ ζ, τὸ ρ α β π, δήπουθεν παραλληλόγραμμον ἔχει γωνίαν μὲν τὴν ὑπὸ ρ α β, ἴσην τῇ ζ, συνέστη δὲ καὶ ἐπὶ τῆς α β, δοθείσης εὐθείας. Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγ: καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 6. Fig. 8.

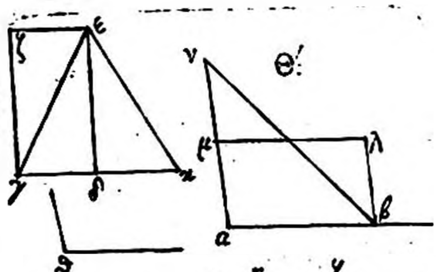


Πρότασις Θ'.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι παραλληλογράμμῳ ἴσον φίγυρον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ.

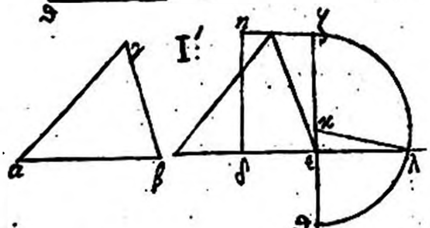
Ἔστω εὐθεῖα μὲν ἡ α β, παραλληλόγραμμον δὲ τὸ γ δ ε ζ, καὶ γωνία ἡ θ, καὶ ζητηθήτω τρίγωνον συστῆναι ἐπὶ τῆς α β, ἴσον τῷ γ δ ε ζ, παραλληλογράμμῳ, ἔχον γωνίαν τὴν α, ἴσην τῇ δοθείσῃ θ. Ἤχθω δὴ ἡ γδ, κατὰ τὸ κ, ὥστε τὴν δκ, ἴσην εἶναι τῇ γδ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ εκ, εγ. εἶτα συνεστάθω ἐπὶ τῆς αβ, παραλληλόγραμμον τὸ αβλμ, ἴσον τῷ γκε, τριγώνῳ, ἔχον τὴν ὑπὸ μαβ, γωνίαν ἴσην τῇ θ, ἐξαχθήτω δὲ καὶ ἡ αμ, κατὰ τὸ ν, ὥστε τὴν μν, ἴσην εἶναι τῇ αμ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ νβ, καὶ τὸ ανβ, τρίγωνον ἔσται τὸ ζητούμενον. Τὸ γὰρ γκε, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ γδεζ, δοθέντι παραλληλογράμμῳ, τῷ δὲ γκε, τριγώνῳ γέγονεν ἴσον τὸ αβλμ, παραλληλόγραμμον, ἄρα καὶ τὸ αβλμ, παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ γδεζ, δοθέντι, ἀλλὰ τὸ αβλμ, παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ αβν, τριγώνῳ κατὰ τὴν ιά: τοῦ γ': τοῦ παρόντος, ἄρα καὶ τὸ αβν, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δοθέντι γδεζ, παραλληλογράμμῳ, ἔχει δὲ καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ βαν, ἴσην τῇ θ. Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα αβ, ἐτέθη τῷ δοθέντι παραλληλογράμμῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 6. Fig. 9.



Πρότασις Ι':

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι, καὶ ἀνάπαλιν.



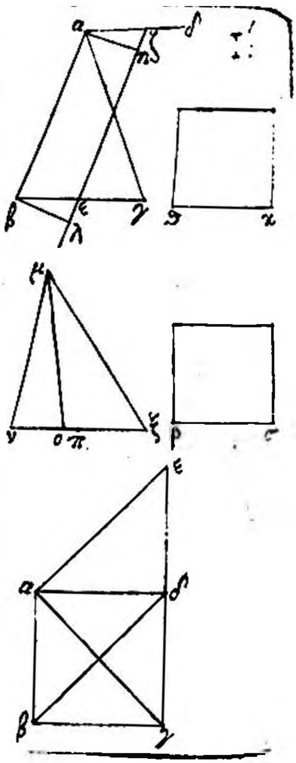
Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ ζητηθήτω τετράγωνον ἴσον τῷ αὐτῷ δοθέντι τριγώνῳ. Συνεστάθω δὴ κατὰ τὴν ζ': τοῦ παρόντος τὸ δεζη, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ αβγ, τριγώνῳ, καὶ ἐξαχθήτω ἡ ζε, ἐπὶ τὸ θ, ὥστε τὴν εθ, ἴσην εἶναι τῇ εδ. τμηθείσης δὲ τῆς ὅλης ζθ, δίχα κατὰ τὸ κ, γραφήτω τὸ ζλθ, ἡμικύκλιον. Ἐξαχθείσης δ' αὖθις καὶ τῆς δε, ἐπὶ τὸ λ, ἐπιζεύχθω ἡ κλ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ελ, τετράγωνον ἴσον ἔσται τῷ αβγ, τριγ: κατὰ γὰρ τὴν έ: τοῦ β': τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ ὑπὸ τῶν ζε, εθ, ἀνίσων τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ὅπερ ἐστὶ τὸ δζ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς εκ, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ, ἤτοι τῷ ἀπὸ τῆς κλ, τούτῳ δὲ ἴσα εἰσὶ τὰ ἀπὸ τῶν εκ, ελ, τετράγωνα, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν εκ, ελ, τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷ δζ, παραλληλογράμμῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς εκ, τετραγώνῳ. κοινοῦ δὲ ἀφαιρουμένου τοῦ ἀπὸ τῆς εκ, ἐγκαταλείπεται τὸ ἀπὸ τῆς ελ, τετράγωνον, ἴσον τῷ δζ, παραλληλογράμμῳ, τοῦτο δὲ ἴσον γέγονε τῷ αβγ, τριγώνῳ. Τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ελ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ αβγ, τριγώνῳ.

Ἄλλως. Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ ζητηθήτω τετράγωνον ἴσον τῷ αὐτῷ. Ἤχθω δὴ παράλληλος ἡ αδ, τῇ βγ, καὶ τμηθήτω ἡ βγ, δίχα κατὰ τὸ ε, καὶ ἀπὸ

τοῦ ε,

τοῦ ε, παράλληλος τῇ αβ, ἤχθω ἡ εζ, ἐπὶ δὲ τῆς εζ, πιπτέτω κάθετος ἡ αη, καὶ εὑρήσθω μέση ἀνάλογος τῶν εζ, αη, ἡ θκ. καὶ τὸ ἀπὸ τῆς θκ, τετράγωνον ἴσον ἔσαι τῷ αβγ, δοθέντι τριγώνῳ. Πιπτέτω γὰρ ἐπὶ τῆς εζ, ἐκβαλλομένης κάθετος ἡ βλ. καὶ ἐπεὶ τὰ αβεζ, αβλη, παραλληλόγρ: ἐπὶ τῆς αὐτῆς εἰσι βάσεως τῆς αβ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς αβ, ζε, πάντως γε ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ κατὰ τὴν λέ: τοῦ ά: Εὐκλείδου, ἀλλὰ τὸ αβεζ, ἴσον ἐσὶ τῷ αβγ, τριγώνῳ, ἄρα καὶ τὸ αβλη, ὁμοίως ἴσον ἐσὶ τῷ αὐτῷ αβγ, τριγώνῳ. κατὰ δὲ τὴν λδ': τοῦ αὐτοῦ, ἑκατέρα τῶν ζε, ηλ, ἴση ἐσὶ τῇ αβ, καὶ ἀλλήλαις. ὥστε ἡ θκ, εὑρεθεῖσα μέση ἀνάλογος τῶν αη, εζ, ἔσαι, ἡ αὐτὴ μέση ἀνάλογος καὶ τῶν αη, ηλ. ὡς ἔχει ἄρα ἡ ηλ, πρὸς τὴν θκ, ἔχει καὶ ἡ θκ, πρὸς τὴν αη, καὶ κατὰ τὴν ιζ': τοῦ ς': τοῦ αὐτοῦ, τὸ ἀπὸ τῆς θκ, τετράγωνον ἴσον ἐσὶ τῷ ἀπὸ τῆς αη, ηλ, παραλληλογράμμῳ, τοῦτο δὲ ἴσον δέδεικται τῷ αβγ, τριγώνῳ, ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς θκ, τετράγωνον ἴσον ἐσὶ τῷ αβγ, τριγώνῳ.

Geom. Lib. 6. Fig. 10.



Ἄλλως. Ἔσω τρίγωνον τὸ μνξ, καὶ ζητείσθω τούτῳ ἴσον τετράγωνον. Πιπτέτω δὴ κάθετος ἐπὶ τῆς νξ, ἀπὸ τοῦ μ, ἡ μο, καὶ τμηθήτω ἡ νξ, δίχα κατὰ τὸ π. εἶτα εὑρήσθω μέση ἀνάλογος τῶν μο, νπ, ἡ ρσ, καὶ τὸ ἀπὸ ταύτης τετράγωνον ἴσον ἔσαι τῷ μνξ, δοθέντι τριγώνῳ. κατὰ γὰρ τὴν ιά: τοῦ γ': τοῦ παρόντος, τὸ ὑπὸ τῶν μο, νπ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἴσον ἐσὶ τῷ μνξ, τριγώνῳ, ἀλλὰ τῷ ὑπὸ τῶν μο, νπ, παραλληλογρ: ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ρσ, κατὰ τὴν ιζ': τοῦ ς': Εὐκλείδου, ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ρσ, ἴσον ἐσὶ τῷ μνξ, δοθέντι τριγώνῳ.

Ἔσω ἔτι τετράγωνον τὸ αβγδ, καὶ ζητείσθω τρίγωνον ἴσον τῷ αὐτῷ αβγδ, τετραγώνῳ. Ἐπεζεύχθω δὲ ἡ βδ, καὶ ἀπὸ τοῦ α, παράλληλος τῇ βδ, ἤχθω ἡ αε, τέμνουσα τὴν γδ, ἐκβαλλομένην κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αγ, καὶ τὸ αεγ, τρίγωνον ἔσαι τὸ ζητούμενον. κατὰ γὰρ τὴν ιά: τοῦ γ': τοῦ παρόντος τὸ αεγ, τρίγωνον ἴσον ἐσὶ τῷ αβδε, παραλληλογράμμῳ, τούτῳ δὲ ἴσον ἐσὶ τὸ αβγδ, τετράγωνον κατὰ τὴν λέ: τοῦ ά: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἄρα τὸ αγε, ἴσον ἐσὶ τῷ αβγδ, τετραγώνῳ. ὅπερ ἦν τὸ β': Τῷ δοθέντι ἄρα τριγώνῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

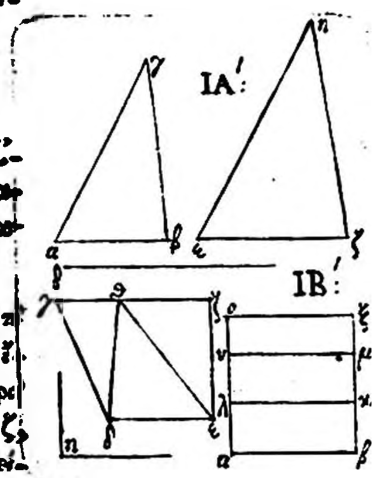
Πρό-

Πρότασις ΙΑʹ:

Τοῦ δοθέντος τριγώνου διπλάσιον, τριπλάσιον, ἢ κατ' ἄλλον τινὰ λόγον πολλαπλάσιον τρίγωνον εὑρεῖν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ α β γ, καὶ ζητείσθω τούτου τρίγωνον διπλάσιον. Εἰλήφθω δὴ ἡ δ, εὐθεῖα διπλασία τῆς α β, καὶ εὑρεθήτω μέση ἀνάλογος τῶν α β, καὶ δ, εὐθειῶν, καὶ ἔστω αὕτη ἡ ε ζ, καὶ τῇ μὲν ὑπὸ β α γ, γωνίᾳ γενέσθω ἴση ἡ ὑπὸ ζ ε η, τῇ δὲ ὑπὸ α β γ, ἡ ὑπὸ ε ζ η, καὶ τὸ ε ζ η, τρίγωνον ἔσται τὸ ζητούμενον. Ἐπεὶ γὰρ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι α β, ε ζ, καὶ δ, ἀνάλογόν εἰσι, πάντως γε τὸ ἐπὶ τῆς αʹ: α β, πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς βʹ: ε ζ, ὅμοιον εὐθύγραμμον ἔχει ὡς ἡ α β, αʹ: πρὸς τὴν δ, γʹ: κατὰ τὴν αʹ: τοῦ γʹ: τοῦ παρόντος, ἀλλ' ἡ α β, ὑποδιπλασιός ἐστι τῆς δ, καὶ τὸ α β γ, ἄρα τρίγωνον ὑποδιπλάσιόν ἐστι τοῦ ε ζ η, τὸ δὲ ε ζ η, διπλάσιον τοῦ α β η. Τὸν αὐτὸν τρόπον δύναται εὑρεθῆναι καὶ τριπλάσιον, τετραπλάσιον, ἢ κατ' ἄλλον τινὰ λόγον πολλαπλάσιον, τριπλασιαζομένης, τετραπλασιαζομένης, ἢ κατ' ἄλλον τινὰ δοθέντα λόγον αὐξανομένης μιᾶς τῶν αὐτοῦ πλευρῶν, καὶ τῆς μέσης ἀναλόγου εὑρισκομένης κατὰ τὴν θʹ: τοῦ ςʹ: τοῦ παρόντος, καὶ τῶν λοιπῶν γινομένων, ὡς προειρημένα ἔσται.

Geom. Lib. 6. Fig. 11.



Πρότασις ΙΒʹ:

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Ἔστω εὐθεῖα μὲν ἡ α β, εὐθύγραμμον δὲ τὸ γ δ ε ζ, καὶ γωνία ἡ η. καὶ ζητείσθω παραλληλόγρ: ἴσον τῷ γ δ ε ζ, δοθέντι, παραβαλλόμενον παρὰ τὴν α β, δοθεῖσαν εὐθεῖαν. Διαιρεθήτω δὴ τὸ γ δ ε ζ, δοθὲν εὐθύγραμμον εἰς ὁσαδηποτοῦν τρίγωνα. κείσθω δὲ εἰς τρία τὰ γ δ θ, θ δ ε, ε ζ θ, καὶ συνιστάσθω ἐπὶ τῆς α β, κατὰ τὴν ηʹ: τοῦ παρόντος τὸ α β κ λ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ε ζ θ, τριγώνῳ, ἔχον τὴν ὑπὸ λ α β, γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ η. ἐπὶ δὲ τῆς κ λ, τὸ λ κ μ ν, ἴσον τῷ δ ε θ, ἔχον καὶ αὐτὸ τὴν ὑπὸ ν λ κ, γωνίαν ἴσην τῇ η. καὶ ἐπὶ τῆς μ ν, τὸ ν μ ξ ο, ἴσον τῷ γ δ θ, ἔχον τὴν ὑπὸ ο ν μ, καὶ αὐτὸ γωνίαν ἴσην τῇ η. καὶ τὸ α ξ, ὅλον ἔσται τὸ ζητούμενον. Ὡς γὰρ ἔχει τὸ λ α β κ, παραλλ:

πρὸς

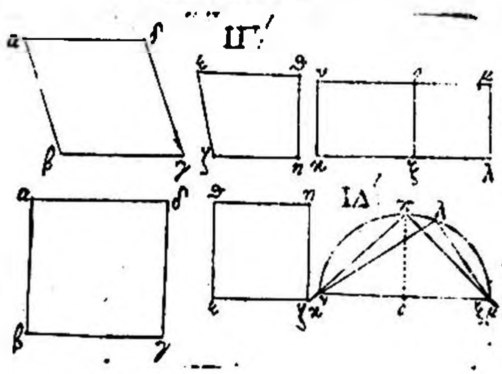
πρὸς τὸ εζθ, τρίγωνον, ἔχει ϗ τὸ λκμν, πρὸς τὸ δεθ, καὶ τὸ νμξο, πρὸς τὸ γδθ, ϗ ἐν συνθέσει ὡς ἔχει τὸ αβκλ, πρὸς τὸ εζθ, οὕτως ἔχει ϗ ταῦτα τὰ ακ, κν, νξ, παραλληλόγραμμα, πρὸς ταῦτα τὰ εζθ, δεθ, γδθ, τρίγωνα. ἀλλὰ τὸ αβκλ, παραλλ: ἴσον ἐστὶ τῷ εζθ, τριγώνῳ, ϗ τὸ αξ, ἄρα ὅλον παραλλ: ἴσον ἐστὶ τῷ ὅλῳ γδεζ, παραλληλογράμμῳ. Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν, ϗ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΓ'.

Δύο ἀνίσων εὐθυγράμμων δοθέντων τὴν τοῦ μείζονος ὑπεροχὴν πρὸς τὸ ἔλαττον εὑρεῖν.

Δεδόσθωσαν ἄνισα εὐθύγραμμα τὰ αβγδ, εζηθ, ϗ ζητείσθω ἡ τοῦ μείζονος αβγδ, διαφορὰ πρὸς τὸ ἔλαττον εζηθ. Συνεστάθω δὴ κατὰ τὴν αὐωτέρω ἐπὶ μὲν τῆς κλ, τυχούσης εὐθείας τὸ κλμν, παραλλ: ἴσον τῷ αβγδ, μείζονι ἐν τῇ τυχούσῃ γωνίᾳ, ἐπὶ δὲ τῆς κν, τὸ κξον, ἴσον τῷ εζηθ, ἐλάττονι, ϗ τὸ ξλμο, ὑπεροχὴ ἔσται τοῦ αβγδ, πρὸς τὸ εζηθ. ὡς γὰρ ἔχει τὸ κλμν, πρὸς τὸ κξον, οὕτως ἔχει καὶ τὸ αβγδ, πρὸς τὸ εζηθ. ἀλλὰ τοῦ κλμν, ὑπεροχή ἐστι πρὸς τὸ κξον, τὸ ξλμο, τὸ ξλμο, ἄρα ὑπεροχή ἐστι τοῦ αβγδ, μείζονος πρὸς τὸ ἔλαττον εζηθ. Δύο ἀνίσων ἄρα εὐθυγράμμ: ϗ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib.6. Fig.12.



Πρότασις ΙΔ'.

Δύο ἀνίσων τετραγώνων δοθέντων δύο ἴσα εὑρεῖν, ὥστε ὁμοῦ λαμβανόμενα ἴσα εἶναι τοῖς δοθεῖσιν ὁμοῦ λαμβανομένοις.

Ἔστωσαν τὰ αβγδ, εζηθ, ἄνισα τετράγωνα, ϗ ζητείσθωσαν δύο ἴσα, ἅτινα ὁμοῦ λαμβανόμενα ἴσα ἔσονται τοῖς δοθεῖσιν αβγδ, εζηθ, ὁμοῦ λαμβανομένοις. Συνεστάσθω δὴ ἐπὶ τῆς κλ, ἀορίστου εὐθείας πρὸς τὸ λ, σημεῖον γωνία ἡ ὑπὸ κλμ, ὀρθὴ, καὶ εἰλήφθω ἡ μὲν λν, ἴση τῇ αβ, ἡ δὲ λξ, τῇ εθ. ϗ ἐπιζεύχθω ἡ νξ, ἧς δίχα διαιρεθείσης κατὰ τὸ ο, γραφήτω περὶ αὐτὴν ἡμικύκλιον τὸ νλξ, ἀπὸ δὲ τοῦ ο, ἀνεστάθω κάθετος ἐπὶ τῆς νξ, τέμνουσα

τὸ

τὸ ν λ ξ, ἡμικύκλιον κατὰ τὸ π, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ν π, π ξ, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ν π, π ξ, εὐθειῶν τετράγωνα ἴσα ἔσται ἀλλήλοις, συναμφότερα δ' ἔσαι ἴσα συναμφοτέροις τοῖς δοθεῖσιν α β γ δ, ε ζ η θ. ἡ γὰρ ν ο, ἴση ἐστὶ τῇ ο ξ, κοινὴ δὲ ἡ ο π, καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ ν ο π, ξ ο π, ἴσαι, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ἡ ν π, ἄρα βάσις κατὰ τὴν δ': τοῦ α: Εὐκλείδη, ἴση ἐστὶ τῇ π ξ, ὥστε καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἴσα πάντως εἰσίν. ὅπερ ἔδει τὸ α':

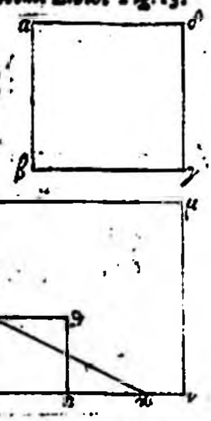
Ἐπεὶ δ' αὖθις ἡ ὑπὸ ν π ξ, γωνία ὀρθή ἐστιν, ἐν ἡμικυκλίῳ γὰρ, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς ν ξ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ν π, π ξ, κατὰ τὴν μ ζ': τοῦ α: Στοιχ: ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ν ξ, ἴσον ἐστὶ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ν λ, λ ξ, εὐθειῶν, ἤτοι τοῖς α β γ δ, ε ζ η θ, ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ν π, π ξ, εὐθειῶν τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς δοθεῖσιν α β γ δ, ε ζ η θ, συναμφότερα συναμφοτέροις, ὅπερ ἔδει τὸ β': Δύο ἄρα ἀνίσων τετραγώνων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΕ':

Δύο τετραγώνων δοθέντων προσθεῖναι θατέρῳ τούτων ἴσον τῷ ἑτέρῳ, ὥστε τὸ γενόμενον ὅλον τετράγωνον εἶναι.

Ἔστωσαν δύο τετράγωνα τὰ α β γ δ, ε ζ η θ, καὶ ζητείσθω προστεθῆναι τῷ ε ζ η θ, ἐλάττονι σχῆμα ἴσον τῷ α β γ δ, τετραγώνῳ, καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τε τοῦ ε ζ η θ, τετραγώνου, καὶ τοῦ προστιθεμένου σχήματος, εἶναι ὁμοίως τετράγωνον. Εἰλήφθω δὴ ἡ ζ κ, εὐθεῖα ἴση τῇ β γ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ε κ, καὶ ταύτῃ εἰλήφθω ἴση ἡ ζ λ, τῆς ζ κ, ἐξαγομένης. καὶ ἀπὸ τοῦ λ, παράλληλος τῇ ζ η, ἤχθω ἡ λ μ, ἴση τῇ ζ λ. ἐξαχθείσης δὲ καὶ τῆς ζ η, κατὰ τὸ συνεχὲς εἰλήφθω ἡ η ν, ἴση τῇ ε λ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ μ ν, καὶ τὸ ζ μ, πάντως τετράγωνόν ἐστιν, ὡς δῆλον ἐκ τῆς κατασκευῆς. Ἐπεὶ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ε κ, τουτέστι τὸ ζ μ, τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ε ζ, ζ κ, τετραγώνοις κατὰ τὴν μ ζ': τοῦ α: Εὐκλείδου, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ε ζ, ἐστὶ τὸ ζ θ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζ κ, τὸ β δ, τὸ ζ μ, ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς ζ θ, β δ, τετραγώνοις. κοινοῦ δὲ ἀφαιρουμένου τοῦ ζ θ, ἐναπολείπεται τὸ ε θ η ν μ λ, σχῆμα ἴσον τῷ β δ, καὶ γέγονε τὸ ζ μ. Δέδεικται δὲ τὸ ζ μ, τετράγωνον. Δύο ἄρα τετραγώνων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 6. Fig. 13.



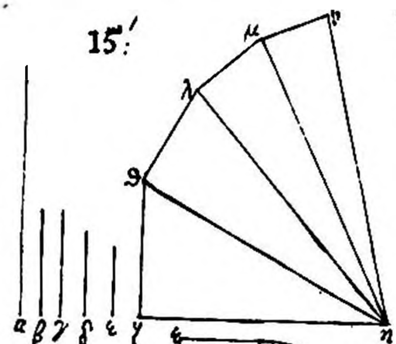
ΙΕ

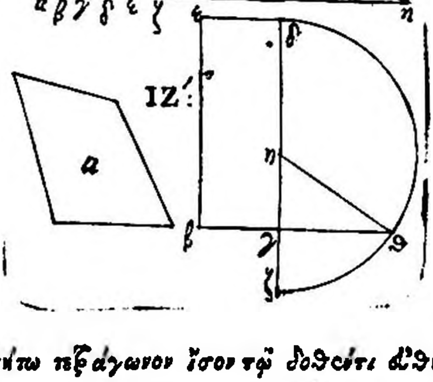
Πρότασις ΙϚʹ:

Τετραγώνων ὁποσωνοῦν δοθέντων ἴσων, ἢ ἀνίσων, τὴν πάντα ταῦτα δυναμένην εὐθεῖαν εὑρεῖν.

Δεδόσθωσαν τετράγωνα πέντε ἄνισα, ὧν πλευραὶ αἱ α, β, γ, δ, ε, εὐθεῖαι, καὶ ζητείσθω ἡ πάντα ταῦτα δυναμένη, ὥστε τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἴσον εἶναι τοῖς ἀπὸ τῶν α, β, γ, δ, ε, τετραγώνοις. Εἰλήφθω δὴ ἡ ζη, ἴση τῇ α, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, ἀνεστάθω ἐπ' αὐτῆς κάθετος ἡ ζθ, ἴση τῇ β, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ θη, ἐφ' ἧς συνεστάθω κάθετος πρὸς τῷ θ, σημείῳ ἡ θλ, ἴση τῇ γ. ἐπιζευχθείσης δὲ τῆς λη, συνεστάθω ἐπ' αὐτῆς κάθετος ἡ λμ, ἴση τῇ δ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ μη. συνεστάθω δὲ καὶ ἐπ' αὐτῆς κάθετος ἡ μν, ἴση τῇ ε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ νη, καὶ αὕτη πάντως δύναται πάντα τὰ δοθέντα τετράγωνα. Κατὰ γὰρ τὴν μζʹ: τοῦ αʹ: τῶν Στοιχείων, τὸ ἀπὸ τῆς θη, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ζη, ζθ, ἤτοι τοῖς ἀπὸ τῶν α, καὶ β, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ηλ, ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ηθ, θλ, ἤτοι τοῖς ἀπὸ τῶν α, β, γ. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ημ, τοῖς ἀπὸ τῶν ηλ, λμ, ἤτοι τοῖς ἀπὸ τῶν α, β, γ, δ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ην, τοῖς ἀπὸ τῶν ημ, μν, ἤτοι τοῖς ἀπὸ αβγδε, εὐθειῶν. Τετραγώνων ἄρα ὁποσωνοῦν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 6. Fig. 14.





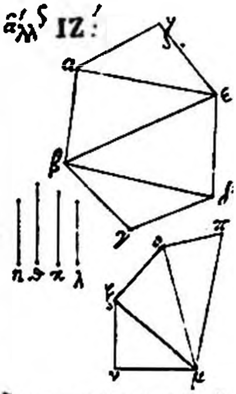
Πρότασις ΙΖʹ:

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Ἔστω εὐθύγραμμον τὸ α, καὶ ζητείσθω τετράγωνον ἴσον τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ. Συνεστάθω δὴ ἐπὶ τῆς βγ, τυχούσης εὐθείας παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ α, ἐν γωνίᾳ ὀρθῇ κατὰ τὴν ιβʹ: τοῦ παρόντος τὸ βγδε, καὶ τῆς δγ, ἐξαχθείσης κατὰ τὸ συνεχές, εἰλήφθω ἡ γζ, ἴση τῇ γβ, εἶτα διαιρεθήτω ἡ δζ, δίχα, κἂν μὲν ἡ διχοτόμησις γένηται κατὰ τὸ γ, τὸ βδ, ἔσται τὸ ζητούμενον. Γέγονε γὰρ ἴσον τῷ δοθέντι α, εὐθυγράμμῳ, ἔστι δὲ καὶ τετράγωνον. ἡ γὰρ ζγ, εἴληπται ἴση τῇ βγ. ἀλλὰ τῇ ζγ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ γδ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἡ βγ, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ γ δ, καὶ ἑπομένως τὸ β δ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δοθέντι α, εὐθυγράμμῳ. Εἰ δὲ ἡ διχοτόμησις ἐκτὸς γένηται τῆς γ, ὡς ἐπὶ τοῦ β': σχήματος κατὰ τὸ η, εἰλήφθω κέντρον μὲν τὸ η, διάστημα δὲ τὸ η δ, ἢ η ζ, καὶ γραφήτω ἡμικύκλιον τὸ δ θ ζ. ἐκβληθείσης δὲ καὶ τῆς β γ, ἐπὶ τὸ θ, ἐπιζεύχθω ἡ η θ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς γ θ, ἔσαι ἴσον τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ. Ἡ δεῖξις ἡ αὐτὴ τῇ ἐν τῇ ι: τοῦ παρόντος. Geom. Lib. 6. Fig. 15.

Ἄλλως. Ἔστω εὐθύγραμμον τὸ α β γ δ ε ζ, καὶ ζητείσθω τετράγωνον ἴσον τῷ αὐτῷ. Διαιρείσθω δὴ τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον εἰς τρίγωνα τὰ α ζ ε, ε α β, δ ε β, β γ δ. καὶ εὑρεθήτωσαν κατὰ τὴν ι: τοῦ παρόντος τέσσαρες εὐθεῖαι, ὅσα τῷ πλήθει καὶ τὰ τρίγωνα. ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν τετράγωνα ἴσα εἶναι τοῖς τοῦ α β γ δ ε ζ, δοθέντος εὐθυγράμμου τριγώνοις σύμπαντα σύμπασι, καὶ ἔστωσαν αὗται αἱ η, θ, κ, λ, καὶ κείσθω τὸ μὲν ἀπὸ τῆς η, ἴσον εἶναι τῷ α ζ ε, τριγώνῳ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς θ, τῷ α β ε, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς κ, τῷ δ ε β, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς λ, τῷ β γ δ. Εἶτα εἰλήφθω ἡ μ ν, ἴση τῇ θ, καὶ συνεστάθω ἐπ' αὐτῆς κάθετος ἡ ν ξ, ἴση τῇ η. συσαθείσης δὲ καὶ ἐπὶ τῆς ξ μ, κάθετος ἡ ξ ο, ἴση τῇ κ, ἐπιζεύχθω ἡ ο μ, καὶ τὰ λοιπὰ γινέσθω, ὡς προειρημένεται ἐν τῇ ἀνωτέρῳ, καὶ εὑρεθήσεται κατ' αὐτὴν, ἡ μ π, εὐθεῖα δυναμένη πάντα τὰ ἀπὸ τῶν η θ κ λ, εὐθειῶν τετράγωνα, ἀλλὰ ταῦτα ἴσα ἐστὶ τοῖς α ζ ε, α ε β, δ ε β, β γ δ, τριγώνοις κατὰ τὴν κατασκευὴν, δηλονότι τῷ α β γ δ ε ζ, δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς μ π, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ αὐτῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ. Τῷ δοθέντι ἄρα εὐθ. εὐθυγρ: καὶ τὰ ἑξῆς.

ἀλλ. ΙΖ'



Πρότασις ΙΗ':

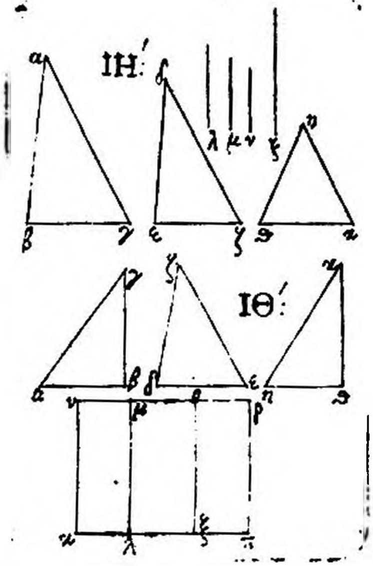
Δυσὶν, ἢ τρισὶν, ἢ ὁσοισδηποτοῦν δοθεῖσι τριγώνοις ἴσον τρίγωνον εὑρεῖν.

Ἔστωσαν τρία τρίγωνα τὰ α β γ, δ ε ζ, η θ κ, καὶ ζητείσθω τρίγωνον ἴσον τοῖς δοθεῖσι. Συσαθήτωσαν δὴ διὰ τῆς ἀνωτέρω τρία τετράγωνα ἴσα τοῖς τρισὶ δοθεῖσι τριγώνοις, καὶ ἔστωσαν πλευραὶ τούτων αἱ λ μ ν. εἶτα εὑρεθήτω διὰ τῆς ις': τοῦ παρόντος τετράγωνον ἴσον τοῖς τρισὶν εὑρεθεῖσι τετραγώνοις, ὧν πλευραὶ αἱ λ μ ν. καὶ ἔστω τούτου πλευρὰ ἡ ξ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ξ, τετραγώνῳ εὑρεθήτω διὰ

τῆς ι:

τῆς ι': τοῦ παρόντος, ἴσον τρίγωνον, καὶ τοῦτο ἔσαι ἴσον τοῖς δοθεῖσι τρισὶ τριγώνοις. γέγονε γὰρ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ξ, τετραγώνῳ, τοῦτο δὲ τοῖς ἀπὸ τῶν λ μ ν, τὰ δ' ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα τοῖς δοθεῖσιν α β γ, δ ε ζ, η θ κ, τριγώνοις. Δυσὶν ἄρα, ἢ τρισὶν, καὶ τὰ ἑξῆς. Geom. Lib. 6. Fig. 16.

Πρότασις ΙΘ':



Τριῶν δοθέντων ὁποιωνδηποτοῦν τριγώνων, ἀνάλογους αὐτοῖς εὐθείας εὑρεῖν.

Ἔστωσαν τρίγωνα τὰ α β γ, δ ε ζ, η θ κ, καὶ ζητηθήτωσαν αἱ ἀνάλογοι αὐτῶν πλευραί. Συνεστάθω δὴ τὸ κ λ μ ν, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ α β γ, τριγώνῳ κατ' ὀρθὴν γωνίαν, διὰ τῆς ζ': τοῦ παρόντος. Παρὰ δὲ τὴν λ μ, εὐθεῖαν παραβεβλήσθω τὸ λ ξ ο μ, ὀρθογώνιον ἴσον τῷ δ ε ζ, τριγώνῳ, καὶ παρὰ τὴν ξ ο, τὸ ξ π ρ ο, ἴσον τῷ η θ κ, κατὰ τὴν η': τοῦ αὐτοῦ. καὶ αἱ κ λ, λ ξ, ξ π, εὐθεῖαι ἔσονται αἱ ζητούμεναι. κατὰ γὰρ τὴν α': τοῦ ς': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὡς ἔχει ἡ κ λ, πρὸς τὴν λ ξ, ἔχει καὶ τὸ κ μ, πρὸς τὸ λ ο, ἀλλὰ τὸ μὲν κ μ, ἴσον γέγονε τῷ α β γ, τριγώνῳ, τὸ δὲ λ ο, τῷ δ ε ζ, ἄρα καὶ τὸ α β γ, τρίγωνον ἔχει πρὸς τὸ ε δ ζ, ὡς ἡ κ λ, πρὸς τὴν λ ξ. Αὖθις ἐπεὶ ὡς ἔχει ἡ λ ξ, πρὸς τὴν ξ π, ἔχει καὶ τὸ λ ο, πρὸς τὸ ξ ρ, κατὰ τὴν αὐτὴν, τὸ δὲ λ ο, γέγονεν ἴσον, ὡς εἴρηται, τῷ δ ε ζ, καὶ τὸ ζ ρ, τῷ η θ κ, ἄρα καὶ τὸ δ ε ζ, ἔχει πρὸς τὸ η θ κ, ὡς ἡ λ ξ, πρὸς τὴν ξ π. αὕτη ἡ πρότασις ἀληθεύει καὶ ἐπὶ παντὸς ἄλλου εἴδους εὐθυγράμμου.

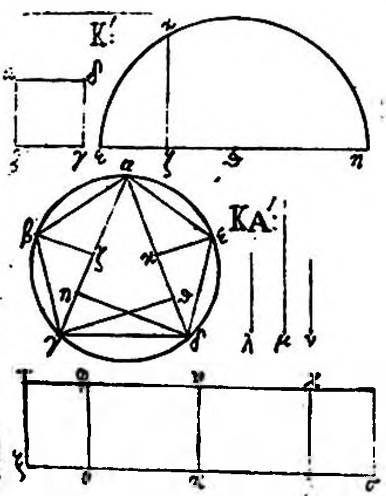
Πρότασις Κ':

Τοῦ δοθέντος τετραγώνου μεῖζον, ἢ ἔλαττον τετράγωνον συστήσασθαι κατὰ τὸν δοθέντα λόγον.

Ἔστω τετράγωνον τὸ α β γ δ, καὶ ζητηθήτω τούτου τριπλάσιον. Εἰλήφθω δὴ ἡ ε ζ, ἴση τῇ β γ, καὶ ἐξαχθήτω κατὰ τὸ η, ὥστε τὴν ζ η, τριπλασίαν εἶναι τῆς ε ζ. Τμηθείσης δὲ τῆς ὅλης ε η, δίχα κατὰ τὸ θ, γραφήτω περὶ αὐτὴν ἡμικύκλιον τὸ ε κ η, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, ἀνεστάθω κάθετος ἐπὶ τῆς ε η, ἡ ζ κ. καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς τριπλάσιον ἔσαι τοῦ ἀπὸ τῆς β γ. ἡ γὰρ ζ κ, μέση ἀνάλογος τῶν ε ζ, ζ η, κατὰ τὴν θ': τοῦ α': τοῦ παρόντος, ὥστε αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ε ζ, ζ κ, ζ η, ἀνάλογόν εἰσι, καὶ κατὰ τὴν α': τοῦ γ': τοῦ παρόντος ὡς ἔχει ἡ η ζ, α': πρὸς τὴν ζ ε, γ': ἔχει καὶ τὸ ἀπὸ τῆς β':

ζκ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γ': ζε, ἀλλὰ ἡ ζη, τριπλασία εἴληπται τῆς εζ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζκ, ἄρα τετράγωνον τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς εζ, τετραγώνου, ἤτοι τοῦ ἀπὸ τῆς βγ. ἐὰν δὲ ἡ ζη, τετραπλάσιος ᾖ, ἡ πενταπλάσιος, ἢ κατ' ἄλλον τινὰ λόγον πολλαπλάσιος τῆς εζ, τετραπλάσιον ἔσται, ἢ πενταπλάσιον, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζκ, τοῦ ἀπὸ τῆς εζ, ἢ κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον πολλαπλάσιον. Ὥστε δῆλον ἐκ τούτου, ὅτι ὁσαπλάσιος ἂν ἡ ζη, ληφθῇ τῆς εζ, ἴσης τῇ βγ, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζκ, τοῦ ἀπὸ τῆς ζε. Ὁμοίως δὲ καὶ κατὰ τὸν τοῦ ὑποπολλαπλασίου λόγον. ἐὰν γὰρ ἡ ζη, ὑποδιπλάσιος ληφθῇ τῆς εζ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζκ, ὑποδιπλάσιον ἔσται τοῦ ἀπὸ τῆς εζ. ἐὰν δὲ ἐκείνη ὑποτριπλάσιος, καὶ τοῦτο ὁμοίως ὑποτριπλάσιον, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων εἰδῶν ἀναλόγως. Τοῦ τε ἐπιμορίου, καὶ ἐπιμεροῦς, καὶ τῶν τούτοις ἀντικειμένων ὑπεπιμορίου τε καὶ ὑπεπιμεροῦς. Τοῦ δοθέντος ἄρα τετραγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 6. Fig. 17.



Πρότασις ΚΑ':

Δοθέντος οἱουδήποτε εὐθυγράμμου, γραμμὰς εὑρεῖν ἰσαρίθμους τε καὶ ἀναλόγους τοῖς, εἰς ἃ τὸ εὐθύγραμμον ἀναλύεται, τριγώνοις.

Ἔστω εὐθύγραμμον τὸ αβγδε, καὶ διαλυθήτω εἰς τρίγωνα τὰ αβγ, αγδ, αδε, ἀπὸ δὲ τῶν β, καὶ δ, γωνιῶν πιπτέτωσαν κάθετοι ἐπὶ τῆς αγ, κοινῆς βάσεως τῶν αβγ, αγδ, τριγώνων αἱ βζ, δη, ἀπὸ δὲ τῶν γ, καὶ ε, πιπτέτωσαν ὁμοίως κάθετοι ἐπὶ τῆς αδ, αἱ γθ, εκ, εἶτα γενέσθω ὡς ἡ βζ, πρὸς τὴν δη, ἡ λ, πρὸς τὴν μ, ὡς δὲ ἡ γθ, πρὸς τὴν εκ, ἡ μ, πρὸς τὴν ν, καὶ αἱ λμν, ἀνάλογον ἔσονται τοῖς αβγ, αγδ, αδε, τριγώνοις. Εἰλήφθω γὰρ ἡ ξσ, εὐθεῖα ἴση ταῖς βζ, δη, γθ, εκ, καὶ ταύτης ἀφῃρήσθω ἡ μὲν ξο, ἴση τῇ βζ, ἡ δὲ οπ, τῇ δη, ἡ δὲ πρ, τῇ γθ, καὶ ἡ ρσ, τῇ εκ. Εἰλήφθω ἔτι καὶ ἡ ξτ, ἴση τῇ ἡμισείᾳ τῆς αγ, ἡ δὲ πυ, τῇ ἡμισείᾳ τῆς αδ, καὶ συμπληρωθέσθωσαν τὰ τπ, υσ, παραλ: καὶ παράλληλος τῇ ξτ, ἤχθω ἡ οφ, τῇ δὲ πυ, ἡ ρχ. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν αβγ, τρίγωνον διπλασίονα βάσιν ἔχει, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ ξφ, παραλληλογράμμῳ. ἡ μὲν γὰρ αγ, βάσις διπλάσιός ἐστι τῆς ξτ, τὸ δὲ βζ, ὕψος ἴσον τῇ ξο. πάντως γε κατὰ τὴν ια: τοῦ γ': τοῦ παρόντος τὸ ξφ, ἴσον ἐστὶ τῷ αβγ, τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάτερον τῶν

φπ,

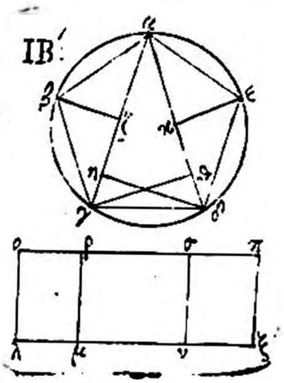
φπ, πχ, ἴσον ἐστὶ τῷ αγδ, τὸ δὲ χσ, τῷ αδε, ἀλλὰ τὸ μὲν ξφ, ἔχει πρὸς τὸ φπ, ὡς ἡ ξο, πρὸς τὴν οπ, κατὰ τὴν α: τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἄρα καὶ τὸ αβγ, τρίγωνον πρὸς τὸ αγδ, ἔχει, ὡς ἡ ξο, ἤτοι βζ, πρὸς τὴν οπ, τουτέστι τὴν δη. Αὖθις ἐπεὶ κατὰ τὴν αὐτὴν καὶ τὸ πχ, πρὸς τὸ χσ, ἔχει, ὡς ἡ πρ, πρὸς τὴν ρσ, τὸ δὲ πχ, ἴσον ἐστὶ τῷ αγδ, καὶ τὸ χσ, τῷ αδε, πάντως γε καὶ τὸ αγδ, πρὸς τὸ αδε, ἔχει ὡς ἡ πρ, ἤτοι ἡ γθ, πρὸς τὴν ρσ, τουτέστιν εκ, ὡς δὲ ἡ βζ, πρὸς τὴν δη, γέγονε καὶ ἡ λ, πρὸς τὴν μ, τὸ αβγ, τρίγωνον ἄρα πρὸς τὸ αγδ, ἔχει ὡς ἡ λ, εὐθεῖα πρὸς τὴν μ, γέγονε δὲ καὶ ἡ μ, πρὸς τὴν ν, ὡς ἡ γθ, πρὸς τὴν εκ, ἄρα τὸ γαδ, ἔχει πρὸς τὸ αδε, ὡς ἡ μ, πρὸς τὴν ν, καὶ ἑπομένως αἱ λμν, εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσι τοῖς αβγ, αγδ, αδε, τριγώνοις. Αὕτη ἡ πρότασις ἀληθεύει καὶ ἐπὶ τῶν μὴ ἰσοπλεύρων.

Πρότασις ΚΒʹ:

Τῷ δοθέντι ἰσοπλεύρῳ εὐθυγράμμῳ ἴσον ὀρθογώνιον συστήσασθαι.

Ἔστω εὐθύγραμμον ἰσόπλευρον τὸ αβγδε, καὶ ζητηθήτω τούτῳ ἴσον ὀρθογώνιον. Διαιρεθήτω δὴ τὸ αβγδε, δοθὲν εὐθύγραμμον εἰς τρίγωνα τὰ αβγ, αγδ, αδε, καὶ πεπτώκωσαν κάθετοι αἱ βζ, δη, εκ, ἐπὶ τῶν αγ, αδ, καὶ τῇ μὲν βζ, ληφθήτω ἴση ἡ λμ, τῇ δὲ δη, ἡ μν, καὶ τῇ εκ, ἡ νξ. Εἰλήφθω δὲ ἡ λο, ἴση τῇ ἡμισείᾳ τῆς γα, ἢ δα, ἴσαι γάρ, διὰ τὸ εἶναι ἴσας καὶ τὰς αβγ, αεδ, περιφερείας, καὶ συμπληρούσθω τὸ ολξπ, ὀρθογώνιον, καὶ τοῦτο ἔσται τὸ ζητούμενον. Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ μ, καὶ ν, παράλληλοι τῇ λο, αἱ μρ, νσ. καὶ ἐπεὶ τὸ λρ, περιέχεται ὑπὸ τῆς λμ, ἴσης τῇ βζ, καθέτῳ, καὶ τῆς λο, ἴσης τῇ ἡμισείᾳ τῆς γα, πάντως γε ἴσον ἐστὶ τῷ αβγ, τριγώνῳ κατὰ τὴν ια: τοῦ γ': τοῦ παρόντος. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ μσ, ἴσον εἶναι τῷ αγδ, καὶ τὸ νπ, τῷ αδε. ὥστε ὅλον τὸ λπ, ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ αβγδε, δοθέντι. Τῷ δοθέντι ἄρα ἰσοπλεύρῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 6. Fig. 18.



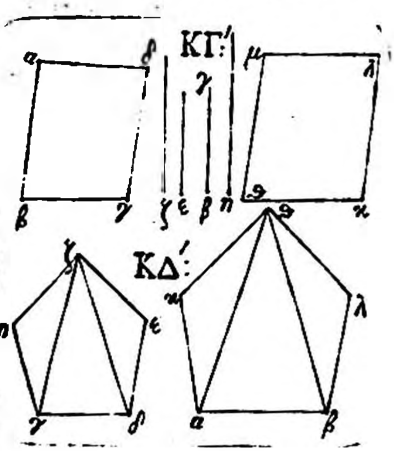
Πρό-

Πρότασις ΚΓ′.

Τῷ δοθέντι ὁτῳδήποτε εὐθυγράμμῳ ὅμοιον εὐθύγραμμον συστήσασθαι κατὰ τὸν δοθέντα λόγον.

Ἔστω εὐθύγραμμον μὲν τὸ αβγδ, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς ε, πρὸς τὴν ζ, καὶ ζητηθήτω ὅμοιον εὐθύγραμμον τῷ δοθέντι κατὰ τὸν τῆς ε, πρὸς τὴν ζ, λόγον. Γενέσθω δὴ ὡς ἡ ε, πρὸς τὴν ζ, ἡ βγ, πρὸς τὴν η. καὶ εὑρεθήτω μέση ἀνάλογος τῶν βγ, καὶ η, ἡ θκ, καὶ παρὰ τὴν θκ, παραβληθήτω εὐθύγραμμον ὅμοιον τῷ δοθέντι αβγδ, οἷον τὸ θκλμ, καὶ τοῦτο ἔσται τὸ ζητούμενον. Ἐπεὶ γὰρ αἱ βγ, θκ, καὶ εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, πάντως γε τὸ ἐπὶ τῆς α′: βγ, τὸ αβγδ, πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς β′: θκ, τὸ θκλμ, γίγνεται ὡς ἡ α′: βγ, εὐθεῖα πρὸς τὴν γ′: η, ἀλλ' ἡ βγ, ἔχει πρὸς τὴν η, ὡς ἡ ε, πρὸς τὴν ζ, ἄρα καὶ τὸ αβγδ, εὐθύγραμμον πρὸς τὸ θκλμ, ἔχει ὡς ἡ ε, πρὸς τὴν ζ. Τῷ δοθέντι ἄρα ὁτῳδήποτε εὐθυγράμμῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 6. Fig. 19.



Πρότασις ΚΔ′.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον παραβαλεῖν.

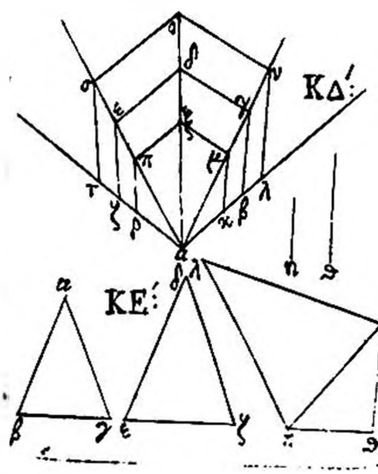
Ἔστω εὐθεῖα μὲν ἡ αβ, εὐθύγραμμον δὲ τὸ γδεζη, καὶ ζητηθήτω παραβληθῆναι παρὰ τὴν αβ, εὐθύγραμμον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τῷ γδεζη, δοθέντι. Διαιρεθήτω δὴ τὸ δοθὲν εἰς τὰ ζηγ, γζδ, δζε, τρίγωνα, καὶ τῇ μὲν ὑπὸ ζγδ, γωνίᾳ γενέσθω ἴση ἡ ὑπὸ θαβ, τῇ δὲ ὑπὸ ζδγ, ἡ ὑπὸ θβα, τῇ δὲ ὑπὸ ζγη, ἡ ὑπὸ θακ, τῇ δὲ ὑπὸ γζη, ἡ ὑπὸ αθκ, τῇ δὲ ὑπὸ ζδε, ἡ ὑπὸ θβλ, καὶ τῇ ὑπὸ δζε, ἡ ὑπὸ βθλ, καὶ τὸ αβλθκ, συσταθὲν εὐθύγραμμον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον ἔσται τῷ δοθέντι γδεζη. Ἐπεὶ γὰρ τὰ θκα, αθβ, βθλ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσι τοῖς ζηγ, γζδ, δζε, ἕκαστον ἑκάστῳ· πάντως γε κατὰ τὴν δ′: τοῦ ς′: τοῦ Στοιχειωτοῦ, αἱ πλευραὶ τῶν θκα, αθβ, βθλ, τριγώνων ἀνάλογόν εἰσι ταῖς πλευραῖς τῶν ζηγ, γζδ, δζε, καὶ ἑπομένως ὅμοιά εἰσι κατὰ τὸν α′: ὅρον τοῦ παρόντος, τὰ ἄρα θκα, αθβ, βθλ, τρίγωνα ὅμοιά

εἰσι

εἰσι τοῖς ζηγ, γζδ, ζδε. ὥστε καὶ ὅλον τὸ θκαβλ, πολύγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ζηγδε, κατὰ τὴν κ': τοῦ ς': τοῦ αὐτοῦ. τὰ γὰρ ὅμοια πολύγωνα εἰς ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται, καὶ ἀνάπαλιν. Ἐπεὶ δὲ ἔχει καὶ τὴν αὐτὴν θέσιν, ἔστι δήπουθεν καὶ ὁμοίως κείμενον αὐτῷ.

Ἄλλως. Ἔστω εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἕτερον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον παραβαλεῖν, τὸ αβγδεζ, εὐθεῖα δὲ ἡ η, ἡ θ. Ἐξαχθήτωσαν δὲ κατὰ τὸ συνεχὲς αἱ αβ, αζ, εὐθεῖαι, καὶ ἀπὸ τοῦ α, διὰ τῶν γ δ, καὶ ε, σημείων διήχθωσαν αἱ αγ, αδ, αε, ἐκβαλλόμεναι καὶ αὗται ἐπ' ἄπειρον. κἂν μὲν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἐλάττων εἴη τῆς αβ, ὡς ἡ η, ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς αβ, ἡ ακ, ἴση τῇ δοθείσῃ η· εἰ δὲ μείζων ὡς ἡ θ, ἀφῃρήσθω ἡ αλ, ἴση τῇ θ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ, ἡ λ, παράλληλος τῇ βγ, ἤχθω ἡ κμ, ἡ λν, ἀπὸ δὲ τοῦ μ, ἡ ν, ἤχθω ὁμοίως παράλληλος τῇ γδ, ἡ μξ, ἡ νο, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁμοίως, καὶ συσταθήσεται τὸ ακμξπρ, ἡ αλνοστ, ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τῷ αβγδεζ, δοθέντι. Τὰ γὰρ ακμ, αβγ, αλν, τρίγωνα, ὅμοιά εἰσι καὶ ὁμοίως κείμενα, διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς κμ, βγ, λν, εὐθείας, καὶ τὴν ὑπὸ καμ, γωνίαν κοινήν. Διὰ τὰ αὐτὰ ἔσται καὶ τὰ λοιπὰ τρίγωνα ὅμοια. ὥστε κατὰ τὴν κ': τοῦ ς': τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὰ ακμξπρ, αβγδεζ, αλνοστ, πολύγωνα ὅμοιά εἰσι καὶ ὁμοίως κείμενα. Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 6. Fig. 20.



Πρότασις ΚΕ':

Δύο ὁμοίων τριγώνων δοθέντων, ἢ ἴσων, ἢ ἀνίσων, ἴσον καὶ ὅμοιον αὐτοῖς τρίγωνον εὑρεῖν.

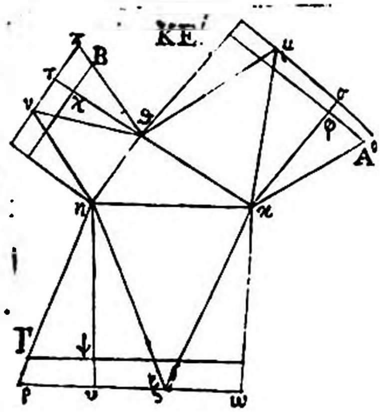
Ἔστωσαν δύο ὅμοια τρίγωνα ἄνισα τὰ αβγ, δεζ, καὶ ζητείσθω ἕτερον τρίγωνον ἴσον καὶ ὅμοιον τοῖς αὐτοῖς ὁμοῦ λαμβανομένοις. Συνεστάθω δὴ τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ηθκ, ὀρθὴν ἔχον γωνίαν τὴν πρὸς τῷ θ, ὥστε τὴν μὲν ηθ, αὐτοῦ πλευρὰν ἴσην εἶναι τῇ βγ, τὴν δὲ θκ, τῇ εζ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ηκ, βάσιν τοῦ ηθκ, τριγώνου τρίγωνον ὅμοιον ἑκατέρῳ τῶν δοθέντων αβγ, δεζ, τὸ ηκλ. καὶ τοῦτο ἴσον ἔσται τοῖς δοθεῖσιν αβγ, δεζ, ὁμοῦ λαμβανομένοις. Παραβεβλήσθωσαν γὰρ παρὰ τὰς ηθ, θκ, κη, τρεῖς τοῦ αὐτοῦ τριγώνου πλευρὰς τοῦ ηθκ, τὰ ηθν, κθμ, ηκξ, τρίγωνα, ὥστε τὸ μὲν ηθν, ἴσον εἶναι καὶ ὅμοιον τῷ αβγ, τὸ δὲ κθμ, τῷ δεζ. καὶ

τῷ μὲν

τῇ μὲν κθ, ἴση τε καὶ παράλληλος ἤχθω ἡ μο, τῇ δὲ ηθ, ἡ νπ, καὶ τῇ ηκ, ἡ ξρ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κο, θπ, νρ εἶτα συμπιπτέτωσαν ἐφ' ἑκάστης τῶν ηθ, θκ, κη, εὐθειῶν κάθετοι αἱ κσ, θτ, ηυ. καὶ εἰλήφθω τῇ μὲν κθ, ἡ κφ, ἴση, τῇ δὲ θη, ἡ θχ, καὶ τῇ κη, ἡ κψ, καὶ συμπεπληρώσθωσαν τὰ θφ, ηχ, κψ, τετράγωνα, καὶ τὰ θΑ, ηΒ, κΓ, παραλληλόγραμμα. Δείκνυται.

Ἐπεὶ τὰ ηχ, ηΒ, παραλληλόγραμμα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, πάντως γε ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ κατὰ τὴν λε΄: τοῦ α΄: τοῦ Ἐπιχειρήματος. ὥστε κατὰ τὴν αὐτὴν, καὶ τὰ ητ, κπ, κψ, κΓ, κυ, κρ, ἴσα ὁμοίως ἀλλήλοις εἰσίν. ἄρα ὡς ἔχει τὸ ηχ, πρὸς τὸ ηΒ, ἔχει καὶ τὸ κψ, πρὸς τὸ κΓ. ὡς δὲ ἔχει τὸ ηχ, πρὸς τὸ ηΒ, ἔχει καὶ τὸ ητ, πρὸς τὸ ηπ, ὡς δὲ τὸ κψ, πρὸς τὸ κΓ, ἔχει καὶ τὸ κυ, πρὸς τὸ κρ, τέσσαρα ἄρα μεγέθη τὰ ηχ, ηΒ, κψ, κΓ, τέσσαρσι μεγέθεσι τοῖς ητ, ηπ, κυ, κρ, ἀνάλογόν εἰσιν, ὥστε καὶ δι' ἴσου τὸ ηχ, πρὸς τὸ κΓ, ἢ τὸ ἴσον τούτῳ κψ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν καὶ τὸ ητ, πρὸς τὸ κρ, ἢ τὸ ἴσον τούτῳ κυ, κατὰ τὴν κβ΄: τοῦ ε΄: τοῦ Ἐπιχειρήματος. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ θφ, τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον πρὸς τὸ κψ, ὃν καὶ τὸ θσ, πρὸς τὸ κυ. Πρῶτον ἄρα τὸ ηχ, πρὸς β΄: τὸ κψ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τρίτον τὸ ητ, πρὸς τέταρτον τὸ κυ. ἔχει δὲ καὶ πέμπτον τὸ θφ, τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς δεύτερον τὸ κψ, καὶ ἕκτον τὸ θσ, πρὸς τέταρτον τὸ κυ. ἄρα κατὰ τὴν κδ΄: τοῦ αὐτοῦ, καὶ συντεθὲν πρῶτον τὸ ηχ, καὶ πέμπτον τὸ θφ, πρὸς β΄: τὸ κψ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ γ΄: τὸ ητ, καὶ ϛ΄: τὸ θσ, πρὸς δ΄: τὸ κυ. ἀλλὰ τὰ ηχ, καὶ θφ, τετράγωνα ὁμοῦ λαμβανόμενα ἴσα ἐστὶ τῷ κψ, κατὰ τὴν μζ΄: τοῦ α΄: τοῦ αὐτοῦ. ἄρα καὶ τὰ ητ, θσ, ὁμοῦ λαμβανόμενα ἴσα ἐστὶ τῷ κυ. τὰ δὲ ητ, θσ, διπλάσιά ἐστι τῶν ηθν, θκμ, ὥσπερ καὶ τὸ κυ, τοῦ ηκξ, τριγώνου, κατὰ τὴν μα΄: τοῦ α΄: τοῦ αὐτοῦ. ἄρα καὶ τὰ ηθν, θκμ, τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ηκξ, τριγώνῳ. ὡς ἔχει γὰρ τὸ ὅλον πρὸς τὸ ὅλον, ἔχει καὶ τὸ ἥμισυ πρὸς τὸ ἥμισυ. Δύο ἄρα ὁμοίων τριγώνων δοθέντων ἀνίσων, εὕρηται τρίγωνον ἴσον αὐτοῖς καὶ ὅμοιον.

Geom. Lib. 6. Fig. 21.



Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

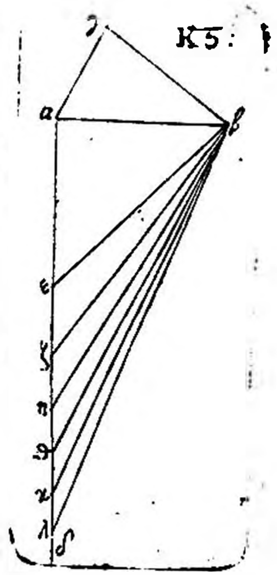
Ἐκ τούτων δῆλον ὅτι ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ παρὰ τὴν ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρὰν παραβαλλόμενον οἱονδήποτε εὐθύγραμμον ἴσον, ἐστὶ τοῖς παρὰ τὰς τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχούσας πλευρὰς παραβαλλομένοις, οἱοισδήποτε εὐθυγράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις.

Πρό-

Πρότασις ΚϚʹ.

Τοῦ δοθέντος εὐθυγράμμου εὐθύγραμμον ὅμοιον εὑρεῖν διπλάσιον, τριπλάσιον, τετραπλάσιον, καὶ ἐφεξῆς μεῖζον κατὰ τὸν τοῦ πολλαπλασίου λόγον γεωμετρικῶς.

Ἔστω εὐθύγραμμον τὸ αβγ, καὶ ζητηθήτω τούτου εὐθύγραμμον ἕτερον διπλάσιον, τριπλάσιον, τετραπλάσιον, καὶ ἐφεξῆς μεῖζον κατὰ τὸν τοῦ πολλαπλασίου λόγον. Συνεστάθω δὴ κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ αδ, ἀορίστως ἐκτεινομένη. καὶ ταύτης ἀφῃρήσθω ἡ αε, ἴση τῇ αβ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βε. Ἀφαιρουμένης δὲ ἀπὸ τῆς αδ, τῆς αζ, ἴσης τῇ βε, ἐπεζεύχθω ἡ βζ, τῇ δὲ βζ, ἀφαιρουμένης ἴσης τῆς αη, ἐπεζεύχθω ἡ βη, καὶ τοῦτο γενέσθω ἀεί, ἕως οὗ βούλει, καὶ ἕξεις τὸ ζητούμενον. Geom. Lib. 6. Fig. 22. *Ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῆς βε, συσταθῇ τρίγωνον ὅμοιον τῷ δοθέντι αβγ, ἔσται τὸ ἐπὶ τῆς βε, διπλάσιον τοῦ αβγ. Ἐὰν δὲ ἐπὶ βζ, συσταθῇ, τριπλάσιον ἔσται τὸ αὐτό. ἐὰν δὲ ἐπὶ τῆς βη, τετραπλάσιον, καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς ἀναλόγως, κατὰ γὰρ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, τὸ μὲν παρὰ τὴν βε, παραβαλλόμενον εὐθύγραμμον ἴσον ἐστὶ τοῖς παρὰ τὰς αβ, αε, παραβαλλομένοις ὁμοίοις εὐθυγράμμοις. ἀλλὰ τὰ παρὰ τὰς αβ, αε, ἴσα ἀλλήλοις εἰσί, διὰ τὸ ἴσας εἶναι καὶ τὰς αβ, αε, καὶ τὰ δύο ὁμοῦ τοῦ ἑνὸς διπλάσια, ἄρα καὶ τὸ παρὰ τὴν βε, διπλάσιόν ἐστι τοῦ αβγ, ἴση δὲ τῇ βε, ἡ αζ, ἄρα καὶ τὸ παρὰ τὴν αζ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ αὐτοῦ αβγ, λαμβανομένου δὲ καὶ τοῦ παρὰ τὴν αβ, τὰ δύο ὁμοῦ πάντως τό, τε παρὰ τὴν αβ, καὶ τὸ παρὰ τὴν αζ, τριπλάσια ἔσονται τοῦ αβγ. τοῖς δὲ παρὰ τὴν αβ, καὶ αζ, ἴσον ἐστὶ τὸ παρὰ τὴν βζ, κατὰ τὸ ῥηθὲν πόρισμα, ἄρα τὸ παρὰ τὴν αζ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ αβγ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ τὸ παρὰ τὴν βη, τετραπλάσιον τοῦ αὐτοῦ, τὸ δὲ παρὰ τὴν βθ, πενταπλάσιον. τὸ δὲ παρὰ τὴν βκ, ἑξαπλάσιον, τὸ δὲ παρὰ τὴν βλ, ἑπταπλάσιον, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ἀναλόγως.*



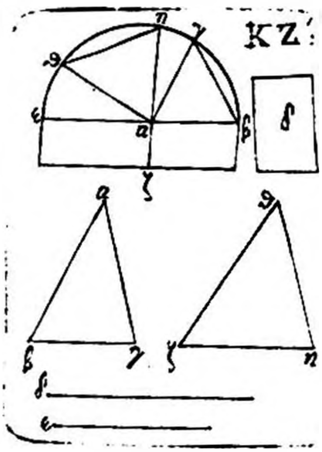
Αὕτη ἡ πρότασις ἀληθεύει καὶ ἐπὶ τῶν κύκλων, καὶ λοιπῶν καμπυλογράμμων ἐπιπέδων σχημάτων, καὶ παντὸς ἄλλου εἴδους, ὥστε ἐὰν ἡ αβ, βε, βζ, καὶ λοιπαὶ εὐθεῖαι ἀντὶ διαμέτρων ληφθῶσι κύκλων, ἢ πλευρῶν ἑτέρου εἴδους ἐπιπέδων ὁμοίων σχημάτων, ὁ μὲν τῆς βε, κύκλος, ἢ τὸ παρὰ τὴν βε, παραβαλλόμενον εὐθύγραμμον διπλάσιον ἔσται τοῦ τῆς αβ, κύκλου, ἢ τοῦ παρὰ τὴν αβ, εὐθυγράμμου, ὁ δὲ τῆς βζ, τριπλάσιος, ὁ δὲ τῆς βη, τετραπλάσιος, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ἀναλόγως. Εἰσὶ γὰρ καὶ οἱ κύκλοι ἐν διπλασίονι λόγῳ τῶν ἰδίων διαμέτρων, καθάπερ καὶ τὰ εὐθύγραμμα, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς ῥηθήσεται.

Πρότασις ΚΖ΄.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον εὐθύγραμμον συστήσασθαι ὅμοιον ἑτέρῳ δοθέντι.

Ἔστωσαν εὐθύγραμμα τὸ α β γ, καὶ δ, καὶ ζητείσθω εὐθύγραμμον ἴσον μὲν τῷ δ, ὅμοιον δὲ τῷ α β γ. Παραβεβλήσθω δὲ παρὰ μὲν τὴν α β, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ α β γ, δοθέντι τὸ β ζ, ὀρθογώνιον κατὰ τὴν ι β: τοῦ παρόντος. Παρὰ δὲ τὴν α ζ, τὸ ζ ε, ἴσον τῷ δ· καὶ εὑρεθήτω μέση ἀνάλογος τῶν α β, α ε, ἡ α η, κατὰ τὴν θ: τοῦ α: τοῦ παρόντος, καὶ συνεστάσθω ἐπ' αὐτῆς τὸ α η θ, ὅμοιον τῷ α β γ, κατὰ τὴν κ γ: τοῦ αὐτοῦ, καὶ τοῦτο ἔσται τὸ ζητούμενον. Ἐπεὶ γὰρ τὰ β ζ, ζ ε, ἰσοϋψῆ εἰσὶ, πάντως γε ὡς ἡ β α, πρὸς τὴν α ε, τὸ β ζ, πρὸς τὸ ζ ε, τυγχάνει, κατὰ τὴν α: τοῦ ϛ: τῶν Στοιχείων, ἀλλ' ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν α ε, ἔχει, καὶ τὸ α β γ, πρὸς τὸ α η θ, κατὰ τὴν α: τοῦ γ: τοῦ παρόντος, ἄρα ὡς ἔχει τὸ β ζ, πρὸς τὸ ζ ε, ἔχει καὶ τὸ α β γ, πρὸς τὸ α η θ, τὸ δὲ β ζ, ἴσον ἐστὶ τῷ α β γ, ἄρα καὶ τὸ ζ ε, ἴσον ἐστὶ τῷ α η θ. Ἐπεὶ δὲ τὸ ζ ε, γέγονεν ἴσον τῷ δ, πάντως γε καὶ τὸ α η θ, ἴσον ἐστὶ τῷ δ, γέγονε δὲ καὶ ὅμοιον τῷ α β γ. Τῷ δοθέντι ἄρα εὐθυγράμμῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 6. Fig. 23.



Πρότασις ΚΗ΄.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον συστήσασθαι κατὰ τὸν δοθέντα λόγον τῶν πλευρῶν.

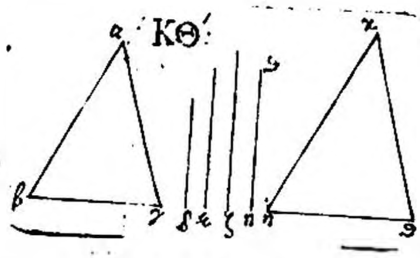
Ἔστω εὐθύγραμμον τὸ α β γ, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τοῦ δ, μεγέθους πρὸς τὸ ε, καὶ ζητείσθω συσταθῆναι ἕτερον εὐθύγραμμον ὅμοιον τῷ δοθέντι α β γ, ὥστε ἔχειν ἑκάστην τῶν πλευρῶν ἐκείνου πρὸς ἑκάστην τῶν πλευρῶν τοῦ α β γ, ὡς τὸ δ, πρὸς τὸ ε. Γενέσθω δὲ ὡς τὸ ε, πρὸς τὸ δ, ἡ β γ, πρὸς τὴν ζ η, κατὰ τὴν ιϛ΄: τοῦ α: τοῦ παρόντος, καὶ πρὸς τῷ ζ, σημείῳ συνεστάσθω ἡ ὑπὸ η ζ θ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ γ β α, κατὰ τὴν κ γ΄: τοῦ αὐτοῦ. ἡ δὲ ὑπὸ ζ η θ, τῇ ὑπὸ β γ α, καὶ τὸ ζ η θ, εὐθύγραμμον ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον ἔσται τῷ α β γ. κατὰ γὰρ τὴν δ΄: τοῦ ϛ΄: τῶν Στοιχείων. ἐπεὶ τὰ α β γ, θ η ζ, ἰσογώνιά εἰσι, πάντως γε τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσι τὰς σι τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν γα, ἡ ζη, πρὸς τὴν ηθ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν ζη, ἡ γα, πρὸς τὴν ηθ. ὡς δὲ ἡ βγ, πρὸς τὴν ζη, ἔστι καὶ τὸ ε, πρὸς τὸ δ. ἄρα ἡ γα, πρὸς τὴν ηθ, ἔχει ὡς τὸ ε, πρὸς τὸ δ. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς τὸ δ, πρὸς τὸ ε, ἡ ζη, πρὸς τὴν βγ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ θζ, ἔχειν πρὸς τὴν αβ, ὡς τὸ δ, πρὸς τὸ ε. ὧν δὲ σχημάτων αἱ πλευραὶ ἀνάλογον, ὅμοιά εἰσι κατὰ τὸν μ α: ὅρον τοῦ παρόντος. τὸ ηθζ, ἄρα συνέστη ὅμοιον τῷ αβγ, κατὰ τὸν δοθέντα λόγον. Ὅτι δὲ καὶ ὁμοίως κείμενον, δῆλον. Τὴν αὐτὴν γὰρ ἔχει ἐκείνῳ θέσιν.

Πρότασις ΚΘʹ.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον συστήσασθαι κατὰ τὸν δοθέντα λόγον τῶν ἐμβαδῶν.

Ἔστω εὐθύγραμμον μὲν τὸ αβγ, λόγος δὲ, καθ᾽ ὃν δεῖ συστήσασθαι ἕτερον τρίγωνον ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον τῷ αβγ, ὁ τοῦ δ, πρὸς τὸ ε. Εὑρεθέτω κατὰ τὴν ιϛʹ: τοῦ α: τοῦ παρόντος δʹ: ἀνάλογος τῶν δ, ε, καὶ βγ, ἢ ἄλλης ὁποτερασδήποτε πλευρᾶς τοῦ αβγ, τριγώνου, καὶ ἔστω αὕτη ἡ ζ. τῶν δὲ βγ, καὶ ζ, εὑρεθήτω μέση ἀνάλογος κατὰ τὴν θʹ: τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἔστω αὕτη ἡ ηθ. Εἶτα παρὰ τὴν ηθ, παραβληθήτω εὐθύγραμμον ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τῷ δοθέντι αβγ, τὸ ηθκ, καὶ τοῦτο ἔσται τὸ ζητούμενον. Ἐπεὶ γὰρ αἱ βγ, ηθ, καὶ ζ, ἀνάλογόν εἰσι, πάντως γε τὸ ἐπὶ τῆς βγ, εὐθύγραμμον πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς ηθ, ἔχει ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν ζ, ὡς ἡ α: δηλ: πρὸς τὴν γʹ: κατὰ τὴν αʹ: τοῦ γʹ: τοῦ παρόντος. ὡς δὲ ἡ βγ, πρὸς τὴν ζ, ἔχει καὶ ἡ δ, πρὸς τὴν ε. ἄρα τὸ αβγ, εὐθύγραμμον πρὸς τὸ ηθκ, ἔχει ὡς ἡ δ, πρὸς τὴν ε. γέγονε δὲ καὶ ὅμοιον αὐτῷ. Τῷ δοθέντι ἄρα τριγώνῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 6. Fig. 24.



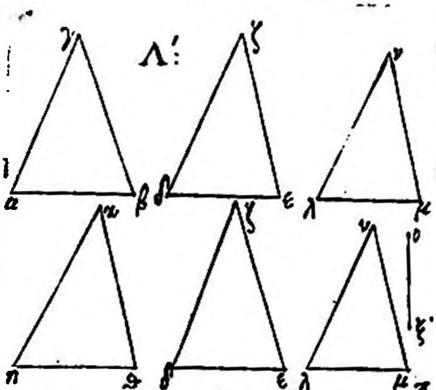
Πρότασις Λʹ.

Δύο δοθέντων εὐθυγράμμων τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔστωσαν δύο ὁποιαδήποτε εὐθύγραμμα τὰ αβγ, δεζ, καὶ ζητείσθω γʹ: ἀνάλογος. Συνεστάθω δὴ τὸ ηθκ, ἴσον μὲν τῷ αβγ, ὅμοιον δὲ τῷ δεζ, κατὰ τὴν κζʹ: τοῦ παρόντος, καὶ εὑρεθήτω τῶν ηθ, δε, ὁμολόγων πλευρῶν γʹ: ἀνάλογος ἡ λμ, κατὰ τὴν ιγʹ: τοῦ α: τοῦ παρ: καὶ συσταθήτω ἐπ᾽ αὐτῆς τὸ λμν, ὅμοιον τῷ δεζ, καὶ τοῦτο ἔσται τὸ ζητούμενον. Ἐπεὶ γὰρ τὰ ηθκ, δεζ, λμν, ὅμοιά εἰσι, καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς τὰς η θ, δ ε, λ μ, ἔχουσιν ἀναλόγως, πάντως γε καὶ αὐτὰ ἀνάλογά εἰσιν. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ η θ κ, πρὸς τὸ δ ε ζ, οὕτω καὶ τὸ δ ε ζ, πρὸς τὸ λ μ ν, ἀλλὰ τὸ η θ κ, γέγονεν ἴσον τῷ α β γ, τὰ τρία ἄρα α β γ, δ ε ζ, καὶ λ μ ν, ἀνάλογά εἰσι. Δύο ἄρα δοθέντων εὐθυγράμμων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Ὅτι δὲ τὰ η θ κ, δ ε ζ, λ μ ν, ἀνάλογόν εἰσι, δῆλον. Εὑρεθήτω γὰρ τετάρτη ἀνάλογος ἡ ξ ο. καὶ ἐπεὶ ἡ η θ, πρὸς τὴν δ ε, ἔχει ὡς ἡ λ μ, πρὸς τὴν ξ ο, ἐναλλὰξ ἄρα, ὡς ἡ η θ, πρὸς τὴν λ μ, ἡ δ ε, πρὸς τὴν ξ ο. Αὖθις ἐπεὶ τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν κατὰ τὴν ιθ': καὶ κ': τοῦ ς': τῶν Στοιχειώσεων, πάντως γε καὶ τὸ η θ κ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ πρὸς τὸ δ ε ζ, ἤπερ ἡ η θ, πρὸς τὴν δ ε, ἀλλ' ἡ η θ, πρὸς τὴν λ μ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἤπερ πρὸς τὴν δ ε, ἄρα ὡς ἡ η θ, πρὸς τὴν λ μ, τὸ η θ κ, πρὸς τὸ δ ε ζ. Ὁμοίως δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ δ ε ζ, ἔχει πρὸς τὸ λ μ ν, ὡς ἡ δ ε, πρὸς τὴν ξ ο, ὡς δ' ἔχει ἡ η θ, πρὸς τὴν λ μ, ἔχει καὶ ἡ δ ε, πρὸς τὴν ξ ο, ὡς δέδεικται. ἄρα καὶ τὸ η θ κ, ἔχει πρὸς τὸ δ ε ζ, ὡς ἔχει τὸ αὐτὸ δ ε ζ, πρὸς τὸ λ μ ν. Δύο ἄρα δοθέντων εὐθυγράμμων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 6. Fig. 25.

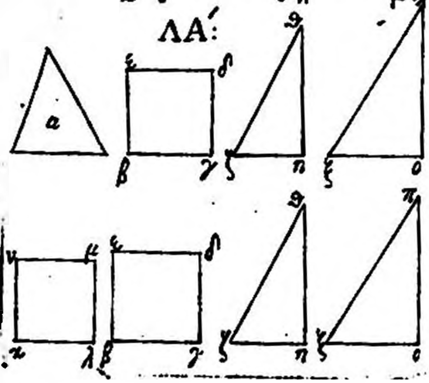


ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα, ὧν αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ἀνάλογον, καὶ αὐτὰ ἀνάλογόν εἰσιν.

Πρότασις ΛΑ'.

Τριῶν δοθέντων εὐθυγράμμων τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.



Ἔστωσαν εὐθύγραμμα τὰ α, β γ δ ε, ζ η θ, καὶ ζητείσθω τέταρτον ἀνάλογον. Συνεστάσθω α': τὸ κ λ μ ν, ἴσον τῷ α, καὶ ὅμοιον τῷ β γ δ ε, κατὰ τὴν κ ζ': τοῦ παρόντος· εἶτα εὑρεθήτω δ': ἀνάλογος τῶν κ λ, β γ, ζ η, εὐθειῶν ἡ ξ ο, καὶ ἐπ' αὐτῆς συνεστάσθω τὸ ξ ο π, ὅμοιον τῷ ζ η θ, καὶ τοῦτ' ἔσται τὸ ζητούμενον. Ἐπεὶ γὰρ τὰ τε κ μ, β δ, καὶ ζ η θ, ξ ο π, ὅμοιά εἰσι, πάντως γε τὸ μὲν κ μ, πρὸς τὸ β δ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἤπερ ἡ κ λ, πρὸς τὴν β γ, τὸ δὲ ζ η θ, πρὸς τὸ ξ ο π, ἤπερ ἡ ζ η, πρὸς τὴν ξ ο.

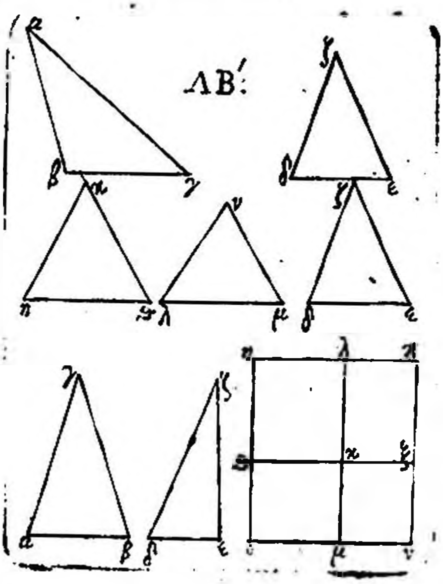
τὴν ξο, ὡς δὲ ἡ κλ, πρὸς τὴν βγ, ἔχει καὶ ἡ ζη, πρὸς τὴν ξο, ἄρα καὶ τὸ κμ, πρὸς τὸ βδ, ἔχει, ὡς τὸ ζηθ, πρὸς τὸ ξοπ. ἀλλὰ τὸ κμ, γέγονεν ἴσον τῷ α, ἄρα καὶ τὸ α, πρὸς τὸ βδ, ἔχει ὡς τὸ ζηθ, πρὸς τὸ ξοπ. ὥστε τὸ ξοπ, τέταρτόν ἐστιν ἀνάλογον. Τριῶν ἄρα δοθέντων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΛΒʹ.

Δύο εὐθυγράμμων δοθέντων μέσον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔστωσαν εὐθύγραμμα τὰ αβγ, δεζ, καὶ ζητηθήτω τούτων μέσον ἀνάλογον. Συνεστάθω τὸ ηθκ, ἴσον μὲν τῷ αβγ, ὅμοιον δὲ τῷ δεζ, καὶ τῶν ηθ, δε, εὐθειῶν, εὑρεθήτω μέση ἀνάλογος ἡ λμ, καὶ ἐπ' αὐτῆς συσταθήτω τὸ λμν, ὅμοιον τῷ ηθκ, ἢ δεζ, καὶ ἔσται τὸ ζητούμενον. Κατὰ γὰρ τὸ πόρισμα τῆς λʹ. τοῦ παρόντος, ἐπεὶ τῶν ηθκ, λμν, δεζ, ὁμοίων εὐθυγράμμων, αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ηθ, λμ, δε, ἀνάλογόν εἰσι, πάντως γε καὶ τὰ ηθκ, λμν, δεζ, ἀνάλογόν εἰσιν. ἀλλὰ τὸ ηθκ, γέγονεν ἴσον τῷ αβγ. τὰ ἄρα αβγ, λμν, δεζ, εὐθύγραμμα ἀνάλογόν εἰσιν, ὥστε ὡς ἔχει τὸ αβγ, πρὸς τὸ λμν, ἔχει δήπουθεν καὶ τὸ λμν, πρὸς τὸ δεζ, καὶ ἑπομένως τὸ αὐτὸ λμν, μέσον ἀνάλογόν ἐστι τῶν δοθέντων αβγ, δεζ, εὐθυγράμμων, ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Geom. Lib. 6. Fig. 26.



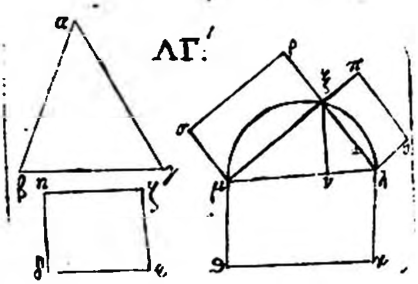
Ἔστωσαν ἄλλως εὐθύγραμμα τὰ αβγ, δεζ, καὶ ζητηθήτω μέσον αὐτῶν ἀνάλογον. Συνεστάθω δὴ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ μὲν αβγ, τὸ ηθκλ, τῷ δὲ δεζ, τὸ κμνξ, ὅμοιον τῷ ηθκλ, καὶ συναφθήτωσαν ἀλλήλοις τὰ θλ, μξ, παραλληλόγραμμα, ὥστε τὰς θκ, κξ, καὶ λκ, κμ, πλευρὰς αὐτῶν ἐπ' εὐθείας εἶναι, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ηονπ, καὶ ἑκάτερον τῶν κο, κπ, παραπληρωμάτων μέσον ἀνάλογόν ἐστι τῶν αβγ, δεζ, δοθέντων εὐθυγράμμων. κατὰ γὰρ τὴν αʹ. τοῦ ϛʹ. τῶν Στοιχείων: τὸ θλ, πρὸς τὸ κπ, ἔχει ὡς ἡ θκ, πρὸς τὴν κξ, ὡς δὲ ἡ θκ, πρὸς τὴν κξ, ἔχει καὶ τὸ θμ, τουτέστι τὸ κπ, πρὸς τὸ μξ, ἄρα ὡς ἔχει τὸ θλ, πρὸς τὸ κπ, ἔχει καὶ τὸ κπ, πρὸς τὸ μξ. ἀλλὰ τὸ μὲν θλ, ἴσον ἐστὶ τῷ αβγ, τὸ δὲ μξ, τῷ δεζ, ἄρα ὡς τὸ αβγ, πρὸς ἑκάτερον τῶν κο, κπ, παραπληρωμάτων, οὕτω καὶ ἑκάτερον τῶν κο, κπ, πρὸς τὸ δεζ. Δύο ἄρα εὐθυγράμμων δοθέντων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρό-

Πρότασις ΛΓ'.

Παρὰ τοῦ δοθέντος εὐθυγράμμου τὸ ἐπιταχθὲν μέρος ἀφελεῖν, ὥστε τὸ ἀφαιρεθὲν ὅμοιον εἶναι ἑτέρῳ δοθέντι εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω εὐθύγραμμον τὸ μὲν αβγ, παρ' οὗ ζητεῖται γ'. μέρος ἀφελεῖν, τὸ δὲ δεζη, ᾧ δεῖ ὅμοιον εἶναι τὸ ἀφαιρεθέν, καὶ ἔστω ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ αβγ, τρίτον μέρος ὅμοιον τῷ δζ. Συνεστάθω δὴ παραλληλόγραμμον ἴσον μὲν τῷ αβγ, ὅμοιον δὲ τῷ δζ, τὸ θκλμ, καὶ ἀφῃρήσθω τῆς μλ, γ'. μέρος τὸ λν, καὶ γραφήτω περὶ αὐτὴν ἡμικύκλιον τὸ μξλ, ἀπὸ δὲ τοῦ ν, ἀνεστάθω ἐπ' αὐτῆς πρὸς ὀρθὰς ἡ νξ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ξμ, ξλ. Εἶτα συνεστάθωσαν ἐπὶ τῶν ξλ, ξμ, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τῷ θλ, παραλληλόγραμμα τὰ ξλοπ, καὶ μξρσ, καὶ τὸ ξλοπ, γ'. ἔσται μέρος τοῦ αβγ. Ἐπεὶ γὰρ τὰ μνξ, μξλ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσι, πάντως γε ὡς ἔχει ἡ μν, πρὸς τὴν νξ, ἔχει καὶ ἡ μξ, πρὸς τὴν ξλ. Αὖθις ἐπεὶ ἡ μν, πρὸς τὴν νλ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστίν, ἤπερ πρὸς τὴν νξ, ἔστι δὲ καὶ τὸ μρ, πρὸς τὸ ξο, ἐν διπλασίονι ὁμοίως λόγῳ, ἤπερ ἡ μξ, πρὸς τὴν ξλ, τὸ μρ, δήπουθεν πρὸς τὸ ξο, ἔχει ὡς ἡ μν, πρὸς τὴν νλ, ἐν συνθέσει ἄρα ὡς ἔχει ὅλη ἡ μλ, πρὸς τὴν νλ, ἔχουσι



Geom. Lib. 6. Fig. 27.

καὶ τὰ μρ, ξο, ὁμοῦ πρὸς τὸ ξο, μόνον, ἀλλὰ τὰ μρ, ξο, ἴσα ἐστὶ τῷ θλ, κατὰ τὸ πόρ. τῆς κε'. τοῦ παρ. ἄρα ὡς ἡ μλ, πρὸς τὴν νλ, τὸ θλ, πρὸς τὸ ξο, ἡ δὲ νλ, γ'. ἐστὶ μέρος τῆς μλ, καὶ τὸ ξο, ἄρα γ'. μέρος ἐστὶ τοῦ θλ, τούτου δὲ ἴσον γέγονε τῷ αβγ. ἄρα παρὰ τοῦ δοθέντος εὐθυγράμμου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΛΔ'.

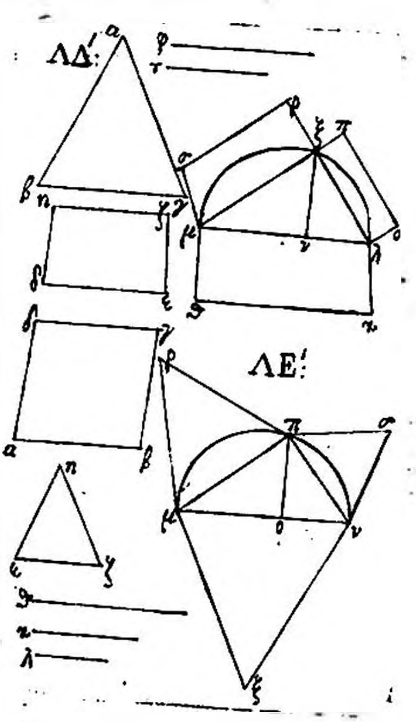
Δοθέντος εὐθυγράμμου, δύο εὐθύγραμμα συστήσασθαι, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα ἑτέρῳ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ὥστε τὰ συσταθέντα ὁμοῦ λαμβανόμενα ἴσα εἶναι τῷ δοθέντι, ἔχοντα τὸν δοθέντα λόγον.

Ἔστω εὐθύγραμμον τὸ αβγ, καὶ ζητηθήτωσαν δύο ἕτερα εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τῷ δεζη, καὶ αὐτῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἅτινα ὁμοῦ λαμβανόμενα ὀφείλει ἴσα εἶναι τῷ αβγ, ἔχοντα τὸν τοῦ τ, πρὸς τὸ φ, λόγον. Συσταθήτω δὴ τὸ θκλμ, ἴσον μὲν τῷ αβγ, ὅμοιον δὲ τῷ δεζη, διὰ τῆς κζ'. τοῦ παρόντος, καὶ τμηθήτω ἡ μλ, κατὰ τὸ ν, ὥστε τὴν μν, ἔχειν πρὸς τὴν νλ,

ὡς

ὡς τὸ τ, μέγεθος πρὸς τὸ φ, κατὰ τὴν ϛ': τοῦ α': τοῦ παρόντος. ἀπὸ δὲ τοῦ ν, ἀνεστάθω πρὸς ὀρθὰς ἡ νξ, ἐπὶ τῆς λμ, καὶ γραφέσθω περὶ τὴν μλ, ἡμικύκλιον τὸ μξλ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ξμ, ξλ. Εἶτα συνεστάθωσαν ἐπ' αὐτῶν ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τῷ θκλμ, παραλληλόγραμμα τὰ ξλοπ, μξρσ, καὶ τὰ μρ, ξο, ἔσονται τὰ ζητούμενα. Ὅτι μὲν γὰρ ταῦτα ἴσα εἰσὶ τῷ θλ, δῆλον ἐκ τοῦ πορίσ: τῆς κε': τοῦ παρόντος. Γέγονε δὲ τὸ θλ, ἴσον τῷ αβγ, δοθέντι, τὰ μρ, ἄρα ξο, ἴσα εἰσὶ τῷ αβγ. Ὅτι δὲ ἔχουσι καὶ τὸν δοθέντα λόγον, δείκνυται διὰ τῆς κατασκευῆς. ὡς γὰρ ἔχει ἡ μν, πρὸς τὴν νλ, ἔχει καὶ τὸ μρ, πρὸς τὸ ξο, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἀλλ' ἡ μν, πρὸς τὴν νλ, ἔχει ὡς τὸ τ, πρὸς τὸ φ, ἄρα καὶ τὸ μρ, εὐθύγραμμον πρὸς τὸ ξο, ἔχει ὡς τὸ τ, πρὸς τὸ φ, γέγονε δὲ καὶ ὅμοια τῷ δεζ. Δοθέντος ἄρα εὐθυγράμμου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 6. Fig. 28.



Πρότασις ΛΕ:

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ δύο εὐθύγραμμα ἴσα ὁμοῦ λαμβανόμενα συστήσασθαι, ὥστε εἶναι ὅμοια ἑτέρῳ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, τὰς δ' ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς ἔχειν τὸν δοθέντα λόγον.

Ἔστω εὐθύγραμμον τὸ αβγδ, καὶ ζητείσθωσαν δύο εὐθύγραμμα ὅμοια μὲν τῷ εζη, ὁμοῦ δὲ λαμβανόμενα ἴσα τῷ αγ, καὶ τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς ἔχειν τὸν τῆς θ, λόγον πρὸς τὴν κ. Εὑρέθω δὴ κατὰ τὴν ιγ': τοῦ α': τοῦ παρόντος τρίτη ἀνάλογος τῶν θ, κ, ἡ λ, διὰ δὲ τῆς κζ': τοῦ παρόντος συνεστάθω τὸ μνξ, ἴσον μὲν τῷ αγ, ὅμοιον δὲ τῷ εζη, καὶ τμηθήτω ἡ μν, κατὰ τὸ ο, διὰ τῆς ϛ': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ, ὥστε ἔχειν τὴν μο, πρὸς τὴν ον, ὡς ἡ θ, πρὸς τὴν λ, καὶ τὰ λοιπὰ γενέσθω ὡς προειρημένα ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως, καὶ πάντως γε τὰ μπρ, νπσ, ἔσονται τὰ ζητούμενα. κατὰ γὰρ τὸ πόρισ: τῆς κε': τοῦ παρ: τὰ μπρ, νπσ, ὁμοῦ λαμβανόμενα ἴσα ἐστὶ τῷ μξν, τουτέστι τῷ αγ, δοθέντι, γέγονε δὲ καὶ ὅμοια τῷ εζη, κατὰ τὴν κατασκευήν. Ὅτι δὲ καὶ αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἔχουσι τὸν δοθέντα λόγον τῆς θ, πρὸς τὴν λ, δῆλον. κατὰ γὰρ τὴν δ': τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχειωτοῦ. ἐπεὶ τὰ μοπ, μπν, ἰσογώνιά εἰσι, πάντως γε ὡς ἔχει ἡ μο, πρὸς τὴν οπ, ἔχει

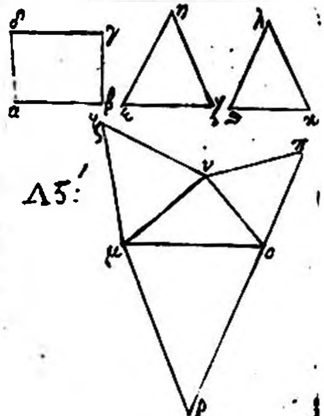
ἔχει καὶ ἡ μπ, πρὸς τὴν πν, ἀλλ' ἡ μο, πρὸς τὴν οπ, ἔχει ὡς ἡ θ, πρὸς τὴν κ, ἄρα καὶ ἡ μπ, πρὸς τὴν πν, ἔχει ὡς ἡ θ, πρὸς τὴν κ. ὅτι δὲ ἡ μο, πρὸς τὴν οπ, ἔχει ὡς ἡ θ, πρὸς τὴν κ, δῆλον. καὶ γὰρ ἡ θ, πρὸς τὴν λ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἤπερ πρὸς τὴν κ, καὶ ἡ μο, πρὸς τὴν ον, ἤπερ πρὸς τὴν οπ. ὡς δὲ ἡ θ, πρὸς τὴν λ, γέγονε καὶ ἡ μο, πρὸς τὴν ον. ἄρα καὶ ὡς ἡ θ, πρὸς τὴν κ, ἔχει καὶ ἡ μο, πρὸς τὴν οπ, ἀλλ' αἱ μπ, πν, εὐθεῖαι ὁμόλογοί εἰσι πλευραὶ τῶν μπρ, νπσ, ἃ καὶ ἴσα μὲν δέδεικται τῷ αγ, ὅμοια δὲ τῷ εζη. Τῷ δοθέντι ἄρα εὐθυγράμμῳ δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΛϚ':

Δυσὶ δοθεῖσιν εὐθυγράμμοις ἴσον εὐθύγραμμον συστήσασθαι, ὅμοιον ἑτέρῳ εὐθυγράμμῳ.

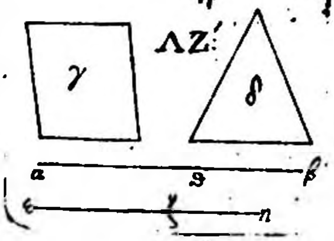
Ἔστωσαν δύο εὐθύγραμμα τὰ αγ, εζη, καὶ τούτοις μὲν ἴσον, ὅμοιον δὲ τῷ θκλ, δοθέντι καὶ αὐτῷ, ζητηθήτω εὐθύγραμμον. Συνεστάθω δὴ τὸ μὲν μνξ, ἴσον τῷ αβγδ, τὸ δὲ νοπ, ἴσον τῷ εζη, καὶ ἑκάτερον ὅμοιον τῷ θκλ, κατὰ τὴν κζ': τοῦ παρόντος. καὶ κείσθωσαν τὰ αὐτὰ μνξ, νοπ, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς μν, νο, ὀρθὴν ποιεῖν γωνίαν τὴν ὑπὸ μνο. καὶ τῆς μο, ἐπιζευχθείσης, συνεστάθω ἐπ' αὐτῆς τὸ μορ, ὅμοιον τῷ θκλ, καὶ τοῦτο ἔσται τὸ ζητούμενον. κατὰ γὰρ τὸ πόρ: τῆς κε': τοῦ παρόντ: ἴσον ἐστὶ τὸ μρο, τοῖς μνξ, νοπ. ἀλλὰ τὸ μὲν μνξ, γέγονεν ἴσον τῷ αβγδ, τὸ δὲ νοπ, τῷ εζη, τὸ μρο, ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς αγ, καὶ εζη, γέγονε δὲ καὶ ὅμοιον τῷ θκλ. Δυσὶν ἄρα δοθεῖσιν εὐθυγράμμοις, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 6. Fig. 29.



Πρότασις ΛΖ':

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν, ὥστε τὰ αὐτῆς μέρη ἔχειν πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ δοθέντα εὐθύγραμμα.



Κείσθω εὐθεῖα μὲν ἡ αβ, εὐθύγραμμα δὲ τὰ γ, καὶ δ, καὶ ἔστω τεμεῖν τὴν αβ, ὥστε τὰ μέρη αὐτῆς ἔχειν πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ γ, δ, δοθέντα εὐθύγραμμα. Εὑρεθήτωσαν αἱ εζ, ζη, εὐθεῖαι ἀνάλογον τοῖς γ, καὶ δ, εὐθυγράμμοις, κατὰ τὴν ιθ': τοῦ παρόντος, καὶ διαιρεθήτω ἡ αβ, κατὰ τὸ θ, ἀναλόγως τῇ εη, κατὰ

τὴν

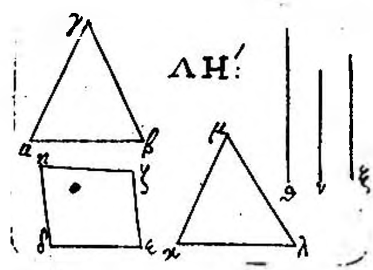
τὴν ϛ′: τοῦ α′: τοῦ παρόντος, καὶ γενήσεται τὸ προσαχθέν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ αβ, τέτμηται κατὰ τὸ θ, ἀναλόγως τῇ εη, πάντως γε ὡς ἔχει ἡ εζ, πρὸς τὴν ζη, ἔχει καὶ ἡ αθ, πρὸς τὴν θβ, ἀλλ' ἡ εζ, πρὸς τὴν ζη, γέγονεν, ὡς τὸ γ, εὐθύγραμμον πρὸς τὸ δ, ἄρα καὶ ἡ αθ, πρὸς τὴν θβ, ἔχει ὡς τὸ γ, πρὸς τὸ δ. Ἡ δοθεῖσα ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΛΗ′.

Δύο εὐθυγράμμων δοθέντων, καὶ μιᾶς εὐθείας, ἑτέραν εὑρεῖν εὐθεῖαν, ὥστε τὰς δύο εὐθείας τήν τε δοθεῖσαν καὶ τὴν εὑρεθεῖσαν ἔχειν πρὸς ἀλλήλας, ὡς τὰ δοθέντα εὐθύγραμμα.

Ἔστωσαν εὐθύγραμμα μὲν τὰ αβγ, δεζη, εὐθεῖα δὲ ἡ θ, καὶ ζητείσθω εὐθεῖα ἑτέρα, ὥστε ἔχειν πρὸς αὐτὴν τὴν θ, ὡς τὸ αβγ, εὐθύγραμμον πρὸς τὸ δζ. Συνεστάθω δὴ τὸ κλμ, εὐθύγραμμον ἴσον μὲν τῷ δζ, ὅμοιον δὲ τῷ αβγ, κατὰ τὴν κε′: τοῦ παρόντος, καὶ εὑρεθήτω γ′: ἀνάλογος τῶν αβ, κλ, ἡ ν. Εἶτα τριῶν εὐθειῶν κειμένων τῶν αβ, ν, θ, εὑρεθήτω τετάρτη ἀνάλογος ἡ ξ, ὥστε ἔχειν τὴν θ, πρὸς τὴν ξ, ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν ν. καὶ ἡ ξ, ἔσται ἡ ζητουμένη. Ἐπεὶ γὰρ αἱ τρεῖς αβ, κλ, καὶ ν, εὐθεῖαι ἑξῆς εἰσὶν ἀνάλογον, πάντως γε ὡς ἔχει ἡ αβ, α′: πρὸς τὴν ν, γ′: ἔχει καὶ τὸ ἐπὶ τῆς α′: αβ, τουτέστι τὸ αβγ, πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς β′: κλ, ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ κλμ, κατὰ τὴν α′: τοῦ γ′: τοῦ παρόντος,

Geom. Lib.6. Fig.30.



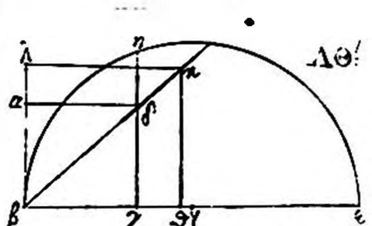
ἀλλ' ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν ν, γέγονε καὶ ἡ θ, πρὸς τὴν ξ, ἄρα ὡς ἡ θ, πρὸς τὴν ξ, ἔχει τὸ αβγ, πρὸς τὸ κλμ, ἢ τὸ δζ, τὸ ἴσον τούτῳ. Δύο ἄρα εὐθυγράμμων δοθέντων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΛΘ′.

Τῷ δοθέντι ὀρθογωνίῳ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον ὀρθογώνιον συστήσασθαι κατὰ τὸν δοθέντα λόγον.

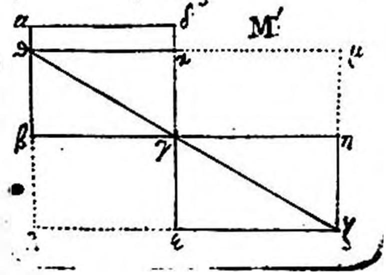
Ἔστω δὴ ὀρθογώνιον τὸ αβγδ, καὶ ζητείσθω τούτῳ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον ἕτερον ὀρθογώνιον κατὰ τὸν τοῦ διπλασίου λόγον. Ἐξαχθήτω δὴ ἡ βγ, κατὰ τὸ συνεχές, ὥστε τὴν γε, διπλασίαν εἶναι τῆς βγ, καὶ τμηθείσης δίχα τῆς βε, κατὰ τὸ ζ, γραφήτω ἡμικύκλιον τὸ βηε, καὶ ἐξαχθήτω ἡ γδ, τέμνουσα τὸ βηε, ἡμικύκλιον κατὰ τὸ η, ἴση δὲ τῇ γη, εἰλήφθω ἡ βθ, καὶ ἀπὸ τοῦ θ, παράλληλος τῇ γη, ἤχθω ἡ θκ, τέμνουσα τὴν βδ, διάμετρον τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου ἐκβαλλαμβανομένην καὶ τὸ κ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ θλ, ὀρθογώνιον, καὶ τοῦτο ἔσται τὸ ζητούμενον. Ὅτι μὲν γὰρ τὸ βκ, ὅμοιόν ἐστι τῷ βδ, δῆλον ἐκ τῆς κατασκευῆς, καὶ κατὰ τὴν δ': τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἡ βγ, ἔχει πρὸς τὴν γδ, ὡς ἡ βθ, πρὸς τὴν βκ. Ὅτι δὲ καὶ διπλάσιον τοῦ αὐτοῦ, δείκνυται· ἡ γὰρ γη, μέση ἀνάλογός ἐστι τῶν βγ, γε, ὥστε κατὰ τὴν α': τοῦ γ': τοῦ παρόντος, ὡς ἔχει ἡ γε, α': πρὸς τὴν βγ, γ': ἔχει καὶ τὸ ἐπὶ τῆς β': γη, παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς γ': βγ, ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον. ἀλλὰ τῇ γη, ἴση εἴληπται ἡ βθ, ἄρα καὶ τὸ παρὰ τὴν βθ, παραβαλλόμενον ὀρθογώνιον τὸ βκ, ἔχει πρὸς τὸ παρὰ τὴν βγ, τουτέστι τὸ βδ, ὡς ἡ γε, πρὸς τὴν βγ, ἀλλ' ἡ γε, διπλασία εἴληπται τῆς βγ, ἄρα καὶ τὸ βκ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ βδ. Τῷ δοθέντι ἄρα ὀρθογωνίῳ, καὶ τὰ ἑξῆς. Αὕτη ἡ πρότασις ἀληθεύει καὶ ἐπὶ παντὸς ἄλλου εἴδους τῶν πολυγώνων.

Geom. Lib. 6. Fig. 32.



Πρότασις Μ':

Δύο δοθέντων ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀνίσων τε καὶ ἀνομοίων, ἀπὸ τοῦ μείζονος τῷ ἐλάττονι ὅμοιον ἀφελεῖν παραλληλόγραμμον.



Ἔστωσαν δύο παραλληλόγραμμα ἰσογώνια μὲν, οὐ μὴν δὲ ἴσα καὶ ὅμοια τὸ αβγδ, καὶ γεζη, καὶ ζητείσθω ἀφαιρεθῆναι ἀπὸ τοῦ μείζονος αβγδ, ὅμοιον τῷ γεζη, ἐλάττονι. Κείσθωσαν δὴ τὰ αβγδ, γεζη, δοθέντα παραλληλόγραμμα οὕτως, ὥστε τὴν μὲν βγ, ἐπ' εὐθείας εἶναι τῇ γη, τὴν δὲ δγ, τῇ γε, ἡ μείζων τῇ μείζονι, καὶ ἡ ἐλάττων τῇ ἐλάττονι, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, διὰ τοῦ γ, διήχθω ἡ ζγθ, εὐθεῖα τέμνουσα ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος τὴν αβ, κατὰ τὸ θ, ἀπὸ δὲ τοῦ θ, ἤχθω παράλληλος τῇ βγ, τὸ θκ, καὶ τὸ θβγκ, ὅμοιον ἔσται τῷ γεζη. Ἀναπεπληρώσθω οὖν τὸ θλζμ, παραλληλ: καὶ ἐπεὶ τὰ βκ, εη, παραλληλ: περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ ἐστι, δῆλον ὅτι καὶ ὅμοια κατὰ τὴν κδ': τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, εἰ δὲ ἡ ζγθ, ἐκβαλλομένη τεμεῖ τὴν αδ, πλευρὰν, ἤχθω ἀπὸ τῆς αὐτῆς τομῆς παράλληλος τῇ γδ, καὶ τὰ λοιπὰ γενέσθω ὡς ἤδη εἴρηται, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθὲν, ὁ λόγος ὁ αὐτός.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα παντὸς παραλληλογράμμου, οὐ μόνον ὅμοιά εἰσιν, ἀλλὰ καὶ ὁμοίως κείμενα.

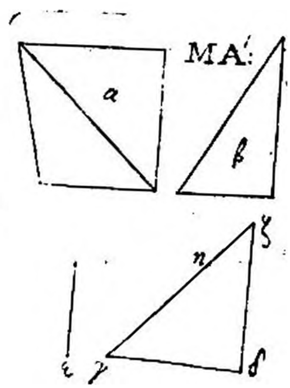
Προ-

Πρότασις ΜΑ'.

Δύο δοθέντων εὐθυγράμμων, ὧν θατέρου μὲν ἴσου ἐστὶ δυσί τισι τετραγώνοις, θατέρου δὲ τῷ ὑπὸ τῶν πλευρῶν τῶν αὐτῶν τετραγώνων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, τὰς τῶν τετραγώνων εὑρεῖν πλευράς.

Ε'στωσαν εὐθύγραμμα τὰ α, καὶ β, ὧν τὸ μὲν α, κείσθω εἶναι ἴσον δυσὶ τετραγώνοις, τὸ δὲ β, τῷ ὑπὸ τῶν πλευρῶν τῶν αὐτῶν τετραγώνων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ ζητηθήτωσαν αἱ πλευραὶ τῶν τετραγώνων ἐκείνων. Συνεστάθωσαν δὴ διὰ τῆς ιζ': τοῦ παρόντος, δύο τετράγωνα ἴσα τοῖς α, καὶ β, καὶ τοῦ μὲν ἴσου τῷ α, ἔστω πλευρὰ ἡ γδ, τοῦ δὲ ἴσου τῷ β, ἡ ε. Εὑρεθήτω δὲ καὶ ἕτερον τετράγωνον διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ε, κατὰ τὴν κ': τοῦ παρόντος, καὶ ἔστω τούτου πλευρὰ ἡ δζ, καὶ κείσθω αὕτη πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς γδ, κατὰ τὸ δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γζ. Εἶτα διαιρεθήτω αὕτη κατὰ τὸ η, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν γη, ηζ, ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ε, τετραγώνῳ διὰ τῆς θ': τοῦ ά: τοῦ παρόντος, καὶ αἱ γη, ηζ, ἔσονται πλευραὶ τῶν ζητουμένων τετραγώνων. τὸ γὰρ ἀπὸ τῆς γζ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν γδ, δζ, τετραγώνοις κατὰ τὴν μζ': τοῦ ά: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς γζ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶν ἔτι καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν γη, ηζ, τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γη, ηζ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ κατὰ τὴν δ': τοῦ β': τοῦ αὐτοῦ. ἄρα καὶ τὰ ὑπὸ τῶν γδ, δζ, τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν γη, ηζ, τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γη, ηζ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ε'πεὶ δ' αὖθις τὸ μὲν ἀπὸ τῆς δζ, τετράγωνον γέγονε διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ε, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν γη, ηζ, περιεχόμενον ἅπαξ ὀρθογώνιον ἴσον τῷ αὐτῷ τετραγώνῳ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ε, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς δζ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γη, ζη, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς γδ, τοῖς ἀπὸ τῶν γη, ηζ, τετραγώνοις, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς γδ, ἴσον ἐστὶ τῷ α. Εὕρηνται ἄρα δύο τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν γη, ηζ, οἷς τὸ α, ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ε, τῷ ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῶν περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ὅπερ ἔδει τὸ προτεθέν.

Geom. Lib.6. Fig.32.



Τέλος τοῦ Ε'κτου τῆς Γεωμετρίας Βιβλίου.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

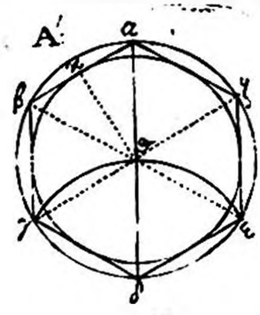
ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Πρότασις Α':

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω δὴ εἰς τὸν α β γ δ ε ζ, κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι. Εἰς δὲ τὴν τούτου κατασκευὴν ἤχθω διὰ τοῦ θ, κέντρου τοῦ αὐτοῦ κύκλου διάμετρος ἡ α θ δ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δ θ, γραφήτω ἕτερος κύκλος τέμνων τὸν δοθέντα κατὰ τὰ γ, καὶ ε, σημεῖα, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἑκατέρα τῶν γ θ, ε θ, ἤχθω κατὰ τὸ συνεχὲς πρὸς τὰ β, καὶ ζ, σημεῖα, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ α β, α ζ, γ β, ζ ε, γ δ, δ ε, καὶ τὸ α β γ δ ε ζ, ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἔσται καὶ ἰσογώνιον κατὰ τὴν ιε': τοῦ δ': τῶν Στοιχειωτῶν. Τοῦτον μὲν δὴ τὸν τρόπον δυνατὸν καὶ περιγραφῆναι ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περὶ οἱονδήποτε κύκλον. Γίνεται δὲ ἡ περιγραφὴ, ὡς προηρμήνευται περὶ τοῦ πενταγώνου, ἐξαγομένων δηλονότι εὐθειῶν τοῦ αὐτοῦ φερ' εἰπεῖν ἁπτομένων κύκλου κατὰ τὰ α β γ δ ε ζ, σημεῖα. Δοθέντος δὲ ἑξαγώνου ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου, ἐὰν αἱ α δ, β ε, γ ζ, ἐπιζευχθῶσι, καὶ κέντρῳ μὲν θ, διαστήματι δὲ τῷ θ α, ἢ θ β, κύκλος γραφῇ, περιγραφήσεται οὗτος περὶ τὸ δοθὲν ἑξάγωνον, εἰδὲ ἐπὶ τῆς α β, ἢ α ζ, ἢ ἄλλης τινὸς τῶν λοιπῶν τοῦ ἑξαγώνου πλευρῶν κάθετος συσταθῇ, πίπτουσα ἀπὸ τοῦ θ, δὸς εἰπεῖν, πρὸς τὸ θ κ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θ κ, κύκλος γραφῇ, ἐγγραφήσεται πάντως ὁ κύκλος οὗτος εἰς τὸ δοθὲν ἑξάγωνον.

Geom. Lib. 7. Fig. 1.

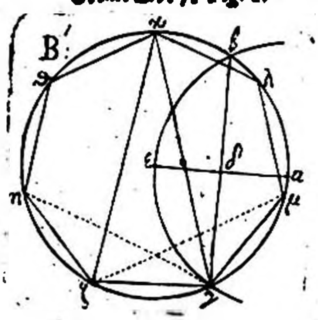


Πρότασις Β'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἑπτάγωνον ἐγγράψαι ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον.

Ἔστω δὴ εἰς τὸν αβγ, κύκλον ἑπτάγωνον ἐγγράψαι ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Ἵνα δὲ τοῦτο γένηται, εὑρεθήτω τὸ ε, κέντρον τοῦ δοθέντος κύκλου, καὶ ληφθήτω κέντρον μὲν τὸ α, τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ αὐτοῦ κύκλου, διάστημα δὲ τὸ αε, καὶ γραφήτω ἕτερος κύκλος τέμνων τὸν δοθέντα κατὰ τὰ β, καὶ γ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ βγ, ἥτις τμηθήσεται δίχα κατὰ τὸ δ, ὑπὸ τῆς αε. τούτων δ' οὕτω γενομένων ἡ βδ, ἡ δγ, πλευρὰ ἔσται ἑπταγώνου εἰς τὸν δοθέντα ἐγγραφομένου κύκλον. Δείκνυται.

Geom. Lib. 7. Fig. 2.



Μετενεχθήτω δὴ ἡ γδ, ἐπὶ τῆς γζ, ἐφ' ἧς συνεστάθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν τριπλασίονα τῆς κατὰ κορυφὴν, οἷον τὸ γζκ, καὶ κατὰ τὴν λγ': τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἔσται γμλκ, καὶ ζηθκ, περιφέρειαι, ἑκατέρα τριπλασία ἐστὶ τῆς γζ, περιφερείας, αἱ γὰρ περιφέρειαι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ ἐπ' αὐτῶν βεβηκυῖαι γωνίαι. καὶ ἡ μὲν ὑπὸ γζκ, γωνία βέβηκεν ἐπὶ τῆς γμλκ, ἡ δὲ ὑπὸ ζγκ, ἐπὶ τῆς ζηθκ, περιφερείας, ἀλλ' ἑκατέρα τούτων τῶν γωνιῶν τριπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ γκζ, κατὰ κορυφὴν, βεβηκυίας ἐπὶ τῆς γζ, περιφερείας, καὶ αἱ περιφέρειαι ἄρα γμλκ, καὶ ζηθκ, ἑκατέρα τριπλασία ἐστὶ τῆς γζ. καὶ συνθέσει αἱ δύο ὁμοῦ γμλκ, κθηζ, τῆς γζ, ἑξαπλάσιαί εἰσι. προσθέσει δὲ τῆς γζ, ὁ ὅλος κύκλος ἑπταπλάσιός ἐστι τοῦ γζ, τμήματος. ἡ γζ, ἄρα περιφέρεια ἑπτάκις μετρεῖ τὴν περίμετρον τοῦ ὅλου κύκλου, καὶ κατὰ τὴν κθ': τοῦ γ': τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἡ γζ, ὑποτείνουσα ἑπτάκις προσαρμοσθήσεται περιφερομένη ὑφ' ὅλην τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὥστε ἐγγραφήσεται τὸ γμλκθηζ, ἑπτάγωνον ἰσόπλευρον. Ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον, δῆλον. ἐπιζευχθεῖσαι γὰρ αἱ γη, μζ, ἔσονται ἴσαι. κατὰ γὰρ τὴν προσεχῶς ῥηθεῖσαν κθ': ὑπὸ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν (αἱ γὰρ μγζ, γζη, περιφέρειαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν) ἀλλ' εἰσὶν ἴσαι καὶ αἱ μγ, γζ, ταῖς γζ, γη, κατὰ τὸ β': ἀξίωμα τοῦ Εὐκλείδου, ἄρα κατὰ τὴν η': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ μγζ, ἴση ἐστὶ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ γζη. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσονται ὁμοίως ἴσαι καὶ αἱ λοιπαὶ τοῦ ἑπταγώνου γωνίαι, ὥστε καὶ ἰσογώνιον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

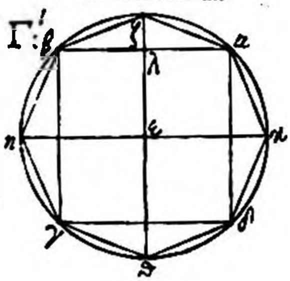
Πρότασις Γ'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ὀκτάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω δοθεὶς κύκλος ὁ α β γ δ, εἰς ὃν ζητεῖται ὀκτάγωνον ἐγγραφῆναι ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Ἐγγραφήτω δὴ α: εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον τὸ α β γ δ, τετράγωνον. εἶτα διαιρεθήτω ἑκάστη τῶν τούτου πλευρῶν δίχα, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς τομῆς ἑκάστης πλευρᾶς, ἐξαγομένη μέχρι τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, ὡς ἡ ε κ, ἡ ε θ, ἡ ε η, ἡ ε ζ, καὶ τμηθήσεται ὁ δοθεὶς κύκλος εἰς μέρη ὀκτὼ ἴσα, κατὰ τὰ α, ζ, β, η, γ, θ, δ, κ. ἐπιζευχθεισῶν δὲ τῶν α ζ, ζ β, β η, καὶ λοιπῶν, ἐγγραφήσεται εἰς αὐτὸν ὀκτάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Ὁ λόγος σαφής. Διαιρεθείσης γὰρ τῆς α β, δίχα κατὰ τὸ λ, ὑπὸ τῆς ε ζ, ἔσται ἡ μὲν α λ, ἴση τῇ λ β, ἡ δὲ ὑπὸ α λ ζ, γωνία τῇ ὑπὸ β λ ζ, κατὰ τὴν γ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ. ὥστε κατὰ τὴν δ': τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ, ἔσται καὶ ἡ α ζ, ὑποτείνουσα ἴση τῇ β ζ, κατὰ δὲ τὴν κη: τοῦ γ': τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἡ α ζ, περιφέρεια ἴση ὁμοίως ἔσται τῇ β ζ, περιφερείᾳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ β η, τῇ η γ, καὶ ἑκάστη τῶν λοιπῶν τῇ ἐφεξῆς.

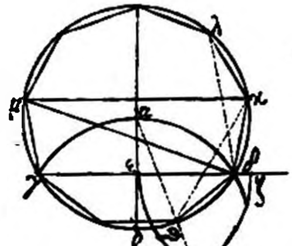
Geom. Lib. 7. Fig. 8.

Γ'.



Πρότασις Δ'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἐννεάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.



Κείσθω δὴ εἰς τὸν δ β γ, κύκλον, οὗ κέντρον τὸ α, ἐννεάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι. Εἰς κατασκευὴν δὲ τούτου ληφθήτω κέντρον τὸ β, τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ δοθέντος κύκλου, διάστημα δὲ τὸ β α, καὶ γραφήτω ἕτερος κύκλος τέμνων τὸν δοθέντα κατὰ τὰ δ, καὶ γ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ α β, γ δ, ἡ μὲν ὑφ' ἑκατέρου τῶν σημείων α, καὶ β, περατουμένη, ἡ δὲ, ὑπὸ τοῦ γ, μόνου, ἀπὸ δὲ τοῦ δ, ἐξαγομένη κατὰ τὸ συνεχές. εἶτα τῷ αὐτῷ β α, διαστήματι κέντρῳ μὲν τῷ ε, καθ' ὃ αἱ α β, γ δ, τέμνονται, γραφήτω τὸ ζ η, τόξον, κέντρῳ δ' αὖθις τῷ ζ, γραφήτω ὁμοίως τῷ ε η, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ α η, τέμνουσα τὸν δοθέντα κύκλον κατὰ τὸ θ, καὶ τὸ δ θ, ἔνατον ἔσται μέρος τοῦ δοθέντος κύκλου. Δείκνυται.

Προσαρμοσθήτωσαν ὑπὸ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου δύο εὐθεῖαι, αἱ δ κ, κ λ,

ἐκκ.

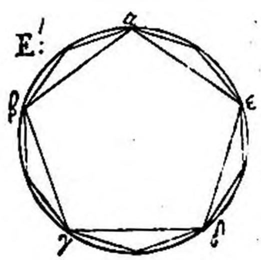
ἑκατέρα ἴση τῇ θ δ. καὶ ἐπὶ τῆς δ κ, συςαθήτω τρίγωνον ἰσοσκελὲς, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν τετραπλασίονα τῆς κατὰ κορυφὴν, κατὰ τὴν ι: τοῦ δ': Στοιχειωτοῦ, οἷον τὸ δ κ μ, οὗ τῶν πρὸς τῷ δ, καὶ κ, γωνιῶν ἑκατέρα τετραπλασία τῆς πρὸς τὸ μ. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ θ κ, δ λ, καὶ κατὰ τὴν δεῖξιν τῆς δευτέρας τοῦ παρόντος, καὶ τὰς ἐκεῖ προσηγμένας προτάσεις, δειχθήσεται ἡ δ κ, ἡ ἴση ληφθεῖσα τῇ θ δ, ἐννεάκις μετρεῖν τὸν β θ δ κ λ μ γ. κύκλον, ὥστε μεταφερομένη ἐγγράψει ἐννεάγωνον ἰσόπλευρον. ὅπερ ὅτι καὶ ἰσογώνιον δείκνυται οὕτω. κατὰ γὰρ τὴν κ: τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ, ἔςαι ἡ ὑπὸ θ δ κ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ δ κ λ, ὡσαύτως δειχθήσονται καὶ αἱ λοιπαὶ, προσαρμοσμένων τῶν πλευρῶν ὑπὸ τὴν περίμετρον τοῦ κύκλου. Ἐγγέγραπται ἄρα εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἐννεάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. ὅπερ ἔδει τὸ προτεθέν.

Πρότασις Ε':

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον δεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔςω κύκλος ὁ α β γ δ ε, εἰς ὃν δεῖ δεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἰσογώνιον ἐγγράψαι. Ἐγγραφήτω δὴ κατὰ τὴν ια: εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον πεντάγωνον, καθ' ὃν προειρημένον τρόπον. εἶτα διαιρεθήτω δίχα ἑκάςη περιφέρεια τῶν τοῦ πενταγώνου πλευρῶν, καὶ διαιρεθήσεται ὁ κύκλος εἰς δέκα ἴσα μέρη. ὑποτεινουσῶν δὲ ἀγομένων ἀφ' ἑκάςου σημείου ἐφ' ἕκαςον, ἐγγραφήσεται δεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ὁ λόγος σαφὴς ἐξ αὐτῆς τῆς κατασκευῆς.

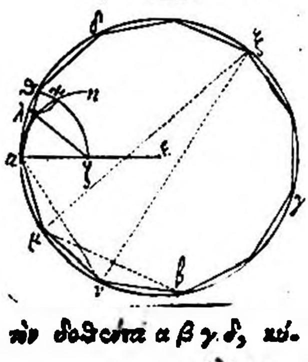
Geom. Lib. 7. Fig. 4.



Πρότασις ς':

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἑνδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔςω δὴ εἰς τὸν α β γ δ, κύκλον, οὗ κέντρον τὸ ε, ἑνδεκάγωνον ἐγγράψαι ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Διαιρεθήτω δὴ ἡ α ε, ἡμιδιάμετρος τοῦ δοθέντος κύκλου δίχα κατὰ τὸ ζ, καὶ ἀπὸ μὲν τῶν α, καὶ ζ, σημείων ὡς ἀπὸ κέντρων, διαςήματι τῷ α ζ, γραφήτωσαν δύο τόξα τὰ α η, ζ θ, τεμνόμενα κατὰ τὸ κ, ἀπὸ δὲ τοῦ θ, καθ' ὃ ὁ δοθεὶς α β γ δ, κύκλος τέμνεται ὑπὸ τοῦ ζ θ, τόξου, διαςήματι τῷ θ κ, γραφήτω ὁμοίως τόξον τὸ κ λ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ζ λ, καὶ ἔςαι αὕτη πλευρὰ τοῦ ἐγγραφομένου ἑνδεκαγώνου εἰς τὸν δοθέντα α β γ δ, κύκλον.



κλον. ταὐτὸν δ' ἐστὶν εἰπεῖν καταμίξειν τὴν ζλ, ἐνδεκάκις, τὸν αβγδ, κύκλον. Δείκνυται.

Προσηρμόσθωσαν ὑπὸ τὴν αβ, περιφέρειαν ἓξ εὐθεῖαι αἱ αμ, μν, [illegible] ἑκάστη ἴση τῇ ζλ. καὶ ἐπὶ τῆς μν, συνεστάτω τρίγωνον ἰσοσκελὲς, τὸ μνξ. [illegible] ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν, ἀμέλει τὰς πρὸς τοῖς μ, καὶ ν, πενταπλάσια τῆς πρὸς τῷ ξ, κατὰ κορυφὴν, καὶ κατὰ τὴν δεῖξιν τῆς δευτέρας τοῦ παρόντος, τὰς ἐκεῖ προσηγμένας προτάσεις, ἡ περιφέρεια τοῦ ὅλου κύκλου ἐνδεκαπλασιός ἐστι τῆς μν, περιφερείας, καὶ ἡ μν, ὑποτείνουσα περιφερομένη ἐνδεκάκις, ἐγγράψει εἰς τὸν κύκλον ἐνδεκάγωνον ἰσόπλευρον. Ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον δῆλον. κατὰ γὰρ τὴν κζ: τοῦ α: Στοιχείου, ἡ ὑπὸ αμν, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ μνβ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσονται καὶ αἱ ἑξῆς τοῦ ἐνδεκαγώνου γινόμεναι γωνίαι ἴσαι. Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον ἐγγέγραπται ἐνδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ὅπερ ἦν τὸ προτεθέν.

ἈΠΟΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἰστέον δ' ὅτι περὶ τῆς τῶν πολυγώνων κατασκευῆς οὐδεμία εὕρηται μέθοδος τοῖς τε πάλαι καὶ νῦν περὶ τὰ τοιαῦτα ἀσχολουμένοις, ὥστε δι' αὐτῆς δύνασθαι τὸν βουλόμενον οἱονδήποτε ἐγγράφειν πολύγωνον γεωμετρικῶς εἰς τὸν τυχόντα κύκλον, ἢ γοῦν ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας, περὶ δ' ὅσων Εὐκλείδης ἡρμήνευσε καί τινες ἄλλοι, ταῦτα μόνα σχεδὸν καὶ τῆς προσηκούσης γεωμετρικῆς ηὐμοίρησεν ἀποδείξεως. Εἰ δέ γε καὶ παρὰ ταῦτα τοῖς μεταγενεστέροις ἄλλα τινὰ πολυτρόπως τῆς ἰδίας ἔτυχε κατασκευῆς, ἀμοιροῦσι μέντοι τὰ πλείω τοῦ προσήκοντος αὐτοῖς λόγου καὶ ἀποδείξεως, ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος, δῆλον καθίσταται. Εἰ γὰρ καί τισι μετὰ τῆς αὐτῶν κατασκευῆς, καὶ τὰς ἀποδείξεις ἐξεθέμεθα, ἀλλ' οὐκ ἐκ τῆς κατασκευῆς ἡ δεῖξις ἑκάστου παρῆκται. τὸ γὰρ πλῆθος τῶν ἀπὸ τῶν τριγώνων ἀρχομένων σχημάτων κατὰ τὴν ἐπ' ἄπειρον τῶν ἀριθμῶν αὔξει πρόοδον. διὸ δὴ οὐδὲ μεθόδῳ τινὶ οἷόν τε ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας οἱονδήποτε πολύγωνον γεωμετρικῶς συστήσασθαι, ἢ εἰς τὸν αὐτὸν ἐγγράψαι κύκλον. τὸ γὰρ ἄπειρον ἀπερίληπτον, ἡ δὲ εἰς τὸν κύκλον ἐγγραφὴ τῶν αὐτῶν, ἤρτηται τῆς κατὰ πάντα ἀριθμὸν τοῦ κύκλου διαιρέσεως. Τὸ δὲ τὸν κύκλον κατὰ τὸν δοθέντα, ἢ γοῦν προσαχθέντα ἀριθμὸν διαιρεῖν, δι' ὀργάνων μέν πως γεωμετρικῶς γενέσθαι δυνατὸν, κἄν γε καί τινι δυσχερέστατον διὰ τὴν τῶν ἀριθμῶν ἐπ' ἄπειρον πρόοδον, μεθόδῳ δὲ οὐδαμῶς. ὥσπερ γὰρ τὸ πεντάγωνον δι' ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἑκατέραν τῶν πρὸς τὴν βάσιν γωνιῶν διπλασίονα ἔχοντος τῆς κατὰ κορυφὴν εἰς κύκλον ἐγγράφεται, οὕτω γε πάντως καὶ τὰ λοιπὰ τῶν ἰσοπλεύρων ἰσογωνίων σχημάτων, διὰ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου δύναται εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι. Δεῖ δὲ τὸ τρίγωνον ἑκατέραν τῶν πρὸς τὴν βάσιν γωνιῶν πολλαπλασίονα, ἢ ἐπιμερῆ τῆς κατὰ κορυφὴν ἔχειν, καθὰ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ

δοθενδοθέντος ἀπαιτεῖ σχήματος. τῶν μὲν γὰρ περιττοπλεύρων τὸ α: ὅ ἐστι τρίγωνον ἰσόπλευρον, εἰς τὸν τυχόντα κύκλον ἐγγραφῆναι δύναται διὰ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἑκατέραν τῶν πρὸς τὴν βάσιν γωνιῶν ἴσην ἔχοντος τῇ κατὰ κορυφήν, τὸ δὲ πεντάγωνον β': ὂν τῇ τάξει, ὅταν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν ἑκατέρα τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου διπλασία εἴη τῆς κατὰ κορυφήν· τριπλασίας δὲ οὔσης, τὸ ἑπτάγωνον ἐγγράφεται, γ': γὰρ ἐν τοῖς περιττοπλεύροις, ὥσπερ καὶ τὸ ἐννεάγωνον δ': ὂν διὰ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἐγγράφεται, τετραπλασίονα ἔχοντος ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν τῆς κατὰ κορυφήν, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ἀναλόγως. Τῶν δ' ἀρτιοπλεύρων τὸ τὴν α: χώραν ἔχον, ταὐτὸν δ' ἐστὶν εἰπεῖν, τὸ τετράγωνον, δύναται εἰς κύκλον ἐγγραφῆναι διὰ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡμιόλιον ἔχοντος ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν τῆς κατὰ κορυφήν· τὸ δὲ ἑξάγωνον, ἡνίκα τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ἑκατέραν τῶν πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ γωνιῶν διπλασιεφημίσειαν ἔχῃ τῆς κατὰ κορυφήν, ὥσπερ καὶ τὸ ὀκτάγωνον, ὅταν ἑκατέρα τῶν πρὸς τὴν βάσιν τριπλασιεφημίσεια ᾖ τῆς κατὰ κορυφήν, γ': γὰρ τοῦτο τῇ τάξει τῶν ἀρτιοπλεύρων.

Ὅτι δὲ ταῦτα οὕτως ἔχει, ἐξ ἐπαγωγῆς δυνάμεθα συναγαγεῖν. Εἰ μὲν γὰρ τρίγωνον ἰσοσκελὲς εἰς κύκλον ἐγγραφῇ, ἴσην ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ γωνιῶν τῆς κατὰ κορυφήν, ἰσόπλευρόν τε ἔσται καὶ ἰσογώνιον. ἑκάστη γὰρ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ ἐπὶ ἴσης βέβηκε περιφερείας. Εἰ δέ γε ἑκατέρα τῶν πρὸς τὴν βάσιν διπλασία ᾖ τῆς κατὰ κορυφήν, αἱ δύο ὁμοῦ πρὸς τὴν βάσιν τετραπλάσιαι ἔσονται τῆς κατὰ κορυφήν, ὥστε ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια, ἐφ' ἧς ἡ κατὰ κορυφὴν βέβηκε γωνία, ε: μέρος ἐστὶ τοῦ ὅλου κύκλου, ὑποτετραπλάσιος οὖσα τῆς λοιπῆς περιφερείας. Ἐὰν δὲ τριπλασία γίνηται ἑκατέρα τῶν πρὸς τὴν βάσιν τῆς κατὰ κορυφὴν, ἡ περιφέρεια, ἐφ' ἧς ἡ κατὰ κορυφὴν γέγονε γωνία, ζ': ἔσται τοῦ κύκλου μέρος. ἑκατέρα γὰρ τῶν δύο λοιπῶν περιφερειῶν, ἐφ' ὧν αἱ πρὸς τὴν βάσιν γωνίαι βεβήκασι, τριπλασία ἐστὶ τῆς αὐτῆς, ἐφ' ἧς ἡ κατὰ κορυφὴν βέβηκεν. ἔχουσι γὰρ πρὸς ἀλλήλας αἱ περιφέρειαι ὡς αἱ γωνίαι. ὥσπερ δὲ ἐπὶ τῶν περιττοπλεύρων, οὕτω γε καὶ ἐπὶ τῶν ἀρτιοπλεύρων τὸν λόγον ἑκάστου συναγαγεῖν ἔχομεν. ἡνίκα γὰρ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἑκατέρα τῶν πρὸς τὴν βάσιν γωνιῶν τῆς κατὰ κορυφὴν ἡμιόλιος εἴη, δῆλον, ὅτι ἡ περιφέρεια, ἐφ' ἧς ἡ κατὰ κορυφὴν βέβηκε γωνία, δ': μέρος ἐστὶ τοῦ ὅλου κύκλου, καὶ ἡ ταύτης ὑποτείνουσα, πλευρὰ τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον τετραγώνου ἐστὶ, τῶν γὰρ λοιπῶν δύο περιφερειῶν, ἐφ' ὧν αἱ πρὸς τὴν βάσιν γωνίαι βεβήκασιν, ὑποτριπλάσιός ἐστιν. ὅτι δὲ τῶν πρὸς τὴν βάσιν γωνιῶν ἑκατέρα τῆς κατὰ κορυφὴν διπλασιεφημίσεια ᾖ, ἕκτον τοῦ κύκλου μέρος ἔσται ἡ περιφέρεια, ἐφ' ἧς ἡ κατὰ κορυφὴν βέβηκεν, ὑποπενταπλάσιος γάρ τοι εὑρίσκεται τῶν λοιπῶν δύο, ἐφ' ὧν αἱ πρὸς τὴν βάσιν βεβήκασιν. ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων κατὰ τὸ ἀνάλογον τῶν πλευρῶν ἑκάστου.

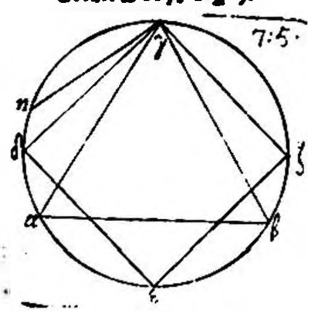
Εἰ μὲν οὖν οἷόν τε ἦν μέθοδόν τινα γεωμετρικὴν εὑρεθῆναι, δι' ἧς γένοιτο ἂν τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν πολλαπλασίονα ἔχον τῆς κατὰ κορυφὴν, ἢ ἐπιμερῆ καθ' οἱονδή τινα λόγον, ῥᾳδίως ἂν ἅπαν σχῆμα ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συσταθείη ἐπὶ τῆς τυχούσης εὐθείας, ἢ γοῦν ἐγγραφείη εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῶν τε περιττοπλεύρων καὶ ἀρτιοπλεύρων. ἐπεὶ δὲ τοῦτο ἀμήχανον, διά τοι τοῦτο ἑτέρας τινὰς μεθωδεύσαντο ἐφόδους πρὸς μικρὰν τῶν φιλομαθῶν παρηγορίαν οἱ περὶ τὰ τοιαῦτα ἐνασχολούμενοι. διὰ δὲ τῆς τετραγωνιζούσης ἔχομεν καὶ τὴν τοῦ τοιούτου πολυγώνου κατασκευὴν, ὡς ὀψόμεθα.

Τῷ γοῦν βουλομένῳ εἰς κύκλον τινὰ τὸ τυχὸν ἐγγράψαι πολύγωνον, διαιρετέον δὴ τὸν μὲν κύκλον εἰς ἴσα μέρη τέσσαρα, ἃ καὶ τεταρτημόρια καλεῖται, ἓν δὲ τῶν αὐτοῦ τεταρτημορίων εἰς τοσαῦτα, ὅσαι καὶ αἱ τοῦ δοθέντος πολυγώνου γωνίαι τε καὶ πλευραί. εἶτα εἰλήφθω τούτων τὰ τέσσαρα, καὶ ἔσται πλευρὰ τοῦ δοθέντος πολυγώνου. οἷον ἐὰν εἰς κύκλον τινὰ ζητεῖται ἐγγραφῆναι φέρ' εἰπεῖν δωδεκάγωνον, διαιρεθήτω ἓν τῶν τοῦ κύκλου τεταρτημορίων εἰς μέρη δυοκαίδεκα, καὶ τούτων εἰλήφθω τῷ κοινῷ διαβήτῃ τὰ τέσσαρα, καὶ τῷ αὐτῷ διαστήματι διαιρεθήσεται ὁ κύκλος εἰς μέρη δώδεκα, ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων. Ὅτι δὲ τοῦτο οὕτως ἔχει, δῆλον. Εἰ γὰρ ὁ τῶν μερῶν τοῦ διαιρεθέντος τεταρτημορίου ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν τοῦ κύκλου μερῶν πολλαπλασιασθῇ, πολλαπλασιασθῇ δ' ἔτι καὶ ὁ τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος πολυγώνου ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν δοθέντων μορίων, ὁ αὐτὸς γενήσεται ἀριθμός. ὅ,τε γὰρ ἀριθμὸς τῶν τοῦ διῃρημένου τεταρτημορίου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀριθμῷ τῶν πλευρῶν, καὶ ὁ τῶν μερῶν τοῦ κύκλου τῷ τῶν λαμβανομένων μορίων.

Αὕτη μὲν ἡ ἔφοδος ἐργωδεστάτη ἐστὶ διὰ τὴν δυσχέρειαν τῆς τοῦ τεταρτημορίου ἀπαιτουμένης διαιρέσεως, ἐφαρμόττει μέντοι εἰς κατασκευὴν παντὸς πολυγώνου περιττοπλεύρου τε καὶ ἀρτιοπλεύρου. περὶ δὲ τῶν παρωνυμουμένων πολυγώνων ὑπ' ἀριθμῶν δύο πρώτων τε καὶ συντεθειμένων ἑτέραν τινὰ ἐκ τῆς τοῦ πεντεκαιδεκαγώνου κατασκευῆς, ἧς ἐφευρετὴς Εὐκλείδης, ἐρανισάμεθα, ἔστι δὲ τοιαύτη.

Δοθέντος τοίνυν πολυγώνου τινὸς, οὗ ὁ τῶν πλευρῶν ἀριθμὸς β': καὶ συνθετός ἐστι, ταυτὸν δ' ἐστὶν εἰπεῖν ἀριθμῷ τινι μετρούμενος κατά τινα ἀριθμόν. Εὑρεθήτωσαν οἱ ἀριθμοὶ, ὑφ' ὧν τὸ δοθὲν μετρεῖται πολύγωνον, εἶτα ἐγγραφήτωσαν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, εἰς ὃν καὶ τὸ δοθὲν ζητεῖται ἐγγραφῆναι πολύγωνον, τὰ παρωνυμούμενα πολύγωνα ὑπὸ τῶν μετρούντων ἀριθμῶν τὸν τοῦ δοθέντος πολυγώνου ἀριθμὸν, ἀφ' ἑνὸς σημείου ἀρχόμενα. πάντες γὰρ οἱ ἀριθμοὶ πλὴν τῆς δυάδος πολύγωνόν τι παριστῶσι, κἂν μὲν ἡ τοῦ μείζονος πλευρὰ μονάδι ὑπερέχει τὴν τοῦ ἐλάττονος, ἡ ὑπεροχὴ ἔσται πλευρὰ τοῦ δοθέντος πολυγώνου. εἰ δέ γε δυάδι, ἢ ἄλλῳ τινὶ ἀριθμῷ, διαιρεθήτω ἡ διαφορὰ εἰς τοσαῦτα μέρη ἴσα, ὅσα καὶ ὁ τῆς διαφορᾶς τῶν πλευρῶν ἀριθμός. οἷον ἔστω ἐγγραφῆναι εἰς τὸν αβγ, κύκλον δωδεκάγωνον.

Geom. Lib. 7. Fig. 5.



ἐπεὶ

ἐπεὶ δὲ ὁ δώδεκα ἀριθμὸς δεύτερός ἐστι καὶ σύνθετος μετρούμενος ὑπὸ τοῦ τέσσαρα καὶ τὸν τρία, ἐγγραφήτω εἰς τὸν αβγ, κύκλον τό, τε αβγ, τρίγωνον, καὶ δεζγ, τετράγωνον. Ἐπεὶ δ᾽ αὖθις ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ ὑπερέχει τῆς τοῦ τριγώνου μονάδι, ἡ αδ, ὑπεροχὴ, πλευρά ἐστι τοῦ δωδεκαγώνου, τὸ γὰρ αβγ, τρίγωνον διαιροῦν τὸν κύκλον εἰς τρία ἴσα, δῆλον ὅτι ἡ αδγ, περιφέρεια τέσσαρας πλευρὰς περιέχει τοῦ ζητουμένου πολυγώνου. Ἐπεὶ δὲ πάλιν τὸ δεζγ, τετράγωνον διαιρεῖ τὸν αὐτὸν κύκλον εἰς μέρη ἀλλήλοις ἴσα τέσσαρα, ἡ δγ, περιφέρεια τρία περιέχει τοῦ αὐτοῦ πολυγώνου μέρη, ὥστε ἡ αδ, τρίτον ἐστὶ τῆς δγ, μέρος, καὶ ἐπομένως δωδεκάκις τὸν κύκλον καταμετρεῖ.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Α'.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἐν κύκλῳ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῆς περιφερείας, δύο πολυγώνων ἐγγραφῶσι πλευραὶ ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων, τὸ ἀνὰ μέσον τῶν πλευρῶν ἐκείνων τόξον τοσαύτας περιέχει πλευρὰς τοῦ συντεθειμένου πολυγώνου ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀριθμῶν τῶν δύο ἐκείνων πολυγώνων, ὅσαι καὶ αἱ μονάδες τῆς ὑπεροχῆς, καθ᾽ ἣν ἀλλήλων ὑπερέχουσι. τὸ γὰρ αδ, πλευρά ἐστι δωδεκαγώνου, ὅτι καὶ ἡ ὑπεροχὴ, καθ᾽ ἣν τὸ τετράγωνον ὑπερέχει τὸ τρίγωνον, ὑφ᾽ ὧν τὸ δωδεκάγωνον συνίσταται, μονάς ἐστιν. Εἰδέγε ἐγγραφῇ εἰς τὸν αβγ, κύκλον ἡ γη, πλευρὰ πενταγώνου, τὸ μεταξὺ δη, πλευρὰ ἔσται εἰκοσαγώνου. πολλαπλασιαζομένου γὰρ τοῦ πέντε ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν τέσσαρα, συνίσταται ὁ εἴκοσι, καὶ ἡ πενταγώνου πλευρὰ μονάδι ὑπερέχει τῆς τοῦ τετραγώνου, τὸ δὲ αη, δύο περιέχει πλευρὰς τοῦ πεντεκαιδεκαγώνου, ὅτι καὶ ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δυάδι ὑπερέχει τῆς τοῦ τριγώνου, ἐκ δὲ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ πέντε ἐπὶ τὸν τρία, ὁ πεντεκαίδεκα συνίσταται ἀριθμός.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. Β'.

Ἔτι ἑκάστου πολυγώνου ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου, εἰς ὅσα ἂν μέρη ἴσα διαιρεθῇ τὸ ὑποτεινόμενον τόξον ὑπὸ τῆς αὐτοῦ πλευρᾶς, τοσαυταπλάσιον τοῦ αὐτοῦ ἐγγραφήσεται πολύγωνον εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, ὥστε ὁ βουλόμενος διπλάσιόν τι ἢ τριπλάσιον πολύγωνον, ἢ κατ᾽ ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν πολλαπλάσιον ἐγγράψαι τοῦ ἐγγεγραμμένου ἤδη πολυγώνου, ὀφείλει διαιρεῖν τὸ ὑποτεινόμενον τόξον ὑπὸ τῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου πλευρᾶς εἰς μέρη ἀνάλογα τῷ λόγῳ τοῦ πολλαπλασίου, οἷον ἑπταγώνου φέρ᾽ εἰπεῖν σχήματος εἰς κύκλον τινὰ ἐγγεγραμμένου, ἰσοπλεύρου μέντοι καὶ ἰσογωνίου, ὁ βουλόμενος τεσσαρεσκαιδεκάγωνον ἐγγράψαι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, διαιρείτω τὸ ὑποτεινόμενον τόξον ὑπὸ μιᾶς τῶν τοῦ ἑπταγώνου πλευρῶν εἰς δύο, καὶ ἕξει τὸ ζητούμενον.

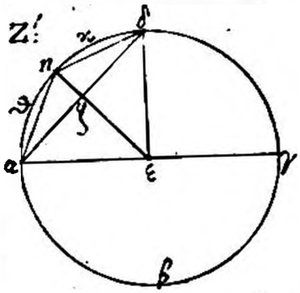
Πρότασις Ζ′.

Τῆς τοῦ κύκλου ἡμιδιαμέτρου ὁσωνδηποτοῦν μερῶν ὑποτιθεμένης, καὶ ὑποτεινούσης δοθέντος τόξου ἐγνωσμένης, ὑποτείνουσαν τόξου ἡμίσεως τοῦ δοθέντος εὑρεῖν, καὶ δεῖξαι πόσων ἂν εἴη αὕτη περιεκτικὴ τῶν τῆς ἡμιδιαμέτρου μερῶν.

Ἔστω κύκλος ὁ α β γ δ, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ α ε, ὑποτίθεται εἶναι μερῶν ἑκατόν. δεδόσθω δὲ καὶ τόξον τὸ α δ, οὗ ὑποτείνουσα μερ: γ′: καὶ ζητηθήτω ἡ τοῦ ἡμίσεως τοῦ αὐτοῦ τόξου ὑποτείνουσα. Ἐπεζεύχθω δὴ ἡ α δ, ὑποτείνουσα τοῦ δοθέντος τόξου, καὶ διαιρεθήτω δίχα κατὰ τὸ ζ′, δι' οὗ ἤχθω ἡ ε ζ η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ α η, καὶ αὕτη ἔσται ἡ ζητουμένη. κατὰ γὰρ τὴν γ′: τοῦ γ′: τοῦ Στοιχ: ἡ α δ, τέμνεται πρὸς ὀρθὰς ὑπὸ τῆς ε η, ὥστε ἐπεὶ αἱ α ζ, ζ η, εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶ ταῖς δ ζ, ζ η, ἔστι δὲ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ α ζ η, τῇ ὑπὸ δ ζ η, ἴση, πάντως γε κατὰ τὴν δ′: τοῦ α′: τοῦ αὐτοῦ ἔσται ἴση καὶ ἡ α η, τῇ η δ, ἀλλ' ἡ μὲν α η, ὑποτείνει τὸ α θ η, τόξον, ἡ δὲ η δ, τὸ η κ δ, ἄρα καὶ τὸ α θ η, τόξον ἴσον ἐστὶ τῷ η κ δ, κατὰ τὴν κη′: τοῦ γ′: τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἐπομένως τὸ α θ η, ἥμισύ ἐστι τοῦ δοθέντος α η δ, τούτου δὲ ὑποτείνουσα ἡ α η, ἄρα ἡ α η, ἐστὶν ἡ ζητουμένη, ὅπερ ἔδει τὸ α′:

Geom. Lib. 7. Fig. 6.

Ζ′.



Λείπεται δὲ δεῖξαι καὶ πόσων ἂν εἴη μερῶν ἡ αὐτὴ α η, τῶν τῆς ἡμιδιαμέτρου. Ἐπεὶ οὖν ἡ α δ, ὑπετέθη μερῶν γ′: πάντως γε ἡ α ζ, ἡμίσεια αὐτῆς μερῶν ἐστι πέντων με′: πολλαπλασιασθήτω δὲ ἥτε α ζ, πρὸς ἑαυτὴν, καὶ ἡ α ε, , καὶ γενήσονται πάντως δύο τετράγωνοι ἀριθμοί. εἶτα ἀφῃρήσθω ὁ τετράγωνος τῆς α ζ, ἀριθμὸς ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ τῆς α ε, τοῦ δ' ἐναπολειφθέντος εὑρεθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα, καὶ αὕτη ἀφῃρήσθω τοῦ ρ′: ὁ δ' ἐναπολειφθεὶς τετραγωνισθήτω, καὶ ὁ γενόμενος συναφθήτω τῷ τῆς η ζ, τετραγώνῳ, ἀπὸ δὲ τοῦ ὅλου εὑρεθήτω πάλιν ἡ τετράγωνος ῥίζα, καὶ ὅσων ἂν εἴη αὕτη μονάδων περιεκτικὴ, τοσούτων ἔσται μερῶν καὶ ἡ α η, κατὰ γὰρ τὴν μζ′: τοῦ α′: τοῦ Στοιχ: τὸ ἀπὸ τῆς α ε, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν α ζ, ζ ε, τετραγώνοις. ὥστε ἀφαιρουμένου τοῦ ἀπὸ τῆς α ζ, τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τῆς α ε, ἐναπολείπεται τὸ τῆς ζ ε, τετράγωνον: Εὑρεθείσης δὲ τῆς αὐτοῦ ῥίζης, γνωσθήσεται ἡ ζ ε, ταύτης δὲ ἀφαιρουμένης ἀπὸ τῆς ε η, γνωσθήσεται καὶ ἡ ζ η, συναπτομένων δὲ τῶν δύο τετραγώνων τούτου ἀπὸ τῆς ζ η, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ζ α, γνωσθήσεται καὶ τὸ τετράγωνον τῆς α η, ἴσον γάρ ἐστι

τοῖς

τοῖς ἀπὸ τῶν ηζ, ζα, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν μζ΄: , οὗ τῆς τετραγώνου ἀφαιρεθείσης ῥίζης, γνωσθήσεται καὶ ἡ αη, ὅπερ ἦν τὸ β΄:

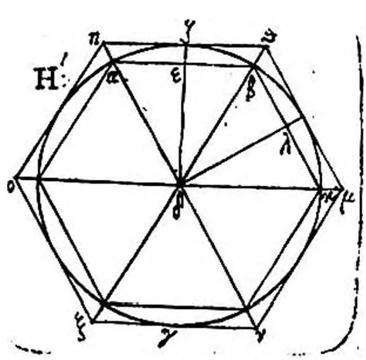
ἡ αε, μερῶν	100 τετράγωνον	10000
ἡ αζ, μερῶν	45 τετράγωνον	2025
τὸ ἐναπολειφθὲν δι' ἀφαιρέσεως		7975
τετράγωνον τῆς αε,	10000. ῥίζα	100.
τετράγωνον τῆς ζε,	7975. ῥίζα	89.
τὸ ἐναπολειφθὲν δι' ἀφαιρέσεως		11.
ἡ ζη, μερῶν 11.	τετράγωνον αὐτῆς	121
ἡ αζ, μερῶν 45.	τετράγωνον	2025
Τὸ συμποσούμενον ἐκ τῶν δύο τετραγώνων,		2146
ῥίζα τοῦ ἐκ τῶν δύο		46
καὶ τοσούτων ἐστὶν ἡ ζη,		

Πρότασις Η΄.

Πλευρᾶς πολυγώνου ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου ἐν κύκλῳ ἐγγεγραμμένου δοθείσης, τὴν τοῦ περιγραφομένου ὁμοίου πολυγώνου πλευρὰν εὑρεῖν.

Δεδόσθω πλευρὰ ἑξαγώνου ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου ἐν κύκλῳ τῷ αγβ, οὗ κέντρον τὸ δ, ἐγγεγραμμένου, καὶ ζητείσθω ἡ τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον ἑξαγώνου πλευρά. Τμηθήτω δὴ ἡ αβ, δίχα κατὰ τὸ ε, δι' οὗ ἤχθω κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ δεζ, ἥτις διελεύσεται, καὶ διὰ τοῦ δ, κέντρου κατὰ τὴν γ΄: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχ: καὶ ἐπ' αὐτῆς συνεστάθω κάθετος ἡ ηζθ, ἀπὸ δὲ τοῦ δ, ἀχθήτωσαν διὰ τῶν α, καὶ β, αἱ δαη, δβθ, καὶ ἡ ηζθ, ἔσται πλευρὰ ἑξαγώνου τοῦ περὶ τὸν αβγ, κύκλον περιγραφομένου, τμηθείσης γὰρ καὶ τῆς βκ, πλευρᾶς δίχα κατὰ τὸ λ, καὶ τῶν λοιπῶν γενομένων ὁμοίως, ἐπεὶ ἡ μὲν αβ, παράλληλός ἐστι τῇ ηθ, ἡ δὲ βκ, τῇ θμ, δῆλον, ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βκ, ἡ ηθ, πρὸς τὴν θμ, . κατὰ γὰρ τὴν β΄: τοῦ ϛ΄: τοῦ αὐτοῦ, ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν δθ, ἔχει καὶ ἡ αβ, πρὸς τὴν ηθ, καὶ ἡ βκ, πρὸς τὴν θμ, ἀλλ' ἡ αβ, ἴση ἐστὶ τῇ βκ, ἄρα καὶ ἡ ηθ, ἴση ἐστὶ τῇ θμ,. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσονται καὶ αἱ μν, νξ, καὶ λοιπαὶ πλευραὶ ἴσαι, ὥστε τὸ ηθμνξο,

Geom. Lib.7. Fig.7.



ἰσό-

ἰσόπλευρόν ἐστιν. Ὅτι δὲ καὶ περιγεγραμμένον περὶ τὸν αβγ, κύκλον, δῆλον· ἅπτεται γὰρ αὐτοῦ ἑκάστη πλευρὰ τοῦ αὐτοῦ ἑξαγώνου.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

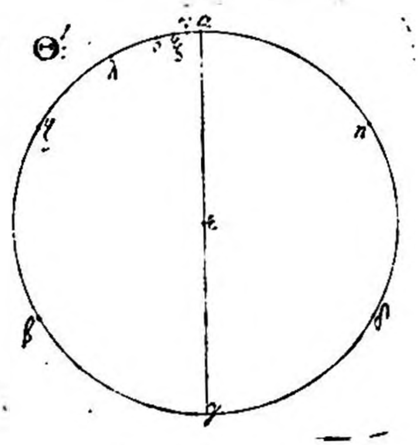
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι δοθείσης τῆς τοῦ ἐγγραφομένου πολυγώνου πλευρᾶς, ἐγνωσμένης καὶ κατὰ τὰ μέρη, γνωσθήσεται καὶ ἡ τοῦ περιγραφομένου. Δεδόσθω γὰρ τὴν αβ, μορίων εἶναι δέκα, ἡ εβ, πάντως μορίων ἔσται πέντε, ἡμίσεια γάρ. ἀφαιρουμένου δὲ τοῦ τετραγώνου τῆς εβ, ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς δβ, ἡμιδιαμέτρου, γνωσθήσεται τὸ τετράγωνον τῆς δε, τούτου δὲ τῆς τετραγωνικῆς εὑρεθείσης ῥίζης, γνωσθήσεται καὶ ἡ δε. Ἐπεὶ δὲ ὡς ἡ δε, πρὸς τὴν εβ, ἔχει καὶ ἡ δζ, πρὸς τὴν ζθ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων. ἄρα διὰ τῆς Μεθόδου τῶν τριῶν γνωσθήσεται καὶ ἡ ζθ, ταύτης δὲ διπλασιασθείσης γνωσθήσεται ἔτι καὶ ἡ ἄλη κθ, πλευρὰ ἴσα τοῦ περιγεγραμμένου.

Πρότασις Θ':

Τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου τὸν λόγον εὑρεῖν, ὃν πρὸς τὴν αὐτοῦ περιφέρειαν ἔχει ἐγγύτερον τῆς ἀληθείας.

Ἔστω ὁ αβγδ, κύκλος, καὶ ζητηθήτω ὁ λόγος τῆς αγ, διαμέτρου πρὸς τὴν αὐτοῦ περιφέρειαν ἐγγύτερον τῆς ἀληθείας. Ληφθήτω δὴ τὸ εα, διάστημα, καὶ διαιρεθήτω ὁ κύκλος εἰς μέρη ἓξ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιε': τοῦ δ': τοῦ Στοιχ: τὰ αζ, ζβ, καὶ λοιπά. Διαιρεθέντων δὲ τούτων ἕκαστον δίχα, καὶ διαιρεθήσεται ὁ πᾶς κύκλος εἰς μέρη δυοκαίδεκα, τὰ αλ, λζ, καὶ λοιπά, τούτων δ' ἑκάστου αὖθις δίχα διῃρημένου, τμηθήσεται ὁ κύκλος εἰς μέρη τέσσαρα καὶ εἴκοσιν. ἑκάστου δὲ καὶ τούτων δίχα πάλιν διῃρημένου, τμηθήσεται εἰς ὀκτὼ καὶ τεσσαράκοντα. ἐὰν δὲ καὶ τούτων ἕκαστον τὸ αὐτὸ τοῖς πρότερον πάθῃ, διαιρεθήσεται ὁ κύκλος εἰς μέρη ἓξ καὶ ἐνενήκοντα ἴσα ἀλλήλοις τὰ αν, νξ, ξο, καὶ λοιπά. ἐπιζευχθεισῶν δὲ τῶν αν, νξ, ξο, καὶ λοιπῶν ὑποτεινουσῶν, ἐγγραφήσεται πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐνενηκονθεξάγωνον. ἐὰν δὲ ἑκάστη τῶν αν, νξ, τοῦ ἐνενηκονθεξαγώνου πλευρῶν δίχα τμηθῇ, καὶ διὰ τῆς τομῆς ἀπὸ τοῦ ε, κέντρου κάθετος ἀχθῇ, καὶ τὰ λοιπά.

Geom. Lib. 7. Fig. 8.



γένη-

γένηται, ὡς ἐν τῇ ἀνωτέρω ἡρμήνευται, περιγραφήσεται περὶ τὸν αβγδ, κύκλον ὅμοιον πολύγωνον. Τούτων δ᾽ οὕτω γενομένων, εὑρεθήτω κατὰ μὲν τὴν ζ: τοῦ παρ: ἡ τοῦ ἐγγραφομένου πλευρὰ πόσων ἂν εἴη μερῶν, οἵων ἡ αε, ἡμιδιάμετρος ὑποτίθεται διῃρημένη, διὰ δὲ τῆς ἀνωτέρω εὑρεθήτω καὶ ἡ τοῦ περιγραφομένου. Εἶτα πολλαπλασιασθήτω ἑκάτερος τῶν εὑρεθέντων ἀριθμῶν ἐπὶ τὸν ἓξ καὶ ἐνενήκοντα, καὶ οἱ γενόμενοι συναφθήτωσαν ἀλλήλοις, καὶ ὁ ἐξ ἀμφοῖν μεριζέσθω ἐπὶ τὸν δύο, καὶ οὕτως ἔσται κατὰ τὸν Ἀρχιμήδην παραστατικὸς τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, οὗ τινος παραβαλλομένου πρὸς τῆς διαμέτρου, γνωσθήσεται ὃ τῆς περιφερείας παντὸς κύκλου λόγος, ὃν ἐγγύτερον τῆς ἀληθείας πρὸς τὴν διάμετρον ἔχει.

Εἰς σαφεστέραν δὲ τῆς εἰρημένου κατάληψιν, κείσθω ἡ αε, ἡμιδιάμετρος μορίων εἶναι περιεκτικὴ 10000000:, καὶ τοσούτων ἔσται καὶ ἡ τοῦ ἑξαγώνου. Τούτων δὲ δοθέντων, ζητηθήτω καὶ ἡ τοῦ δεκαγώνου πλευρὰ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ζ: καὶ εὑρεθήσεται μορίων τοιούτων 5176380:, ἐγνωσμένης δὲ καὶ τῆς τοῦ δωδεκαγώνου πλευρᾶς, ζητηθήτω διὰ τῆς αὐτῆς, καὶ ἡ τοῦ εἰκοσιτετραγώνου, καὶ εὑρεθήσεται μορίων 2610523: δοθείσης δὲ καὶ ταύτης ζητηθήτω ὁμοίως καὶ ἡ τοῦ τεσσαρακοντοκταγώνου, καὶ ἔσται περιεκτικὴ μορίων, οἷα τὰ τῆς ἡμιδιαμέτρου 1308061: γνωσθείσης δὲ καὶ ταύτης, ζητηθήτω τελευταῖον καὶ ἡ τοῦ ἐνενηκονθεξαγώνου, καὶ εὑρεθήσεται μορίων 654380:, τῆς δὲ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐνενηκονθεξαγώνου πλευρᾶς γνωσθείσης, ζητηθήτω διὰ τῆς ἀνωτέρω καὶ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου, καὶ εὑρεθήσεται μορίων 654730: εἶτα πολλαπλασιασθήτω ἑκάτερος τούτων τῶν ἀριθμῶν, ὅ,τε τῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου πλευρᾶς, καὶ ὁ τῆς τοῦ περιγεγραμμένου ἐπὶ τὸν 96:, καὶ εὑρεθήσεται ὁ ἀριθμὸς, ὅλης τῆς τοῦ ἐνενηκονθεξαγώνου πλευρᾶς, τῆς μὲν τοῦ ἐγγεγραμμένου ὁ 62820480:, τῆς δὲ τοῦ περιγεγραμμένου ὁ 62854080. Τούτων δὲ συναφθέντων γενήσεται ὁ 135674560., οὗ ἐπὶ τὸν 2. μερισθέντος, εὑρεθήσεται πηλίκον ὁ 62837200: ὁ τῆς τοῦ κύκλου δηλ: περιφερείας. κατὰ τὸν Ἀρχιμ: ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἔχει πρὸς τὴν διάμετρον, ὡς ὁ 62837280: πρὸς τὰ 20000000: ἢ ὡς ὁ 3141864: πρὸς τὸ 1000000: εἰς ἐλαχίστους τῶν προτέρων ἀριθμῶν ἠγμένων ὅρους.

ἡμιδιάμετρος αε, ἥτις καὶ πλόυρᾶς ἑξαγώνυ ἴσω	10000000
ταύτης τετράγωνον	100000000000000
ἡμίσεια τῆς τοῦ ἑξαγώνου πλόυρᾶς ἡ αζ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν	05000000
ταύτης τετράγωνον	25000000000000
τὸ ἐναπολειπόμενον δὶ ἀφαιρέσεως δῆλον: τετραγ: τῆς εζ,	75000000000000
	ἡ ῥίζα 8660254
ἡμιδιάμετρος αε,	10000000
ἡ τοῦ ἐναπολειφθείσης ῥίζα ἡ εζ,	8660254
τὸ ἐναπολειπόμενον δὶ ἀφαιρέσεως ἡ ζη,	1339746
ταύτης τετράγωνον	1794919344516
τῆς αζ, τετράγωνον	25000000000000
τὸ ἐξ ἀμφοῖν τετράγωνον	26794919344516
	ἡ ῥίζα 5176380. πλόυρὰ δωδεκαγώνυ.

ΠΡΑΞΙΣ Β':

ἡ αε, ἡμιδιάμετρος μορίων	10000000
ἧς τετράγωνον	100000000000000
ἡ αδ, πλόυρὰ δωδεκαγώνυ	5176380
ἡ αζ, ἡμίσεια τῆς αδ,	2588190
ἧς τετράγωνον	6698727476100
τὸ ἐναπολειπόμενον δὶ ἀφαιρέσεως δῆλ: τετράγωνον τῆς εζ,	93301272523900
	ἡ ῥίζα ἡ εζ, 9659258
ἡ αε, ἡμιδιάμετρος	10000000
ἡ εζ,	9659258
τὸ ἐναπολειπόμενον δὶ ἀφαιρέσεως δῆλον: ἡ ζη,	340742
ἧς τετράγωνον	116105110564
τῆς αζ, τετράγωνον	6698727476100
τὸ ἐξ ἀμφοῖν τετράγωνον	6814832586664
	ἡ ῥίζα 2610523 πλόυρ. εἰκοσιτεσσαραγώνυ:

ΠΡΑ'-

ΠΡΑʹΞΙΣ Γʹ.

ἡ αε, ἡμιδιάμετρος	10000000	
ἧς τετράγωνον		100000000000000
ἡ αδ, πλευρὰ εἰκοσιτεσσαραγώνου	2610553	
ἡ αζ, ἡμίσεια τῆς αδ,	1305261	
ἧς τετράγωνον		1703706377121
τὸ ἐναπολειπ: δι' ἀφαιρέσεως τετράγ: τῆς εζ,		98296293622879
	ὧ ῥίζα ἡ εζ.	9914448
		7319144704
ἡ αε, ἡμιδιάμετρος	10000000	
ἡ εζ,	9914448	
τὸ ἐναπολειπ: δι' ἀφαιρέσεως δηλ: ἡ ζη,	0085552	
ἧς τετράγωνον		7319144704
τῆς αζ, τετράγωνον		1703706377101
τὸ ἐξ ἀμφοῖν τετράγωνον		1711025521825
		ὧ ῥίζα 1308061. πλ: τεσσαρακοντοκταγών:

ΠΡΑʹΞΙΣ Δʹ.

ἡ αε, ἡμιδιάμετρος	10000000	
ἧς τετράγωνον		100000000000000
ἡ αδ, πλευρὰ τεσσαρακοντοκταγώνου	1308061	
ἡ αζ, ἡμίσεια τῆς αδ,	654030½	
ἧς τετράγωνον		427756548961
τὸ ἐναπολειπόμενον δι' ἀφαιρέσ: δηλ: τετράγωνον τῆς εζ,		99572243451039
		ὧ ῥίζα ἡ εζ, 9978589
ἡ αε, ἡμιδιάμετρος	10000000	
ἡ εζ,	9978589	
τὸ ἐναπολειπ: δι' ἀφαιρέσεως δηλ: ἡ ζη,	0021411	
ἧς τετράγωνον		458430921
τῆς αζ, τετράγωνον		427756548961
τὸ ἐξ ἀμφοῖν τετράγωνον		428214979882
		ὧ ῥίζα 654381 πλ: ἐνενηκονθεξαγώνου

Π Ρ Α' Ξ Ι Σ Ε'.

ἡ ἡμιδιάμετρος	10000000	ἧς τετράγωνον	100000000000000
ἡ τοῦ ἐνενηκονθεξαγώνου	654381		
ἡ ἡμίσεια ταύτης	327190	ἧς τετράγωνον	107053296100
τὸ ἐναπολειπόμενον. δι' ἀφαιρέσεως.			99892946703900
			ἡ ῥίζα τούτου: 9994645

Μέθοδος τῶν Τριῶν.

ὁ α': ὅρος 9994645. ὁ β': 327190. ὁ γ': 10000000. ὁ δ': 327365. ἡμίσεια ἢ τοῦ περιγραφ: ἐνενηκονθ: πλ<ευ>ρ:

	2		2
ἡ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐνενηκονθεξαγώνου πλευρὰ	654380	ἡ τοῦ περιγεγραμμένου ἐνενηκονθεξ: πλευρ:	654730
ἡ ὅλη περίμ: τοῦ ἐγγεγρ:	62820480.	ἡ περίμετρος τοῦ περιγεγραμμένου	62854080
			62820480

ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια 2. { 225674560 / 62837280

Ἰςέον ὅτι ἐφ' ἑκάστης πράξεως εἴληπται εἰς παράδειγμα τὸ αὐτὸ σχῆμα. διὸ ἡ α δ, ὑπετέθη ἀντὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ δωδεκαγώνου, εἰκοσιτετραγώνου, τεσσαρακοντοκταγώνου, καὶ ἐννενηκονθεξαγώνου. διὰ δὲ τὸ ἀπονώτερον τὰ ἐναπολειπόμενα ἐφ' ἑκάστης τῶν ῥιζῶν ἐξαγωγῆς παρεωράθησαν.

Η' τοῦ κύκλου ἄρα περιφέρεια πρὸς τὴν διάμετρον ἔχει κατὰ μὲν τὸν Ἀρχιμήδην.

ὡς ὁ	3141864.	πρὸς τὸν	1000000.	κατ' ἄλλους δὲ
ἢ ὡς ὁ	21.	πρὸς τὸν	7.	ὁ λόγος ὅπως ἐλάττων τοῦ ἀληθοῦς.
ἢ ὡς ὁ	223.	πρὸς τὸν	71.	
ἢ ὡς ὁ	1543.	πρὸς τὸν	491.	ὅπως δὲ μείζων τοῦ ἀληθοῦς.
ἢ ὡς ὁ	1542.	πρὸς τὸν	491.	ὅπως δ' ἐλάττων τοῦ ἀληθοῦς.
ἢ ὡς ὁ	355.	πρὸς τὸν	113.	
ἢ ὡς ὁ	31.	πρὸς τὸν	10.	ὅπως δὲ ἐλάττων τοῦ ἀληθοῦς.
ἢ ὡς ὁ	314.	πρὸς τὸν	100.	

Πρότασις Ι':

Δοθείσης τῆς διαμέτρου τινὸς κύκλου τὴν περιφέρειαν εὑρεῖν, καὶ τὸ ἀνάπαλιν.

Ἔστω ἡ τῆς Γῆς διάμετρος Λευκῶν Γαλικῶν 4584, καὶ ζητείσθω ἡ αὐτῆς περίμετρος. Γενέσθω δὴ διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν ὡς ὁ 71, ἀριθμὸς πρὸς τὸν 223, οὕτως ὁ 4584, πρὸς ἄλλον τινά, καὶ εὑρεθήσεται τέταρτος ὅρος ὁ 14397, καὶ τοσούτων Λευκῶν Γαλλικῶν ἔσται ἡ περίμετρος τῆς Γῆς. κατὰ γὰρ τὴν γ': ὑπόθεσιν ἡ τοῦ κύκλου διάμετρος πρὸς τὴν περιφέρειαν ἔχει, ὡς ὁ 71, πρὸς τὸν 223, ἀλλ' ὡς ὁ 71, πρὸς τὸν 223, γέγονε καὶ ὁ 4584, πρὸς τὸν 14397, δοθείσης ἄρα τῆς διαμέτρου τοῦ τῆς Γῆς κύκλου, εὕρηται ἡ αὐτοῦ περιφέρεια. Εἰδέ γε δοθῇ ἡ περίμετρος τῆς Γῆς, γενέσθω διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου, ὡς ὁ 223, πρὸς τὸν 71, ὁ 14397, πρὸς ἄλλον τινά, καὶ εὑρεθήσεται ὁ 4584, παραστατικὸς τῆς διαμέτρου τῆς Γῆς.

Πρότασις ΙΑ':

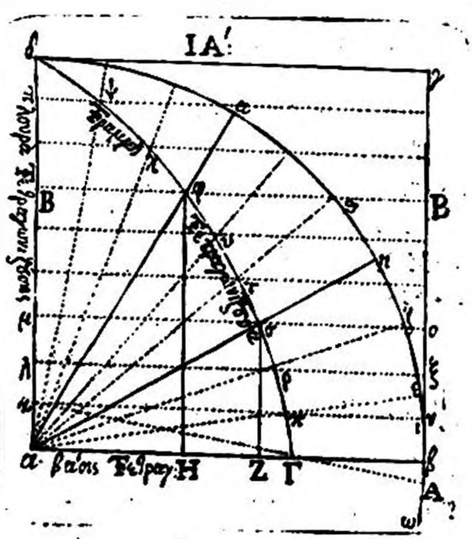
Τετραγωνίζουσαν καταγράψαι γραμμὴν κατά τε τὸν Νικόστρατον καὶ Νικόδημον τοὺς Μαθηματικούς.

Κατὰ μὲν οὖν τὴν Ἀρχιμήδειον ἔφοδον ὅπως δυνάμεθα εὑρίσκειν τὸν λόγον τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ὃν πρὸς τὴν διάμετρον ἔχει, ὅσον ἔνεστι τῆς ἀληθείας ἐγγύτερον, οὐ μικρὸν πρὸς τετραγωνισμὸν κύκλου, καὶ ἄλλας γεωμετρικὰς συμ-

 βαλβάλλοντα πράξεις. ἄλλοι δὲ τῶν ἀρχαίων Μαθηματικῶν ἄλλας τινὰς παραδεδώκασιν ἐφόδους πρὸς εὕρεσιν εὐθείας γραμμῆς ἴσης τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ. Διὸ δὴ καὶ περὶ αὐτῶν ἑπόμενόν ἐστιν εἰπεῖν, καὶ α: περὶ καταγραφῆς Τετραγωνιζούσης Γραμμῆς, ὡς Νικόστρατος καὶ Νικόδημος τῶν πάνυ ἀρχαίων Μαθηματικῶν ἐδίδαξαν. Συνεστάθω ἐπὶ τῆς αβ, τυχούσης εὐθείας τετράγωνον τὸ αβγδ, καὶ ὑποκείσθω τὰς αδ, δγ, πλευρὰς τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου, ὁμαλῇ συνεχῶς κινεῖσθαι κινήσει, τὴν μὲν αδ, περὶ τὸ α, κέντρον, ὥστε καταγράφειν τὸ δβ, τεταρτημόριον, τὴν δὲ γδ, παραλλήλως τῇ αβ, ὥστε ὀρθὰς ποιεῖν γωνίας ἐπὶ τῆς γβ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ τοῦ χρόνου διαστήματι τὴν μὲν ἐπὶ τὸ β, ἀφικνεῖσθαι σημεῖον, τὴν δὲ συμπίπτειν τῇ αβ. οὕτω γὰρ τούτων κινουμένων, καὶ τεμνομένων ἀλλήλας, γραφήσεται διὰ τῶν κοινῶν αὐτῶν τομῶν ἡ δΓ, καμπύλη γραμμὴ, ἡ δὲ αδ, εὐθεῖα, πλευρὰ Τετραγωνιζούσης, καὶ ἡ αΓ, βάσις.

Ἐπεὶ δὲ τὰς αδ, δγ, πλευρὰς κινηθῆναι ἀδύνατον, οὕτως ἐχούσας, ὅτι μὴ διά τινος μηχανῆς, ἐκ στερεᾶς κατασκευασθείσης ὕλης τοῦ τετραγώνου, ἵνα καὶ γεωμετρικῶς πως ἡ δΓ, Τετραγωνίζουσα καταγραφῇ Γραμμὴ. Διαιρεθήτω ἡ αδ, εἰς ὅσα δυνατὸν ἴσα ἀλλήλοις μέρη, καὶ γραφήτω ἀπὸ τοῦ α, κέντρου, διαστήματι τῷ αβ, ἢ αδ, τὸ δβ, τεταρτημόριον. διαιρεθήτω δὲ καὶ τοῦτο εἰς μέρη ἴσα ἀλλήλοις, εἰς ὅσα καὶ ἡ αδ, εἶτα ἀφ᾽ ἑκάστου μὲν σημείου τῆς αδ, ἀχθήτωσαν εὐθεῖαι λευκαὶ παραλλήλως τῇ αβ, ἀπὸ δὲ τοῦ α, κέντρου ἀχθήτωσαν ὁμοίως λευκαὶ εὐθεῖαι, ἐφ᾽ ἕκαστον τῶν τοῦ δβ, τεταρτημορίου σημείων. καθ᾽ ὃ δ᾽ ἑκάστη τούτων εὐθεῖα τὴν ἀνάλογον αὐτῇ ἐκείνων τέμνει, τεθήτω στιγμὴ, καὶ σχεδιασθήσεται πάντως ἡ ζητουμένη. Οἷον διαιρεθήτω ἥτε αδ, πλευρὰ, καὶ τὸ δβ, τεταρτημόριον εἰς μέρη ἐνενήκοντα, ἢ πέντε καὶ τεσσαράκοντα, ἢ γοῦν ἐννέα ὡς ἐνταῦθα διὰ τὸ ἁπλούστερον, τὰ βε, εζ, ζη, ακ, κλ, λμ, καὶ λοιπά. Εἶτα ἀχθήτωσαν ἀπὸ τοῦ α, κέντρου ἐφ᾽ ἕκαστον σημεῖον τοῦ βδ, τεταρτημορίου αἱ αε, αζ, αη, αθ, καὶ λοιπαί. ἀφ᾽ ἑκάστου δὲ σημείου τῆς αδ, διήχθωσαν παράλληλοι τῇ αβ, αἱ κν, λξ, μο, καὶ λοιπαὶ, καὶ τμηθήσεται ἡ μὲν αε, ὑπὸ τῆς κν, κατὰ τὸ π, ἡ δὲ αζ, ὑπὸ τῆς λξ, κατὰ τὸ ρ, ἡ δὲ αη, ὑπὸ τῆς μο, κατὰ τὸ σ, καὶ αἱ λοιπαὶ τῶν ἀπὸ τοῦ α, ὑπὸ τῶν λοιπῶν τῇ αβ, παραλλήλων ἀναλόγως κατὰ τὰ τ, υ, φ, χ, ψ. ἡ

Geom. Lib. 7. Fig. 9.



πίνω διὰ τῶν ψ, χ, φ, υ, καὶ λοιπῶν διαβαίνουσα σημείων, Γραμμὴ Τετραγωνίζουσα καλεῖται, δι' ἧς ἀκριβῶς κατασκευασθείσης, ῥαδίως εὑρεθήσεται ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἴση τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ. ταύτης δ' εὑρεθείσης εὐχερῶς καὶ ὁ κύκλος τετραγωνισθήσεται, ὡς ὀψόμεθα. Ἐπεὶ δὲ τὸ Γ, σημεῖον τὸν τρόπον τοῦτον οὐχ εὑρίσκεται, ἐξαχθήτω τὸ δβ, τεταρτημόριον ἄχρι τοῦ ω, καὶ ληφθήτω τὸ βΛ, τόξον ἴσον τῷ ει, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ κΛ, καὶ τμηθήσεται ἡ αβ, κατὰ τὸ Γ, ζητούμενον σημεῖον. ἔσται γὰρ τὸ ιΛ, τόξον ἴσον τῷ ιβ. καὶ ὥσπερ ἡ αε, τέμνει τὴν κν, κατὰ τὸ π, οὕτω καὶ ἡ κΛ, τεμεῖ τὴν αβ, κατὰ τὸ Γ, ἀναλόγως. Τοιαύτη μὲν οὖν ἡ τῆς Τετραγωνιζούσης Γραμμῆς καταγραφὴ κατὰ τοὺς Νικόστρατον καὶ Νικόδημον τοὺς ἀρχαιοτάτους τῶν Μαθηματικῶν.

Ἰστέον δὲ, ὅτι ὅσον εἰς πλείω μέρη ἥ τε αδ, πλευρὰ, καὶ τὸ δβ, τεταρτημόριον διαιρεῖται, τοσοῦτον καὶ ἡ τῆς Τετραγωνιζούσης Γραμμῆς καταγραφὴ ἐντελεστέρα γίγνεται.

Πρότασις ΙΒ'.

Τετραγωνιζούσης δοθείσης Γραμμῆς, ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα ταύτην, ἀπὸ δὲ τῆς τομῆς εὐθεῖα παράλληλος τῇ βάσει ἀχθῇ, τμηθήσεται καὶ ἡ πλευρὰ τῆς δοθείσης τετραγωνιζούσης ἀναλόγως τῆς αὐτῆς περιφερείᾳ.

Δοθήτω τετραγωνίζουσα γραμμὴ ἡ δΓ, καὶ ἀχθήτωσαν ἀπὸ τοῦ α, κέντρου αἱ αφ, ασ, εὐθεῖαι, ἀπὸ δὲ τῶν φ, καὶ σ, σημείων τῶν τομῶν ἀχθήτωσαν παράλληλοι τῇ αΓ, βάσει αἱ φΒ, σμ, λέγω δὴ ὅτι ἡ αδ, πλευρὰ ἀναλόγως τέμνεται τῇ δβ, περιφερείᾳ τῆς τετραγωνιζούσης. κατὰ γὰρ τὴν κατασκευὴν αἵ τε αα, ΒΒ, καὶ αἱ αη, μο, εὐθεῖαι ἀνάλογοί εἰσιν. ἕκαστον γὰρ τῆς τετραγωνιζούσης σημεῖον ὑπὸ τῶν ἀναλόγων χαρακτηρίζεται γραμμῶν. κἂν γὰρ ἑκάστη τῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου ὑπὸ πολλῶν τέμνεται τῇ βάσει παραλλήλων, οὐ μέντοι πᾶσα τομὴ εἰς καταγραφὴν συμβάλλεται τῆς τετραγωνιζούσης, ὅτι μὴ ἡ ὑπὸ τῶν ἀναλόγων. ὥστε ὃ μέρος ἐστὶ τὸ δα, τοῦ δβ, τὸ αὐτὸ δήπουθεν ἐστὶ μέρος καὶ τὸ δΒ, τῆς δα, ὃ δὲ τὸ δη, τῆς περιφερείας, τὸ αὐτὸ καὶ τὸ δμ, τῆς εὐθείας, ἄρα ὡς τὸ δβ, πρὸς τὸ δα, τόξον, ἡ δα, εὐθεῖα πρὸς τὴν δΒ, καὶ διαιρέσει, ὡς τὸ δα, πρὸς τὸ αβ, ἡ δΒ, πρὸς τὴν Βα. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ὡς τὸ δη, τόξον πρὸς τὸ ηβ, ἡ δμ, πρὸς τὴν μα. ὥστε τέσσαρα μεγέθη τὰ δα, αβ, δη, ηβ, ἀνάλογά εἰσι τέτταρσι μεγέθεσι τοῖς δΒ, Βα, δμ, μα, σὺν δύο λαμβανόμενα, ὥστε καὶ δι' ἴσου ἀνάλογά εἰσιν. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ δα, πρὸς τὸ ηβ, τόξον, ἡ δΒ, πρὸς τὴν μα, ὁμοίως δειχθήσεται καὶ τὰ λοιπὰ μέρη τῆς δβ, περιφερείας ἀνάλογα τοῖς λοιποῖς μέρεσι τῆς δα, πλευρᾶς τετραγωνιζούσης. Ἄρα τετραγωνιζούσης δοθείσης, καὶ τὰ ἑξῆς.

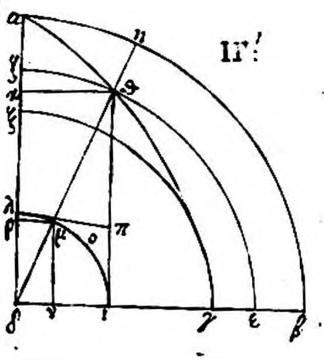
Πρό-

Πρότασις ΙΓ'.

Τὸ τεταρτημόριον ἦτε πλευρὰ καὶ βάσις τῆς τετραγωνιζούσης γραμμῆς συνεχῶς εἰσὶν ἀνάλογον.

Ἔστω τεταρτημόριον μὲν τὸ α β, τετραγωνίζουσα δὲ ἐν αὐτῷ γραμμὴ ἡ α θ γ, ἧς πλευρὰ μὲν ἡ α δ, βάσις δὲ ἡ δ γ. Λέγω δὴ τὸ α β, τεταρτημόριον ἔχειν πρὸς τὴν α δ, ὡς ἡ αὐτὴ α δ, πρὸς τὴν δ γ. εἰ γὰρ μὴ, πάντως γε ἡ α δ, ἢ πρὸς μείζονα τῆς δ γ, ἢ πρὸς ἐλάττονα ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ α β, ἔχει τεταρτημ: πρὸς αὐτήν. Ἐχέτω γοῦν α: πρὸς μείζω τὴν δ ε, καὶ γραφέτω ἀπὸ κέντρου τοῦ δ, διαστήματι τῷ δ ε, τὸ ε θ ζ, τεταρτημ: τέμνον τὴν α θ γ, τετραγωνίζουσαν γραμμὴν κατὰ τὸ θ, δι' οὗ ἤχθω ἡ δ θ η, καὶ παράλληλος τῇ μὲν α δ, διήχθω ἡ θ ι, τῇ δὲ ε δ, ἡ θ κ. Ἐπεὶ οὖν κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ὡς τὸ α β, τεταρτημ: πρὸς τὴν α δ, ἡ αὐτὴ α δ, πρὸς τὴν δ ε, ὡς δὲ ἡ α δ, πρὸς τὴν δ ε, ἔχει τὸ α β, τεταρτημ: καὶ πρὸς τὴν ε ζ, ὡς ὀψόμεθα. τὸ α β, ἄρα τεταρτημόριον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὴν α δ, πλευρὰν, καὶ ε ζ, τεταρτημόριον. ὥστε κατὰ τὴν θ': τοῦ ε': τοῦ Στοιχειωτοῦ τὸ ε ζ, τεταρτημόριον ἴσον ἐστὶ τῇ α δ. Ἐπεὶ δ' αὖθις κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ὡς τὸ α β, τεταρτημόριον πρὸς τὸ β η, τόξον, ἔχει καὶ ἡ α δ, πλευρὰ πρὸς τὴν δ κ, ὡς δὲ τὸ α β, πρὸς τὸ β η, ἔχει καὶ τὸ ζ ε, πρὸς τὸ ε θ, διὰ τὴν πρὸς ἄλληλα ὁμοιότητα, πάντως γε ὡς τὸ ζ ε, τεταρτημόριον πρὸς τὸ ε θ, τόξον, ἡ α δ, πρὸς τὴν δ κ, ἀλλ' ἡ α δ, ἴση δέδεικται τῷ ζ ε, τεταρτημορίῳ. ἄρα καὶ ἡ κ δ, ἴση ἐστὶ τῷ ε θ, τόξῳ, τῇ δὲ κ δ, ἴση ἐστὶν ἡ θ ι, κατὰ τὴν λ δ': τοῦ α: τοῦ Στοιχ:, ἡ θ ι, ἄρα ἴση ἐστὶ τῷ θ ε, τόξῳ, ὅπερ ἀδύνατον. ὅτι δὲ τὸ α β, τεταρτημόριον ἔχει πρὸς τὸ ζ ε, ὡς ἡ α δ, πρὸς τὴν δ ε, δῆλον, κατὰ γὰρ τὴν ι ή: τοῦ δ': τοῦ παρόντος ἐναλλὰξ, οἱ κύκλοι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς αἱ αὐτῶν διάμετροι, ὡς δὲ διάμετρος πρὸς διάμετρον, ἔστι καὶ ἡμιδιάμετρος πρὸς ἡμιδιάμετρον, οἱ κύκλοι ἄρα ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὡς αἱ ἡμιδιάμετροι. ἀλλ' ὡς κύκλος πρὸς κύκλον, ἔχει καὶ τεταρτημόριον πρὸς τεταρτημόριον, ἄρα ὡς ἡ α δ, ἡμιδιάμετρος πρὸς τὴν δ ε, ἡμιδιάμετρον, ἔχει καὶ τὸ α β, τεταρτημόριον πρὸς τὸ ζ ε, τεταρτημόριον.

Geom. Lib. 7. Fig. 10.



Ἐχέτω β': ἡ δ α, πρὸς ἐλάττονα τῆς δ γ, τὴν δ ι, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν

τὸ

τὸ αβ, τεταρτημόριον πρὸς αὐτὴν ἔχει. καὶ γραφήτω ἀπὸ κέντρου τοῦ δ, διαστήματι τῷ δι, τεταρτημόριον τὸ ιλ, ἔσται δὴ τὸ ιλ, τεταρτημόριον κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ἴσον τῷ αδ, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται καὶ τῷ ιζ. ἀλλ' ὡς τὸ αβ, τεταρτημόριον πρὸς τὸ βη, τόξον, τὸ λι, τεταρτημόριον πρὸς τὸ ιμ, τόξον, ὡς δὲ τὸ αβ, τεταρτημόριον πρὸς τὸ βη, τόξον, ἔχει καὶ ἡ αδ, πρὸς τὴν δκ, ἤτοι τὴν θι, ἴσην, ἄρα ὡς ἡ δα πρὸς τὴν θι, τὸ λι, τεταρτημόριον πρὸς τὸ ιμ, τόξον. ἐπεὶ δὲ τὸ λι, τεταρτημόριον ἴσον δέδεικται κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τῇ αδ, πάντως γε καὶ τὸ μι, τόξον ἴσον ἐστὶ τῇ θι, ὅπερ ἀδύνατον. ἡ γὰρ ἀπτομένη παντὸς τόξου μείζων αὐτοῦ ἐστι. Κείσθω γὰρ τὸ ιο, τόξον ἴσον τῷ ολ, τόξῳ, καὶ ἀχθήτω ἀπτομένη τοῦ μὲν ιο, κατὰ τὸ ι, ἡ ιπ, τοῦ δὲ ολ, κατὰ τὸ λ, ἡ λπ. καὶ ἐπεὶ τὰ τόξα ἴσα ὑπετέθησαν, ἴσαι δήπουθεν ἔσονται καὶ αἱ αὐτῶν ἀπτόμεναι. Ἐπεὶ δ' αὖθις αἱ ιπ, λπ, ἀπτόμεναι περιέχουσι τὰ ιο, ολ. τόξα, μείζονες πάντως εἰσὶ συναμφότεραι συναμφοτέρων, ὥστε καὶ ἑκατέρα ἑκατέρου, ἡ ιπ, ἄρα μείζων ἐστὶ τοῦ ιο, τόξου. Τὸ τεταρτημόρον ἄρα, ἧπ πλευρά.

Πρότασις ΙΔ':

Κύκλου τεταρτημόριον, τοῦ διαστήματι ἴσῳ τῇ βάσει τῆς τετραγωνιζούσης γραφομένου, ἴσον ἐστὶ τῇ πλευρᾷ τῆς τετραγωνιζούσης.

Γραφήτω ἀπὸ δ, τοῦ κέντρου διαστήματι τῷ δγ, τεταρτημόριον τὸ γξ, λέγω δὴ τοῦτο ἴσον εἶναι τῇ αδ. κατὰ γὰρ τὴν ἀνωτέρω, ὡς τὸ αβ, τεταρτημόριον πρὸς τὴν αδ, ἡ αδ, ἤτοι ἡ δβ, πρὸς τὴν δγ, ἀλλ' ὡς ἡ δβ, ἡμιδιάμετρος πρὸς τὴν δγ, ἔχει τὸ αβ, τεταρτημόριον πρὸς τὸ γξ, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται, τὸ αβ, ἄρα τεταρτημόριον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὴν αδ, πλευρὰν τῆς τετραγωνιζούσης, καὶ τὸ γξ, τεταρτημόριον, ὥστε κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν θ': τοῦ ε': τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ γξ, τεταρτημόρον ἴσον ἐστὶ τῇ αδ. Κύλου ἄρα τεταρτημόριον.

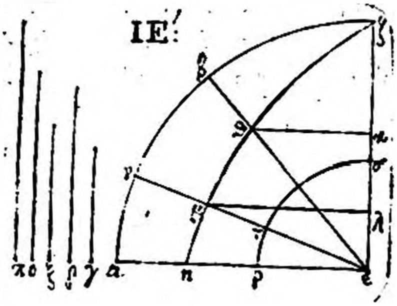
Πρότασις ΙΕ':

Τὸ δοθὲν τόξον εἰς τὰ δοθέντα μέρη, ἤγουν κατὰ τὴν δοθεῖσαν ἀναλογίαν διελεῖν.

Ἔστω διελεῖν τὸ αβ, τόξον εἰς μέρη δύο, ἔχοντα λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ἡ γ, εὐθεῖα πρὸς τὴν δ. Εὑρεθήτω δὴ τὸ κέντρον τοῦ δοθέντος αβ, τόξου κατὰ τὴν β': τοῦ β': τοῦ παρ: καὶ ἔστω τὸ ε, καὶ ἀναπεπληρώσθω τὸ αβζ, τεταρτημόριον. εἶτα γραφήτω ἐν αὐτῷ ἡ ζη, τετραγωνίζουσα γραμμή, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ βε, τέμνουσα τὴν ζη, τετραγωνίζουσαν κατὰ τὸ θ, ἀφ' οὗ ἤχθω παράλληλος τῇ αε, ἡ θκ, καὶ ἡ ἐναπολαμβανομένη εκ, τμηθήτω εἰς δύο μέρη τὰ ελ, λκ, κατὰ τὸν

λο-δοθέντα λόγον τῆς γ, πρὸς τὴν δ, διὰ τῆς ϛ′: τοῦ α′: τοῦ παρ: ἀπὸ δὲ τοῦ λ, ἤχθω παράλληλος τῇ α ε, ἡ λ μ, τέμνουσα τὴν ζ η, τετραγωνίζουσαν κατὰ τὸ μ, δι' οὗ διήχθω ἡ ε μ ν, καὶ διαιρεθήσεται τὸ α β, τόξον εἰς δύο μέρη τὰ α ν, ν β, κατὰ τὸν δοθέντα λόγον. κατὰ γὰρ τὴν ι β′: τοῦ παρόντος τὸ α ν, τόξον ἔχει πρὸς τὸ ν β, ὡς ἡ ε λ, εὐθεῖα πρὸς τὴν λ κ, ἀλλ' ἡ ε λ, ἔχει πρὸς τὴν λ κ, ὡς ἡ γ, πρὸς τὴν δ, ἄρα καὶ τὸ α ν, τόξον πρὸς τὸ ν β, ἔχει ὡς ἡ γ, πρὸς τὴν δ.

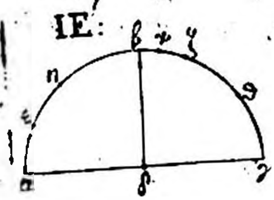
Geom. Lib. 7. Fig. 11.



Ἔστω ἔτι διελεῖν καὶ τὸ α ζ, τεταρτημόριον εἰς μέρη τρία ἀνάλογα ταῖς ξ ο π, εὐθείαις. Γραφήτω δὴ ἡ τετραγωνίζουσα ζ η, καὶ διαιρεθήτω ἡ ζ ε, πλευρὰ τῆς ζ η, τετραγωνιζούσης γραμμῆς εἰς τρία μέρη τὰ ε λ, λ κ, κ ζ, ἀνάλογα ταῖς δοθείσαις ξ ο π, εὐθείαις κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ϛ′: καὶ ἀπὸ τῶν λ, καὶ κ, ἀχθήτωσαν εὐθεῖαι παράλληλοι τῇ α ε, αἱ λ μ, κ θ, τέμνουσαι τὴν ζ η, τετραγωνίζουσαν κατὰ τὰ μ, καὶ θ, σημεῖα, δι' ὧν ἤχθωσαν αἱ ε μ ν, ε θ β, καὶ τμηθήσεται τὸ α ζ, τεταρτημόριον κατὰ τὰ ν, καὶ β, ὥστε τὰ α ν, ν β, β ζ, τόξα ἔχει πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ ξ ο π, εὐθεῖαι, ἡ δεῖξις ἡ αὐτή.

Ἔστω δ' αὖθις διελεῖν καὶ τὸ α β γ, ἡμικύκλιον εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τοῖς δυσὶ μέρεσι τοῦ α ζ, τεταρτημορίου, ἢ τῆς ε ζ, ἡμιδιαμέτρου. Διαιρεθήτω δὴ ἑκάτερον τῶν α β, β γ, τεταρτημορίων τοῦ α β γ, δοθέντος ἡμικυκλίου ἀναλόγως τοῖς α ν, ν ζ, μέρεσι τοῦ α ζ, τεταρτημορίου κατὰ τὰ ε, καὶ ζ, σημεῖα, ὥστε ἔχειν, τό, τε α ε, πρὸς τὸ ε β, καὶ τὸ β ζ, πρὸς τὸ β γ, ὡς τὰ α ν, πρὸς τὸ ν ζ, ἢ τὸ ε λ, πρὸς τὸ λ ζ, κατὰ τὰ ἀνωτέρω. καὶ εἰλήφθω τὸ ζ η, τόξον ἴσον τῷ γ ζ, καὶ τὸ α η, ἕξει πρὸς τὸ η γ, ὡς τὸ α ν, πρὸς τὸ ν ζ, ἤγουν τὸ ε λ, μέρος τῆς ε ζ, πρὸς τὸ λ ζ. Ἐπεὶ οὖν τὰ α β, β γ, τεταρτημόρια ἀναλόγως τέτμηνται, καί εἰσιν ἴσα, πάντως γε τάτε α ε, β ζ, καὶ ε β, ζ γ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. ἀλλὰ τῷ ζ γ, εἴληπται ἴσον τὸ ζ η, τὸ ὅλον ἄρα γ η, ἴσον ἐστὶ τοῖς γ ζ, β ε. ἀφαιρουμένων οὖν ἀπὸ τοῦ α β γ, ἡμικυκλίου τῶν ἴσων γ ζ, β ε, καὶ τοῦ γ η τόξου, ἐναπολείπονται ἴσα τὰ α ε, β ζ, ὁμοῦ τῷ α η, ἀλλ' ὡς τὸ α ε, πρὸς τὸ ε β, ἔχουσι καὶ συναμφότερα τὰ α ε, β ζ, τόξα πρὸς συναμφότερα τὰ ε β, ζ γ, ἄρα καὶ τὸ α η, ἔχει πρὸς τὸ η γ, ὡς τὸ α ε πρὸς τὸ ε β, ἀλλὰ τὸ α ε, πρὸς τὸ ε β, γέγονεν ὡς τὸ α ν, πρὸς τὸ ν ζ, καὶ τὸ α η, ἄρα πρὸς τὸ η γ, ἔχει, ὡς

Geom. Lib. 7. Fig. 12.



ὡς τὸ α ν, πρὸς τὸ ν ζ, καὶ τὸ α η, ἄρα πρὸς τὸ η γ, ἔχει, ὡς τὸ α ν, πρὸς τὸ ν ζ. Ἔστω δήποι διελεῖν τὸ αὐτὸ ἡμικύκλιον α β γ, καὶ εἰς μέρη τρία ἀνάλογα ταῖς ξ ο π. Διαιρεθήτω δὴ τὸ β γ, κατὰ τὰ ζ, καὶ θ, σημεῖα, ὥστε τὰ β ζ, ζ θ, θ γ, ἀνάλογα εἶναι ταῖς ξ ο π· εἶτα εἰλήφθω τὸ μετὰ ζ η, ἴσον τῇ ζ γ, τὸ δὲ θ κ, ἴσον τῇ γ θ, καὶ διαιρεθήσεται τὸ α β γ, ἡμικύκλιον εἰς μέρη τρία τὰ α η, η κ, κ γ, ἀναλόγως ἔχοντα ταῖς ξ ο π· κατὰ γὰρ τὰ ἤδη εἰρημένα τὸ α η γ, ἡμικύκλιον διῄρηται κατὰ μετὰ τὸ η, εἰς δύο τὰ α η, η γ, ἀναλόγως ταῖς β ζ, ζ γ, κατὰ δὲ τὸ κ, εἰς τρία ἀνάλογα ταῖς τρισὶ τοῦ β γ, τεταρτημορίου ταῖς β ζ, ζ θ, θ γ, ἀλλὰ τὰ β ζ, ζ θ, θ γ, ἀναλογοῦσι ταῖς ξ ο π, ἄρα καὶ τὰ α η, η κ, κ γ, ἀνάλογα ὁμοίως εἰσὶ ταῖς ξ ο π. Τὸ δοθὲν ἄρα τόξον καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

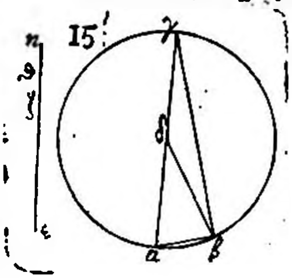
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι καὶ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν δυνάμεθα εἰς ὁσαδηποτοῦν μέρη διελεῖν κατὰ τὴν δοθεῖσαν ἀναλογίαν. ἐπεὶ γὰρ ἑκάστης γωνίας μέτρον ἐστὶ τόξον κύκλου, ὡς ἀπὸ κέντρου, γραφομένου τοῦ τῆς γωνίας σημείου κατὰ τὸν ι β΄: ὅρον τοῦ παρόντος, πάντως γε διῃρημένου τοῦ τόξου τῆς δοθείσης γωνίας εἰς τὰ δοθέντα μέρη. ἐὰν ἐφ᾽ ἑκάστης τομῆς ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς γωνίας ἀχθῶσιν εὐθεῖαι, διαιρεθήσεται καὶ ἡ γωνία εἰς τὰ δοθέντα μέρη. αἱ γὰρ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίαι ἀνάλογον ἔχουσι ταῖς βάσεσιν, ἐφ᾽ ὧν ἐφεστήκασι.

Πρότασις Ις΄:

Δοθέντος κύκλου τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἐν αὐτῷ κατασκευάσαι ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν μείζονα τῆς κατὰ κορυφὴν, κατὰ τὸν δοθέντα λόγον.

Ἔστω κύκλος ὁ α β γ, οὗ κέντρον τὸ δ, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς ε ζ, πρὸς τὴν ζ η, καὶ ζητηθήτω συσταθῆναι εἰς τὸν α β γ, δοθέντα κύκλον ἰσοσκελὲς τρίγωνον, οὗ ἑκατέρα τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν ἕξει πρὸς τὴν κατὰ κορυφὴν, ὡς ἡ ε ζ, πρὸς τὴν ζ η. Διήχθω δὴ διὰ τοῦ δ, κέντρου τοῦ δοθέντος κύκλου. διάμετρος ἡ α γ, τμηθείσης δὲ τῆς ζ η, δίχα κατὰ τὸ θ, διαιρεθήτω τὸ α β γ, ἡμικύκλιον κατὰ τὸ β, ἀναλόγως τῇ ε θ, ὥστε τὸ γ β, τόξον ἔχειν πρὸς τὸ β α, ὡς ἡ ε ζ, πρὸς τὴν ζ θ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ γ β, δ β, α β, καὶ τὸ α δ β, τρίγωνον ἔσται τὸ ζητούμενον. κατὰ γὰρ τὴν λ γ΄: τοῦ ς΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ ἡ ὑπὸ γ α β, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ α γ β, ἔχει ὡς τὸ γ β, τόξον πρὸς τὸ β α, ἀλλὰ τὸ γ β, πρὸς τὸ β α, γέγονεν ὡς ἡ ε ζ, πρὸς τὴν ζ θ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ γ α β, γωνία ἔχει πρὸς τὴν ὑπὸ α γ β, ὡς ἡ ε ζ, πρὸς τὴν ζ θ· ὡς δὲ ἡ ζ θ, πρὸς τὴν ζ η, διπλα-

Geom. Lib. 7. Fig. 13.



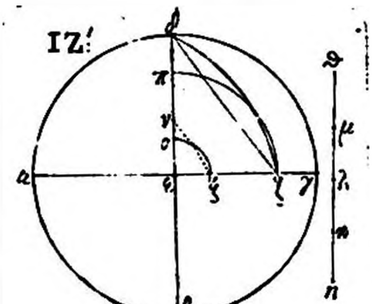
σίαν, ἔχει καὶ ἡ ὑπὸ αγβ, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ αδβ, διπλασίαν, ἄρα ἡ ὑπὸ δαβ, πρὸς τὴν ὑπὸ αδβ, ἔχει ὡς ἡ εζ, πρὸς τὴν ζη, τῇ δὲ ὑπὸ δαβ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ δβα, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ δβα, πρὸς τὴν ὑπὸ αδβ, ἔχει ὡς ἡ εζ, πρὸς τὴν ζη. Δοθέντος ἄρα κύκλου τρίγωνον καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΖ'.

Κύκλου δοθέντος εὐθεῖαν εὑρεῖν ἴσην τῇ αὐτοῦ περιφερείᾳ.

Ἔστω κύκλος ὁ αβγδ, οὗ κέντρον τὸ ε, καὶ ζητείσθω εὐθεῖα ἴση τῇ αὐτοῦ περιφερείᾳ. Διαιρείσθω δὴ κατὰ τὴν α': ὁ δοθεὶς οὗτος κύκλος εἰς μέρη τέσσαρα κατὰ τὴν γ': τοῦ β': τοῦ παρόντ: ἃ καὶ τεταρτημόρια λέγεται, τὰ αβ, βγ, γδ, δα, καὶ γραφέσθω ἔν τινι τῶν αὐτοῦ τεταρτημορίων δὸς εἰπεῖν τῷ δγ, τετραγωνίζουσα γραμμὴ ἡ δζ, εἶτα εὑρέσθω κατὰ τὴν γ': ἀνάλογος τῶν ζε, εδ, κατὰ τὴν ιγ': τοῦ α': τοῦ παρ: ἡ ηθ, καὶ αὕτη τετραπλασιασθεῖσα ἴση ἔσται τῇ περιφερείᾳ τοῦ αβγδ, δοθέντος κύκλου. κατὰ γὰρ τὴν ιγ': τοῦ παρ: τὸ δγ, τεταρτημόριον, ἥ τε δε, πλευρὰ τῆς τετραγωνιζούσης καὶ εζ, βάσις συνεχῶς εἰσιν ἀνάλογα. ὥστε ὡς ἡ ζε, πρὸς τὴν εδ, ἡ εδ, πρὸς τὸ δγ, τεταρτημόριον, ἀλλ' ὡς ἡ ζε, πρὸς τὴν εδ, γέγονε καὶ ἡ εδ, πρὸς τὴν ηθ, ἡ εδ, ἄρα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρός τε τὸ δγ, τεταρτημόριον, καὶ τὴν ηθ, εὐθεῖαν, καὶ ἑπομένως ἡ ηθ, ἴση ἐστὶ τῷ δγ, τεταρτημορίῳ κατὰ τὴν θ': τοῦ ε': τοῦ Στοιχ: ἀλλὰ τὸ δγ, τετραπλασιαζόμενον ποιεῖ τὴν αβγδ, περιφέρειαν, ἄρα καὶ ἡ ηθ, τετραπλασιαζομένη ἴση ἐστὶ τῇ αὐτῇ αβγδ, περιφερείᾳ. Κύκλου ἄρα δοθέντος εὐθεῖαν καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 7. Fig. 14.



Πρότασις ΙΗ'.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην περιφέρειαν κύκλου εὑρεῖν.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ηθ, ἀνωτέρω εὑρεθεῖσα, καὶ ζητείσθω ταύτῃ ἴση κύκλου περιφέρεια. Διαιρείσθω δὴ ἡ δοθεῖσα ηθ, εὐθεῖα εἰς τέσσαρα μέρη ἴσα τὰ ηκ, κλ, λμ, μθ, καὶ γραφέσθω κύκλος τῷ τυχόντι διαστήματι, μείζονι μέντοι τοῦ ηκ, μέρους ὁ αβγδ, οὗ κέντρον τὸ ε, δι' οὗ διήχθωσαν αἱ αγ, βδ, διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τεμνόμεναι, καὶ γραφέσθω ἡ δζ, τετραγωνίζουσα γραμμὴ ἔν τινι τῶν αὐτοῦ τεταρτημορίων, δὸς εἰπεῖν τῷ δγ, . Εἶτα εἰλήφθω ἡ εν, ἴση

τῇ

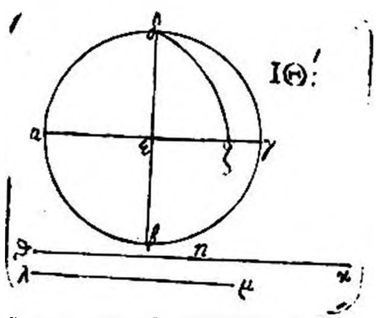
τῇ η κ, τετάρτῳ μέρει τῆς η θ, ἀπὸ δὲ τοῦ ν, παράλληλος τῇ δ ζ, ὑποτεινούσῃ τῆς τετραγωνιζούσης ἤχθω ἡ ν ξ, καὶ ἡ ε ξ, ἔσται ἡμιδιάμετρος τοῦ ζητουμένου. κέντρῳ γὰρ τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ ε ζ, ε ξ, γραφήτωσαν τὰ ξ ο, ζ π, τεταρτημόρια, καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν ιδ': τοῦ παρ: τὸ ζ π, ἴσον τῇ ε δ, πάντως γε καὶ ξ ο, ἴσον ἐστὶ τῇ ε ν, κατὰ γὰρ τὴν β': τοῦ ς': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὡς ἡ δ ε, πρὸς τὴν ε ζ, ἡ ν ε, πρὸς τὴν ε ξ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ δ ε, πρὸς τὴν ν ε, ἡ ε ζ, πρὸς τὴν ε ξ, λαμβανομένης ἄρα τῆς μὲν δ ε, ἀντὶ πλευρᾶς τῆς τετραγωνιζούσης δ ζ, τῆς δὲ ε ζ, ἀντὶ βάσεως, ἔσται πάντως καὶ ἡ μὲν ν ε, πλευρὰ ὁμοίως τετραγωνιζούσης, ἡ δὲ ε ξ, βάσις, καὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ιδ': τὸ ξ ο, τεταρτημόριον ἴσον ἔσται τῇ ε ν, ἀλλ' ἡ μὲν ε ν, τέταρτον ἐστι τῆς η θ, τὸ δὲ ξ ο, τὸ ἀπὸ κέντρου τοῦ ε, γραφομένου κύκλου, ὁ κύκλος ἄρα οὗτος ἴσος ἔσται τῇ η θ. Τῇ δοθείσῃ ἄρα εὐθείᾳ ἴσην περιφέρειαν καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΘ'.

Τῷ δοθέντι κύκλῳ τετράγωνον ἴσον συστήσασθαι.

Ἔστω κύκλος ὁ α β γ δ, καὶ ζητηθήτω τετράγωνον ἴσον τῷ αὐτῷ κύκλῳ. Διαιρεθήτω δὴ ὁ δοθεὶς α β γ δ, κύκλος εἰς μέρη ἴσα τέσσαρα τὰ α β, β γ, γ δ, δ α; καὶ γραφήτω ἐν τῷ δ ε γ, τεταρτημορίῳ τετραγωνίζουσα ἡ δ ζ, εἶτα εὑρεθήτω τρίτη ἀνάλογος τῶν ζ ε, ε δ, ἡ η θ, κατὰ τὴν προῤῥηθεῖσαν ιδ': ταύτης δὲ διπλασιασθείσης, γενέσθω ἡ θ κ, καὶ εὑρεθήτω μέση ἀνάλογος τῶν θ η κ, ε γ, ἡ λ μ, κατὰ τὴν θ': τοῦ α': τοῦ παρ: καὶ ἡ λ μ, ἔσται πλευρὰ τετραγώνου ἴσου τῷ δοθέντι α β γ δ, κύκλῳ. κατὰ γὰρ τὴν ἀνωτέρω ἡ θ η, ἴση ἐστὶ τῷ γ δ, τεταρτημορίῳ. ἡ δὲ ὅλη θ κ, τῇ γ δ α, ἡμιπεριφερείᾳ τοῦ κύκλου. Ἐπεὶ δὲ αἱ θ κ, λ μ, ε γ, ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον κατὰ τὴν κατασκευὴν, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς μέσης λ μ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν θ κ, ε γ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ κατὰ τὴν ιζ': τοῦ ς': τοῦ Στοιχ: ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν θ κ, ε γ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ α β γ δ, δοθέντι κύκλῳ κατὰ τὴν κ α': τοῦ δ': τοῦ παρ: ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς λ μ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ α β γ δ, δοθέντι κύκλῳ. Τῷ δοθέντι ἄρα κύκλῳ τετράγωνον ἴσον συνέστη.

Geom. Lib. 7. Fig. 19.

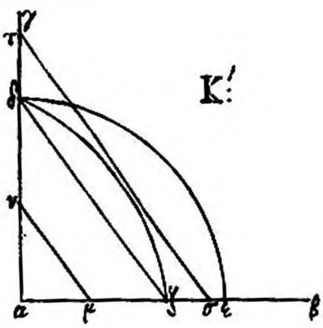


Πρότασις Κ':

Σχήματα καταγράψαι πρὸς τετραγωνισμὸν παντὸς συμβαλλόμενα κύκλου.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀφορμὴν λαβόντες οἱ περὶ τὰ τοιαῦτα ἐνασχολούμενοι, τοῦ βουλομένου σχήματά τινα καταγράφειν παραδεδώκασιν, ἵνα δι' αὐτῶν ὡς δι' ὀργάνων παντὰ κύκλον ἔχοι εὐχερέστερον τετραγωνίζειν. Ἔστι δὲ τούτων ἡ καταγραφὴ τοιαύτη. Συσταθήτω γωνία ὀρθὴ ἔν τινι ἐπιπέδῳ ἱκανὸν τό, τε μῆκος καὶ πλάτος αὐτοῦ ἔχοντι, ὡς ἡ ὑπὸ γ α β, ὥστε τὰς περιεχούσας ταύτην γραμμὰς α γ, α β, ἀορίστους εἶναι. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ τυχόντι α δ, γραφήτω τεταρτημόριον τὸ δ ε, καὶ συσταθήτω ἐν αὐτῷ τετραγωνίζουσα γραμμὴ ἡ δ ζ. εἶτα ἐπιζεύχθω ἡ δ ζ, εὐθεῖα ὑποτείνουσα τὴν δ ζ, τετραγωνίζουσαν. Ἔστω δ' ἔτι εὐθεῖα ἡ η θ, ἐν ἑτέρῳ ἢ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἱκανὸν καὶ αὐτὴ ἔχουσα μῆκος, καὶ ἐπ' αὐτῆς συνεστάθω κατὰ τὸ μέσον κάθετος ἡ κ λ, ἀορίστως ἐκτεινομένη, καὶ ἔσται τὰ δύο ταῦτα σχήματα προσφυέστατα ὄργανα εἰς τετραγωνισμὸν παντὸς κύκλου ὡς ὀψόμεθα.

Geom. Lib. 7. Fig. 16.



Ἰστέον δέ, ὅτι ἐπὶ τοῦ προτέρου σχήματος τὸ μὲν δ ε, τεταρτημόριον καὶ ἡ δ ζ, τετραγωνίζουσα γραμμὴ εἰς τὴν τοῦ ὀργάνου μόνον χρησιμεύει κατασκευήν, εἰς δὲ τὴν τούτου χρῆσιν ἱκαναὶ μόναι αἱ γ α, α β, γραμμαὶ μετὰ τῆς δ ζ.

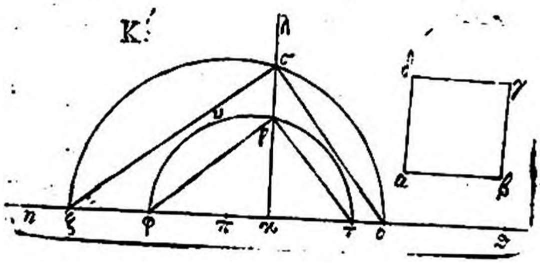
Ἔστω δὴ τετραγωνίσαι κύκλον τινά. τούτου δὲ ἡ ἡμιδιάμετρος ἢ ἴση ἔσται τῇ α ζ, βάσει τῆς ἐν τῷ προτέρῳ σχήματι τετραγωνιζούσης γραμμῆς, ἢ ἐλάττων, ἢ γοῦν μείζων. Εἰ μὲν οὖν ἴση ᾖ τῇ α ζ, ληφθήτω ἡ κ ξ, ἐπὶ τοῦ β': σχήματος διπλασία τῆς α δ, ἡ δὲ κ ο, ἴση τῇ α ζ, καὶ τμηθείσης δίχα τῆς ξ ο, κατὰ τὸ π, γραφήτω ἡμικύκλιον τὸ ξ σ ο. Εἶτα εἰλήφθω εὐθεῖα ἴση τῇ κ σ, καὶ ἐπ' αὐτῆς συνεστάθω τετράγωνον, καὶ τοῦτο ἴσον ἔσται τῷ δοθέντι κύκλῳ, οὗ ἡ ἡμιδιάμετρος ἴση ὑπετέθη τῇ α ζ, ἡ μὲν γὰρ α δ, ἴση ἐστὶ τῷ τεταρτημορίῳ τοῦ αὐτοῦ κύκλου κατὰ τὴν ι δ': τοῦ παρόντος, ἡ δὲ κ ξ, ἴση τῇ ἡμιπεριφερείᾳ. Ἐπεὶ δὲ εἴληπται καὶ ἡ κ ο, ἴση τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τοῦ αὐτοῦ κύκλου, καὶ τῶν ξ κ, κ ο, μέση ἀνάλογός ἐστιν ἡ κ σ, κατὰ τὴν θ': τοῦ α: τοῦ παρόντος, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς κ σ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δοθέντι κύκλῳ, οὗ ἡ ἡμιδιάμετρος ἴση τῇ α ζ, τουτέστι τῇ κ ο, κατὰ τὴν κ α': τοῦ δ': τοῦ παρόντος.

Εἰ δὲ ἡ τοῦ δοθέντος κύκλου ἡμιδιάμετρος ἐλάττων ᾖ τῆς α ζ, εἰλήφθω ἀπὸ

τῆς

τῆς αζ, ἴση ταύτῃ ἡ αμ, καὶ ἤχθω παράλληλος τῇ ζδ, ἡ μν. Εἶτα εἰλήφθω ἡ κξ, διπλασία τῆς αν, ἡ δὲ κο, ἴση τῇ αμ, καὶ γραφέντω ἐπὶ τῆς ξο, τὸ ξσο, ἡμικύκλιον, ἐπὶ δὲ τῆς κσ, συνιστάσθω τετράγωνον, καὶ ἔσται ἴσον τῷ δοθέντι κύκλῳ, οὗ ἡ ἡμιδιάμετρος ἴση τῇ αμ, ὁ λόγος ἐκ τῶν ἀνωτέρω σαφής. Ἐὰν δὲ πλάταιον ἡ τοῦ δοθέντος κύκλου ἡμιδιάμετρος μείζων ᾖ τῆς αζ, ὡς ἡ ασ, ἤχθω τῇ δζ, παράλληλος ἡ στ, καὶ εἰλήφθω ἡ μὲν κξ, διπλασία τῆς ατ, ἡ δὲ κο, ἴση τῇ ασ, καὶ τὰ λοιπὰ γινέσθω, ὡς προηρμήνευται, καὶ ἔσται τὸ προσαχθέν.

Geom. Lib. 7. Fig. 17.

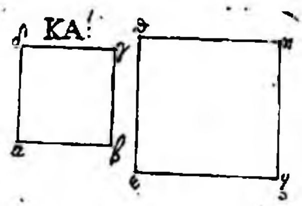


Πρότασις ΚΑ'.

Τῷ δοθέντι τετραγώνῳ ἴσον κύκλον συστήσασθαι.

Ἔστω τετράγωνον τὸ αβγδ, καὶ ζητηθήτω κύκλος ἴσος τῷ αὐτῷ τετραγώνῳ. Ἀφῃρήσθω δὴ ἀπὸ τῆς κλ, ἐπὶ τοῦ β': σχήματος ἡ κρ, ἴση τῇ αβ, πλευρᾷ τοῦ δοθέντος αβγδ, τετραγώνου. Δεδόσθω δὲ κύκλος ὁ τυχών, καὶ ἔστω τούτου ἡμιδιάμετρος ἡ κο, καὶ εὑρεθήτω κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἡ κσ, ἧς τὸ τετράγωνον ἴσον ἔσται τῷ δοθέντι κύκλῳ, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ κο. εἶτα ἐπιζεύχθωσαν αἱ σο, σξ, καὶ τῇ μὲν σο, ἤχθω παράλληλος ἡ τρ, τῇ δὲ σξ, ἡ ρφ, καὶ ἡ κτ, ἡμιδιάμετρος ἔσται τοῦ ζητουμένου κύκλου. κατὰ γὰρ τὴν τῶν τριγώνων ὁμοιότητα ὡς ἡ ξκ, πρὸς τὴν κσ, ἡ φκ, πρὸς τὴν κρ, ὡς δὲ ἡ κσ, πρὸς τὴν κο, ἡ κρ, πρὸς τὴν κτ. ὥστε καὶ διίσου ὡς ἡ ξκ, πρὸς τὴν κο, ἡ φκ, πρὸς τὴν κτ, ἀλλ' ἡ ξκ, ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιπεριφερείᾳ τοῦ κύκλου, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ κο, ἄρα καὶ ἡ φκ, ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιπεριφερείᾳ τοῦ κύκλου, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ κτ. Ἐπεὶ δὲ ἡ κρ, μέση ἀνάλογός ἐστι τῶν φκ, κτ, πάντως γε τὸ ὑπὸ τῶν φκ, κτ, ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς κρ, τετραγώνῳ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν φκ, κτ, ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ κύκλῳ, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ κτ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν κα': τοῦ δ': τοῦ παρ: ὁ κύκλος ἄρα, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ κτ, ἴσος ἐστὶ τῷ δοθέντι τετραγώνῳ, οὗ ἡ πλευρὰ ἴση τῇ κρ.

Geom. Lib. 7. Fig. 18.

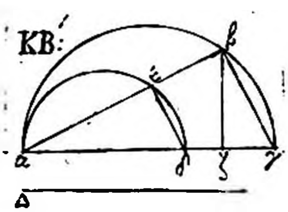


Πρό-

Πρότασις ΚΒ'.

Σχῆμα καταγράψαι προχειρότερον πρὸς εὕρεσιν πλευρᾶς τετραγώνου ἴσου τῷ δοθέντι κύκλῳ, καὶ ἀνάπαλιν πρὸς εὕρεσιν διαμέτρου ἴσου κύκλου τῷ δοθέντι τετραγώνῳ.

Ἔστω ἡ τυχοῦσα αγ, εὐθεῖα ἱκανὸν μῆκος ἔχουσα, καὶ γραφέσθω ἐπ' αὐτῆς ἡμικύκλιον τὸ αβγ, καὶ τετραγωνισθήτω ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ αγ, κατὰ τὴν ιη': τοῦ παρόντος, ἢ ιθ': καὶ ἔστω πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τούτου ἡ Δ, καὶ ταύτῃ ἴση ἐναρμοσθήτω τῷ αβγ, ἡμικυκλίῳ ἡ αβ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ βγ, καὶ τὸ αβγ, ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἔσται σοι ὄργανον προχειρότατον εἰς τὸ πάντα τὸν κύκλον τετραγωνίζειν, καὶ πᾶν τετράγωνον εἰς κύκλον μεταμορφοῦν. Ἔστω τοίνυν διάμετρος τυχόντος κύκλου ἡ αδ, καὶ ζητείσθω πλευρὰ τετραγώνου ἴσου τῷ δοθέντι κύκλῳ. Γραφέσθω ἡμικύκλιον ἐπὶ τῆς βδ, τέμνον τὴν αβ, κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ εδ, καὶ ἡ αε, ἔσται πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου. ἡ γὰρ εδ, παράλληλός ἐστι τῇ βγ, κατὰ τὴν κη': τοῦ α': τῶν Στοιχείων. ὥστε κατὰ τὴν β': τοῦ ς': Geom. Lib. 7. Fig. 19. τῶν αὐτῶν, αἱ αβ, αγ, ἀναλόγως τέμνονται ὑπὸ τῆς εδ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αδ, πρὸς τὴν δγ, ἡ αε, πρὸς τὴν εβ, καὶ συνθέσει, ὡς ἡ αγ, πρὸς τὴν δγ, ἡ αβ, πρὸς τὴν εβ, ὥστε καὶ ἀναστροφῇ, ὡς ἡ αγ, πρὸς τὴν αδ, ἡ αβ, πρὸς τὴν αε, ἀλλ' ἡ μὲν αγ, διάμετρός ἐστι τοῦ αβγ, κύκλου, ἡ δὲ αδ, τοῦ αεδ, ἔστι δὲ καὶ ἡ αβ, πλευρὰ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τετραγώνου ἴσου τῷ αβγ, κύκλῳ, ἄρα καὶ ἡ αε, πλευρὰ ἔσται τετραγώνου ἴσου τῷ αεδ, κύκλῳ.



Ἔστω ἔτι πλευρὰ τυχόντος τετραγώνου ἡ αε, καὶ ζητείσθω διάμετρος κύκλου ἴσου τῷ ἀπὸ τῆς αε, τετραγώνῳ. Ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ ε, παράλληλος τῇ βγ, ἡ εδ, τέμνουσα τὴν αγ, κατὰ τὸ δ, καὶ ἡ αδ, ἔσται ἡ τοῦ ζητουμένου κύκλου διάμετρος. ἡ δεῖξις ἡ αὐτή.

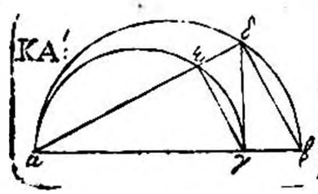
Τοῦτον μὲν δὴ τὸν τρόπον ἅπας κύκλος ἐλάττων τοῦ αβγ, εὐχερῶς τετραγωνίζεται, καὶ πᾶν τετράγωνον ἔλαττον τοῦ ἀπὸ τῆς αβ, εἰς κύκλον μεταμορφοῦται. Ἵνα δὲ καὶ μείζονα κύκλον τοῦ αβγ, τετραγωνίζειν ἔχωμεν, ἢ μεῖζον τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς αβ, εἰς κύκλον μετασχηματίζειν, ὀφείλει ἑκατέρα τῶν αβ, αγ, εὐθειῶν ἀορίστως ἀχθῆναι κατὰ τὸ συνεχές, καὶ ἀπὸ μὲν τῆς αγ, λαμβάνειν τὴν διάμετρον τοῦ δοθέντος κύκλου, ἀπὸ δὲ τῆς αβ, τὴν πλευρὰν τοῦ δοθέντος τετραγώνου, καὶ τὰ λοιπὰ γίγνεσθαι, ὡς προηρμήνευται.

Ἄλλως. Ἔστω κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ αβ, καὶ ζητείσθω πλευρὰ τετραγώνου ἴ-

σου

σου τῷ αὐτῷ κύκλῳ. Διαιρεθήτω δὴ ἡ αβ, εἰς μέρη τεσσαρασκαίδεκα, καὶ εἰλήφθω ἡ αγ, μερῶν ἕνδεκα, ἀπὸ δὲ τοῦ γ, ἀνεστάθω κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ γδ, τέμνουσα τὴν αδβ, περιφέρειαν κατὰ τὸ δ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ αδ. Λέγω δὴ τὴν αδ, εὐθεῖαν, πλευρὰν εἶναι τοῦ ζητουμένου τετραγώνου, ὥστε τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἴσον εἶναι τῷ δοθέντι κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἡ αβ. Ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς δβ, αἱ αβ, αδ, αγ, εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσι κατὰ τὸ α: πόρισμα τῆς η: τοῦ ς': τοῦ Στοιχειωτοῦ, κατὰ δὲ τὴν α: τοῦ γ': τοῦ παρόντος τὸ ἀπὸ τῆς αβ, α: τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αδ, β': ἔχει ὡς ἡ αβ, α: πρὸς τὴν αγ, γ': ἀλλ' ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν αγ, ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον πρὸς τὸν αδβ, κύκλον κατὰ τὴν ιε: τοῦ δ': τοῦ παρόντος, ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρός τε τὸν δοθέντα κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ αὐτὴ αβ, καὶ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς αδ, ὥστε κατὰ τὴν θ': τοῦ ε: τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ ἀπὸ τῆς αδ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δοθέντι κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἡ αβ, ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Geom. Lib. 7. Fig. 20.



Ἔστω ἔτι πλευρὰ τετραγώνου ἡ αε, καὶ ζητηθήτω διάμετρος κύκλου ἴσου τῷ ἀπὸ τῆς αε, τετραγώνῳ. Τετραγωνισθήτω δὴ α: ὁ τυχὼν αδβ, κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ αβ, κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον. καὶ ἔστω πλευρὰ τετραγώνου ἡ αδ, ἀφ' ἧς ἀφῃρήσθω ἡ αε, δοθεῖσα, καὶ πρὸς τῷ ε, συνεστάθω κάθετος ἡ εγ, καὶ ἡ αγ, ἔσται διάμετρος τοῦ ζητουμένου κύκλου, ταὐτὸν δ' ἐστὶν εἰπεῖν ὁ αεγ, κύκλος ἴσος ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς αε, τετραγώνῳ. ὁ λόγος ἐκ τῶν ἀνωτέρω σαφής.

Πρότασις ΚΓ':

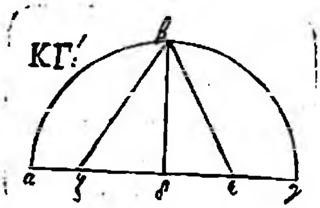
Τῆς τε τοῦ κύκλου περιφερείας καὶ διαμέτρου τοῦ αὐτοῦ διῃρημένων κειμένων τὰς ἑκάστου τόξου ὑποτεινούσας εὑρεῖν κατὰ Πτολεμαῖον, καὶ α: τὰς τοῦ δεκαγώνου, πενταγώνου, ἑξαγώνου, τετραγώνου, καὶ τριγώνου.

Ἔστω ἡ μὲν τοῦ κύκλου περιφέρεια εἰς μοίρας τξ': διῃρημένη, ἡ δὲ διάμετρος αὐτοῦ εἰς μέρη ρκ': καὶ ζητηθήτω α: ἡ τοῦ δεκαγώνου πλευρά, ἡ τοῦ πενταγώνου, ἡ τοῦ ἑξαγώνου, ἡ τοῦ τετραγώνου, καὶ ἡ τοῦ τριγώνου, πόσων ἂν εἴη μορίων ἑκάστη, οἷον ἡ διάμετρος ρκ': ὧν ἡ μὲν ὑποτείνουσα ἐστι μοιρ. λς': ἡ δὲ οβ': ἡ δὲ ξ': ἡ δὲ η': καὶ ἡ λοιπὴ ρκ'. Ἔστω δὴ ἡμικύκλιον τὸ αβγ, οὗ κέντρον τὸ δ, καὶ ἀνεστάθω κάθετος ἐπὶ τῆς αγ, ἡ δβ, διαιρεθείσης δὲ τῆς δγ, δίχα κατὰ τὸ ε, ἐπιζεύχθω ἡ βε, ταύτῃ δὲ ἴση εἰλήφθω ἡ εζ, καὶ ἐπιζεύχθω πάλιν ἡ βζ. Δείκνυται δὲ α: τὴν μὲν δζ, πλευρὰν εἶναι δεκαγώνου, τὴν δὲ βζ, πενταγώνου, ὅτι μὲν γὰρ ἡ δγ, πλευρά ἐστιν ἑξαγώνου, δῆλον, ἡμιδιάμετρος γάρ.

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ δὲ ἡ δγ, τέτμηται δίχα κατὰ τὸ ε, καὶ πρόσκειται αὐτῇ ἡ ζδ, ἐπ' εὐθείας, πάντως γε κατὰ τὴν ϛ': τοῦ β': τῶν Στοιχ: τὸ ὑπό τε τῆς γζ, καὶ ζδ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς δε, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ζε, τετραγώνῳ, ἤτοι τῷ ἀπὸ τῆς βε. ἴση γὰρ εἴληπται ἡ ζε, τῇ βε, ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τῆς βε, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν βδ, δε, τετράγωνα κατὰ τὴν μζ': τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ, ἄρα τὸ ὑπό τε τῆς γζ, καὶ ζδ, ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς δε, τετραγώνου ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν βδ, δε, τετραγώνοις. κοινοῦ δ' ἀφαιρουμένου τοῦ ἀπὸ τῆς δε, ἐγκαταλείπεται τὸ ὑπό τε τῆς γζ, καὶ ζδ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δβ, τετραγώνῳ, ἤτοι τῷ ἀπὸ τῆς δγ, ὥστε αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ζγ, γδ, δζ, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἑπομένως ἡ γζ, κατ' ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται. ὡς γὰρ ἡ ὅλη γζ, πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα τὴν γδ, ἡ γδ, πρὸς τὸ ἔλαττον τμῆμα τὴν δζ, ἀλλ' ἡ γδ, πλευρά ἐστιν ἑξαγώνου, ἄρα κατὰ τὴν θ': τοῦ ιγ': τῶν Στοιχείων, ἡ ζδ, πλευρά ἐστι δεκαγώνου. Ἐπεὶ δὲ ἡ βζ, δύναται τήν τε βδ, καὶ δζ, ὧν ἡ μὲν πλευρά ἐστιν ἑξαγώνου, ἡ δὲ δεκαγώνου, ὡς δέδεικται, πάντως γε ἡ βζ, πλευρά ἐστι πενταγώνου κατὰ τὴν ι: τοῦ αὐτοῦ. Λείπεται δὲ δεῖξαι καὶ πόσων ἂν εἴη μοιρῶν ἑκάστη τῶν εἰρημένων, οἵων ἡ διάμετρος ρκ': Πολλαπλασιασθήτω οὖν ἑκατέρα τῶν δε, δβ, ἐφ' ἑαυτὴν χωρίς, καὶ οἱ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνοι ἀριθμοὶ συναφθήτωσαν ἀλλήλοις, καὶ ὁ γενόμενος ἴσος ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς βε, τετραγώνῳ ἀριθμῷ, οὗ τινος εὑρεθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα, καὶ γνωσθήσεται πάντως ἡ βε, καὶ ἡ ταύτῃ ἴση εζ. ἀπὸ δὲ τῆς εὑρεθείσης τετραγώνου ῥίζης ἀφῃρήσθω ἡ δε, καὶ γνωσθήσεται ἡ ζδ, πλευρὰ οὖσα δεκαγώνου. ταύτης δὲ ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιασθείσης, καὶ τοῦ γενομένου ἐξ αὐτῆς ἀριθμοῦ τῷ ἀπὸ τῆς δβ, συναφθέντος γενήσεται ὁ ἀπὸ τῆς βζ, τετράγωνος ἀριθμός. οὗ τῆς τετραγώνου εὑρεθείσης ῥίζης, γνωσθήσεται καὶ ἡ βζ, πλευρὰ οὖσα πενταγώνου. Ἐγνωσμένης γὰρ τῆς αγ, διαμέτρου, ἐγνωσμένη πάντως ἐστὶ καὶ ἡ δγ, ἡμιδιάμετρος, καὶ ἡ ταύτης ἔτι ἡμίσεια δε, ἔστι δὲ καὶ ἴση ἡ δβ, τῇ δγ. ἐγνωσμένη ἄρα ἔτι ἐστὶ καὶ ἡ δβ. ἐπεὶ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς βε, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δε, δβ, κατὰ τὴν μζ': τοῦ α: τῶν Στοιχείων, πάντως γε συναπτομένων τῶν ἀπὸ τῶν δε, δβ, καὶ τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῆς τετραγώνου εὑρεθείσης ῥίζης, γνωσθήσεται δήπουθεν καὶ ἡ βε, ταύτῃ δὲ ἴση εἴληπται ἡ εζ, ἐγνωσμένη ἄρα ἔσται καὶ ἡ εζ, ἀφαιρεθείσης δὲ ἀπὸ τῆς εζ, τῆς δε, γνωσθήσεται καὶ ἡ ζδ. Ἐπεὶ δὲ πάλιν τοῖς ἀπὸ τῶν ζδ, δβ, τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βζ, πάντως συναπτομένων τῶν ἀπὸ τῶν ζδ, δβ, καὶ τοῦ ὅλου εὑρεθείσης τῆς τετραγώνου ῥίζης, γνωσθήσεται ἔτι καὶ ἡ ζβ, αὕτη δὲ πλευρά ἐστι πενταγώνου, ὡς δέδεικται, ἡ δὲ ζδ, δεκαγώνου καὶ ἡ δγ, ἑξαγώνου, ἄρα αἱ τρεῖς αὗται πλευραὶ ἡ

Geom. Lib. 7. Fig.21.



του

τῦ δεκαγώνυ, ἑξαγώνυ, καὶ πενταγώνυ, ὧν ἡ μὲν ὑποτείνει μοίρας λϛ', ὡς εἴρηται, ἡ δὲ ξ': ἡ δὲ οβ': εὑρίσκεται τῇ αὐτῇ ἐφόδῳ. Ζητεῖται δ' ἔτι ἡ τοῦ τετραγώνυ τε καὶ τριγώνυ.

Πρὸς εὕρεσιν ἦν τῆς μὲν τῦ τετραγώνυ πλευρᾶς πολλαπλασιασθήτω ἡ ἡμιδιάμετρος πρὸς ἑαυτὴν, καὶ ὁ γενόμενος διπλασιασθήτω, εἶτα ἀριθήτω ἡ τετράγωνος τῦ γενομένυ ῥίζα, καὶ αὕτη ἔσαι πλευρὰ τετραγώνυ τῦ ἐν τῷ αὐτῷ ἐγγεγραμμένου κύκλυ. Πρὸς εὕρεσιν δὲ καὶ τῆς τοῦ τριγώνυ πλευρᾶς, τριπλασιασθήτω ὁ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρυ τετράγωνος ἀριθμὸς, καὶ τῦ γενομένυ ἀριθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα, καὶ γνωσθήσεται πάντως ἡ τῦ ζητυμένυ τριγώνυ πλευρά. ἡ μὲν γὰρ τῦ τετραγώνυ πλευρὰ δυνάμει διπλασία ἐςὶ τῆς ἀπὸ τῦ κέντρυ κατὰ τὴν μζ': τῦ α: τῦ Στοιχειωτῦ, ὑποτείνει γὰρ ὀρθὴν γωνίαν περιεχομένην ὑπὸ δύο ἴσων πλευρῶν, καὶ τύτων ἡμιδιαμέτρων. ἡ δὲ τῦ τριγώνυ δυνάμει τριπλασίων ἐςὶ τῆς αὐτῆς κατὰ τὴν ι': τῦ δ': τῦ παρόντος. ἄρα τῆς τε τῦ κύκλυ περιφερείας καὶ διαμέτρου τῦ αὐτῦ δεδομένων, εὕρηται ἡ τῦ δεκαγώνυ πλευρὰ, πενταγώνυ, ἑξαγώνυ, τετραγώνυ, καὶ τριγώνυ, ὧν ἡ μὲν ὑποτείνυσά ἐςι μοιρ: λϛ': ἡ δὲ οβ': ἡ δὲ ξ': ἡ δὲ ϙ: καὶ ἡ λοιπὴ ρκ': οἷον ὁ κύκλος τξ':

Η' Πρᾶξις τῶν ἀνωτέρω.

ἡ δγ, ἡμιδιάμετρος μοιρ:	60.	ταύτης τετράγωνον	3600.
ἡ δὲ ἡμίσεια τῆς δγ,	30.	ταύτης τετράγωνον	900.
τὸ ἐξ ἀμφοῖν			4500.
ταύτης ῥίζα τετράγωνος	67. 4'. 5'5'. ἔγγιςα ἡ εζ.		
ἡδε	30.		
ἡ δζ, πλευρὰ δεκαγ:	37. 4'. 5'5'.		
ἡ δζ, πλευρὰ δεκαγώνυ	37. 4'. 5'5'.	ταύτης τετράγωνον	1375. 4'. 1'5'.
ἡ βδ, ἡμιδιάμετρος	60.	ταύτης τετράγωνον	3600.
τὸ ἐξ ἀμφοῖν			4975. 4. 15.
ταύτης ῥίζα τετράγωνος 70: 3'2. '3'. πλευρὰ πενταγώνυ ἡ βζ.			
ἡμιδιάμ: 60. ἧς τετράγ:	3600		
	2		
τὸ διπλάσιον τύτυ	7200.	τύτυ ῥίζα τετράγ: 84: 5'1. '1'. πλ: τετραγ:	
	3600.		
τὸ τριπλάσιον αὐτῦ	10800.	τύτυ ῥίζα τετράγ: 163: 5'5'. 23". πλευρὰ τριγ:	

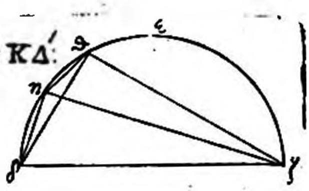
Πρότασις ΚΔ'.

Τῶν τοῦ δεκαγώνου, ἑξαγώνου, πενταγώνου, τετραγώνου, καὶ τριγώνου πλευρῶν δοθεισῶν, τὰς τῶν παραπληρωμάτων τῶν αὐτῶν μέχρι ἡμικυκλίου ὑποτεινούσας εὑρεῖν.

Ἔστω ἡμικύκλιον τὸ δεζγ, καὶ δεκαγώνου μὲν πλευρὰ, τουτέστιν ὑποτείνουσα μοιρ: λϛ': ἡ δη, ἑξαγώνου δὲ ἤτοι ὑποτείνουσα μοιρ: ξ': ἡ δθ, καὶ ζητηθήτωσαν αἱ ηζ, θζ, ὧν ἡ μὲν ὑποτείνει τόξον μοιρ: ρμδ': τὸ ηεζ, ἡ δὲ τὸ θεζ, μοιρῶν ὂν ρκ'. Πολλαπλασιασθήτω δὴ ἑκατέρα τῶν δη, δθ, ἐφ' ἑαυτὴν, καὶ ὁ γενόμενος τετράγωνος ἀριθμὸς ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ γενομένου τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τῆς δζ, ἐφ' ἑαυτὴν καὶ αὐτῆς πολλαπλασιασθείσης, τοῦ δὲ ἐναπολειφθέντος εὑρεθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα, καὶ γνωσθήσεται ἥτε ηζ, καὶ θζ. κατὰ γὰρ τὴν μζ: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ ἀπὸ τῆς δζ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δη, ηζ, καὶ δθ, θζ, τετραγώνοις. Ὥστε ἐγνωσμένης τῆς μὲν δζ, ἐκ τῆς ὑποθέσεως, τῆς δὲ δη, ἐκ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως, εὑρεθήσεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ ὁ τετράγωνος ἀριθμὸς τῆς τε δζ, καὶ δη· ἀφαιρουμένου δὲ τοῦ τετραγώνου τῆς δη, ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς δζ, ἐναπολείπεται ὁ τετράγωνος ἀριθμὸς τῆς ηζ. τούτου δὲ ῥίζα τετράγωνος ἡ αὐτὴ ηζ.

Geom. Lib. 7. Fig. 22.

ΚΔ'.



Πάλιν ἀφαιρουμένου τοῦ τῆς δθ, τετραγ: ἀπὸ τοῦ τῆς δζ, ἐγνωσμένων ὄντων καὶ αὐτῶν, ἐναπολειφθήσεται ὁ τῆς θζ, τετραγ: ἀριθμὸς, οὗ ῥίζα τετράγωνος ἡ αὐτὴ θζ. τὸν αὐτὸν τρόπον γνωσθήσονται καὶ αἱ τῶν παραπληρωμάτων τῶν λοιπῶν τόξων ὑποτείνουσαι, πενταγώνου φημὶ, τετραγώνου καὶ τριγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν ἐγγεγραμμένων κύκλον, ὧν ἡ μὲν ὑποτείνει τόξον μοιρ: ρη': παραπλήρωμα ὂν τῆς τοῦ πενταγώνου, ἡ δὲ μοιρῶν ϟ': παραπλήρωμα τετραγώνου, καὶ ἡ λοιπὴ μοιρῶν ξ': παραπλήρωμα τριγώνου. τῇ αὐτῇ ἐφόδῳ δυνατὸν εὑρεθῆναι καὶ τὰς ὑποτεινούσας τὰ παραπληρώματα τῶν οἱωνδήποτε δοθεισῶν εὐθειῶν.

Πρότασις ΚΕ'.

Δύο εὐθειῶν ἀνίσους ὑποτεινουσῶν περιφερείας δοθεισῶν, τὴν τῆς ὑπεροχῆς τῶν περιφερειῶν ὑποτείνουσαν εὑρεῖν.

Ἔστω ἡμικύκλιον τὸ ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω δεζ, καὶ δοθήτωσαν αἱ δη, δθ, ὑποτείνουσαι τῶν δη, δηθ, ἀνίσων περιφερειῶν, ὧν διαφορὰ ἡ ηθ, καὶ ἔστω ἡ μὲν δη, ὑποτείνουσα μοιρ: λϛ': ἡ δὲ δθ, ξ': καὶ ζητηθήτω ἡ ηθ, ὑπο-

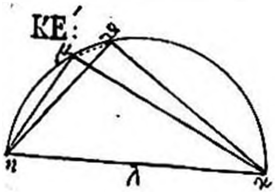
τεί-

τείνουσα μοιρ: κδ′: Ἐπεζεύχθωσαν δὴ αἱ ηζ, θζ, καὶ πολλαπλασιασθήτω ἥτε δη, ἐπὶ τὴν θζ, καὶ ἡ δθ, ἐπὶ τὴν ηζ, καὶ ἀφῃρήσθω τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν δη, θζ, ἀπὸ τοῦ γενομένου ὑπὸ τῶν δθ, ηζ, ὁ δὲ ἐναπολειφθεὶς μεριζέσθω ἐπὶ τὴν δζ, καὶ γνωσθήσεται ἡ ηθ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν δη, πλευρά ἐστι δεκαγώνου, ἡ δὲ δθ, ἑξαγώνου, δέδοται πάντως ἑκατέρα κατὰ τὰ προειρημένα,

Τούτων δὲ δεδομένων, δέδονται καὶ αἱ ηζ, θζ, κατὰ τὴν δευτέραν, ἀλλὰ κατὰ τὴν ια′: τοῦ δ′: τοῦ παρόντος, τὸ ὑπὸ τῶν δθ, ηζ, διαγωνίων ἐυθειῶν τοῦ δηθζ, ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου εἰς τὸν δεζ, κύκλον περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ συναμφοτέροις τοῖς ἀπὸ τῶν δη, θζ, καὶ δζ, ηθ, ἀπεναντίον αὐτοῦ πλευρῶν περιεχομένοις ὀρθογωνίοις, ἄρα πολλαπλασιαζομένης τῆς μὲν δθ, ἐπὶ τὴν ηζ, τῆς δὲ δη, ἐπὶ τὴν θζ, καὶ τοῦ μὲν ὑπὸ τῶν δη, θζ, περιεχομένου ὀρθογωνίου ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τοῦ ὑπὸ τῶν δθ, ηζ, περιεχομένου, ἐναπολειφθήσεται δήπουθεν τὸ ὑπὸ τῶν δζ, ηθ. Τούτου δὲ μεριζομένου ἐπὶ τὴν δζ, δοθήσεται ἡ ηθ, ζητουμένη. Ἔστω ἔτι εἰς βεβαιοτέραν τούτων σαφήνειαν ἐν ἡμικυκλίῳ τὸ ηθκ, οὗ κέντρον τὸ λ, ἡ μὲν ημ, πλευρὰ ἑξαγώνου ὑποτείνουσα τόξον μοιρ: ξ′: ἡ δὲ ηθ, πενταγώνου ὑποτείνουσα δηλ: τόξον μοιρ: οβ′: καὶ ζητηθήτω ἡ μθ. Ἐπεζεύχθωσαν οὖν αἱ μκ, θκ, καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ημ, μερῶν ἐστι ξ′: οἵων ἡ διάμετρος ρκ′: ἡ δὲ ηθ, ο: λβ′, γ″, ἡ δὲ μκ, μερῶν ργ′: νε′, κγ″, καὶ ἡ θκ, μερῶν ϟς′: δ′, νς″, πολλαπλασιασθήτω ἡ μὲν ημ, δηλαδὴ ἐπὶ τὴν θκ, ἤτοι ὁ ξ′: ἐπὶ τὸν ϟς′: δ′, νς″, ἡ δὲ ηθ, ἐπὶ τὴν μκ, τουτέστιν ὁ ο: λβ′, γ″, ἐπὶ τὸν ργ′: νε′, κγ″, καὶ ἔσται ὁ μὲν ὑπὸ τῶν ηθ, μκ, ͵ζσλ, ζ′, λδ″, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν ημ, θκ, ͵εωκ, δ′, νς″, εἶτα ἀφαιρεθήτω ὁ ͵εωκ′: δ′, νς″, ἀπὸ τῆς ͵ζσλ, ζ′, λδ″, καὶ ἐναπολειφθήσεται ͵αφε′: ια′, λδ″, τουτέστιν ὁ ὑπὸ τῶν ηκ, μθ, ἐπεὶ δὲ ἡ ηκ, τμημάτων ἐστὶ ρκ′: μεριζέσθω ὁ ͵αφε′: ια′, λδ″, ἐπὶ τὸν ρκ′: καὶ δώσει πηλίκον τῶν ιβ′: λ′β, λ″ς, καὶ τοσούτων ἔσται τμημάτων ἡ μθ, ὑποτείνουσα μοιρ: ιβ′: οἵων ἡ διάμετρος ηκ, ρκ′: ὁ λόγος σαφής. τὸ γὰρ ὑπὸ τῶν ηθ, μκ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ συναμφοτέροις τοῖς ὑπὸ τῶν ημ, θκ, καὶ ηκ, μθ, περιεχομένοις ὀρθογωνίοις κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν, ὥστε ἀφαιρουμένου τοῦ ὑπὸ τῶν ημ, θκ, ἀπὸ τοῦ ὑπὸ τῶν ηθ, μκ, ἐναπολείπεται τὸ ὑπὸ τῶν ηκ, μθ, μεριζομένου δὲ τούτου ἐπὶ τὴν ηκ, τὸ πηλίκον ἔσται ἡ μθ,.

Geom. Lib. 7. Fig. 23.

ΚΕ′

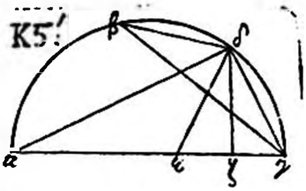


Τῇ αὐτῇ ἐφόδῳ δυνάμεθα εὑρίσκειν καὶ ἄλλας πλείους ὑποτεινούσας θηρεύοντες ἀεὶ τὰς διαφορὰς τῶν ἐγνωσμένων, ὥστε καὶ κανόνιον συστήσασθαι ἀκριβέστατον τῶν ὑποτεινουσῶν, ὃ ἐν τῇ περὶ Μεγάλης Συντάξεως ὁ Πτολεμαῖος ἐξέθετο.

Πρότασις Κϛʹ.

Κύκλου περιφερείας δοθείσης, καὶ τῆς ὑπ' αὐτὴν εὐθείας τὴν ὑποτείνουσαν τὴν ἡμίσειαν τῆς δοθείσης περιφερείας εὑρεῖν.

Δοθήτω ἐπὶ τοῦ α β γ, ἡμικυκλίου περιφέρεια ἡ β δ γ, καὶ ζητηθήτω ἡ δ γ, ὑποτείνουσα τὴν ἡμίσειαν τῆς δοθείσης β δ γ, περιφερείας. Ἐπιζεύχθω δὴ ἡ α β, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς α γ, διαμέτρου ἡ α ε, εὐθεῖα ἴση τῇ α β, ἀπὸ δὲ σημείου τοῦ δ, πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς α γ, ἡ δ ζ. Geom. Lib. 7. Fig. 24.



Εἶτα πολλαπλασιασθήτω ἡ α γ, ἐπὶ τὴν ζ γ, καὶ τοῦ γενομένου εὑρεθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα, καὶ αὕτη ἔσται ἡ δ γ. κατὰ γὰρ τὴν θʹ: τοῦ δʹ: τοῦ παρόντος ἡ α ζ, μείζων ἐστὶ τῆς α β, ὥστε ἀφαιρουμένης τῆς α ε, ἴσης τῇ α β, ἀπὸ τῆς α γ, ἡ ἀπὸ τοῦ δ, σημείου ἐπὶ τῆς α γ, πίπτουσα κάθετος ἐντὸς πεσεῖται τῶν ε, καὶ γ, σημείων. Ἐπιζεύχθω δὲ καὶ ἡ β δ, καὶ ἐπεὶ ἡ α ε, εὐθεῖα ἴση εἴληπται τῇ α β, κοινὴ δὲ ἡ α δ, καὶ ἡ ὑπὸ β α δ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ε α δ, πάντως γε κατὰ τὴν δʹ: τοῦ αʹ: τοῦ Στοιχ: ἡ β δ, ἴση ἐστὶ τῇ δ ε, ἀλλὰ τῇ β δ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ δ γ, ἡ δ γ, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ δ ε, καὶ τὸ δ ε γ, τρίγωνον ἰσοσκελές, ὥστε ἡ δ ζ, κάθετος δίχα τέμνει τὴν ε γ, αὐτοῦ βάσιν, ἀλλ' ἡ α γ, διάμετρος δεδομένη ἐστὶ, δέδοται δὲ καὶ ἡ β γ, δεδομένη πάντως γε ἐστὶ καὶ ἡ β α, κατὰ τὸν ἄνωτέρω. Ἀφαιρουμένης δὲ τῆς α ε, ἴσης τῇ α β, δοθήσεται καὶ ἡ ε γ, ὥστε καὶ ἡ ἡμίσεια αὐτῆς δεδομένη ἔσται. Πάλιν ἐπεὶ τὰ α δ γ, δ γ ζ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσιν, ἡ μὲν γὰρ ὑπὸ α δ γ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ δ ζ γ, ἐστὶν, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ἡ δὲ ὑπὸ δ γ α, κοινὴ, ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ δ α γ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ ζ δ γ, ἴση ἐστὶ, πάντας γε ὡς ἡ α γ, πρὸς τὴν γ δ, οὕτως ἡ γ δ, πρὸς τὴν γ ζ, ἡ δ γ, ἄρα μέση ἀνάλογός ἐστι τῶν α γ, γ ζ, καὶ κατὰ τὴν ιζʹ: τοῦ ϛʹ: τοῦ αὐτοῦ τὸ ὑπὸ τῶν α γ, γ ζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δ γ, τετραγώνῳ. Πολλαπλασιαζομένης οὖν τῆς α γ, ἐπὶ τὴν γ ζ, καὶ τοῦ γενομένου τῆς τετραγώνου εὑρισκομένης ῥίζης, δέδοται πάντως ἡ δ γ. Κύκλου ἄρα περιφερείας δοθείσης, καὶ τῆς ὑπ' αὐτὴν εὐθείας, ἡ ἡμίσεια τῆς δοθείσης εὕρηται περιφερείας.

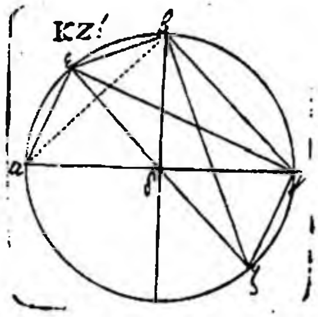
Πρότασις ΚΖʹ.

Δύο ὁποιωνδήποτε δοθεισῶν περιφερειῶν ἐν κύκλῳ, καὶ τῶν ὑπ' αὐτὰς εὐθειῶν, τὴν συναμφοτέρας ὑποτείνουσαν εὐθεῖαν εὑρεῖν.

Ἔστω κύκλος ὁ α β γ, οὗ διάμετρος μὲν ἡ α γ, κέντρον δὲ τὸ δ, σημεῖον. ἔσ-

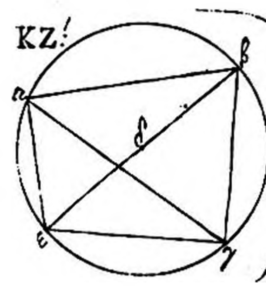
δοθήτωσαν δὲ ἐν αὐτῷ καὶ δύο τυχοῦσαι αἱ αε, εβ, καὶ ζητείσθω ἡ αβ. Ἐπεὶ δὲ τοῦτο διχῶς ἐνδέχεται συμβῆναι, εἰ γὰρ συναμφότεραι αἱ δοθεῖσαι περιφέρειαι ἐλάττονές εἰσιν ἡμικυκλίου, ἢ γοῦν μείζονες, ἔστωσαν α: αἱ αε, εβ, τουτέστιν ἡ αεβ, ἐλάττων ἡμικυκλίου. Διήχθω δὲ καὶ ἡ εδζ, διάμετρος, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εγ, γζ, γβ· καὶ ἐπεὶ ἡ αε, δέδοται, ἴση δὲ ταύτῃ ἡ γζ, διὰ τὴν τῶν αδε, ζδγ, τριγώνων κατὰ πάντα ἰσότητα, δέδοται πάντως καὶ ἡ γζ, κατὰ δὲ τὴν κδ: τοῦ παρόντος, δέδοται καὶ ἡ εγ, ὡς ὑποτείνουσα τὸ εβγ, παραπλήρωμα τῆς αὐτῆς αε, περιφερείας. Διδομένης δὲ καὶ τῆς εβ, δέδοται ἔτι καὶ ἡ βζ, ἀλλὰ τὸ εβγζ, τετράπλευρον ἐν κύκλῳ ἐστὶν ἐγγεγραμμένον, ἄρα κατὰ τὴν ια: τοῦ δ': τοῦ παρόντος τὸ ὑπὸ τῶν εγ, βζ, ἴσον ἐστὶ συναμφοτέροις τοῖς ὑπὸ τῶν εβ, γζ, καὶ εζ, βγ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν εβ, γζ, διδόμενόν ἐστιν, ἐὰν ἄρα ἀπὸ τοῦ ὑπὸ τῶν εγ, βζ, ὀρθογωνίου ἀφαιρεθῇ τὸ ὑπὸ τῶν εβ, γζ, ἐναπολειφθήσεται δήπουθεν τὸ ὑπὸ τῶν εζ, βγ, τούτου δὲ μεριζομένου ἐπὶ τὴν εζ, δοθήσεται καὶ ἡ βγ, ἧς γνωσθείσης εὑρεθήσεται κατὰ τὴν κδ: τοῦ παρόντος ἡ βα, ὡς ὑποτείνουσα τὸ παραπλήρωμα τῆς βγ, περιφερείας.

Geom. Lib. 7. Fig. 25.



Ἔστωσαν ἔτι αἱ αβ, βγ, περιφέρειαι, ὥστε τὴν ἐξ ἀμφοτέρων αβγ, μείζονα εἶναι ἡμικυκλίου, ὡς ἐπὶ τοῦ β': τούτου διαγράμματος, καὶ ζητείσθω ἡ αγ. Διήχθω δὴ κἀνταῦθα διὰ τοῦ δ, κέντρου ἡ βδε, γραμμὴ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε, εγ, εἶτα πολλαπλασιασθήτω ἡ μὲν αβ, ἐπὶ τὴν εγ, ἡ δὲ βγ, ἐπὶ τὴν αε, καὶ τὸ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν γενομένων μεριζέσθω ἐπὶ τὴν βε, καὶ δοθήσεται ἡ αγ, διδομένης γὰρ τῆς αβ, δέδοται καὶ ἡ αε, διδομένης δὲ τῆς βγ, δέδοται ἡ εγ, ἀλλὰ καὶ ἡ βδε, διάμετρος δέδοται. ἄρα ἐὰν τὸ ἐκ συναμφοτέρων τῶν ὑπὸ αβ, εγ, καὶ βγ, αε, μερισθῇ ἐπὶ τὴν βε, δοθήσεται πάντως καὶ ἡ αγ. Δύο ἄρα ὁποιωνδηποτοῦν περιφερειῶν ἐν κύκλῳ καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 7. Fig. 26.



Ἰστέον δ' ὅτι τοιαύτῃ τινὶ ἐφόδῳ χρησάμενος ὁ Πτολεμαῖος ἐν τῷ α: τοῦ περὶ μεγάλης Συντάξεως αὐτοῦ φιλοπονήματος τὸ κανόνιον τῶν ὑποτεινουσῶν κατεσκεύασατο. Εἴ δέ σοι βουλητὸν ἀκριβεστέραν τε καὶ πληρεστέραν τὴν περὶ τούτων ἔχειν διδασκαλίαν, ἀνάγνωθι μετὰ προσοχῆς τὰ εἰς τὸ αὐτὸ Θέωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως ὑπομνήματα.

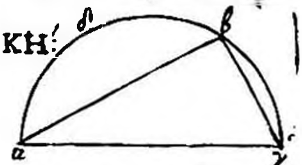
Πρότασις ΚΗ'.

Ὑποτεινούσης τόξου δοθείσης τὴν τοῦ παραπληρώματος αὐτοῦ μέχρι ἡμικυκλίου εὑρεῖν.

Διδόσθω ἡ αβ, ὑποτείνουσα τοῦ αδβ, τόξου, καὶ ζητείσθω ἡ τοῦ βγ, παραπληρώματος αὐτοῦ μέχρι τοῦ αβγ, ἡμικυκλίου ὄντος. Ἀφῃρήσθω δὴ τὸ τῆς αβ, τετράγωνον ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς γα, καὶ τοῦ ἐναπολειπομένου εὑρεθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα, καὶ αὕτη ἔσται ἡ ζητουμένη βγ. τὸ γὰρ γβα, τρίγωνον ὀρθογώνιόν ἐστιν. ἡ γὰρ ὑπὸ γβα, γωνία ὀρθή ἐστι κατὰ τὴν λα: τοῦ γ': τῶν Στοιχ: ὥστε κατὰ τὴν μζ: τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ τὸ ἀπὸ τῆς γα, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπὸ τῶν γβ, βα, ὥστε ἀφαιρουμένου τοῦ ἀπὸ τῆς αβ, τετραγώνου ἀπὸ τοῦ ἀπὸ τῆς γα, ἐναπολείπεται τὸ ἀπὸ τῆς βγ, οὗ τῆς τετραγώνου εὑρεθείσης ῥίζης, γινώσκεται ἡ βγ, ὑποτείνουσα. ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Geom. Lib. 7. Fig. 27.

ΚΗ'.



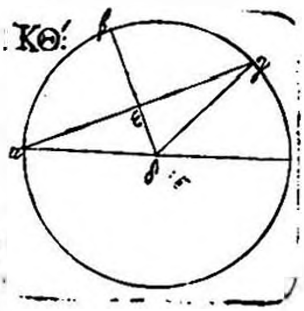
Πρότασις ΚΘ'.

Τόξου οἱουδήποτε τμήματος κύκλου δοθέντος, καὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ αὐτοῦ κύκλου, τὸ τοῦ τμήματος ἐμβαδὸν εὑρεῖν.

Ἔστω δεδομένον τό, τε αβγ, τόξον τοῦ αεγβ, τμήματος, καὶ ἡ αδ, ἡμιδιάμετρος, καὶ ζητείσθω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αεγβ, τμήματος. Τμηθήτω δὴ τὸ αβγ, τόξον δίχα κατὰ τὸ β, καὶ ἐπεζεύχθω ἥτε βδ, καὶ ἡ δγ. εἶτα εὑρεθήτω κατὰ τὰς ἀνωτέρω ἡ αγ, ὑποτείνουσα τὸ αβγ, τόξον, ἢ γοῦν εὑρεθήτω τὸ αε, ὀρθὸν ἡμίτονον ἐν τοῖς πίναξι τῶν ἡμιτόνων, ἀπτομένων τε καὶ τεμνουσῶν, καὶ γνωσθήσεται πάντως τό, τε βε, πλάγιον ἡμίτονον, καὶ τὸ εδ, ἡμίτονον παραπληρώματος. τούτων δ' εὑρεθέντων, πολλαπλασιασθήτω ἡ μὲν αδ, δοθεῖσα ἡμιδιάμετρος ἐπὶ τὸ αβ, ἥμισυ τοῦ αβγ, τόξου, τὸ δὲ εδ, ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ αβ, τόξου ἐπὶ τὸ αε, ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ, καὶ τὸ γενόμενον ὑπὸ τῶν δε, εα, ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ γινομένου ὑπὸ τῶν δα, αβ, καὶ τὸ ἐναπολειφθὲν ἔσται τὸ ζητούμενον. κατὰ γὰρ τὴν κδ': τοῦ δ': τοῦ παρόντος, τὸ ὑπὸ τῶν δα, αβ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ αβγδ, τομεῖ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν δε, εα, τῷ αγδ,

Geom. Lib. 7. Fig. 28.

ΚΘ'.



τρι-

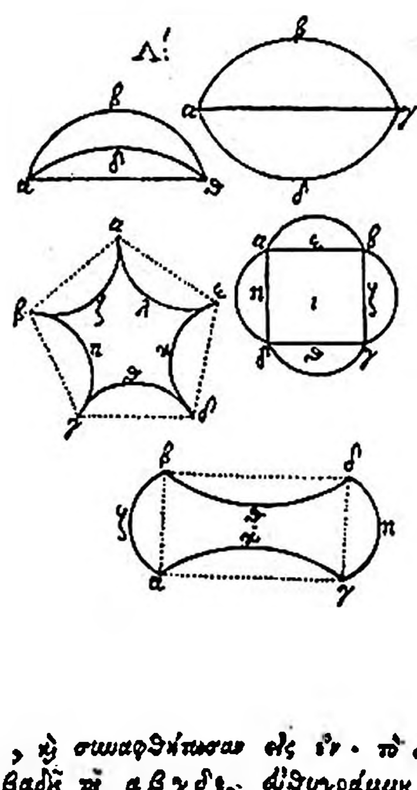
τριγώνῳ κατὰ τὸ ιβʹ. τοῦ γʹ. τοῦ παρόντος. ἀφαιρεθέντος δὲ τοῦ αγδ, τριγώνου ἀπὸ τοῦ αβγδ, τομέως, ἐναπολείπεται τὸ αβγδε, τμῆμα. Τόξου ἄρα οὐδέποτε τμήματος κύκλου καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Λʹ.

Σχημάτων φακοειδῶν, μηνοειδῶν, καὶ τῶν ἐκ διαφόρων τοῦ κύκλου συγκειμένων τμημάτων τὸ ἐμβαδὸν εὑρεῖν.

Ἔστω αʹ. τὸ αβγδ, φακοειδὲς σχῆμα, καὶ ζητείσθω τὸ τούτου ἐμβαδόν. Διήχθω δὴ ἡ αγ, καὶ εὑρεθήτω κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἑκάτερον τῶν αβγ, αδγ, τμημάτων, καὶ τὸ ἐξ ἀμφοῖν συγκείμενον ἴσον ἔσται τῷ ἐμβαδῷ τοῦ αβγδ, δοθέντος φακοειδοῦς σχήματος.

Comm. Lib. 7. Fig. 29.



Ἔστω βʹ. τὸ αβθδ, μηνοειδές. Ἐπιζεύχθω δὴ ἡ αθ, καὶ εὑρεθήτω κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἑκάτερον τῶν αβθ, αδθ, τμημάτων, καὶ ἀπὸ τοῦ αβθ, μείζονος ἀφῃρήσθω τὸ αδθ, ἔλαττον τμῆμα, καὶ τὸ ἐναπολειπόμενον ἴσον ἔσται τῷ αβθδ, δοθέντι μηνοειδεῖ σχήματι. Ἔστω γʹ. τὸ αβγδ, ἀμφίκυρτον. Ἐπιζεύχθωσαν δὴ αἱ αβ, βγ, γδ, δα, εὐθεῖαι. καὶ εὑρεθήτω αʹ. χωρὶς ἕκαστον τῶν αεβ, βζγ, γδθ, δηα, τμημάτων. Εἶτα εὑρεθήτω καὶ τὸ αβγδ, τετράπλευρον, καὶ συναφθήτωσαν τὰ πάντα εἰς ἕν, καὶ τὸ γενόμενον ἴσον ἔσται τῷ αβγδ, δοθέντι ἀμφικύρτῳ σχήματι.

Ἔστω δʹ. τὸ αβγδε, ἀμφίκοιλον σχῆμα. Ἐπιζεύχθωσαν δὴ αἱ αβ, βγ, γδ, δε, εα, καὶ εὑρεθήτω αʹ. τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αβγδε εὐθυγράμμου σχήματος. εἶτα εὑρεθήτω καὶ τὰ αβζ, βγη, γδθ, δεκ, εαλ, τμήματα, καὶ συναφθήτωσαν εἰς ἕν. τὸ δὲ γενόμενον ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ εὑρεθέντος ἐμβαδοῦ τοῦ αβγδε, εὐθυγράμμου, καὶ τὸ ἐναπολειφθὲν ἴσον ἔσται τῷ δοθέντι αβγδε, ἀμφικοίλῳ σχήματι.

Ἔστω εʹ. τὸ αγδβ, κυρτόκοιλον. Ἐπιζεύχθωσαν δὴ αἱ αβ, βδ, δγ, γα.

γα. καὶ εὑρεθήτω α΄: τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αγδβ, τετραπλεύρου εὐθυγράμμου, εἶτα εὑρεθήτω ἑκάτερον τῶν βθδ, ακγ, καὶ συναφθήτωσαν εἰς ἕν, καὶ τὸ γενόμενον ἀφαιρείσθω ἀπὸ τοῦ αγδβ, τετραπλεύρου, καὶ ἐναπολειφθήσεται τὸ βθδγκαβ. Τελευταῖον εὑρεθήτω καὶ τῶν αζβ, γδη, ἑκάτερον, καὶ συναφθήτωσαν εἰς ἕν, τὸ δὲ γενόμενον προστεθήτω τῷ βθδγκαβ, καὶ τὸ ὅλον ἴσον ἔσται τῷ δοθέντι αγδβ, κυρτοκοίλῳ σχήματι. Τοῦτον τὸν τρόπον ἔξεστί σοι εὑρίσκειν τὸ ἐμβαδὸν καὶ παντὸς ἄλλου σχήματος ἐκ διαφόρων τοῦ κύκλου συγκειμένου τμημάτων.

Καταγραφὴ Ἐλλείψεως, ἤτοι σχήματος ᾠοειδοῦς.

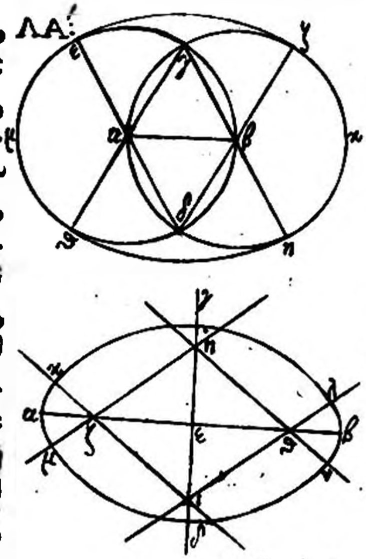
Πρότασις ΛΑ΄.

Ὁσαχῶς ἡ Ἔλλειψις καταγράφεσθαι δύναται.

Ἡ τῆς Ἐλλείψεως καταγραφὴ πολυτρόπως δύναται γενέσθαι. Ἢ γὰρ ἄμφω αἱ διάμετροι τῆς ζητουμένης δίδονται ἐλλείψεως, ἢ ἡ μία μόνη, ἢ οὐδετέρα. Ἔστω δὴ α΄: καταγράψαι ἔλλειψιν μηδετέρας διδομένης τῶν διαμέτρων. κείσθω ἡ τυχοῦσα αβ, πεπερασμένη εὐθεῖα, καὶ κέντροις μὲν τοῖς α, καὶ β, γραφήτωσαν δύο κύκλοι οἱ αζκη, βεμθ, τεμνόμενοι κατὰ τὰ γ, καὶ δ, σημεῖα, διὰ δὲ τῶν βγ, βδ, αγ, αδ, σημείων ἤχθήτωσαν αἱ γβη, δβζ, γαθ, δαε, εὐθεῖαι. εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δε, ἢ δζ, γραφήτω τόξον τὸ εζ, κέντρῳ δὲ τῷ γ, καὶ διαστήματι τῷ γη, ἢ γθ, γραφήτω ἕτερον τόξον τὸ ηθ, καὶ τὸ εζηθ, σχῆμα Ἔλλειψις, εἴτουν ᾠοειδὲς ἔσται.

Geom. Lib. 7. Fig. 30.

ΛΑ΄.



Ἄλλως. Συνεστάθω ἐπὶ τῆς αβ, τρίγωνα ἰσόπλευρα ἑκατέρωθεν τὰ αβγ, αβδ, καὶ ἤχθήτωσαν αἱ γα, γβ, δα, δβ, κατὰ τὸ συνεχὲς ἀορίστως. Εἶτα κέντροις μὲν τοῖς γ, καὶ δ, διαστήματι δὲ ὃ βούλει, γραφήτωσαν ἑκατέρωθεν τὰ εζ, ηθ, τόξα ὑπὸ τῶν δε, δζ, γη, γθ, ἐμπεριλαμβανόμενα εὐθειῶν. Κέντροις δ᾽ αὖθις τοῖς α, καὶ β, διαστήματι δὲ ἴσῳ τῷ αε, ἢ αθ, ἢ βζ, ἢ βη, γραφήτωσαν τὰ ζκη, εμθ, τόξα, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθέν.

Ἔστω β΄: καταγράψαι ἔλλειψιν διδομένης μιᾶς τῶν αὐτῆς διαμέτρων. Δοθήτω δὴ ἡ αβ, καὶ τμηθήτω αὕτη δίχα κατὰ τὸ ε, δι᾽ οὗ ἤχθω ἡ γδ, τέμνουσα τὴν αβ,

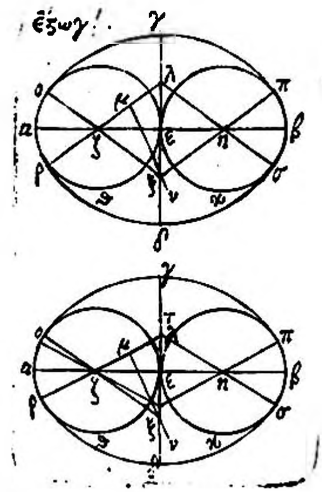
πρὸς

πρὸς ὀρθὰς, καὶ εἰλήφθω τὰ εζ, εθ, διαστήματα ἴσα ὡς ἔτυχε. Κἂν μὲν ἡ δοθεῖσα αβ, ἀντὶ τῆς μεγίστης ὑποτίθηται διαμέτρου, εἰλήφθω καὶ τὰ εη, ει, ἴσα διαστήματα, ὥστε τὸ ὅλον ηι, ἔλαττον εἶναι τοῦ ὅλου ζθ. εἰδὲ ἀντὶ τῆς ἐλαχίστης, μεῖζον, ἀπὸ δὲ τῶν η, καὶ ι, σημείων ἐξαχθήτωσαν εὐθεῖαι διὰ τῶν ζ, καὶ θ, διερχόμεναι αἱ ηζμ, ηθν, ιζκ, ιθλ. εἶτα κέντροις μὲν τοῖς ζ, καὶ θ, διαστήματι δὲ τῷ ζα, ἢ θβ, γραφήτωσαν τόξα τὰ καμ, λβν, κέντροις δὲ τοῖς η, καὶ ι, καὶ διαστήματι τῷ ημ, ἢ ην, ἢ ικ, ἢ ιλ, γραφήτωσαν τὰ κλ, μν, τόξα, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθέν.

Ἰστέον δ' ὅτι κατὰ τὸν β' τοῦτον τρόπον διαφόρως ἡ Ἔλλειψις σχηματίζεται, ἐπεὶ καὶ τὰ εζ, εθ, ελ, διαστήματα διαφόρως δύναται λαμβάνεσθαι.

Ἔστω γ': καταγράψαι ἔλλειψιν δεδομένων ἀμφοτέρων τῶν διαμέτρων. Κείσθωσαν δὴ αἱ δοθεῖσαι αβ, γδ, διάμετροι δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τεμνόμεναι κατὰ τὸ ε, καὶ τμηθήτω ἑκατέρα τῶν αε, εβ, δίχα κατὰ τὰ ζ, καὶ η, καὶ κέντροις μὲν τοῖς ζ,η, διαστήματι δὲ τῷ ζε, ἢ ηε, γραφήτωσαν οἱ αθε, εκβ, κύκλοι. Εἶτα εἰλήφθω ἡ γλ, ἴση τῇ ζα, ἡμιδιαμέτρῳ τοῦ αθε, ἢ τῇ ηβ, ἡμιδιαμέτρῳ τοῦ εκβ, ἴσαι γὰρ αἱ ζα, ηβ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ζλ, ταύτης δὲ δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ μ, συνιστάσθω κάθετος ἐπ' αὐτῆς ἡ μν, τέμνουσα τὴν λδ, κατὰ τὸ ξ, κἂν μὲν τὸ ξ, ἀφίσταται τοῦ ε, ὅσον τὸ λ, ὥστε τὸ εξ, διάστημα ἴσον εἶναι τῷ ελ, κέντροις μὲν τοῖς λ,ξ, διαστήματι δὲ τῷ ξγ, ἢ λδ, γραφήτωσαν τὰ ογπ, ρδσ, τόξα, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθέν. Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ ζ, καὶ ξ, ἡ οζξ, καὶ ἐπεὶ ἡ ζλ, τέτμηται δίχα, πάντως γε αἱ ζμ, μλ, ἴσαι εἰσὶν, ἔστι δὲ καὶ ἡ μξ, κοινὴ, καὶ ἡ ὑπὸ ζμξ, γωνία τῇ ὑπὸ λμξ, ἴση, πάντως γε κατὰ τὴν δ': τοῦ α: τῶν Στοιχ: ἡ ξζ, ἴση ἐστὶ τῇ ξλ, εἴληπται δὲ καὶ ἡ λγ, ἴση τῇ ζα, ἴσῃ οὔσῃ τῇ ζο. ἄρα ἡ ξγ, ἴση ἐστὶ τῇ ξο. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ ξ, διαστήματι δὲ τῷ ξγ, γραφόμενος κύκλος ἐλεύσεται καὶ διὰ τοῦ ο. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται διέρχεσθαι καὶ διὰ τοῦ π, τῆς ξηπ, ἐπιζευχθείσης. ἠγμένων δὲ καὶ τῶν λζρ, λησ, δειχθήσεται ὁμοίως καὶ τὸ ρδσ, τόξον, κέντρῳ μὲν τῷ λ, διαστήματι δὲ τῷ λδ, γραφόμενον, διέρχεσθαι καὶ διὰ τῶν ρ, καὶ σ.

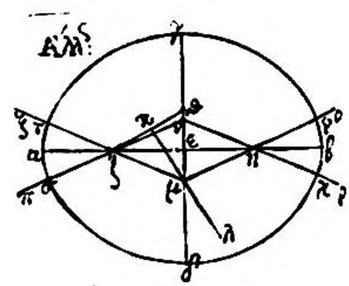
Geom. Lib. 7. Fig. 31.



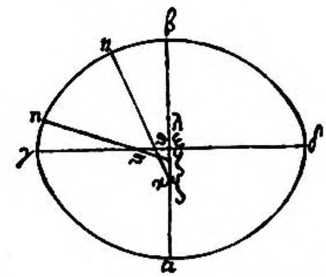
Εἰδέ γε τὰ εξ, ελ, διαστήματα, ὡς ἐπὶ τοῦ β': σχήματος ἄνισα ᾖ, εἰλήφθω τὸ ετ, ἴσον τῷ εξ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ ξ, διαστήματι δὲ τῷ ξγ, γραφήτω τὸ ογπ, τόξον, κέντρῳ δὲ τῷ τ, καὶ διαστήματι τῷ τδ, γραφήτω τὸ ρδσ, καὶ γενήσεται τὸ ἐπιταχθέν. ὁ λόγος ὁ αὐτὸς τῷ ἀνωτέρω.

Ἄλλως. Δεδόσθωσαν αἱ αβ, γδ, διάμετροι δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν πρότερον, ἀλλήλας τεμνόμεναι, καὶ ζητείσθω γράψαι περὶ αὐτὰς ἔλλειψιν. Τμηθήτω δὲ ἑκατέρα τῶν αε, βε, δίχα κατὰ τὰ ζ, καὶ η, καὶ εἰλήφθω ἴση τῇ αζ, ἡ γθ. Ἐπιζευχθείσης δὲ τῆς ζθ, καὶ δίχα κατὰ τὸ κ, τμηθείσης, συνεστάθω ἐπ' αὐτῆς πρὸς τῷ κ, σημείῳ κάθετος ἡ κλ, τέμνουσα τὴν εδ, κατὰ τὸ μ, καὶ εἰλήφθω τὸ εν, διάστημα ἴσον τῷ εμ. ἀπὸ δὲ τῶν ν, καὶ μ, σημείων ἤχθωσαν διὰ τῶν ζ, καὶ η, αἱ μζξ, μηο, νζπ, νηρ. εἶτα κέντροις μὲν τοῖς ζ, καὶ η, διαστήματι δὲ τῷ ζα, ἢ ηβ, γραφήτωσαν τὰ σατ, φβχ, τόξα, κέντροις δὲ τοῖς μ, καὶ ν, καὶ διαστήματι τῷ μγ, ἢ νδ, ἴσα γὰρ, γραφήτωσαν τὰ τγφ, χδσ, τόξα, καὶ τὸ αγβδ, γραφόμενον σχῆμα ἔσται τὸ ζητούμενον. ἡ δεῖξις ἡ αὐτή.

Geom. Lib. 7. Fig. 32.



Ἰστέον δ' ὅτι ἔξεστί σοι λαβεῖν καὶ μεῖζον τοῦ ἡμίσεως τῆς αε, ἡμιδιαμέτρου, καὶ ἔλαττον, τὰ λοιπὰ ποιοῦντι ὡς προηρμήνευται. Δεῖ δὲ ἀεὶ ἀφαιρεῖσθαι ἀπὸ τῆς γε, ἐλάττονος ἡμιδιαμέτρου ἴσον διάστημα τῷ λαμβανομένῳ ἀπὸ τῆς μείζονος, τὸ γθ, δηλ: τῷ αζ.



Ἄλλως. Ἔστωσαν αἱ αβ, γδ, διάμετροι δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τεμνόμεναι κατὰ τὸ ε, μεγίστη μὲν ἡ γδ, ἐλαχίστη δὲ ἡ αβ, περὶ ἃς ζητεῖται ἔλλειψις καταγράψαι. Εἰλήφθω δὴ κανὼν ὁ ζη, ἴσος τῇ εγ, μεγίστῃ ἡμιδιαμέτρῳ, καὶ ἀφῃρήσθω τούτου τὸ ηθ, μέρος ἴσον τῇ εβ, ἐλαχίστῃ ἡμιδιαμέτρῳ. εἶτα ἐφαρμοσθήτω ὁ ζη, κανὼν ἐπὶ τῆς αβ, ὥστε τὸ η, πέρας αὐτοῦ συμπεσεῖν τῷ β, συμπεσεῖται γὰρ δηλονότι καὶ τὸ μὲν θ, τῷ ε, τὸ δὲ ζ, τῷ κ, πρὸς καταγραφὴν δὲ τοῦ βγ, ἐλλειπτικοῦ τεταρτημορίου κινηθήτω ὁ κανὼν ζη, ἀπὸ τοῦ β, ἐπὶ τὸ γ, ὥστε τὸ μὲν ζ, σημεῖον αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ κ, ἐπὶ τὸ ε, φερόμενον ἅπτεσθαι ἀεὶ τοῦ κε, τὸ δὲ θ, ἀπὸ τοῦ ε, ἐπὶ τὸ γ, κινούμενον μὴ ἐκπίπτειν τῆς εγ, καὶ καταγραφήσεται τὸ βγ, τεταρτημόριον. εἰς καταγραφὴν δὲ τοῦ βδ, κινηθήτω ὁ αὐτὸς κανὼν ἀπὸ τοῦ β, ἐπὶ τὸ δ, τὸν αὐτὸν τρόπον, ὥστε τὸ μὲν ζ, σημεῖον τοῦ κε, ἀεὶ ἅπτεσθαι, τὸ δὲ θ, μὴ ἐκπίπτειν τῆς εδ, καὶ πληρωθήσεται τὸ γβδ, τόξον. Τὰ αὐτὰ γενέσθω καὶ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου μέρους, ἐφαρμοττομένου τοῦ κανόνος ἐπὶ τῆς αβ, ὥστε τὸ η, συμπίπτειν τῷ α, τὸ δὲ θ, τῷ ε, καὶ τὸ ζ, τῷ λ. Καὶ πρὸς μὲν καταγραφὴν τοῦ αγ, κινηθήτω ὁ κανὼν ἀπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὸ γ, ὥστε τὸ μὲν ζ, ἀεὶ τοῦ λε, ἅπτεσθαι μέρους, τὸ δὲ θ, μὴ ἐκπίπτειν τῆς εγ. Πρὸς καταγραφὴν δὲ τοῦ

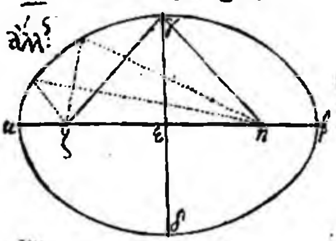
αδ,

α δ, κινηθήτω ἀπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὸ δ, ὥστε τὸ μὲν ζ, ἅπτεσθαι ἀεὶ τοῦ κ λ, τὸ δὲ μὴ ἐκπίπτειν τῆς ε δ, καὶ ἔσαι τὸ ἐπιταχθὲν, οὐ μὴν δὲ γεωμετρικῶς. ἡ δεῖξις κατεσράφθη ἐν τῷ περὶ κατασκευῆς καὶ χρήσεως Ἀσρολαβίου.

Ἄλλως.} Ἔσω μεγίση μὲν τῆς ζητουμένης ἐλλείψεως διάμετρος ἡ α β, ἐλαχίση δὲ ἡ γ δ, καὶ κείσθωσαν, ὥστε δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνεσθαι ἀλλήλαις. καὶ εἰλήφθω τὸ α ε, διάσημα τῆς μεγίσης ἡμιδιαμέτρου, καὶ ἐφαρμοσθήτω ἀπὸ τοῦ γ, ἢ δ, σημείου ἐπὶ τῆς α β, διαμέτρου ἑκατέρωθεν κατὰ τὰ ζ, καὶ η, σημεῖα. τοῖς δὲ ζ καὶ η, σημείοις ἐμπαγήτωσαν πρὸς ὀρθὰς ἧλοι ὀξεῖς, καὶ δισμωθέντος

Geom. Lib. 7. Fig. 33.

ἀλλ'



μίτῳ τοῦ ἐν τῷ ζ, ἥλου, ἢ ἑτέρῳ τινὶ δυναμένῳ ἐκτείνεσθαι καὶ συσέλλεσθαι, ἐκτανθήτω ὁ μίτος ἄχρι τοῦ γ, κἀκεῖ σηριχθείς, ἐπεκτανθήτω αὖθις ἄχρι τοῦ η, καὶ περιειλίχθω τῷ αὐτῷ μίτῳ ὁ κατὰ τὸ η, ἧλος, ὥστε συσαθῆναι τὸ ζ γ η, τρίγωνον, οὗ πλευραὶ μὲν αἱ ζ γ, γ η, αἱ διὰ τοῦ μίτου παρισάμεναι, βάσις δὲ ἡ ζ η, εὐθεῖα. Τούτων δὲ γενομένων, λαβὼν γραφεῖον καὶ θεὶς τοῦτο ἐπὶ τοῦ γ, ἔνδον τοῦ μίτου, μετακόμισον αὐτὸ ἐπὶ τὸ α, μηδενὸς γενομένου σημείου. εἶτα ἀρξάμενος ἀπὸ τοῦ α, μετάφερε αὐτὸ ὁμαλῶς ἐπὶ τὸ β, τῆς αὐτῆς σωζομένης ἐκτάσεως, καὶ γραφήσεταί σοι τὸ α γ β, τόξον. τῶν δ' αὐτῶν γενομένων κἀπὶ τοῦ ἑτέρου μέρους, γραφήσεται καὶ τὸ α δ β, τόξον, καὶ πληρωθήσεται τὸ α γ β δ, ᾠοειδὲς σχῆμα, ὡς διὰ τόρνου, ἔνθα δὲ μὴ οἷά τε ἥλους ἐμπαγῆναι, ληφθήτω κανὼν ἴσος τῇ α β, μεγίσῃ διαμέτρῳ, ἐκ ξύλου, ἢ ἄλλης τινὸς ὕλης κατειργασμένος, καὶ ἐφαρμοσθήτω ἐπιδεξίως ἐπὶ τῆς α β, καὶ τὰ λοιπὰ γενέσθω, ὡς προειρημένα ἐσίν.

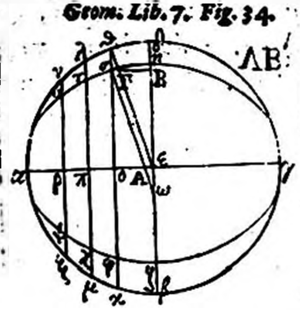
Πρότασις ΛΒ':

Ἐὰν ἐν κύκλῳ ἔλλειψις ἐγγραφῇ καὶ ἐπὶ τῆς μείζονος διαμέτρου κάθετοι ὁποσαιοῦν συσαθῶσι τῆς τοῦ κύκλου μὴ ἐκπίπτουσαι περιφερείας, ἀλλ' ὑπ' αὐτῆς ἑκατέρωθεν περατούμεναι, τεμεῖ ἡ ἔλλειψις ἑκατέρωθεν πάσας τὰς εὐθείας κατὰ τὸν λόγον τῆς μείζονος πρὸς τὴν ἐλάττονα αὐτῆς ἡμιδιάμετρον.

Ἔσω κύκλος ὁ α β γ δ, οὗ κέντρον τὸ ε, καὶ γραφήτω εἰς αὐτὸν ἔλλειψις ἡ α ζ γ η, ἧς μείζων μὲν διάμετρος ἡ α γ, ἐλάττων δὲ ἡ ζ η. Συσαθεῖσαι δὲ ἐπὶ τῆς α γ, μείζονος διαμέτρου κάθετοι περατούμεναι ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας αἱ θ κ, λ μ, ν ξ, τέμνουσαι μὲν τὴν α γ, κατὰ τὰ ο, π, ρ, τεμνόμεναι δὲ ὑπὸ τῆς ἐλλείψεως κατὰ τὰ σ τ υ, φ χ ψ. Λέγω δὴ τὰς ο θ, π λ, ρ ν, ο κ; π μ, ρ ξ, ἀναλόγως τέμνεσθαι ταῖς α ε, ε η, ἡμιδιαμέτροις, ὥστε εἶναι τὴν ο θ, πρὸς τὴν ο σ, ὡς ἡ α ε, πρὸς τὴν ε η, ὁμοίως δὲ καὶ τὴν π λ, πρὸς τὴν π τ, καὶ τὴν ρ ν, πρὸς τὴν ρ υ, καὶ τὰς λοιπὰς πρὸς τὰς λοιπὰς τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον. Ἤχθω γὰρ ἡ σ ω, ὥστε τὴν σ Α, ἴσην εἶναι τῇ ε η, ἐλάττονι ἡμιδιαμέτρῳ τῆς α ζ γ η, ἐλλείψεως, τὴν δὲ ὅλην σ ω, ἴσην τῇ α ε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ θ ε, καὶ ἐπεὶ ἡ σ ω, εἴληπται ἴση τῇ α ε, μείζονι ἡμιδιαμέτρῳ, ταύτῃ δὲ ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ε θ,

Geom. Lib. 7. Fig. 34.

ΛΒ'



ἄρα ἡ ε θ, ἴση ἐστὶ τῇ σ ω, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ θ σ, ε ω, παράλληλοι, ἄρα τὸ θ σ ω ε, παραλληλόγραμμόν ἐστιν, ἡ γὰρ ὑπὸ σ θ ε, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἀπεναντίον ὑπὸ ε ω σ, διὰ τὸ ἑκατέραν ἴσην εἶναι τῇ ὑπὸ Α σ ο, κατὰ τὴν κ θ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ. ὥστε ἡ σ α, παράλληλός ἐστι τῇ θ ε, καὶ κατὰ τὸ πόρισ: τῆς δ': τοῦ ς': τοῦ αὐτοῦ, ὡς ἡ ε θ, πρὸς τὴν σ Α, ἡ ο θ, πρὸς τὴν ο σ, ἀλλ' ἡ μὲν ε θ, ἴση ἐστὶ τῇ α ε, μείζονι ἡμιδιαμέτρῳ, ἡ δὲ σ Α, τῇ ε η, ἐλάττονι, ἄρα ὡς ἡ α ε, πρὸς τὴν ε η, ἡ ο θ, πρὸς τὴν ο σ. ὁμοίως δειχθήσονται καὶ αἱ λοιπαί. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ ἔλλειψις ἐγγραφῇ καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΛΓ':

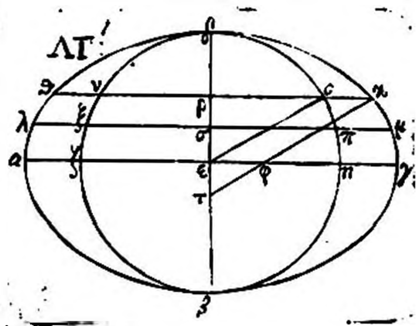
Ἐὰν περὶ τὴν ἐλάττονα διάμετρον τῆς ἐλλείψεως κύκλος περιγραφῇ, τῇ δὲ μείζονι τῆς ἐλλείψεως διαμέτρῳ παράλληλοι ὁποσαιοῦν ἀχθῶσι, περατούμεναι ὑπὸ τῆς περιφερείας τῆς ἐλλείψεως, τμηθήσεται ἑκάστη τῶν παραλλήλων ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τῷ λόγῳ τῆς ἐλάττονος διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὴν μείζονα.

Ἔστω ἔλλειψις ἡ α β γ δ, ἧς κέντρον μὲν τὸ ε, μείζων δὲ διάμετρος ἡ α γ, καὶ ἐλάττων ἡ δ β, καὶ γραφήτω περὶ τὴν δ β, ἐλάττονα διάμετρον κύκλος ὁ δ ζ β η, εἶτα παραλλήλως τῇ α γ, ἀχθήτωσαν αἱ θ κ, λ μ, εὐθεῖαι, τεμνόμεναι ὑπὸ μὲν τῆς τοῦ δ ζ β η, κύκλου περιφερείας κατὰ τὰ ν ξ ο π, σημεῖα, ὑπὸ δὲ τῆς δ β, ἐλάττονος διαμέτρου κατὰ τὰ ρ, καὶ σ. Λέγω ὅτι ὡς ἡ ε γ, πρὸς τὴν ε η, ἔστι καὶ ἡ ρ κ, πρὸς τὴν ρ ο. Ἤχθω γὰρ ἡ κ τ, ὥστε τὴν ὅλην μὲν κ τ, ἴσην εἶναι τῇ ε γ, μείζονι ἡμιδιαμέτρῳ, τὴν δὲ κ φ, τῇ ε η, ἐλάττονι, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ε ο, καὶ ἐπεὶ ἡ κ φ, εἴληπται ἴση τῇ ε η, τῇ δὲ ε η, ἴση ἐστὶν ἡ ε ο, ἄρα αἱ κ φ, ε ο, ἴσαι εἰσίν, ἀλλὰ καὶ αἱ κ ο, ε φ, παράλληλοι, ἴσαι εἰσίν, ὡς δειχθήσεται, πάντως γε αἱ κ ο, ε φ, παράλληλοί εἰσιν, ὥστε κατὰ τὴν δ': τοῦ ς': τοῦ Στοιχ: ἐπεὶ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ ρ τ κ, τριγώνου τὴν κ τ, ἦκται παράλληλος ἡ

ε ο,

εο, πάντως γε ὡς ἡ τκ, πρὸς τὴν εο. ἔχει καὶ ἡ ρκ, πρὸς τὴν ρο, καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἡ εο, πρὸς τὴν τκ, ἡ ρο, πρὸς τὴν ρκ, ἀλλ' ἡ μὲν εο, ἴση ἐστὶ τῇ εη, ἐλάττονι ἡμιδιαμέτρῳ τῆς αβγδ, ἐλλείψεως, ἡ δὲ τκ, τῇ εγ, μείζονι, ἄρα ὡς ἡ ἐλάττων ἡμιδιάμετρος τῆς αβγδ, ἐλλείψεως πρὸς τὴν μείζονα τῆς αὐτῆς, ἡ ρο πρὸς τὴν ρκ. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἡ ρν, τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον πρὸς τὴν ρθ, ὥστε ὅλη ἡ νο, πρὸς ὅλην τὴν θκ, ἔχει ὡς ἡ ζη, ἐλάττων διάμετρος πρὸς τὴν αγ, μείζονα· τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται καὶ ἡ ξπ, ἔχειν πρὸς τὴν λμ, ὡς ἡ ζη, ἐλάττων διάμετρος πρὸς τὴν αγ, μείζονα.

Geom. Lb. 7. Fig. 35.



Ὅτι δὲ ἡ εφ, ἴση ἐστὶ τῇ οκ, δῆλον. παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ εφκο, διὰ τὸ ἔχειν τὴν ὑπὸ φεο, γωνίαν ἴσην τῇ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ οκφ. ἑκατέρα γὰρ τῶν ὑπὸ φεο, οκφ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ κφγ, διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς ρκ, εγ.

Πρότασις ΛΔ'.

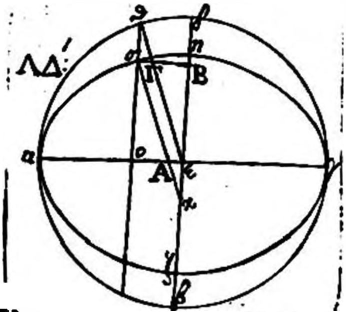
Ἐὰν ἐν κύκλῳ ἔλλειψις ἐγγραφῇ, καὶ ἐπὶ τῆς μείζονος ἡμιδιαμέτρου τῆς ἐλλείψεως κάθετος συσταθῇ τέμνουσα μὲν τὴν ἔλλειψιν, περατουμένη δὲ ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἀπὸ δὲ τῆς κοινῆς τομῆς ἐλλείψεώς τε καὶ καθέτου παράλληλος τῇ μείζονι διαμέτρῳ εὐθεῖα ἀχθῇ τέμνουσα τὴν ἐλάττονα πρὸς ὀρθὰς, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὸ τῆς καθέτου πέρας, τμηθήσεται ἡ παράλληλος τῷ λόγῳ τῆς μείζονος διαμέτρου πρὸς τὴν ἐλάττω.

Ἔστω εἰς τὸν αβγδ, κύκλον ἐγγεγραμμένη ἔλλειψις ἡ αζγη, ἧς μείζων μὲν ἡμιδιάμετρος ἡ αε, ἐλάττων δὲ ἡ εη· καὶ συνιστάσθω ἐπὶ τῆς αε, κάθετος ἡ τυχοῦσα οθ, ἀπὸ δὲ τοῦ σ, κοινῆς τομῆς αὐτῆς τε καὶ τοῦ αη, τεταρτημορίου τῆς ἐλλείψεως ἀχθήτω παράλληλος τῇ αε, ἡ σΒ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ εθ, τέμνουσα τὴν σΒ, κατὰ τὸ Γ. Λέγω τὴν σΒ, τέμνεσθαι κατὰ τὸ Γ, τῷ τῆς μείζονος αε, παρὰ τὴν ἐλάττονα εη, λόγῳ, ὥστε εἶναι ὡς ἡ αε, πρὸς τὴν εη, τὴν σΒ, πρὸς τὴν ΒΓ. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ σ, παράλληλος τῇ θε, ἡ σΑ, καὶ ἐπεὶ ἡ σΒ, παράλληλός ἐστι τῇ οε, πάντως γε τὸ σΑεΓ, παραλληλόγραμμόν ἐστι, καὶ κατὰ τὴν λδ': τοῦ α': τοῦ Στοιχ· ἡ σΓ, ἴση ἐστὶ τῇ Αε, ἔστι δὲ κατὰ τὴν αὐτὴν καὶ ἡ σΒ, ἴση τῇ οε, ἄρα κατὰ τὸ γ': ἀξίωμα ἡ ΓΒ, ἴση ἐστὶ τῇ οΑ. Αὖθις ἐπεὶ ἡ σΑ,

πα-

παράλληλός ἐστι τῇ θε, πάντως γε κατὰ τὴν β': τοῦ ϛ': τοῦ αὐτοῦ ὡς ἡ θσ, πρὸς σο, ἡ εΛ, πρὸς τὴν Λο, καὶ συνθέσει ὡς ἡ θο, πρὸς τὴν σο, ἡ εο, πρὸς τὴν Λο, ἀλλ' ὡς ἡ θο, πρὸς τὴν σο, ἔστι καὶ ἡ θε, πρὸς τὴν Γε, ἄρα ὡς ἡ θε, πρὸς τὴν Γε, ἡ εο, πρὸς τὴν Λο, καὶ ἡ μὲν θε, ἴση τῇ αε, ἡ δὲ Γε, τῇ εη, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ὅπερ καὶ ἡ οε, ἴση ἐστὶ τῇ σΒ, καὶ ἡ Λο, τῇ ΓΒ, ἄρα ὡς ἡ αε, πρὸς τὴν εη, ἡ σΒ, πρὸς ΓΒ.

Geom. Lib. 7. Fig. 36.

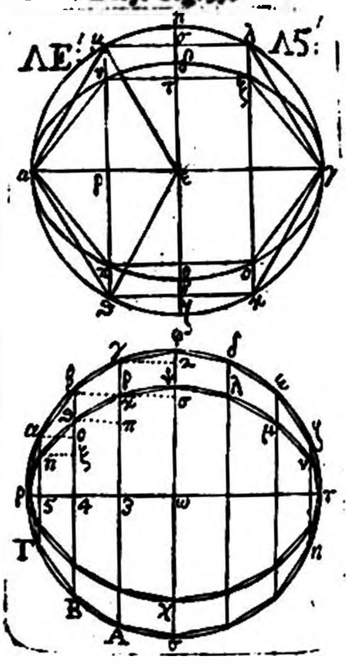


Πρότασις ΛΕ':

Εἰς τὴν δοθεῖσαν ἔλλειψιν πολύγωνον ἐγγράψαι.

Ἔστω ἔλλειψις ἡ αβγδ, ἧς μείζων μὲν διάμετρος ἡ αγ, ἐλάττων δὲ ἡ βδ, καὶ κέντρον τὸ ε. καὶ ζητηθήτω ἐγγραφῆναι εἰς αὐτὴν ἑξάγωνον. Γραφήτω δὴ περὶ τὴν αγ, μείζονα διάμετρον κύκλος ὁ αζγη, καὶ ἐγγραφήτω εἰς αὐτὸν ἑξάγωνον τὸ αθκγλμ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ λκ, μθ, ὑφ' ὧν δήπουθεν τμηθήσεται ἡ δοθεῖσα αβγδ, ἔλλειψις κατὰ τὰ νξοπ. εἶτα ἐπιζεύχθωσαν αἱ αν, νξ, ξγ, γο, οπ, πα, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθέν. ὅτι μὲν γὰρ τὸ απογξνα πολύγωνον, ἑξάγωνόν ἐστι δῆλον. Ἰσοπληθεῖς γὰρ ἔχει τὰς πλευρὰς ταῖς τοῦ αθκγλμ. ὅτι δὲ καὶ ἐγγεγραμμένον, καὶ τοῦτο σαφές. ἅπτεται γὰρ ἑκάστη τῶν αὐτοῦ γωνιῶν τῆς περιφερείας τῆς δοθείσης ἐλλείψεως, ὅπερ ἴδιον τοῦ ἐγγραφομένου. Τὸν αὐτὸν τρόπον δύναται καὶ ἄλλ' ὁτιοῦν πολύγωνον εἰς ἔλλειψιν ἐγγραφῆναι, ὡς ἐπὶ τοῦ β': καθορᾶται σχήματος.

Geom. Lib. 7. Fig. 37.

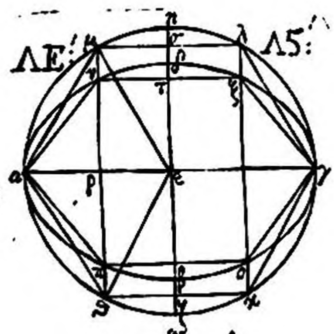


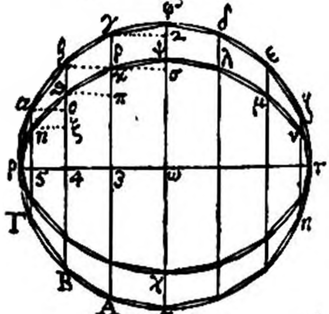
Πρότασις Λϛ':

Τὸ εἰς τὸν τῆς μείζονος διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως κύκλον ἐγγεγραμμένον πολύγωνον πρὸς τὸ εἰς τὴν ἔλλειψιν ἐγγεγραμμένον ὅμοιον πολύγωνον ἔχει, ὡς ἡ μείζων τῆς ἐλλείψεως διάμετρος πρὸς τὴν ἐλάττονα.

Ἔστω α: εἰς μὲν τὸν αζγη, κύκλον τῆς αγ, μείζονος διαμέτρου τῆς αβγδ, ἐλλείψεως πολύγωνον ἐγγεγραμμένον τὸ αθκγλμ, εἰς δὲ τὴν αβγδ, ἔλλειψιν τὸ απογξν. Λέγω ὅτι τὸ αθκγλμ, πρὸς τὸ απογξν, ἔχει ὡς ἡ αγ, πρὸς τὴν βδ. Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ λκ, μθ, αἵτινες κατὰ τὸν ἀμφότερα διελεύσονται καὶ διὰ τῶν ξο, καὶ νπ· καὶ ἐπεὶ αἱ αμ, αθ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, κοινὴ δὲ ἡ αε, πάντως γε ἐὰν ἐπιζευχθῶσι καὶ αἱ με, θε, ἴσαι καὶ αὗται ἔσονται, τὰ αμε, αθε, τρίγωνα ἰσογώνια ἔσονται, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ μαε, γωνία τῇ ὑπὸ θαε, ὥστε κατὰ τὴν δ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ μρ, τῇ θρ, εὐθεία, καὶ ἡ ὑπὸ μρα, γωνία τῇ ὑπὸ θρα, κάθετος ἄρα ἡ μθ, ἐπὶ τὴν αγ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἡ λκ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς αὐτῆς αγ, ὥστε κατὰ τὴν λβ': τοῦ παρόντος ἡ ρμ, ἔχει πρὸς τὴν ρν, ὡς ἡ αε, μείζων ἡμιδιάμετρος πρὸς τὴν εδ, ἐλάττονα, ὡς δὲ ἡ ρμ, πρὸς τὴν ρν, ἔχει τὸ, τι αμρ, τρίγωνον πρὸς τὸ ανρ, καὶ τὸ με, παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ νε, παραλληλόγραμμον κατὰ τὴν α: τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἄρα ὡς ἡ εη, μείζων ἡμιδιάμετρος πρὸς τὴν εδ, ἐλάττονα, ἔχει τὸ αμσε, τραπέζιον πρὸς τὸ αντε, τραπέζιον, ἀλλὰ τὸ μὲν αμσε, ἴσον τῷ γλσε, τὸ δὲ αντε, τῷ γξτε, τὸ ὅλον ἄρα αμλγ, χωρίον ἔχει πρὸς ὅλον τὸ ανξγ, ὡς ἡ εη, πρὸς τὴν εδ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ αθκγ, ἔχειν πρὸς τὸ απογ, ὡς ἡ εζ, πρὸς τὴν εβ, ὡς δὲ ἡ εη, πρὸς τὴν εδ, ἔχει ἤτοι εζ, πρὸς τὴν εβ, καὶ ἡ ὅλη ηζ, μείζων διάμετρος πρὸς τὴν ὅλην τὴν δβ, ἐλάττονα, ὅλον ἄρα τὸ αθκγλμ, πολύγωνον πρὸς ὅλον τὸ απογξν, ἔχει ὡς ἡ ηζ, ἤτοι αγ, πρὸς τὴν δβ.

Geom. Lib. 7. Fig. 38.





Ἔστω β': εἰς μὲν τὸν ρστφ, κύκλον τῆς ρτ, μείζονος διαμέτρου τῆς ρχτψ, ἐλλείψεως πολύγωνον ἐγγεγραμμένον τὸ ραβγφδεζτ, εἰς δὲ τὴν ρχτψ, ἔλλειψιν τὸ ρηθ.

αψλ.

κ ↓ λ μ ν τ. Λέγω ὅτι τὸ ρ α β γ φ δ ε ζ τ, πολύγ: ἔχει πρὸς τὸ ρ η θ κ ↓ λ μ ν τ, ὡς ἡ ρ τ, μείζων διάμετρος πρὸς τὴν χ ↓, ἐλάττονα. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ μὲν γ Α, β Β, α Γ, παραλλήλως τῇ φ σ, τέμνουσαι τὴν ρ τ, κατὰ τὰ 3, 4, 5, αἱ δὲ η ξ, α ο, θ π, β υ, κ σ, γ 2, παραλλήλως τῇ ρ τ, καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν λ β: τοῦ παρόντος, ἑκάστη τῶν γ 3, θ 4, α 5, τέμνεται ὑπὸ τῆς ρ ↓ τ, ἐλλείψεως ἀναλόγως τῇ ω φ, πάντως γε ὡς ἡ ω φ, πρὸς τὴν ω ↓, ἔχει καὶ ἡ γ 3, πρὸς τὴν 3 κ, καὶ ἡ 4 β, πρὸς τὴν 4 θ, καὶ 5 α, πρὸς τὴν 5 η, ἀλλ' ἡ μὲν 3 γ, ἴση ἐστὶ τῇ ω 2, ἡ δὲ 3 κ, τῇ ω σ, ἄρα ὡς ἡ ω φ, μείζων ἡμιδιάμετρος τῆς ρ ↓ τ, ἐλλείψεως (ἴση γὰρ ἡ ω φ, τῇ ω ρ,) πρὸς τὴν ω ↓, ἐλάττονα, ἡ ω 2, πρὸς τὴν ω σ, ὥστε καὶ ἡ λοιπὴ 2 φ, πρὸς τὴν λοιπὴν σ ↓, ἔχει ὡς ἡ ω φ, πρὸς τὴν ω ↓, κατὰ τὴν ιθ': τοῦ ε': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ω 2, πρὸς τὴν ω σ, ἔχει καὶ τὸ 23, παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ σ 3, ὡς δὲ ἡ 2 φ, πρὸς τὴν σ ↓, τὸ φ γ 2, τρίγων: πρὸς τὸ ↓ υ σ, ἄρα καὶ τὸ φ γ 3 ω, τραπέζιον ἔχει πρὸς τὸ ↓ υ 3 ω, ὡς ἡ ω φ, μείζων ἡμιδιάμετρος πρὸς τὴν ω ↓, ἐλάττονα. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται τό, τε γ β 4 3, τραπέζιον πρὸς τὸ κ θ 4 3, καὶ τὸ β α 5 4, πρὸς τὸ θ η 5 4, ἔχειν ὡς ἡ ω φ, πρὸς τὴν ω ↓ ὅτι δὲ καὶ τὸ α ρ 5, πρὸς τὸ η ρ 5, τρίγωνον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ ω φ, πρὸς τὴν ω ↓, δέδεικται ἀνωτέρω ἐπὶ τῶν μ α ρ, ν α ρ· ὅλον ἄρα τὸ φ γ β α ρ ω, πρὸς ὅλον τὸ ↓ κ θ η ρ ω, ἔχει, ὡς ἡ μείζων ἡμιδιάμετρος ω φ, πρὸς τὴν ἐλάττω ω ↓. Ὁμοίως δὴ δείξομεν καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριῶν τεταρτημορίων τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ πολυγώνου ἔχειν πρὸς ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριῶν τεταρτημορίων τοῦ ἐν τῇ ἐλλείψει πολυγώνου, ὡς ἡ ω φ, πρὸς τὴν ω ↓, ὅλον ἄρα τὸ ἐν τῷ κύκλῳ πολύγωνον πρὸς ὅλον τὸ ἐν τῇ ἐλλείψει πολύγωνον ἔχει, ὡς ἡ μείζων ἡμιδιάμετρος πρὸς τὴν ἐλάττω, ὡς δὲ ἡμιδιάμετρος πρὸς ἡμιδιάμετρον, ἔχει καὶ διάμετρος πρὸς διάμετρον, ἄρα τὸ εἰς τὸν τῆς μείζονος διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως κύκλον ἐγγεγραμμένον πολύγωνον πρὸς τὸ εἰς τὴν ἔλλειψιν ἐγγεγραμμένον ὅμοιον πολύγωνον, ἔχει ὡς ἡ μείζων τῆς ἐλλείψεως διάμετρος πρὸς τὴν ἐλάττονα.

Πρότασις ΛΖ':

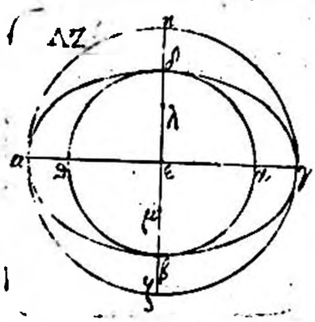
Ὁ τῆς μείζονος διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως κύκλος ἥτε ἔλλειψις, καὶ ὁ τῆς ἐλάττονος διαμέτρου τῆς αὐτῆς κύκλος, συνεχῶς εἰσὶν ἀνάλογα τῷ λόγῳ τῆς μείζονος διαμέτρου πρὸς τὴν ἐλάττω.

Ἔστω ἔλλειψις ἡ α β γ δ, ἧς μείζων μὲν διάμετρος ἡ α γ, ἐλάττων δὲ ἡ β δ, καὶ κέντρον τὸ ε, γραφήτω δὲ ὅ, τε τῆς μείζονος α β, διαμέτρου κύκλος ὁ α ζ γ η, καὶ ὁ τῆς β δ, ἐλάττονος ὁ θ β κ δ. Λέγω δὴ τὸν α ζ γ η, κύκλον, καὶ α β γ δ, ἔλλειψιν καὶ θ β κ δ, κύκλον συνεχῶς εἶναι ἀνάλογον τῷ τῆς μείζονος α γ, διαμέτρου πρὸς τὴν ἐλάττονα β δ, λόγῳ, τουτέστιν ὡς ἡ α γ, πρὸς τὴν β δ, ἔχειν τὸν α ζ γ η, κύκλον πρὸς τὴν α β γ δ, ἔλλειψιν, καὶ τὴν α β γ δ, ἔλλειψιν πρὸς τὸν θ β κ δ, κύκλον. Ἐὰν γὰρ ἀφ' ἑκάστου σημείου τοῦ α ζ γ η, κύκλου εὐθεῖαι ἀχθῶσι πα.

σι πα.

ει παραλλήλως τῇ η ζ, ἅπασαι τμηθήσονται ἀναλόγως ταῖς α γ, β δ, διαμέτροις κατὰ τὴν λ β': τοῦ παρόντος, ὥστε ὡς ἔχει ἡ η ζ, μείζων διάμετρος τῆς α β γ δ, ἐλλείψεως, ἴση γὰρ ἡ η ζ, τῇ α γ, πρὸς τὴν ἐλάττω δ β, ἔχουσι καὶ πᾶσαι αἱ ὑπὸ τοῦ α ζ γ η, κύκλου περιεχόμεναι εὐθεῖαι πρὸς πάσας τὰς ὑπὸ τῆς α β γ δ, ἐλλείψεως περιεχομένας, ἀλλ' αἱ μὲν ὑπὸ τοῦ α ζ γ η, κύκλου περιεχόμεναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ πληροῦσιν, αἱ δὲ ὑπὸ τῆς α β γ δ, ἐλλείψεως τὸ αὐτῆς ὁμοίως πληροῦσιν ἐμβαδὸν, ἄρα ὁ α ζ γ η, κύκλος πρὸς τὴν α β γ δ, ἔλλειψιν ἔχει ὡς ἡ η ζ, μείζων διάμετρος τῆς α β γ δ, ἐλλείψεως πρὸς τὴν δ β, ἐλάττονα ταύτης διάμετρον, ἀλλ' ὁ α ζ γ η, κύκλος πρὸς τὸν β θ κ δ, κύκλον ἐνδιπλασίονι ἐστὶ λόγῳ κατὰ τὴν α': τοῦ γ': τοῦ παρ: ἄρα ἐὰν εὑρεθῇ τρίτη ἀνάλογος τῶν α γ, δ β, ἡ λ μ, ὁ α ζ γ η, κύκλος ἕξει πρὸς τὸν θ β κ δ, ὡς ἡ α: α γ, πρὸς τὴν γ': ὡς δὲ ἡ α γ, α: πρὸς τὴν β': δ β': ἔχει ὁ αὐτὸς κύκλος πρὸς τὴν α β γ δ, ἔλλειψιν, τρία ἄρα μεγέθη τὰ α γ, β δ, λ μ, τρισὶ μεγέθεσι τοῖς α ζ γ η, α β γ δ, θ β κ δ, διίσου ἀνάλογόν εἰσιν, ὥστε καὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ἀλλ' αἱ α γ, β δ, λ μ, εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσι τῷ τῆς μείζονος διαμέτρου πρὸς τὴν ἐλάττονα λόγῳ, ἄρα καὶ ὁ α ζ γ η, κύκλος, ἡ α β γ δ, ἔλλειψις, καὶ ὁ β θ κ δ, κύκλος ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον τῷ λόγῳ τῆς μείζονος α γ, διαμέτρου πρὸς τὴν δ β, ἐλάττονα.

Geom. Lib. 7. Fig. 39.

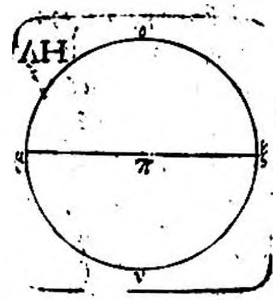


Πρότασις ΛΗ':

Η' ἔλλειψις ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἡμιδιάμετρος μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν τῆς αὐτῆς ἡμιδιαμέτρων.

Ἔστω ἔλλειψις μὲν ἡ α β γ δ, ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω σχήματος, ἧς ἡμιδιάμετροι αἱ α ε, ε δ, κύκλος δὲ ὁ μ ν ξ ο, οὗ ἡ μ π, ἡμιδιάμετρος μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν α ε, ε δ. λέγω τὴν α β γ δ, ἔλλειψιν ἴσην εἶναι τῷ μ ν ξ ο, κύκλῳ. Ἐπεὶ γὰρ αἱ α ε μ π, ε δ, εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, πάντως γε ὁ τῆς α ε, κύκλος πρὸς τὸν τῆς μ π, κύκλον ἔχει ὡς ἡ α ε, πρὸς τὴν ε δ, κατὰ τὴν α': τοῦ γ': τοῦ παρ: ἀλλ' ὡς ἡ α ε, πρὸς τὴν ε δ, ἔχει καὶ ὁ τῆς α ε, κύκλος πρὸς τὴν α β γ δ, ἔλλειψιν κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἄρα ὁ τῆς α ε, ἡμιδιαμέτρου κύκλος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρός τε τὸν μ ν ξ ο, κύκλον, καὶ α β γ δ, ἔλλειψιν. ὥστε κατὰ τὴν θ': τοῦ ε': τοῦ Στοιχειωτοῦ ἡ α β γ δ,

Geom. Lib. 7. Fig. 40.



ἔλλειψις ἴση ἐστὶ τῷ μ ν ξ ο κύκλῳ, ἡ ἔλλειψις ἄρα ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἡμιδιάμετρος μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν τῆς αὐτῆς ἡμιδιαμέτρων.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τὸ περιγραφόμενον παραλληλόγραμμον περὶ τὴν ἔλλειψιν ἴσον ἐστὶ τῷ περιγραφομένῳ τετραγώνῳ περὶ τὸν κύκλον, ᾧτινι ἴση ἐστὶν ἡ ἔλλειψις, τὸ γὰρ περὶ τὴν ἔλλειψιν παραλληλόγραμμον ὑπὸ τῶν διαμέτρων αὐτῆς περιέχεται, τοῦ δὲ περὶ τὸν κύκλον τούτου τετραγώνου τετράγωνος πλευρά ἐστιν ἡ τοῦ κύκλου διάμετρος, ἥτις μέση ἀνάλογός ἐστι τῶν τῆς ἐλλείψεως διαμέτρων.

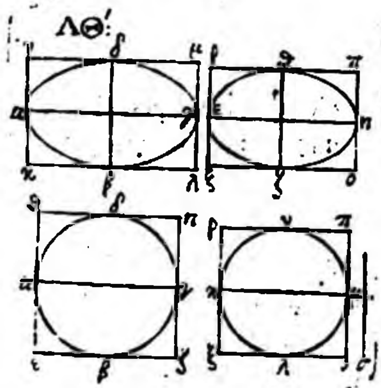
Πρότασις ΛΘ΄.

Αἱ ἐλλείψεις πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν ὡς τὰ περὶ αὐτὰς ὀρθογώνια.

Ἔστωσαν ἐλλείψεις αἱ α β γ δ, ε ζ η θ, ὀρθογώνια δὲ περὶ αὐτὰς τὰ κ λ μ ν, ξ ο π ρ· λέγω ὅτι ἡ α β γ δ, ἔλλειψις πρὸς τὴν ε ζ η θ, ἔλλειψιν ἔχει ὡς τὸ κ λ μ ν, ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ξ ο π ρ, ὀρθογώνιον. Ἔστω γὰρ τῇ μὲν α β γ δ, ἐλλείψει ἴσος κύκλος ὁ α β γ δ, καὶ περὶ αὐτὸν περιγεγραμμένον τετράγωνον τὸ ε ζ η θ, τῇ δὲ ε ζ η θ, ἐλλείψει ἴσος ὁμοίως κύκλος ὁ κ λ μ ν, καὶ περὶ αὐτὸν περιγεγραμμένον τετράγωνον τὸ ξ ο π ρ. εὑρεθήτω δὲ τρίτη ἀνάλογος τῶν α γ, κ μ, ἡ σ, γραμμή. Δείκνυται.

Ἡ α β γ δ, ἔλλειψις πρὸς τὴν ε ζ η θ, ἔλλειψιν ἔχει ὡς ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸν κ λ μ ν, κύκλον διὰ τὴν ἰσότητα. ἐπεὶ δὲ ἡ σ, γραμμὴ γ΄: ἐστὶν ἀνάλογος τῶν α γ, κ μ, διαμέτρων, πάντως γε ὡς ἡ α γ, γραμμὴ πρὸς τὴν σ, ἔχει ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸν κ λ μ ν, ὡς δὲ ἡ α γ, γραμμὴ πρὸς τὴν σ, ἔχει καὶ τὸ ε ζ η θ, τετράγωνον πρὸς τὸ ξ ο π ρ, τετράγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸν κ λ μ ν, κύκλον ἔχει ὡς τὸ ε ζ η θ, τετράγωνον πρὸς τὸ ξ ο π ρ, τετράγ: ἀλλ᾽ ὡς ὁ α β γ δ, κύκλος πρὸς τὸν κ λ μ ν, ἔχει καὶ ἡ α β γ δ, ἔλλειψις πρὸς τὴν α ζ η θ, ἔλλειψιν, ὡς δέδεικται, ἄρα ἡ α β γ δ, ἔλλειψις πρὸς τὴν ε ζ η θ, ἔλλειψιν ἔχει ὡς τὸ ε ζ η θ, τετράγωνον πρὸς τὸ ξ ο π ρ, τετράγ: ἐπεὶ δὲ τῷ μὲν ε ζ η θ, τετραγώνῳ ἴσον ἐστὶ τὸ κ λ μ ν, ὀρθογώνιον, τῷ δὲ ξ ο π ρ, τετραγώνῳ τὸ ξ ο π ρ ὀρθογώνιον κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, πάντως γε ἡ α β γ δ, ἔλλειψις πρὸς τὴν ε ζ η θ, ἔλλ: ἔχει ὡς τὸ κ λ μ ν, ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ξ ο π ρ, αἱ ἐλλείψεις ἄρα πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν, ὡς τὰ περὶ αὐτὰς ὀρθογώνια.

Geom. Lib. 7. Fig. 40.



Π Ο΄.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

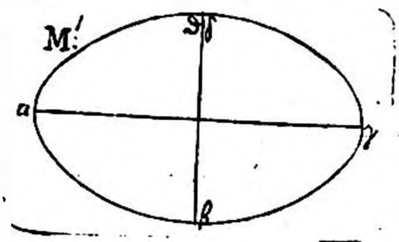
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τῶν ἴσων ἐλλείψεων ἀντιπεπόνθασιν αἱ διάμετροι, καὶ ὧν ἐλλείψεων αἱ διάμετροι ἀντιπεπόνθασιν, ἐκεῖναι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐὰν γὰρ ἴσαι ὦσιν αἱ ἐλλείψεις ἴσα ἔσονται καὶ τὰ περὶ αὐτὰς ὀρθογώνια, τῶν δὲ αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασι κατὰ τὴν ιδ': τοῦ ς': τοῦ Στοιχείου, καὶ τοὔμπαλιν, ὧν ὀρθογωνίων αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

Πρότασις Μ'.

Τὸ τῆς ἐλλείψεως ἐμβαδὸν εὑρεῖν.

Ἔστω ἔλλειψις ἡ αβγδ, καὶ ζητείσθω τὸ ταύτης ἐμβαδόν. Πολλαπλασιασθήτω δὴ ἡ αγ, μείζων διάμετρος ἐπὶ τὴν δβ, ἐλάττονα, εἶτα γινέσθω ὡς ὁ ιδ': πρὸς τὸν ια': ἀριθμόν, οὕτω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ περιεχομένου ὀρθογωνίου ὑπὸ τῶν αγ, βδ, πρὸς ἄλλο τι, καὶ ὁ εὑρεθεὶς δ': τῶν ὅρων, ἔσται τὸ τῆς αβγδ, ἐλλείψεως ἐμβαδόν. κατὰ γὰρ τὸ πόρισμα τῆς λη': τοῦ παρ: τὸ ὑπὸ τῶν αγ, βδ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ περιγραφομένῳ τετραγώνῳ περὶ τὸν κύκλον, ὅς ἐστιν ἴσος τῇ αβγδ, ἐλλείψει, ἀλλὰ τὸ τετράγωνον ἐκεῖνο πρὸς τὸν ῥηθέντα κύκλον ἔχει ὡς ὁ ιδ': πρὸς τὸν ια': κατὰ τὴν κγ': τοῦ δ': τοῦ παρόντος ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αγ, βδ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἔχει πρὸς τὴν αβγδ, ἔλλειψιν, ὡς ὁ ιδ': πρὸς τὸν ια':

Geom. Lib. 7. Fig. 41.



Ἄλλως. Πολλαπλασιασθήτω ἡ αγ, ἐπὶ τὴν βθ, καὶ εὑρεθήτω ἡ τετράγωνος τοῦ γινομένου ῥίζα, καὶ εἰλήφθω αὐτὴ διάμετρος κύκλου, εἶτα εὑρεθήτω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αὐτοῦ κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ εὑρεθεῖσα τετράγωνος ῥίζα, καὶ γνωσθήσεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως, κατὰ γὰρ τὸ πόρισμα τῆς ῥηθείσης λη': τὸ ὑπὸ τῶν αγ, βδ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ περιγραφομένῳ τετραγώνῳ περὶ τὸν κύκλον ὅς ἐστιν ἴσος τῇ αβγδ, ἐλλείψει, ἀλλ' ἡ τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου πλευρὰ διάμετρός ἐστι τοῦ εἰρημένου κύκλου, εὑρεθείσης ἄρα τῆς τετραγώνου ῥίζης τοῦ ὑπὸ τῶν αγ, βδ, περιεχομένου ὀρθογωνίου, εὑρεθήσεται ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου, ὅς ἐστιν ἴσος τῇ δοθείσῃ ἐλλείψει, εὑρεθείσης δὲ τῆς διαμέτρου, εὑρεθήσεται πάντως καὶ ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια, τῆς δὲ ἡμιδιαμέτρου ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας πολλαπλασιαζομένης γνωσθήσεται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, καὶ ἑπομένως τὸ τῆς ἐλλείψεως, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τῷ αὐτῷ κύκλῳ, ὅπερ ἦν τὸ προσαχθέν.

Περὶ Ἑλικοειδοῦς γραμμῆς, ἤτοι σπειροειδοῦς ὅροι κατ' Ἀρχιμήδην,

Α': Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἐν ἐπιπέδῳ, μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος, ἰσοταχῶς περιενεχθεῖσα, ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμησεν, ἅμα δὲ τῇ γραμμῇ τῇ περιφερομένῃ φέρηται τὸ σημεῖον ἰσοταχῶς αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τῆς εὐθείας, ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σημεῖον ἐκεῖνο Ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

Β': Καλείσθω οὖν τὸ μὲν πέρας τῆς περιαγομένης εὐθείας τὸ μένον, ἀρχὴ τῆς Ἕλικος.

Γ': Ἡ δὲ θέσις τῆς γραμμῆς, ἀφ' ἧς ἤρξατο ἡ εὐθεῖα περιφέρεσθαι ἀρχὴ τῆς περιφορᾶς.

Δ': Εὐθεῖα ἣν μὲν ἐν τῇ α: περιφορᾷ διαπορευθῇ τὸ σημεῖον τὸ κατὰ τῆς εὐθείας φερόμενον, α: καλείσθω· ἣν δὲ ἐν τῇ β': περιφορᾷ διανύσῃ, δευτέρα, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως ταύταις ὁμωνύμως ταῖς περιφοραῖς καλείσθωσαν.

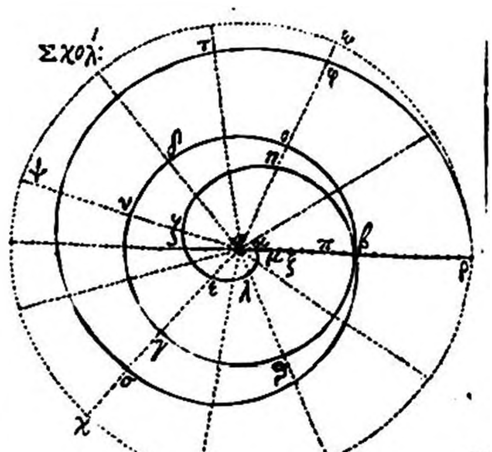
Ε': Τὸ δὲ χωρίον τὸ περιληφθὲν ὑπό τε τῆς Ἕλικος τῆς ἐν τῇ α: περιφορᾷ γραφείσης, καὶ τῆς α: εὐθείας, πρῶτον καλείσθω. τὸ δὲ περιληφθὲν ὑπό τε τῆς ἐν τῇ δευτέρᾳ περιφορᾷ γραφείσης, καὶ τῆς εὐθείας τῆς δευτέρας, δεύτερον καλείσθω, καὶ τἄλλα ἑξῆς οὕτω καλείσθωσαν.

ς': Καὶ ἐὰν ἀπὸ τοῦ σημείου, ὅ ἐστιν ἀρχὴ τῆς Ἕλικος, ἀχθῇ τις εὐθεῖα γραμμὴ, τῆς εὐθείας ταύτης, ἐφ' ἃ ἡ περιφορὰ γίνεται, προηγούμενα καλείσθω, τὰ δὲ ἐπὶ θάτερα, ἑπόμενα.

Ζ': Ὁ δὲ γραφεὶς κύκλος κέντρῳ μὲν τῷ σημείῳ, ὅ ἐστιν ἀρχὴ τῆς ἕλικος, διαστήματι δὲ τῇ α: εὐθείᾳ, πρῶτος καλείσθω. ὁ δὲ γραφεὶς κέντρῳ μὲν τῷ αὐτῷ, διαστήματι δὲ διπλασίᾳ εὐθείᾳ, δεύτερος καλείσθω, καὶ οἱ ἄλλοι δὲ ἑξῆς τούτοις, τὸν αὐτὸν τρόπον. *Geom. Lib. 7. Fig. 42.*

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Οἷον ἔστω εὐθεῖα γραμμὴ ἡ αβ, ἧς πέρατα τὰ α, καὶ β, καὶ ὑποκείσθω μένοντος τοῦ α, αὐτῆς πέρατος καὶ ἠρεμοῦντος, φέρεσθαι τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ἰσοταχῶς ἀπὸ τοῦ β, ἀρξαμένην διὰ τῶν γ, καὶ δ, ὥστε τὸν βγδ, καταγράφειν κύκλον. Ἐννοείσθω δὲ καὶ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς αβ, εὐθείας φέρεσθαι ἰσοταχῶς τῇ αὐτῇ αβ, ἐπὶ τὸ β, σημεῖον, ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ α, μένοντος σημείου, ὥ-



στι ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ αβ, γραμμὴ τὸν βγδ, περιγράφει κύκλον, τὸ ἀπὸ τοῦ α, ὁρμῶν σημεῖον διέρχεσθαι ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ τὸ διάστημα τῆς αβ. τούτων γὰρ οὕτω κειμένων καταγράψει δήπουθεν τὸ αὐτὸ σημεῖον τὴν αεζηβ, Ἕλικα. τῆς γὰρ αβ, φερομένης ἀπὸ τοῦ β, σημείου ἐπὶ τὸ θ, τὸ ἰσοταχῶς φερόμενον ἐπ᾽ αὐτῆς σημεῖον τὸ ακ, διελεύσεται διάστημα, καὶ τὸ αλ, καταγράψει τόξον. γενομένης δὲ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ γ, διελεύσεται τὸ σημεῖον τὸ αμ, διάστημα, καὶ καταγράψει τὸ αλε, τόξον. Ἐὰν δὲ ἡ γραμμὴ ἀφίκηται ἐπὶ τὸ ν, τὸ αὐτὸ σημεῖον τὸ αξ, διανύσει διάστημα, ἤτοι τὸ αζ, καὶ καταγράψει τὸ αλεζ, τόξον, καταλαβούσης δὲ τῆς φερομένης γραμμῆς τὸ ο, σημεῖον, διελεύσεται ἤδη τὸ φερόμενον ἐπ᾽ αὐτῆς σημεῖον τὸ απ, διάστημα, ἤτοι τὸ αη, καὶ καταγράψει τὸ αλεζη, τόξον. ἐπειδὰν δὲ ἀπὸ τοῦ ο, ἐπὶ τὸ β, ἐπανακάμψῃ ἡ γραμμὴ, διελεύσεται τὸ σημεῖον τὴν αβ, δοθεῖσαν γραμμὴν, καὶ καταγράψει τὴν αλεζηβ, Ἕλικα. Ἐὰν δὲ ἡ γραμμὴ αβ, διπλασιασθῇ καὶ γένηται ἡ αρ, τὸ δὲ σημεῖον ἀρχόμενον ἀπὸ τοῦ β, προβαίνῃ τῇ αὐτῇ ταχύτητι ἐπὶ τὸ ρ, ἰσοταχῶς τῇ αρ, εὐθείᾳ κινούμενον, καταγράψει τὴν βστφρ, ἕλικα. Ἡ μὲν οὖν τῆς αλεζηβ, Ἕλικος καταγραφὴ πρώτη περιφορὰ λέγεται, ἡ δὲ τῆς βστφρ, δευτέρα. Ἐὰν δὲ τριπλασιασθῇ ἡ αβ, εὐθεῖα, καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοίως γένηται, ἡ τοῦ γ: μέρους τῆς Ἕλικος καταγραφὴ γ': περιφορὰ λέγεται.

Τῆς αβ, τοίνυν εὐθείας γραμμῆς τὸ α, μόνον πέρας, ἀρχὴ καλεῖται τῆς Ἕλικος κατὰ τὸν Ἀρχιμήδην, ἡ δὲ θέσις, καθ᾽ ἣν ὑπετέθη κατ᾽ ἀρχὰς ἡ αβ, εὐθεῖα, καὶ ἀφ᾽ ἧς ἤρξατο φέρεσθαι, καλεῖται ἀρχὴ τῆς περιφορᾶς. ἡ δὲ εὐθεῖα αβ, ἣν τὸ σημεῖον διέρχεται ἐν τῇ α': περιφορᾷ πρώτη καλεῖται, ἡ δὲ αρ, ἣν τὸ αὐτὸ διανύει σημεῖον ἐν τῇ β': περιφορᾷ δευτέρα καλεῖται, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμωνύμως ταῖς περιφοραῖς. ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ χωρίον τὸ περιλαμβανόμενον ὑπό τε τῆς Ἕλικος αλεζηβ, τῆς ἐν τῇ α': περιφορᾷ γραφομένης, καὶ τῆς αβ, α': εὐθείας, πρῶτον καλεῖται, τὸ δὲ ὑπὸ τῆς Ἕλικος τῆς ἐν τῇ β': γραφομένης περιφορᾷ καὶ βρ, εὐθείας περιλαμβανόμενον δεύτερον καλεῖται, καὶ τ᾽ ἄλλα ἀναλόγως. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ α, σημείου, ὅπερ ἀρχὴ ὡς εἴρηται τῆς Ἕλικός ἐστιν, ἀχθῇ τις εὐθεῖα, ὡς ἡ αβ, καὶ ἀρξαμένη φέρεσθαι μεταβῇ ἀπὸ τοῦ β, ἐπὶ τὸ θ, ἀπὸ δὲ τοῦ θ, ἐπὶ τὸ γ, τὰ μέρη ἐφ᾽ ἃ φέρεται, προηγούμενα καλεῖται, τὰ δὲ λοιπὰ τὰ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἑπόμενα. οἷον τὸ αβθ, ἐμβαδὸν, ὅπερ ἡ αβ, διῆλθεν εὐθεῖα, ἡγούμενον καλεῖται, τὸ δὲ ἐκτὸς τῆς αβ, δὸς εἰπεῖν τὸ αβο, ἑπόμενον. Ἐὰν δὲ ἡ αθ, γραμμὴ ὑποτεθῇ καὶ φερομένη ἀπὸ τοῦ θ, γένηται ἐπὶ τὸ γ, τὸ μὲν αθγ, ἐμβαδὸν προηγούμενα καλεῖται, τὸ δὲ αβθ, ἑπόμενα, καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς ὁμοίως, προηγούμενα μὲν τὰ προσλαμβανόμενα, ἑπόμενα δὲ τὰ ἐγκαταλειπόμενα, ἅπερ δὴ ἀντικειμένως ἔχει τοῖς παρ᾽ Ἀστρονόμοις ἡγουμένοις τε καὶ ἑπομένοις. οἱ γὰρ Πλανῆται ἀρχόμενοι φέρονται ἀπὸ τοῦ Κριοῦ, ὅς ἐστιν ἀρχὴ τοῦ Ζωδιακοῦ, καὶ διὰ τοῦ Ταύρου, τῶν Διδύμων, καὶ τῶν ἐφεξῆς Ζωδίων διαβαί-

νειν

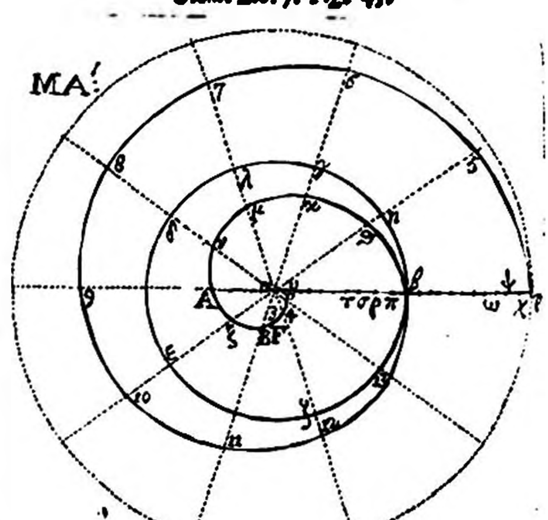
νειν κατὰ τὰ ἑπόμενα λέγονται κινεῖσθαι. ὁ μὲν γὰρ Ταῦρος ἑπόμενος λέγεται πρὸς τὸν Κριὸν παραβαλλόμενος, οἱ δὲ Ἰχθύες ἡγέμενοι, ὡς ἐν ἄλλοις εἴρηται. ὁ δὲ κύκλος βγδ, ὁ γραφόμενος κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αβ, πρῶτος καλεῖται. ὁ δὲ ρχψω, ὁ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αρ, διπλασίονι τοῦ αβ, γραφόμενος, δεύτερος καλεῖται, καὶ οἱ ἄλλοι ἀναλόγως.

Πρότασις ΜΑ'.

Εὐθείας γραμμῆς πεπερασμένης δοθείσης, Ἕλικα περὶ αὐτὴν καταγράψαι.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ αβ, περὶ ἣν ζητείσθω γραφῆναι Ἕλικα. Ἐννοείσθω δὴ καὶ τὰ προειρημένα ἡ αβ, φέρεσθαι περὶ τὸ α, κέντρον, ἀρχομένη ἀπὸ τοῦ β, ὥστε καταγράφειν τὸν βγδεζ, κύκλον. ταύτης δὲ ὁμαλῇ περιφερομένης κινήσει, ἐννοείσθω ἐπ' αὐτῆς κινεῖσθαι καὶ τὸ β, σημεῖον ἀναλόγῳ καὶ ἰσοταχεῖ κινήσει, ὥστε καθ' ὃν ἂν χρόνον ἡ αβ, τηλίκοντι μέρος τοῦ βγδεζ, καταγράψῃ κύκλου, ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ καὶ τὸ β, σημεῖον τὸ ἀνάλογον τῆς αβ, διελθεῖν μέρος. Οἷον δεδόσθω ἐπειδὰν μὲν ἡ αβ, ἄρξηται ἀπὸ τοῦ β, σημείου ἐπὶ τὸ η, φέρεσθαι, τηνικαῦτα ἄρξασθαι καὶ τὸ β, ἐπὶ τὸ π, χωρεῖν. ὅτε δὲ ἡ αβ, τὸ η, καταλάβοι, τότε δὴ καὶ τὸ β, ἐπὶ τὸ θ, ἀφικέσθαι, καὶ τὸ βθ, καταγράψαι τόξον· τῆς δὲ αβ, ἐπὶ τὸ γ, γενομένης, τὸ β, ἐπὶ τὸ κ, ἐλθεῖν, καὶ τὸ θκ, καταγράψαι τόξον, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁμοίως. ὥστε ὃ μέρος, ἢ μέρη ἐστὶ τὸ βη, τόξον τοῦ βγδεζ, κύκλου, τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ μέρη εἶναι καὶ τὸ ηθ, τῆς αβ. ὃ δὲ τὸ

Geom. Lib. 7. Fig. 43.



βγ, τοῦ βγδεζ, κύκλου, τὸ αὐτὸ καὶ τὸ γκ, τῆς αβ, ὃ δὲ τοῦ κύκλου τὸ βλ, τὸ αὐτὸ καὶ τὸ λμ, τῆς αβ, εὐθείας. Ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων. καὶ ὑπὸ μιᾷ περιστροφῇ τῆς αβ, εὐθείας καταγραφήσεται ἡ βθκμνξοα, Ἕλιξ. Ἵνα δὲ καὶ τῷ διαβήτῃ τινὶ γένηται, κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αβ, γραφέσθω ὁ βγδεζ, κύκλος, καὶ διῃρήσθω εἰς ὅσα βούλει μέρη. Ἔστω δὲ διῃρημένος εἰς δέκα ἴσα ἀλλήλοις τὰ βη, ηγ, γλ, λδ, καὶ λοιπά, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ α, κέντρου δὲ ἑκάστου τῶν τοῦ κύκλου σημείων ἀορίστως ἐκτεινόμεναι αἱ αη, αγ, αλ, αδ, καὶ λοιπαί. Διαιρεθήτω δ' ἔτι εἰς τοσαῦτα μέρη ἴσα καὶ ἡ αβ, τὰ βπ, πρ, σ τ, καὶ λοιπά. εἶτα εἰλήφθω τῇ μὲν απ, ἴση ἡ αθ, τῇ δὲ αρ, ἡ ακ, τῇ δὲ ασ, ἡ αμ, τῇ δὲ ατ, ἡ αν, καὶ αἱ λοιπαὶ ἀναλόγως, καὶ ἡ ἐσχάτη αο, ἴση ἔσται τῇ αυ, τῷ δεκάτῳ δηλονότι τῆς αβ, μέρει. τούτων δὲ γενομένων, ληφθέντος τοῦ αβ, διάστημα, καὶ κέντροις τοῖς β, καὶ θ, γραφήτωσαν δύο τόξα τεμνόμενα κατὰ τὸ 3, ἀφ' οὗ ὡς ἀπὸ κέντρου γραφήτω τὸ βθ, τόξον. εἰς καταγραφὴν δὲ τοῦ θκ, ληφθήτω τὸ αθ, διάστημα, καὶ κέντροις μὲν τοῖς θ, καὶ κ, διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ αθ, γραφήτωσαν δύο τόξα τεμνόμενα κατὰ τὸ 4, ἀφ' οὗ ὡς ἀπὸ κέντρου γραφήτω τὸ θκ. εἰς καταγραφὴν δ' ἔτι τοῦ μὲν κμ, εἰλήφθω διάστημα τὸ ακ, τοῦ δὲ μν, τὸ αμ, καὶ τὰ λοιπὰ γενέσθω ὡς καὶ ἐπὶ τῆς τῶν βθ, θκ, καταγραφῆς, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὁμοίως τὰ αὐτὰ γινέσθω. Εἰ δέ σοι βουλητὸν τὴν Ἕλικα διπλασιάσαι, διπλασιασθήτω ἡ αβ, καὶ ἔστω ἡ βφ, ἴση τῇ αβ, ὥστε τὴν ὅλην αφ, διπλασίονα εἶναι τῆς αβ, καὶ διῃρήσθω καὶ ἡ βφ, εἰς ὅσα καὶ ἡ αβ, τὰ φχ, χψ, ψω, καὶ λοιπά. εἶτα εἰλήφθω ἡ μὲν α5, ἴση τῇ αχ, ἡ δὲ α6, τῇ αψ, ἡ δὲ α7, τῇ αω, καὶ αἱ λοιπαὶ ἀναλόγως. Τούτων δ' οὕτως εἰλημμένων, κέντροις μὲν τοῖς φ, καὶ 5, σημείοις, διαστήματι δὲ τῷ αφ, γραφήτωσαν δύο τόξα τεμνόμενα ἀλλήλοις, τῆς δὲ κοινῆς τῶν αὐτῶν τόξων τομῆς ἀντὶ κέντρου λαμβανομένης, γραφήτω τῷ αὐτῷ αφ, διαστήματι τὸ φ5, τόξον. Τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἐπὶ τῆς τῶν λοιπῶν τόξων καταγραφῆς γενέσθω, καὶ καταγραφήσεται πάντως ἡ φ 5. 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, β, θ, κ, μ, ν, Λ, ξ, Β, Γ, ο, α, Ἕλιξ διπλῆ τῆς αβ, περιστροφῆς. τὸν αὐτὸν τρόπον δυνήσῃ τὴν ἕλικα τριπλασιάσαι, τετραπλασιάσαι, ἢ ἄλλως πως αὐξῆσαι, τριπλασιασθείσης, τετραπλασιασθείσης, ἢ ἄλλως πως αὐξηθείσης τῆς αβ, καὶ τῶν ἄλλων γενομένων, ὡς ἤδη ἡρμήνευται.

Ἰστέον δ' ὅτι ὅσον ὁ τῆς α: περιστροφῆς κύκλος ὁ βγδεζ, καὶ ἡ αβ, ἡμιδιάμετρος εἰς πλείω μὲν τῷ ἀριθμῷ, ἐλάττω δὲ τῇ πηλικότητι συνδιαιροῦνται μέρη, τοσοῦτον καὶ ἡ τῆς Ἕλικος καταγραφὴ ἀκριβεστέρα γίνεται.

ΠΌΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς Ἑλικοειδοῦς γραμμῆς ἐπὶ τοῦ κύκλου τῆς α: περιστροφῆς εὐθεῖαι ἀχθῶσιν ἴσας γωνίας περιέχουσαι, αἱ ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, καὶ τῆς Ἑλικοειδοῦς ἐμπεριλαμβανόμεναι Γραμμῆς ἀναλόγως ἔχουσι τοῖς ὑπ' αὐτῶν ἐμπεριλαμβανομένοις τόξοις τοῦ κύκλου. τῶν γὰρ αη, αγ, αλ, εὐθειῶν ἀγομένων, αἱ ηθ, γκ, λμ, ἀναλόγως ἔχουσι τοῖς βη, βγ, βλ, τόξοις. ὡς γὰρ τὸ βη, τόξον πρὸς τὸ βγ, ἔχει καὶ τὸ ηθ, μέρος τῆς αη, γραμμῆς πρὸς τὸ γκ, μέρος τῆς αγ, καὶ ὡς τὸ βγ, πρὸς τὸ βλ, τὸ γκ, πρὸς τὸ λμ. ὁμοίως δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου, ὡς τὸ β 13, τόξον, πρὸς τὸ β 12, τὸ αο, μέρος πρὸς τὸ αΓ, καὶ ὡς τὸ β 12, πρὸς τὸ β 11, τόξον, τὸ αΓ, μέρος πρὸς τὸ αΒ. εἶπε γὰρ ἐπὶ τῆς αβ, γραμμῆς περιφερομένης τὸ β, σημεῖον

ἐπὶ

ἐπὶ τὸ α, φέρεσθαι ὑποτεθῇ, εἴτε γοῦν τὸ α, ἐπὶ τὸ β, ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἡ μὲν αβ, γραμμὴ τὸν κύκλον περιγράψει, καὶ τὸ β, ἡ α, σημεῖον τὴν αὐτὴν αβ, διελεύσεται κατὰ τὴν ὑπόθεσιν. ὥστε φανερὸν ἐστι ὅτι γε τῶν αὐτῶν εὐθειῶν ὑπὸ τῆς Ἑλικοειδοῦς τεμνομένων γραμμῆς ἀριθμητικῶς εἰσιν ἀνάλογα, τάπε ἐντὸς τῆς Ἑλικοειδοῦς περιεχόμενα μέρη, καὶ τὰ ἐκτὸς ταύτης ἐναπολειπόμενα. τῶν μὲν γὰρ αβ, αθ, ακ, αμ, εὐθειῶν ἴση ὑπεροχῇ, ἡ μὲν αβ, τὴν αθ, ἡ δὲ αθ, τὴν ακ, καὶ ἡ ακ, τὴν αμ, ὑπερέχει, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁμοίως. τῶν δὲ θη, κγ, μλ, καὶ τῶν ἄλλων ἴσῃ ὁμοίως ὑπεροχῇ, ἡ μὲν θη, ὑπὸ τῆς κγ, ἡ δὲ κγ, ὑπὸ τῆς μλ, ὑπερέχεται, ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

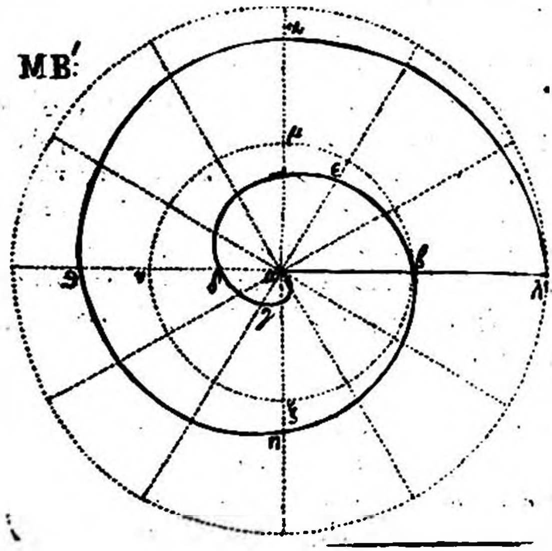
Πρότασις ΜΒ':

Τὸ ὑπὸ τῆς Ἑλικοειδοῦς γραμμῆς περιεχόμενον ἐμβαδὸν εὑρεῖν.

Ἔστω γραμμὴ Ἑλικοειδὴς ἡ α γ δ ε β η θ κ λ, καὶ ζητείσθω τὸ ὑπ' αὐτῆς περιεχόμενον ἐμβαδόν. Εὑρεθήτω δὴ α: τὸ ἐμβαδὸν τοῦ β μ ν ξ, κύκλου τῆς α: αὐτῆς περιστροφῆς, καὶ διαιρεθήτω εἰς μέρη τρία ἴσα, καὶ τὸ ἓν γ': μέρος τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἑξαπλασιασθήτω, τῷ δὲ γενομένῳ προστεθήτω τὸ γ': μέρος τοῦ κύκλου, καὶ τὸ συμποσούμενον ἴσον ἔσται τῷ ἐμβαδῷ τῷ ὑπὸ τῆς δοθείσης Ἑλικοειδοῦς περιεχομένῳ Γραμμῆς δυσὶ ταύταις περιστροφαῖς. εἰ δὲ καὶ γ': ἔχει περιστροφὴν ἡ Ἕλιξ, διπλασιασθήτω τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ γ': μέρους τοῦ κύκλου τῆς α: περιστροφῆς τῆς αὐτῆς Ἑλικοειδοῦς γραμμῆς, καὶ τῷ γενομένῳ προστεθήτω τὸ, τὸ γ': μέρος τοῦ αὐτοῦ κύκλου, καὶ τὸ τοῦ γ': ἑξαπλάσιον. εἰ δ' αὖθις καὶ δ': ἔχει περιστροφὴν, τριπλασιασθήτω τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ γ': μέρους τοῦ εἰρημένου κύκλου, καὶ τῷ γενομένῳ προστεθήτω τὸ γ': μέρος τοῦ αὐτοῦ κύκλου, καὶ τὸ τούτου ἑξαπλάσιον, ἔτι δὲ καὶ τὸ τοῦ ἑξαπλασίου διπλάσιον, καὶ τὸ συμποσούμενον ἴσον ἔσται τῷ ἐμβαδῷ τῷ ὑπὸ τῆς Ἑλικοειδοῦς περιεχομένῳ γραμμῆς τῇ ἑξαπλῇ περιστροφῇ, καὶ

Geom. Lib. 7. Fig. 44.

ΜΒ'



ἐπὶ

ἐπὶ τῶν ἄλλων γινέσθω ἀναλόγως ἡ ἔρευνα. καὶ γὰρ τὸν θαυμάσιον Ἀρχιμήδην τὸ ὑπὸ τῆς α: περιστροφῆς τῆς ἑλικοειδοῦς γραμμῆς περιεχόμενον ἐπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ γ': μέρει τοῦ κύκλου τῆς αὐτῆς περιστροφῆς, ὡς ἐν προτάσει ιδ': ὁ αὐτός φησι τοῦ περὶ Ἑλίκων αὐτοῦ φιλοπονήματος. τὸ δὲ ὑπὸ τῆς β': περιστροφῆς περιεχόμενον ἑξαπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῆς α: τὸ δὲ ὑπὸ τῆς γ': διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τῆς β': τὸ δὲ ὑπὸ τῆς δ': τριπλάσιον τοῦ αὐτοῦ, τουτέστι τοῦ ὑπὸ τῆς β': τὸ δὲ ὑπὸ τῆς ε: τετραπλάσιον, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ἀναλόγως κατὰ τὴν ί: πρότασιν τοῦ αὐτοῦ.

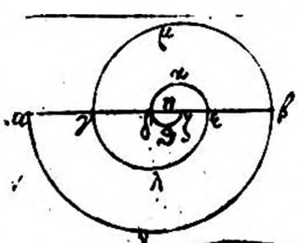
Ἄλλως εὐχερέστερον περὶ καταγραφῆς Ἑλικοειδοῦς Γραμμῆς.

Πρότασις ΜΓ':

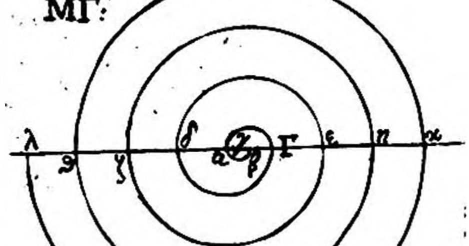
Περὶ τὴν δοθεῖσαν πεπερασμένην εὐθεῖαν Ἕλικα περιγράψαι.

Ἔστω εὐθεῖα γραμμὴ ἡ α β, περὶ ἣν γραπτέα ἐστὶν ἡ Ἕλιξ, καὶ διαιρεθήτω εἰς μέρη τέσσαρα ἴσα ἀλλήλοις τὰ α γ, γ δ, δ ε, ε β, διχοτομηθήτω δὲ τὸ δ ε, κατὰ τὸ ζ. ὁμοίως καὶ τὸ δ ζ, κατὰ τὸ η, εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ η, διαστήματι δὲ τῷ η ζ, γραφήτω τὸ δ θ ζ, τόξον, ἔπειτα κέντρῳ τῷ ζ, καὶ διαστήματι τῷ ζ δ, γραφήτω τὸ δ κ ε, τόξον. αὖθις κέντρῳ τῷ δ, καὶ διαστήματι τῷ δ ε, γραφήτω τὸ ε λ γ. ὁμοίως κέντρῳ τῷ ζ, καὶ διαστήματι τῷ ζ γ, γραφήτω τὸ γ μ β. τελευταῖον κέντρῳ τῷ δ, καὶ διαστήματι τῷ δ β, γραφήτω καὶ τὸ β ν α, τόξον, καὶ ἕξεις γραμμὴν Ἑλικοειδῆ τὴν α ν β μ γ λ ε κ δ θ ζ.

Geom. Lib. 7. Fig. 45.



ΜΓ':



Ἄλλως. Ἔστω εὐθεῖα γραμμὴ ἡ α β, ἐπ' ἄπειρον ἐκτεινομένη ἑκατέρωθεν, καὶ τμηθήτω τὸ α β, διάστημα δίχα κατὰ τὸ γ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ γ, διαστήματι δὲ τῷ γ β, γραφήτω τὸ α β, τόξον. Εἶτα ἀμοιβαδὸν εἰλημμένοις κέντροις τοῖς α β, διαστήμασι δὲ τοῖς ἐμπεριλαμβανομένοις μεταξὺ αὐτῶν τόπων καὶ τοῦ σημείου, καθ' ὃ ἕκαστον τόξον τῆς Ἕλικος ἅπτεται τῆς εὐθείας γραμμῆς, καταγράψεις Ἕλικα μείζονα ἐφ' ὅσον βούλει. Οἷον κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ β α, γραφήτω τὸ α Γ, τόξον, κέντρῳ δὲ τῷ α, καὶ διάστημα.

στήματι τῷ αΓ, γραφείτω τὸ Γδ, κέντρῳ τῷ β, καὶ διαστήματι τῷ βδ, γραφείτω τὸ δε· κέντρῳ τῷ α, καὶ διαστήματι τῷ αε, γραφείτω τὸ εζ, ὁμοίως κέντρῳ τῷ β, καὶ διαστήματι τῷ βζ, γραφείτω τὸ ζη, ὡσαύτως κέντρῳ τῷ α, καὶ διαστήματι τῷ αη, γραφείτω τὸ ηθ, πάλιν κέντρῳ τῷ β, καὶ διαστήματι τῷ βθ, γραφείτω καὶ τὸ θκ, καὶ αὖθις κέντρῳ τῷ α, καὶ διαστήματι τῷ ακ, γραφείτω τὸ κλ, τόξον, καὶ οὕτω καθεξῆς προϊὸν καταγραφήσεται Ἑλικοειδὴς γραμμὴ ἐπ' ἄπειρον, εἴτουν ἀπείροις συντιθεμένη περιστροφαῖς.

Ἰστέον δὲ, ὅτι ὅσον ἐγγύτερον ἀλλήλοις λαμβάνονται τὰ κατὰ μέσον τῆς εὐθείας γραμμῆς δύο σημεῖα, οἷα τὰ αβ, τοσοῦτον ἐν ἐλάττονι ἐπιπέδῳ μείζων καταγράφεται Ἕλιξ, μείζων γὰρ Ἕλιξ ἐστὶν ἡ πλείοσι περιστροφαῖς συγκειμένη.

Τέλος τοῦ Ἑβδόμου τῆς Γεωμετρίας Βιβλίου.

ΣΤΟΙ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

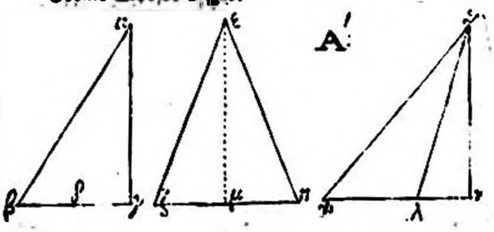
ΒΙΒΛΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Πρότασις Α'.

Τριγώνου οἱουδήποτε δοθέντος τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εὑρεῖν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ ζητείσθω τὸ τούτου ἐμβαδόν. Εἰ μὲν οὖν τὸ αβγ, δοθὲν τρίγωνον ὀρθογώνιόν ἐστι, διαιρεθήτω ἡ μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν αὐτοῦ γωνίαν πλευρῶν, ὡς ἐν τούτῳ ἡ βγ, δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ πολλαπλασιασθήτω ἡ δγ, ἐπὶ τὴν αγ, καὶ ἀνάπαλιν, καὶ ὁ γενόμενος ἀριθμὸς τὸ τοῦ αβγ, τριγώνου ἐμβαδὸν παραστήσει. Οἷον ἔστω ἡ μὲν αγ, ποδῶν φέρ' εἰπεῖν ἕξ, ἡ δὲ βγ, ὀκτώ, ἡ δγ, πάντως ἔσται τεσσάρων, πολλαπλασιαζομένου δὲ τοῦ ἓξ ἐπὶ τὸν 4, ἢ τοῦ 4, ἐπὶ τὸν 6,

Geom. Lib. 8. Fig. 1.



γενήσεται ὁ 24. Λέγω δὴ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αβγ, δοθέντος τριγώνου περιέχειν πόδας 24. κατὰ γὰρ τὴν ιβ': τοῦ γ': τοῦ παρ: τὸ αβγ, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς ἡμισείας τῆς αὐτοῦ βάσεως, ταυτέστι τῆς δγ, καὶ τοῦ ὕψους δηλ: τῆς αγ, ἀλλὰ καὶ ὁ 24. ἀριθμὸς γέγονεν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς αγ, ἐπὶ τὴν δγ, τοῦ ἄρα αβγ, δοθέντος ὀρθογωνίου τριγώνου, τὸ ἐμβαδὸν ποδῶν ἐστιν εἰκοσιτεσσάρων.

Εἰ δὲ τὸ τρίγωνον ἀμβλυγώνιον ᾖ, ἢ ὀξυγώνιον, εἴτε ἰσοσκελές, εἴτε σκαληνόν, ὡς τὰ εζη, θκλ. Πιπτέτω κάθετος ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τριγώνου ἐπὶ τῆς αὐτοῦ βάσεως, ὡς αἱ εμ, θν, εἶτα τμηθήτω ἡ τοῦ τριγώνου βάσις δίχα, καὶ πολλαπλασιασθήτω τὸ τοῦ τριγώνου ὕψος ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς βάσεως, καὶ ὁ γενόμενος ἀριθμὸς παραστατικὸς ἔσται τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου. ἐὰν γὰρ ἡ εμ, πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ζη, ἢ ἡ θν, ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς κλ, γνωσθήσεται τὸ τοῦ εζη, ἢ θκλ, τριγώνου ἐμβαδόν, ὁ λόγος ὁ αὐτός.

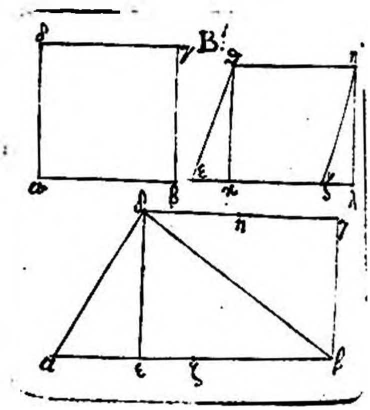
Πρότασις Β'.

Παραλληλογράμμε οἱεδήποτε δοθέντος τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εὑρεῖν.

Ἔστω α'. παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ αβγδ, καὶ ζητείσθω τὸ τούτου ἐμβαδόν. Πολλαπλασιαθήτω δὴ ἡ δα, ἐπὶ τὴν αβ, καὶ ὁ γινόμενος παραστατικὸς ἔσται τοῦ ἐμβαδοῦ τούτου, ἅπαν γὰρ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον κατὰ τὸν λ'. ὅρον τοῦ παρ: ὑπὸ δύο εὐθειῶν περιέχεται τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν.

Ἔστω β'. παραλληλόγραμμον ῥομβοειδὲς τὸ εζηθ. Εἰς εὕρεσιν δὲ τοῦ ἐμβαδοῦ τούτου, ἐξαχθήτω ἡ εζ, βάσις κατὰ τὸ συνεχὲς, καὶ πιπτέτωσαν κάθετοι ἐπ' αὐτῆς αἱ θκ, ηλ, καὶ συσταθήσεται πάντως τὸ θκλη, ὀρθογώνιον. Εἶτα πολλαπλασιαθήτω ἡ θη, ἐπὶ τὴν θκ, καὶ γνωσθήσεται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ θκλη, ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα. ἀλλὰ τὸ θκλη, ἴσον ἐστὶ τῷ θεζη, κατὰ τὴν λε': τοῦ α'. τοῦ Στοιχειωτοῦ, πολλαπλασιαζομένης ἄρα τῆς θη, ἐπὶ τὴν θκ, γνωσθήσεται καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ θεζη, δοθέντος παραλληλογράμμου.

Geom. Lib. 8. Fig. 2.



Πρότασις Γ'.

Τραπεζίου δοθέντος, οὗ αἱ δύο πλευραὶ τῶν ἀπεναντίον παράλληλοί εἰσι, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εὑρεῖν.

Ἔστω τραπέζιον τὸ αβγδ, ἔχον παραλλήλους τὰς αβ, δγ, πλευρὰς, καὶ ζητείσθω τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. Πιπτέτω δὴ κάθετος ἀπὸ τοῦ δ, ἐπὶ τῆς αβ, ἡ δε, καὶ τμηθήτω δίχα ἡ μὲν αβ, κατὰ τὸ ζ, ἡ δὲ δγ, κατὰ τὸ η. Εἶτα συναφθήτωσαν αἱ αζ, δη, καὶ τὸ γενόμενον ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιαθήτω ἐπὶ τὴν δε, καὶ ἔσται τὸ ζητούμενον. Ἐὰν γὰρ ἡ αζ, πολλαπλασιαθῇ ἐπὶ τὴν δε, τὸ γενόμενον παραστατικὸν ἔσται τοῦ αβδ, τριγώνου κατὰ τὴν α': τοῦ παρόντος, πολλαπλασιαζομένης δὲ τῆς δη, ἐπὶ τὴν αὐτὴν δε, τὸ γενόμενον παρέξει τὸ τοῦ δβγ, τριγώνου ἐμβαδόν. ἀλλ' ἐάν τε χωρὶς αἱ αζ, δη, ἐπὶ τὴν δε, πολλαπλασιαθῶσιν, ἐάν τε καὶ ὡς μία, τὸ αὐτὸ γίγνεται, πάντως γε τὸ γιγνόμενον ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν αζ, δη, ὡς μιᾶς ἐπὶ τὴν δε, παρίστησι τὸ ἐμβαδὸν τῶν αβγ, δβγ, τριγώνων. τοῖς δὲ αβγ, δβγ, τριγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ αβγδ, τραπέζιον, ἄ-

ρα

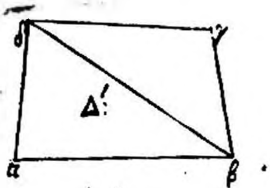
ρα συναπτομένων τῶν α ζ, δ η, καὶ τοῦ γινομένου ἐπὶ τὴν δ ε, πολλαπλασιαζομένου, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ α β γ δ, δοθέντος τραπεζίου δηλοῦται.

Πρότασις Δ'.

Τραπεζίου οἱουδήποτε δοθέντος, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εὑρεῖν.

Δοθήτω τραπέζιον τὸ α β γ δ, καὶ ζητηθήτω τὸ αὐτοῦ ἐμβαδόν. Διαιρεθήτω δὴ ὑπὸ τῆς δ β, διαγωνίου διαμέτρου εἰς δύο τρίγωνα τὰ α β δ, δ β γ, καὶ εὑρεθήτω διὰ τῆς α: τοῦ παρόντος τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τε α β δ, καὶ τοῦ δ β γ, τριγώνου, καὶ τὸ γινόμενον ἐξ ἀμφοῖν συναπτομένων ἔσται ἴσον τῷ ἐμβαδῷ τοῦ α β γ δ, δοθέντος τραπεζίου. Ἴσον γάρ ἐστι τὸ αὐτὸ τραπέζιον τοῖς α β δ, δ β γ, τριγώνοις.

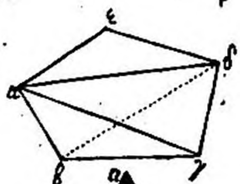
Geom. Lib. 8. Fig. 3.



Πρότασις Ε'.

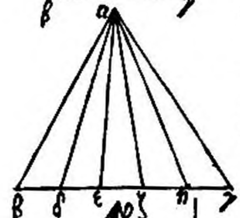
Πολυγώνου οἱουδήποτε δοθέντος τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εὑρεῖν.

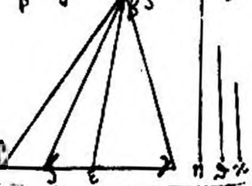
Δοθήτω πολύγωνον τὸ α β γ δ ε, καὶ ζητηθήτω τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. Διαιρεθήτω δὴ τὸ δοθὲν α β γ δ ε, πολύγωνον εἰς τρίγωνα τὰ β γ δ, δ β α, α δ ε, καὶ εὑρεθήτω διὰ τῆς α: τοῦ παρ: τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν β γ δ, δ β α, α δ ε, τριγώνου, καὶ τὰ εὑρεθέντα συναφθήτωσαν εἰς ἕν, καὶ τὸ γινόμενον ἴσον ἔσται τῷ δοθέντι α β γ δ ε, πολυγώνῳ. Ἴσον γάρ ἐστι τοῦτο τοῖς β γ δ, δ β α, α δ ε, τριγώνοις.



Πρότασις ϛ'.

Τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς ὁσαδηποτοῦν μέρη διελεῖν κατὰ τὸν δοθέντα λόγον ἀπὸ τῆς δοθείσης αὐτοῦ γωνίας τῶν διαιρετικῶν ἀγομένων γραμμῶν.





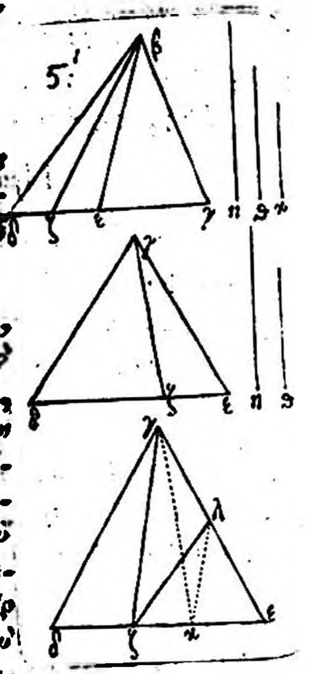
Δοθήτω α: τρίγωνον τὸ α β γ, καὶ ἔστω τοῦτο διελεῖν εἰς μέρη ἴσα πέντε ἀπὸ τῆς ὑπὸ β α γ, γωνίας τῶν διαιρετικῶν ἀγομένων γραμμῶν. Διαιρεθήτω δὴ ἡ β γ, εἰς τὰ δοθέντα μέρη κατὰ τὰ δ, ε, ζ, η, διὰ τῆς ϛ': τῆς α: τοῦ παρόντος, καὶ ἐπιζευχθήτωσαν αἱ α δ, α ε, α ζ, α η, καὶ διαιρεθήσεται τὸ α β γ, δοθὲν τρίγωνον εἰς τὰ δοθέντα μέρη, κατὰ γὰρ τὴν α: τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχ: τὰ α β δ, α δ ε, α ε ζ, α ζ η, καὶ α η γ, τρίγωνα ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ αὐτῶν βάσεις β δ, δ ε, ε ζ, ζ η, η γ, ἀλλ' αἱ β δ, δ ε, καὶ λοιπαὶ βάσεις ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις κατὰ τὴν κατασκευὴν, ἄρα καὶ τὰ α β δ,

α δ ε,

αδε, ϗ λοιπὰ τρίγωνα ἴσα ἔσαι ἀλλήλοις, καὶ ἑπομένως τὸ αβγδ τρίγωνον διῄρηται εἰς μέρη ἴσα ἀλλήλοις τρία κατὰ τὸ προσαχθέν.

Δοθήτω β': τὸ βγδ, τρίγωνον, ϗ ἔσω διελεῖν τοῦτο εἰς μέρη τρία ἔχοντα λόγον, ὃν 6, 3, 1. ἢ τὸ η, πρὸς τὸ θ, ϗ τὸ θ, πρὸς τὸ κ. Διαιρεθήτω δὴ ἡ γδ, εἰς τὰ δοθέντα μέρη διὰ τῆς προειρημένης ϛ': τὰ γε, εζ, ζδ, ϗ ἐπιζευχθῶσαν αἱ βε, βζ, ϗ ἔσαι τὸ ἐπιταχθέν. κατὰ γὰρ τὴν ῥηθεῖσαν α': τὰ βγε, βεζ, βζδ, τρίγωνα ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ γε, εζ, ζδ, αὐτῶν βάσεις, ἀλλ' αἱ γε, εζ, ζδ, ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὡς ὁ 6, 3, 1. ἢ αἱ η θ κ, ἄρα τὸ βγδ, τρίγωνον διῄρηται εἰς μέρη τρία κατὰ τὸν δοθέντα λόγον.

Geom. Lib. 8. Fig. 9.



Πρότασις Ζ'.

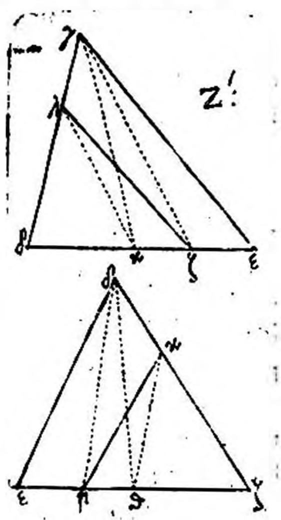
Τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς δύο μέρη διελεῖν, ἔχοντα τὸν δοθέντα λόγον, ἀγομένης τῆς διαιρετικῆς ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου ἐπὶ μιᾶς τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν.

Δοθήτω τὸ γδε, τρίγωνον, σημεῖον δὲ ἐπὶ τῆς δε, πλευρᾶς τὸ ζ, ϗ ἔσω διελεῖν τοῦτο τὸ γδε, τρίγ: ἀπὸ τοῦ ζ, σημείου εἰς δύο μέρη, ὥστε ἔχειν πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ η, θ, εὐθεῖαι. Τμηθήτω δὴ ἡ δε, εἰς μέρη δύο ἀνάλογα ταῖς η, θ. Ἐπεὶ δὲ τοῦτο τριχῶς ἐνδέχεται συμβῆναι. ἢ γὰρ τὸ τῆς διαιρέσεως σημεῖον συμπεσεῖται τῷ ζ, ἢ πεσεῖται μεταξὺ τοῦ ζ, καὶ ε, ἢ γοῦν μεταξὺ τῶν δ, καὶ ζ. Συμπιπτέτω α: τῷ ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γζ, ϗ γενήσεται τὸ προσαχθέν. Τὸ γὰρ δζγ, ἕξει πρὸς τὸ ζγε, τρίγωνον ὡς ἡ η, πρὸς τὴν θ, κατὰ γὰρ τὴν α: τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχ: τὰ δγζ, ζγε, τρίγωνα ἔχουσιν ὡς αἱ δζ, ζε, βάσεις, αὗται δὲ ὡς αἱ η, θ. Πιπτέτω β': τὸ τῆς διαιρέσεως σημεῖον μεταξὺ τῶν ζ, ϗ ε, ὡς τὸ κ, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ γζ, ϗ ταύτῃ παράλληλος ἤχθω ἡ κλ. εἶτα ἐπεζεύχθω ἡ ζλ, ϗ τμηθήσεται τὸ γδε, τρίγ: εἰς τὰ δζγ, ζλγ, ϗ ζελ, μέρη ἔχοντα πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ η, θ. ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς γκ, τὰ δκγ, κγε, τρίγ: ἔχουσιν, ὡς αἱ δκ, κε, βάσεις κατὰ τὴν εἰρημένην α: τοῦ ϛ': τοῦ αὐτοῦ, κατὰ δὲ τὴν λζ': τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ, τὰ κλγ, λκζ, τρίγωνα ἴσα εἰσίν. ἔχουσι γὰρ τὴν αὐτὴν βάσιν κλ, ϗ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσὶ παραλλήλοις ταῖς κλ, ζγ, κοινοῦ δὲ λαμβανομένου τοῦ κελ, ἴσα εἰσὶ καὶ τὰ ζελ, κεγ, τρίγωνα, ὥστε τὸ ὅλον δεγ, τρίγ: τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς

ἑκά-

ἑκάτερον τῶν ζ ε λ, κ ε γ, τριγώνων, καὶ διαιρέσει τὸ δ ζ λ γ, τραπέζιον ἔχει πρὸς τὸ ζ ε λ, τρίγωνον, ὡς τὸ δ κ γ, τριγ: πρὸς τὸ κ ε γ, ἀλλὰ τὸ δ κ γ, πρὸς τὸ κ ε γ, ἔχει τὸν δοθέντα λόγον, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ τὸ δ ζ λ γ, τραπέζιον τὸν δοθέντα ἔχει λόγον πρὸς τὸ ζ ε λ, τριγ: Πιπτέτω γ: τὸ κ, σημεῖον μεταξὺ τῶν δ, καὶ ζ. Ἐπιζεύχθω δὴ ἡ ζ γ, καὶ ταύτῃ ἤχθω παράλληλος ἡ κ λ, εἶτα ἐπιζεύχθω, καὶ ἡ ζ λ, καὶ τὸ δ ζ λ, τρίγωνον ἕξει πρὸς τὸ ζ ε γ λ, τραπέζιον ὡς ἡ η, πρὸς τὴν θ. ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς γ κ, ἔσται τὸ δ κ γ, πρὸς τὸ κ ε γ, ὡς ἡ η, πρὸς τὴν θ, κατὰ τὴν α: τοῦ εἰρημένου ς: κατὰ δὲ τὴν ῥηθεῖσαν λζ': τὰ κ λ γ, λ κ ζ, τρίγωνα ἴσα ἐστί. κοινοῦ δὲ λαμβανομένου τοῦ δ κ λ, ἴσα ἐστὶν ἔτι καὶ τὰ δ κ γ, δ ζ λ, καὶ ἑπομένως τὸ γ δ ε, ὅλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἑκάτερον τῶν δ κ γ, δ ζ λ, τριγώνων κατὰ τὴν θ': τοῦ ε: Εὐκλ:, ὥστε καὶ διαιρέσει τὸ δ κ γ, ἔχει πρὸς τὸ κ ε γ, τρίγωνον ὡς τὸ δ ζ λ, πρὸς τὸ ζ ε γ λ, τραπέζιον. ἀλλὰ τὸ δ κ γ, ἔχει τὸν δοθέντα λόγον, ὡς δέδεικται, πρὸς τὸ κ ε γ, ἄρα καὶ τὸ δ ζ λ, τριγ: τὸν δοθέντα ἔχει λόγον πρὸς τὸ ζ ε λ γ, τραπέζιον. Τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 8. Fig. 5.



Πρότασις Η.

Τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς δύο ἴσα διελεῖν ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἐπὶ μιᾶς τῶν αὐτοῦ πλευρῶν σημείου.

Δοθήτω τὸ δ ε ζ, τρίγωνον, ὃ δεῖ δίχα διελεῖν. σημεῖον δὲ τὸ η, ἐπὶ τῆς ε ζ, αὐτοῦ πλευρᾶς. Τμηθήτω δὴ ἡ ε ζ, δίχα κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ δ θ, δ η, παράλληλος δὲ τῇ δ η, ἤχθω ἡ θ κ. Εἶτα ἐπιζεύχθω ἡ η κ, καὶ τὸ δ ε η κ, τραπέζιον ἴσον ἔσται τῷ κ η ζ, τριγώνῳ. τὰ γὰρ θ κ δ, κ θ η, τρίγωνα ἴσα ἐστὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν λζ': κοινοῦ δὲ λαμβανομένου τοῦ θ ζ κ, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ θ ζ δ, κ ζ η, τρίγωνα. ὥστε τὸ ὅλον δ ε ζ, τὸν αὐτὸν ἔχει πρὸς ἑκάτερον λόγον, καὶ διαιρέσει, ὡς τὸ ε θ δ, πρὸς τὸ θ ζ δ, ἔχει καὶ τὸ ε η κ δ, τραπέζιον πρὸς τὸ η ζ κ, τρίγωνον, ἀλλὰ τὸ ε θ δ, ἴσον ἐστὶ τῷ θ ζ δ, τριγ: ἄρα καὶ τὸ ε η κ δ, τραπέζιον ἴσον ἐστὶ τῷ η κ ζ, τριγώνῳ, ὅπερ καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρό-

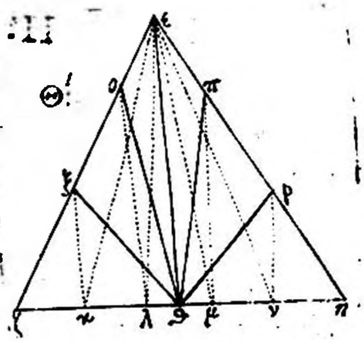
Πρότασις Θʹ:

Τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς ὁσαδηποτοῦν μέρη διελεῖν ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου ἐπὶ μιᾶς τῶν αὐτῶν πλευρῶν.

Δοθήτω τὸ ε ζ η, τρίγωνον, καὶ ἔστω διελεῖν τοῦτο εἰς μέρη ἴσα πέντε ἀπὸ τοῦ θ, σημείου. Διαιρεθήτω δὴ ἡ ζ η, εἰς πέντε ἴσα μέρη τὰ ζ κ, κ λ, λ μ, μ ν, ν η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ε θ, ἀπὸ δὲ τῶν κ λ μ ν, σημείων ἤχθωσαν παράλληλοι τῇ θ ε, αἱ κ ξ, λ ο, μ π, ν ρ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θ ξ, θ ο, θ π, θ ρ. Λέγω οὖν τὰ θ ζ ξ, ξ θ ο, θ ο π, π θ ρ, ρ θ η, ἴσα εἶναι ἀλλήλοις· ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ε κ, ε λ, ε μ, ε ν.

Δείκνυται. τὸ ε ζ κ, πέμπτον ἐστὶ μέρος τοῦ ε ζ η, ἔχει γὰρ πρὸς αὐτὸ ὡς ἡ ζ κ, πρὸς τὴν ζ η, κατὰ τὴν αʹ: τοῦ ϛʹ: τοῦ Στοιχ: ἀλλὰ τῷ ε ζ κ, ἴσον ἐστὶ τὸ ζ θ ξ, ἄρα καὶ τὸ ζ θ ξ, εʹ: ἐστὶ μέρος τοῦ ε ζ η. ὅτι δὲ τὸ ζ θ ξ, ἴσον ἐστὶ τῷ ε ζ κ, δῆλον. κατὰ γὰρ τὴν λζʹ: τοῦ αʹ: τοῦ αὐτοῦ, τὰ ξ κ ε, ξ κ θ, τρίγωνα ἴσα ἐστί. κοινοῦ δὲ προσκειμένου τοῦ ξ ζ κ, ἴσα εἰσὶ καὶ τὰ ε ζ κ, ζ θ ξ. Αὖθις ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ο ζ λ, παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ο λ, ἤχθη παράλληλος ἡ ξ κ, δῆλον, ὅτι ἡ ο ξ, πρὸς τὴν ζ ξ, ἔχει ὡς ἡ κ λ, πρὸς τὴν κ ζ, κατὰ τὴν βʹ: τοῦ ϛʹ: αὐτοῦ, ἴση δὲ ἡ κ λ, τῇ κ ζ, ἄρα καὶ ἡ ο ξ, ἴση ἐστὶ τῇ ξ ζ, ἀλλ' ὡς ἡ ο ξ, πρὸς τὴν ξ ζ, ἔχει καὶ τὸ θ ο ξ, πρὸς τὸ θ ξ ζ, κατὰ τὴν αʹ: τοῦ ϛʹ: τοῦ αὐτοῦ ἄρα τὰ θ ο ξ, θ ξ ζ, τρίγωνα ἴσα ἐστί, τὸ δὲ θ ξ ζ, εʹ: ἐστὶ μέρος τοῦ ὅλου ε ζ η, τριγ: ὡς δέδεικται, εʹ. ἄρα μέρος ἐστὶ καὶ τὸ θ ο ξ, τοῦ αὐτοῦ ε ζ η. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὰ θ ρ η, θ π ρ, ἴσα, καὶ τούτων ἑκάτερον εʹ: εἶναι μέρος τοῦ ε ζ η, ὅλου. Ὅτι δὲ καὶ τὸ θ ο ε π, τραπέζιον εʹ: ἐστὶ μέρος τοῦ αὐτοῦ ε ζ η, τριγώνου, δῆλον καὶ τοῦτο, κατὰ γὰρ τὴν ῥηθεῖσαν λζʹ: τὸ θ ο ε, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ε λ θ, καὶ τὸ θ π ε τῷ ε μ θ, ὥστε ὅλον τὸ θ ο ε π, ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ ε λ μ, ἀλλὰ τὸ ε λ μ, εʹ: ἐστὶ μέρος τοῦ ε ζ η, ἄρα καὶ θ ο ε π, εʹ: ἐστὶ μέρος τοῦ αὐτοῦ ε ζ η, δέδεικται δὲ καὶ ἕκαστον τοῦ ξ ζ θ, θ ξ ο, θ π ρ, θ ρ η, εʹ: εἶναι μέρος τοῦ αὐτοῦ, ἄρα τὸ ε ζ η, τρίγωνον διήρηται εἰς μέρη πέντε ἴσα.

Geom. Lib. 8. Fig. 6.



Τοῦτον τὸν τρόπον ἔξεστι διελεῖν τὸ δοθὲν τρίγωνον καὶ εἰς πλείω, ἢ καὶ ἐλάττω μέρη.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι ἀπὸ τοῦ δοθέντος τριγώνου δυνατὸν ἀφελεῖν τὸ προσταχθὲν οἱονδήποτε μέρος. Κείσθω γὰρ ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ ε ζ η, δοθέντος τριγώνου

γώνου

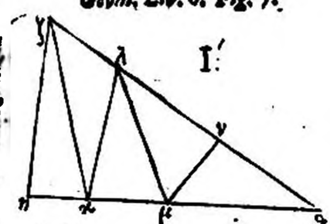
γώνου μέρος ε': Εἰλήφθω δὴ τῆς αὐτῆς βάσεως μέρος ε': τὸ ζ κ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ, ἤχθω παράλληλος τῇ ι θ, ἡ κ ξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ θ ξ, καὶ ἔσται τὸ ἐπιταχθέν.

Πρότασις Ι'.

Τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς ὁσαδηποτοῦν μέρη ἴσα ἀλλήλοις διελεῖν ἀπὸ διαφόρων σημείων τῶν εὐθειῶν ἀγομένων.

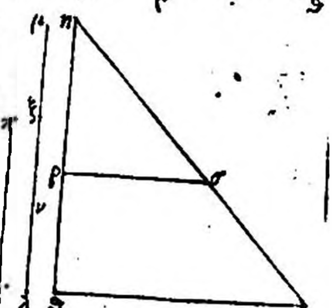
Ἔστω γοῦν διελεῖν τὸ ζ η θ, τρίγωνον εἰς μέρη ἴσα ἀλλήλοις πέντε. Ληφθήτω α': τὸ η κ, ε': μέρος τῆς η θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζ κ. εἶτα εἰλήφθω ἡ ζ λ, δ': μέρος τῆς ζ θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κ λ, λαμβανομένης δὲ καὶ τῆς κ μ, αὐτῇ γ': μέρους τῆς κ θ, ἐπεζεύχθω ἡ λ μ. εἶτα εἰλήφθω καὶ τῆς λ θ, τὸ ἥμισυ ἡ λ ν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ μ ν, καὶ διαιρεθήσεται τὸ ζ η θ, δοθὲν τρίγωνον εἰς πέντε ἴσα μέρη κατὰ τὸ προσταχθέν. κατὰ γὰρ τὴν α': τοῦ ς': τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ ζ η κ, ἔχει πρὸς τὸ ζ η θ, ὡς ἡ η κ, πρὸς τὴν η θ, ἀλλ' ἡ η κ, ε': ἐστὶ μέρος τῆς η θ, ἄρα καὶ τὸ ζ η κ, ε': ἐστὶ μέρος τοῦ ζ η θ. διὰ τῆς αὐτῆς δείκνυται καὶ τὸ μὲν ζ κ λ, δ': μέρος εἶναι τοῦ ζ κ θ, τὸ δὲ κ λ μ, γ': τοῦ λ κ θ, καὶ τὸ λ μ ν, ἥμισυ τοῦ λ μ θ, ὥστε τὸ ζ η θ, δοθὲν τρίγωνον διῄρηται εἰς μέρη πέντε. Ὅτι δὲ καὶ ἴσα, δῆλον. ἀφαιρουμένου γὰρ ἀπὸ τοῦ ὅλου ζ η θ, τὸ ε': μέρος ζ η κ, τὸ λοιπὸν ζ κ θ, περιέχει τοιαῦτα μέρη, οἷον τὸ ζ η κ, τέσσαρα. διὸ καὶ εἰς τέσσαρα διαιρεῖται. ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δυνατὸν διελεῖν τὸ δοθὲν τρίγωνον καὶ εἰς πλείω, ἢ ἐλάττω μέρη τῶν δοθέντων, ἴσα ἀλλήλοις.

Geom. Lib. 8. Fig. 7.



Πρότασις ΙΑ'.

Τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς δύο μέρη διελεῖν κατὰ τὸν δοθέντα λόγον, ἀγομένης τῆς γραμμῆς παραλλήλως μιᾷ τῶν αὐτοῦ πλευρῶν.



Ἔστω διελεῖν τὸ η θ κ, τρίγωνον εἰς μέρη δύο, ὥστε τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάττονος εἶναι διπλάσιον, ἀγομένης τῆς γραμμῆς παραλλήλως τῇ θ κ. Εἰλήφθω δὴ ἡ λ μ, τυχοῦσα γραμμὴ, καὶ τμηθήτω εἰς μέρη τρία ἴσα, τὰ λ ν, ν ξ, ξ μ, καὶ εὑρηθήτω μέση ἀνάλογος τῶν λ μ, λ ν, ἡ ο π, διὰ τῆς θ': τοῦ δ': τοῦ παρόντος. Εἶτα γενέσθω ὡς ἡ λ μ, πρὸς τὴν ο π, ἡ θ η, πρὸς τὴν η ρ, ἀπὸ δὲ τοῦ ρ, ἤχθω παράλληλος τῇ θ κ, ἡ ρ σ, καὶ τὸ θ ρ σ κ, τραπέζιον διπλάσιον ἔσται τοῦ η ρ σ, τριγώνου, κατὰ γὰρ τὴν δ':

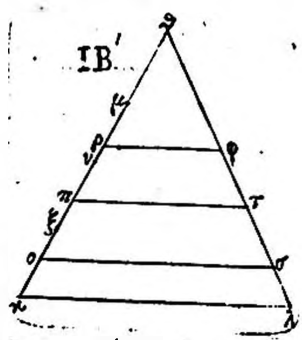
τῆς ϛ′: τῆς Στοιχειώσεως, τὰ ηρυ, ηθκ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν, ὅτι καὶ ἰσογώνια· ὥστε τὸ ηθκ, πρὸς τὸ ηρσ, ἐνδιπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἤπερ ἡ θη, πρὸς τὴν ηρ. ὡς δὲ ἡ θη, πρὸς τὴν ηρ, ἔστι καὶ ἡ λμ, πρὸς τὴν οπ. ἄρα τὸ ηθκ, τρίγωνον ἐνδιπλασίονι λόγῳ ἐστὶν πρὸς τὸ ηρυ, ἤπερ ἡ λμ, πρὸς τὴν οπ, ἔστι δὲ καὶ ἡ λμ, πρὸς τὴν λν, ἐνδιπλασίονι λόγῳ ἤπερ πρὸς τὴν οπ, ἄρα ὡς ἡ λμ, πρὸς τὴν λν, τὸ ηθκ, πρὸς τὸ ηρσ. ἐπεὶ δὲ ἡ λμ, τριπλασία ἐστὶ τῆς λν, κατὰ τὴν διαίρεσιν, πάντωςγε καὶ τὸ ηθκ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ηρσ, καὶ ἑπομένως τὸ ρθκυ, διπλάσιον τοῦ αὐτοῦ ηρυ, τριγώνου. Τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΒ′:

Τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς ὁσαδηποτοῦν μέρη διελεῖν τῶν διαιρετικῶν ἀγομένων εὐθειῶν παραλλήλως μιᾷ τινι τῶν αὐτοῦ πλευρῶν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ θκλ, καὶ κείσθω τοῦτο διελεῖν εἰς μέρη ἴσα ἀλλήλοις τέσσαρα. Διαιρεθήτω δὴ ἡ θκ, αὐτοῦ πλευρὰ εἰς μέρη ἴσα τέσσαρα τὰ θμ, μν, νξ, ξκ. Εἶτα εὑρεθήτω κατὰ τὴν θ′: τοῦ α′: τοῦ παρόντος, μέση ἀνάλογος τῶν μὲν θκ, θξ, ἡ θο, τῶν δὲ θκ, θν, ἡ θπ, τῶν δὲ θκ, θμ, ἡ θρ, καὶ ἀπὸ τῶν οπρ, σημείων ἀχθήτωσαν εὐθεῖαι παράλληλοι τῇ κλ, αἱ οσ, πτ, ρφ, καὶ διαιρεθήσεται τὸ δοθὲν θκλ, τρίγωνον εἰς μέρη ἴσα ἀλλήλοις τέσσαρα, τὰ οκλσ, ποστ, ρπτφ, θρφ. Ἐπεὶ γὰρ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι θκ, θο, θξ, ἀνάλογόν εἰσι, πάντωςγε κατὰ τὴν α′: τοῦ γ′: τοῦ παρόντος, τὸ ἐπὶ τῆς α′: τουτέστι τὸ θκλ, πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς β′: τὸ θοσ, ἔχει ὡς ἡ θκ, α′: πρὸς τὴν θξ, γ′: ἤτοι ὡς 4, πρὸς 3. Αὖθις ἐπεὶ αἱ θκ, θπ, θν, ἀνάλογόν εἰσι, πάντωςγε τὸ θκλ, κατὰ τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ θπτ, ἔχει, ὡς ἡ θκ, πρὸς τὴν θν, τουτέστιν ὡς 4, πρὸς 2. Ἐπεὶ δὲ τελευταῖον ἀνάλογόν εἰσιν αἱ θκ, θρ, θμ, τὸ θκλ, πάντως ἔχει πρὸς τὸ θρφ, ὡς ἡ θκ, πρὸς τὴν θμ, ἤτοι ὡς 4, πρὸς 1, ἀλλ᾽ ἡ θκ, διῄρηται εἰς μέρη ἴσα ἀλλήλοις 4, ἄρα καὶ τὸ θκλ, τρίγωνον διῃρημένον ἐστὶν εἰς μέρη 4, ἴσα ἀλλήλοις. ὅπερ ἦν τὸ προσταχθέν.

m. Lib. 8. Fig. 8.

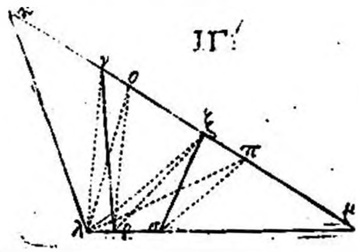


Πρότασις ΙΓ':

Τὸ δοθὲν τρίγωνον ἀπὸ τῶν δοθέντων ἐπὶ μιᾶς τῶν αὐτοῦ πλευρῶν σημείων εἰς ὁσαδηποτοῦν μέρη ἴσα διελεῖν.

Δεδόσθω τρίγωνον τὸ κλμ, σημεῖα δὲ τὰ ν ξ, καὶ ἔστω τοῦτο διελεῖν ἀπὸ τῶν ν, καὶ ξ, σημείων εἰς μέρη ἴσα ἀλλήλοις τρία. Τμηθήτω δὲ ἡ κμ, ἐφ' ἧς τὰ δοθέντα ἐστὶ σημεῖα, εἰς τρία μέρη ἴσα ἀλλήλοις τὰ κο, οπ, πμ, καὶ ἐπιζευχθῶσαν αἱ λν, λο, λξ, λπ, κἂν μὲν τὰ ο, καὶ π, σημεῖα συμπέσωσι τοῖς ν, καὶ ξ, ἔσται τὸ ἐπιταχθὲν κατὰ τὴν α: τοῦ ϛ: τῶν Στοιχ: εἰ δὲ μή, ἤχθω ἀπὸ μὲν τοῦ ο, παράλληλος τῇ λν, ἡ ορ, ἀπὸ δὲ τοῦ π, παράλληλος τῇ λξ, ἡ πσ, καὶ ἐπιζευχθῶσαν αἱ νρ, ξσ, καὶ διὰ τῶν νρ, ξσ, εὐθειῶν διαιρεθήσεται τὸ κλμ, δοθὲν τρίγωνον εἰς τρία μέρη ἴσα τὰ κλρν, νρσξ, ξσμ, ἐπιζευχθεισῶν γὰρ τῶν λο, λπ, τὰ κλο, λοπ, λπμ, τρίγωνα ἴσα εἰσίν. ἔχουσι γὰρ ὡς αἱ βάσεις· αὗται δὲ

Geom. Lib. 8. Fig. 9.



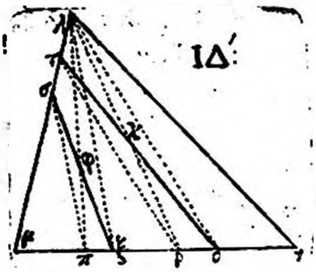
ἴσαι ἀλλήλαις εἰλήφθησαν αἱ κο, οπ, πμ, κατὰ τὴν α: τοῦ ϛ: τῶν Στοιχ: κατὰ δὲ τὴν λζ: τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ τὰ λνο, νλρ τρίγωνα ἴσα εἰσί. κοινοῦ δὲ τοῦ κλν, λαμβανομένου, ἔσται καὶ τὸ κλρν, τραπέζιον ἴσον τῷ κλο, τριγώνῳ, τοῦτο δὲ γ': μέρος ἐστὶ τοῦ κλμ, δοθέντος τριγώνου, ἄρα καὶ τὸ κλρν, τραπέζιον τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ ξσμ, γ': εἶναι μέρος τοῦ κλμ, τὰ γὰρ πσλ, σπξ, τρίγωνα ἴσα ἐστὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν λζ': κοινοῦ δὲ τοῦ πσμ, λαμβανομένου ἔσται τὸ ξσμ, ἴσον τῷ πλμ, τρίτῳ ὄντι τοῦ κλμ, λείπεται ἄρα καὶ τὸ νρσξ, τραπέζιον γ': εἶναι μέρος τοῦ δοθέντος κλμ, τριγώνου. Τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΔ':

Τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς τρία μέρη ἄνισα διελεῖν κατὰ τὴν δοθεῖσαν ἀναλογίαν ἀπὸ τῶν δοθέντων σημείων ἐπὶ μιᾶς τῶν αὐτοῦ πλευρῶν.

Δοθήτω τρίγωνον τὸ λμν, καὶ ἔστω τοῦτο διελεῖν ἀπὸ τῶν ξ, καὶ ο, σημείων εἰς μέρη τρία, ὧν τὸ α': οὗ τέταρτον ἔσται τοῦ ὅλου, τὸ δὲ β': οὗ γ': καὶ τὸ γ': ὅλον τὸ λειπόμενον. Τμηθήτω δὴ ἡ μν, εἰς τρία μέρη, τὰ πμ, πρ, ρν, ὥστε τὸ μὲν μπ, οὗ δ': εἶναι τῆς ὅλης μν, τὸ δὲ πρ οὗ γ': τῆς αὐτῆς, καὶ τὸ ρν, λοιπὸν ἀόριστον. Ἐπεζεύχθωσαν δὴ αἱ λξ, λο, λοιπαὶ γραμμαί, καὶ τῇ μὲν λξ, ἤχθω παράλληλος ἡ πσ, τῇ δὲ λο, ἡ ρτ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ σξ, το, καὶ τὸ μὲν σμξ, ὂν δ΄: ἔσται μέρος τοῦ λμν, τὸ δὲ σξοτ, ὂν γ΄. ἐπιζευχθεισῶν γὰρ τῶν λπ, λρ, τὰ λμπ, λπρ, ἕξουσι πρὸς τὸ λμν, ὅλον ὡς αἱ αὐτῶν βάσεις μπ, πρ, πρὸς τὴν μν, βάσιν τοῦ λμν, ὅλου, ἀλλ' ἡ μὲν μπ, ὂν τέταρτόν ἐστι τῆς μν, ἡ δὲ πρ, ὂν γ΄: κατὰ τὴν κατασκευὴν τῆς αὐτῆς, ἄρα καὶ τὸ λμπ, ὂν τέταρτόν ἐστι τοῦ λμν, τὸ δὲ λπρ, ὂν γ΄: ἐπεὶ δὲ ἡ πσ, ἤχθη παράλληλος τῇ λξ, πάντως γε κατὰ τὴν λζ΄: τοῦ α΄: τοῦ Στοιχ: τὰ σπξ, πσλ, τρίγωνα ἴσα εἰσί, κοινοῦ δὲ τοῦ σμπ, λαμβανομένου ἴσα ἔσται καὶ τὰ λμπ, σμξ, τὸ δὲ λμπ, ὂν δ΄: ἐστὶ τοῦ λμν, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ τὸ σμξ, ὁμοίως ὂν δ΄· ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ. Αὖθις ἐπεὶ τὰ σπξ, πσλ, ἴσα ἐστὶν ὡς εἴρηται, ἀφαιρουμένου κοινοῦ τοῦ σπφ, ἐναπολείπονται τὰ φπξ, φσλ, ἴσα, κοινοῦ δὲ προσκειμένου τοῦ φξρλ, ἔσονται καὶ τὰ λπρ, λσξρ, ἴσα. πάλιν ἐπεὶ ἡ ρτ, ἤχθη παράλληλος τῇ ολ, πάντως γε τὰ λορ, λρτ, ἴσα εἰσὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν λζ΄: κοινοῦ δὲ ἀφαιρουμένου τοῦ λχο, ἐναπολείπονται ἴσα τὰ χορ, χλτ, κοινοῦ δὲ λαμβανομένου τοῦ τχρξσ, ἔσονται ἴσα καὶ τὰ λρξσ, τοξσ, ἀλλὰ τὸ λρξσ, δέδεικται ἴσον τῷ λπρ, ἄρα καὶ τὸ τοξσ, ἴσον ἐστὶ τῷ λπρ, τὸ δὲ λπρ, ὂν γ΄: ἐστὶ τοῦ ὅλου λμν, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ τὸ τοξσ, ὂν γ΄: ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ. τὸ λμν, ἄρα δοθὲν τρίγωνον διῄρηται εἰς μέρη τρία κατὰ τὸν δοθέντα λόγον.

Geom. Lib. 8. Fig. 10.



Πρότασις ΙΕ΄:

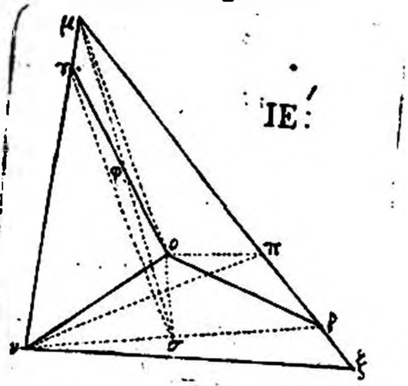
Τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς τρία ἴσα μέρη διελεῖν ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἐν αὐτῷ σημείου.

Ἔστω τρίγωνον τὸ μνξ, καὶ κείσθω τοῦτο διελεῖν εἰς μέρη ἴσα ἀλλήλοις τρία ἀπὸ τοῦ ο, δοθέντος ἐν αὐτῷ σημείου, ὥστε μίαν τῶν διαιρετικῶν αὐτοῦ γραμμῶν διὰ τοῦ ν, διέρχεσθαι. Ἀπὸ τῆς μξ, τοίνυν ὑποτεινούσης τῆς ὑπὸ μνξ, γωνίας ἀφῃρήσθω γ΄: μέρος τὸ ξπ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ οπ, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἤχθω ἡ νρ, εἶτα ἐπεζεύχθω ἡ ομ, τῆς δὲ νρ, δίχα κατὰ τὸ σ, τμηθείσης, ἤχθω ἀπὸ τοῦ σ, παράλληλος τῇ ομ, ἡ στ, ἀπὸ δὲ τοῦ δοθέντος ο, σημείου ἀχθήτωσαν ἐπὶ τὰ νρ, σημεῖα αἱ ον, ορ, καὶ διαιρεθήσεται τὸ μνξ, τρίγωνον εἰς τρία ἴσα τὰ ονξρ, ορμτ, οτν. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ νπ, μσ, σο. Δείκνυται, τὸ νξπ, τρίγωνον γ΄: ἐστὶ μέρος τοῦ μνξ, δοθέντος τριγώνου, ὥσπερ

καὶ

καὶ τὸ ξπ, τῆς ξμ, κατὰ τὴν α: τοῦ ς: τοῦ Στοιχ: ἐπεὶ δὲ αἱ οπ, νρ, παράλληλοί εἰσι, πάντως γε κατὰ τὴν λζ': τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ, τὰ νορ, νπρ, τρίγωνα ἴσα εἰσί, κοινοῦ δὲ λαμβανομένου τοῦ νρξ, ἔσονται ἴσα καὶ τὰ νορξ, νπξ, ἀλλὰ τὸ νπξ, τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ μνξ, δοθέντος, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ τὸ νορξ, τραπέζιον γ': μέρος ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ. Αὖθις τὰ μνσ, μσρ, ἴσα εἰσὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν α: τοῦ ς': τοῦ Στοιχ: , κατὰ δὲ τὴν λζ': τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ ἴσα ἔτι ἐστὶ καὶ τὰ τοσ, μστ, κοινοῦ δὲ εἰλημμένου τοῦ τσν, ἔσονται ἴσα καὶ τὰ τοσν, μσν, τὸ δὲ μσν, ἴσον ἐστὶ καὶ τῷ μσρ, ἄρα τὸ τοσν, τραπέζιον ἴσον ἐστὶ τῷ μσρ· ἐπεὶ δὲ καὶ τὰ νσο, σορ, τρίγ: ἴσα ἐστὶ κατὰ τὴν προειρημένην α: τοῦ ς': τοῦ Στοιχ: , πάντως γε ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ μὲν τοῦ τοσν, τραπεζίου τὸ οσν, ἀπὸ δὲ τοῦ μσρ, τὸ οσρ, ἐναπολειφθήσεται τὸ τον τρίγωνον ἴσον τῷ μτορ, τραπεζίῳ. πάλιν ἐπεὶ τὰ τοσ, σμτ, τρίγωνα ἴσα εἰσὶν, ὡς δέδεικται, κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ τφσ, τὰ ἐναπολειπόμενα δήπουθεν φσο, φτμ, τρίγωνα ἴσα ἔσονται, κοινοῦ δὲ λαμβανομένου τοῦ μφορ, τραπεζίου, ἔσται τὸ μσορ, τραπέζιον ἴσον τῷ μτορ, ἀλλὰ τὸ μσορ, δέδεικται ἴσον τῷ τον, ἄρα καὶ τὸ μτορ, τραπέζιον ἴσον ἐστὶ τῷ τον. Δῆλον οὖν ἐκ τούτων, ὅτι τὸ μνορ, τραπέζιον τέτμηται δίχα διὰ τῆς το, ἀλλὰ τὸ μνορ, δύο τρίτα περιέχει, ὡς δειχθήσεται, τοῦ ὅλου μνξ, ἑκάτερον ἄρα τῶν τον, μτορ, ἓν γ': ἐστὶ τοῦ δοθέντος μνξ. Ὅτι δὲ τὸ μνορ, δύο γ': περιέχει τοῦ δοθέντος μνξ, τριγ: δῆλον. ἀφῄρηται γὰρ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ μνξ, ἓν γ': ὡς προαποδέδεικται, τὸ νορξ, τραπέζιον, ὥστε τὸ ἐναπολειφθὲν μνορ, δύο τρίτα περιέχει· τούτου δὲ δίχα διῃρημένου ἔσται τὸ ὅλον μνξ, εἰς τρία ἴσα διῃρημένον. Τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 8. Fig. 11.



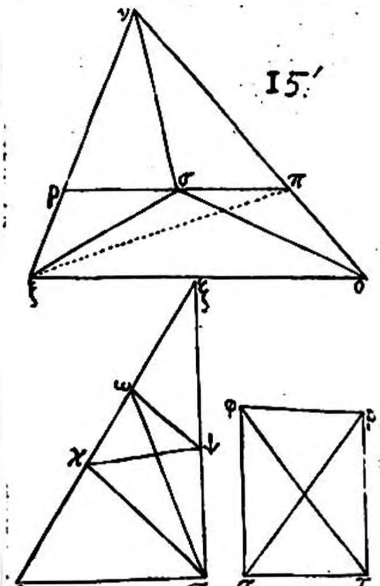
Πρότασις Ις':

Τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς τρία ἴσα μέρη διελεῖν ἀπὸ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

Ἔστω τρίγωνον τὸ νξο, καὶ ζητηθήτω ἡ εἰς τρία ἴσα τούτου διαίρεσις ἀπὸ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ τῶν γραμμῶν ἀγομένων. Εἰλήφθω δὴ ἀπὸ τῆς ον, φέρ' εἰπεῖν γραμμῆς τὸ οπ, τρίτον μέρος, ἀπὸ δὲ τοῦ π, ἤχθω παράλληλος τῇ ξο, ἡ πρ, εἶτα τμηθείσης τῆς πρ, δίχα κατὰ τὸ σ, ἀχθήτωσαν αἱ σν, σξ, σο, εὐθεῖαι, καὶ διαιρεθήσεται τὸ δοθὲν νξο, τρίγωνον εἰς τρία ἴσα, τὰ νοξ, ξσο, οσν. Τὸ γὰρ ξσο, ἴσον ἐστὶ τῷ ξπο, ἀλλὰ τὸ ξπο, τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ νξο, κατὰ τὴν α:

τοῦ

τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχ: ὥσπερ καὶ ἡ α π, τῆς ϙ ξ, ἄρα καὶ τὸ ξ α ο, γ': ἐστὶ μέρος τοῦ ν ξ ο, ὥστε τὸ ὑπαπολειπόμενον ν ξ σ α, τετράπλευρον δύο περιέχει γ': μέρη τοῦ αὐτοῦ ν ξ ο, ἐπεὶ δὲ τὰ ϱ ρ σ, ν σ π, τρίγωνα ἴσα ἐστὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν, κατὰ δὲ τὴν λ η': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ρ σ ξ, π σ ο, πάντως καὶ ἑκάστῳ τῷ ρ σ ξ, προστεθῇ τὰ ρ σ ξ, Geom. lib. 6. fig. 12. τῷ δὲ ν σ π, τὸ π σ ο, ἴσα ἔσονται καὶ τὰ ν σ ξ, ν σ ο, καὶ ἑκάτερον γ': ἔσαι μέρος τοῦ ν ξ ο, δέδεικται δὲ γ': καὶ τὸ ξ σ ο, τὸ ἄρα δοθὲν τρίγωνον ν ξ ο, διῄρηται εἰς μέρη τρία ἴσα ἀπὸ τῶν αὐτοῦ γωνιῶν κατὰ τὸ προσαχθέν.



15.

Πρότασις ιζ':

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος τριγώνου ἀφελεῖν τρίγωνον ἴσον τῷ δοθέντι, ἔχον τὴν αὐτὴν γωνίαν τῷ ἀφ' οὗ ἀφαιρεῖται.

Δεδόσθωσαν δύο τρίγωνα ἄνισα τὰ ξ ο π, ρ σ τ, καὶ ζητείσθω ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ ξ ο π, μείζονος ἴσον τρίγωνον τῷ ρ σ τ, ἐλάττονι, ὥστε ἔχειν τὸ ἀφαιρεθὲν τὴν ὑπὸ ο ξ π, γωνίαν. Γενέσθω δὲ τῇ ο ξ π, γωνίᾳ ἴση ἡ ρ τ φ, καὶ ἀπὸ τοῦ σ ἤχθω παράλληλος τῇ τ ρ, ἡ φ σ, συμπίπτουσα τῇ τ φ, κατὰ τὸ φ, εἶτα εἰλήφθω τῇ μὲν τ φ, ἴση ἡ ξ χ, τῇ δὲ τ ρ, ἡ ξ ψ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ χ ψ. Λέγω τὸ ξ χ ψ, ἴσον εἶναι τῷ ρ σ τ, δοθέντι, κατὰ γὰρ τὴν δ': τοῦ α': τῶν Στοιχ: τὸ ξ χ ψ, ἴσον ἐστὶ τῷ τ ρ φ, τοῦτο δὲ ἴσον ἐστὶ τῷ φ σ τ, κατὰ τὴν λ ζ': τοῦ αὐτοῦ, τὸ ἄρα ξ χ ψ, ἴσον ἐστὶ τῷ ρ σ τ, ἔχει δὲ καὶ τὴν ὑπὸ ξ χ ψ, γωνίαν, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Εἰ δὲ τὸ π, σημεῖον δοθῇ, ἀφ' οὗ δεῖ τὴν διαιρετικὴν ἀχθῆναι γραμμὴν, τῶν αὐτῶν προκατασκευασθέντων, ἐπεζεύχθω ἡ π χ, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἤχθω ἡ ψ ω, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ π ω, καὶ τὸ π ξ ω, ἴσον ἔσαι τῷ δοθέντι ρ σ τ, κατὰ γὰρ τὴν β': τοῦ ϛ': τῶν Στοιχ: ὡς ἡ ξ π, πρὸς τὴν ξ ψ, ἔχει καὶ ἡ ξ χ, πρὸς τὴν ξ ω, ἐπεὶ δὲ ἡ ξ χ εἴληπται ἴση κατὰ τὴν προτέραν κατασκευὴν τῇ τ φ, ἡ δὲ ξ ψ, τῇ τ ρ, πάντως γε ὡς ἔχει ἡ ξ π, πρὸς τὴν τ ρ, ἔχει καὶ ἡ τ φ, πρὸς τὴν ξ ω, τῶν ἄρα ξ ψ ω, τ ρ φ, τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, ἔχουσι δὲ καὶ τὰς ὑπὸ ρ τ φ, ψ ξ ω, γωνίας ἴσας, κατὰ τὴν ιε': ἄρα τοῦ αὐτοῦ τὰ ξ π ω, τ ρ φ, τρίγωνα ἴσα εἰσὶ, ἀλλὰ τὸ τ ρ φ, ἴσον ἐστὶ τῷ ρ σ τ, κατὰ τὴν λ ζ': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα τὸ π ξ ω, ἴσον ἐστὶ τῷ δοθέντι ρ σ τ.

Εἰ-

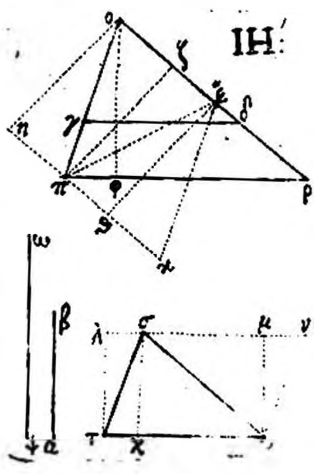
Εἰ δ' αὖθις δοθῇ τὸ ψ, σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ζητηθῇ ἀχθῆναι τὴν διαμετρικὴν γραμμὴν, γενομένης τῆς ρ τ φ, γωνίας ἴσης τῇ ψ ξ χ, εὑρεθήτω δ': ἀνάλογος τῶν ψ ξ, τ ρ, τ φ, ἡ ξ χ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ψ χ, καὶ τὸ ξ ψ χ, ἴσον ἐστὶ τῷ ρ τ φ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ιε: τοῦ ϛ': ἀλλὰ τὸ ρ τ φ, ἴσον ἐστὶ τῷ ρ σ τ, ἄρα τὸ ξ ψ χ, ἴσον ἐστὶ τῷ ρ σ τ, δοθέντι. ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΗ'.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος τριγώνου ἴσον τρίγωνον ἀφελεῖν ἑτέρῳ δοθέντι τριγώνῳ δι' εὐθείας παραλλήλου μιᾷ τῶν τοῦ δοθέντος τριγώνου.

Δοθήτωσαν δύο τρίγωνα τὰ ο π ρ, σ τ υ, καὶ ζητηθήτω ἀφαιρεθῆναι ἀπὸ τοῦ ο π ρ, μείζονος ἴσον τρίγωνον τῷ σ τ υ, ἐλάττονι, ἀγομένης τῆς εὐθείας παραλλήλως τῇ π ρ, αὐτοῦ πλευρᾷ. Πιπτέτω δὴ κάθετος ἀπὸ τοῦ ο, ἐπὶ τῆς π ρ, ἡ ο φ, ἀπὸ δὲ τοῦ σ, ἐπὶ τῆς τ υ, ἡ σ χ, καὶ τῆς μὲν π ρ, βάσεως καὶ ο φ, ὕψους, εὑρεθήτω μέση ἀνάλογος ἡ ψ ω, τῆς δὲ τ υ, βάσεως καὶ χ σ, ὕψους ἡ α β. εἶτα εὑρεθήτω τῶν ψ ω, α β, ο π, δ': ἀνάλογος ἡ ο γ, κατὰ τὴν ιϛ': τοῦ α': τοῦ παρόντος. καὶ ἀπὸ τοῦ γ, ἤχθω παράλληλος τῇ π ρ, ἡ γ δ. Λέγω δὴ τὸ ο γ δ, τρίγωνον ἴσον εἶναι τῷ σ τ υ, κατὰ γὰρ τὴν μα: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ ὑπὸ τῶν π ρ, φ ο, ὀρθογώνιον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ο π ρ, τριγώνου, ὁμοίως καὶ τὸ ὑπὸ τῶν τ υ, χ σ, ὀρθογώνιον διπλάσιόν ἐστι κατὰ τὴν αὐτὴν τοῦ σ τ υ, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν π ρ, φ ο, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ψ ω, κατὰ τὴν ιζ': τοῦ ϛ': τοῦ αὐτοῦ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν τ υ, χ σ, τὸ ἀπὸ τῆς α β, ἄρα τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ψ ω, τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ο π ρ, τριγώνου, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς α β, τοῦ σ τ υ, ὥστε ὡς ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς ψ ω, τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς α β, ἔχει καὶ τὸ ο π ρ, τρίγωνον πρὸς τὸ σ τ υ. Αὖθις ἐπεὶ τὰ ο π ρ, ο γ δ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσι διὰ τὴν τῶν γωνιῶν ἰσότητα, πάντως γε καὶ ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν ο π, ο γ, κατὰ τὴν ιθ': τοῦ ϛ': τοῦ αὐτοῦ. ἀλλὰ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ψ ω, α β, τετράγωνα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ πρὸς ἄλληλα κατὰ τὴν αὐτήν. ὡς δὲ ἡ ψ ω, πρὸς τὴν α β, γέγονε καὶ ἡ ο π, πρὸς τὴν ο γ, ἄρα ὡς ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς ψ ω, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς α β, ἔχει καὶ τὸ ο π ρ, πρὸς τὸ σ τ υ, ὡς δέδεικται, ἄρα τὸ ο π ρ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὸ ο γ δ, καὶ σ τ υ. ὥστε κατὰ τὴν θ': τοῦ ε': τοῦ αὐτοῦ, τὰ ο γ δ, σ τ υ, τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

Geom. Lib. 8. Fig. 13.



Ἄλλως.

Ἄλλως. Συνεςάθω κάθετος ἀπὸ τοῦ π, ἐπὶ τῆς ο ρ, ἡ π ζ, καὶ τῶν π ζ, σ χ, τ υ, εὑρεθήτω δ′: ἀνάλογος ἡ ο ε, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ι ς′: τοῦ ά: τοῦ παρόντ: κατὰ δὲ τὴν θ′: τοῦ αὐτοῦ εὑρεθήτω μέση ἀνάλογος, τῶν ο ρ, ο ε, καὶ ἔςω αὕτη ἡ ο δ, ἀπὸ δὲ τοῦ δ, ἤχθω παράλληλος τῇ π ρ, ἡ γ δ, καὶ τὸ ο γ δ, τρίγωνον ἴσον ἔςαι τῷ σ τ υ. Ἀχθήτωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν ο, καὶ ε, παράλληλοι τῇ π ζ, αἱ ο η, ε θ, διὰ δὲ τοῦ π, ἤχθω παράλληλος τῇ ο ε, ἡ η θ, ἤχθω δ᾽ ἔτι ἀπὸ τοῦ ε, ἡ ε κ, παράλληλος τῇ ο π, τέμνουσα τὴν η θ, ἐκβαλλομένην κατὰ τὸ κ, καὶ συςαθήσονται τὰ ο η θ ε, ο π κ ε, ἴσα παραλληλόγραμμα κατὰ τὴν λ ε′: τοῦ ά: τοῦ Στοιχειωτοῦ, συνεςάθωσαν δὲ τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ τὰ λ τ υ μ, σ τ υ ν, ἴσα παραλληλόγραμμα. Δείκνυται.

Ἡ μὲν ο η, ἴση ἐςὶ τῇ π ζ, ἡ δὲ λ τ, τῇ σ χ, κατὰ τὴν λ δ′: τοῦ αὐτοῦ. ὥςε ὡς ἔχει ἡ π ζ, πρὸς τὴν σ χ, ἔχει καὶ ἡ ο η, πρὸς τὴν λ τ, ἀλλ᾽ ὡς ἡ π ζ, πρὸς τὴν σ χ, γέγονε καὶ ἡ τ υ, πρὸς τὴν ο ε, ἄρα ὡς ἔχει ἡ ο η, πρὸς τὴν λ τ, ἔχει καὶ ἡ τ υ, πρὸς τὴν ο ε. καὶ ἑπομένως τὸ η ε, ἴσον ἐςὶ τῷ τ μ, κατὰ τὴν ι ς′: τοῦ ς′: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἀλλὰ τὸ μὲν η ε, ἴσον ἐςὶ τῷ π ε, τὸ δὲ τ μ, τῷ τ ν, ὡς εἴρηται, τὸ π ε, ἄρα ἴσον ἐςὶ τῷ τ ν. ἐπεὶ δὲ τοῦ μὲν π ε, παραλληλογράμμου ἥμισύ ἐςι τὸ ο π ε, τοῦ δὲ τ ν, τὸ σ τ υ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν μ ά: τοῦ ά: πάντως γε τὸ ο π ε, τρίγωνον ἴσον ἐςὶ τῷ σ τ υ, ἀλλὰ τὸ ο π ε, ἴσον ἐςὶ τῷ ο γ δ, ὡς δειχθήσεται, καὶ τὸ ο γ δ, ἄρα ἴσον ἐςὶ τῷ σ τ υ, ὅπερ ἦν τὸ προςαχθέν. Ὅτι δὲ τὸ ο π ε, ἴσον ἐςὶ τῷ ο γ δ, οὐ χαλεπὸν δεῖξαι. κατὰ γὰρ τὴν ά: τοῦ ς′: τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ ο π ρ, τρίγωνον ἔχει πρὸς τὸ ο π ε, ὡς ἡ ο ρ, βάσις πρὸς τὴν ο ε, βάσιν, ἰσοϋψῆ γάρ, ἐπεὶ δὲ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ο ρ, ο δ, ο ε, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι κατὰ τὴν κατασκευήν, τὰ δὲ ο π ρ, ο γ δ, τρίγωνα ὅμοια, ὡς ἰσογώνια, πάντως γε κατὰ τὴν ά: τοῦ γ′: τοῦ παρόντος, τὸ ἐπὶ τῆς ά: ο ρ, τουτέςι τὸ ο π ρ, τρίγωνον, πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς β′: ο δ, τὸ ο γ δ, ἔχει ὡς ἡ ο ρ, πρὸς τὴν ο ε, ἀλλ᾽ ὡς ἡ ο ρ, πρὸς τὴν ο ε, δέδεικται ἔχειν καὶ τὸ ο π ρ, πρὸς τὸ ο π ε, τὸ ο π ρ, ἄρα τρίγωνον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρός τε τὸ ο π ε, καὶ ο γ δ, ὥςε κατὰ τὴν θ′: τοῦ έ: τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ ο π ε, ἴσον ἐςὶ τῷ ο γ δ. Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΘ′:

Τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον εἰς ὁσαδηποτοῦν μέρη διελεῖν κατὰ τὸν δοθέντα λόγον.

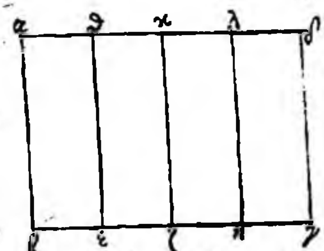
Ἔςω διελεῖν τὸ α β γ δ, παραλληλόγραμμον εἰς τέσσαρα μέρη ἴσα. Τμηθήτω δὴ ἡ β γ, ἀφ᾽ ἧς δεῖ τὰς διαιρετικὰς ἄγεσθαι γραμμάς, εἰς μέρη τέσσαρα ἴσα ἀλλήλοις, τὰ β ε, ε ζ, ζ η, η γ, καὶ ἀπὸ τῶν ε ζ η, σημείων ἤχθωσαν παράλληλοι τῇ α β, ἡ γ δ, αἱ ε θ, ζ κ, η λ, καὶ τὰ β θ, ε κ, ζ λ, η δ, παραλληλόγραμμα

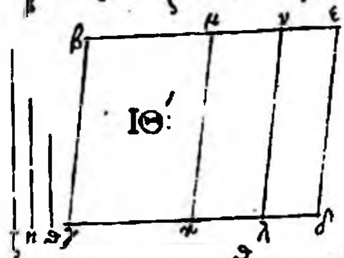
μα

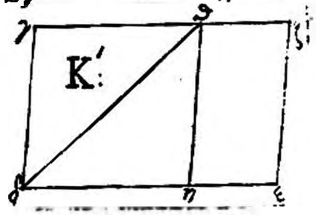
μα ἴσα ἔσονται. ἔχουσι γὰρ πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ αὐτῶν βάσεις βε, εζ, ζη, ηγ, κατὰ τὴν α: τοῦ ς': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἀλλ' αἱ βε, εζ, ζη, ηγ, εἰλήφθησαν ἴσαι ἀλλήλαις, ἄρα καὶ τὰ βθ, εκ, ζλ, ηδ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ, τοῖς δὲ τέταρσι τούτοις παραλληλογράμμοις ἴσον ἐστὶ τὸ δοθὲν βδ, κατὰ τὴν α: τοῦ β': τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ βδ, ἄρα παραλληλόγραμμον διῄρηται εἰς μέρη 4, κατὰ τὸ προσταχθέν.

Ἔστω ἔτι διελεῖν τὸ βγδε, εἰς μέρη 3, ὥστε ἔχειν πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ ζηθ, εὐθεῖαι. Τμηθήτω δὴ ἡ γδ, εἰς τὰ γκ, κλ, λδ, ὥστε τὸ μὲν γκ, ἔχειν πρὸς τὸ κλ, ὡς ἡ ζ, πρὸς τὴν η, τὸ δὲ κλ, πρὸς τὸ λδ, ὡς ἡ η, πρὸς τὴν θ, καὶ ἀπὸ τῶν κ, καὶ λ, ἤχθωσαν παράλληλοι τῇ βγ, ἢ δε, αἱ κμ, λν, καὶ τὰ γμ, κν, λε, παραλληλόγραμμα εἰς ἃ τὸ γε, διαιρεῖται, ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ ζηθ, δοθεῖσαι εὐθεῖαι. Ἡ δεῖξις ἡ αὐτὴ τῇ ἀνωτέρω. Τοῦτον δὴ τὸν τρόπον δύναται ἕκαστον παραλληλόγραμμον διαιρεθῆναι, κἄντε ὀρθογώνιον ᾖ, κἄντε μὴ τοιοῦτον, εἰς ὁσαδηποτοῦν μέρη καθ' οἱονδήτινα λόγον διὰ εὐθειῶν παραλλήλων.

Geom. Lib. 8. Fig. 14.







Πρότασις Κ':

Τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον διελεῖν εἰς μέρη τρία ἴσα μιᾶς μόνον παραλλήλου ἀγομένης γραμμῆς, τῆς δ' ἑτέρας ἀπὸ τῆς δοθείσης αὐτοῦ γωνίας.

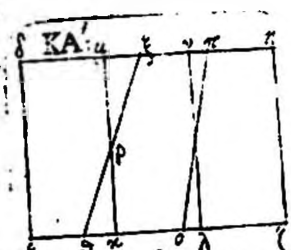
Ἔστω διελεῖν τὸ γδεζ, παραλληλόγραμμον εἰς μέρη τρία ἴσα, δεδόσθω δὲ ἡ γωνία ἡ ὑπὸ γδε, ἀφ' ἧς ὀφείλει ἡ ἑτέρα τῶν διαιρετικῶν ἀχθῆναι γραμμῶν. Ἀφῃρήσθω δὴ ἀπὸ τῆς δε, τὸ εη, τρίτον αὐτῆς μέρος, καὶ ἀπὸ τοῦ η, ἤχθω παράλληλος τῇ εζ, ἢ δγ, ἡ ηθ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δθ, καὶ διαιρεθήσεται τὸ δζ, εἰς τὰ γδθ, δθη, ηεζθ, μέρη ἴσα ὄντα ἀλλήλοις. τὸ μὲν γὰρ ηζ, γ': ἐστὶ μέρος τοῦ δζ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, τὸ δὲ γδηθ, διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα διὰ τῆς δθ, διαμέτρου κατὰ τὴν λδ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἄρα καὶ τῶν γδθ, δθη, τριγώνων ἑκάτερον γ': ἐστὶ μέρος τοῦ ὅλου γδεζ, παραλληλογράμμου. Τὸ δοθὲν ἄρα παραλληλόγραμμον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΚΑ΄.

Τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον εἰς τρία μέρη ἴσα, ἢ καὶ πλείω διελεῖν ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου μιᾶς τῶν διαιρετικῶν αὐτοῦ ἀγομένης γραμμῶν.

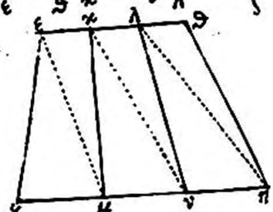
Ἔστω διελεῖν τὸ δεζη, παραλληλόγραμμον εἰς τρία μέρη ἴσα. διδόσθω δὲ καὶ τὸ θ, σημεῖον, ἀφ' οὗ ὀφείλει ἡ μία τῶν διαιρετικῶν ἀχθῆναι γραμμῶν. Διαιρεθήτω δὴ ἡ εζ, ἐφ' ἧς τὸ δοθὲν σημεῖον εἰς τρία μέρη ἴσα τὰ εκ, κλ, λζ, καὶ ἀπὸ τῶν κ, καὶ λ, ἤχθωσαν παράλληλοι τῇ εδ, ἡ ζη, αἱ κμ, λν, καὶ εἰλήφθω τῇ θκ, ἴση ἡ μξ. εἶτα τμηθήτω δίχα ἡ θζ, καὶ ξη, κατὰ ο, καὶ π, σημεῖα. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ θξ, οπ. Λέγω δὴ τὰ δεθξ, ξθοπ, ποζη, τραπέζια ἴσα εἶναι. τὰ γὰρ μρξ, θρκ, τρίγωνα ἴσα ἐστὶ κατὰ τὴν κϛ΄: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἔχουσι γὰρ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ρμξ, ρξμ, ἴσας ταῖς ὑπὸ ρθκ, ρκθ, καὶ τὴν μξ, πλευρὰν τῇ θκ. κοινοῦ δὲ προστιθεμένου τοῦ δεθρμ, τραπεζίου, ἔσται ἴσον καὶ τὸ δεθξ, τῷ δεκμ, ἀλλὰ τὸ δεκμ, γ΄: ἐστὶ μέρος κατὰ τὴν ἀνωτέρω τοῦ εη, ἄρα καὶ τὸ δεθξ, γ΄: ἐστὶ μέρος τοῦ αὐτοῦ εη. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, καὶ τὸ μὲν θοπξ, ἴσον τῷ κλνμ, τὸ δὲ ποζη, τῷ νλζη, ἀλλ' ἑκάτερον τῶν κν, λη, τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ εη, ἄρα ἑκάτερον καὶ τῶν θπ, οη, γ΄: ὁμοίως μέρος ἐστὶ τοῦ εη. Τὸ δοθὲν ἄρα παραλληλόγραμμον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 8. Fig. 23.



Πρότασις ΚΒ΄.

Τὸ δοθὲν τραπέζιον, οὗ αἱ ἀπεναντίον δύο πλευραὶ παράλληλοι, εἰς τρία μέρη ἴσα διελεῖν.



Ἔστω διελεῖν τὸ εζηθ, τραπέζιον εἰς μέρη τρία. Διαιρεθήτω δὴ ἑκατέρα τῶν εθ, ζη, παραλλήλων αὐτοῦ πλευρῶν εἰς τρία μέρη ἴσα τὰ εκ, κλ, λθ, ζμ, μν, νη, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ κμ, λν, καὶ τὰ εζμη, κμνλ, λνηθ, ἴσα ἔσονται. Ἀχθήτωσαν γὰρ αἱ εμ, κν, λη, λευκαί, καὶ ἐπεὶ τὰ εζμ, κμν, λνη, τρίγωνα ἐπὶ ἴσων βάσεών εἰσι, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, πάντως γε κατὰ τὴν λη΄: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. ὁμοίως δὲ κατὰ τὴν αὐτὴν ἴσα εἰσὶ καὶ τὰ εμκ, κνλ, ληθ, ὥστε προστιθεμένων τῶν ἴσων εμκ, κνλ, ληθ, τοῖς ἴσοις εζμ, κμν, λνη, ἔσονται τὰ ὅλα εζμκ, κμνλ, λνηθ, ἴσα κατὰ τὸ β΄: ἀξίωμα τοῦ αὐτοῦ. Τὸ δοθὲν ἄρα τραπέζιον, καὶ τὰ ἑξῆς.

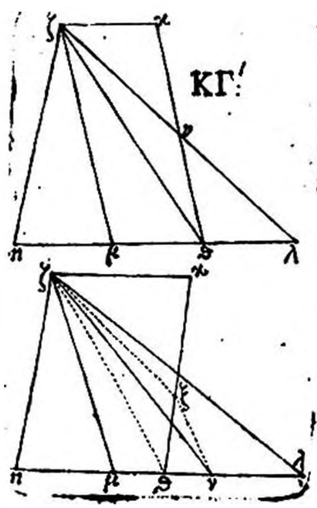
Πρό-

Πρότασις ΚΓʹ:

Τραπεζίου δοθέντος τὰς δύο τῶν ἀπεναντίον αὐτοῦ πλευρῶν παραλλήλους ἔχοντος τρίτον μέρος ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀφελεῖν, ἢ εἰς τρία ἴσα αὐτὸ διελεῖν ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου.

Ἔστω ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ ζηθκ, δοθέντος τραπεζίου, οὗ αἱ ζκ, ηθ, παράλληλοι, γʹ: μέρος. Ἤχθω δὴ ἡ ηθ, κατὰ τὸ συνεχὲς, ὥστε τὴν θλ, ἴσην εἶναι τῇ ζκ, τῆς δὲ ηλ, εἰς 3, ἴσα μέρη διαιρεθείσης τὰ ημ, μθ, θλ, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζμ, ζθ. Λέγω δὴ τὸ ζημ, γʹ: εἶναι μέρος τοῦ ζηθκ· κατὰ γὰρ τὴν κϛʹ: τοῦ αʹ: τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὰ ζνκ, θνλ, τρίγωνα ἴσα εἰσίν. ἔχουσι γὰρ τάς τε ὑπὸ ζκν, λθν, καὶ τὰς ὑπὸ κνζ, θνλ, γωνίας ἴσας, καὶ μίαν πλευρὰν τὴν ζκ, μιᾷ τῇ θλ, ἴσην, κοινοῦ δὲ προσκειμένου τοῦ ζηθν, τραπεζίου, τὸ ζηθκ, τραπέζιον ἴσον ἔσται τῷ ζηλ, τριγώνῳ, ἀλλὰ τὸ ζημ, τρίγωνον γʹ: ἐστὶ μέρος τοῦ ζηλ, κατὰ τὴν αʹ: τοῦ ϛʹ: τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ τὸ ζημ, γʹ: ἐστὶ μέρος καὶ τοῦ ζηθκ, τραπεζίου, τὸ δὲ ζημ, ἴσον ἐστὶ τῷ ζμθ, ἄρα καὶ τὸ ζμθ, γʹ: αὐτοῦ μέρος ἐστὶν, ἑπομένως δὲ καὶ τὸ ζθκ. εἰ γὰρ μὴ, οὐδέτερον τῶν ζημ, ζμθ, γʹ: ἔσται μέρος τοῦ ζηθκ.

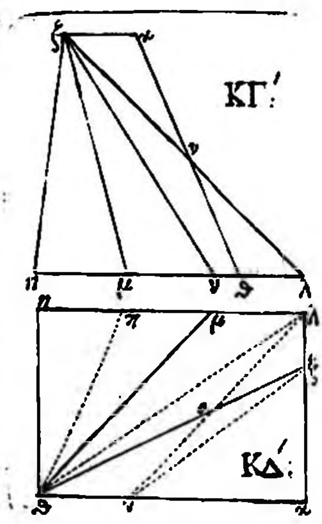
Geom. Lib. 8. Fig. 16.



Εἰ δὲ ἡ ζθ, οὐ συμπίπτει τῇ κθ, ἀλλὰ τέμνει αὐτὴν ὡς ἡ ζν, ἐπεζεύχθω ἡ κλ, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἤχθω ἡ νξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζξ, καὶ τὸ ζηθκ, διαιρεθήσεται εἰς μέρη τρία ἴσα τὰ ζημ, ζμθξ, καὶ ζξκ. Ὅτι μὲν γὰρ τὸ ζημ, γʹ: ἐστὶ μέρος τοῦ ζηθκ, δέδεικται ἀνωτέρω. ὅτι δὲ καὶ τὸ ζμθξ, γʹ: ὁμοίως τοῦ αὐτοῦ μέρος ἐστὶν, οὐ χαλεπὸν ἀποδεῖξαι. Ἐπεὶ γὰρ αἱ ζκ, θλ, παράλληλοί εἰσι καὶ ἴσαι, δῆλον ὅτι καὶ αἱ ζθ, κλ, παράλληλοί εἰσιν, ἀλλὰ τῇ κλ, εὐθεῖα παράλληλος ἤχθη ἡ ξν, ἄρα καὶ αἱ ζθ, ξν, παράλληλοί εἰσι κατὰ τὴν λʹ: τοῦ αʹ: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὥστε κατὰ τὴν λζʹ: τοῦ αὐτοῦ τὰ ζθν, ζθξ, τρίγωνα ἴσα εἰσίν. ἔχουσι γὰρ τὴν αὐτὴν ζθ, βάσιν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ζθ, ξν, κοινοῦ δὲ λαμβανομένου τοῦ ζμθ, πάντως γε τὸ ζμν, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ζμθξ, τραπεζίῳ, ἀλλὰ τὸ ζμν, γʹ: ἐστὶ μέρος τοῦ ζηθκ, ἴσον γὰρ τῷ ζημ, κατὰ τὴν αʹ: τοῦ ϛʹ: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἄρα καὶ τὸ ζμθξ, τραπέζιον γ': ἐστὶ μέρος τοῦ ζηθκ. δέδεικται δὲ τοῦ αὐτοῦ γ': μέρος καὶ τὸ ζημ, ἐγκαταλείπεται ἄρα καὶ τὸ ζξκ, ὁμοίως γ': μέρος τοῦ αὐτοῦ ζη, κκ.

Εἰ δὲ ἑκατέρα τῶν ζμ, ζν, ἐντὸς πεσεῖται τῆς ηθ, τῶν αὐτῶν γινομένων τῆς κατασκευῆς παραγγελμάτων, ὡς ἐπὶ τοῦ παραδείγματος, δῆλον, ὅτι τὸ ζηθκ, δοθὲν τραπέζιον διαιρεῖται εἰς τρία ἴσα μέρη τὰ ζημ, ζμν, ζνθκ. Ὅτι μὲν γὰρ κάπρον τῶν ζημ, ζμν, τριγώνων γ': ἐστὶ μέρος τοῦ ζηθκ, καὶ συναμφότερα, ταὐτὸ δ' ἐστὶν εἰπεῖν τὸ ζην, δύο τρίτα τοῦ αὐτοῦ περιέχει μέρη, συνάγεται ἐκ τῶν ἀνωτέρω. τὸ γὰρ ζηθκ, ὡς δέδεικται ἐν τῷ α': διαγράμματι, ἴσον ἐστὶ τῷ ζηλ, τριγώνῳ. ἀφαιρουμένου δὲ κοινοῦ τοῦ ζην, ἐναπολείπεται τὸ ζνθκ, ἴσον τῷ ζνλ, τριγώνῳ. τοῦτο δὲ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ζημ, καὶ ζμν, χωρὶς, ἄρα καὶ τὸ ζνθκ, τραπέζιον ἴσον ἐστὶν ἑκατέρῳ τῶν αὐτῶν, καὶ ἑπομένως γ': ἐστὶ μέρος τοῦ ζηθκ, δοθέντος τραπεζίου.

Geom. Lib. 8. Fig. 17.



Πρότασις ΚΔ'.

Τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον εἰς τρία ἴσα μέρη διελεῖν ἀπὸ τῆς δοθείσης γωνίας.

Ἔστω διελεῖν τὸ ηθκλ, παραλληλόγραμμον εἰς τρία ἴσα μέρη ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ θ, γωνίας. Εἰλήφθω δὲ γ': μέρος τῆς μὲν ηλ, τὸ λμ, τῆς δὲ θκ, τὸ θν, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ θμ, θλ, ἀπὸ δὲ τοῦ ν, ἤχθω παράλληλος τῇ θλ, διαμέτρῳ ἡ νξ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ θξ, καὶ διαιρεθήσεται τὸ δοθὲν ηθκλ, παραλληλόγραμμον εἰς τρία ἴσα τὰ ηθμ, θμλξ, θξκ. Ἐπιζεύχθω γὰρ ἡ λν, καὶ ἐπεὶ ἡ ηλ, ἴση ἐστὶ τῇ θκ, κατὰ τὴν λδ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἀφῃρέθη δὲ ἴση ἡ λμ, τῇ θν, τρίτον γάρ ἐστιν ἑκατέρα μέρος, ἡ μὲν τῆς ηλ, ἡ δὲ τῆς θκ, ἐγκαταλείπεται πάντως καὶ ἡ ημ, ἴση τῇ νκ, ἔστι δὲ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν λδ': καὶ ἡ ηθ, τῇ κλ, ἴση, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ μηθ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ νκλ, ὁμοίως ἴση, ἄρα τὸ μηθ, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ νκλ, κατὰ τὴν δ': τοῦ αὐτοῦ. Αὖθις ἐπεὶ αἱ θλ, νξ, παράλληλοί εἰσι πάντως γε, κατὰ τὴν λζ': τοῦ αὐτοῦ τὰ νξλ, ξνθ, τρίγωνα ἴσα εἰσί, κοινοῦ δὲ λαμβανομένου τοῦ νκξ, τριγώνου ἔσται καὶ τὰ λνκ, θξκ, τρίγωνα ἴσα, τὸ δὲ λνκ, ἴσον δέδεικται τῷ θημ, ἄρα καὶ τὸ θξκ, ἴσον ἐστὶ τῷ αὐτῷ θμη, ἀλλὰ τὸ ηθλ, κατὰ τὴν προειρημένην λδ': ἴσον ἐστὶ τῷ θκλ, ἀφαιρουμένων ἄρα τῶν ἴσων θημ, θκξ, ἀπὸ τῶν θηλ, θκλ, ἐγκαταλείπονται ἴσα κατὰ τὸ β': ἀξίωμα τὰ θμλ, θξλ, τρίγωνα. Ἐπεὶ δὲ τὸ θμλ, ἴσον ἐστὶν ἑκα-

ἑκα-

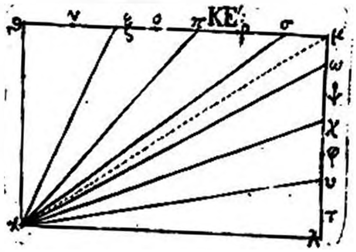
ἑκατέρῳ τῶν θ η π, θ π μ, κατὰ τὴν α΄: τοῦ ϛ΄: τοῦ αὐτοῦ, δῆλον ὅτι καὶ τὸ θ ξ λ, ἴσον ἐστὶ τῷ θ η π, ἢ θ π μ, καὶ ἑπομένως συναμφότερα τὰ θ η π, θ π μ, τουτέστι τὸ θ η μ, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ συναμφοτέροις τοῖς θ μ λ, θ ξ λ, ταὐτὸν δ᾽ ἐστὶν εἰπεῖν τῷ θ μ λ ξ, τραπεζίῳ, ἀλλὰ τὸ θ η μ, δέδεικται ἴσον καὶ τῷ θ ξ κ, τὰ τρία ἄρα θ η μ, θ μ λ ξ, θ ξ κ, ἴσα ἐστὶν, ὥστε τὸ δοθὲν η θ κ λ, διήρηται εἰς μέρη ἴσα τρία κατὰ τὸ προσαχθέν.

Πρότασις ΚΕ΄:

Τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον εἰς ὁσαδηποτοῦν διελεῖν μέρη ἀπὸ τῆς δοθείσης γωνίας.

Ἔστω διελεῖν τὸ θ κ λ μ, εἰς μέρη, δὸς εἰπεῖν ἑπτὰ ἴσα ἀπὸ τῆς κ, γωνίας. Διαιρεθήτω δὴ ἑκατέρα τῶν θ μ, λ μ, εἰς μέρη ἑπτὰ ἴσα τὰ θ ν, ν ξ, ξ ο, καὶ λοιπὰ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν ἀνὰ δύο σημεῖα αἱ κ ξ, κ π, κ σ, κ υ, κ χ, κ ω, καὶ ἔσται τὸ προσαχθέν. Ἐπιζεύχθω γὰρ λοιπὴ ἡ κ μ, γραμμὴ, καὶ διαιρεθήσεται τὸ θ κ λ μ, δι᾽ αὐτῆς εἰς δύο ἴσα τὰ θ κ μ, θ λ μ, τρίγωνα κατὰ τὴν λδ΄: τοῦ α΄: τῶν Στοιχ:. Ἐπεὶ δ᾽ ἑκατέρα τῶν θ μ, λ μ, διήρηται εἰς μέρη ἑπτὰ ἴσα ἀλλήλοις, δῆλον ὅτι ὃ μέρος ἐστὶ τὸ θ κ ξ, τρίγωνον τοῦ θ κ μ, τὸ αὐτὸ ἐστὶ μέρος καὶ τὸ κ λ υ, τοῦ κ λ μ, καὶ ἑπομένως ἴσον τῷ θ κ ξ. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ κ υ, κ τ, ἑκάτερον μὲν τῶν κ θ ν, κ ν ξ, ζ΄: ἔσται μέρος τοῦ κ θ μ, ἑκάτερον δὲ τῶν κ λ τ, κ τ υ, ζ΄: ἔσται μέρος τοῦ κ λ μ, ὥσπερ δὲ τὸ ὅλον ἴσον ἐστὶ τῷ ὅλῳ, οὕτω καὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῖς αὐτοῖς μέρεσιν ἴσα εἰσὶν, ἀλλὰ τῷ μὲν κ θ ξ, ἴσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν κ ξ π, κ π σ, τῷ δὲ κ λ υ, ἑκάτερον τῶν κ υ χ, κ χ ω, ἄρα ἕκαστον τῶν κ θ ξ, κ ξ π, κ π σ, ἴσον ἐστὶν ἑκάστῳ τῶν κ λ υ, κ υ χ, κ χ ω. Ὅτι δὲ καὶ τὸ κ σ μ ω, τραπέζιον ἴσον ἐστὶν ἑκάστῳ τῶν εἰρημένων, δῆλον. τὸ μὲν γὰρ κ σ μ, ἴσον ἐστὶ τῷ κ ρ σ, ἥμισυ δὲ τοῦ κ π σ, τὸ δὲ κ ω μ, ἴσον μὲν τῷ κ ψ ω, ἥμισυ δὲ τοῦ κ χ ω, ἀλλὰ τὸ κ π σ, ἴσον δέδεικται τῷ κ χ ω, ἄρα καὶ τὸ κ σ μ, ἴσον ἐστὶ τῷ κ ω μ, καὶ ἑπομένως τὸ κ σ μ ω, ἴσον ἐστὶ τῷ τε κ π σ, καὶ κ χ ω, χωρίς. ἑκάτερον γὰρ τῶν κ π σ, κ χ ω, δέδεικται ἴσον τοῖς λοιποῖς, τὰ πάντα ἄρα θ κ ξ, κ ξ π, καὶ λοιπὰ μέρη ἴσα εἰσίν, ὥστε τὸ θ κ λ μ, δοθὲν παραλληλόγραμμον εἰς μέρη ἴσα ἑπτὰ διήρηται κατὰ τὸ προσαχθέν.

Geom. Lib. 8. Fig. 18.



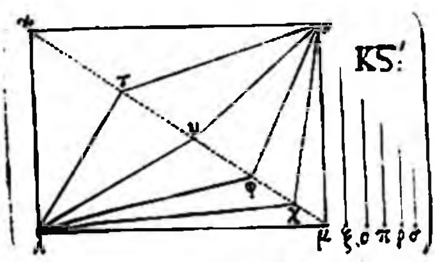
Πρό-

Πρότασις Κϛʹ.

Τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον εἰς ὁσαδηποτοῦν μέρη διελεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ ἀναλογίᾳ ἀπὸ τῆς δοθείσης γωνίας.

Δοθήτω παραλληλόγραμμον τὸ κ λ μ ν, καὶ ἔσω διελεῖν τοῦτο ἀπὸ τῆς λ, γωνίας εἰς μέρη φέρ εἰπεῖν πέντε, ἔχοντα πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ξ ο π ρ σ, μεγέθη. Ἐπεζεύχθω δὴ λοιπὸν ἡ κ μ, διάμετρος, καὶ διαιρεθήτω εἰς μέρη πέντε ἀνάλογα τοῖς δοθεῖσι ξ ο π ρ σ, μεγέθεσι κατὰ τὴν ϛʹ: τοῦ αʹ: τοῦ παρ: τὰ κ τ, τ υ, υ φ, φ χ, χ μ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λ τ, τ ν, λ υ, υ ν, λ φ, φ ν, λ χ, χ ν, καὶ διαιρεθήσεται τὸ δοθὲν κ λ μ ν, εἰς μέρη πέντε τὰ κ λ τ ν, λ τ ν υ, λ υ ν φ, λ φ ν χ, λ χ ν μ, ἔχοντα πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ ξ ο π ρ σ, δοθέντα μεγέθη. κατὰ γὰρ τὴν αʹ: τοῦ ϛʹ: τοῦ Στοιχ: τὰ λ κ τ, λ τ υ, λ υ φ, λ φ χ, λ χ μ, ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ κ τ, τ υ, υ φ, φ χ, χ μ, βάσεις. ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ν κ τ, ν τ υ, ν υ φ, ν φ χ, ν χ μ, ἀλλ᾽ αἱ κ τ, τ υ, υ φ, φ χ, χ μ, ἔχουσιν ὡς τὰ ξ ο π ρ σ, μεγέθη, ἄρα καὶ τὰ λ κ ν τ, λ τ ν υ, λ υ ν φ, λ φ ν χ, λ χ ν μ, ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ δοθέντα ξ ο π ρ σ, μεγέθη. Τὸ δοθὲν ἄρα παραλληλόγραμμον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 8. Fig. 19.



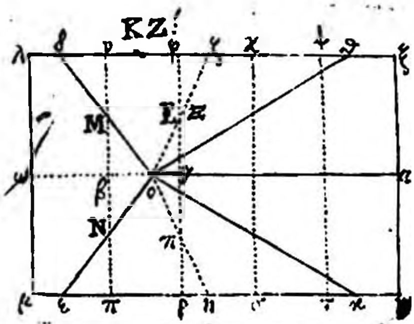
Πρότασις ΚΖʹ.

Τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον εἰς ὁσαδηποτοῦν μέρη διελεῖν ἴσα ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἐν αὐτῷ σημείου, δι᾽ οὗ εὐθείας ἀγομένης παραλλήλως ταῖς δυσὶ τῶν ἀπεναντίον αὐτοῦ πλευρῶν, αἱ λοιπαὶ δύο αὐτοῦ πλευραὶ δίχα διαιρεθήσονται.

Ἔσω διελεῖν τὸ λ μ ν ξ, παραλληλόγραμμον εἰς πέντε δὸς εἰπεῖν μέρη ἴσα ἀλλήλοις ἀπὸ τοῦ ο, σημείου, δι᾽ οὗ παραλλήλως ταῖς λ ξ, ἡ μ ν, εὐθείας ἀγομένης, αἱ λ μ, ξ ν, δίχα τμηθήσονται. Διαιρεθήτω δὴ ἡ μ ν, αὐτοῦ πλευρὰ εἰς πέντε ἴσα μέρη τὰ μ π, π ρ, ρ σ, σ τ, τ ν, καὶ ἀπὸ τῶν π ρ σ τ, σημείων ἀχθήτωσαν παραλλήλως τῇ λ μ, ἡ ν ξ, αἱ π υ, ρ φ, σ χ, τ ψ. ἤχθω δὲ διὰ τοῦ ο, καὶ ἡ ω α παραλλήλως τῇ λ ξ, ἡ μ ν, τέμνουσα τὴν μὲν π υ, κατὰ τὸ β, τὴν

δὲ

Geom. Lib. 8. Fig. 20.

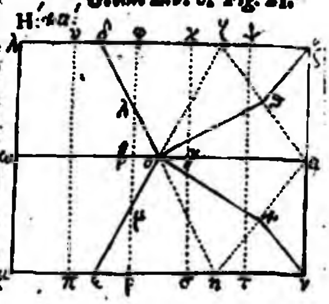


δὲ ρφ, κατὰ τὸ γ, εἶτα εἰλήφθω τῇ μὲν βο, ἴση ἡ τε δυ, καὶ ϵπ, τῇ δὲ ογ, ἡ τε φζ, καὶ ρη. Αὖθις εἰλήφθω τῇ μὲν δζ, ἴση ἡ ζθ, τῇ δὲ ϵη, ἡ ηκ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ οδ, οθ, οκ, οϵ, καὶ τμηθήσεται τὸ λμνξ, δοθὲν παραλληλόγραμμον εἰς πέντε μέρη ἴσα τὰ λμϵοδ, δοθ, ϵοκ, οθξα, οκνα. Δείκνυται, τὰ οβΜ, δυΜ, τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ κατὰ τὴν κϛ΄: τοῦ α: τοῦ Στοιχ: , ὡσαύτως δὲ ἴσα εἰσὶ κατὰ τὴν αὐτὴν καὶ τὰ οβΝ, ϵπΝ, καὶ ζφΞ, ογΞ, καὶ ογπ, ηπρ, τρίγωνα. Ἐὰν οὖν τοῖς οβΜ, δυΜ, ἴσοις κοινὸν προστεθῇ τὸ λδΜβω, τραπέζιον, ἔσται τὸ οδλω, τραπέζιον ἴσον τῷ βυλω, παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ οϵμω τραπέζιον ἴσον τῷ βπμω, παραλληλογράμμῳ, ὥστε τὸ οδλμϵ, τραπέζιον ἴσον ἐστὶ τῷ λμπυ, παραλληλογράμμῳ. ἀλλὰ τὸ λμπυ, παραλληλ: ε: μέρος ἐστὶ τοῦ δοθέντος λμνξ, παραλληλογράμμου, ἄρα καὶ τὸ οδλμϵ, τραπέζιον ε: μέρος ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ. Διὰ τὰ αὐτὰ ἔτι δειχθήσεται καὶ τὸ μὲν οδζ, τρίγωνον ἴσον τῷ βγφυ, παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ οϵη, τῷ βγρπ, ὥστε τὰ οδζ, οϵη, τρίγωνα συναμφότερα ἴσα εἰσὶ τῷ πρφυ, παραλληλογράμμῳ, ἀλλὰ τῷ μὲν οδζ, ἴσον ἐστὶ τῷ οζθ, κατὰ τὴν α: τοῦ ϛ΄: τοῦ Στοιχ: τῷ δὲ οϵη, ἴσον ἐστὶ τὸ οηκ, ἄρα καὶ τὸ μὲν οζθ, ἴσον ἐστὶ τῷ βγφυ, τὸ δὲ οηκ, τῷ βγρπ. ἐπεὶ δὲ τὸ βφ, παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ βρ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς γφ, γρ, εὐθείας, πάντως γε ἑκάτερον τῶν οδθ, οϵκ, ἴσον ἐστὶ τῷ πρφυ, παραλληλογράμμῳ, ἀλλὰ τὸ πρφυ, παραλληλογρ: ε: μέρος ἐστὶ τοῦ δοθέντος μξ, ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν οδθ, οϵκ, τριγώνων ε: μέρος ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ μξ, δέδεικται δὲ καὶ τὸ οδλμϵ, ὁμοίως ε: μέρος τοῦ αὐτοῦ, ἀφαιρουμένων ἄρα τῶν τριῶν οδλμϵ, οδθ, οϵκ, ε: μερῶν ἀπὸ τοῦ λμνξ, δοθέντος παραλληλογράμμου, ἐγκαταλείπεται τὸ οθξνκ, πολύγωνον ἴσον δυσὶ ε: μέρεσι τοῦ μξ, ἀλλ᾽ ἡ οα, διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο ἴσα τὰ οθξα, οκνα, τραπέζια κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν α: τοῦ ϛ΄: ἄρα ἑκάτερον τῶν οθξα, οκνα, ἴσον ἐστὶ τῷ ε: μέρει τοῦ μξ, δοθέντος παραλληλογράμμου. Τὸ δοθὲν ἄρα παραλληλόγραμμον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Εἰ δὲ τὸ δοθὲν ο, σημεῖον ἐν μέσῳ ᾖ τοῦ δοθέντος, ἢ μικρόν τι παραλλάττον ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος, διῃρημένου τοῦ μξ, δοθέντος παραλληλογράμμου εἰς πέντε μέρη ἴσα τὰ μυ, πφ, καὶ λοιπὰ παραλληλόγραμμα, ὡς ἀνωτέρω ἡρμηνεύεται, καὶ τῆς ωα, διὰ τοῦ δοθέντος ο, σημείου ἠγμένης, δι᾽ ἧς τέμνεται ἡ μὲν ρφ, κατὰ τὸ β, ἡ δὲ σχ, κατὰ τὸ γ, εἰλήφθω ἑκατέρα τῶν φι, ρϵ, ἴση τῇ βο, ἑκα-

τέρα

Geom. Lib. 8. Fig. 21.



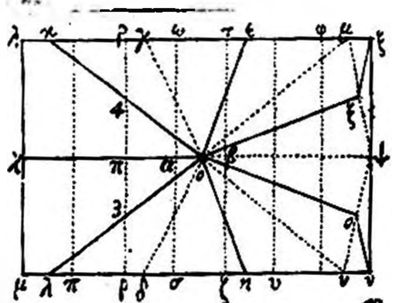
τέρα δὲ τῶν χζ, σ η, ἴση τῇ γο, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ο δ, ο ε, ο ζ, ο η, εἶτα ἐπιζευχθεισῶν τῶν ζ α, η α, καὶ ἑκατέρας αὐτῶν δίχα τμηθείσης τῆς μὲν κατὰ τὸ θ, τῆς δὲ κατὰ τὸ κ, ἐπιζεύχθωσαν αἱ ο θ, θ ξ, καὶ ο κ, κ ν, καὶ διαιρεθήσεται τὸ δοθὲν μ ξ, παραλληλόγραμμον εἰς πέντε μέρη ἴσα τὰ ο δ λ ω, ο ε μ ω, δ ο θ ξ, ξ θ ο κ ν, ν κ ο ε, κατὰ γὰρ τὰ ἀνωτέρω τῶν ο δ ζ, ο ε η, τριγώνων τὸ μὲν ἴσον ἐστὶ τῷ β γ χ φ, τὸ δὲ τῷ β γ σ ρ, ὥστε συναμφότερα ἴσα ἐστὶ τῷ ρ σ χ φ, ε΄: μέρει τοῦ μ ξ, δοθέντος. Ἐπεὶ δὲ κατὰ τὴν προειρημένην κϛ΄: τὰ β ο λ, δ φ λ, ἴσα εἰσί, πάντως γε ἐὰν ἴσοις τοῖς β ο λ, δ φ λ, κοινὸν προστεθῇ τὸ β λ δ λ ω, πολύγωνον, ἔσται τὸ ο δ λ ω, τραπέζιον ἴσον τῷ β φ λ ω, παραλληλογράμμῳ. Ὁμοίως δειχθήσεται καὶ τὸ ο ε μ ν, τραπέζιον ἴσον τῷ β ρ μ ω, παραλληλογράμμῳ. ἀλλ' ἑκάτερον τῶν β φ λ ω, β ρ μ ω, παραλληλογράμμων ε΄: μέρος ἐστὶ τοῦ μ ξ, τὸ γὰρ μ φ, δύο ε΄: περιέχει τοῦ αὐτοῦ, τὸ δὲ μ β, ἴσον ἐστὶ τῷ β λ, ἄρα καὶ τῶν ο δ λ ω, ο ε μ ω, τραπεζίων ἑκάτερον ε΄: ἐστὶ μέρος τοῦ μ ξ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τῶν ο ζ ξ α, ο η ν α, ἑκάτερον ε΄: μέρος ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ, ἀλλὰ τῶν ο ζ ξ α, ο η ν α, ἑκάτερον εἰς δύο ἴσα τέμνεται τὰ ο ζ ξ θ, ο α ξ θ, καὶ ο α ν κ, ο η ν κ, ὡς δειχθήσεται, ἄρα τὸ ο θ ξ α ν κ, ε΄: μέρος ἐστὶ τοῦ μ ξ, περιέχει γὰρ δύο ἡμίση τοῦ ε΄: μέρους τοῦ αὐτοῦ, ἀφαιρουμένων οὖν τριῶν ε΄: μερῶν τοῦ μ ξ, δοθέντος παραλληλογράμμου τῶν ο δ λ ω, ο ε μ ω, ο θ ξ α ν κ, ἐγκαταλείπονται τὰ δ ο θ ξ, ε ο κ ν ἴσα δυσὶ ε΄: μέρεσι τοῦ αὐτοῦ μ ξ, εἰσὶ δὲ καὶ ταῦτα ἴσα ἀλλήλοις, ἄρα ἑκάτερον τῶν δ ο θ ξ, ε ο κ ν, ε΄: μέρος ἐστὶ τοῦ μ ξ, δοθέντος. Ὅτι δὲ τὸ ο ζ ξ α, εἰς δύο ἴσα τέμνεται, τῶν ο θ, θ ξ, εὐθειῶν ἠγμένων, δῆλον, ἐπεὶ γὰρ ἡ ζ α, διῄρηται δίχα, πάντως γε κατὰ τὴν α΄: τοῦ ϛ΄: τοῦ Στοιχ: τὰ ο ζ θ, ο θ α, καὶ ζ θ ξ, ξ θ α, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ἴσα καὶ τὰ ο η κ, ο κ α, καὶ ν κ η, ν κ α.

Ἔστω ἔτι διελεῖν τὸ δοθὲν λ μ ν ξ, παραλληλόγραμμον εἰς ἴσα ἑπτά. Διαιρεθήτω δὴ α΄: εἰς ἑπτὰ παραλληλόγραμμα, ὡς προηρμήνευται, τὰ λ π, π ρ, ρ σ, σ τ, τ υ, υ φ, φ ν, τῆς δὲ χ ψ, εὐθείας παραλλήλως τῇ λ ξ, ἢ μ ν, διὰ τοῦ ο, ἀχθείσης, εἰλήφθω τῇ μὲν ο α, ἴση ἑκατέρα τῶν γ ω, δ σ, τῇ δὲ ο β, ἑκατέρα τῶν τ ε, ζ η, εἶτα εἰλήφθω καὶ τῇ μὲν γ ε, ἴσαι ἑκατέρωθεν αἱ γ κ, ε μ, τῇ δὲ δ η, αἱ δ λ, η ν, τῶν δὲ μ ψ, ν ψ, ἐπιζευχθεισῶν, καὶ δίχα διαιρεθεισῶν κατὰ ξ καὶ ο, ἐπιζεύχθωσαν αἱ ο κ, ο ε, ο μ, ο ξ, ο ο, ο ν, ο η, ο λ, καὶ διαιρεθήσεται πάντως τὸ δοθὲν λ μ ν ξ, εἰς μέρη ἑπτὰ ἴσα ἀλλήλοις τὰ λ χ ο κ, κ ο ε, ε ο ξ ξ, ξ ξ ο ο ν, ν ο ο η, η ο λ, λ ο χ μ. Ὅτι μὲν γὰρ τὰ ο γ ε, ο δ η, τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ δῆλον, ἰσόπλευρα γάρ, ὅτι δὲ καὶ συναμφότερα ἴσα εἰσὶ

τῷ

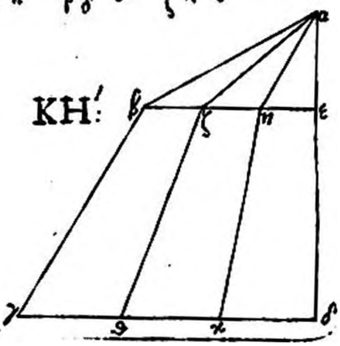
τῷ ο γ ι, τριγώνῳ, τὸ δὲ ο λ δ, τῷ ο δ η, καὶ τὴν α΄: τοῦ ς΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. πάντως γε ἑκάτερον τῶν ο κ ι, ο λ η, ἕβδομόν ἐστι μέρος τοῦ λ μ ν ξ, δοθέντος παραλληλογράμμου. Αὖθις ἐπεὶ ἑκάτερα τῶν κ ρ, λ ρ, ἴση ἐστὶ τῇ ο π, ὡς δῆλον ἐκ τῆς κατασκευῆς, πάντως γε τὸ μὲν κ ρ 4, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ο π 4, τὸ δὲ λ ρ 3, τῷ ο π 3, ὥστε τοῖς μὲν κ ρ 4, ο π 4, ἴσοις κοινοῦ προστιθεμένου τοῦ λ χ π 4 κ, χωρίου, ἐστὶ καὶ τὸ ο χ λ κ, ἴσον τῷ λ χ π ρ, τοῦτο δὲ ζ΄: ἐστὶ μέρος τοῦ λ μ ν ξ, δοθέντος, ἄρα καὶ τὸ ο χ λ κ, ζ΄: ἐστὶ μέρος τοῦ αὐτοῦ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ ο χ μ λ, ὁμοίως ζ΄: μέρος τοῦ λ μ ν ξ, παραλληλογράμμου, ἀφαιρουμένων τοίνυν ἀπὸ τοῦ λ μ ν ξ, δοθέντος παραλληλογράμμου 4 ἑβδόμων μερῶν τῶν ο χ λ κ, κ ο ι, ο χ μ λ, λ ο η, ἐγκαταλείπεται τὸ ι ο η ν ξ, χωρίον περιεκτικὸν τριῶν ἑβδόμων μερῶν τοῦ αὐτοῦ. Ὅτι δὲ τὸ αὐτὸ χωρίον διῄρηται εἰς τρία ἴσα τὰ ι ο ξ ξ, ο ξ ξ ν ο ο, ο η ν ο, ἔξεστι συναγαγεῖν ἐκ τῶν ἀνωτέρω, τὸν αὐτὸν γὰρ τρόπον διῄρηται εἰς τρία ἴσα καὶ τὸ δ ξ ν ι ο, χωρίον, τὰ δ ο θ ξ, ξ θ ο κ ν, ν κ ο ι. Τὸ δοθὲν ἄρα παραλληλόγραμμον καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Lib. 8. Fig. 22.



Πρότασις ΚΗ΄.

Τὸ δοθὲν τραπέζιον εἰς ὁσαδηποτοῦν ἴσα μέρη διελεῖν.



Ἔστω διελεῖν τὸ α β γ δ, τραπέζιον εἰς μέρη τρία ἴσα ἀλλήλοις. Ἤχθω δὲ ἀπὸ τοῦ β, σημείου παράλληλος τῇ γ δ, ἡ β ε, καὶ διαιρεθήτω ἑκατέρα τῶν β ε, γ δ, εἰς μέρη τρία ἴσα τὰ β ζ, ζ η, η ε, γ θ, θ κ, κ δ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ θ ζ, κ η, ζ α, η α, καὶ διαιρεθήσεται τὸ α β γ δ, δοθὲν τραπέζιον εἰς τρία ἴσα μέρη, τὰ α β γ θ ζ, α ζ θ κ η, α η κ δ. Ὅτι μὲν γὰρ τὰ γ ζ, ζ ι, κ ι, ἴσα εἰσί, δείκνυται διὰ τῆς κ β΄: τοῦ παρ: ὅτι δὲ καὶ τὰ α β ζ, α ζ η, α η ε, τρίγωνα ὁμοίως ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις, δείκνυται διὰ τῆς α΄: τοῦ ς΄: τοῦ Στοιχ:, ὥστε ἐὰν ἴσοις τοῖς γ ζ, ζ κ, κ ε, ἴσα προστεθῇ τὰ α β ζ, α ζ η, α η ε, γενήσονται τὰ α β γ θ ζ, α ζ θ κ η, α η κ δ, ἴσα. Τὸ δοθὲν ἄρα τραπέζιον, καὶ τὰ ἑξῆς.

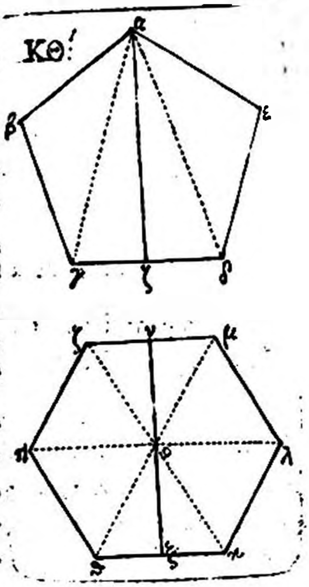
Πρότασις ΚΘ'.

Τὸ δοθὲν πολύπλευρον εἰς δύο ἴσα μέρη διελεῖν.

Ε῎στω α'. διελεῖν τὸ α β γ δ ε, ἰσόπλευρόντε καὶ ἰσογώνιον πολύγωνον· καὶ ἐπεὶ τοῦτο περιττόπλευρόν ἐστι, διαιρεθήτω δίχα ἡ γ δ, αὐτοῦ βάσις κατὰ τὸ ζ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀπεναντίον γωνίας τῆς ὑπὸ β α ε, ἤχθω εὐθεῖα ἡ α ζ, καὶ διαιρεθήσεται τὸ δοθὲν α β γ δ ε, πολύγωνον εἰς δύο μέρη ἴσα τὰ α β γ ζ, α ε δ ζ. εἰ γὰρ αἱ α γ, α δ, ἐπιζευχθῶσιν, εὐχερῶς δειχθήσεται διὰ τῆς δ'. τοῦ α'. τῶν Στοιχειωτῶν, τάτε α β γ, α ε δ, καὶ α γ ζ, α δ ζ, ἴσα, ὥστε ἐὰν ἴσοις τοῖς α β γ, α ε δ, ἴσα προστεθῇ τὰ α γ ζ, α δ ζ, ἔσονται καὶ τὰ ὅλα α β γ ζ, α ε δ ζ, ἴσα. Τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον διαιρεθήσεται καὶ πάντα τ' ἄλλα περιττόπλευρα εἰς δύο ἴσα.

Geom. Lib. 2. Fig. 23.

ΚΘ'.



Ε῎στω β'. διελεῖν τὸ ζ η θ κ λ μ, ἰσόπλευρον καὶ αὐτὸ καὶ ἰσογώνιον, ἀρτιόπλευρον μέντοι, εἰς δύο ὁμοίως ἴσα μέρη. Διαιρεθήτω δὴ ἑκατέρα τῶν ἀπεναντίον αὐτοῦ πλευρῶν, δὲς εἰπεῖν, αἱ ζ μ, θ κ, δίχα κατὰ τὰ ν, καὶ ξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ν ξ, καὶ τὰ ν ζ η θ ξ, ν μ λ κ ξ, χωρία ἴσα ἔσονται. Ε'πιζευχθεισῶν γὰρ τῶν ζ κ, η λ, θ μ, δειχθήσεται διὰ τῆς εἰρημένης τὸ μὲν ζ ο ν, τρίγωνον ἴσον τῷ μ ο ν, τὸ δὲ ζ ο η, τῷ ο λ κ, τὸ δὲ η ο θ, τῷ μ ο λ, καὶ τὸ θ ο ξ, τῷ κ ο ξ, ὥστε καὶ σύμπαντα τὰ ζ ο ν, ζ ο η, η ο θ, θ ο ξ, τρίγωνα ἴσα ἔσονται σύμπασι τοῖς μ ο ν, μ ο λ, λ ο κ, κ ο ξ. Τοῦτον δὲ τὸν τρόπον διαιρεθήσεται καὶ πᾶν ὁ,τιοῦν ἀρτιόπλευρον πολύγωνον ἰσόπλευρόντε καὶ ἰσογώνιον.

Ε'πειδὰν δὲ ζητηθῇ διαιρεθῆναι τὸ δοθὲν πολύπλευρον ἰσόπλευρόντε καὶ ἰσογώνιον, εἴτε ἀρτιόπλευρον, εἴτ' οὖν περιττόπλευρον εἰς ἰσάριθμα μέρη ταῖς αὐτοῦ πλευραῖς, εὑρεθήτω τὸ κέντρον, ἀφ' οὗ ὁ περὶ αὐτὸ καταγράφεται κύκλος, ὡς παραδ. χάριν τοῦ ζ η θ κ λ μ, τὸ ο, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἤχθωσαν ἐφ' ἑκάστην γωνίαν γραμμαὶ, ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος αἱ ο ζ, ο η, ο θ, ο κ, ο λ, ο μ, καὶ διαιρεθήσεται εἰς τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις, ἰσοπληθῆ ταῖς τοῦ δοθέντος πολυγώνου πλευραῖς. τὰ γὰρ ζ ο μ, μ ο λ, λ ο κ, κ ο θ, θ ο η, η ο ζ, τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ, καὶ ἰσάριθμα ταῖς ζ η, η θ, θ κ, κ λ, λ μ, πλευραῖς.

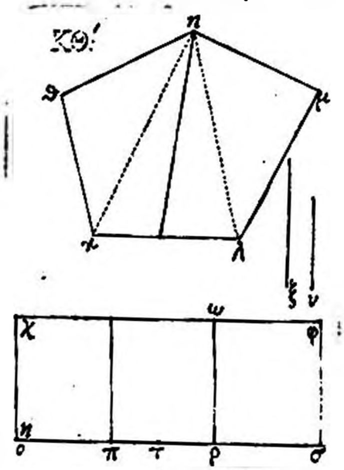
Εἰ δ' αὖθις ζητηθῇ διαιρεθῆναι εἰς μέρη διπλασίονα, ἢ τριπλασίονα, ἢ κατ' ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν πολλαπλάσιον τῷ πλήθει τῶν πλευρῶν, διαιρεθήτω καὶ ἑκάστη

τῶν

τῶν αὐτῶν πλευρῶν εἰς δύο ἴσα, ἢ τρία, ἢ κατ᾽ ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν, καθ᾽ ὃν ζητεῖται ἡ διαίρεσις γενέσθαι, καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἀχθήτωσαν εὐθεῖαι ἐφ᾽ ἕκαστον σημεῖον, καὶ ἔσται τὸ προσαχθέν.

Ἔστω γ΄: διελεῖν τὸ τυχὸν πολύπλευρον η θ κ λ μ, εἰς δύο μέρη κατὰ τὸν δοθέντα λόγον τῆς ν, πρὸς τὸ ξ. Διαιρεθήτω δὴ τὸ δοθὲν η θ κ λ μ, πολύγωνον εἰς τὰ ἐν αὐτῷ τρίγωνα, καὶ εὑρεθήτωσαν αἱ ο π, π ρ, ρ σ, ἀνάλογοι τοῖς η θ κ, η κ λ, η λ μ, τριγώνοις κατὰ τὴν κα΄: τῆς ϛ΄: τῆς παρόντος, καὶ κείσθωσαν ἐπ᾽ εὐθείας, ὥστε μίαν ποιεῖν τὴν ο σ, ἥτις διαιρεθήτω κατὰ τὸ τ, ὥστε ἔχειν τὴν ο τ, πρὸς τὴν τ σ, ὡς ἡ ν, πρὸς τὴν ξ, καὶ συστάθητω τὸ ο σ φ χ, παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ δοθέντι η θ κ λ μ, κατὰ τὴν ιβ΄: τῆς ϛ΄: τῆς παρόντος. καὶ ἐπεὶ τὸ τ, σημεῖον πίπτει ἐπὶ τῆς π ρ, ἀναλογούσης τῷ η κ λ, τριγώνῳ, διαιρεθήτω ἡ κ λ, κατὰ τὸ ψ, ἀναλόγως τῇ π ρ, ὥστε ἔχειν τὴν κ ψ, πρὸς τὴν ψ λ, ὡς ἡ π τ, πρὸς τὴν τ ρ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ η ψ, καὶ διαιρεθήσεται τὸ δοθὲν η θ κ λ μ, πολύπλευρον εἰς δύο μέρη τὰ η θ κ ψ, η ψ λ μ, ἀναλόγως ταῖς ν ξ, δοθείσαις. ἐπεὶ γὰρ τὸ ὅλον ο σ φ χ, ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ δοθέντι η θ κ λ μ, τὸ δὲ π ω, τῷ η κ λ, τριγώνῳ. ἄρα ὡς τὸ ο σ φ χ, ὀρθογώνιον πρὸς τὸ π ω, ἔχει καὶ τὸ η θ κ λ μ, εὐθύγραμμον πρὸς τὸ η κ λ, τρίγωνον, ἀλλ᾽ ὡς τὸ ο σ φ χ, πρὸς τὸ π ω, ἔχει καὶ ἡ ο σ, πρὸς τὴν π ρ, ἄρα καὶ ὡς ἡ ο σ, πρὸς τὴν π ρ, τὸ η θ κ λ μ, πρὸς τὸ η κ λ, τρίγωνον. Αὖθις ἐπεὶ ὡς ἔχει ἡ π ρ, πρὸς τὴν π τ, γέγονε καὶ ἡ κ λ, πρὸς τὴν κ ψ, ὡς δὲ ἡ κ λ, πρὸς τὴν κ ψ, ἔχει καὶ τὸ η κ λ, τρίγωνον πρὸς τὸ η κ ψ, κατὰ τὴν α΄: τῆς ϛ΄: τῆς Στοιχειωτῆ, ἄρα καὶ ὡς ἡ π ρ, πρὸς τὴν π τ, ἔχει τὸ η κ λ, τρίγωνον πρὸς τὸ η κ ψ, ὥστε καὶ δι᾽ ἴσου, ὡς ἔχει ἡ ο σ, πρὸς τὴν π τ, ἔχει καὶ τὸ η θ κ λ μ, πρὸς τὸ η κ ψ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται τὸ η θ κ λ μ, ἔχειν καὶ πρὸς τὸ η θ κ, τρίγωνον ὡς ἡ ο σ, πρὸς τὴν ο π, ὥστε ὡς ἔχει ἡ ο σ, πρὸς τὴν ο τ, ἔχει καὶ τὸ η θ κ λ μ, πρὸς τὸ η θ κ ψ, καὶ διαιρέσει ὡς ἡ τ σ, πρὸς τὴν ο τ, τὸ η ψ λ μ, πρὸς τὸ η θ κ ψ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ο τ, πρὸς τὴν τ σ, τὸ η θ κ ψ, πρὸς τὸ η ψ λ μ. ἡ δὲ ο τ, πρὸς τὴν τ σ, γέγονεν ὡς ἡ ν, πρὸς τὴν ξ, ἄρα καὶ τὸ η θ κ ψ, ἔχει πρὸς τὸ η ψ λ μ, ὡς ἡ ν, πρὸς τὴν ξ. ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον. τὰ αὐτὰ δεῖ ποιεῖν κἂν εἰς πλείω ἐπιταχθῇ διαιρεῖσθαι μέρη τὸ δοθὲν πολύγωνον.

Geom. Lib. 8. Fig. 24.



Τέλος τοῦ Ὀγδόου τῆς Γεωμετρίας Βιβλίου, καὶ πρώτου μέρους.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Ὅροις Α΄: Σῶμα ἐστὶ τὸ μῆκος, πλάτος καὶ βάθος ἔχον, τούτου δὲ εἴδη δύο, στερεὸν καὶ ῥοῶδες.

Β΄: Σῶμα στερεόν ἐστι τὸ δεκτικὸν καθ' αὑτὸ οἱουδήποτε σχήματος.

Γ΄: Σῶμα ῥοῶδες, τὸ ἀνεπίδεκτον καθ' αὑτὸ τινος σχήματος, ἑτέρῳ δὲ περατούμενον καὶ σχηματιζόμενον σώματι. οἷον ὕδωρ, οἶνος, καὶ τὰ παραπλήσια.

Δ΄: Τῶν στερεῶν σωμάτων, τὰ μὲν ἐπιπεδοειδῆ εἰσι, τὰ δὲ καμπυλοειδῆ, καὶ ἄλλα καμπυλοεπίπεδα.

Ε΄: Καὶ ἐπιπεδοειδῆ μέν εἰσι τὰ ὑπὸ ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν περιεχόμενα, ὡς κύβοι, παραλληλεπίπεδα, καὶ ἄλλα.

ϛ΄: Καμπυλοειδῆ δὲ τὰ ὑπὸ καμπύλων ἐπιφανειῶν περιεχόμενα, ὡς σφαῖραι καὶ πάντα τὰ σφαιροειδῆ.

Ζ΄: Καμπυλοεπίπεδα δὲ τὰ ὑπό τε ἐπιπέδων καὶ καμπύλων ἐπιφανειῶν περιεχόμενα, ὡς κῶνοι, κύλινδροι, καὶ τὰ ὅμοια.

Η΄: Πυραμίς ἐστι σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ἀφ' ἑνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνεστός.

Θ΄. Πρίσμα ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο τὰ ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ παραλληλόγραμμα.

Ι΄: Κύβος ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον.

ΙΑ΄: Παραλληλεπίπεδόν ἐστι τὸ κατά τε μῆκος, πλάτος καὶ βάθος παραλλήλοις περιεχόμενον ἐπιπέδοις.

ΙΒ΄: Τετράεδρον ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ τεσσάρων τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

ΙΓ΄: Ὀκτάεδρον ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

ΙΔ΄: Δωδεκάεδρον ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον.

ΙΕ΄: Εἰκοσάεδρον ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

Ιϛ΄:

ΙϚʹ. Σφαῖρά ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι τὸ περιληφθὲν σχῆμα. ἢ τὸ ὑπὸ μιᾶς ἐπιφανείας περιεχόμενον, πρὸς ἣν ἀφ᾽ ἑνὸς τῶν ἐντὸς σημείων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

ΙΖʹ: Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας τὸ σημεῖον ἐκεῖνο καλεῖται.

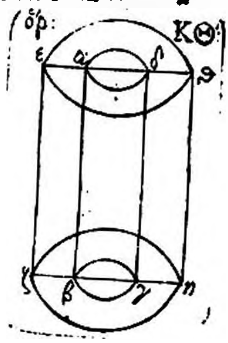
ΙΗʹ: Διάμετρος δὲ σφαίρας ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

ΙΘʹ: Τμῆμα σφαίρας ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπό τε ἐπιπέδου καὶ κυρτῆς ἐπιφανείας περιεχόμενον, μεῖζον μὲν, οὗ τὸ τῆς σφαίρας κέντρον ἐντὸς πίπτει, ἔλαττον δὲ, οὗ τὸ τῆς σφαίρας κέντρον ἐκτὸς ἐναπολείπεται. ὅτε δὲ τὸ τῆς σφαίρας κέντρον ἐν τῷ τοῦ τμήματος ἐπιπέδῳ ἐστὶ, ὃ καὶ βάσις τοῦ τμήματος λέγεται, ἡμισφαίριον καλεῖται.

Κʹ: Ἔλλειψις σφαιροειδής ἐστιν, ὅταν ἐλάττονος τμήματος κύκλου τῆς χορδῆς μενούσης, περιενεχθὲν τὸ τμῆμα, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιενεχθὲν σχῆμα.

ΚΑʹ: Κῶνός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου τριγώνου μενούσης μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρᾶς, περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι τὸ περιληφθὲν σχῆμα, κἂν ἡ μένουσα εὐθεῖα ἴση ᾖ τῇ λοιπῇ τῇ περὶ τὴν ὀρθὴν καὶ περιφερομένῃ, ὀρθογώνιός ἐστιν, ἐὰν δὲ ἐλάττων ἀμβλυγώνιος, ἐὰν δὲ μείζων, ὀξυγώνιος.

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 1.



ΚΒʹ: Ἄξων δὲ κώνου ἐστὶν ἡ μένουσα πλευρὰ, περὶ ἣν τὸ τρίγωνον στρέφεται.

ΚΓʹ: Βάσις δὲ κώνου ἐστὶν ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ τῆς περιφερομένης γραφόμενος πλευρᾶς.

ΚΔʹ: Ὕψος δὲ κώνου ἐστὶν ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἐπὶ τὸ τῆς αὐτοῦ βάσεως ἐπίπεδον πίπτουσα κάθετος.

ΚΕʹ: Κύλινδρός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, περιενεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

ΚϚʹ: Ἄξων δὲ κυλίνδρου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ παραλληλόγραμμον στρέφεται.

ΚΖʹ: Βάσεις δὲ αὐτοῦ οἱ κύκλοι, οἱ ἀπὸ τῶν ἀπεναντίον περιαγομένων δύο πλευρῶν γραφόμενοι.

ΚΗʹ: Ὕψος δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κατὰ κορυφὴν κύκλου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διὰ τοῦ ἑτέρου κύκλου πίπτουσα κάθετος.

ΚΘʹ: Σίφων δὲ κυλινδρικός ἐστι τὸ ἐναπολειπόμενον στερεὸν ἐν τῷ κυλίνδρῳ, ἀφαιρουμένου τοῦ ἐν αὐτῷ ὁμοκέντρου καὶ ἰσοΰψους κυλίνδρου, οἷον ἀ-

φαι-

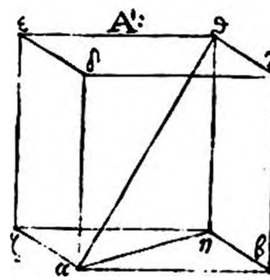
φαιρουμένου τοῦ αβγδ, κυλίνδρου ἀπὸ τοῦ εζηθ, τὸ ἐναπολειπόμενον στερεὸν εβγθ, σίφων κυλινδρικὸς λέγεται.

Πρότασις Α'.

Τὸ τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας τετράγωνον ὑποδιπλάσιόν ἐστι τῆς τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένου κύβου ἐπιφανείας.

Ἔστω κύβος ἐν σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένος ὁ αθ, οὗ διάμετρος ἡ αθ, εὐθεῖα, ἥτις διάμετρός ἐστι καὶ τῆς σφαίρας, ἐν ᾗ ὁ αὐτὸς ἐγγέγραπται κύβος, ὡς δειχθήσεται. Λέγω δὴ τὸ τῆς αθ, τετράγωνον ὑποδιπλάσιον εἶναι τῆς τοῦ αθ, κύβου ἐπιφανείας. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ αη, καὶ ἐπεὶ ἡ θη, πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἑκατέρᾳ τῶν ζη, ηβ, εὐθειῶν, ἄρα καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ τῷ ζβ, πρὸς ὀρθὰς ὁμοίως ἐστὶ κατὰ τὴν δ': τοῦ α: τῶν στερεῶν Εὐκλείδου, ἀλλ' ἐν τῷ ζβ, ἐπιπέδῳ ἐστὶ καὶ ἡ αη, ἄρα ἡ θη, πρὸς ὀρθάς ἐστι καὶ ἐπὶ τῆς αη, εὐθείας κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ αὐτοῦ. ὥστε ἡ ὑπὸ αηθ, γωνία ὀρθή ἐστι, καὶ δι' αὐτὸ τοῦτο τὸ τῆς αθ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τῶν αη, ηθ, τετραγώνοις κατὰ τὴν μζ': τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ. τὸ δὲ τῆς αη, τετράγωνον κατὰ τὴν αὐτὴν ἴσον ἐστὶ τοῖς τῶν αβ, βη, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ αβη, ἄρα τὸ τῆς αθ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τρισὶ τετραγώνοις ἴσοις, τοῖς τε δηλονότι ἀπὸ τῆς αβ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς βη, καὶ ἔτι τῷ ἀπὸ τῆς ηθ, ἀλλ' ἐπεὶ ἑκάστου κύβου ἡ ἐπιφάνεια ἓξ ἴσοις συνίσταται τετραγώνοις, τὸ τῆς αθ, δήπουθεν τετράγωνον ὑποδιπλάσιόν ἐστι τῆς τοῦ αθ, κύβου ἐπιφανείας. Ὅτι δὲ ἡ αθ, ἴση ἐστὶ τῇ τῆς σφαίρας διαμέτρῳ, ἐν ᾗ ὁ αθ, ἐγγέγραπται κύβος, δῆλον. ἡ γὰρ περιέχουσα τὸν αθ, κύβον σφαῖρα ἅπτεται τοῦ αὐτοῦ κατὰ πᾶσαν γωνίαν, ἄλλως γὰρ ὁ κύβος οὐ λέγεται ἐγγεγραμμένος ἐν τῇ σφαίρᾳ. ἡ αθ, ἄρα εὐθεῖα περατοῦται καθ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς περιφερείας τῆς σφαίρας. Ὅτι δὲ καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς διέρχεται, καὶ τοῦτο δῆλον. τὸ γὰρ διὰ τῆς αθ, ἐπίπεδον διαιρεῖ τὸν κύβον εἰς δύο πρίσματα ἴσα, ὧν ἑκάτερον ἐν ἡμισφαιρίῳ περιέχεται, ἀλλ' ἡ οὕτως ἔχουσα ἐν σφαίρᾳ γραμμὴ διάμετρός ἐστι τῆς σφαίρας, ἡ αθ, ἄρα εὐθεῖα διάμετρός ἐστι τῆς σφαίρας, ἐν ᾗ ὁ κύβος ἐγγεγραμμένος ἐστί. Τὸ τῆς διαμέτρου ἄρα τῆς σφαίρας τετράγωνον ὑποδιπλάσιον καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 2.



Πρότασις Β′.

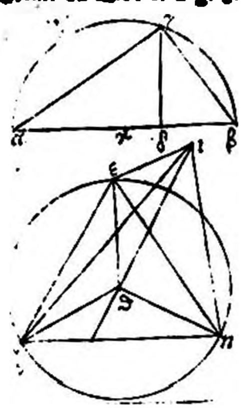
Ἡ τοῦ κύβου διάμετρος δύναται τήν τε τοῦ τετραέδρου πλευρὰν καὶ τὴν τοῦ κύβου τῶν ἐν τῇ αὐτῇ ἐγγεγραμμένων σφαίρᾳ.

Ἔστω κύβος ὁ α θ, οὗ διάμετρος ἡ α θ, εὐθεῖα. Λέγω δὴ τὴν α θ, εὐθεῖαν δύνασθαι τήν τε τοῦ τετραέδρου πλευρὰν τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ ἐγγραφομένου σφαίρᾳ, ἐν ᾧ καὶ ὁ κύβος, καὶ τὴν τοῦ κύβου, ταὐτὸν δ᾽ ἐστὶν εἰπεῖν, τὸ τῆς α θ, τετράγωνον ἴσον εἶναι τῷ τε ἀπὸ τῆς τοῦ τετραέδρου πλευρᾶς τετραγώνῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς τοῦ κύβου. κατὰ γὰρ τὴν ιγ′: τοῦ γ′: τῶν στερεῶν τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραέδρου τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ ἐγγραφομένου σφαίρᾳ. κατὰ δὲ τὴν ιε′: τοῦ αὐτοῦ τὸ τῆς αὐτῆς διαμέτρου τετράγωνον τριπλάσιόν ἐστι τοῦ τετραγώνου τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, ἀλλ᾽ ἡ α θ, ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἐν ᾗ ὁ α θ, κύβος ἐγγράφεται ὡς ἀνωτέρω δέδεικται, ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς α θ, τετράγωνον ἡμιόλιον μέν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραέδρου τετραγώνου, τριπλάσιον δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. ὥστε οἵων μερῶν ἡ τοῦ α θ, κύβου διάμετρος δυνάμει ἐννέα, τοιούτων ἓξ ἡ τοῦ τετραέδρου, καὶ τοιούτων τριῶν ἡ τοῦ κύβου, καὶ ἑπομένως τὸ ἀπὸ τῆς α θ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς τοῦ τετραέδρου πλευρᾶς τετραγώνῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς τοῦ κύβου, τοῦτο δ᾽ ἐστὶ τὸ δύνασθαι. Ἡ τοῦ κύβου ἄρα διάμετρος δύναται, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Γ′.

Ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος τῆς ἐν τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένης σφαίρᾳ δυνάμει ἡμιόλιός ἐστι.

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 3.



Ἔστω διάμετρος σφαίρας ἡ α β, περὶ ἣν γραφήτω ἡμικύκλιον τὸ α γ β, καὶ τμηθήτω ἡ α β, κατὰ τὸ δ, ὥστε τὴν α δ, διπλασίονα εἶναι τῆς δ β, ἀπὸ δὲ τοῦ δ, ἀνεστάθω κάθετος ἡ δ γ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ α γ, γ β· εἶτα διαστήματι τῷ δ γ, γραφήτω κύκλος ὁ ε ζ η, ἀπὸ κέντρου τοῦ θ, καὶ ἐγγραφήτω εἰς αὐτὸν τὸ ε ζ η, ἰσόπλευρον τρίγωνον κατὰ τὴν ιβ′: τοῦ δ′: τοῦ α′: τοῦ παρόντος. ἀπὸ δὲ τοῦ θ, ἀνεστάθω κάθετος ἡ θ ι, ἴση τῇ α δ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ι ε, ι ζ, ι η, καὶ συσταθήσεται ἡ ι ε ζ η, πυραμὶς ἐκ τεσσάρων ἴσων περιεχομένη ἰσοπλεύρων τριγώνων, τῶν ε ζ η, ε ζ ι, ι ζ η,

ιει,

ηι, κατὰ τὴν ιγ': τοῦ γ': τῶν στερεῶν Εὐκλ: , καὶ περιληφθήσεται σφαίρᾳ , ἧς διάμετρος ἡ αβ. Δείκνυται . Ἐπεὶ οὖν ἡ αδ, διπλασίων ἐστὶ τῆς δβ, πάντως γε ἡ ὅλη αβ, ἡμιόλιός ἐστι τῆς αδ, τριπλασία δὲ τῆς δβ, εἰσὶ δὲ καὶ τὰ αβγ, αγδ, τρίγωνα ἰσογώνια, διὰ τὸ ἔχειν τάς τε ὑπὸ αγβ, αδγ, ὀρθὰς , καὶ κοινὴν τὴν ὑπὸ γαδ, κατὰ τὴν δ': ἄρα τοῦ ϛ': Εὐκλ: ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν αγ, ἔστι καὶ ἡ αγ, πρὸς τὴν αδ, κατὰ δὲ τὴν α: τοῦ γ': τοῦ α: μέρους τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αγ, ἔχει , ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν αδ. ἔστι δὲ καὶ ἡ αγ, ἴση τῇ εζ, πλευρᾷ τῆς εζηι, πυραμίδος, ὡς δέδεικται ἐν τῇ ῥηθείσῃ ιγ': προτάσει , καὶ ἡμῖν δειχθήσεται ἐν τῇ κατασκευῇ τοῦ τετραέδρου , ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς εζ, πλευρᾶς τῆς εζηι, πυραμίδος , ἔχει ὡς ἡ αὐτὴ αβ, πρὸς τὴν αδ, ἀλλ' ἡ αβ, ἡμιόλιός ἐστι τῆς αδ, ὡς δέδεικται , ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς εζ, πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. τοῦτο δ' ἐστὶ τὸ δυνάμει εἶναι ἡμιόλιον τὴν αβ, τῆς εζ. Ἡ τῆς σφαίρας ἄρα διάμετρος , καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Δ':

Ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος τετραπλασιεφημίσεια ἐστι τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ κύκλου, τοῦ περὶ τὴν βάσιν γραφομένου τῆς πυραμίδος , τῆς τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένης σφαίρᾳ .

Ἔστω σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, πυραμὶς δὲ τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένη σφαίρᾳ ἡ εζηι, καὶ περὶ τὴν εζη, βάσιν τῆς πυραμίδος κύκλος ὁ εζη, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ εθ. Λέγω δὲ τὴν αβ, τετραπλασιεφημίσειαν εἶναι τῆς εθ. κατὰ γὰρ τὴν ι: τοῦ δ': τοῦ α: μέρους ἡ εζ, δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς εθ, τῆς δὲ εζ, δυνάμει ἡμιόλιός ἐστιν ἡ αβ, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται , οἵων ἄρα ἡ αβ, ἐννέα ἐστὶ δυνάμει , τοιούτων ἕξ, ἡ εζ, καὶ τοιούτων δύο ἡ εθ, ἡ αβ, ἄρα πρὸς τὴν εθ, ἔχει δυνάμει , ὡς ὁ ἐννέα πρὸς τὸν δύο , τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς εθ, ἔχει λόγον , ὃν καὶ ὁ ἐννέα πρὸς τὸν δύο. ἀλλ' ὁ τοῦ ἐννέα λόγος πρὸς τὸν δύο τετραπλασιεφημισύς ἐστι , περιέχει γὰρ τὸν δύο τετράκις καὶ ἥμισυ αὐτοῦ μέρος , ἡ αβ, ἄρα διάμετρος τῆς σφαίρας τετραπλασιεφημίσειά ἐστι τῆς εθ, ἡμιδιαμέτρου τοῦ περὶ τὴν βάσιν τῆς εζηι, πυραμίδος κύκλου τῆς τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένης σφαίρᾳ , ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-

Πρότασις Ε':

Η' ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν τῆς πυραμίδος τῆς τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένης σφαίρᾳ, ἕκτον μέρος ἐστὶ τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας.

Τμηθήτω δὴ ἡ αβ, (1) δίχα κατὰ τὸ κ, καὶ τὸ κ, ἔσται κέντρον τῆς σφαίρας, ἡ δὲ κδ, ἴση τῇ καθέτῳ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν βάσιν πιπτούσῃ τῆς ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ πυραμίδος, ὡς δειχθήσεται. Λέγω οὖν τὴν κδ, ἕκτον μέρος εἶναι τῆς αβ, τουτέστι τὴν αβ, ἑξαπλάσιον τῆς κδ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ αβ, ἡμιόλιος μέν ἐστι τῆς αδ, τριπλασία δὲ τῆς δβ, πάντως γε οἵων μερῶν ἐννέα ἐστὶν ἡ αβ, τοιούτων ἓξ ἡ αδ, καὶ τριῶν ἡ δβ, ἡ δὲ ἡμίσεια τῆς αβ, τεσσάρων μετὰ ἡμίσεως, ὥστε ἡ κβ, τεσσάρων ἐστὶ μερῶν καὶ ἡμίσεως, οἵων ἡ αβ, ἐννέα, ἀλλ᾽ ἡ δβ, ἐστὶ τοιούτων τριῶν, ἡ κδ, ἄρα ἑνὸς καὶ ἡμισέως ἐστιν. ἐπεὶ δὲ ἡ αβ, δέδεικται τῆς δβ, τριπλασία πάντως γε τῆς κδ, ἡμισείας ἑξαπλάσιός ἐστιν, ὥστε ἡ κδ, ἕκτον μέρος ἐστὶ τῆς αβ, διαμέτρου, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ς':

Η' τῆς σφαίρας διάμετρος τοῦ ὕψους τῆς ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ πυραμίδος δυνάμει διπλασιεπιτέταρτός ἐστι.

Ἔστω διάμετρος σφαίρας ἡ αὐτὴ αβ, ὕψος δὲ πυραμίδος τῆς ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ ἡ θι. Λέγω δὴ τὴν αβ, δυνάμει διπλασιεπιτέταρτον εἶναι τῆς θι. ἐπεὶ γὰρ ἡ θι, ἴση λαμβάνεται ἐν τῇ κατασκευῇ τῆς πυραμίδος τῇ αδ, κατὰ τὴν προρρηθεῖσαν ιγ': τοῦ γ': τῶν στοιχείων Εὐκλείδου, πάντως γε ἡ αβ, ἔχει πρὸς τὴν θι, λόγον, ὃν καὶ πρὸς τὴν αδ, δέδεικται δὲ τῆς αδ, ἡμιόλιος, ἄρα καὶ τῆς θι, ἡμιόλιός ἐστιν, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς θι, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τοῦ τῆς αβ, πρὸς τὴν θι, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον ἕξει πρὸς τὸ τῆς θι, ὡς ὁ ἐννέα πρὸς τὸν τέσσαρα, τριῶν γὰρ ἀριθμῶν κειμένων ἐν λόγῳ ἡμιολίῳ, ὡς ὁ θ': ς': δ': ὁ θ': πρὸς τὸν δ': ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἤπερ πρὸς τὸν ς': ἡ δὲ αβ, πρὸς τὴν θι, ἔχει, ὡς ὁ θ': πρὸς τὸν ς': ἡμιόλιος γὰρ ὁ θ': τοῦ ς': ὡς καὶ ἡ αβ, τῆς θι, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θι, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἄρα ὡς ἔχει ὁ θ': πρὸς τὸν δ': ἔχει καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θι. ἀλλ᾽ ὁ θ': τοῦ δ': διπλασιεπιτέταρτός ἐστιν, ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αδ, τετράγωνον διπλασιεπιτέταρτόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς θι, τοῦτο δ᾽ ἐστὶ τὸ δυνάμει διπλασιεπιτέταρτον εἶναι τὴν αβ, τῆς θι. Η' τῆς σφαίρας ἄρα διάμετρος τοῦ ὕψους, καὶ τὰ ἑξῆς.

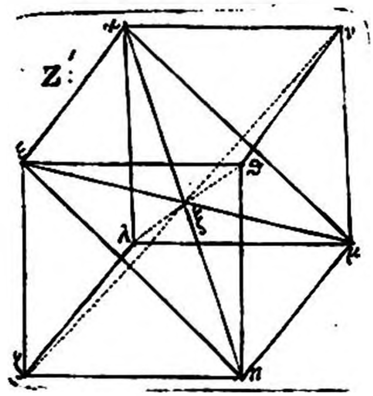
(1) Ὅρα τὸ σχῆμα τῆς ἀνωτέρω γ': προτάσεως.

Πρότασις Ζ΄.

Ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλάσιός ἐστι τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένου σφαίρᾳ.

Ἔστω κύβος ὁ ε ζ η θ ι κ λ μ, σφαίρᾳ τινὶ περιειλημμένος. Λέγω δὴ τὴν τῆς σφαίρας ταύτης διάμετρον δυνάμει τριπλασίονα εἶναι. Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ κ η, κ ε, καὶ ἐπεὶ ἡ ε κ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ε ζ η θ, ἐπίπεδον, ὀρθὴ πάντως ἐστὶ καὶ πρὸς τὴν ε η, κατὰ τὸν γ΄: ὅρον τοῦ α΄: τῶν στερεῶν, ὥστε ἡ ὑπὸ κ ε η, γωνία ὀρθή ἐστιν. Ἐπεὶ δ᾽ αὖθις αἱ ε ζ, ζ η, ἴσαι εἰσί, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ε ζ, ζ η, τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ε η, κατὰ τὴν μζ΄: τοῦ α΄: τῶν Στοιχείων, ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ε η, τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ε ζ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ε ζ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ε κ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι καὶ τὴν ε κ, τῇ ε ζ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ε η, διπλάσιόν ἐστι καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ε κ, συναμφότερα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν κ ε, ε η, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ε κ, ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν κ ε, ε η, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς κ η, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν μζ΄: ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς κ η, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ε κ, ὥστε καὶ ἡ κ η, δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ε κ, ἀλλ᾽ ἡ μὲν κ η, ἴση ἐστὶ τῇ τῆς σφαίρας διαμέτρῳ, ᾗτινι ὁ δοθεὶς περιλαμβάνεται κύβος, ὡς δειξόμεθα, ἡ δὲ κ ε, τῇ τοῦ κύβου πλευρᾷ, ἡ τῆς σφαίρας ἄρα διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς τοῦ τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένου σφαίρᾳ.

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 4.



Ὅτι δὲ ἡ κ η, ἴση ἐστὶ τῇ τῆς σφαίρας διαμέτρῳ, ὑφ᾽ ἧς ὁ δοθεὶς περιλαμβάνεται κύβος, δῆλον. Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ ε μ, μ κ, εὐθεῖαι, καὶ τεμεῖ πάντως ἡ ε μ, τὴν κ η, κατὰ τὸ ξ, ἐν τῷ αὐτῷ γάρ εἰσιν ἐπιπέδῳ, τῷ διὰ τῶν κ μ ε η, δι᾽ οὗ ὁ κύβος δίχα τέμνεται κατὰ τὴν κη΄: τοῦ α΄: τῶν Στερεῶν. Ἐπεὶ οὖν ἡ κ ε, ἴση ἐστὶ τῇ μ η, τοῦτο γὰρ τοῦ κύβου ἴδιον τὸ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ πάσας ἴσας ἔχειν, κοινὴ δὲ ἡ ε η, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ κ ε η, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ μ η ε, ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, πάντως γε κατὰ τὴν δ΄: τοῦ α΄: τῶν Στοιχείων, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ κ η, τῇ μ ε, καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ε η κ, γωνία τῇ ὑπὸ η ε μ, ἡ δὲ ὑπὸ ε κ η, τῇ ὑπὸ η μ ε, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ κ ε η, τῇ ὑπὸ μ η ε, ἴση ὡς δέδεικται, ἀφαιρουμένων ἄρα τῶν ἴσων ε η κ, η ε μ, ἐναπολείπονται ἴσαι καὶ αἱ ὑπὸ κ ε μ, μ η κ. Ὁμοίως δειχθήσονται ἴσαι καὶ

αἱ

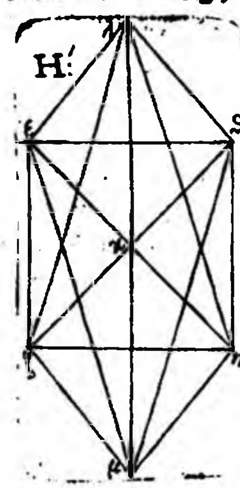
αἱ ὑπὸ η μ ε, ε κ η. Αὖθις ἐπεὶ ἡ ὑπὸ κ η ε, ἴση δέδεικται τῇ ὑπὸ μ ε η, τῇ δὲ ὑπὸ κ η ε, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ η κ μ, διὰ τὸ ἴσας τε καὶ παραλλήλους εἶναι τὰς κ μ, ε η, κατὰ τὴν λγ': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ, δῆλον, ὅτι ἡ ὑπὸ η κ μ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ μ ε η, ἀλλὰ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ μ κ ε, ὅλῃ τῇ ὑπὸ η ε κ, ἴση ἐστὶ διὰ τὸ εἶναι ἑκατέραν ὀρθὴν, ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ μ ε κ, ἴση ἐστὶ λοιπῇ τῇ ὑπὸ η κ ε, ἴσαι ἄρα αἱ ε ξ, κ ξ, καὶ μ ξ, η ξ, κατὰ τὴν ς': τοῦ α': τῶν ἐπιπέδων τοῦ Στοιχειωτοῦ, εἰσὶ δὲ κατὰ τὴν αὐτὴν ἴσαι καὶ αἱ ε ξ, η ξ, καὶ κ ξ, μ ξ, αἱ τέσσαρες ἄρα ξ ε, ξ κ, ξ μ, ξ η, ἴσαι εἰσί, διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσονται ἴσαι καὶ αἱ λοιπαὶ ξ θ, ξ ζ, ξ λ, ξ ν, ὥστε κατὰ τὸν α': ὅρον τοῦ Γεωγραφικοῦ φιλοπονήματος, καὶ δέκατον ἕβδομον τοῦ παρόντος τὸ ξ, σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας, ἐν ᾗ ὁ δοθεὶς κύβος, ἡ δὲ κ η, εὐθεῖα διάμετρος τῆς αὐτῆς σφαίρας.

Πρότασις Η':

Η τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένου σφαίρᾳ.

Ἔστω ὀκτάεδρον ἐν σφαίρᾳ τὸ ε ζ η θ κ λ μ. λέγω δὴ τὴν τῆς σφαίρας διάμετρον δυνάμει διπλασίαν εἶναι τῆς ε ζ, πλευρᾶς τοῦ αὐτοῦ ὀκταέδρου. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ε η, ζ θ, λ μ, τεμνόμεναι κατὰ τὸ κ. καὶ ἐπεὶ ὀκτάεδρόν ἐστι τὸ ὑπὸ ὀκτὼ ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων τριγώνων περιεχόμενον κατὰ τὸν ιγ': ὅρον τοῦ παρόντος, πάντως γε τό, τε ε ζ η θ, καὶ ε λ η μ, ἰσόπλευρά ἐστι, καὶ ἴσα ὡς ὑπὸ ἴσων πλευρῶν περιεχόμενα τῶν ε ζ, ζ η, η θ, θ ε, καὶ ε λ, λ η, η μ, μ ε, ἀλλὰ τῶν τετραπλ: ἐπιπέδ: σχημάτων παραλληλόγρ: εἰσὶ κατὰ τὸ ἔχειν τὰς ἀπεναντίον ἴσας. τὰ γὰρ τοιαῦτα, εἰ μὲν ὀρθογ: ᾖ, τετράγ: ἔσται, εἰ δὲ μὴ ὀρθογώνια, ῥόμβοι, τὰ δὲ παραλληλόγραμμα ἡ διάμετρος δίχα τέμνει κατὰ τὴν λδ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ε ζ η θ, καὶ ε λ η μ, δίχα τέμνονται ὑπὸ τῆς ε η, καὶ τὸ ε ζ η, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ε λ η, τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ ἔχουσι τὰς δύο πλευρὰς ε ζ, ζ η, ταῖς δυσὶ ε λ, λ η, ἴσας, καὶ βάσιν τὴν ε η, κοινὴν, πάντως γε καὶ τὰς γωνίας ἴσας ἔχουσι τὴν μὲν ὑπὸ ε ζ η, τῇ ὑπὸ ε λ η, τὴν δὲ ὑπὸ ζ ε η, τῇ ὑπὸ λ ε η. ὥστε δύο τριγώνων τῶν ε ζ κ, ε λ κ, ἐπεὶ αἱ δύο πλευραὶ ζ ε, ε κ, δυσὶ ταῖς λ ε, ε κ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ἐστὶ δὲ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ζ ε κ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ λ ε κ, ἴση, πάντως γε καὶ βάσις ἡ ζ κ, βάσει τῇ λ κ, ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν κ η, κ θ, κ ε, ἴση τῇ λ κ, ἀλλ' ἡ λ κ, ἴση ἐστὶ τῇ κ μ, ὡς δειξόμεθα, ἄρα αἱ ἀπὸ τοῦ κ, ἀγα-

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 5.



γόμεναι εὐθεῖαι πρὸς τὰ ε, ζ, η, θ, λ, μ, σημεῖα ἴσαι εἰσὶ, σφαῖρα δὲ, ὑφ' ἧς τὸ δοθὲν ὀκτάεδρον περιλαμβάνεται, ἅπτεται τοῦ αὐτοῦ κατὰ πάντα τὰ σημεῖα ταῦτα, τὸ κ, ἄρα κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας, καὶ ἑκάστη τῶν ε η, ζ θ, λ μ, διάμετρος τῆς αὐτῆς. Αὖθις ἐπεὶ αἱ ε κ, ζ κ, η κ, θ κ, ἴσαι, πάντως γε τὸ ε ζ η θ, χωρίον τετράγωνόν ἐστιν, ὥστε ἡ ὑπὸ ε ζ η, γωνία ὀρθή ἐστι καὶ κατὰ τὴν μζ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ ἀπὸ τῆς ε η, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ε ζ, ζ η, ἴσαι δὲ αἱ ε ζ, ζ η, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ε η, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ε ζ, καὶ ἑπομένως ἡ ε η, δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς ε ζ, ἀλλ' ἡ μὲν ε η, διάμετρός ἐστι τῆς σφαίρας, ὑφ' ἧς τὸ δοθὲν περιλαμβάνεται ὀκτάεδρον, ὡς δέδεικται, ἡ δὲ ε ζ, πλευρὰ τοῦ αὐτοῦ ὀκταέδρου, ἡ τῆς σφαίρας ἄρα διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένου σφαίρᾳ.

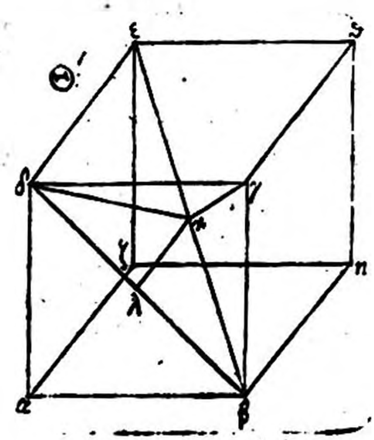
Ὅτι δὲ ἡ λ κ, ἴση ἐστὶ τῇ κ μ, δῆλον, ἰσόπλευρα γὰρ καὶ ἰσογώνιά εἰσι τὰ λ ε κ, μ ε κ, τρίγωνα.

Πρότασις Θ':

Ἡ τῆς σφαίρας ἡμιδιάμετρος δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς καθέτου τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἐν αὐτῇ κύβου πιπτούσης.

Ἔστω ὁ α θ, κύβος ἐν σφαίρᾳ, ἧς διάμετρος ἡ ε β, κέντρον δὲ τὸ κ, καὶ πιπτέτω κάθετος ἀπὸ τοῦ κ, ἐπὶ τῆς α β γ δ, πλευρᾶς τοῦ αὐτοῦ κύβου ἡ κ λ, ὅτι δὲ ἡ κ λ, ἐν τῷ μεσαιτάτῳ τοῦ α β γ δ, πίπτει, δῆλον. Ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ κ, διὰ τῶν α β γ δ, σημείων εὐθεῖαι ἀχθῶσιν, ὀρθὴ συσταθήσεται πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ α β γ δ, τετράγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ κ, σημεῖον, ὥστε ἡ κ λ, ὕψος ἔσται τῆς α β γ δ κ, ὀρθῆς πυραμίδος, τὸ δὲ λ, σημεῖον κέντρον τῆς α β γ δ, βάσεως. εἰ γὰρ μὴ, οὐδὲ ἡ α β γ δ κ, πυραμὶς ὀρθὴ ἂν εἴη. Ἐπεζεύχθω δὲ ἡ δ β, διαγώνιος, καὶ διχοτομεῖται πάντως διὰ τοῦ λ, δίχα γὰρ τέμνει τὸ α β γ δ, τετράγωνον. Λέγω δὴ τὴν β κ, ἡμιδιάμετρον τῆς σφαίρας δυνάμει τριπλασίαν εἶναι τῆς κ λ. τὰ γὰρ β ε δ, β κ λ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν, ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσιν, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ β ε, πρὸς τὴν ε δ, ἡ β κ, πρὸς τὴν κ λ, ἀλλ' ἡ β ε, δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς ε δ,

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 6.



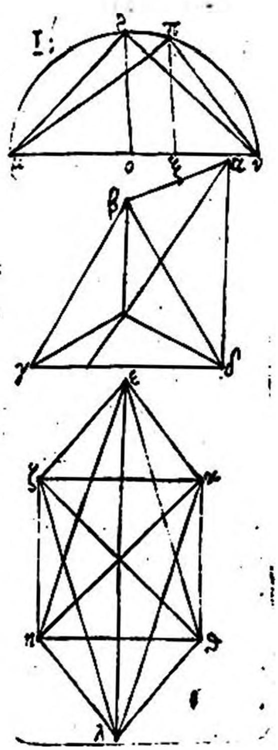
καὶ

καὶ τὴν ζ΄: τοῦ παρόντος, ἄρα καὶ ἡ βκ, δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς κλ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ι΄.

Ἡ τοῦ τετραέδρου πλευρὰ δυνάμει ἐπίτριτός ἐστι τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου τοῦ τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένου σφαίρᾳ.

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 7.



Ἔστω τετράεδρον μὲν τὸ αβγδ, ὀκτάεδρον δὲ τὸ εζηθκλ, καὶ σφαίρας διάμετρος ἡ μν, ὥστε τὴν σφαῖραν ἄμφω ταῦτα περιλαμβάνειν. Λέγω δὴ ὅτι ἡ βγ, τοῦ τετραέδρου πλευρὰ δυνάμει ἐπίτριτός ἐστι τῆς εζ, πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου. Τμηθήτω ἡ μν, κατὰ μὲν τὸ ξ, ὥστε εἶναι τὴν μξ, διπλασίονα τῆς ξν, κατὰ δὲ τὸ ο, δίχα, καὶ ἀνεστάθωσαν ἐπ' αὐτῆς αἱ ξπ, ορ, πρὸς ὀρθάς. Δείκνυται· ἡ μπ, ἴση ἐστὶ τῇ βγ, πλευρᾷ τοῦ τετραέδρου κατὰ τὴν ιγ΄: τοῦ γ΄: τῶν Στοιχείων, ἡ δὲ μρ, ἴση τῇ εζ, πλευρᾷ τοῦ ὀκταέδρου κατὰ τὴν ιδ΄: τοῦ αὐτοῦ. ἀλλ' ἡ μν, διάμετρος τῆς σφαίρας δυνάμει ἡμιόλιός ἐστι τῆς μπ, κατὰ τὴν γ΄: τοῦ παρόντος, τῆς δὲ μρ, κατὰ τὴν η΄: δυνάμει διπλασίων, ἄρα οἵων μερῶν ἓξ δυνάμει ἡ μν, ἐστὶ, τοιούτων τεσσάρων δυνάμει ἐστὶν ἡ βγ, καὶ τοιούτων τριῶν ἡ εζ, αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι μν, βγ, εζ, ἔχουσιν ἀναλόγως τοῖς ϛ΄. δ΄. γ΄. ἀριθμοῖς. ἐπεὶ δὲ ὁ τοῦ δ΄. λόγος πρὸς τὸν γ΄. ἐπίτριτός ἐστιν, ἔχει γὰρ ὅλον τὸν γ΄, καὶ γ΄: αὐτοῦ μέρος, ὡς δὲ ὁ δ΄, πρὸς τὸν γ΄, ἔχει ὡς δέδεικται καὶ ἡ βγ, πλευρὰ τετραέδρου πρὸς τὴν εζ, πλευρὰν ὀκταέδρου, ἄρα καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραέδρου δυνάμει ἐπίτριτός ἐστι τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου, τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένου σφαίρᾳ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΑ΄.

Ἐὰν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ τετραέδρόν τε καὶ ὀκτάεδρον περιληφθῇ, τοῦ μὲν τετραέδρου ἡ βάσις ἐπίτριτος ἔσται τῆς βάσεως τοῦ ὀκταέδρου, ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου ἐπιφάνεια ἡμιόλιος τῆς ἐπιφανείας τοῦ τετραέδρου.

Ἔστω τετράεδρον τὸ α β γ δ, (ὅρα πρ: ι΄:) καὶ ὀκτάεδρον τὸ ε ζ η θ κ λ, τῇ αὐτῇ περιλαμβανόμενα ἄμφω σφαίρᾳ, ἧς διάμετρος ἡ μ ν. Λέγω δὴ α΄: ὅτι ἡ β γ δ, βάσις τοῦ τετραέδρου ἐπίτριτός ἐστι τῆς ε ζ η, βάσεως τοῦ ὀκταέδρου. Ἐπεὶ γὰρ ἡ β γ, δυνάμει ἐπίτριτός ἐστι τῆς ε ζ, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται, πάντως γε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς β γ, τετράγωνον ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ε ζ, τετραγώνου, ἀλλ᾽ ὡς τὰ τετράγωνα ταῦτα πρὸς ἄλληλα ἔχουσιν, οὕτω καὶ τὰ τρίγωνα β γ δ, ε ζ η, πρὸς ἄλληλα ἔχουσι κατὰ τὴν α: τοῦ ς΄: τῶν Στοιχ: ἰσογώνια γάρ, ἄρα τὸ β γ δ, τρίγωνον βάσις τετραέδρου ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ ε ζ η, τριγώνου βάσεως τοῦ ὀκταέδρου, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λέγω β΄: τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὀκταέδρου ἡμιόλιον εἶναι τῆς ἐπιφανείας τοῦ τετραέδρου. Ἐπεὶ γὰρ ἡ βάσις τοῦ τετραέδρου ἐπίτριτός ἐστι τῆς βάσεως τοῦ ὀκταέδρου, ὡς ἤδη δέδεικται, πάντως γε οἵων μερῶν τεσσάρων ἐστὶν ἡ τοῦ τετραέδρου βάσις, τοιούτων τριῶν ἡ τοῦ ὀκταέδρου, καὶ ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὡς ὁ δ΄: πρὸς τὸν γ΄: ἀλλ᾽ ἡ μὲν τοῦ τετραέδρου ἐπιφάνεια τετραπλάσιός ἐστι τῆς αὐτοῦ βάσεως, ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου ὀκταπλάσιος, καθ᾽ ἃ καὶ τοὔνομα ἑκατέρου δηλοῖ. ἐὰν δὲ ὁ δ΄: τετραπλασιασθῇ, γενήσεται ὁ ις΄: τοῦ δὲ γ΄: ὀκταπλασιασθέντος γίγνεται ὁ κδ΄: ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ τετραέδρου ἔσται μερῶν ις΄: τοιούτων, οἵων ἡ τοῦ ὀκταέδρου ἐπιφάνεια τεσσάρων ἐστὶ πρὸς τοῖς εἴκοσι, καὶ ἕξει ἡ τοῦ ὀκταέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ τετραέδρου, ὡς ὁ κδ΄: πρὸς τὸν ις΄: ἀλλ᾽ ὁ κδ΄: τοῦ ις΄: ἡμιόλιός ἐστιν, ἔχει γὰρ ὅλον τὸν ις΄: καὶ τὸ τούτου ἥμισυ, ἄρα καὶ ἡ τοῦ ὀκταέδρου ἐπιφάνεια ἡμιόλιός ἐστι τῆς τοῦ τετραέδρου ἐπιφανείας. Ἐὰν ἄρα τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ τετράεδρόν τε καὶ ὀκτάεδρον, καὶ τὰ ἑξῆς.

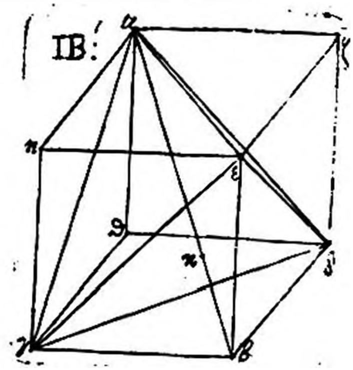
Πρότασις ΙΒ΄.

Ἐὰν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ τετράεδρόν τε καὶ κύβος περιληφθῶσι, τὸ τοῦ κύβου στερεὸν τριπλάσιόν ἐστι τοῦ στερεοῦ τοῦ τετραέδρου.

Ἔστω ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ, ἧς διάμετρος ἡ α β, τετράεδρον μὲν τὸ α γ δ ε, ὑπὸ τεσσάρων ἰσοπλεύρων τριγώνων περιεχόμενον τῶν α γ δ, α δ ε, α ε γ, γ δ ε, κύβος

δὲ

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 2.



δὲ ὁ γζ, ἡ βάσις μὲν ἡ γβεη ὕψος δὲ τὸ γθ. Λέγω δὴ τὸν γζ, κύβον τριπλασίονα εἶναι τοῦ αγδε, τετραέδρου. Ἐπεὶ γὰρ ἡ γβεη βάσις διαιρεῖται εἰς δύο τρίγωνα ἴσα ὑπὸ τῆς γε, διαγωνίου κατὰ τὴν λδ΄: τοῦ α΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὰ γβε, γηε, τρίγωνα, πάντως γε αἱ αηγε, αγβε, πυραμίδες ἰσοϋψεῖς οὖσαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ κατὰ τὴν ε΄: τοῦ ιβ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. αἱ γὰρ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσίν, ὡς αἱ βάσεις, ἀλλ' αἱ γηε, γβε, βάσεις τῶν αηγε, αγβε, πυραμίδων τῶν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὐσῶν τὸ αη ἴσαι εἰσίν, ἴσαι ἄρα καὶ αἱ πυραμίδες εἰσί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ αγδθ, αγβδ, καὶ αδεζ, αδβε, πυραμίδες ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἀλλ' αἱ αηγε, αγδθ, αδεζ, ἴσαι εἰσὶ διὰ τὸ τὰς αὐτῶν βάσεις τε καὶ πλευρὰς ἴσας εἶναι, ἄρα ὁ γζ, κύβος διαιρεῖται εἰς πυραμίδας ἓξ ἴσας ἀλλήλαις, τὰς αηγε, αγδθ, αδεζ, αγβε, αγβδ, αδβε, ὥστε αἱ τρεῖς αηγε, αγδθ, αδεζ, σύμπασαι ἴσαι εἰσὶ συμπάσαις ταῖς λοιπαῖς τρισὶ αγβε, αγβδ, αδβε, ταῖς δὲ τρισὶ ταύταις αγβε, αγβδ, αδβε, ἴσον ἐστὶ τὸ αγδε, τετράεδρον, καὶ βγδε, πυραμίς, αἱ τρεῖς ἄρα πρῶται πυραμίδες αηγε, αγδθ, αδεζ, ἴσαι εἰσὶ τῷ τε αγδε, τετραέδρῳ, καὶ βγδε, πυραμίδι. Αὖθις ἐπεὶ ἡ αβ, διάμετρος τῆς σφαίρας ἡμιόλιός ἐστι τοῦ ὕψους τοῦ ἐν αὐτῇ αγδε, τετραέδρου κατὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ ἁπλῶς τετραέδρου τὴν ἐν τῇ ιγ΄: τοῦ ιγ΄: τοῦ Στοιχ:, πάντως γε ἡ αὐτὴ αβ διάμετρος τῆς σφαίρας τριπλάσιός ἐστι τοῦ ὕψους τῆς βγδε, πυραμίδος, τὸ δὲ ακ, ὕψος τοῦ αγδε, τετραέδρου διπλάσιόν ἐστι τοῦ βκ, ὕψους τῆς βγδε, πυραμίδος. ἀλλ' αἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν ὡς τὰ ὕψη, ὡς ὀψόμεθα ἐν τῷ περὶ στερεομετρίας, ἄρα τὸ αγδε, τετράεδρον διπλάσιόν ἐστι τῆς βγδε, πυραμίδος, τὸ δὲ ἐκ συναμφοτέρων τοῦ τε αγδε, τετραέδρου, καὶ βγδε, πυραμίδος μόνου τοῦ αγδε τετραέδρου ἡμιόλιόν ἐστιν, ὥστε καὶ αἱ τρεῖς πρῶται πυραμίδες αηγε, αγδθ, αδεζ, τοῦ αγδε, τετραέδρου ἡμιόλιοί εἰσι, προστιθεμένης δὲ ταῖς αὐταῖς τῆς βγδε, πυραμίδος, σύμπασαι αἱ τέσσαρες περὶ τὸ τετράεδρον πυραμίδες αἱ αηγε, αγδθ, αδεζ, βγδε, διπλάσιοί εἰσι τοῦ αγδε, τετραέδρου, ὥστε τὸ αγδε, τετράεδρον γ΄: μέρος ἐστὶ τοῦ γζ, κύβου, οὗτος γὰρ σύγκειται ἔκ τε τῶν εἰρημένων τεσσάρων πυραμίδων, καὶ τοῦ τετραέδρου, τῶν δὲ τεσσάρων πυραμίδων αἱ τρεῖς μόναι, ὡς ἐν

λαμ-

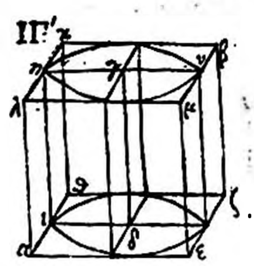
λαμβανόμεναι ἡμιολίῳ λόγον ἔχουσι πρὸς τὸ α γ δ ε, τετράεδρον, περιέχον αὐτὸ ἅπαξ μετὰ τοῦ ἡμίσεως, προσλαβοῦσαι δὲ καὶ τὴν β γ δ ε, πυραμίδα ἡμίσειαν οὖσαν τοῦ αὐτοῦ α γ δ ε, τετραέδρου περιέχουσι τοῦτο δίς. Ἐὰν ἄρα τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ τετράεδρόν τε καὶ κύβος περιληφθῶσι, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΓ'.

Ἡ ἐπιφάνεια παντὸς πρίσματος περὶ ὀρθὸν περιγραφομένου κυλίνδρου, ἴση ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος καὶ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου περιγραφομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἔστω πρίσμα τὸ α β, οὗ βάσις ἡ α ζ, περὶ ὀρθὸν κύλινδρον περιγεγραμμένον τὸν ι ν. Λέγω ὅτι ἡ τοῦ α β, πρίσματος ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τῆς αὐτοῦ α ζ, βάσεως, καὶ γ δ, ὕψους περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ βάσις τοῦ α β, πρίσματος τετράπλευρός ἐστι, πάντως γε τὸ αὐτὸ πρίσμα ὑπὸ τεσσάρων περιέχεται παραλληλογράμμων τῶν α κ, θ β, β ε, α μ, ἀλλὰ τὸ μὲν α κ, περιέχεται ὑπό τε τῆς θ κ, καὶ α θ, τὸ δὲ θ β, ὑπό τε τῆς θ κ, καὶ θ ζ, τὸ δὲ β ε, ὑπό τε τῆς β ζ, καὶ ζ ε, καὶ τὸ α μ ὑπό τε τῆς λ α, καὶ α ε, αἱ δὲ κ θ, β ζ, λ α, ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις, ἄρα τὸ ὑπό τε τῆς κ θ, καὶ τῆς περιμέτρου τῆς α ζ, βάσεως περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τοῖς α κ, θ β, β ε, α μ, παραλληλογράμμοις, ἀλλ' ἡ μὲν θ κ, ἴση ἐστὶ τῷ ὕψει τοῦ ι ν, κυλίνδρου, τὰ δὲ α κ, θ β, β ε, α μ, παραλληλόγραμμα ἴσα τῇ τοῦ α β, πρίσματος ἐπιφανείᾳ, ἄρα ἡ τοῦ α β, πρίσματος ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ ὑπό τε τοῦ ὕψους τοῦ ι ν, κυλίνδρου, καὶ τῆς περιμέτρου τῆς α ζ, βάσεως, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Geom. Sol. Lib. I. Fig. 9.



Πρότασις ΙΔ'.

Ἡ τοῦ πρίσματος ἐπιφάνεια τοῦ εἰς ὀρθὸν ἐγγεγραμμένου κυλίνδρου ἴση ἐστὶ τῷ ὑπό τε τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος.

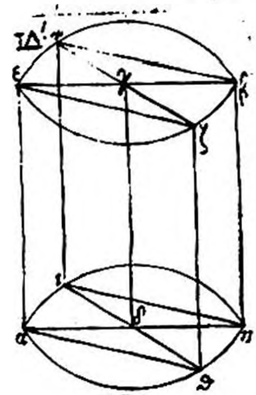
Ἔστω πρίσμα τὸ α β, οὗ βάσις ἡ α η, ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν α η β ε, κύλινδρον. Λέγω ὅτι ἡ τοῦ α β, πρίσματος ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ ὑπό τε τοῦ γ δ, ἄξονος τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῆς περιμέτρου τῆς α η, βάσεως τοῦ αὐτοῦ πρίσματος. ἐπεὶ γὰρ τοῦ α β, πρίσματος ἡ α η, βάσις τετράπλευρός ἐστι, πάντως γε ἡ ἐπι-

φάνεια

φάνεια αὐτοῦ ἴση ἐστὶ τέτταρσι παραλληλογράμμοις τοῖς α κ, ι ζ, ζ η, η κ, ἀλλὰ τὰ τέσσαρα ταῦτα παραλληλόγραμμα ἴσα εἰσὶ σύμπαντα τῷ ὑπό τε τοῦ ὕψους τοῦ αὐτοῦ πρίσματος καὶ τῆς περιμέτρου τῆς α η βάσεως, τὸ δὲ τοῦ πρίσματος ὕψος ἴσον ὁμοίως ἐστὶ τῷ τοῦ κυλίνδρου ἄξονι, ἄρα ἡ τοῦ α β, πρίσματος ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ ὑπό τε τοῦ ὕψους τοῦ α η β, κυλίνδρου, καὶ τῆς περιμέτρου τῆς α η, βάσεως τοῦ α β, πρίσματος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Geom. Sol.Lib. 1. Fig.10.

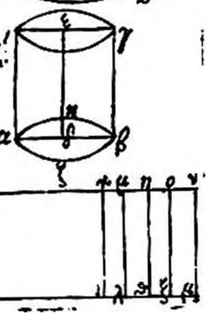
ΙΔ'



Πρότασις ΙΕ'.

Ἡ τοῦ ὀρθοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ ὑπό τε τοῦ ἄξονος, καὶ τῆς περιφερείας τῆς αὐτοῦ βάσεως περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

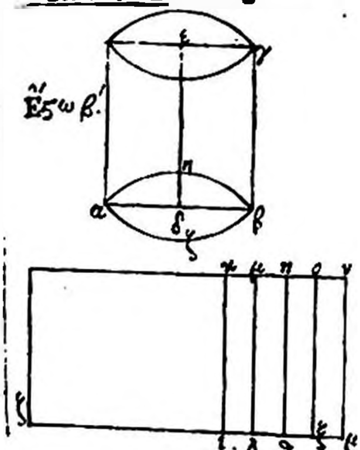
ΙΕ'



Ἔστω κύλινδρος ὀρθὸς ὁ α γ, οὗ ἄξων ὁ δ ε, βάσις δὲ ὁ α ζ β η, κύκλος. Λέγω δὴ τὴν τοῦ α γ, κυλίνδρου ἐπιφάνειαν ἴσην εἶναι τῷ ὑπό τε τοῦ δ ε, ἄξονος, καὶ τῆς περιφερείας τοῦ α ζ β η κύκλου. Ἔστω γὰρ τὸ ζ η, ὀρθογώνιον περιεχόμενον ὑπό τε τῆς η θ, καὶ ζ θ, καὶ κείσθω τὴν μὲν η θ, ἴσην εἶναι τῷ δ ε, ἄξονι, τὴν δὲ ζ θ, ἴσην τῇ τοῦ α ζ β η, κύκλου περιφερείᾳ, καὶ τοῦτο ἔσται ἴσον τῇ τοῦ α γ, κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μεῖζον ἔσται, ἢ ἔλαττον. ἔστω δὴ α: μεῖζον τὸ ζ η, ὀρθογώνιον τῆς τοῦ α γ, κυλίνδρου ἐπιφανείας. καὶ ἐπεὶ ἡ η θ, ὑπόκειται ἴση τῷ δ ε, ἄξονι, ἡ δὲ ζ θ, ἴση τῇ τοῦ α ζ β η, κύκλου περιφερείᾳ, ἀφαιρείσθω ἡ ζ ι, ἐλάττων τῆς τοῦ α ζ β η, κύκλου περιφερείας, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ζ κ, ὀρθογώνιον, καὶ ἔστω τοῦτο ἴσον τῇ τοῦ α γ, κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ζ ι, ἐλάττων ὑπόκειται τῆς τοῦ α ζ β η, κύκλου περιφερείας, πάντως γε καὶ τὸ β': πόρισμα τῆς ιζ': τοῦ δ': τοῦ α: μέρους, δυνατὰ ἐγγραφῆναι εἰς τὸν α ζ β η, κύκλον πολύγωνον, οὗ ἡ περίμετρος μείζων ἔσται τῆς ζ ι, τοῦτο δὲ πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸν δ ε, ἄξονα, συσταθήσεται πρίσμα, οὗ ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἔσται τῷ ὑπό τε τοῦ δ ε, ἄξονος τοῦ α γ, κυλίνδρου, καὶ μείζονος τῆς ζ ι, εὐθείας περιεχομένῳ. Ἔστω δὴ τοῦτο τὸ ζ μ, ὀρθογώνιον, οὗ ἡ ζ λ, πλευρα μείζων ἐςὶ τῆς ζι, ἀλλὰ τὸ ζμ, ὀρθογώνιον μεῖζον ἐςὶ τοῦ ζκ, καὶ τὸ μὲν ζκ, ὑπετέθη ἴσον τῇ τοῦ αγ, κυλίνδου ἐπιφανείᾳ, τὸ δὲ ζμ, ἴσον τῷ ἐγγεγραμμένῳ πρίσματι εἰς τὸν αγ, κύλινδρον, οὗ ἡ τῆς βάσεως περίμετρος ἴση ἐςὶ τῇ ζλ, ἄρα εἰς τὸν αγ, κύλινδρον ἐγγέγραπται πρίσμα, οὗ ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐςὶ τῆς τοῦ αγ, κυλίνδρου ἐπιφανείας, ὅπερ ἀδύνατον. περιέχεται γὰρ ὑπὸ τοῦ κυλίνδρου. τὸ ζκ, ἄρα ὀρθογώνιον οὐκ ἔςι μεῖζον τῆς τοῦ αγ, κυλίνδρου ἐπιφανείας.

Ἔςω β': τὸ ζκ, ὀρθογώνιον ἔλαττον τῆς τοῦ αγ, κυλίνδρου ἐπιφανείας. Εἰλήφθω δὴ ἡ ζμ, μείζων τῆς ζθ, ἴσης ὑποτεθείσης τῇ τοῦ αζβη, κύκλου περιφερείᾳ, καὶ συνεςάθω τὸ ζν, ὀρθογώνιον, καὶ ἔςω τοῦτο ἴσον τῇ τοῦ αγ, κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ζμ, μείζων ἐςὶ τῆς τοῦ αζβη, κύκλου περιφερείας, πάντως γε κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ιζ': τοῦ δ': τοῦ α: μέρους, δυνατὸν περιγραφῆναι περὶ τὸν αζβη, κύκλον πολύγωνον, οὗ ἡ περίμετρος ἐλάττων ἔςαι τῆς ζμ, τούτου δὲ πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸν δε, ἄξονα, συςαθήσεται πρίσμα, οὗ ἡ ἐπιφάνεια κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἴση ἔςαι τῷ ὑπό τε τῆς αὐτοῦ βάσεως καὶ τοῦ ἄξονος τοῦ αγ, κυλίνδρου.

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 11.



Ἔςω δὴ ὀρθογώνιον, ᾧτινι ἴσον ἐςὶ τὸ αὐτὸ περιγραφόμενον πρίσμα περὶ τὸν αγ, κύλινδρον τὸ ζο, οὗ ἡ ζξ, πλευρὰ ἐλάττων ἐςὶ τῆς ζμ, ἀλλὰ τὸ ζο, ἔλαττόν ἐςι τοῦ ζν, ὑποτιθεμένου ἴσου τῇ τοῦ αγ, κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ, ἄρα καὶ ἡ τοῦ περιγραφομένου πρίσματος περὶ τὸν αγ, κύλινδρον ἐπιφάνεια, ᾧτινι ἴσον ἐςὶ τὸ ζο, ὀρθογώνιον, ἐλάττων ἐςὶ τῆς τοῦ αγ, κυλίνδρου ἐπιφανείας, περιέχει γὰρ τὸν αγ, κύλινδρον. τὸ ζκ, ἄρα οὐκ ἔςιν ἔλαττον τῆς τοῦ αγ, κυλίνδρου ἐπιφανείας, δέδεικται δὲ οὐδὲ μεῖζον, ἴσον ἄρα. Ἡ τοῦ ὀρθοῦ κυλίνδρου ἄρα ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ τῷ ὑπό τε τοῦ ἄξονος καὶ τῆς περιφερείας, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

Ἐκ τῶν εἰρημένων δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι αἱ τῶν ὀρθῶν κυλίνδρων ἐπιφάνειαι τῶν τὸ αὐτὸ ἐχόντων ὕψος πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν ὡς αἱ τῶν βάσεων αὐτῶν διάμετροι. αἱ γὰρ τῶν τοιούτων κυλίνδρων ἐπιφάνειαι ἔχουσι λόγον, ὃν καὶ τὰ ὀρθογώνια, οἷς τισιν ἴσαι εἰσὶν, τὰ δὲ ὀρθογώνια ταῦτα ἔχουσιν πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ τῶν βάσεων τῶν κυλίνδρων περιφέρειαι, αἱ δὲ τῶν βάσεων τῶν κυλίνδρων περιφέρειαι ἔχουσιν ὡς αἱ αὐτῶν διάμετροι.

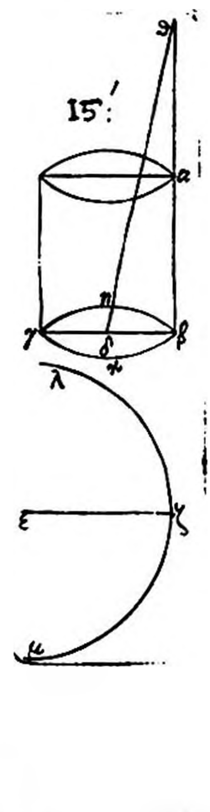
ΠΟΡΙΣΜΑ. Β'.

Ἔτι αἱ τῶν ὀρθῶν κυλίνδρων ἐπιφάνειαι τῶν ἴσας ἐχόντων τὰς βάσεις, πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν ὡς τὰ ὕψη, ἤτοι οἱ αὐτῶν ἄξονες. αἱ γὰρ τῶν τοιούτων κυλίνδρων ἐπιφάνειαι ἴσαι εἰσὶν ὀρθογωνίοις τοῖς τὸ αὐτὸ ἔχουσιν ὕψος, τὰ δὲ τοιαῦτα ὀρθογώνια πρὸς ἄλληλά εἰσιν ὡς αἱ αὐτῶν βάσεις, ἀλλὰ τῶν ὀρθογωνίων, οἷς αἱ τῶν κυλίνδρων ἐπιφάνειαι τῶν τὰς βάσεις ἴσας ἐχόντων, ἴσαι εἰσὶν, αἱ μὲν βάσεις ἴσαι εἰσὶ τοῖς τῶν κυλίνδρων ἄξοσι, τὸ δὲ ὕψος ταῖς τῶν βάσεων τῶν αὐτῶν κυλίνδρων περιφερείαις, ἄρα καὶ οἱ κύλινδροι οἱ τὰς βάσεις ἴσας ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ἔχουσιν ὡς οἱ αὐτῶν ἄξονες.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Γ'.

Ἔτι αἱ τῶν κυλίνδρων ἐπιφάνειαι, ὧν τὰ ὕψη, ἤτοι οἱ ἄξονες, ταῖς τῶν βάσεων ἀντιπεπόνθασι διαμέτροις, ἴσαι εἰσὶ, καὶ ἀνάπαλιν, τῶν κυλίνδρων, ὧν αἱ ἐπιφάνειαι ἴσαι, τὰ ὕψη, ἤτοι οἱ ἄξονες ταῖς τῶν βάσεων αὐτῶν διαμέτροις ἀντιπεπόνθασι. τοῦτο γὰρ καὶ τοῖς ὀρθογωνίοις ἕπεται, οἷς αἱ τῶν κυλίνδρων ἐπιφάνειαι ἴσαι. *Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 12.*

Πρότασις Ις'.



Ἡ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἐστὶν ἴση κύκλῳ, οὗ ἡ ἡμιδιάμετρος μέση ἐστὶν ἀνάλογος τοῦ ὕψους καὶ διαμέτρου τῆς τοῦ κυλίνδρου βάσεως.

Ἔστω κύλινδρος ὁ γα, οὗ ὕψος ἡ αβ, βάσις δὲ ὁ γηβκ, κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ γβ, καὶ εὑρεθήτω μέση ἀνάλογος τῶν αβ, βγ, ἡ εζ. κέντρῳ μὲν τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ εζ, γραφήτω κύκλος ὁ λζμ, καὶ τούτῳ ἔσται ἴση ἡ τοῦ γα, κυλίνδρου ἐπιφάνεια. Ἀχθήτω ἡ αβ, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπὶ τὸ θ, ὥστε τὴν βθ, διπλασίαν εἶναι τῆς βα· καὶ ἐπεὶ ἡ εζ, μέση ἀνάλογός ἐστι τῶν αβ, βγ, πάντως γε τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς εζ, τετραγώνῳ κατὰ τὴν ιζ'. τοῦ ς'. τῶν Στοιχείων, ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν θβ, βδ, ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν θβ, βδ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς εζ, τετραγώνῳ, ὥστε ἡ εζ, μέση ἀνάλογός ἐστι καὶ τῶν βδ, βθ, καὶ ἑπομένως ἡ δβ, πρὸς τὴν βθ, ἐν ὑποδιπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἤπερ πρὸς τὴν εζ. ἀλλὰ καὶ ὁ γηβκ, κύκλος πρὸς τὸν λζμ, κύκλον ἐν ὑποδιπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἤπερ ἡ δβ, ἡμιδιάμετρος πρὸς τὴν εζ, ἡμιδιάμετρον κατὰ τὴν α: τοῦ γ': τοῦ α: μέρους, ἄρα ὁ γηβκ, κύκλος πρὸς τὸν λζμ, ἔχει ὡς ἡ δβ, εὐθεῖα πρὸς τὴν βθ. Αὖθις ἐπεὶ ἡ τοῦ γα, κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς αβ, εὐθείας καὶ γηβκ, περιφερείας περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ κατὰ τὴν ἀνωτέρω, τὸ δὲ ὑπό τε τῆς αβ, καὶ γηβκ, περιφερείας περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ κατὰ τὴν ιβ': τοῦ γ': οὗ ἡ μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρὰ ἐστὶν ἡ βθ, ἡ δὲ ἑτέρα ἡ τοῦ γηβκ, κύκλου περιφέρεια, ἄρα ἡ τοῦ γα, κυλίνδρου περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῷ τούτῳ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ἀλλὰ καὶ ὁ γηβκ, κύκλος ἴσος ἐστὶν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, οὗ ἡ μὲν μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν αὐτοῦ γωνίαν πλευρὰ ἐστὶν ἡ δβ, ἡμιδιάμετρος, ἡ δ' ἑτέρα ἡ αὐτοῦ περιφέρεια κατὰ τὸ πόρισμα, τῆς κα: τοῦ δ': τοῦ α: μέρους, λαμβανομένης δὲ τῆς μὲν γηβκ, περιφερείας ἀντὶ ὕψους, ἀντὶ δὲ βάσεων τῶν θβ, βδ, εὐθειῶν, συσταθήσονται δύο τρίγωνα ὀρθογώνια ἰσοϋψῆ, ὧν τὸ μὲν ἴσον ἔσται τῇ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ, τὸ δὲ τῷ γηβκ, κύκλῳ, καὶ πρὸς ἄλληλα ἕξουσιν ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν βθ. ἄρα καὶ ὁ γηβκ, κύκλος ἕξει πρὸς τὴν τοῦ γα, κυλίνδρου ἐπιφάνειαν, ὡς δβ, πρὸς τὴν βθ, ὡς δὲ ἡ δβ, πρὸς τὴν βθ, ἔχει ὁ αὐτὸς γηβκ, κύκλος καὶ πρὸς τὸν λζμ, κύκλον, ὡς δέδεικται, ἄρα ὁ γηβκ, κύκλος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρός τε τὸν λζμ, κύκλον, καὶ πρὸς τὴν τοῦ γα, κυλίνδρου ἐπιφάνειαν, καὶ ἑπομένως κατὰ τὴν θ': τοῦ ε': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἡ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν τῷ λζμ, κύκλῳ, οὗ ἡ εζ, ἡμιδιάμετρος μέση ἐστὶν ἀνάλογος τοῦ αβ, ὕψους, καὶ βγ, διαμέτρου, τῆς τοῦ γκ, κυλίνδρου βάσεως. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Α': Ἡ τοῦ κυλίνδρου βάσις πρὸς τὴν καμπύλην αὐτοῦ ἐπιφάνειαν ἔχει, ὡς ἡ ταύτης ἡμιδιάμετρος πρὸς τὸ διπλοῦν τοῦ κυλίνδρου ὕψος.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Β': Ἡ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἔχει πρὸς τὴν αὐτοῦ βάσιν, ὡς τὸ ὑπό τε τοῦ ὕψους καὶ τῆς περιφερείας τῆς αὐτοῦ βάσεως περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπό τε τῆς ἡμιδιαμέτρου καὶ περιφερείας τῆς βάσεως περιεχόμενον ὀρθογώνιον.

Πρότασις ΙΖ':

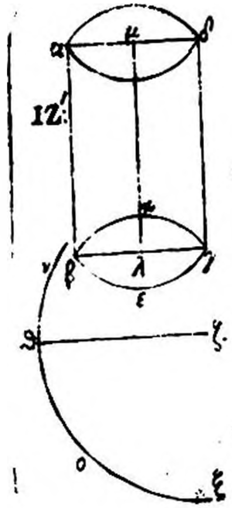
Ἡ τοῦ ὀρθοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν αὐτοῦ βάσιν ἔχει, ὡς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθογώνιον πρὸς τὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου τετράγωνον.

Ἔστω κύλινδρος ὀρθὸς ὁ αβγδ, οὗ βάσις ὁ βεγκ, κύκλος, καὶ ἄξων ὁ λμ. Λέγω ὅτι ἡ τοῦ αβγδ, κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἔχει πρὸς τὸν βεγκ, κύκλον, ὡς τὸ διὰ τοῦ λμ, ἄξονος αὐτοῦ ὀρθογώνιον τὸ αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βλ, τετράγωνον. Εὑρεθήτω μέση ἀνάλογος τῶν βγ, λμ, ἡ ζθ, καὶ κείσθω μὲν

τῷ

τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζθ, γραφήτω κύκλος ὁ θνξο. Δείκνυται. ὁ θνξο, κύκλος πρὸς τὸν βεγκ, ἔχει, ὡς τὸ τῆς ζθ, τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς βλ. ἐπεὶ γὰρ οἱ κύκλοι ἐνδιπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων ἡμιδιαμέτρων, ὡς καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἡμιδιαμέτρων τετράγωνα, πάντως γε οἱ κύκλοι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἰδίων ἡμιδιαμέτρων. ἀλλ' ὁ θνξο, κύκλος ἴσος ἐστὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω τῇ τοῦ αβγδ, δοθέντος κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ,

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 13.



ἄρα καὶ ἡ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὸν βεγκ, κύκλον ἔχει, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βλ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ζθ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν βγ, λμ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ τῷ αγ, ἄρα ἡ τοῦ αβγδ, κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν αὐτοῦ βάσιν τὸν βεγκ, κύκλον ἔχει, ὡς τὸ αγ, διὰ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βλ, τετράγωνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι ἡ τοῦ τυχόντος ὀρθοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὸν τυχόντα κύκλον ἔχει, ὡς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ κύκλου τετράγωνον. ἐπεὶ γὰρ ἡ τοῦ αβγδ, φὲρ εἰπεῖν, κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἔχει πρὸς τὸν βεγκ, κύκλον, ὡς τὸ διὰ τοῦ λμ, ἄξονος αὐτοῦ ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βλ, τετράγωνον, ὡς δὲ ὁ βεγκ, κύκλος πρὸς τὸν θνξο, δὸς εἰπεῖν, κύκλον, ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς βλ, ἡμιδιαμέτρου τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, ἡμιδιαμέτρου. ἄρα καὶ δι' ἴσου ἡ τοῦ αβγδ, κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὸν θνξο, κύκλον ἔχει, ὡς τὸ διὰ τοῦ λμ, ἄξονος ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, ἡμιδιαμέτρου τοῦ αὐτοῦ κύκλου τετράγωνον.

Πρότασις ΙΗ':

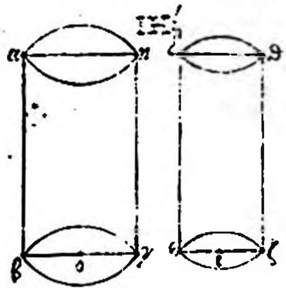
Αἱ τῶν ὀρθῶν κυλίνδρων ἐπιφάνειαι πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν ὡς τὰ διὰ τῶν ἀξόνων αὐτῶν ὀρθογώνια.

Ἔστωσαν ὀρθοὶ κύλινδροι οἱ αγ, δζ. Λέγω δὴ τὰς τούτων ἐπιφανείας ἔχειν πρὸς ἀλλήλας, ὡς τὰ διὰ τῶν ἀξόνων αὐτῶν ὀρθογώνια, τὰ αβγη, δθζθ, κατὰ γὰρ τὴν ἀνωτέρω, ἡ τοῦ αγ, κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὸν βγ, κύκλον ἔχει ὡς τὸ αβγη, ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βο, τετράγωνον, ἀλλ' ὡς ὁ βγ, κύκλος πρὸς τὸν εζ, κύκλον, ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς βο, τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς

ιζ,

ιζ, ὡς δὲ ὁ ιζ, κύκλος πρὸς τὴν τοῦ δζ, κυλίνδρου ἐπιφάνειαν, οὕτω τὸ τῆς ιζ, τετράγωνον πρὸς τὸ διζθ, ὀρθογώνιον, ἄρα καὶ δι᾽ ἴσου, ὡς ἡ τοῦ αγ, κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ δζ, ἐπιφάνειαν, τὸ αβγη, ὀρθογώνιον πρὸς τὸ διζθ, τέσσαρα γὰρ μεγέθη, ἡ τοῦ αγ, κυλίνδρου ἐπιφάνεια, ὁ βγ, κύκλος, ὁ ιζ, καὶ ἡ τοῦ δζ, κυλίνδρου ἐπιφάνεια, καὶ ἄλλα τοσαῦτα, τὸ αβγη, ὀρθογώνιον, τὸ ἀπὸ τῆς βο, τετράγωνον, τὸ ἀπὸ τῆς ιζ, καὶ τοῦτο τετράγωνον, καὶ τὸ διζθ, ὀρθογώνιον ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντα, καὶ σὺν δύο λαμβανόμενα τεταγμένως, πάντως γε καὶ δι᾽ ἴσου ἀνάλογα ἔσονται. αἱ τῶν ὀρθῶν ἄρα κυλίνδρων ἐπιφάνειαι πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν, ὡς τὰ διὰ τῶν ἀξόνων αὐτῶν ὀρθογώνια.

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 14.

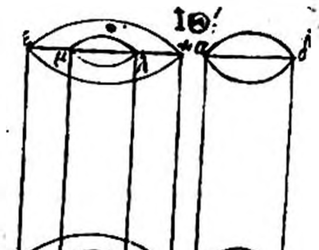


Πρότασις ΙΘʹ.

Τὸ τοῦ κυλίνδρου στερεὸν πρὸς τὸ τοῦ κυλινδρικοῦ σίφωνος στερεὸν, τοῦ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχοντος τῷ κυλίνδρῳ, ἔχει, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς τοῦ κυλίνδρου βάσεως τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς ζώνης ὀρθογώνιον.

Ἔστω κύλινδρος μὲν ὁ αβγδ, σίφων δὲ κυλινδρικὸς καὶ ἰσοϋψὴς τῷ αβγδ, κυλίνδρῳ ὁ εηθκ. ἔστω δὲ καὶ ζώνη τῶν ζν, ηθ, βάσεων ἡ ζηθν. Λέγω δὴ τὸ τοῦ αβγδ, κυλίνδρου στερεὸν ἔχειν πρὸς τὸ τοῦ εηθκ, κυλινδρικοῦ σίφωνος στερεὸν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ζγ, ἡμιδιαμέτρου τῆς βγ, αὐτοῦ βάσεως τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς ζηθν, ζώνης ὀρθογώνιον, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ζη, ην, περιεχόμενον. ὁ μὲν γὰρ ὅλος εζνκ, κύλινδρος πρὸς τὸν ἀφαιρούμενον μηθλ, κύλινδρον ἔχει, ὡς ἡ ὅλη ζν, βάσις πρὸς τὴν ἀφαιρουμένην ηθ, βάσιν, ἰσοϋψεῖς γὰρ, καὶ ἑκάτερος συνίσταται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῆς αὐτοῦ βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος, ὡς ὀψόμεθα, ἄρα κατὰ τὴν ιθʹ. τοῦ εʹ. τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἔχει καὶ ὅλος ὁ εζνκ, κύλινδρος πρὸς τὸ λοιπὸν, τουτέστι τὸν εηθκ, κυλινδρικὸν σίφωνα, ὡς ἡ ὅλη ζν, βάσις πρὸς τὸ λοιπὸν, ἤτοι τὴν ζηθν, ζώνην. ὡς δὲ ἡ ζν, βάσις πρὸς τὴν ζηθν, ζώνην, ἔχει καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζι, ἡμιδιαμέτρου τῆς ζν, βάσεως τετράγωνον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ζη, ην, ὀρθογώνιον κατὰ τὴν ιθʹ. τοῦ δʹ. τοῦ

Geom: Sol. lib. 1. Fig. 15.



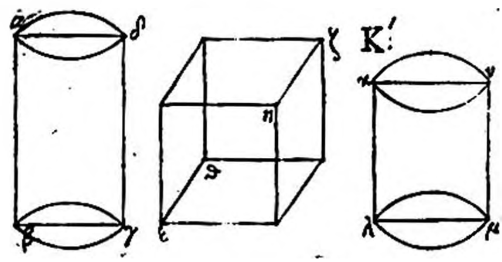
αʹ. μέ-α: μέρους, ἄρα κατὰ τὴν ια: τοῦ ι: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὁ ε ζ ν κ, κύλινδρος ἔχει πρὸς τὸν ε η θ κ, κυλινδρικὸν σίφωνα, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ζ ι, τετράγωνον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ζ η, η ν, περιεχόμενον ὀρθογώνιον. ἀλλ᾽ ὡς ὁ α β γ δ, κύλινδρος πρὸς τὸν ε ζ ν κ, ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς β ξ, ἡμιδιαμέτρου τῆς τοῦ α β γ δ, βάσεως τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζ ι, ἄρα καὶ δι᾽ ἴσου ἀτάκτως ὡς ὁ α β γ δ, κύλινδρος πρὸς τὸν ε η θ κ, κυλινδρικὸν σίφωνα, τὸ ἀπὸ τῆς β ξ, τετράγωνον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ζ η, η ν, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, τουτέστι τὸ τῆς ζώνης. Τὸ τοῦ κυλίνδρου ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ τοῦ κυλινδρικοῦ σίφωνος στερεὸν τοῦ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχοντος τῷ κυλίνδρῳ ἔχει ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς τοῦ κυλίνδρου βάσεως τετράγωνον πρὸς τὸ τῆς ζώνης ὀρθογώνιον, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Κ':

Ἐὰν κύλινδρος τῷ τυχόντι πρίσματι ἴσος ᾖ, αἱ τούτων βάσεις ἀντιπεπόνθασι τοῖς ὕψεσι, καὶ ἐὰν κυλίνδρου καὶ πρίσματός τινος αἱ βάσεις ἀντιπεπόνθασι τοῖς ὕψεσιν, ὁ κύλινδρος ἴσος ἔσται τῷ πρίσματι.

Ἔστω κύλινδρος ὁ α β γ δ, ἴσος τῷ τυχόντι πρίσματι ε ζ, οὗ βάσις ἡ ε η, καὶ ὕψος τὸ ε θ. Λέγω ὅτι αἱ βάσεις τοῦ τε α β γ δ, κυλίνδρου, καὶ ε ζ, πρίσματος ἀντιπεπόνθασι τοῖς αὐτῶν ὕψεσιν, τουτέστιν ὡς ἡ β γ, βάσις τοῦ α β γ δ, κυλίνδρου πρὸς τὴν ε η, βάσιν τοῦ ε ζ, πρίσματος, ἔστι καὶ τὸ ε θ, ὕψος τοῦ ε ζ, πρίσματος πρὸς τὸ α β, ὕψος τοῦ α β γ δ, κυλίνδρου. Ἔστω δὴ ἕτερος κύλινδρος ὁ κ λ μ ν, ἔχων τήν τε βάσιν λ μ, ἴσην τῇ ε η, βάσει τοῦ ε ζ, πρίσματος, καὶ τὸ λ κ, ὕψος τῷ ε θ, ὕψει. καὶ ἑπομένως ὁ κ λ μ ν, κύλινδρος ἴσος ἔσται τῷ ε ζ, πρίσματι. (

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 26.



ἑκατέρου γὰρ τὸ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς αὐτοῦ βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος, ἑκατέρου δὲ αἵ τε βάσεις καὶ τὰ ὕψη ἴσα.) ἀλλὰ τῷ ε ζ, πρίσματι ἴσος ὑπετέθη καὶ ὁ α β γ δ, κύλινδρος, ὁ αὐτὸς ἄρα ἴσος ἐστὶ καὶ τῷ κ λ μ ν, κυλίνδρῳ κατὰ τὸ α: ἀξίωμα τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, κατὰ δὲ τὴν ιε: τοῦ ιβ': τοῦ αὐτοῦ, αἱ βάσεις τῶν α β γ δ, κ λ μ ν, κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασι τοῖς τῶν αὐτῶν ὕψεσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ β γ, πρὸς τὴν λ μ, τὸ λ κ, πρὸς τὸ β α, ἀλλ᾽ ἡ λ μ, βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ε η, καὶ τὸ λ κ, ὕψος τῷ ε θ, ἄρα ὡς ἡ β γ, βάσις πρὸς

τὴν

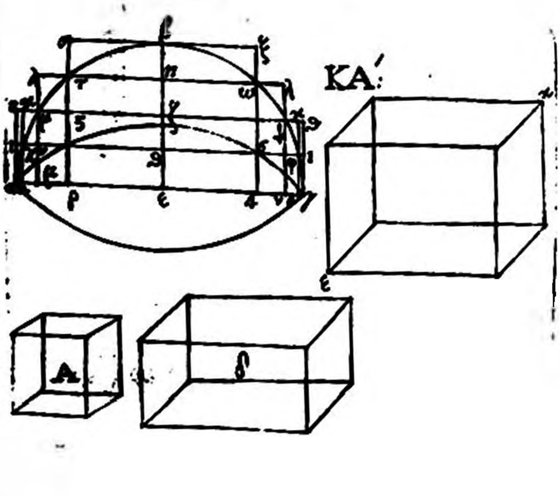
τὴν ε η, ἔςαι καὶ τὸ ε θ, ὕψος πρὸς τὸ β α. Ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔςω ὡς ἡ β γ, βάσις πρὸς τὴν ε η, βάσιν, τὸ ε θ, ὕψος πρὸς τὸ β α· τῶν αὐτῶν γὰρ ὑποτιθεμένων, ἐπεὶ ὁ κ λ μ ν, κύλινδρος, ἴσος ἐςὶ τῷ ε ζ, πρίσματι, ὡς δέδεικται, καὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ιε: ὧν κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν ἴσοι εἰσὶν, ἴσοι ἄρα οἱ α β γ δ, κ λ μ ν. ἀλλ' ὁ κ λ μ ν, ἴσος ἐςὶ καὶ τῷ ε ζ, πρίσματι κατὰ τὴν κατασκευήν. ἄρα κατὰ τὸ ῥηθὲν ἀξίωμα, τῷ ε ζ, πρίσματι ἴσος ἐςὶ καὶ ὁ α β γ δ, κύλινδρος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΑʹ.

Ἡμισφαιρίου δοθέντος δυνατὸν ἐν αὐτῷ καὶ περὶ αὐτὸ κυλίνδρους ἰσοϋψεῖς συςαθῆναι, τοὺς μὲν ἐγγεγραμμένους, τοὺς δὲ περιγεγραμμένους, καὶ τὴν τῶν περιγεγραμμένων ὑπεροχὴν πρὸς τοὺς ἐγγεγραμμένους ἐλάττονα εἶναι τοῦ δοθέντος ςερεοῦ πρίσματος, ἐλάττονος ὄντος τοῦ ἡμισφαιρίου.

Ἔςω ἡμισφαίριον τὸ α β γ, καὶ ςερεὸν τὸ δ, ἔλαττον τοῦ α β γ. Λέγω ὅτι δυνατὸν συςαθῆναι κυλίνδρους ἰσοϋψεῖς, τοὺς μὲν περιγεγραμμένους περὶ τὸ α β γ, ἡμισφαίριον, τοὺς δὲ ἐγγεγραμμένους εἰς τὸ αὐτὸ, ὥςε τὴν τῶν περιγεγραμμένων ὑπεροχὴν πρὸς τοὺς ἐγγεγραμμένους ἐλάττονα εἶναι τοῦ δ, δοθέντος ςερεοῦ. Τμηθήτω δὴ ἡ α γ, δίχα κατὰ τὸ ε, καὶ ἀνεςάθω κάθετος ἡ ε β· εἶτα γινέσθω ὡς ἡ α γ, βάσις τοῦ ἡμισφαιρίου, τουτέςιν ὁ μέγιςος ἐν αὐτῷ κύκλος πρὸς τὴν τοῦ δ, ςερεοῦ βάσιν, οὕτω τὸ ὕψος τοῦ αὐτοῦ δ, ςερεοῦ πρὸς ἄλλο τι, τούτου δὲ εὑρεθέντος, διαιρεθήτω ἡ β ε, δίχα κατὰ τὸ ζ, καὶ μὲν ἡ ε ζ, ἐλάττων ᾖ τῆς εὑρεθείσης, διήχθω διὰ τοῦ ζ, παραλλήλως τῇ α γ, ἡ η θ, καὶ ἀποπεπληρώσθω ὁ α θ, περιγεγραμμένος κύλινδρος· ἀπὸ δὲ τῶν μ, καὶ ψ, κοινῶν τομῶν τῆς π η θ, καὶ α β γ, ἡμικυκλίου πιπτέτωσαν κάθετοι αἱ μ μ, ψ ν, καὶ ἀποπεπληρώσθω ὁ μ ψ, ἐγγεγραμμένος κύλινδρος. Ὅτι μὲν οὖν ἡ τοῦ α θ,

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 27.



πι-περιγεγραμμένου κυλίνδρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν μψ, ἐγγεγραμμένον ἐλάττων ἐστὶ τοῦ δ, στερεοῦ, δῆλον. εἰ γὰρ αἱ βάσεις τοῦ τε αθ, κυλίνδρου, καὶ δ, πρίσματος ἀντιπεπόνθασι τοῖς ὕψεσι, πάντως γε ὁ αθ, κύλινδρος ἴσος ἂν εἴη τῷ δ, πρίσματι κατὰ τὴν ἀνωτέρω. Ἐπεὶ δὲ ἡ τοῦ αθ, κυλίνδρου βάσις ἡ αγ, μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν τοῦ δ, πρίσματος βάσιν, ἤπερ τὸ τοῦ δ, πρίσματος ὕψος πρὸς τὸ τοῦ αθ, κυλίνδρου ὕψος τὸ εζ, φανερὸν, ὅτι ὁ αθ, κύλινδρος ἐλάττων ἐστὶ τοῦ δ, πρίσματος. Εἰ δὲ ὁ αθ, περιγεγραμμένος κύλινδρος ἐλάττων ἐστὶ τοῦ δ, πρίσματος, πολλῷ δήπουθεν ἐλάττων ἔσται ἡ τοῦ αθ, ὑπεροχὴ πρὸς τὸ μψ. Ἐὰν δὲ ἡ εζ, μὴ εἴη ἐλάττων τῆς ἀφαιρεθείσης, διαιρεθήτω ἑκατέρα τῶν εζ, ζβ, δίχα κατὰ τὰ η, καὶ θ, ὥστε διαιρεθῆναι τὴν ὅλην εβ, εἰς τέσσαρα ἴσα, καὶ ἔστω ἡ εθ, τὸ τέταρτον δηλ: τῆς εβ, ἐλάττων τῆς ἀφαιρεθείσης, καὶ διὰ τῶν θ ηζ, καὶ β, διήχθωσαν παράλληλοι αἱ ιι, κκ, λλ, σξ, καὶ διὰ μετὰ τῶν φ, καὶ χ, κοινῶν τομῶν τῆς τε ιι, καὶ αβγ, ἡμισφαιρίου διήχθωσαν παραλλήλως τῇ εβ, αἱ κο, κ2, διὰ δὲ τῶν μ, καὶ ψ, κοινῶν τομῶν τῆς τε κκ, καὶ αβγ, ἡμισφαιρίου διήχθωσαν αἱ λμ, λν, διὰ δὲ τῶν τω, κοινῶν τομῶν τῆς τε λλ, καὶ αβγ, ἡμισφαιρίου διήχθωσαν ὁμοίως παράλληλοι αἱ αἱ σρ, ξ4, καὶ ἀναπεπληρώσθωσαν οἵ τε αι, φκ, μλ, τξ, περιγεγραμμένοι κύλινδροι, καὶ οἱ οχ, νψ, ςω, ἐγγεγραμμένοι. καὶ ἐπεὶ ὁ αι, κύλινδρος ἴσος ἐστὶ τῇ διαφορᾷ τῶν αι, φκ, μλ, τξ, περιγεγραμμένων κυλίνδρων πρὸς τοὺς οχ, νψ, ςω, ἐγγεγραμμένους ὡς ὀψόμεθα, ὁ δ' αὐτὸς αι, κύλινδρος ἐλάττων ἐστὶ τοῦ δ, στερεοῦ κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ὅτι ἡ τοῦ αι, κυλίνδρου βάσις μείζονα ἔχει λόγον πρὸς τὴν τοῦ δ, πρίσματος βάσιν, ἤπερ τὸ τοῦ δ, στερεοῦ πρίσματος ὕψος πρὸς τὸ τοῦ αι, κυλίνδρου ὕψος, ἄρα καὶ ἡ ὑπεροχὴ τῶν περὶ τὸ αβγ, ἡμισφαίριον περιγεγραμμένων κυλίνδρων πρὸς τοὺς εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένους ἐλάττων ἐστὶ τοῦ δ, δοθέντος στερεοῦ. Ἐὰν δὲ πάλιν καὶ τὸ τέταρτον τῆς εβ, μὴ ἔλαττον ᾖ τῆς ἀφαιρεθείσης, διαιρεθήτω δίχα καὶ ἕκαστον τῶν τῆς εβ, μερῶν, καὶ τοῦτο πάλιν καὶ πάλιν γενέσθω, ἕως ἂν γένηται τὸ ἐκ τῆς διαιρέσεως ἔλαττον τῆς ἀφαιρεθείσης, καὶ τὰ λοιπὰ, ὡς προείρηται. καὶ ἔσται ἡ δεῖξις ἡ αὐτή. Ὅτι δὲ ὁ αι, κύλινδρος ἴσος ἐστὶ τῇ διαφορᾷ τῶν αι, φκ, μλ, τξ, περιγεγραμμένων κυλίνδρων πρὸς τοὺς οχ, νψ, ςω, ἐγγεγραμμένους, δῆλον. τῷ γὰρ τξ, κυλίνδρῳ ἴσον ἐστὶ τὸ τοῦ αι, μέρος ρ6, τῇ δὲ τοῦ μλ, πρὸς τὸν ςω, διαφορᾷ, τουτέστι τῷ λςωψ, κυλινδρικῷ σίφωνι ἴσος ἐστὶν ὁ ρν, 6ν, κυλινδρικὸς σίφων, τῷ δὲ κνψφ, σίφωνι ὁ φνχμ, κυλινδρικὸς σίφων. Ἡμισφαιρίου ἄρα δοθέντος δυνατὸν ἐν αὐτῷ καὶ περὶ αὐτὸ, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Α'.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐν ἡμισφαιρίῳ δυνατὸν ἐγγραφῆναι κυλίνδρους ἰσοϋψεῖς, ὥστε τὴν τοῦ ἡμισφαιρίου πρὸς τοὺς ἐγγεγραμμένους κυλίνδρους διαφορὰν, ταὐτὸν δ' ἐστὶν εἰπεῖν καὶ ὑπεροχὴν, ἐλάττονα εἶναι τοῦ δοθέντος πρίσματος, ἐλάττονος ὄν-πος τοῦ ἡμισφαιρίου. εἰ γὰρ ἡ τῶν περιγεγραμμένων κυλίνδρων διαφορὰ πρὸς τοὺς ἐγγεγραμμένους ἐλάττων ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ στερεοῦ ὡς δέδεικται, πάντως γε πολλῷ ἐλάττων ἔσται ἡ τοῦ ἡμισφαιρίου διαφορά.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Ἔτι δυνατὸν περὶ τὸ δοθὲν ἡμισφαίριον περιγραφῆναι καὶ ἐγγραφῆναι εἰς αὐτὸ κυλίνδρους ἰσοϋψεῖς, ὥστε ἕκαστον ἐλάττονα εἶναι τοῦ δοθέντος στερεοῦ, μείζονος ὄντος τοῦ δοθέντος ἡμισφαιρίου. τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, εἰ ὁ α ι, δέδεικται ἐλάττων τοῦ δ, πολλῷ ἐλάττων δειχθήσεται ἕκαστος τῶν φ κ, μ λ, τ ξ, εἰδὲ ὁ ο χ, ἐλάττων τοῦ αὐτοῦ, πολλῷ ἐλάττων ἔσται ἕκαστος τῶν υ ψ, σ ω.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.

Ἔτι δυνατὸν εἰς τὸ αὐτὸ ἡμισφαίριον ἐγγραφῆναι κυλίνδρους ἰσοϋψεῖς, ὥστε τὸ ἐξ ἁπάντων μεῖζον εἶναι τοῦ δοθέντος στερεοῦ, ἐλάττονος ὄντος τοῦ ἡμισφαιρίου· καὶ πάλιν περιγραφῆναι ἔξεστι περὶ αὐτὸ ὁμοίως κυλίνδρους ἰσοϋψεῖς, ὥστε τὸ ἐξ ἁπάντων ἔλαττον εἶναι τοῦ δοθέντος στερεοῦ, μείζονος ὄντος τοῦ ἡμισφαιρίου. Ἔστω γὰρ α: τὸ δ, στερεὸν ἔλαττον τοῦ α β γ, ἡμισφαιρίου, καὶ τούτου διαφορὰ ἡ Α. ὥστε τὸ δ, μετὰ τοῦ Α, ἴσον εἶναι τῷ ἡμισφαιρίῳ. Ἐὰν οὖν συσταθῶσι κατὰ τὰ προειρημένα οἵ τε περιγεγραμμένοι καὶ ἐγγεγραμμένοι κύλινδροι, ὥστε τὴν τῶν περιγεγραμμένων πρὸς τοὺς ἐγγεγραμμένους διαφορὰν ἐλάττονα εἶναι τῆς Α, ὑπεροχῆς, οἱ ἐγγεγραμμένοι μείζονες ἔσονται τοῦ δ, εἰ γὰρ ἡ τῶν περιγεγραμμένων πρὸς τοὺς ἐγγεγραμμένους ὑπεροχὴ ἐλάττων, πολλῷ ἐλάττων ἐστὶν ἡ τοῦ ἡμισφαιρίου πρὸς αὐτοὺς ὑπεροχή, ἀλλὰ τὸ δ, καὶ Α, στερεὰ ἴσα εἰσὶ τοῖς ἐγγεγραμμένοις κυλίνδροις καὶ τῇ τοῦ ἡμισφαιρίου πρὸς αὐτοὺς διαφορᾷ, αὕτη δὲ ἡ διαφορὰ τοῦ ἡμισφαιρίου ἐλάττων ἐστὶ τῆς Α, οἱ ἐγγεγραμμένοι ἄρα μείζονές εἰσι τοῦ δ. Αὖθις ἔστω τὸ ε κ, στερεὸν μεῖζον τοῦ α β γ, ἡμισφαιρίου, καὶ διαιρεθήτω εἰς τὸ δ, καὶ Α. ὥστε τὸ δ, ἴσον εἶναι τῷ ἡμισφαιρίῳ, τὸ δὲ Α, τὴν ὑπεροχήν. Ἐὰν οὖν γένηται τὰ αὐτά, περιγραφῶσι δηλ: καὶ ἐγγραφῶσι κύλινδροι εἰς τὸ α β γ, ἡμισφαίριον, ὥστε τὴν τῶν περιγεγραμμένων διαφορὰν ἐλάττονα εἶναι τῆς Α, πάντως γε οἱ περιγεγραμμένοι κύλινδροι ἐλάττονες ἔσονται τοῦ ε κ. εἰ γὰρ αἱ τῶν περιγεγραμμένων διαφοραὶ πρὸς τοὺς ἐγγεγραμμένους ἐλάττους εἰσὶ τῆς Α, δῆλον, ὅτι αἱ τῶν αὐτῶν διαφοραὶ πρὸς τὸ ἡμισφαίριον πολλῷ ἐλάττους εἰσὶ τῆς Α, τὸ δὲ ἡμισφαίριον ἴσον ἐστὶ τῷ δ, καὶ οἱ περιγεγραμμένοι κύλινδροι ἴσοι εἰσὶ τῷ τε ἡμισφαιρίῳ, καὶ ταῖς αὐτῶν πρὸς τὸ ἡμισφαίριον διαφοραῖς, ἄρα οἱ περιγεγραμμένοι κύλινδροι ἐλάττονές εἰσι συναμφοτέρων τῶν δ, καὶ Α, ταῦτα δὲ ἴσα τῷ ε κ, ἐλάττονες ἄρα εἰσὶ καὶ τοῦ ε κ, μείζονος ὄντος τοῦ ἡμισφαιρίου.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'.

Ἔτι δῆλον, ὅτι τὸ αὐτὸ θεώρημα καὶ ἐπὶ παντὸς ἄλλου σφαιροειδοῦς ἐπεκτείνεται εἴδους, ἐλλείψεως δηλ: καὶ τῶν ὁμοίων.

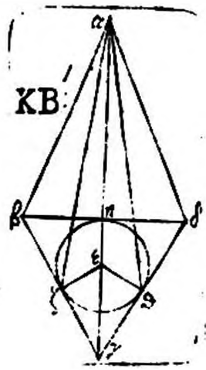
Προ-

Πρότασις ΚΒ.

Ἡ τῆς πυραμίδος ἐπιφάνεια τῆς περὶ ὀρθὸν περιγεγραμμένης κώνου ἴση ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου καὶ ἡμιπεριμέτρου τῆς αὐτῆς βάσεως περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἔστω πυραμὶς ἡ α β γ δ, ἧς βάσις τὸ β γ δ, τρίγωνον, περὶ ὀρθὸν γεγραμμένη κῶνον τὸν α ζ η θ, οὗ βάσις μὲν ὁ ζ θ η, κύκλος, ὕψος δὲ ἡ α ε, εὐθεῖα. Λέγω ὅτι ἡ τῆς α β γ δ, πυραμίδος ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς πλευρᾶς τοῦ α ζ η θ, κώνου καὶ ἡμιδιαμέτρου τῆς αὐτοῦ βάσεως περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ α θ, α ζ, α η, ε ζ, ε θ, ε η, καὶ ἐπεὶ τὸ β γ δ, τρίγωνον ἅπτεται τοῦ ζ η θ, κύκλου, πάντως γε ἑκάστη α ζ, α θ, α η, εὐθειῶν πλευρά ἐστι τοῦ α ζ θ η, κώνου. Ὅτι δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἐφίστανται ἐπὶ τῶν β γ, γ δ, δ β, πλευρῶν τοῦ β γ δ, τριγώνου, βάσεως δηλ: τῆς α β γ δ, πυραμίδος, καὶ προσέτι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, οὐ χαλεπὸν ἀποδεῖξαι. ἡ γὰρ α ε, τὸ τοῦ α ζ θ η, κώνου ὕψος ὀρθὴ δὴ πρὸς ἐπίπεδόν ἐστι πρὸς τὸ τοῦ θ ζ η, κύκλου ἐπίπεδον, ὥστε τὸ τοῦ α ε ζ, τριγώνου ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ τοῦ β γ δ, ἐπίπεδον, καὶ ἑπομένως ἡ β γ, πρὸς ὀρθάς ἐστι πρός τε τὸ τοῦ α ζ ε, ἐπίπεδον, καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν α ζ, ζ ε, ἁπτομένων αὐτῆς. ἡ α ζ β, ἄρα γωνία ὀρθή ἐστι, καὶ τοῦ α β γ, τριγώνου ἀληθὲς ὕψος ἡ α ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται ἡ μὲν α θ, ὕψος ἀληθὲς τοῦ α γ δ, τριγώνου, ἡ δὲ α η, τοῦ α β δ, ἀλλὰ τῶν α ε ζ, α ε θ, τριγώνων αἱ δύο πλευραὶ α ε, ε ζ, δυσὶ ταῖς α ε, ε θ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ α ε ζ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ α ε θ, ὁμοίως ἴση, ἄρα καὶ βάσις ἡ α ζ, βάσει τῇ α θ, ἴση ἐστὶν, ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ἡ α η, ἴση ἑκατέρᾳ τῶν α ζ, α θ. ἅπαν δὲ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπό τε τοῦ ὕψους καὶ τῆς ἡμισείας τῆς αὐτοῦ βάσεως περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ κατὰ τὴν ιβ΄: τοῦ γ΄: τοῦ α΄: μέρους ἄρα ἐὰν ἡ α ζ, ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς β γ, πολλαπλασιασθῇ, γενήσεται πάντως τὸ α β γ, τρίγωνον, ἐὰν δὲ ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς γ δ, γενήσεται τὸ α γ δ, καὶ ἐὰν ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς δ β, ὁμοίως πολλαπλασιασθῇ, γενήσεται τὸ α β δ, τρίγωνον. Δῆλον ἄρα, ὅτι τῆς α ζ, πλευρᾶς τοῦ α ζ θ η, κώνου πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ τὴν ἡμιπερίμετρον τοῦ β γ δ, τριγώνου, τὸ γενόμενον ἴσον ἐστὶ τοῖς α β γ, α γ δ, α δ β, τρισὶ τριγώνοις. ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ταῦτα ἴσα ἐστὶ τῇ τῆς πυραμίδος α β-

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 18.



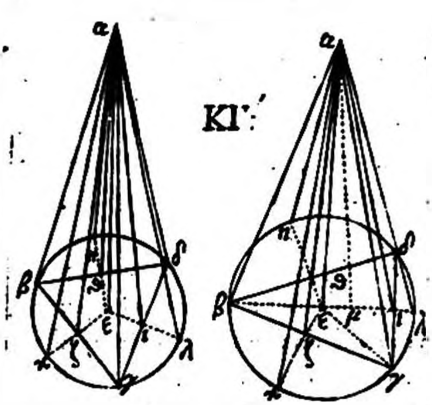
γδ, ἐπιφανείᾳ, ἄρα καὶ τὸ γενόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῆς αζ, πλευρᾶς τοῦ κώνου ἐπὶ τὴν ἡμιπερίμετρον τῆς βάσεως τῆς αβγδ, πυραμίδος πολλαπλασιαζομένης ἴσον ἐστὶ τῇ δοθείσῃ αβγδ, πυραμίδι. Ἡ τῆς πυραμίδος ἄρα ἐπιφάνεια τῆς περὶ ὀρθὸν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΚΓ':

Ἡ τῆς πυραμίδος ἐπιφάνεια τῆς εἰς ὀρθὸν ἐγγεγραμμένης κῶνον ἴση ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου καὶ ἐλάττονος εὐθείας τῆς τοῦ κώνου πλευρᾶς.

Ἔστω πυραμὶς ἡ αβγδ, ἧς βάσις τὸ βγδ, τρίγωνον, εἰς κῶνον ἐγγεγραμμένη τὸν αβκγλδν, οὗ ἄξων ἡ αε, πλευρὰ δὲ ἡ ακ. Λέγω τὴν ἐπιφάνειαν τῆς αβγδ, πυραμίδος ἴσην εἶναι τῷ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ βγδ, τριγώνου, καὶ εὐθείας ἐλάττονος τῆς ακ. Τμηθείσθω δὲ ἑκάστη τῶν βγ, γδ, δβ, πλευρῶν τῆς βάσεως τῆς δοθείσης πυραμίδος δίχα κατὰ τὰ ζιθ, καὶ ἀχθήτωσαν ἀπὸ τοῦ ε, κέντρου αἱ εζ, ει, εθ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ αζ, αι, αθ· ἐξαγομένων δὲ τῶν εζ, ει, εθ, ἐπὶ τὰ κλν, ἐπιζεύχθωσαν καὶ αἱ αβ, ακ, αγ, αλ, αδ, αν. Ἔστω δὲ καὶ τὸ βγδ, τρίγωνον ἰσόπλευρον.

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 19.



Δείκνυται. ἡ εζ, πάντως κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς βγ, κατὰ τὴν γ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχ:, ἔστι δὲ καὶ ἡ αε, κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ βγδ, τριγώνου, ἄρα καὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ αεζ, τριγώνου ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ βγδ, καὶ ἑπομένως ἡ ζγ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν αζ, ὥστε τοῦ αβγ, τριγώνου ἀληθὲς ὕψος ἐστὶν ἡ αζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὴν μὲν αι, ὕψος εἶναι τοῦ αγδ, τριγώνου, τὴν δὲ αθ, τοῦ αδβ. Αὖθις ἡ ζγ, ἴση ἐστὶ τῇ ιγ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν βγ, τῇ γδ, καὶ δίχα τέμνεσθαι ἑκατέραν κατὰ τὰ ζ, καὶ ι, ὡς δέδεικται. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν αζ, ζγ, καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αι, ιγ, κατὰ τὴν μζ': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αζ, ζγ, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αι, ιγ, ἀφαιρουμένων δὲ τῶν ἀπὸ τῶν ζγ, ιγ, ἴσων, ἐναπολείπονται ἴσα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αζ, αι. ἴση ἄρα ἡ αζ, τῇ αι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ αθ, ἴση ἐστὶ τῇ αι, ἡ αζ. ἐπεὶ δὲ τὸ ὑπὸ μὲν τῶν αζ, ζγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ αβγ, τριγώνῳ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιβ': τοῦ γ': τοῦ α': μέρους, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αι, ιγ, τῷ αγδ,

καὶ

καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αθ, θδ, τῷ αδβ, τὰ δὲ αβγ, αγδ, αδβ, τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς αβγδ, πυραμίδος, πάντως γε ἐὰν ἡ τοῦ βγδ, τριγώνου ἡμιπερίμετρος ἐπὶ μίαν τῶν αζ, ἢ αι, ἢ αθ, εὐθειῶν πολλαπλασιασθῇ τὸ γενόμενον ἴσον ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς αβγδ, δοθείσης πυραμίδος. Ὅτι δὲ ἑκάστη τῶν αζ, αι, αθ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς τοῦ κώνου πλευρᾶς, δῆλον. ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ αιζ, γωνία ὀρθή ἐστι, πάντως γε ἡ ὑπὸ αζι, ὀξεῖα, ἡ δὲ ὑπὸ αζκ, ἀμβλεῖα, ὥστε ἡ ακ, πλευρὰ τοῦ αβκγλδη, κώνου μείζων ἐστὶ τῆς αζ. Ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ἡ αλ, μείζων τῆς αι, καὶ ἡ αη, τῆς αθ. ἐὰν δὲ τὸ βγδ, τρίγωνον, ὃ βάσις ἐστὶ τῆς αβγδ, πυραμίδος μὴ ᾖ ἰσόπλευρον, ὡς ἐπὶ τοῦ β: σχήματος, τῶν αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἀχειρῶς δειχθήσεται ἑκάστη τῶν αζ, αι, αθ, ὕψος εἶναι τῶν αβγ, αγδ, αδβ, τριγώνων, καὶ ἐλάττων τῆς ακ, πλευρᾶς τοῦ κώνου, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω. Ἐπεὶ δὲ αἱ αζ, αι, αθ, ἄνισοί εἰσι, πάντως γε ἐὰν ἡ ἡμιπερίμετρος τοῦ βγδ, τριγώνου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν πολλαπλασιασθῇ, ἐλάττονα μὲν τῆς αι, μείζονα δὲ τῆς αζ, τὸ γενόμενον ἴσον ἔσται τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς αβγδ, πυραμίδος. ἐὰν γὰρ ἐπὶ τὴν αι, πολλαπλασιασθῇ μείζονα οὖσαν τῆς αζ, τὸ γενόμενον μεῖζον ἔσται τῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος. ἐὰν δὲ ἐπὶ τὴν αζ, ἔλαττον. Ὅτι δὲ ἡ αζ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς αι, δῆλον. ἐὰν γὰρ ἡ ιμ, ἴση ληφθῇ τῇ ιζ, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ αμ, ἴση ἔσται ἡ αζ, τῇ αμ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι καὶ τὰς αι, ιζ, ταῖς αι, ιμ, καὶ ἑκατέραν τῶν αιζ, αιμ, γωνιῶν ὀρθήν, ἡ δὲ αμ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς αι, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αμι, μείζων ἐστὶ γωνίας τῆς ὑπὸ αιμ, ἄρα καὶ ἡ αζ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς αι, ἀλλ᾽ ἡ αι, ἐλάττων ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου, ὡς δέδεικται, πολλῷ ἄρα ἐλάττων ἔσται καὶ ἡ ταύτης ἐλάττων, ἐφ᾽ ἣν ὀφείλει ἡ τοῦ βγδ, τριγώνου πολλαπλασιασθῆναι ἡμιπερίμετρος. Ἡ τῆς πυραμίδος ἄρα ἐπιφάνεια τῆς εἰς ὀρθὸν ἐγγεγραμμένης κῶνον ἴση ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου καὶ ἐλάττονος εὐθείας τῆς τοῦ κώνου πλευρᾶς, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ

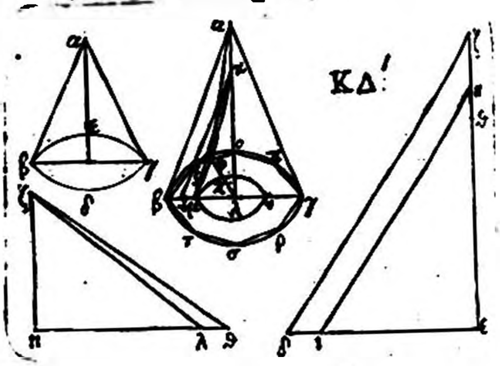
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἡ τῆς πυραμίδος ἐπιφάνεια τῆς περὶ κῶνον μὲν περιγεγραμμένης ἴση ἐστὶν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, οὗ ἡ μία πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος, ἡ δὲ ἑτέρα τῇ πλευρᾷ τοῦ κώνου. τὸ γὰρ τοιοῦτον τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος, καὶ τῆς τοῦ κώνου πλευρᾶς περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ κατὰ τὴν ιβ: τοῦ γ: τοῦ α: μέρους. τῆς δὲ εἰς κῶνον ἐγγεγραμμένης πυραμίδος ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν ἴση ἐστὶ τῇ περιμέτρῳ ὅλῃ τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος, ἡ δ᾽ ἑτέρα ἐλάττων τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου. ὁ λόγος ὁ αὐτός.

Πρότασις ΚΔ':

Ἡ τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, οὗ ἡ μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν ἴση ἐστὶ τῇ περιμέτρῳ τῆς τοῦ κώνου βάσεως, ἡ δ' ἑτέρα τῇ τοῦ κώνου πλευρᾷ.

Ἔστω κῶνος ὁ αβγ, οὗ βάσις μὲν ὁ βδγε, κύκλος, πλευρὰ δὲ ἡ αβ. Λέγω δὴ τὴν τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφάνειαν ἴσην εἶναι ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, οὗ ἡ μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν αὐτοῦ γωνίαν πλευρῶν ἴση ἐστὶ τῇ περιμέτρῳ τοῦ βδγε, κύκλου, ἡ δ' ἑτέρα τῇ αβ. Εἰ γὰρ μή, ἔσται πάντως ἡ τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφάνεια μείζων τοῦ τριγώνου ἐκείνου, ἢ γοῦν ἐλάττων. Ἔστω δὴ α: μείζων, καὶ συσταθήτω τρίγωνον ἴσον τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ τὸ ζηθ, οὗ ἡ μὲν ζη, ἴση ἔστω τῇ αβ, πλευρᾷ τοῦ αβγ, κώνου, ἡ δὲ ηθ, μείζων τῆς τοῦ βδγε, κύκλου περιφερείας, καὶ εἰλήφθω ἡ ηλ, ἴση τῇ τοῦ βδγε, κύκλου περιφερείᾳ τῆς βάσεως δηλ: τοῦ αβγ, κώνου· καὶ ἐπεὶ ἡ ηθ, μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ βδγε, κύκλου περιφερείας, πάντως γε κατὰ τὴν ιζ': τοῦ δ': τοῦ α: μέρους δυνατὸν περιγραφῆναι περὶ τὸν βδγε, κύκλον πολύγωνον, οὗ ἡ περίμετρος ἐλάττων ἔσται τῆς ηθ. ἐὰν δὲ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ αβγ, κώνου, ἤτοι τοῦ α, εὐθεῖαι ἐφ' ἑκάστην γωνίαν τοῦ αὐτοῦ πολυγώνου ἀχθῶσι, συσταθήσεται πυραμίς, ἥτις ἴση ἔσται ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, οὗ ἡ μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν ἴση ἐστὶ τῇ περιφερείᾳ τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος, ταὐτὸν δ' ἐστὶν εἰπεῖν τῇ περιφερείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, οὗ ἡ περίμετρος ἐλάττων ἐστὶ τῆς ηθ, ἤτοι ἴση τῇ ηλ, ἀλλὰ τὸ ζηλ, τρίγωνον ἔλαττόν ἐστι τοῦ ζηθ, ἴσου ὄντος τῇ τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφανείᾳ, ἄρα καὶ ἡ τῆς πυραμίδος ἐπιφάνεια, ἧς βάσις τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον περὶ τὸν αβγ, κῶνον, οὗ ἡ περίμετρος ἴση ἐστὶ τῇ ηλ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφανείας, ἀλλὰ καὶ μείζων ὡς περιέχουσα τὸν κῶνον· ὅπερ ἄτοπον ἄρα.

Geom: Sol. lib. 1. Fig. 20.



Ἔστω δὲ β': ἡ τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφάνεια ἐλάττων τοῦ δεζ, τριγώνου, οὗ ἡ μὲν δε, πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ αβ, πλευρᾷ τοῦ κώνου, ἡ δὲ εζ, τῇ περιφερείᾳ τῆς αὐτοῦ βάσεως ἤτοι τοῦ βγ, κύκλου, καὶ γενέσθω ὡς τὸ δεζ, τρίγωνον πρὸς τὴν τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφάνειαν, ἡ εζ, πρὸς τὴν εθ. τῶν δὲ εζ, εθ, εὑρεθήτω μέση ἀνάλογος ἡ εη, καὶ ἤχθω παράλληλος τῇ ζδ, ἀπὸ τοῦ η, σημείου ἡ ηι, ἥτις τεμεῖ τὴν εδ, ἐκβαλλομένην κατὰ τὸ ι. Γενέσθω δ' ἔτι ὡς ἡ εζ, πρὸς τὴν εη,

ἡ λβ,

ἡ λβ, ἡμιδιάμετρος τοῦ αβγ, κώνου πρὸς τὴν λμ, καὶ γραφέσθω περὶ τὴν λμ, ἡμιδιάμετρον ὁ μν, κύκλος, ἀπὸ δὲ τοῦ μ, ἤχθω παράλληλος τῇ βα, ἡ μκ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν βγ, κύκλον τὸ βξοπγρστ, πολύγωνον μὴ ἁπτόμενον τοῦ μν, κύκλου, καὶ τμηθήτω μία τῶν αὐτοῦ πλευρῶν ἡ ξο, δίχα κατὰ τὸ φ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ κφ, αφ, μφ. Δείκνυται. Ἐπεὶ οὖν γέγονεν ὡς τὸ δεζ, τρίγωνον πρὸς τὴν τοῦ κώνου ἐπιφάνειαν, ἡ εζ, πρὸς τὴν εθ, τῶν δὲ εζ, εθ, εὕρηται μέση ἀνάλογος ἡ εκ, πάντως γε τὸ ιεκ, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ. ὡς γὰρ ἡ εζ, πρὸς τὴν εθ, ἔχει τὸ δεζ, τρίγωνον πρὸς τὸ ιεκ, κατὰ τὴν α΄: τοῦ γ΄: τοῦ α΄: μέρους, ὡς δὲ ἡ εζ, πρὸς τὴν εθ, ἔχει τὸ δεζ, τρίγωνον καὶ πρὸς τὴν τοῦ κώνου ἐπιφάνειαν, ἄρα κατὰ τὴν θ΄: τοῦ ε΄: τοῦ Στοιχειωτ: τὸ ιεκ, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφανείᾳ, μεῖζον δὲ τὸ δεζ, τρίγωνον τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ αὐτὸ καὶ τοῦ ιεκ, τριγώνου, ἀλλ' ἡ εζ, ἴση ὑπετέθη τῇ τοῦ βγ, κύκλου περιφερείᾳ, ἡ δὲ εδ, τῇ αβ, αὐτοῦ πλευρᾷ, ἄρα ἡ μὲν εκ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς τοῦ βγ, κύκλου περιφερ: ἡ δὲ ει, εὐθεῖα τῆς αβ. Αὖθις ἐπεὶ ἡ κι, παράλληλος ἤχθη τῇ ζδ, πάντως γε κατὰ τὴν β΄: τοῦ ς΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὡς ἡ εζ, πρὸς τὴν εκ, ἡ εδ, πρὸς τὴν ει, ὡς δὲ ἡ εζ, πρὸς τὴν εκ, γέγονε καὶ ἡ λβ, πρὸς τὴν λμ, καὶ ὡς ἡ λβ, πρὸς τὴν λμ, ἔχει ἡ αβ, πρὸς τὴν κμ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν β΄: ἄρα ὡς ἡ εδ, πρὸς τὴν ει, ἡ αβ, πρὸς τὴν κμ, ἀλλ' ἡ εδ, ἴση ὑπετέθη τῇ αβ, ἄρα καὶ ἡ ει, ἴση ἐστὶ τῇ κμ. Ἐπεὶ δὲ πάλιν, ἡ κφ, μείζων ἐστὶ τῆς κμ, ὡς ὀψόμεθα, τῆς δὲ κφ, μείζων ἐστὶν ἡ αφ, ἄρα ἡ αφ, πολλῷ μείζων ἐστὶ τῆς κμ, ἤτοι τῆς ει, ἀλλ' ὡς ἡ λβ, πρὸς τὴν λμ, ἔχει ἡ τοῦ βγ, κύκλου περιφέρεια πρὸς τὴν τοῦ μν, περιφέρειαν, ὡς δὲ ἡ λβ, πρὸς τὴν λμ, γέγονε καὶ ἡ εζ, πρὸς τὴν εκ, ἄρα ὡς ἡ τοῦ βγ, κύκλου περιφέρεια πρὸς τὴν τοῦ μν, περιφέρειαν, ἡ εζ, πρὸς τὴν εκ. ἡ δὲ εζ, ἴση ὑπετέθη τῇ τοῦ βγ, περιφερ: καὶ ἡ εκ, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ μν, περιφερείᾳ, τῆς δὲ μν, περιφερείας μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ πολυγώνου περίμετρος, αὕτη ἄρα μείζων ἐστὶ καὶ τῆς εκ. Συνεστάθω δὲ πυραμὶς ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν αβγ, κῶνον, ἧς βάσις τὸ βξοπγρστ, πολύγωνον· καὶ ἐπεὶ ἡ ταύτης ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, οὗ ἡ μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν αὐτοῦ πλευρῶν ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ βξοπγρστ, πολυγώνου περιφερείᾳ, ἡ δ' ἑτέρα τῇ αφ, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, τὸ δὲ τρίγωνον ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι τοῦ ιεκ, διὰ τὸ ὑπὸ μειζόνων περιέχεσθαι πλευρῶν, ἄρα καὶ ἡ τῆς πυραμίδος ἐπιφάνεια, ἧς βάσις τὸ βξοπγρστ, πολύγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ιεκ, τριγώνου, τοῦτο δὲ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ, ὡς δέδεικται, ἄρα ἡ τῆς ἐγγεγραμμένης πυραμίδος εἰς τὸν αβγ, κῶνον ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφανείας, ὅπερ ἄτοπον. Ὅτι δὲ ἡ κφ, μείζων ἐστὶ τῆς κμ, δῆλον. ἐπιζεύχθω γὰρ ἡ λφ, καὶ ἐπεὶ ἡ λχ, ἴση ἐστὶ τῇ λμ, τῆς δὲ λχ, μείζων ἡ λφ, εἰλήφθω ἡ λψ, ἴση τῇ λφ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ κψ, ἔστι δὲ κοινὴ ἡ λκ, αἱ δύο ἄρα λψ, λκ, εἰσὶν ἴσαι

δυσὶ

δυσὶ ταῖς λφ, λκ, ἐςὶ δὲ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ κλψ, ἴση τῇ ὑπὸ κλφ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ἄρα αἱ κψ, κφ, ἴσαι εἰσίν, ἀλλ' ἡ κψ, μείζων ἐςὶ τῆς κμ, ἄρα καὶ ἡ κφ, μείζων ἐςὶ τῆς αὐτῆς κμ. Ἡ τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἄρα ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, οὗ ἡ μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν αὐτοῦ πλευρῶν ἴση ἐςὶ τῇ περιμέτρῳ τῆς τοῦ κώνου βάσεως, ἡ δὲ ἑτέρα τῇ τοῦ κώνου πλευρᾷ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Α': Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι αἱ τῶν κώνων ἐπιφάνειαι τῶν τὰς πλευρὰς ἴσας ἐχόντων ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ τῶν βάσεων αὐτῶν περιφέρειαι. εἰ γὰρ ἐκ τε τῶν περιφερειῶν τῶν αὐτῶν βάσεων καὶ τῶν πλευρῶν τρίγωνα συςαθῶσιν ὀρθογώνια, ἰσοϋψῆ ἔσονται, οἷςτισιν οἱ κῶνοι ἴσοι εἰσὶ, τὰ δὲ τοιαῦτα πρὸς ἄλληλα ἔχουσιν, ὡς αἱ βάσεις. Ἐπεὶ δὲ ὡς αἱ περιφέρειαι τῶν βάσεων, ἔχουσι καὶ αἱ διάμετροι αὐτῶν πρὸς ἀλλήλας, ἄρα αἱ τῶν τοιούτων κώνων ἐπιφάνειαι πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν ὡς αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, καὶ ἀνάπαλιν αἱ τῶν κώνων ἐπιφάνειαι τῶν τὰς βάσεις ἴσας ἐχόντων πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν, ὡς αἱ πλευραὶ αὐτῶν.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Β': Ἔτι τῶν ἴσων κώνων αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασι ταῖς τῶν βάσεων αὐτῶν περιφερείαις, ἢ διαμέτροις, ὅτι καὶ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, οἷς αἱ τῶν κώνων ἐπιφάνειαι ἴσαι εἰσίν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Γ': Ἔτι αἱ τῶν ὀρθῶν καὶ ὁμοίων κώνων ἐπιφάνειαι ἐνδιπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν πλευρῶν, τῶν ὕψεων, τῶν διαμέτρων, καὶ τῶν περιφερειῶν. καὶ γὰρ καὶ τὰ ὀρθογώνια ὅμοια τρίγωνα, οἷς αἱ τῶν αὐτῶν κώνων ἐπιφάνειαι ἴσαι εἰσίν, ἐνδιπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Δ': Ἔτι ἡ τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ τῷ ὑπό τε τῆς αὐτοῦ πλευρᾶς καὶ ἡμιπεριφερείας τῆς βάσεως περιεχομένῳ παραλληλογράμμῳ ὀρθογωνίῳ. τὸ γὰρ τοιοῦτον ὀρθογώνιον ἴσον ἐςὶν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, οὗ ἡ μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν αὐτοῦ πλευρῶν ἴση ἐςὶ τῇ τοῦ κώνου πλευρᾷ, ἡ δ' ἑτέρα τῇ τῆς βάσεως αὐτοῦ περιφερείᾳ κατὰ τὴν ιβ': τοῦ γ': τοῦ α. μέρους.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Ε': Ἔτι ἡ τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς αὐτοῦ βάσεως ἔχει, ὡς ἡ τοῦ κώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τῆς βάσεως αὐτοῦ ἡμιδιάμετρον. κατὰ γὰρ τὸ ἀνωτέρω πόρισμα ἡ τοῦ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ τῷ ὑπό τε τῆς πλευρᾶς καὶ ἡμιπεριφερείας τῆς αὐτοῦ βάσεως, κατὰ δὲ τὴν κα: τοῦ δ': τοῦ α: μέρους ὁ κύκλος ἴσος ἐςὶ τῷ ὑπό τε τῆς ἡμιδιαμέτρου καὶ ἡμιπεριφερείας. ἄρα ἐὰν ἡ τῆς βάσεως τοῦ ὀρθοῦ κώνου περιφέρεια ἀντὶ ὕψος ληφθῇ, ἀντὶ δὲ βάσεων ὑπὸ τοῦ κώνου πλευρὰ καὶ ἡ

τῆς

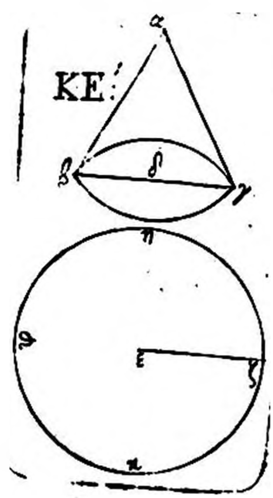
τῆς βάσεως αὐτοῦ, συςαθήσονται δήπουθεν δύο τρίγωνα ἔχοντα πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις, ὧν τὸ μὲν ἴσον ἐςὶ τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ, τὸ δὲ τῷ τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐμβαδῷ. Καὶ ἀνάπαλιν τὸ τῆς βάσεως τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἐμβαδὸν ἔχει πρὸς τὴν τοῦ κώνου ἐπιφάνειαν, ὡς ἡ τῆς βάσεως ἡμιδιάμετρος πρὸς τὴν τοῦ κώνου πλευράν.

Πρότασις ΚΕ'.

Ἡ τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἡμιδιάμετρος μέση ἐςὶν ἀνάλογος τῆς τε ἡμιδιαμέτρου τῆς τοῦ κώνου βάσεως καὶ τῆς αὐτοῦ πλευρᾶς.

Ἔςω κῶνος ὀρθὸς ὁ α β γ, οὗ βάσις μὲν ὁ β γ, κύκλος, πλευρὰ δὲ ἡ α β. Εὑρεθήτω δὲ μέση ἀνάλογος τῆς β δ, ἡμιδιαμέτρου τοῦ β γ, κύκλου, καὶ α β, πλευρᾶς τοῦ κώνου ἡ ε ζ, καὶ γραφήτω ὁ ζ η θ κ, κύκλος. Λέγω ὅτι ὁ ζ η θ κ, κύκλος ἴσος ἐςὶ τῇ τοῦ α β γ, κώνου ἐπιφανείᾳ. Ἐπεὶ γὰρ κατὰ τὸ ε: πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, ὁ β γ, κύκλος ἔχει πρὸς τὴν τοῦ α β γ, κώνου ἐπιφάνειαν, ὡς ἡ β δ, ἡμιδιάμετρος πρὸς τὴν α β, πλευρὰν, ὡς δὲ ἡ β δ, ἡμιδιάμετρος πρὸς τὴν α β, ἔχει ὁ αὐτὸς β γ, κύκλος πρὸς τὸν ζ η θ κ, κύκλον. αἱ γὰρ β δ, ε ζ, α β, εὐθεῖαι ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ κύκλοι ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων, πάντως γε ὁ β γ, κύκλος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρός τε τὴν τοῦ α β γ, κώνου ἐπιφάνειαν, καὶ τὸν ζ η θ κ, κύκλον, ὥςε ἡ τοῦ α β γ, κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ τῷ ζ η θ κ, κύκλῳ. Ἡ τοῦ ὀρθοῦ ἄρα κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἡμιδιάμετρος μέση ἐςὶν ἀνάλογος, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom: Sol. lib. 1. Fig. 21.

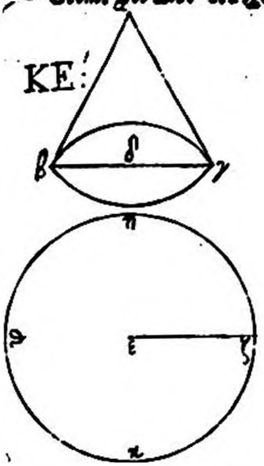


Πρότασις Κϛ'.

Ἡ τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὸν τυχόντα κύκλον ἔχει, ὡς τὸ ὑπό τε τῆς τοῦ κώνου πλευρᾶς, καὶ ἡμιδιαμέτρου τῆς αὐτοῦ βάσεως περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ τυχόντος κύκλου τετράγωνον.

Ἔςω κῶνος ὀρθὸς ὁ α β γ, τυχὼν δὲ κύκλος ὁ ζ η θ κ. Λέγω ὅτι ἡ τοῦ α β γ, κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὸν ζ η θ κ, κύκλον ἔχει, ὡς τὸ ὑπό τε τῆς β δ, ἡμιδιαμέτρου τοῦ β γ, κύκλου, καὶ τῆς α β, πλευρᾶς τοῦ κώνου περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ τῆς ε ζ, ἡμιδιαμέτρου τοῦ ζ η θ κ, κύκλου τετράγωνον, κατὰ γὰρ τὸ ε: πόρισμα τῆς κδ: τοῦ παρόντος, ἡ τοῦ α β, κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὸν β γ, κύκλον ἔχει, ὡς ἡ α β, αὐτοῦ πλευρὰ πρὸς τὴν β δ, τοῦ β γ, κύκλου ἡμιδιαμέτρον, ὥστε ἐὰν αἱ α β, β δ, ἐπ' εὐθείας ὦσιν ἔχουσαι κοινὸν ὕψος τὴν αὐτὴν β δ, καὶ συσταθῶσι δύο ὀρθογώνια τετράπλευρα, τὸ μὲν ἑτερόμηκες, τὸ δὲ τετράγωνον, πάντως γε καὶ τὸ ὀρθογώνιον ἑτερόμηκες πρὸς τὸ τετράγωνον ἕξει, ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν β δ, κατὰ τὴν α: τοῦ ς: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἀλλὰ τὸ μὲν ἑτερόμηκες ὀρθογώνιον περιέχεται ὑπό τε τῆς β δ, ἡμιδιαμέτρου τοῦ β γ, κύκλου, καὶ τῆς α β, πλευρᾶς τοῦ κώνου, τὸ δὲ τετράγωνον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς β δ, ἄρα ἡ τοῦ κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὸν β γ, κύκλον ἔχει, ὡς τὸ ὑπό τε τῆς β δ, καὶ α β, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β δ, τετράγωνον. Ἐπεὶ δὲ ὁ β γ, κύκλος πρὸς τὸν τυχόντα ζ η θ κ, ἔχει καὶ τὸ ἀπὸ τῆς β δ, τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε ζ, τετράγωνον. ὥσπερ γὰρ οἱ κύκλοι ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων ἡμιδιαμέτρων, οὕτω καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἡμιδιαμέτρων τῶν αὐτῶν κύκλων τετράγωνα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν πλευρῶν, πάντως γε καὶ δι' ἴσου ἡ τοῦ α β γ, κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὸν ζ η θ κ, τυχόντα κύκλον ἔχει, ὡς τὸ ὑπό τε τῆς β δ, καὶ α β, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε ζ, τετράγωνον. Ἡ τοῦ ὀρθοῦ ἄρα κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὸν τυχόντα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. [illegible] Lib. 1. Fig. 22.



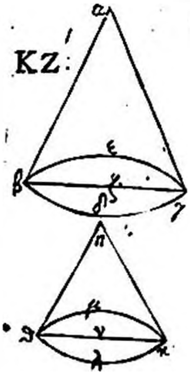
Πρότασις ΚΖ':

Αἱ τῶν ὀρθῶν κώνων ἐπιφάνειαι πρὸς ἀλλήλας ἔχουσιν, ὡς τὰ ὑπό τε τῶν πλευρῶν τῶν κώνων καὶ ἡμιδιαμέτρων τῶν αὐτῶν βάσεων περιεχόμενα ὀρθογώνια.

Ἔστωσαν κῶνοι ὀρθοί, τε α β γ, οὗ βάσις ὁ β δ γ ε, κύκλος, καὶ κέντρον τῆς αὐτοῦ βάσεως τὸ ζ, καὶ ὁ η θ κ, οὗ βάσις ὁ θ λ κ μ, καὶ κέντρον τῆς βάσεως τὸ ν. Λέγω δὴ τὴν τοῦ α β γ, κώνου ἐπιφάνειαν ἔχειν πρὸς τὴν τοῦ η θ κ, κώνου ἐπιφάνειαν, ὡς τὸ ὑπό τε τῆς α β, καὶ β ζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπό τε τῆς η θ, καὶ θ ν. κατὰ γὰρ τὴν ἀνωτέρω, ἡ τοῦ α β γ, κώνου ἐπιφάνεια ἔχει πρὸς τὸν β δ γ ε, κύκλον, ὡς τὸ ὑπό τε τῆς α β, καὶ β ζ, ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β ζ, τετράγωνον, ἀλλ' ὡς ὁ β δ γ ε, κύκλος πρὸς τὸν θ λ κ μ, κύκλον ἔχει καὶ τὸ ἀπὸ τῆς β ζ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θ ν, τετράγωνον. ὡς δὲ ὁ θ λ κ μ, κύ-

κύκλος πρὸς τὴν τοῦ ηθκ, κώνου ἐπιφάνειαν ἔχει καὶ τὸ ἀπὸ τῆς θν, τετράγωνον πρὸς τὸ ὑπό τε τῆς θη, καὶ θν, περιεχόμενον ὀρθογώνιον καὶ τὴν αὐτὴν, ἄρα καὶ δι᾽ ἴσου, ὡς ἡ τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ηθκ, κώνου ἐπιφάνειαν, οὕτω καὶ τὸ ὑπό τε τῆς αβ καὶ βζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπό τε τῆς ηθ, καὶ θν. Τέσσαρα γὰρ μεγέθη, ἡ τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφάνεια, οἱ βδγε, θλκμ, κύκλοι, καὶ ἡ τοῦ ηθκ, κώνου ἐπιφάνεια, καὶ ἄλλα τοσαῦτα τὸ ὑπό τε τῆς αβ, καὶ βζ, ὀρθογώνιον, τὰ ἀπὸ τῶν βζ, θν, τετράγωνα, καὶ τὸ ὑπό τε τῆς ηθ, καὶ θν, ὀρθογώνιον ἐν τοῖς αὐτοῖς εἰσι λόγοις σὺν δύο λαμβανόμενα, ὥστε καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις εἰσίν. Αἱ τῶν ὀρθῶν κώνων ἄρα ἐπιφάνειαι πρὸς ἀλλήλας ἔχουσι, καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 23.

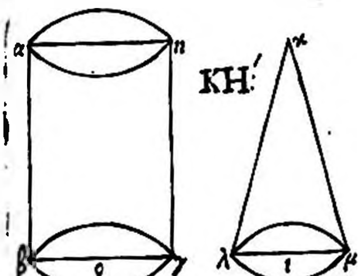

ΚΖ:

Πρότασις ΚΗ′:

Ἡ τοῦ ὀρθοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἐπιφάνειαν ἔχει, ὡς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπό τε τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου, καὶ ἡ μιδιαμέτρου τῆς αὐτοῦ βάσεως ὀρθογώνιον, καὶ ἀνάπαλιν.

Ἔστω κύλινδρος μὲν ὀρθὸς ὁ αβγη, κῶνος δὲ ὁ κλμ. Λέγω δὴ τὴν τοῦ αβγη, κυλίνδρου ἐπιφάνειαν ἔχειν πρὸς τὴν τοῦ κλμ, κώνου ἐπιφάνειαν, ὡς τὸ αγ, ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπό τε τῆς κλ, καὶ λι, περιεχόμενον ὀρθογώνιον. κατὰ γὰρ τὴν ιζ′: τοῦ παρόντος ἡ τοῦ αβγη, κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὸν βγ, κύκλον ἔχει, ὡς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ αὐτοῦ κυλίνδρου ὀρθογώνιον τὸ αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βο, τετράγωνον. ἀλλ᾽, ὡς ὁ βγ, κύκλος πρὸς τὸν λμ, κύκλον, ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς βο, τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λι, ὡς δὲ ὁ λμ, κύκλος πρὸς τὴν τοῦ κλμ, κώνου ἐπιφάνειαν ἔχει καὶ τὸ ἀπὸ τῆς λι, τετράγωνον πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς κλ, λι, ὀρθογ′: ἄρα καὶ δι᾽ ἴσου ὡς ἡ τοῦ αβγη, κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ κλμ, κώνου ἐπιφάνειαν, ἔχει τὸ αγ, ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπό τε τῆς κλ, καὶ λι, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ὁ λόγος ὁ αὐτὸς τῷ πρότερῳ. Ἡ τοῦ ὀρθοῦ ἄρα κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἐπιφάνειαν ἔχει ὡς τὸ διὰ τοῦ ἄξωνος τοῦ κυλίνδρου ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπό τε τῆς πλευ-

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 24.


ΚΗ′

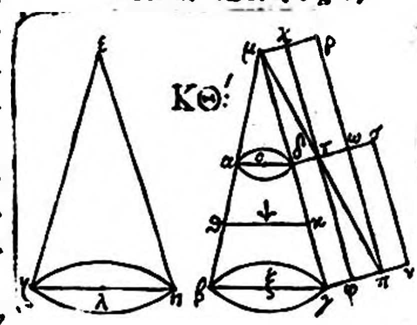
πλευρᾶς τοῦ κώνου καὶ ἡμιδιαμέτρου τῆς αὐτοῦ βάσεως ὀρθογώνιον, καὶ ἀνάπαλιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΘ′.

Ἡ τοῦ κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ὁλοκλήρου κώνου ἐπιφάνειαν ἔχει, ὡς τὸ ὑπό τε τῆς πλευρᾶς τοῦ κολοβοῦ κώνου καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ ἐν μέσῳ αὐτοῦ κύκλου περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπό τε τῆς πλευρᾶς τοῦ ὁλοκλήρου κώνου καὶ ἡμιδιαμέτρου τῆς αὐτοῦ περιεχόμενον βάσεως.

Ἔστω κῶνος κολοβὸς μὲν ὁ α β γ δ, ὁλόκληρος δὲ ὁ ε ζ η, καὶ διάμετρος κύκλου τοῦ ἐν μέσῳ τοῦ κολοβοῦ κώνου ἡ θ κ. Λέγω δὴ τὴν τοῦ α β γ δ, κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνειαν ἔχειν πρὸς τὴν τοῦ ε ζ η, ὁλοκλήρου κώνου ἐπιφάνειαν, ὡς τὸ ὑπό τε τῆς α β, καὶ θ κ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπό τε τῆς ε ζ, καὶ ζ λ. Ἤχθω γὰρ ἑκατέρα τῶν β α, γ δ, πλευρῶν τοῦ κολοβοῦ κώνου ἐπ' εὐθείας, καὶ ἀναπεπληρώσθω ὁ μ β γ, κῶνος. πρὸς δὲ τῷ γ, σημείῳ συνεστάθω κάθετος ἐπὶ τῆς μ γ, ἡ γ ν, ὥστε τὸ μὲν γ π, αὐτῆς μέρος ἴσον εἶναι τῇ γ ξ, ἡμιδιαμέτρῳ τοῦ β γ, κύκλου, τὸ δὲ π ν, τῇ δ ο, ἡμιδιαμέτρῳ τοῦ α δ, κύκλου, καὶ ἀναπεπληρώσθωσαν τὰ γ ρ, γ σ, ὀρθογώνια. εἶτα ἐπιζεύχθω ἡ μ π, διαγώνιος διάμετρος τοῦ γ ρ, παραλληλογράμμου, τέμνουσα τὴν δ σ, κατὰ τὸ τ, καὶ διὰ τοῦ τ, διήχθω παράλληλος τῇ γ μ, ἡ φ χ.

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 25.



Δείκνυται. Ἐπεὶ γὰρ αἱ γ κ, κ δ, εἰσὶν ἴσαι, πάντως γε αἱ μ δ, μ κ, μ γ, ἀριθμητικῶς εἰσιν ἀνάλογοι. ἀλλ' ὡς ἡ μ δ, πρὸς τὴν δ α, ἔχει ἥτε μ κ, πρὸς τὴν κ θ, καὶ ἡ μ γ, πρὸς τὴν γ β, ἄρα καὶ αἱ δ α, κ θ, γ β, ἀριθμητικῶς εἰσιν ἀνάλογοι, ὅτε δὲ τρία μεγέθη ἀριθμητικῶς εἰσιν ἀνάλογα, τὸ ἐκ τῶν ἄκρων συμποσούμενον ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκ τοῦ μέσου δὶς λαμβανομένῳ, ἄρα τὸ μὲν ἐκ τῶν δ α, γ β, συμποσούμενον ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκ τοῦ κ θ, δὶς λαμβανομένῳ, τὸ δὲ ἐκ τῶν δ ο, γ ξ, τῷ ἐκ τοῦ κ ψ, ὁμοίως δὶς λαμβανομένῳ, ἤτοι τῷ κ θ. Αὖθις ἐπεὶ ἡ μ γ, πρὸς τὴν γ ξ, ἔχει, ὡς ἡ μ δ, πρὸς τὴν δ ο, κατὰ τὴν β′: τοῦ ς′: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὡς δὲ ἡ μ γ, πρὸς τὴν γ π, ἡ τὴν ἴσην ταύτῃ γ ξ, ἔχει καὶ ἡ μ δ, πρὸς τὴν δ τ, πάντως γε ἡ μ δ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρός τε τὴν δ ο, καὶ δ τ, ὥστε αἱ δ ο, δ τ, ἴσαι εἰσίν, ἀλλ' ἡ δ ο, ἴση ἐστὶ καὶ τῇ π ν, ἡ δὲ γ ξ, τῇ γ π, τὸ ἐκ τῶν δ ο ἄρα γ ξ, συμποσούμενον

ἴσον

ἴσον ἐστὶ τῇ γ ν, τὸ δὲ ἐκ τῶν δ ο, γ ξ, ἐστὶν ἴσον καὶ τῇ κ θ, ὡς δέδεικται, ἡ γ ν, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ κ θ, καὶ τὸ γ σ, ὀρθογώνιον ἐστὶ τὸ ὑπό τε τῆς α β, πλευρᾶς τοῦ α β γ δ, κολοβοῦ κώνου, καὶ κ θ, διαμέτρου τοῦ ἐν μέσῳ αὐτοῦ κύκλου. ἀλλ' ἡ μὲν γ π, ἴση ἐστὶ τῇ γ ξ, ἡ δὲ δ π, τῇ δ ο, ὡς δέδεικται. ἄρα τὸ μὲν γ ρ, παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον ἐστὶ τὸ ὑπό τε τῆς μ γ, πλευρᾶς τοῦ μ β γ, ὁλοκλήρου κώνου, καὶ γ ξ, ἡμιδιαμέτρου τῆς αὐτοῦ βάσεως, τὸ δὲ δ χ, τὸ ὑπό τε τῆς μ δ, πλευρᾶς τοῦ μ α δ, κώνου καὶ δ ο, ἡμιδιαμέτρου τῆς αὐτοῦ βάσεως. ἔχει δὲ ἡ τοῦ μ β γ, κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ μ α δ, ἐπιφάνειαν, ὡς τὸ ὑπό τε τῆς μ γ, καὶ γ ξ, πρὸς τὸ ὑπό τε τῆς μ δ, δ ο, περιεχόμενον ὀρθογώνιον κατὰ τὴν κ ζ': τοῦ παρόντος, ἄρα καὶ τὸ γ ρ, πρὸς τὸ δ χ, ἔχει, ὡς ἡ τοῦ μ β γ, κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ μ α δ, ἐπιφάνειαν, καὶ διαιρέσει ἄρα, ὡς ἡ τοῦ α β γ δ, κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ μ α δ, ἐπιφάνειαν, ἔχει καὶ ὁ δ γ π ρ χ τ, γνώμων πρὸς τὸ δ χ, ὀρθογώνιον, ἀλλὰ τὸ γ σ, ἴσον ἐστὶ τῷ δ γ π ρ χ τ, γνώμονι, ἄρα καὶ ὡς ἡ τοῦ α β γ δ, κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ μ α δ, ἐπιφάνειαν, ἔχει ὡς τὸ γ σ, πρὸς τὸ δ χ, ὀρθογώνιον, ὡς δὲ ἡ τοῦ μ α δ, κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ε ζ η, ἐπιφάνειαν, ἔχει τὸ ὑπό τε τῆς μ δ, καὶ δ ο, ἤτοι τὸ δ χ, πρὸς τὸ ὑπό τε τῆς ε ζ, καὶ ζ λ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἄρα καὶ δι' ἴσου, ὡς ἡ τοῦ α β γ δ, κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ε ζ η, ἔχει τὸ γ σ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ε ζ, ζ λ, ἀλλὰ τὸ γ σ, ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν α β, θ κ, ὡς δέδεικται, ἡ τοῦ κολοβοῦ ἄρα κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ὁλοκλήρου κώνου ἐπιφάνειαν ἔχει ὡς τὸ ὑπό τε τῆς πλευρᾶς τοῦ κολοβοῦ κώνου καὶ τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ ἐν μέσῳ αὐτοῦ κύκλου περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπό τε τῆς πλευρᾶς τοῦ ὁλοκλήρου κώνου καὶ ἡμιδιαμέτρου τῆς αὐτοῦ βάσεως περιεχόμενον.

Ὅτι δὲ ὁ δ γ π ρ χ τ, γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ γ σ, παραλληλογράμμῳ, δῆλον. τὸ γὰρ τ ρ, παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ γ τ, τούτῳ δὲ τὸ π σ, ὥστε τὸ π σ, ἴσον ἐστὶ τῷ τ ρ, κοινοῦ δὲ λαμβανομένου τοῦ γ ω, ἔσται τὸ γ σ, ἴσον τῷ δ γ π ρ χ τ, γνώμονι.

Πρότασις Λ':

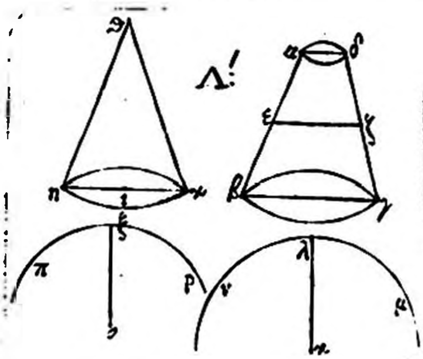
Ἡ τοῦ κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἡμιδιάμετρος μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῆς τε τοῦ κώνου πλευρᾶς καὶ διαμέτρου τοῦ ἐν μέσῳ αὐτοῦ κύκλου.

Ἔστω κῶνος κολοβὸς ὁ α β γ δ, οὗ πλευρὰ μὲν ἡ α β, διάμετρος δὲ τοῦ ἐν μέσῳ αὐτοῦ κύκλου ἡ ε ζ· ἔστω δὲ καὶ ἡ κ λ, μέση ἀνάλογος τῶν α β, ε ζ, ἡμιδιάμετρος δὲ τοῦ μ λ ν, κύκλου. Λέγω δὴ τὴν τοῦ α β γ δ, κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνειαν ἴσην εἶναι τῷ μ λ ν, κύκλῳ. Συστάθήτω γὰρ κῶνος ὁλόκληρος ὡς ἔτυχεν, ὁ θ η κ, οὗ βάσις ὁ η κ, κύκλος, ἡμιδιάμετρος δὲ τῆς αὐτοῦ βάσεως

ἡ η ι,

ἡ ηι, καὶ εὑρεθήτω μέση ἀνάλογος τῶν θη, ηι, ἡ οξ· διαστήματι δὲ τῷ οξ, γραφήτω ὁ πξρ, κύκλος· καὶ ἐπεὶ ἡ τοῦ αβγδ, κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνεια ἔχει πρὸς τὴν τοῦ θηκ, ὁλοκλήρου κώνου ἐπιφάνειαν, ὡς τὸ ὑπὸ τῶν αβ, εζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν

Geom.Sol.Lib. 2. Fig. 26.



θη, ηι, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, καὶ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν αβ, εζ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς κλ, τετράγωνον, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν θη, ηι, τὸ ἀπὸ τῆς οξ, πάντως γε ἡ τοῦ αβγδ, κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνεια ἔχει πρὸς τὴν τοῦ θηκ, ὁλοκλήρου κώνου ἐπιφάνειαν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς κλ, τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς οξ, τετράγωνον, ἀλλ' ὡς τὰ τετράγωνα τῶν κλ, οξ, ἡμιδιαμέτρων, ἔχουσι καὶ οἱ μλν, πξρ, κύκλοι, ἄρα ἡ τοῦ αβγδ, κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ θηκ, ἐπιφάνειαν ἔχει, ὡς ὁ μλν, κύκλος πρὸς τὸν πξρ, ἔστι δὲ ἡ τοῦ θηκ, κώνου ἐπιφάνεια ἴση τῷ πξρ, κύκλῳ κατὰ τὴν κε: τοῦ παρόντος, ἄρα καὶ ἡ τοῦ αβγδ, κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ μλν, κύκλῳ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι αἱ τῶν κολοβῶν κώνων ἐπιφάνειαι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς τὰ ὑπό τε τῆς πλευρᾶς ἑκατέρου καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ ἐν μέσῳ αὐτῶν κύκλου περιεχόμενα ὀρθογώνια.

Πρότασις ΛΑ'.

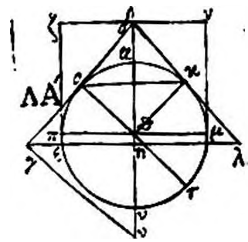
Ἡ τοῦ κώνου ἐπιφάνεια, οὗ ἑκατέρα τῶν πλευρῶν ἁπτομένη τοῦ κύκλου, δίχα διαιρεῖται κατὰ τὴν ἀφήν, ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ, οὗ ὕψος τὸ αὐτὸ τῷ τοῦ κώνου, καὶ διάμετρος τῆς βάσεως ἴση τῇ τοῦ κύκλου διαμέτρῳ.

Ἔστω α: κῶνος ὁλόκληρος ὁ δγλ, οὗ ἑκατέρα τῶν δγ, δλ, πλευρῶν ἁπτέσθω τοῦ απυμ, κύκλου (οὗ ἡ διάμετρος πμ, ἔστω παράλληλος τῇ γλ, διαμέτρῳ τῆς τοῦ δγλ, κώνου βάσεως) ἡ μὲν κατὰ τὸ ο, ἡ δὲ κατὰ τὸ κ, ὥστε τὰς δο, ογ, καὶ δκ, κλ, ἴσας εἶναι. Λέγω δὴ τὴν τοῦ δγλ, κώνου ἐπιφάνειαν ἴσην εἶναι τῇ τοῦ κυλίνδρου, οὗ ὕψος μὲν ἴσον τῷ ηδ, ὕψει τοῦ δγλ, κώνου, διάμετρος δὲ τῆς αὐτοῦ βάσεως ἴση τῇ πμ, διαμέτρῳ τοῦ απυμ, κύκλου. Συνεστάθωσαν γὰρ κάθετοι ἐπὶ τῆς πμ, διαμέτρου πρὸς τοῖς π, καὶ μ, πέρασιν αὐτῆς αἱ πζ, μν,

καὶ

καὶ διὰ τοῦ δ, σημείου διήχθω παράλληλος τῇ π μ, ἡ ζ ν, ἀπὸ δὲ τοῦ ο, διήχθω διὰ τοῦ θ, κέντρου τοῦ κύκλου ἡ ο τ, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἤχθω ἡ γ υ, συμπίπτουσα τῇ δ θ, ἐκβαλλομένῃ κατὰ τὸ υ. καὶ ἐπεὶ ἡ ο τ, διὰ τοῦ θ, κέντρου τοῦ κύκλου διέρχεται καὶ τῆς ἁφῆς, πάντως γε κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς γ δ, ταύτῃ δὲ παράλληλος ἤχθη ἡ γ υ, ἄρα καὶ ἡ γ υ, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς γ δ, ὥστε ἡ ὑπὸ δ γ υ, γωνία ὀρθή ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ γ η δ, ὁμοίως ὀρθή ἐστιν, ὡς ὀψόμεθα, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ γ δ υ, κοινή, τὰ ἄρα δ γ υ, γ η δ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσιν, ὥστε ἡ ὑπὸ δ γ η, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γ υ δ, ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ γ η υ, γ η δ, εἰσὶν ἴσαι, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ η γ υ, ἴση ἐστὶ λοιπῇ τῇ ὑπὸ η δ γ,

Geom: Sol. lib: 1. Fig. 27.



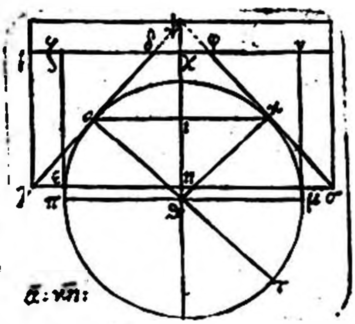
ἰσογώνια ἄρα τὰ γ η υ, γ η δ, τρίγωνα, καὶ ἑπομένως ὡς ἡ γ υ, πρὸς τὴν γ η, ἡ γ δ, πρὸς τὴν δ η, ἀλλ' ἡ γ υ, ἴση ἐστὶ τῇ π μ, (κατὰ γὰρ τὴν β': τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὡς ἡ δ ο, πρὸς τὴν δ γ, ἡ ο θ, πρὸς τὴν γ υ, ἡ δὲ δ γ, διπλασία ἐστὶ τῆς δ ο, διπλασία ἄρα καὶ ἡ γ υ, τῆς ο θ. ἔστι δὲ ἡ ο θ, ἡμιδιάμ: ἴση τῇ π θ, ἡμιδιαμέτρῳ, ἡ γ υ. ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ π μ,) ταύτῃ δὲ ἴση ἡ ζ ν, ἄρα ὡς ἡ ζ ν, πρὸς τὴν γ η, ἡ γ δ, πρὸς τὴν δ η, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ζ ν, δ η, ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν γ δ, γ η, μέσων, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν γ δ, γ η, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἐστὶ τὸ τοῦ κώνου ὀρθογώνιον, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ζ ν, δ η, τὸ τοῦ κυλίνδρου, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν δ γ, γ η, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ζ ν, δ η, ἔχει ἡ τοῦ δ γ λ, κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ε ν, κυλίνδρου ἐπιφάνειαν κατὰ τὴν κ η': τοῦ παρόντος, ἄρα καὶ ἡ τοῦ δ γ λ, κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ε ν, κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ.

Ὅτι δὲ ἡ ὑπὸ γ η δ, ὀρθή ἐστι, δῆλον. ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς θ κ, ἐπεὶ τῶν δ ο θ, δ κ θ, τριγώνων αἱ δύο δ ο, ο θ, δυσὶ ταῖς δ κ, κ θ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, κοινὴ δὲ ἡ δ θ, πάντως γε ἡ ὑπὸ ο δ θ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ κ δ θ, ἀλλὰ τῶν γ η δ, λ η δ, τριγώνων αἱ δύο γ δ, δ η, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς λ δ, δ η, καὶ βάσις ἄρα ἡ γ η, βάσει τῇ λ η, ἴση ἐστὶ, καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον ὅλῳ τῷ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἄρα ἡ ὑπὸ γ η δ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ λ η δ, καὶ ἑπομένως ὀρθὴ ἑκατέρα κατὰ τὴν ιγ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ.

Ἔστω β': κώνος κολοβὸς ὁ δ γ σ φ, ὥστε ἑκατέρων καὶ τῶν τούτου πλευρῶν δ γ, σ φ

ἀποἅπτεσθαί τε τοῦ ο τ κ, κύκλου, τὴν μὲν κατὰ τὸ ο, τὴν δὲ κατὰ τὸ κ, καὶ δίχα κατὰ τὰς ἁφὰς τέμνεσθαι. Ἤχθω δὴ ἡ π μ, διάμετρος τοῦ κύκλου παραλλήλως τῇ γ σ, καὶ τὰ λοιπὰ γενέσθω τῆς κατασκευῆς ὡς προηρμήνευται. Λέγω τὴν τοῦ δ γ σ φ, κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνειαν ἴσην εἶναι τῇ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ, οὗ ὕψος μὲν ἡ ε ζ, ἴση τῇ η χ, ὕψει τοῦ δ γ σ φ, κολοβοῦ κώνου, διάμετρος δὲ τῆς αὐτοῦ βάσεως ἡ ζ ν, ἴση τῇ διαμέτρῳ τοῦ ο τ κ, κύκλου. Ἐπεὶ γὰρ αἱ θ ο, θ κ, ἴσαι εἰσὶν ὡς ἡμιδιάμετροι, πάντως γε αἱ ὑπὸ θ ο ι, θ κ ι, γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ θ ο δ, θ κ φ, ἴσαι ὁμοίως εἰσίν. ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ις′: τοῦ γ′: τοῦ Στοιχειωτοῦ. ἀφαιρεθεισῶν ἄρα τῶν θ ο ι, θ κ ι, ἴσων, ἐναπολείπονται καὶ αἱ λοιπαὶ ι ο δ, ι κ φ, ἴσαι. ὥστε πληρωθέντος τοῦ ψ γ σ, ὁλοκλήρου κώνου, ἔσται τὸ ψ ο κ, τρίγωνον ἰσοσκελὲς, καὶ ἡ ο ψ, ἴση ἔσται τῇ κ ψ, ἀλλὰ τῶν ψ ο θ, ψ κ θ, τριγώνων αἱ δύο ο θ, θ ψ, πλευραὶ ἴσαι εἰσὶ ταῖς δυσὶ κ θ, θ ψ, ἄρα κατὰ τὴν η′: τοῦ α′: τοῦ αὐτοῦ, αἱ ὑπὸ ο θ ψ, κ θ ψ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ο θ, θ ι, ἴσαι ταῖς κ θ, θ ι, ἄρα καὶ βάσις ἡ ο ι, βάσει τῇ κ ι, ἴση ἐστὶν, ὥστε κατὰ τὴν γ′: τοῦ γ′: τοῦ αὐτοῦ, αἱ ὑπὸ θ ι ο, θ ι κ, ἴσαι εἰσίν. ἡ γὰρ ο κ, δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνεται ὑπὸ τῆς θ ι, διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένης, ἔστι δὲ ἡ θ ι, ὀρθὴ καὶ ἐπὶ τῆς γ σ, βάσεως τοῦ δ γ σ φ, κώνου ὡς ὕψος τοῦ αὐτοῦ, ἡ γ σ, ἄρα παράλληλός ἐστι τῇ ο κ, τῇ δὲ γ σ, παράλληλός ἐστι καὶ ἡ ζ ν, ἡ ζ ν, ἄρα παράλληλός ἐστι, καὶ τῇ ο κ, ὥστε αἱ ὑπὸ ζ δ ο, δ ο ι, ἐναλλὰξ γωνίαι ἴσαι εἰσίν. Αὖθις ἡ ὑπὸ δ ο θ, ἐστὶν ὀρθὴ κατὰ τὸ ῥηθὲν πόρισμα, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ι ο θ, ι θ ο, ἴσαι μιᾷ ὀρθῇ, ἄρα ἀφαιρουμένης τῆς ὑπὸ ι ο θ, κοινῆς, ἐναπολείπεται ἴση ἡ ὑπὸ ι ο δ, τῇ ὑπὸ ο θ ι, ἀλλὰ τῇ ὑπὸ ι ο δ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ο δ ρ, ἐναλλὰξ, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ο δ ρ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ο θ ι, ἔστι δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ο ι θ, δ ρ γ, ὀρθὴ, τὰ ἄρα ο ι θ, δ ρ γ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσι, καὶ ἑπομένως ὡς ἡ ρ γ, ἤτοι ε ζ, πρὸς τὴν γ δ, ἡ ο ι, πρὸς τὴν ο θ, ὡς δὲ ἡ ι ο, πρὸς τὴν ο θ, ἔστι καὶ ἡ ο κ, διπλῆ τῆς ο ι, πρὸς τὴν ο τ, διπλῆν τῆς ο θ, ἄρα ὡς ἡ ε ζ, πρὸς τὴν γ δ, ἡ ο κ, πρὸς τὴν ο τ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ε ζ, ο τ, ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν γ δ, ο κ, μέσων, ἀλλ' ἡ ο τ, ἴση ἐστὶ τῇ ζ ν, ἡ δὲ ο κ, διάμετρος τοῦ ἐν μέσῳ κύκλου τοῦ δ γ σ φ, κολοβοῦ κώνου, ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ε ζ, ζ ν, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν γ δ, ο κ, ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ε ζ, ζ ν, ἐστὶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου ὀρθογώνιον, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν γ δ, ο κ, τὸ τοῦ κώνου, καὶ ὡς ἔχουσι ταῦτα πρὸς ἄλλη-

Geom. Sol Lib. 1. Fig. 28.



λα,

λα, ἔχουσι καὶ αἱ ἐπιφάνειαι τοῦ τε κώνου καὶ κυλίνδρου ὡς προείρηται, πάντως γε καὶ ἡ τοῦ ϑγσφ, κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ, οὗ ὕψος μὲν ἴσον τῷ τοῦ αὐτοῦ κώνου ὕψει, διάμετρος δὲ τῆς βάσεως ἴση τῇ τοῦ κύκλου διαμέτρῳ, οὗ αἱ τοῦ κώνου πλευραὶ ἅπτονται, δίχα κατὰ τὰς ἁφὰς διαιρούμεναι, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

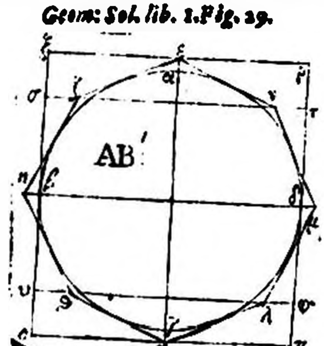
Ὅτι δὲ ἡ τοῦ κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνειαν ἔχει ὡς τὸ ὑπό τε τῆς πλευρᾶς τοῦ κολοβοῦ κώνου καὶ διαμέτρου τοῦ ἐν μέσῳ αὐτοῦ κύκλου περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου ὀρθογώνιον, δῆλον· ὡς γὰρ ἡ τοῦ κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ὀρθοῦ ἐπιφάνειαν, ἔχει καὶ τὸ τοῦ κολοβοῦ κώνου ὀρθογώνιον πρὸς τὸ τοῦ ὀρθοῦ κατὰ τὴν κϑ′: τοῦ παρόντος. ἀλλ᾽ ὡς ἡ τοῦ ὁλοκλήρου κώνου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ κυλίνδρου, ἔχει καὶ τὸ τοῦ ὀρθοῦ κώνου ὀρθογώνιον πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου ὀρθογώνιον κατὰ τὴν κη′: τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ ἡ τοῦ κολοβοῦ κώνου ἐπιφάνεια ἔχει πρὸς τὴν τοῦ κυλίνδρου, ὡς τὸ τοῦ κολοβοῦ κώνου ὀρθογώνιον πρὸς τὸ τοῦ κυλίνδρου.

Πρότασις ΛΒ′.

Ἐὰν περὶ κύκλον πρός τι ἐπίπεδον ὀρθὸν ὄντα πολύγωνον ἀρτιόπλευρον ἢ περιττόπλευρον περιγεγραμμένον ᾖ, ἅπτηται δὲ τοῦ κύκλου εὐθεῖα παράλληλος μὲν τῇ τοῦ κύκλου διαμέτρῳ, τῇ πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ὀρθῇ, ἴση δὲ τῷ τοῦ πολυγ. ὕψει, καὶ τοῦ κύκλου περιενεχθέντος, σφαῖρα συσταθῇ, ὥστε περὶ αὐτὴν κώνους εἶναι περιγεγραμμένους ὁλοκλήρους τε καὶ κολοβούς, ἔτι δὲ καὶ κύλινδρον, αἱ κωνικαὶ ἐπιφάνειαι ἴσαι ἔσονται τῇ κυλινδρικῇ ἐπιφανείᾳ ἐκτὸς τῶν βάσεων.

Ἔστω κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὸ κείμενον ἐπίπεδον ὁ αβγδ, καὶ περὶ αὐτὸν πολύγωνον περιγεγραμμένον ἀρτιόπλευρον τὸ εζηϑκλμν. ἀπτέσθω δὲ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἡ ξο, κατὰ τὸ β, ἴση οὖσα τῇ εκ, καὶ παράλληλος τῇ αγ, καὶ ἐννοείσθω περιφέρεσθαι τὸν αβγδ, κύκλον περὶ τὴν αγ, ὀρθὴν οὖσαν πρὸς τὸ κείμενον ἐπίπεδον. τούτων γὰρ οὕτω κειμένων ἅμα καὶ γενομένων, συσταθήσεταί τις σφαῖρα, καὶ περὶ αὐτὴν κῶνοι τέσσαρες, οἱ δύο μὲν ὁλόκληροι ὁ εζν, καὶ κϑλ, οἱ δύο δὲ κολοβοὶ ὁ ζημν, καὶ ϑημλ, ἔτι

Geom: Sol. lib. 1. Fig. 29.



δὲ καὶ κύλινδρος, ὁ ορ, τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθογώνιον ἐστὶ τὸ οξρπ. Λέγω δὴ τὰς τῶν εζν, ζημν, κθλ, θημλ, κώνων ἐπιφανείας ἴσας εἶναι τῇ τοῦ ζπ, κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ. Διήχθωσαν οὖν διὰ τῶν ζν, καὶ θλ, αἱ στ, υφ, εὐθεῖαι. καὶ ἐπεὶ τοῦ εζν, κώνου, καὶ ζημν, αἱ πλευραὶ ἅπτονται τοῦ αβγδ, κύκλου, δίχα κατὰ τὰς ἁφὰς διαιρούμεναι, δῆλον, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μὲν εζν, κώνου ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ σρ, κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἡ δὲ τοῦ ζημν, τῇ τοῦ βτ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν τοῦ κθλ, κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ οφ, ἡ δὲ τοῦ θημλ, τῇ τοῦ υδ. ὥστε αἱ τέσσαρες κωνικαὶ ἐπιφάνειαι ἴσαι εἰσὶ σύμπασαι τῇ τοῦ ξπ, ἐπιφανείᾳ. Τὸ αὐτὸ δειχθήσεται καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον κἂν καὶ τὸ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένον πολύγωνον περισσόπλευρον εἴη. συσταθήσονται γὰρ περὶ τὴν σφαῖραν κῶνοι, ὧν εἷς μὲν ἔσται ὁλόκληρος, οἱ δὲ λοιποὶ κολοβοί, καὶ τούτων ἑκάστου αἱ πλευραὶ ἁπτόμεναι ἔσονται τοῦ κύκλου.

Πρότασις ΛΓ΄.

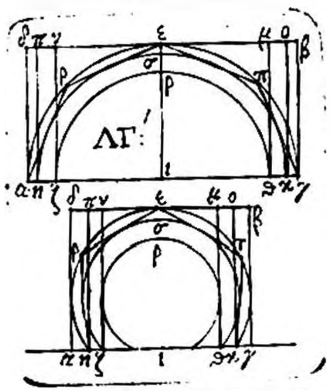
Ἡ τοῦ ἡμισφαιρίου, ἢ ἡ τοῦ τυχόντος τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ τοῦ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχοντος, καὶ βάσιν ἴσην τῷ μεγίστῳ τῆς σφαίρας κύκλῳ.

Ἔστω ἡμισφαίριον τὸ αεγ, καὶ κύλινδρος περὶ αὐτὸ ὁ δαγβ, οὗ βάσις ἡ αγ, καὶ ὕψος τὸ αδ, ὃ καὶ τοῦ ἡμισφαιρίου. Λέγω δὴ τὴν τοῦ αεγ, ἡμισφαιρίου ἐπιφάνειαν ἴσην εἶναι τῇ τοῦ αβ, κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ, εἰ γὰρ μή, ἢ μείζων ἔσται, ἢ ἐλάττων. Ἔστω γοῦν α΄· ἐλάττων καὶ γινέσθω ὡς ἡ τοῦ περὶ τὸ δαγβ, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ αεγ, ἡμισφαιρίου ἐπιφάνειαν, ἡ αγ, πρὸς τὴν ζθ, εἶτα ἐγγραφήτω εἰς τὸ αεγ, ἡμικύκλιον τὸ αρετγ, πολύγωνον μὴ ἁπτόμενον τοῦ ζρθ. καὶ ἐγγραφήτω εἰς τὸ αὐτὸ πολύγωνον τὸ ησκ, ἡμικύκλιον, καὶ ἀπὸ τῶν ηζθκ, ἀνεστάθωσαν κάθετοι αἱ ηπ, ζν, θμ, κο, καὶ ἐπεὶ αἱ τῶν κυλίνδρων ἐπιφάνειαι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ διὰ τῶν ἀξόνων αὐτῶν ὀρθογώνια κατὰ τὴν ιη΄· τοῦ παρόντος, πάντως καὶ ἡ τοῦ περὶ τὸ αβ, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ περὶ τὸ ζμ, ἔχει ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ ζμ, ὀρθογώνιον, ἀλλὰ τὸ αβ, ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ζμ, ἔχει, ὡς ἡ αγ, βάσις πρὸς τὴν ζθ, κατὰ τὴν α΄· τοῦ ϛ΄· τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἄρα καὶ ἡ τοῦ περὶ τὸ αβ, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ περὶ τὸ ζμ, ἔχει ὡς ἡ αγ, πρὸς τὴν ζθ, ἡ δὲ αγ, πρὸς τὴν ζθ, ἔχει ὡς ἡ τοῦ περὶ τὸ δαγβ, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὸ αεγ, ἡμισφαίριον, ἄρα ἡ τοῦ περὶ τὸ δαγβ, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τε τὴν τοῦ περὶ τὸ ζμ, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ἐπιφάνειαν, καὶ πρὸς τὸ αεγ, ἡμισφαίριον, ὥστε ἡ τοῦ αεγ, ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ περὶ τὸ ζμ, κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ. Ἐπεὶ δὲ κατὰ τὴν ἀνωτέρω αἱ κωνικαὶ

ἐπι-

ἐπιφάνειαι τοῦ π ε ρ τ, καὶ ρ α γ τ, ἴσαι εἰσὶ τῇ τοῦ περὶ τὸ η ο, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ, ἡ δὲ τοῦ περὶ τὸ κ π, κυλίνδρου ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ περὶ τὸ ζ μ, κυλίνδρου ἐπιφανείας, ἄρα αἱ κωνικαὶ αὗται ἐπιφάνειαι μείζονές εἰσι καὶ τῆς τοῦ α ι γ, ἡμισφαιρίου ἐπιφανείας, ὅπερ ἄτοπον. ἐγγεγραμμένοι γάρ εἰσιν. οἱ κῶνοι εἰς τὸ α γ ι, ἡμισφαίριον.

Geom. Sol Lib. 1. Fig. 30.



Ἔστω δὲ μείζων ἡ τοῦ ζ ρ θ, ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια τῆς τοῦ περὶ τὸ ζ μ, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ἐπιφανείας. Γενέσθω οὖν ὡς ἡ τοῦ περὶ τὸ ζ μ, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ζ ρ θ, ἡμισφαιρίου ἐπιφάνειαν, ἡ ζ θ, πρὸς τὴν η κ, ἤγουν ἡ ζ ι πρὸς τὴν η ι, ὡς γὰρ ἡμιδιάμετρος πρὸς ἡμιδιάμετρον, ἔχει καὶ διάμετρος πρὸς διάμετρον, τὰ δὲ λοιπὰ γινέσθω ὡς προηρμήνευται· καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ ζ θ, πρὸς τὴν η κ, ἢ ἡ ι ζ, πρὸς τὴν ι η, ἔχει τὸ ζ μ, ὀρθογώνιον πρὸς τὸ η ο, ὀρθογώνιον κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν α: ὡς δὲ τὸ ζ μ, ὀρθογώνιον πρὸς τὸ η ο, ἔχει καὶ ἡ τοῦ περὶ τὸ ζ μ, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ὁμοίως ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ περὶ τὸ η ο· ἄρα ἡ τοῦ ζ ρ θ, ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια, καὶ ἡ τοῦ περὶ τὸ η ο, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ὁμοίως ἐπιφάνεια τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὴν τοῦ περὶ τὸ ζ μ, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ἐπιφάνειαν, ὥστε ἡ τοῦ ζ ρ θ, ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ περὶ τὸ η ο, ὀρθογώνιον κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ, ἀλλὰ τῇ τοῦ περὶ τὸ η ο, κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐπιφάνειαι τοῦ π ε ρ τ, καὶ ρ α γ τ, κώνου, ἄρα αἱ κωνικαὶ αὗται ἐπιφάνειαι ἴσαι εἰσὶ καὶ τῇ τοῦ ζ ρ θ, ἡμισφαιρίου ἐπιφανείᾳ, ὅπερ ἄτοπον. οὐ γὰρ ἅπτονται αὐτοῦ αἱ τῶν κώνων πλευραὶ περὶ αὐτὸ ὄντων, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

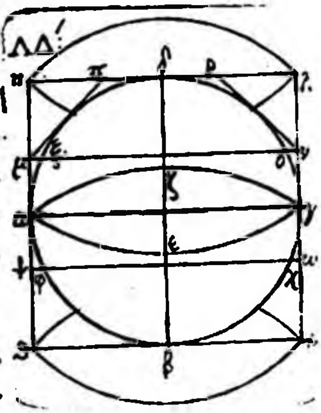
Ὅρα καὶ τὰ παραλειπόμενα τῆς παρ: λγ': παρακατιών.

:Πρότασις ΛΔ':

Ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ἐν αὐτῇ μεγίστου κύκλου.

Ἔστω σφαῖρα ἡ α β γ δ, καὶ μέγιστος ἐν αὐτῇ κύκλος ὁ α ε γ ζ. Λέγω τὴν τῆς α β γ δ, σφαίρας ἐπιφάνειαν τετραπλασίονα εἶναι τοῦ α ε γ ζ, κύκλου. Ἐγγραφήτω δὲ περὶ τὴν α β γ δ, σφαῖραν κύλινδρος ὁ η θ κ λ· καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἡ τοῦ α δ γ, ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ α λ, κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ, ἡ δὲ τοῦ α β γ, ἡμισφαιρίου τῇ τοῦ α κ, κυλίνδρου, πάντως γε ἡ τῆς α β γ δ, σφαίρας ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ θ λ, κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ. ἀλλ' ἡ τοῦ θ λ, κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἡμιδιάμ: μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν η θ, θ κ, κατὰ τὴν ιϛ': τοῦ παρ: ἄρα καὶ ἡ τῆς α β γ δ, σφαίρας ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἡμιδιάμ: μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν η θ, θ κ, τουτέστιν ἴση τῇ τῆς σφαίρας διαμέτρῳ, ἡ δὲ διάμετρος τοῦ αὐτοῦ κύκλου, διπλασιός ἐστι τῆς διαμέτρου τῆς αὐτῆς σφαίρας, καὶ οἱ κύκλοι ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων, ὡς καὶ τὰ ὅμοια ἐπίπεδα σχήματα, ἄρα ὁ κύκλος, οὗ ἡ διάμετρος διπλασιός ἐστι τῆς διαμέτρου τῆς α β γ δ, σφαίρας ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τοῦ μεγίστου τῆς αὐτῆς κύκλου, ταὐτὸν δ' ἐστὶν εἰπεῖν τετραπλάσιος κατὰ τὴν β': τοῦ γ': τοῦ α: μέρους. δέδεικται δὲ καὶ ἡ τῆς α β γ δ, σφαίρας ἐπιφάνεια ἴση κύκλῳ, οὗ ἡ διάμετρος διπλασία

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 31.



τῆς διαμέτρου τοῦ μεγίστου ἐν αὐτῇ κύκλου, ἄρα ἡ τῆς α β γ δ, σφαίρας ἐπιφάνεια τετραπλασιός ἐστι τοῦ ἐν αὐτῇ α ε γ ζ, μεγίστου κύκλου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Α': Ἔκ τε τῶν ἀνωτέρω καὶ τῆς παρούσης δυνάμεθα συναγαγεῖν τὴν τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν ἴσην εἶναι κυλίνδρῳ, οὗ τό, τε ὕψος καὶ ἡ τῆς βάσεως διάμετρος ἴση τῇ τῆς σφαίρας διαμέτρῳ.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Β': Ἔτι ἡ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια, οὗ τό, τε ὕψος καὶ ἡ τῆς βάσεως διάμετρος ἴσα εἰσὶ τῇ τῆς σφαίρας διαμέτρῳ, ταὐτὸν δ' ἐστὶν εἰπεῖν τοῦ περὶ σφαῖραν περιγεγραμμένου μετὰ τῶν βάσεων αὐτοῦ, ἡμιόλιός ἐστι τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. ἡ γὰρ τοῦ τοιούτου κυλίνδρου ἐπιφάνεια τετραπλάσιος μέν ἐστι τῆς αὐτοῦ βάσεως, ἴση δὲ τῇ τῆς σφαίρας, περὶ ἣν ὁ κύλινδρος περιγεγραμμένος ἐστίν. Ἐὰν οὖν ἡ τοῦ κυλίνδρου τούτου ἐπιφάνεια εἰς τέσσαρα διαιρεθῇ, εἰς τέσσαρα πάντως ἴσα διαιρεθήσεται, καὶ ἡ τῆς ἐν αὐτῷ σφαίρας ἐπιφάνεια. προστιθεμένων δὲ τῶν δύο βάσεων τοῦ κυλίνδρου τῇ αὐτοῦ ἐπιφανείᾳ, γενήσεται τὸ ὅλον περιεκτικὸν ἓξ τοιούτων μερῶν, οἵων ἡ σφαῖρα τεττάρων, ὥστε καὶ ἡμιόλιος.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Γ': Ἔτι δυνάμεθα συναγαγεῖν τὴν τῆς ζώνης τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν ἴσην εἶναι τῇ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ, οὗ ὕψος τὸ αὐτό, βάσις δὲ ἴση τῷ μεγίστῳ τῆς σφαίρας κύκλῳ, ὃς καὶ τῆς ζώνης ἐστὶ βάσις. οἷον ἡ τῆς α γ ο ξ, ζώνης ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ α ν, κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ. ἐπεὶ γὰρ ἡ τοῦ α δ γ, ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ α λ, κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ, ἡ δὲ τοῦ μ δ ν, τμήματος τῇ τοῦ μ λ, πάντως γε ἐὰν ἐκ τῶν ἴσων τοῦ τε α δ γ, ἡμισφαιρίου καὶ α λ, κυλίνδρου

ἴσα

ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὸ, π μ δ ν, τμῆμα, καὶ μ λ, κύλινδρος, ἐναπολειφθήσεται ἡ τῆς α γ ο ξ, ζώνης ἐπιφάνεια ἴση τῇ τοῦ α ν, κυλίνδρου ἐπιφανείᾳ.

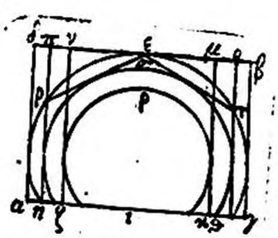
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Δ'. Ἔτι τὰς ἐπιφανείας τῶν τῆς σφαίρας ζωνῶν πρὸς ἀλλήλας ἔχειν ὡς τὰ αὐτῶν ὕψη. οἷον ἡ α γ ο ξ, ζώνη ἔχει πρὸς τὴν α γ χ φ, ὡς τὸ α μ, ὕψος πρὸς τὸ α ψ, τὰ γὰρ α μ, α ψ, ὕψη εἰσὶ τῶν α ν, α ω, κυλίνδρων, οἱ δὲ κύλινδροι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ αὐτῶν ὕψη κατὰ τὴν ιδ': τοῦ ιβ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἄρα καὶ αἱ ζῶναι αἱ ἴσαι τοῖς κυλίνδροις, ἔχουσιν ὁμοίως ὡς τὰ αὐτῶν ὕψη, ὥστε πολλαπλασιαζομένου τοῦ ὕψους τῆς ζώνης ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ μεγίστου κύκλου, τὸ γινόμενον ἴσον ἔσται τῇ τῆς ζώνης ἐπιφανείᾳ.

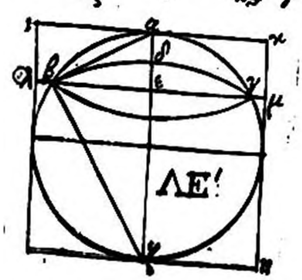
Τὰ παραλειπόμενα τῆς ἀνωτέρω λ γ': Προτάσεως εἰς δεῖξιν τοῦ β': αὐτῆς μέρους.

Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται καὶ τὸ α ε γ, τμῆμα ἴσον τῷ α ο, κυλίνδρῳ. εἰ γὰρ μή, ἀλλ' ἔλαττον φέρ εἰπεῖν ὑποτεθῇ, δειχθήσεται κατὰ τὰ προειρημένα ὁ ζ μ, κύλινδρος ἴσος τῷ α ε γ, τμήματι. ἐπεὶ δὲ ἡ τοῦ κ ο, κυλίνδρου ἐπιφάνεια μείζων μέν ἐστι τῆς τοῦ ζ μ, ἴση δὲ ταῖς τῶν ε ρ τ, ρ κ τ, κώνων ἐπιφανείας, συναχθήσεται πάντως καὶ τὰς τῶν αὐτῶν κώνων ἐπιφανείας μείζους εἶναι τοῦ ζ μ, κυλίνδρου, καὶ ἑπομένως τοῦ α ε γ, τμήματος, ἐν ᾧ εἰσιν ἐγγεγραμμένοι οἱ αὐτοὶ κῶνοι, ὅπερ ἄτοπον.

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 32.



Πρότασις ΛΕ'.



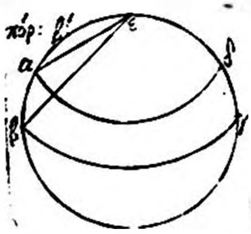
Ἡ τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἡμιδιάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ πόλου τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς αὐτοῦ ἀγομένη βάσεως.

Ἔστω τμῆμα σφαίρας τὸ α β γ, οὗ πόλος τὸ α, βάσις δὲ ὁ β γ δ, κύκλος, καὶ διάμετρος τῆς βάσεως ἡ β γ. ἔστω δὲ καὶ ἡ α β, ἡ ἀπὸ τοῦ πόλου τοῦ αὐτοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἀγομένη. Λέγω δὴ τὴν τοῦ α β γ, τμήματος ἐπιφάνειαν ἴσην εἶναι τῷ κύκλῳ, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ α β. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ α, πόλου διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἡ

α ζ,

αζ, τέμνουσα τὴν βγ, δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ βζ, συνεστάθω δὲ καὶ ὁ λκ, ἰσοϋψὴς κύλινδρος τῷ αβγ, τμήματι. καὶ ἐπεὶ ἡ αζ, πρὸς ὀρθὰς τέμνει τὴν βγ, κατὰ τὴν γ' τοῦ γ': τῶν Στοιχ: ὅτι καὶ δίχα, πάντως γε τὰ αβζ, αβε, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσιν, ὥστε ὡς ἡ αζ, πρὸς τὴν αβ, ἡ αβ, πρὸς τὴν αε, κατὰ τὴν δ': τοῦ ς': τοῦ αὐτοῦ. ἡ αβ, ἄρα μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν αζ, αε, ἀλλ' ἡ μὲν αζ, ἴση ἐστὶ τῇ λμ, διαμέτρῳ τῆς βάσεως τοῦ λκ, κυλίνδρου, ἡ δὲ αε, τῇ ιλ, ἄρα ἡ αβ, μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν λμ, ιλ, κατὰ τὴν ις': ἄρα τοῦ παρόντος ἡ τοῦ λκ, κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ κύκλῳ, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ αβ, ἀλλ' ἡ τοῦ λκ, κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ αβγ, τμήματος ἐπιφανείᾳ κατὰ τὴν λγ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ ἡ τοῦ αβγ, τμήματος ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ κύκλῳ, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ αβ, ὁμοίως δὲ καὶ ἡ τοῦ βζγ, τμήματος ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ κύκλῳ, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ βζ. Ἡ τοῦ τμήματος ἄρα ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡμιδιάμετρος ἴση τῇ ἀπὸ τοῦ πόλου τοῦ τμήματος ἐπὶ τὸ πέρας τῆς αὐτοῦ ἀγομένῃ βάσεως. Geom: Sol. lib. 1. Fig. 33.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α':



Ἐκ τῶν εἰρημένων δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι ἡ τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡμιδιάμετρος ἴση τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὴν αὐτὴν ἐγγεγραμμένου σφαῖραν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β':

Ἔτι δυνάμεθα εὑρίσκειν τὴν τῆς τυχούσης ζώνης ἐπιφάνειαν. οἷον ζητηθήτω ἡ τῆς αβγδ, ζώνης ἐπιφάνεια, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ἀπὸ τοῦ πόλου αε, εβ, εἶτα γραφήτωσαν δύο κύκλοι ἴσοι ἡμιδιαμέτροις ταῖς αε, εβ, καὶ ἀφῃρήσθω ὁ ἐλάττων ἀπὸ τοῦ μείζονος, καὶ τὸ ἐναπολειπόμενον ἴσον ἔσται τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς αβγδ, ζώνης. ἀφαιρουμένου γὰρ καὶ τοῦ εαδ, τμήματος ἀπὸ τοῦ εβγ, ἡ αβγδ, ἐγκαταλείπεται ζώνη.

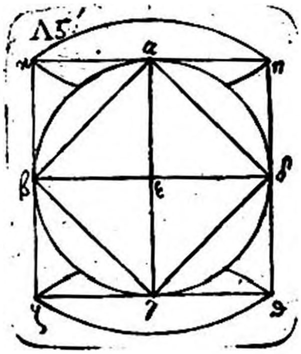
Πρότασις Λς'

Ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια διπλασία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένου τετραγωνικοῦ κυλίνδρου.

Ἔστω εἰς σφαῖραν τὴν αβγδ, ἐγγεγραμμένος κύλινδρος τετραγωνικὸς ὁ αβγδ. Λέγω δὴ τὴν τῆς αβγδ, σφαίρας ἐπιφάνειαν διπλασίονα εἶναι τῆς τοῦ αβγδ, τετραγωνικοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας. Περιγραφήτω γὰρ περὶ τὴν αὐτὴν σφαῖραν ὁ ζθηκ, κύλινδρος. καὶ ἐπεὶ αἱ τῶν κυλίνδρων ἐπιφάνειαι ἔχουσι πρὸς

ἀλ-

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 34.



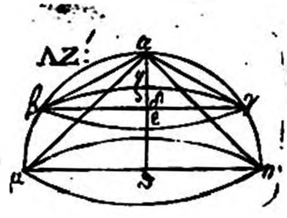
ἀλλήλας ὡς τὰ διὰ τῶν ἀξόνων αὐτῶν ὀρθογώνια καὶ τὴν ιη': τοῦ παρόντος, πάντως ἡ τοῦ ζηθκ, κυλίνδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ αβγδ, ἐπιφάνειαν ἔχει, ὡς τὸ ζη, τετράγωνον, τὸ διὰ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ ὀρθογώνιον πρὸς τὸ βδ, τετράγωνον τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ αβγδ, κυλίνδρου ὀρθογώνιον, ἀλλὰ τὸ ζη, τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ βδ, καὶ τὴν ιγ': τοῦ δ': τοῦ παρόντος, ἄρα καὶ ἡ τοῦ ζθηκ, κυλίνδρου ἐπιφάνεια διπλασιός ἐστι τῆς ἐπιφανείας τοῦ αβγδ, κυλίνδρου, ἡ δὲ τοῦ ζθηκ, κυλίνδρου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ τῆς σφαίρας ἐπιφανείᾳ καὶ τὴν λγ': τοῦ παρόντος, ἄρα καὶ ἡ τῆς αβγδ, σφαίρας ἐπιφάνεια διπλασιός ἐστι τῆς ἐπιφανείας τοῦ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένου τετραγωνικοῦ κυλίνδρου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΛΖ':

Ἡ τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια ἔχει πρὸς τὴν τοῦ κώνου ἐπιφάνειαν τοῦ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὡς ἡ τοῦ κώνου πλευρὰ πρὸς τὴν ἡμιδιάμετρον τῆς βάσεως.

Ἔστω τμῆμα σφαίρας τὸ βαγ, καὶ κῶνος ὁ αβγ, καὶ ἀμφότερα ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἔστωσαν βάσεως βεγζ, καὶ τὸ αὐτὸ ἐχέτωσαν ὕψος αδ. Λέγω ὅτι ἡ τοῦ βαγ, τμήματος ἐπιφάνεια ἔχει πρὸς τὴν τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφάνειαν, ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ. Ἐὰν γὰρ τῶν αβ, βδ, μέση ἀνάλογος εὑρεθῇ, πάντως γε ἡ τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἔσται τῷ κύκλῳ, οὗ ἡμιδιάμετρος, ἡ εὑρεθεῖσα μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν αβ, βδ, καὶ τὴν κε': τοῦ παρόντος, καὶ δὲ τὴν λε': τοῦ αὐτοῦ ἡ τοῦ βαγ, τμήματος ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ αβ, ὥστε ἡ τοῦ βαγ, τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφάνειαν ἔχει, ὡς ὁ τῆς αβ, ἡμιδιαμέτρου κύκλος πρὸς τὸν κύκλον, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ μέση ἀνάλογος τῶν αβ, βδ. Ἐπεὶ δὲ οἱ κύκλοι ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων, ἄρα ἡ τοῦ βαγ, τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφάνειαν ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστίν, ἤπερ ἡ αβ, πρὸς τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν αβ, βδ, ἀλλὰ καὶ ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστίν, ἤπερ πρὸς τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν αβ, βδ. ἄρα ἡ τοῦ

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 35.



βαγ,

βαγ, τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφάνειαν ἔχει ὡς ἡ αβ, πλευρὰ τοῦ κώνου πρὸς τὴν βδ, ἡμιδιάμετρον τῆς βάσεως. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

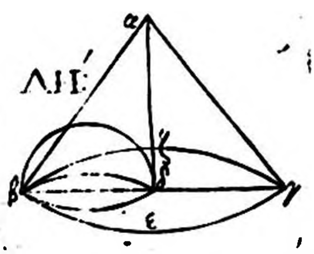
Ε'κ τούτου δῆλον, ὅτι ἡ τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ κώνου ἐπιφάνειαν, οὗ ἥτε βάσις καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ, ἔχει ὡς τοῦ τετραγώνου διάμετρος πρὸς τὴν αὐτοῦ πλευράν. τοῦ γὰρ μαη, ἡμισφαιρίου ἡ ἐπιφάνεια ἔχει πρὸς τὴν τοῦ αμη, κώνου ἐπιφάνειαν, ὡς ἡ αμ, εὐθεῖα πρὸς τὴν μθ. ὅτι δὲ ἡ αμ, διάμετρός ἐστι τετραγώνου, ἡ δὲ μθ, πλευρὰ, δῆλον. ἴση γὰρ ἡ μθ, τῇ θα, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν μθ, θα, περιεχόμενον τετράγωνόν ἐστιν, οὗ διάμετρος ἡ αμ, καὶ πλευρὰ ἡ μθ.

Πρότασις ΛΗ':

Η' τοῦ κώνου ἐπιφάνεια, οὗ βάσις μὲν κύκλος τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου τῆς σφαίρας κύκλου, ὕψος δὲ ἴσον τῇ τῆς σφαίρας διαμέτρῳ, ἔχει πρὸς τὴν τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν, ὡς ἡ τοῦ τετραγώνου διαμέτρος πρὸς τὴν αὐτοῦ πλευράν.

Ε'στω κῶνος ὁ αβγ, καὶ ἐχέτω βάσιν μὲν τὸν βεγζ, κύκλον τετραπλάσιον ὄντα τοῦ μεγίστου τῆς σφαίρας κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ βδ. (ὅτι γὰρ ἡ διάμετρος τῆς διαμέτρου διπλάσιός ἐστιν, ὁ κύκλος πάντως τοῦ κύκλου τετραπλάσιος ἔσται) ὕψος δὲ τὴν δα, ἴσην τῇ βδ, διαμέτρῳ τῆς σφαίρας. Λέγω δὴ τὴν τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφάνειαν ἔχειν πρὸς τὴν τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν, ἧς ἡ διάμετρος ἴση τῷ τοῦ κώνου ὕψει, ὡς ἡ τοῦ τετραγώνου διάμετρος πρὸς τὴν αὐτοῦ πλευράν. Η' μὲν γὰρ τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἡμιδιάμετρος μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν αβ, βδ, κατὰ τὴν κε': τοῦ παρόν: ἡ δὲ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια, ἧς διάμετρος ἡ βδ, ἢ δα, ἴση ἐστὶ τῷ βεγζ, κύκλῳ κατὰ τὴν λδ': τοῦ παρ: ἀλλ' ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἡμιδιάμετρος μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν αβ, βδ, ἔχει πρὸς τὸν βεγζ, οὗ ἡ ἡμιδιάμετρος ἡ βδ, ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, ἡ α: δηλ: πρὸς τὴν γ: κατὰ τὴν α:τοῦ γ': τοῦ α: μέρους, ἄρα καὶ ἡ τοῦ αβγ, κώνου ἐπιφάνεια ἔχει πρὸς τὴν τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν, ἧς διάμετρος ἡ βδ, ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, ἡ δὲ αβ, διάμετρός ἐστι τετραγώνου, καὶ ἡ βδ, πλευρὰ, τὸ γὰρ ὑπὸ τῶν βδ, δα, τετράγωνόν ἐστιν. ἄρα ἡ τοῦ κώνου ἐπιφάνεια, οὗ βάσις μὲν κύκλος τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου τῆς σφαίρας κύκλου, ὕψος δὲ ἴσον

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 36.



τῇ

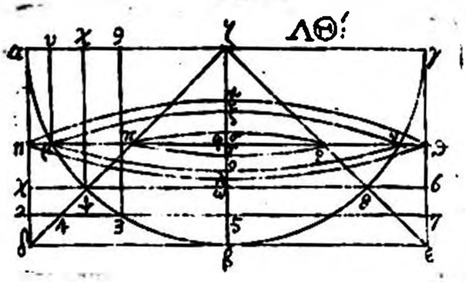
τῇ τῆς σφαίρας διαμέτρῳ ἔχει πρὸς τὴν τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν ὡς ἡ τοῦ τετραγώνου διάμετρος πρὸς τὴν αὐτοῦ πλευράν.

Πρότασις ΛΘ'.

Ἐὰν περὶ ἡμισφαίριον κύλινδρός τε καὶ κῶνος περιγεγραμμένοι ὦσι, βάσιν καὶ ὕψος τὰ αὐτὰ τῷ ἡμισφαιρίῳ ἔχοντες, καὶ ἐπιπέδῳ τῇ βάσει παραλλήλῳ τμηθῶσι, κύκλος ὁ τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τε κώνου καὶ ἐπιπέδου γενόμενος, ἴσος ἐστὶ τῇ ζώνῃ τῇ ὑπό τε τῶν κοινῶν τομῶν τοῦ τε ἡμισφαιρίου καὶ ἐπιπέδου, καὶ τοῦ κυλίνδρου τε καὶ ἐπιπέδου.

Ἔστω ἡμισφαίριον τὸ α β γ, καὶ περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένος κύλινδρος μὲν ὁ α δ ε γ, κῶνος δὲ ὁ δ ε ζ, τὴν αὐτὴν ἔχοντες βάσιν τῷ ἡμισφαιρίῳ τὴν δ ε, καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ β ζ, καὶ τμηθήτωσαν τῷ η θ, ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῇ δ ε, τέμνοντι τὸν μὲν κύλινδρον κατὰ τὰ η, καὶ θ, σημεῖα, καὶ κοινὴν τομὴν μετ᾽ αὐτοῦ ποιοῦντι τὸν η λ θ κ, κύκλον, τὸ δὲ ἡμισφαίριον κατὰ τὰ μ ν, καὶ κοινὴν τομὴν ποιοῦντι μετ᾽ αὐτοῦ τὸν μ ο ν ξ, καὶ τὸν δ ζ ε, κῶνον κατὰ τὰ π, καὶ ρ, σημεῖα, καὶ ποιοῦντι μετ᾽ αὐτοῦ κοινὴν τομὴν τὸν π σ ρ τ, κύκλον. Λέγω τὸν π σ ρ τ, κύκλον ἴσον εἶναι τῇ η κ θ λ ο μ ξ ν, ζώνῃ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ μ, παράλληλος τῇ η α, καὶ κάθετος ἐπὶ τῆς α γ, ἡ μ υ, καὶ ἐπεὶ ἡ μ υ, μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν α υ, υ γ, ἤτοι τῶν η μ, μ θ, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς μ υ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν η μ, μ θ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, ἀλλὰ τῇ μ υ, ἴση ἐστὶν ἡ ζ φ, τῇ δὲ ζ φ, ἡ φ π, ὡς δειχθήσεται, ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς π φ, ἡμιδιαμέτρου τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν η μ, μ θ,

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 37.



περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, ἀλλ᾽ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν η μ, μ θ, ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς π φ, τετράγωνον, ἔχει καὶ ἡ η κ θ λ ο μ ξ ν, ζώνη πρὸς τὸν π σ ρ τ, κύκλον κατὰ τὴν ιθ': τοῦ δ': τοῦ παρόντος, ἄρα καὶ ἡ η κ θ λ ο μ ξ ν, ζώνη ἴση ἐστὶ τῷ π σ ρ τ, κύκλῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ τῆς χ ψ, διαστάσεως ζώνη ἴση εἶναι τῷ τῆς ψ ω, ἡμιδιαμέτρου κύκλῳ, καὶ ἡ τῆς 2 3, τῷ τῆς 4 5, ἡμιδιαμέτρου κύκλῳ. Ὅτι δὲ ἡ ζ φ, τῇ φ π, ἴση, δῆλον. ἡ γὰρ π φ, παράλληλός ἐστι τῇ β δ, πλευρᾷ τοῦ δ β ζ, τριγώνου, ὥστε κατὰ τὴν β': τοῦ ς': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὡς ἡ β ζ, πρὸς τὴν β δ, ἡ ζ φ, πρὸς τὴν φ π. ἀλλὰ ἡ ζ β, ἴση ἐστὶ τῇ β δ, ἑκατέρα γὰρ ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τοῦ α β γ, ἡμισφαιρίου, ἄρα καὶ ἡ ζ φ, ἴση ἐστὶ τῇ φ π. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ χ ψ, ζώνη ἴση τῷ τῆς ψ ω, ἡμιδιαμέτρου κύκλῳ, καὶ οἱ 2, 3, τῷ τῆς 4, 5, κύκλῳ, ὥσπερ δέδεικται καὶ ἡ μ η, ἴση τῷ τῆς π φ, ἡμιδιαμέτρου κύκλου, λαμβάνεται γὰρ ἡ διάστασις αὐτὴ τῆς ζώνης.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τῶν εἰρημένων δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι τὸ ἡμισφαίριον διπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ ἔχοντος τῷ ἡμισφαιρίῳ. ἐὰν γὰρ δι᾽ ἑκάστου σημείου τῶν α γ δ ε, ἐννοηθῶσιν ἐπίπεδα παραλλήλως ἀγόμενα τοῖς διὰ τῶν α γ δ ε, συσταθήσονται ζῶναι μεταξὺ τῆς τοῦ κυλίνδρου κοίλης περιφερείας καὶ τῆς κυρτῆς τοῦ ἡμισφαιρίου, καὶ ἐν τῷ κώνῳ κύκλοι ἰσοπληθεῖς, ὥστε συμπάσας τὰς ζώνας σύμπασι τοῖς κύκλοις ἴσας εἶναι. ὥσπερ γὰρ τριῶν ἐπιπέδων ἠγμένων τῶν διὰ τῶν η ϑ, χ 6, 2, 7, συνεστάθησαν τρεῖς ζῶναι αἱ η μ, χ ψ, 2, 3, καὶ τοσοῦτοι κύκλοι, ὧν ἡμιδιάμετροι αἱ π φ, ψ ω, 4 5, οὕτω δὴ καὶ πλειόνων ἠγμένων, ζῶναί τε καὶ κύκλοι πλείονες συσταθήσονται ἰσοπληθεῖς, ἀλλ᾽ αἱ μὲν ζῶναι πληροῦσι τὴν α δ β ε γ β α, σκάφην (ἀφαιρουμένου γὰρ τοῦ α β γ, ἡμισφαιρίου ἀπὸ τοῦ α δ ε γ, κυλίνδρου τὸ ἐναπολειπόμενον παραπλήσιόν πως ἐστὶ σκάφῃ.) οἱ δὲ κύκλοι ὁμοίως τὸν ζ δ ε, πληροῦσι κῶνον, ἄρα ἡ α δ β ε γ β α, σκάφη ἴση ἐστὶ τῷ ζ δ ε, κώνῳ. ἀφαιρουμένου δὲ ἀπό τε τῆς σκάφης καὶ τοῦ κώνου, τοῦ δ β ε 8 β ψ, μικτοῦ σχήματος, τουτὸν δ᾽ ἐστὶν εἰπεῖν τοῦ ἡμίσεως τῆς τε σκάφης καὶ τοῦ κώνου, ἐγκαταλείπεται ὁ ζ ψ β 8, σφαιρικὸς τομεὺς ἴσος τοῖς α δ ψ, γ ε 8, ἅτινα παρίστησι τὸ ἐναπολειπόμενον κυρτοεπίπεδον σχῆμα τοῦ κυλίνδρου, ἐὰν ἀπ᾽ αὐτοῦ ὅ, τε ζ δ ε, κῶνος, καὶ τὸ α β γ, ἡμισφαίριον ἀφαιρεθῶσι. Προστιθεμένης δὲ τῆς ψ α ζ γ 8, χώνης τοῦ ἐναπολειπομένου δηλ: μέρους τοῦ α β γ, ἡμισφαιρίου, ἐπειδὰν ὁ ζ δ ε, ἀφαιρεθῇ κῶνος, τῇ τε α δ ψ, γ ε 8, καὶ τῷ ζ ψ β 8, τομεῖ, πληρωθήσεται ἥτε δ α ζ γ ε, χώνη, καὶ τὸ α β γ, ἡμισφαίριον, καὶ ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται κατὰ τὸ β′: ἀξίωμα τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἀλλ᾽ ὁ α δ ε γ, κύλινδρος τριπλάσιός ἐστι τοῦ ζ δ ε, κώνου κατὰ τὴν ί: τοῦ ιβ′: τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἀφαιρουμένου τοῦ κώνου, ἡ ἐναπολειπομένη χώνη διπλασιός ἐστι τοῦ ζ δ ε, κώνου. Τῇ δὲ δ α ζ γ ε, ἐναπολειπομένῃ χώνῃ ἴσον ἐστὶ τὸ α β γ, ἡμισφαίριον ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ τὸ α β γ, ἡμισφαίριον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ζ δ ε, κώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Μ′:

Ἐὰν ἡμισφαιρίῳ κῶνος ἐγγραφῇ τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος ἴσον ἔχων τῷ ἡμισφαιρίῳ, διπλάσιον ἔσται τοῦ κώνου τὸ ἡμισφαίριον.

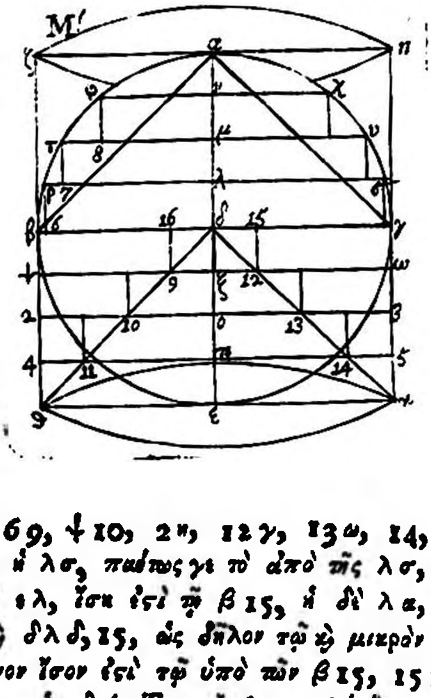
Ἔστω ἐγγεγραμμένος κῶνος ὁ α β γ, εἰς ἡμισφαίριον τὸ β α γ, ἔχων βάσιν τὴν β γ, ἣν καὶ τὸ ἡμισφαίριον, καὶ ὕψος τὸ δ α, ὅπερ ἐστὶ καὶ τοῦ ἡμισφαιρίου. Λέγω δὴ τὸ β α γ, ἡμισφαίριον διπλάσιον εἶναι τοῦ α β γ, κώνου. Ἀποπεπληρώσθω γὰρ ἡ α β ε γ, σφαῖρα, καὶ ἐξαχθήτω ἡ α δ, ἀπὸ τοῦ δ, ἐπὶ τὸ ε, καὶ τῇ μὲν β γ, ἤχθωσαν παράλληλοι αἱ ζ η, ϑ κ, ἁπτόμεναι τῆς σφαίρας κατὰ τὰ α, καὶ

ε, τῇ

ι, τῇ δὲ αι, ἀχθήτωσαν παράλληλοι αἱ ζθ, ηκ, ἀπτόμεναι καὶ αὗται τῆς σφαίρας κατὰ τὰ β, καὶ γ, καὶ ἀποπληρωθήσεται ὁ ζθκη, περιγεγραμμένος κύλινδρος περὶ τὴν αβγι, σφαῖραν. Ἐπιζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ δθ, δκ, καὶ συσταθήσεται ὁ δθκ, κῶνος· καὶ ἐπεὶ τοῦ δθκ, κώνου διπλασία ἐστὶν ἡ θβδγκ, χώνη. ὁ γὰρ βθκγ, κύλινδρος κατὰ τὴν ι: τοῦ ιβ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, τριπλάσιός ἐστι τοῦ αὐτοῦ κώνου, ἡ δὲ θβδγκ, χώνη ἴση ἐστὶ τῷ βαγ, ἡμισφαιρίῳ, ὡς δείξομεν, ἄρα καὶ τὸ βαγ, ἡμισφαίριον διπλάσιόν ἐστι τοῦ δθκ, κώνου, ἀλλ' ὁ δθκ, κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ αβγ, ἐγγεγραμμένῳ κώνῳ, ἰσοϋψεῖς γάρ εἰσι, καὶ ἐπὶ ἴσων βάσεων, ὡς δῆλον ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἄρα τὸ βαγ, ἡμισφαίριον διπλάσιόν ἐστι τοῦ αβγ, κώνου, ὅπερ ἦν τὸ προτεθέν.

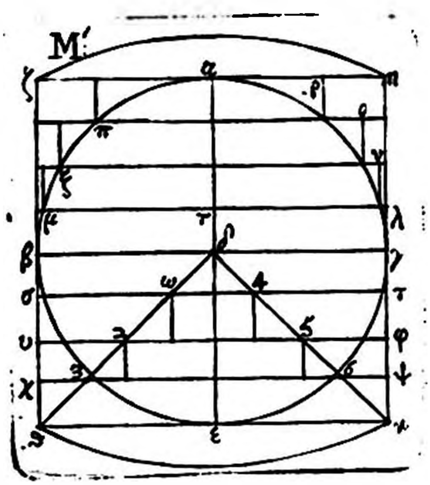
Ὅτι δὲ ἡ θβδγκ, χώνη ἴση ἐστὶ τῷ βαγ, ἡμισφαιρίῳ, οὐ χαλεπὸν δεῖξαι. εἰ γὰρ μὴ, ἢ μείζων ἔσται, ἢ ἐλάττων.

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 38.



Ἔστω δὴ α: ἡ θβδγκ, χώνη ἐλάττων τοῦ βαγ, ἡμισφαιρίου, δυνατὸν ἄρα κατὰ τὸ γ': πόρισ: τῆς κα: τοῦ παρ: ἐγγραφῆναι εἰς τὸ ἡμισφαίριον κυλίνδρους ἰσοϋψεῖς μείζονας τῆς θδβγκ, χώνης, ἔστωσαν ἤτοι οἱ 6σ, τυ, 8χ, καὶ διαιρεθήτω ἑκατέρα τῶν δα, δι, εἰς ἴσα τε καὶ ἰσοπληθῆ μέρη, τὰ δλ, λμ, μν, να, καὶ δξ, ξο, οπ, πι, καὶ δι' ἑκάστου σημείου τῶν τομῶν διήχθωσαν παράλληλοι τῇ βγ, αἱ ρσ, τυ, φχ, καὶ ψω, 23, 45, καὶ ἀναπεπληρώσθωσαν οἵ τε ἐν τῷ βαγ, ἡμισφαιρίῳ ἐγγεγραμμένοι κύλινδροι 6σ, τυ, 8χ, καὶ οἱ ἐν τῇ θβδγκ, χώνῃ οἱ 69, ψ10, 2ν, 12γ, 13ω, 14, 3, καὶ ἐπεὶ τῶν ιλ, λα, μέση ἀνάλογός εἰσιν ἡ λσ, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς λσ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ιλ, λα, ἀλλ' ἡ μὲν ιλ, ἴση ἐστὶ τῇ β15, ἡ δὲ λα, τῇ 15γ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι καὶ τὰς ια, βγ, καὶ δλ, δ15, ὡς δῆλον τῷ καὶ μικρὸν ἐπιστήσαντι, ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς λσ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν β15, 15γ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, ἔστι δὲ ἡ μὲν λσ, ἡμιδιάμετρος τοῦ 6σ, κυλίνδρου, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν β15, 15γ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον τὸ τῆς ζώνης ἐστὶν ὀρθογώνιον τῆς ὑπό τε τῆς βάσεως τοῦ 6σ, κυλίνδρου, καὶ 69, 12γ, κυλινδρικοῦ σίφωνος, τῶν ἴσον ἐχόντων ὕψος, περιεχομένης· ἄρα κατὰ τὴν ιθ': τοῦ παρόντος, ὁ 6σ, κύλινδρος ἴσος ἐστὶ τῷ 69, 12γ, κυλινδρικῷ σίφωνι· ἐπεὶ δ' αὖθις καὶ ἡ μυ, μέση ἀνάλογός ἐστι τῶν ιμ, μα, ἤτοι τῶν 2, 13, 13, 3, δειχθήσεται διὰ τὰ αὐτὰ ὁ γυ, κύλινδρος ἴσος τῷ ψ 10, 13 ω, κυλινδρικῷ σίφωνι. Ἐπεὶ δὲ τελευταῖον καὶ ἡ νχ, μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν εν, να, ἤτοι τῶν 4, 14, 14, 5, δειχθήσεται ὁμοίως ὁ 8 χ, κύλινδρος ἴσος τῷ 2, 11, 14, 3, κυλινδρικῷ σίφωνι, ἀλλ' οἱ 6σ, 7υ, 8χ, ἐγγεγραμμένοι κύλινδροι εἰς τὸ βαγ, ἡμισφαίριον, μείζονές εἰσι τῆς ϑβδγκ, χώνης κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ οἱ 69, 12 γ, ψ 10, 13 ω, 2, 11, 14, 3, ἐγγεγραμμένοι κύλινδροι εἰς τὴν ϑβδγκ, χώνην μείζονές εἰσι τῆς αὐτῆς χώνης, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἐλάττων ἐστὶν ἡ ϑβδγκ, χώνη τοῦ βαγ, ἡμισφαιρίου. Ἀλλὰ δὴ ἔστω μείζων ἡ ϑβδγκ, χώνη τοῦ βαγ, ἡμισφαιρίου. καὶ ἐπεὶ κατὰ τὸ γ': πόρισμα, τῆς ῥηθείσης κα: δύνανται περιγραφῆναι κύλινδροι ἰσοϋψεῖς περὶ τὸ βαγ, ἡμισφαίριον, ὥστε τὸ ἐξ ἁπάντων μεῖζον εἶναι τῆς ϑβδγκ, χώνης. ἔστωσαν οὗτοι οἱ βλ, μν, ξο, πρ· διαιρεθείσης δὲ καὶ τῆς δε, ἡμιδιαμέτρου εἰς ἴσα καὶ ἡ δα, καὶ δι' ἑκάστου σημείου τῶν τομῶν παραλλήλων εὐθειῶν ἀγομένων τῶν στ, υφ, χψ, συμπεπληρώσθωσαν οἱ περὶ τὴν ϑβδγκ, χώνην περιγεγραμμένοι κύλινδροι οἱ σγ, υω, 4φ, χ2, 5ψ, ϑ3, 6κ. Δείκνυται.

Geom: Sol. lib. 1. Fig. 39.



Ὁ βλ, κύλινδρος ἴσος ἐστὶ τῷ βτ, ὁ δὲ μν, τῷ υω, 4φ, σίφωνι, ὁ δὲ ξο, τῷ χ2, 5ψ, καὶ ὁ πρ, τῷ ϑ3, 6κ, ὡς δειξόμεθα. ἀλλ' οἱ βλ, μν, ξο, πρ, κύλινδροι ἐλάττονές εἰσι τῆς ϑβδγκ, χώνης κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ οἱ υω, 4φ, χ2, 5ψ, ϑ3, 6κ, κυλινδρικοὶ σίφωνες μετὰ τοῦ σγ, κυλίνδρου ἐλάττονές εἰσι τῆς ϑβδγκ, χώνης, ἀλλὰ καὶ περιγεγραμμένοι, ὅπερ ἄτοπον, οὐκ ἄρα μείζων ἡ ϑβδγκ, χώνη τοῦ βαγ, ἡμισφαιρίου. δέδεικται δὲ οὐδ' ἐλάττων, ἄρα ἴση. Ὅτι δὲ οἱ ῥηθέντες κυλινδρικοὶ σίφωνες μετὰ τοῦ σγ, κυλίνδρου ἴσοι εἰσὶ τοῖς περὶ τὸ βαγ, περιγεγραμμένοις κυλίνδροις, δῆλον. οἱ μὲν γὰρ βλ, σγ, ἔχοντες τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος ἴσον, ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν. Ἐπεὶ δὲ οἱ τμ, μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν ετ, τα, καὶ ἡ μὲν ετ, ἴση ἐστὶ τῇ τω, ἡ δὲ τα, τῇ ωσ, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς τμ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τω, ωσ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, ἀλλ' ἡ μὲν τμ, ἡμιδιάμετρός ἐστι τοῦ μν, κυλίνδρου, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν τω, ωσ, ἐστὶ τὸ τῆς ζώνης τοῦ υω, 4φ, κυλινδρικοῦ σίφωνος ὀρθογώνιον, ἄρα κατὰ τὴν ιθ': τοῦ παρ: ὁ μν, κύλινδρος ἴσος ἐστὶ τῷ υω, 4φ, σίφωνι. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ὁ ξο, κύλινδ: ἴσος τῷ χ2, 5ψ, καὶ ὁ πρ, τῷ ϑ3 6κ.

ΠΟ-

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον τῆς σφαίρας κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ αὐτῆς ἡμιδιαμέτρῳ τὸ μὲν ἡμισφαίριον τῆς αὐτῆς σφαίρας διπλάσιόν ἐστιν, ἡ δὲ σφαῖρα τετραπλάσιος.

Πρότασις ΜΑ'.

Κύλινδρος περὶ σφαῖραν περιγεγραμμένος ἡμιόλιός ἐστι τῆς αὐτῆς σφαίρας.

Ἔστω κύλινδρος ὁ ζθκη, περὶ σφαῖραν τὴν αβεγ, περιγεγραμμένος. Λέγω δὴ τὸν ζθκη, κύλινδρον ἡμιολίου λόγον ἔχειν πρὸς τὴν αβεγ, σφαῖραν. τοῦ γὰρ δθκ, κώνου ὁ βθκγ, κύλινδρος τριπλάσιός ἐστι κατὰ τὴν ι: τοῦ ιβ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, τῷ δὲ βθκγ, κυλίνδρῳ ἴσος ἐστὶν ὁ ζβγη, ὅλος ἄρα ὁ ζθκη, κύλινδρος ἑξαπλάσιός ἐστι τοῦ δθκ, κώνου, ἀλλ' ἡ αβεγ, σφαῖρα τετραπλάσιός ἐστι τοῦ αὐτοῦ δθκ, κώνου κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, ἄρα ὁ ζθκη, κύλινδρος πρὸς τὴν αβεγ, σφαῖραν ἔχει, ὡς ὁ 6, πρὸς τὸν 4, ἀλλ' ὁ τοῦ 6, πρὸς τὸν 4, λόγος ἡμιόλιός ἐστιν, ἄρα καὶ ὁ τοῦ ζθκη, κυλίνδρου λόγος πρὸς τὴν αβγε, σφαῖραν ἡμιόλιός ἐστι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.

Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι ἡ σφαῖρα ἴση ἐστὶ κώνῳ, οὗ βάσις τετραπλάσιός ἐστι τοῦ μεγίστου τῆς σφαίρας κύκλου, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς αὐτῆς. Ἐπεὶ γὰρ οἱ ἰσοϋψεῖς κῶνοι πρὸς ἀλλήλους ἔχουσιν ὡς αἱ βάσεις κατὰ τὴν ιά: τοῦ ιβ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, πάντως γε ὁ τετραπλασίονα βάσιν ἔχων τοῦ μεγίστου τῆς σφαίρας, κύκλου, τετραπλάσιος ἔσται τοῦ ἔχοντος βάσιν ἴσην τῷ μεγίστῳ τῆς αὐτῆς σφαίρας κύκλῳ, ἀλλὰ καὶ ἡ σφαῖρα τετραπλάσιός ἐστι τοῦ αὐτοῦ κώνου κατὰ τὸ πόρ: τῆς μ': τοῦ παρόντος, ἄρα ἡ σφαῖρα ἴση ἐστὶ κώνῳ, οὗ βάσις τετραπλάσιός ἐστι τοῦ μεγίστου τῆς σφαίρας κύκλου, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς αὐτῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

Ἔτι ἡ σφαῖρα ἴση ἐστὶ κυλίνδρῳ, οὗ βάσις ὁ μέγιστος τῆς σφαίρας κύκλος, καὶ ὕψος δύο τρίτα τῆς διαμέτρου τῆς αὐτῆς σφαίρας. ἐπεὶ γὰρ ὁ κύλινδρος ὁ ἔχων βάσιν μὲν ἴσην τῷ μεγίστῳ τῆς σφαίρας κύκλῳ, ὕψος δὲ ὁμοίως ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς αὐτῆς, ταὐτὸν δ' ἐστὶν εἰπεῖν περιγεγραμμένος περὶ τὴν σφαῖραν ἔχει λόγον ἡμιολίου πρὸς τὴν αὐτὴν σφαῖραν, ἄρα ὁ δύο τρίτα τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας ἔχων ὕψος, ἴσος ἐστὶ τῇ σφαίρᾳ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ':

Ἔτι ὁ πινακίσκος, ὅς καὶ σάφη λέγεται, τὸ ἐναπολειπόμενον δηλ: τοῦ κυλίνδρου μέρος τῇ τοῦ ἡμισφαιρίου ἀφαιρέσει, ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ μέγιστος τῆς αὐτῆς σφαίρας κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ἡμιδιάμετρος. Ἐπεὶ γὰρ ὁ μὲν βθκγ, κύλινδρος τριπλάσιός ἐστι τοῦ δκθ, κώνου, τὸ δὲ βεγ, ἡμισφαίριον διπλοῦν. πάντως γε ἀφαιρεθέντος τοῦ βεγ, ἡμισφαιρίου ἀπὸ τοῦ βθκγ, κυλίνδρου, ἐναπολείπεται ὁ βθκγε, πινακίσκος ἴσος τῷ δθκ, κώνῳ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ':

Ἔτι τὸ τῇ περιστροφῇ τοῦ βθι, μικτοῦ τριγώνου συστάμενον στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ τῇ περιστροφῇ τοῦ δει, τομέως συστασαμένῳ. Ἐπεὶ γὰρ ὅλος ὁ βθκγε, πινακίσκος ἴσος ἐστὶν ὅλῳ τῷ δθκ, κώνῳ, πάντως γε τὸ βθει, ἥμισυ τοῦ βθκγε, πινακίσκου, ἴσον ἐστὶ τῷ δθι, ἡμίσει τοῦ δθκ, κώνου. κοινοῦ δ' ἀφαιρεθέντος τοῦ θιε, ἐναπολείπεται ἴσον τὸ βθι, τῷ δει.

Πρότασις ΜΒ':

Τομεὺς πρὸς τὴν σφαῖραν, ἧς ἐστι τομεύς, ἔχει ὡς ἡ τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῆς αὐτῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν.

Ἔστω τομεὺς ὁ αβγδ, σφαίρας τῆς αεγδ. Λέγω δὴ τὸν αβγδ, τομέα ἔχειν πρὸς τὴν αεγδ, σφαῖραν, ὡς ἡ τῆς αζγδ, βάσεως αὐτοῦ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῆς αεγδ, σφαίρας ἐπιφάνειαν. Συσταθήτωσαν ἐν τῇ αεγδ, σφαίρᾳ κῶνοι δὺς εἰπεῖν ἕξ, ὥστε τοὺς τῶν βάσεων αὐτῶν κύκλους ἀλλήλων ἅπτεσθαι, ὧν ὁ μὲν βαγ, πρὸς τὰ ἔμπροσθεν τῆς σφαίρας μέρη τὴν βάσιν ἐχέτω, ὁ δὲ βηθ, πρὸς τὰ ὄπισθεν, ὁ δὲ βγθ, πρὸς τὰ δεξιά, καὶ ὁ βαη, πρὸς τὰ ἀριστερά, τῶν δὲ λοιπῶν δύο ὁ μὲν πρὸς τὰ ἄνω, ὁ δὲ αβη,

Geom: Sol. lib. I. Fig. 40.

πρὸς τὰ κάτω. καὶ ἐπεὶ μεταξὺ τῶν βάσεων τῶν αὐτῶν κώνου ἐναπολείπονται σφαιρικὰ τρίγωνα ὀκτὼ, καὶ τούτων ἕκαστον βάσις ἐστὶν ἁπλοῦ τομέως, ἢ κρεῖττον εἰπεῖν τριγωνοειδοῦς τῆς αὐτῆς σφαίρας, δῆλον ὅτι ἡ μὲν σφαῖρα διαιρεῖται εἰς τομεῖς τέσσαρας καὶ δέκα, τοὺς ἓξ μὲν κωνοειδεῖς, τοὺς δ' ὀκτὼ τριγωνοειδεῖς, καὶ πάντας ἰσοϋψεῖς, ἡ δ' ἐπιφάνεια τῆς αὐτῆς σφαίρας διαιρεῖται ὁμοίως εἰς τεσσαρακαίδεκα μέρη, τὰ ἓξ μὲν κυκλοφερῆ, τὰ δὲ λοιπὰ τριγωνοειδῆ.

ἀλλὰ καὶ τὴν λβ': τοῦ ια: τῶν Στοιχείων τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις, ὡς δὲ τὰ τοιαῦτα παραλληλεπίπεδα ἔχουσι πρὸς ἄλληλα, ἔχουσι δήπουθεν καὶ τὰ ἑτέρου εἴδους ὅμοια στερεά, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὄντα ὕψος. ὁ αὐτὸς γὰρ λόγος παντὶ

εἴδει

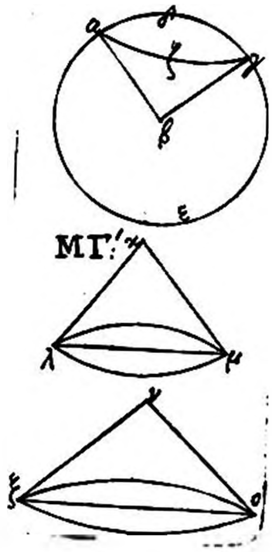
εἴδει στερεῦ, ἄρα οἵ τε ἓξ κωνικοὶ τομεῖς ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς ἔχουσι καὶ αἱ ἓξ κυκλοφερεῖς αὐτῶν βάσεις, καὶ οἱ ὀκτὼ τετραγωνοειδεῖς τομεῖς ὡς αἱ ὀκτὼ αὐτῶν τετραγωνοειδεῖς βάσεις. ὥστε ἐπεὶ ἰσοπληθεῖς εἰσιν οἱ τεσσαρεσκαίδεκα τομεῖς ταῖς αὐτῶν βάσεσιν, ἔσται πάντως ὡς εἷς τομεὺς πρὸς μίαν τὴν αὐτοῦ βάσιν, οὕτω καὶ πάντες οἱ τομεῖς, ἤτοι ὅλη ἡ σφαῖρα, πρὸς πάσας τὰς αὐτῶν βάσεις, πρὸς τὴν ὅλην δηλ: τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν κατὰ τὴν ιβ': τοῦ ε': τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς εἷς τομεὺς πρὸς πάντας τοὺς τομεῖς, ἤγουν τὴν ὅλην σφαῖραν, ἡ αὐτοῦ βάσις πρὸς πάσας τὰς βάσεις δηλ: τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΜΓ':

Τομεὺς σφαίρας ἴσος ἐστὶ κώνῳ, οὗ ὕψος μὲν ἴσον τῇ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἡμιδιαμέτρῳ, βάσις δὲ ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς τοῦ τομέως βάσεως.

Ἔστω τομεὺς ὁ β α δ γ, σφαίρας τῆς α ε γ δ. Λέγω τὸν β α δ γ, τομέα ἴσον εἶναι τῷ κ λ μ, κώνῳ, οὗ ὕψος ἴσον τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς α ε γ δ, σφαίρας, καὶ βάσις ἴση τῇ τοῦ α δ γ ζ, τμήματος ἐπιφανείᾳ. Ἔστω γὰρ καὶ ἕτερος κῶνος ὁ ν ξ ο, οὗ ὕψος ἴσον τῇ ἡμιδιαμέτρῳ, βάσις δὲ τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου τῆς αὐτῆς σφαίρας κύκλου. καὶ ἐπεὶ ὁ ν ξ ο, κῶνος ἔχει ὕψος ἴσον τῷ κ λ μ, κώνῳ, πάντως γε κατὰ τὴν λβ': τοῦ ια: τοῦ Στοιχειωτοῦ. (ὁ γὰρ τῶν παραλληλεπιπέδων πρὸς τὰς αὐτῶν βάσεις λόγος ὁ αὐτός ἐστι καὶ τῶν ὁμοίων στερεῶν παντὸς εἴδους πρὸς τὰς αὐτῶν βάσεις) ὁ κ λ μ, κῶνος ἔχει πρὸς τὸν μ ξ ο, ὡς ἡ λ μ, βάσις πρὸς τὴν ξ ο, βάσιν, ἀλλ' ὁ β α δ γ, τομεὺς ἔχει πρὸς τὴν α ε γ δ, σφαῖραν, ὡς ἡ τοῦ α ζ γ δ, τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῆς α ε γ δ, σφαίρας ἐπιφάνειαν κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἡ δὲ α ε γ δ, σφαῖρα ἴση ἐστὶ τῷ ν ξ ο, κώνῳ κατὰ τὸ α: πόρισμα τῆς μα: τοῦ παρ:, καὶ ἡ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τῇ ξ ο, βάσει κατὰ τὴν λδ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ ὁ κ λ μ, κῶνος ἔχει πρὸς τὴν α ε γ δ, σφαῖραν, ὡς ἡ λ μ, αὐτοῦ βάσις πρὸς τὴν τῆς αὐτῆς σφαί-

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 41.

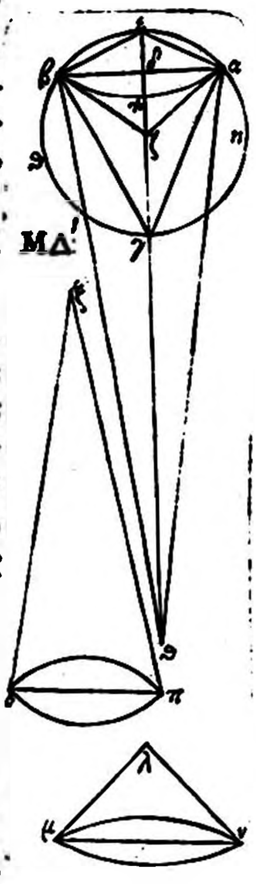


ρας ἐπιφάνειαν, ἀλλ' ἡ λμ, βάσις ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ αζγδ, κύκλου ἐπιφανείᾳ, ἄρα καὶ κῶνος ὁ κλμ, ἴσος ἐστὶ τῷ βαδγ, τομεῖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΜΔ':

Τμῆμα οἱονδήποτε σφαίρας ἴσον ἐστὶ κώνῳ, οὗ βάσις ἡ αὐτὴ, ἥτις καὶ τοῦ τμήματός ἐστι βάσις, καὶ ὕψος τὸ συγκείμενον ἔκτε τοῦ ὕψους τοῦ τμήματος, καὶ τῆς τετάρτης ἀναλόγου τῶν ὑψωμάτων ἀμφοτέρων τῶν τμημάτων τῆς σφαίρας, τοῦ τε λαμβανομένου, καὶ τοῦ ἐναπολειπομένου, καὶ ἡμιδιαμέτρου τῆς αὐτῆς σφαίρας.

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 42.



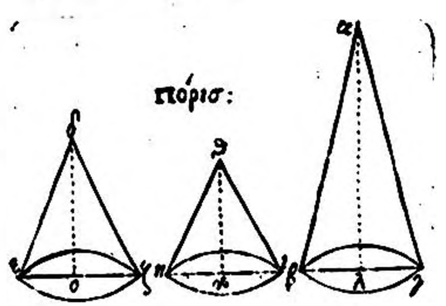
ΜΔ'

Ἔστω σφαίρας τμῆμα τὸ αγβ, καὶ κῶνος ὁ αθβ, οὗ βάσις ὁ αεβκ, κύκλος, ὅς ἐστι βάσις καὶ τοῦ αγβ, τμήματος, ὕψος δὲ ἡ δθ, συγκειμένη ἔκτε τοῦ δγ, ὕψους τοῦ αγβ, τμήματος, καὶ γθ, τετάρτης ἀναλόγου τῶν εδ, δγ, ζγ, ὧν ἡ μὲν εδ, ὕψος τοῦ αεβ, ἐναπολειπομένου τμήματος, ἡ δὲ δγ, τοῦ αγβ, λαμβανομένου, καὶ ἡ γζ, ἡμιδιάμετρος τῆς εηθ, σφαίρας. Λέγω ὅτι τὸ αγβ, τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ αθβ, κώνῳ. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αγ, γβ, αζ, ζβ· καὶ ἐπεὶ τὰ γαε, γδα, αδε, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσι κατὰ τὴν η': τοῦ ς': τῶν Στοιχείων. πάντως γε ὡς ἡ γε, πρὸς τὴν εα, ἡ εα, πρὸς τὴν εδ, αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι γε, εα, εδ, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὥστε ἡ γε, πρὸς τὴν εδ, ἐνδιπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἤπερ πρὸς τὴν εα, ἀλλ' ὡς ἡ γε, πρὸς τὴν εα, ἐστὶ καὶ ἡ γα, πρὸς τὴν αδ, ἄρα ἡ γε, πρὸς τὴν εδ, ἐνδιπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἤπερ ἡ γα, πρὸς τὴν αδ. Λαμβανομένων δὲ τῶν γα, αδ, ἀντὶ ἡμιδιαμέτρων, ἐστὶ καὶ ὁ τῆς γα, κύκλος πρὸς τὸν τῆς αδ, κύκλον ἐνδιπλασίονι λόγῳ τῆς γα, πρὸς τὴν αδ, κατὰ τὴν β': τοῦ ιβ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ὁ τῆς γα, κύκλος πρὸς τὸν τῆς αδ, ἔχει ὡς ἡ γε, πρὸς τὴν εδ, ἀλλ' ὁ τῆς γα, κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ αγβ, τμήματος κατὰ τὴν λε: τοῦ παρόντος, ἄρα καὶ ἡ τοῦ αγβ, τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὸν τῆς αδ, κύκλον, τὸν αεβκ, ἔχει ὡς ἡ γε, πρὸς τὴν εδ. Ἐπεὶ δὲ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ὡς ἡ εδ, πρὸς τὴν δγ, ἐστὶ καὶ ἡ

ζγ,

ζγ, πρὸς τὴν γθ, τετάρτην ἀνάλογον, πάντως γε καὶ ἀνάπαλιν ὡς ἡ γδ, πρὸς τὴν δε, ἡ θγ, πρὸς τὴν γζ, καὶ συνθέσει, ὡς ἡ γε, πρὸς τὴν εδ, ἡ θζ, πρὸς τὴν γζ· ὡς δὲ ἡ γε, πρὸς τὴν εδ, ἔχει καὶ ἡ τοῦ αγβ, τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὸν αεβκ, κύκλον, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ ἡ θζ, πρὸς τὴν ζγ, ἔχει ὡς ἡ τοῦ αγβ, τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὸν αεβκ, κύκλον. Ἐὰν οὖν συςαθῶσι δύο κῶνοι, δὸς εἰπεῖν, οἱ λμν, ξοπ, ὥστε τὸν μὲν ἔχειν βάσιν τὸν μν, κύκλον, ἴσον τῇ τοῦ αβγ, τμήματος ἐπιφανείᾳ, τουτέστι τὸν τῆς γα, ὕψος δὲ τὴν ζγ, τὸν δὲ ἕτερον ἔχειν βάσιν μὲν τὸν οπ, ἴσον τῷ αεβκ, κύκλῳ, καὶ ὕψος ἴσον τῷ ζθ, ἔσονται δήπουθεν ἴσοι κατὰ τὴν ιε': τοῦ ιβ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἀντιπεπόνθασι γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἀλλ' ὁ μὲν λμν, ἴσος ἐστὶ τῷ αγβζ, τομεῖ κατὰ τὴν ἀνωτέρω. ἄρα καὶ ὁ ξοπ, ἴσος ἐστὶ τῷ αὐτῷ αγβζ, τομεῖ, κοινοῦ δὲ προσκειμένου τοῦ αβζ, κώνου τῷ τε αγβζ, τομεῖ, καὶ τῷ ξοπ, κώνῳ, ἔσται τὸ αγβ, τμῆμα ἴσον δυσὶ κώνοις τοῖς ξοπ, αζβ. Ἐπεὶ δὲ οἱ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως κῶνοι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ αὐτῶν ὕψη κατὰ τὴν ιδ': τοῦ αὐτοῦ, συςαθήτωσαν τρεῖς κῶνοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως, ἤτοι τοῦ αεβκ, κύκλου ὧν ὁ μὲν ἐχέτω ὕψος τὴν δζ, ὁ δὲ τὴν ζθ, καὶ ὁ γ': τὴν δθ, καὶ πάντως γε ὁ γ': οὗτος κῶνος, οὗ ὕψος ἡ δθ, ἴσος ἔσται τοῖς λοιποῖς δυσὶν, ὅτι καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ δθ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἐκείνων ὕψεσι δζ, ζθ· ἀλλ' οἱ δύο ξοπ, αζβ, ἴσοι εἰσὶ τῷ αγβ, τμήματι, ὡς δέδεικται, ἄρα τὸ αγβ, τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ὁ αεβκ, κύκλος, ὅς ἐστι βάσις καὶ τοῦ αγβ, τμήματος, ὕψος δὲ ἡ δθ, συγκειμένη ἔκ τε τοῦ δγ, ὕψους τοῦ αγβ, τμήματος, καὶ τῆς γθ, τετάρτης ἀναλόγου τῶν δε, δγ, ὑψῶν τῶν τμημάτων τῆς δοθείσης σφαίρας καὶ ζγ, ἡμιδιαμέτρου, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 43.

ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

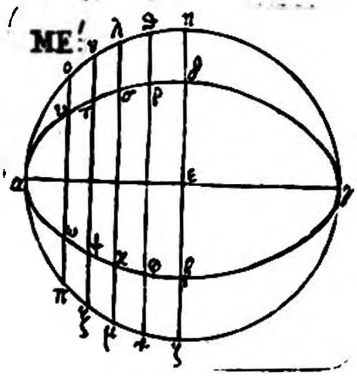


Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν κῶνοι ἐπὶ ἴσων βάσεων διαφέροντες τοῖς ὕψεσιν, ᾖ δὲ καὶ ἄλλος τὶς κῶνος, οὗ βάσις μὲν ἴση τῇ τοῦ ἑνὸς βάσει, ὕψος δὲ ἴσον τοῖς ὕψεσιν ἁπάντων τῶν προϋποτεθέντων, πάντως γε ὁ κῶνος οὗτος ἴσος ἔσται τοῖς προϋποτεθεῖσιν ἐκείνοις κώνοις. Ἔςωσαν γὰρ κῶνοι οἱ διζ, θηι, ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ιζ, ηι, ἔχοντες ὕψη τὰ δο, θκ, διάφορα. Ἔςω δὲ καὶ ἕτερος κῶνος, οὗ βάσις μὲν ἡ βγ, ἴση τῇ ιζ, ἢ ηι, ὕψος δὲ τὸ αλ, ἴσον τοῖς δυσὶν ὕψεσι δο, θκ. ὁ οὖν αβγ, κῶνος ἴσος ἐστὶ τοῖς διζ, θηι, ὡς γὰρ ἔχουσι τὰ δο, θκ, αὐτῶν ὕψη συναμφότερα πρὸς τὸ αλ, ὕψος, ἔχουσι δήπουθεν καὶ συναμφότεροι οἱ διζ, θηι, κῶνοι πρὸς τὸν α β γ, κῶνον κατὰ τὸ ῥηθὲν ἐν τῷ δ', ἀλλὰ συναμφότερα τὰ δ ο, θ κ, ὅλη ἴσα εἰσὶ τῷ α λ, πάντως γε καὶ συναμφότεροι οἱ δ ε ζ, θ η ι, κῶνοι ἴσοι εἰσὶ τῷ α β γ, κώνῳ.

Πρότασις ΜΕ'.

Ἔλλειψις σφαιροειδὴς πρὸς μὲν τὴν τῆς μείζονος διαμέτρου σφαῖραν ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τοῦ τῆς ἐλάττονος διαμέτρου πρὸς τὴν μείζονα, πρὸς δὲ τὴν τῆς ἐλάττονος διαμέτρου σφαῖραν ἐν διπλασίονι λόγῳ τοῦ τῆς μείζονος διαμέτρου πρὸς τὴν ἐλάττονα.

Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 44.



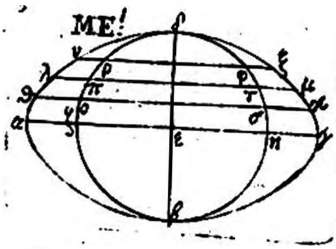
Ἔστω δὴ ἡ ἔλλειψις σφαιροειδὴς ἡ α β γ δ, ἧς κέντρον τὸ ε, καὶ μείζων μὲν διάμετρος ἡ α γ, ἐλάττων δὲ ἡ δ β, ἔστω δὲ καὶ σφαῖρα περὶ τὴν α γ, μείζονα αὐτῆς διάμετρον ἡ α ζ γ η. Λέγω ὅτι ἡ α β γ δ, σφαιροειδὴς ἔλλειψις πρὸς τὴν α ζ γ η, σφαῖραν ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τοῦ τῆς δ β, πρὸς τὴν α γ, λόγου. Ἤχθωσαν γὰρ παράλληλοι τῇ δ β, αἱ θ κ, λ μ, ν ξ, ο π, καὶ ἐπεὶ ἑκάστη τῶν θ κ, λ μ, καὶ λοιπῶν τέμνονται ὑπὸ τῆς α β γ δ, ἐλλείψεως κατὰ τὸν λόγον τοῦ τῆς δ β, ἐλάττονος διαμέτρου τῆς αὐτῆς ἐλλείψεως πρὸς τὴν α γ, μείζονα κατὰ τὴν λ β': τοῦ ζ': τοῦ α'. τοῦ παρόντος, οἱ δὲ κύκλοι τῶν ρ φ, σ χ, τ ψ, υ ω, διαμέτρων πρὸς τοὺς κύκλους τῶν θ κ, λ μ, ν ξ, ο π, ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων κατὰ τὴν α': τοῦ γ': τοῦ α': τμήματος, πάντως γε ἕκαστος κύκλος τῶν ρ φ, σ χ, καὶ λοιπῶν καταλλήλως παραβαλλόμενος ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῆς δ β, ἐλάττονος διαμέτρου πρὸς τὴν α γ, μείζονα, ἀλλ' ὡς εἷς τῶν περὶ τὰς ρ φ, σ χ, καὶ λοιπὰς διαμέτρους κύκλων πρὸς ἕνα τῶν περὶ τὰς θ κ, λ μ, καὶ λοιπάς, ἔχουσι πάντως καὶ οἱ κύκλοι πρὸς πάντας κατὰ τὴν ι β': τοῦ ε': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἄρα σύμπαντες οἱ κύκλοι αἱ περὶ τὰς ρ φ, σ χ, καὶ λοιπὰς διαμέτρους πρὸς σύμπαντας τοὺς περὶ τὰς θ κ, λ μ, καὶ λοιπάς, κύκλους ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῆς δ β, πρὸς τὴν α γ. Ἐὰν δὲ νοηθῶσι διὰ ἑκάστου σημείου τῆς α γ, ἐπίπεδα διέρχεσθαι παραλλήλως τῷ διὰ τῆς δ β, πάντως γε οἱ μὲν ὑπὸ τῆς ἐλλείψεως περιεχόμενοι τὸ τῆς αὐτῆς ἐλλείψεως ἀναπληροῦσι στερεόν, οἱ δὲ ὑπὸ τῆς α ζ γ η, σφαίρας τὸ τῆς αὐτῆς σφαίρας ὁμοίως στερεὸν ἀναπληροῦσι, καὶ ἑπομένως ἡ α β γ δ, σφαιρικὴ ἔλλειψις πρὸς τὴν α ζ γ η, σφαῖραν ἐνδι-

πλα-

πλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῷ τῆς ἐλάττονος δβ, διαμέτρου πρὸς τὴν αγ, μείζονα, ὅπερ ἔδει δεῖξαι τὸ α:

Ἔστω β': ἔλλειψις μὲν σφαιροειδὴς ἡ αβγδ, περὶ δὲ τὴν ἐλάττονα αὐτῆς δβ, διάμετρον σφαῖρα ἡ δζβη, καὶ ἤχθωσαν αἱ θκ, λμ, νξ, παράλληλοι τῇ αγ, μείζονι αὐτῆς διαμέτρῳ. Τούτων Geom. Sol. Lib. 2. Fig. 45.

δ' οὕτως ὑποτεθέντων τε καὶ κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἑκάστη τῶν θκ, λμ, νξ, τέμνεται ὑπὸ τοῦ δζβη, κύκλου κατὰ τὸν λόγον τῆς αγ, μείζονος διαμέτρου τῆς αβγδ, ἐλλείψεως πρὸς τὴν δβ, ἐλάττονα τῆς αὐτῆς διαμέτρου, ὡς δέδεικται προτάσει λγ': τοῦ ζ': τοῦ α: τμήματος, ῥᾳδίως δειχθήσεται κατὰ τὸ προειρημένα τὴν αβγδ, σφαιροειδῆ ἔλλειψιν πρὸς τὴν δζβη, σφαῖραν ἐνδιπλασίονι εἶναι λόγῳ τῆς αγ, μείζονος διαμέτρου τῆς αβγδ, ἐλλείψεως πρὸς τὴν δβ, ἐλάττονα τῆς αὐτῆς διαμέτρου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι τὸ β': Ἔλλειψις ἄρα σφαιροειδὴς, καὶ τὰ ἑξῆς.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

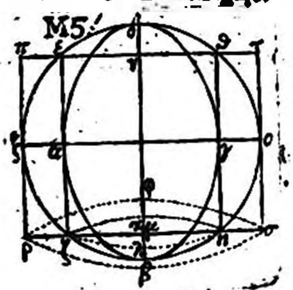
Ἐκ τῶν εἰρημένων δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι τὸ οἱονδήποτε τῆς σφαιροειδοῦς ἐλλείψεως τμῆμα πρὸς μὲν τὸ κατάλληλον τμῆμα τῆς περὶ τὴν μείζονα τῆς αὐτῆς ἐλλείψεως διάμετρον σφαίρας ἐνδιπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῆς ἐλάττονος διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὴν μείζονα τῆς αὐτῆς διάμετρον, πρὸς δὲ τὸ τμῆμα τῆς περὶ τὴν ἐλάττονα διάμετρον τῆς ἐλλείψεως, σφαίρας ἐνδιπλασίονι λόγῳ τῆς μείζονος τῆς ἐλλείψεως διαμέτρου πρὸς τὴν ἐλάττονα τῆς αὐτῆς διάμετρον. εἰ μὲν γὰρ ζητηθῇ ὁ λόγος τοῦ βαδ, τμήματος ἐπὶ τοῦ α: διαγράμματος πρὸς τὸ ζαη, ἢ ὁ τοῦ χασ, πρὸς τὸ μαλ, τῇ αὐτῇ δείξει χρώμενοι, συνάξομεν τὸ αὐτὸ, ὃ καὶ ἐπὶ τοῦ ὅλου πρὸς τὸ ὅλον. εἰ δέ γε ζητηθῇ ὁ τοῦ αδγ, λόγος, ἐπὶ τοῦ β': διαγράμματος, πρὸς τὸ ζδη, ἢ ὁ τοῦ θδκ, πρὸς τὸ οδσ, συναχθήσεται πάντως, ὅπερ καὶ ἐπὶ τοῦ ὅλου αβγδ, πρὸς ὅλον τὸ δζβη.

Πρότασις Μϛ':

Τὸ τῆς σφαιροειδοῦς ἐλλείψεως στερεὸν ἴσον ἐστὶ κυλίνδρῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ αὐτὴ τῇ τῆς ἐλλείψεως, ὕψος δὲ δύο τρίτα τοῦ τῆς ἐλλείψεως ὕψους.

Ἔστω α: ἔλλειψις σφαιροειδὴς ἡ αβγδ, ἧς ὕψος ἡ μείζων αὐτῆς διάμετρος δβ, ἔστω δὲ καὶ κύλινδρος περὶ αὐτὴν ὁ ιζηθ, οὗ βάσις μὲν ὁ ζλνη, κύκλος

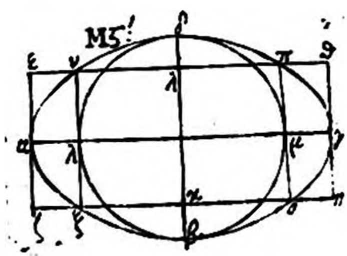
Geom. Sol. Lib. 1. Fig. 46.



ἴσος τῷ περὶ τὴν α γ, κύκλῳ (ἴση γὰρ ἡ α β, τῇ ζ η,) ὃς καὶ βάσις ἐνταῦθα τῆς ἐλλείψεως λαμβάνεται, ὕψος δὲ τὸ μ ν, δύο τρίτα τῆς β δ, τῆς ἐλλείψεως ὕψους περιέχον. Λέγω ὅτι ἡ α β γ δ, ἔλλειψις ἴση ἐστὶ τῷ ζ θ, κυλίνδρῳ· γραφήτω γὰρ περὶ τὴν δ ξ β ο, σφαῖραν κύλινδρος ὁ π ρ σ τ, οὗ βάσις μὲν ἴση τῷ μεγίστῳ τῆς αὐτῆς σφαίρας κύκλῳ ὁ ρ φ σ β, δηλονότι κύκλος, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ, ὃ καὶ τοῦ ζ θ· καὶ ἐπεὶ ἡ δ ξ β ο, σφαῖρα πρὸς τὴν α β γ δ, ἔλλειψιν ἐνδιπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῆς δ β, μείζονος πρὸς τὴν α γ, ἐλάττονα κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ταὐτὸν δ' ἐστὶν εἰπεῖν τῆς ρ σ, πρὸς τὴν ζ η, ἔστι δὲ καὶ ὁ ρ φ σ β, κύκλος πρὸς τὸν ζ κ η λ, κύκλον ἐνδιπλασίονι λόγῳ τῆς ρ σ, πρὸς τὴν ζ η, κατὰ τὴν α: τοῦ γ': τοῦ α: τοῦ παρόντος, πάντως γε ὡς ἡ δ ξ β ο, σφαῖρα πρὸς τὴν α β γ δ, σφαιροειδῆ ἔλλειψιν, ὁ ρ φ σ β, κύκλος πρὸς τὸν ζ κ η λ, κύκλον, ὡς δὲ ὁ ρ φ σ β, κύκλος πρὸς τὸν ζ κ η λ, κύκλον, ἔστι καὶ ὁ ρ τ, κύλινδρος πρὸς τὸν ζ θ, κύλινδρον κατὰ τὴν ια: τοῦ ιβ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἄρα καὶ ὡς ὁ ρ τ, κύλινδρος πρὸς τὸν ζ θ, ἡ δ ξ β ο, σφαῖρα πρὸς τὴν α β γ δ, ἔλλειψιν. ἀλλ' ἡ δ ξ β ο, σφαῖρα ἴση ἐστὶ τῷ ρ τ, κυλίνδρῳ, κατὰ τὸ β': τῆς μ α': τοῦ παρόντος πόρισ: ἴση ἄρα καὶ ἡ α β γ δ, ἔλλειψις τῷ ζ θ, κυλίνδρῳ.

Ἔστω β': ἔλλειψις ἡ α β γ δ, καὶ γραφήτω περὶ αὐτὴν κύλινδρος ὁ ε ζ η θ, οὗ βάσις μὲν ἴση τῷ περὶ τὴν μείζονα τῆς ἐλλείψεως διάμετρον κύκλῳ, ὁ περὶ τὴν ζ η, δηλονότι κύκλος, ὕψος δὲ ἡ κ λ, δύο τρίτα καὶ αὐτὴ περιέχουσα τῆς δ β, ἐλάττονος τῆς ἐλλείψεως διαμέτρου. ὅτι δὲ ἡ α β γ δ, ἔλλειψις ἴση ἐστὶ τῷ ζ θ, κυλίνδρῳ, δῆλον. Περιγραφήτω γὰρ καὶ περὶ τὴν δ λ β μ, σφαῖραν ὁ ν ξ ο π, κύλινδρος ἰσοϋψὴς τῷ ζ θ, ἔχων δὲ βάσιν ἴσην τῷ μεγίστῳ τῆς δ λ β μ, σφαίρας κύκλῳ· καὶ ἐπεὶ ἡ δ λ β μ, σφαῖρα πρὸς τὴν α β γ δ, ἔλλειψιν ἐνδιπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῆς δ β, ἐλάττονος τῆς ἐλλείψεως διαμέτρου πρὸς τὴν α γ, μείζονα, τουτέστι τῆς ξ ο, πρὸς τὴν ζ η, ἀλλὰ καὶ ὁ περὶ τὴν ξ ο, κύκλος πρὸς τὸν περὶ τὴν ζ η, κύκλον ὁμοίως ἐνδιπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῆς ξ ο, πρὸς τὴν ζ η. ὡς ἄρα ὁ περὶ τὴν ξ ο, κύκλος πρὸς τὸν περὶ τὴν ζ η, κύκλον, ἡ δ λ β μ, σφαῖρα πρὸς τὴν α β γ δ, ἔλλειψιν, ἀλλ' ὡς ὁ περὶ τὴν ξ ο, κύκλος πρὸς τὸν περὶ τὴν ζ η, κύκλον, ἔστι καὶ ὁ ξ π, κύλινδρος πρὸς τὸν ζ θ, κύλινδρον, ἄρα καὶ ὡς ὁ ξ π,

Geom: Sol. lib. 1. Fig. 47.



κύλιν-

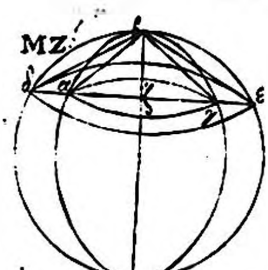
κύλινδρος πρὸς τὸν ζθ, κύλινδρον ἡ δλβμ, σφαῖρα πρὸς τὴν αβγδ, ἔλλειψιν, ἡ δὲ δλβμ, σφαῖρα ἴση ἐςὶ τῷ ξο, κυλίνδρῳ, ἄρα καὶ ἡ αβγδ, ἔλλειψις ἴση ἐςὶ τῷ ζθ, κυλίνδρῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΜΖ':

Τὸ οἱονδήποτε τῆς σφαιροειδοῦς ἐλλείψεως τμῆμα ἔχει πρὸς τὸν κῶνον τὸν ἐπὶ τῆς αὐτῆς αὐτῷ ὄντα βάσεως καὶ τὸ αὐτὸ ἔχοντα ὕψος, ὡς τὸ κατάλληλον τμῆμα τῆς περί τινα τῶν αὐτῆς διαμέτρων σφαίρας πρὸς τὸν κῶνον, τὸν ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὄντα βάσεως τῷ τῆς σφαίρας τμήματι, καὶ τὸ αὐτὸ ἔχοντα ὕψος.

Ἔςω τμῆμα μὲν σφαιροειδοῦς ἐλλείψεως τὸ αβγ, οὗ βάσις ὁ αγ, κύκλος, κῶνος δὲ ὁ βαγ, βάσιν ἔχων τὸν αὐτὸν αγ, κύκλον, καὶ ὕψος τὸ ζβ, ὃ καὶ τοῦ αβγ, τμήματος. Ἔςω δὴ καὶ τμῆμα τῆς περὶ τὴν μείζονα διάμετρον τῆς ἐλλείψεως σφαίρας τὸ δβε, καὶ κῶνος ὁ δβε, οὗ βάσις ὁ δε κύκλος, ὃ καὶ τοῦ τμήματος βάσις ὤν, καὶ ὕψος τὸ ζβ. Λέγω ὅτι ὡς τὸ δβε, τῆς σφαίας τμῆμα πρὸς τὸν δβε, κῶνον, ἔχει καὶ τὸ αβγ, τῆς σφαιρικῆς ἐλλείψεως τμῆμα πρὸς τὸν βαγ, κῶνον. κατὰ γὰρ τὸ πόρισμα τῆς με': τοῦ παρ: τὸ αβγ, τμῆμα πρὸς τὸ δβε, ἐνδιπλασίονι λόγῳ ἐςὶ τῆς ἐλάττονος διαμέτρου πρὸς τὴν μείζονα. ἀλλ' ὡς ἡ ἐλάττων διάμετρος πρὸς τὴν μείζονα, ἔχει καὶ ἡ αγ, διάμετρος τῆς βάσεως τοῦ αβγ, τμήματος πρὸς τὴν δε, διάμετρον τῆς βάσεως τοῦ δβε, τμήματος κατὰ τὴν λβ': τοῦ ζ': τοῦ α': τοῦ παρόντος, ἄρα τὸ αβγ, τμῆμα πρὸς τὸ δβε, ἐνδιπλασίονι λόγῳ ἐςὶ τῆς αγ, πρὸς τὴν δε. Ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ αγ, κύκλος πρὸς τὸν δε, κύκλον ἐνδιπλασίονί ἐςι λόγῳ τῆς αγ, πρὸς τὴν δε, πάντως γε τὸ αβγ, τμῆμα πρὸς τὸ δβε, ἔχει ὡς ὁ αγ, κύκλος πρὸς τὸν δε, κύκλον. ἀλλ' ὡς ὁ αγ, κύκλος πρὸς τὸν δε, ἔχει καὶ ὁ βαγ, κῶνος πρὸς τὸν βδε, κῶνον κατὰ τὴν ια': τοῦ ιβ': τοῦ ςοιχ: ἄρα ὡς τὸ αβγ, τμῆμα πρὸς τὸ δβε, ὁ βαγ, κῶνος πρὸς τὸν βδε, καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ αβγ, τμῆμα πρὸς τὸν βαγ, κῶνον, τὸ δβε τμῆμα πρὸς τὸν βδε, κῶνον· ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται τὸ αὐτό, κἂν κατὰ πλάτος τῆς ἐλλείψεως τὸ τμῆμα ληφθῇ, καὶ πρὸς τὸ τμῆμα τῆς περὶ τὴν ἐλάττονα διάμετρον τῆς σφαίρας παραβληθῇ.

Geom. Sol Lib. 1. Fig. 48.



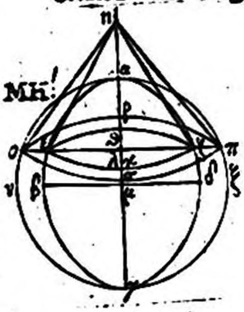
Πρότασις ΜΗ'.

Τὸ οἱονδήποτε τῆς σφαιροειδοῦς ἐλλείψεως τμῆμα ἴσον ἐστὶ κώνῳ, οὗ βάσις ἡ αὐτὴ, ἥτις καὶ τοῦ τμήματος, καὶ ὕψος τὸ συγκείμενον ἐκ τε τοῦ ὕψους τοῦ τμήματος καὶ τῆς δ': ἀναλόγου τῶν ὑψωμάτων τῶν δύο τῆς αὐτῆς ἐλλείψεως τμημάτων, τοῦτε ἀπολειπομένου δηλ: καὶ λαμβανομένης τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς ἐλλείψεως, καθ' ἣν τὸ τμῆμα λαμβάνεται.

Ἔστω τμῆμα μεν ἐλλείψεως σφαιροειδοῦς τῆς α β γ δ, κατὰ μῆκος ἀφαιρούμενον τὸ ε α ζ, κῶνος δὲ ὁ η ε ζ, οὗ βάσις ὁ ε θ ζ κ, κύκλος, ὕψος δὲ τὸ λ η, συγκείμενον ἐκ τε τοῦ λ α, ὕψους τοῦ ε α ζ, τμήματος, καὶ τῆς α η, δ': ἀναλόγου τῶν γ λ, λ α, γ μ. Λέγω, ὅτι τὸ ε α ζ, τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ η ε ζ, κώνῳ. Γραφήτω δὲ περὶ τὴν α γ, μείζονα διάμετρον τῆς ἐλλείψεως, ἡ α ν γ ξ, σφαῖρα, καὶ ἤχθω ἐφ' ἑκάτερα ἡ ε ζ, ὥστε ἀφαιρεθῆναι ἀπὸ τῆς α ν γ ξ, σφαίρας τὸ ο α π, παράλληλον τμῆμα τῷ ε α ζ, τῆς ἐλλείψεως τμήματι· καὶ συμπεπληρώσθω ὁ η ο π, κῶνος ἰσοϋψὴς τῷ η ε ζ, κώνῳ, οὗ βάσις ὁ ο ρ π σ, κύκλος. Δείκνυται τὸ ε α ζ, τμῆμα πρὸς τὸ ο α π, ἔχει ὡς ὁ ε θ ζ κ, κύκλος πρὸς τὸν ο ρ π σ, κύκλον κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἀλλ' ὡς ὁ ε θ ζ κ, κύκλος πρὸς τὸν ο ρ π σ, κύκλον, ἔχει καὶ ὁ η ε ζ, κῶνος πρὸς τὸν η ο π, κῶνον κατὰ τὴν ια: τοῦ ιβ': τοῦ στοιχ: ἄρα ὡς ὁ η ε ζ, κῶνος πρὸς τὸν η ο π, κῶνον, ἔχει καὶ τὸ ε α ζ, τμῆμα πρὸς τὸ ο α π, τμῆμα, καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ὁ η ε ζ, κῶνος πρὸς τὸ ε α ζ, τμῆμα, ὁ η ο π, κῶνος πρὸς τὸ ο α π, τμῆμα, ἀλλὰ τὸ ο α π, τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ η ο π, κώνῳ κατὰ τὴν μδ': τοῦ παρόντος, ἄρα καὶ τὸ ε α ζ, τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ η ε ζ, κώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Geom: Sol. lib. 1. Fig. 48

ΜΗ'.



Τέλος τοῦ πρώτου βιβλίου Τοῦ β': μέρους.

ΣΤΟΙ.

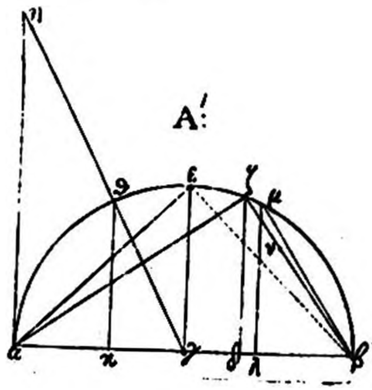
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.
ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.
Πρότασις Α'.

Διαμέτρου σφαίρας δοθείσης, τὰς τῶν πέντε σωμάτων πλευρὰς εὑρεῖν τῶν τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένων σφαίρᾳ.

Ἔστω διάμετρος σφαίρας ἡ αβ, καὶ ζητηθήτωσαν αἱ τῶν πέντε σωμάτων τῶν τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένων σφαίρᾳ πλευραί. Τμηθήτω δὲ ἡ δοθεῖσα τῆς σφαίρας διάμετρος αβ, κατὰ τὰ γ, καὶ δ, ὥστε τὴν μὲν αγ, ἴσην εἶναι τῇ γβ, τὴν δὲ αδ, διπλασίαν τῆς δβ, καὶ γραφήτω περὶ αὐτὴν ἡμικύκλιον τὸ αεβ, ἀπὸ δὲ τῶν γ, καὶ δ, ἀνεστάθωσαν κάθετοι αἱ γε, δζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αζ, ζβ, εβ. εἶτα ἀνεστάθω καὶ ἀπὸ τοῦ α, κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ αη, ἴση τῇ αβ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηγ, τέμνουσα τὸ αεβ, ἡμικύκλιον κατὰ τὸ θ, ἀπὸ δὲ τοῦ θ, πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ θκ.

Geom. Sol. Lib. 2 Fig. 1.

Ἐπεὶ δὲ ἡ γκ, μείζων τῆς γδ, ὡς ὀψόμεθα, εἰλήφθω ἡ γλ, ἴση τῇ γκ, καὶ ἀνεστάθω ἀπὸ τοῦ λ, κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ λμ, ἡ δὲ ζβ, τμηθήτω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ ν. Λέγω τὴν μὲν αζ, πλευρὰν εἶναι πυραμίδος τῆς τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένης σφαίρᾳ, τὴν δὲ βζ, κύβου, τὴν δὲ βε, ὀκταέδρου, τὴν δὲ βν, δωδεκαέδρου, καὶ τὴν μβ, εἰκοσαέδρου.



Δείκνυται. Ἐπεὶ ἡ αδ, διπλασία ἐστὶ τῆς δβ, ὡς δῆλον ἐκ τῆς κατασκευῆς, πάντως γε ἡ ὅλη αβ, τῆς μὲν δβ, τριπλασία ἐστί, τῆς δὲ αδ, ἡμιόλιος. ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν αδ, ἔχει καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀ-

πὸ

πὸ τῆς αζ, κατὰ τὴν α΄: τοῦ γ΄: τοῦ α΄: μέρους. αἱ γὰρ αβ, αζ, αδ, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι κατὰ τὸ β΄: πόρισμα τῆς κ΄: τοῦ ϛ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἡ αβ, ἄρα δυνάμει ἡμιόλιός ἐστι τῆς αζ, ἀλλ' ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιόλιός ἐστι τῆς πλευρᾶς τῆς ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ πυραμίδος κατὰ τὴν γ΄: τοῦ α΄: τοῦ παρόντος, καὶ ιγ΄: τοῦ γ΄: τῶν στερεῶν. ἡ δὲ αβ, ὑπετέθη διάμετρος τῆς σφαίρας, ἡ αζ, ἄρα πλευρά ἐστι τῆς πυραμίδος. Αὖθις ἐπεὶ ἡ αδ, διπλάσιός ἐστι τῆς δβ, πάντως γε ἡ ὅλη αβ, τριπλασία ἐστὶ τῆς αὐτῆς δβ. ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν δβ, ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βζ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν α΄: τοῦ γ΄: τοῦ α΄: μέρους. αἱ γὰρ αβ, βζ, δβ, ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, ἄρα ἡ αβ, δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς βζ, ἀλλὰ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλάσιός ἐστι τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κατὰ τὴν ζ΄: τοῦ α΄: τοῦ παρόντος, ὑπετέθη δὲ ἡ αβ, διάμετρος τῆς σφαίρας, ἄρα ἡ βζ, πλευρά ἐστι κύβου. Ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ αβ, διπλασία ἐστὶ τῆς γβ, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν γβ, ἔχει καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς εβ, κατὰ τὰ προειρημένα, ἡ αβ, ἄρα δυνάμει διπλάσιός ἐστι τῆς εβ, ἀλλὰ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλάσιός ἐστι τῆς τοῦ ὀκταέδρου κατὰ τὴν η΄: τοῦ α΄: τοῦ παρόντος, ἐστι δὲ ἡ αβ, διάμετρος σφαίρας κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα ἡ εβ, πλευρά ἐστιν ὀκταέδρου τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ.

Ἐπεὶ δ' ἔτι καὶ ἡ ζβ, πλευρά ἐστι κύβου, ὡς δέδεικται, καὶ τέτμηται ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ ν, ἡ βν, ἄρα πλευρά ἐστι δωδεκαέδρου κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιζ΄: τοῦ ιγ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. Ὅτι δὲ καὶ ἡ βμ, πλευρά ἐστιν εἰκοσαέδρου, οὑτωσὶ δειχθήσεται. Ἐπεὶ ἡ αη, ἴση ἐστὶ τῇ αβ, πάντως γε διπλασία ἐστὶ τῆς αγ, ὥσπερ καὶ ἡ αβ. ἀλλ' ὡς ἡ ηα, πρὸς τὴν αγ, ἔχει ἡ θκ, πρὸς τὴν κγ, ἄρα καὶ ἡ θκ, διπλασία ἐστὶ τῆς κγ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς θκ, τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς κγ, κατὰ τὴν β΄: τοῦ γ΄: τοῦ α΄: μέρους, συναμφότερα δὲ τό, τε ἀπὸ τῆς θκ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς κγ, ταυτὸν δ' ἐστιν εἰπεῖν τὸ ἀπὸ τῆς θγ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς κγ, τῇ δὲ θγ, ἴση ἐστὶν ἡ γβ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς γβ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς κγ, ἤτοι τοῦ ἀπὸ τῆς γλ, ἴση γὰρ εἴληπται ἡ γλ, τῇ κγ, ἀλλὰ τῆς μὲν γβ, διπλασία ἐστὶν ἡ αβ, τῆς δὲ γλ, ἡ κλ, τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ἄρα πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς κλ. κατὰ δὲ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ΄: τοῦ ιγ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλάσιός ἐστι τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγράφεται, καὶ ἡ αβ, διάμετρός ἐστι τῆς δοθείσης σφαίρας, ἄρα ἡ κλ, ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγράφεται. σύγκειται δὲ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἔκ τε τῆς τοῦ ἑξαγώνου καὶ τῶν δύο τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν ἐγγραφομένων κύκλον κατὰ τὸ αὐτὸ πόρ: . δῆλον ἄρα ὅτι ἑκατέρα τῶν ακ, λβ, πλευρά ἐστι δεκαγώνου, ἀλλὰ τῇ κλ, ἴση ἐστὶν ἡ λμ, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αὐτὴ λμ καὶ τῇ θκ, διὰ τὸ ἴσον ἀφίστασθαι τοῦ κέντρου κατὰ τὴν ιδ΄: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχ: , καὶ ἡ θκ, ὁμοίως

ἴση

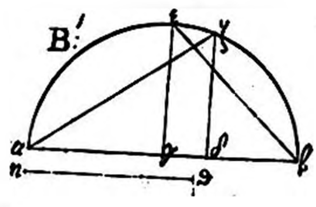
ἴση τῇ κλ, ἑκατέρα γὰρ διπλασία δέδεικται τῆς κγ, ἄρα ἡ λμ, πλευρά ἐστιν ἑξαγώνου, ἡ δὲ λβ, δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν ἐγγραφομένων κύκλον, δύναται δὲ ταῦτα ἡ βμ, ἄρα κατὰ τὴν ι: τοῦ εἰρημένου ιγ':, ἡ μβ, πλευρά ἐστι πενταγώνου, ἀλλ' ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ, ἐστὶ καὶ εἰκοσαέδρου, ἡ μβ, ἄρα εἰκοσαέδρου ἐστὶ πλευρά. Ὅτι δὲ ἡ κγ, μείζων ἐστὶ τῆς γδ, δῆλον. ἡ μὲν γὰρ αβ, διπλασία ἐστὶ τῆς γβ, ἡ δὲ αδ, τῆς δβ, ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ δβ, λοιπῆς τῆς γδ, διπλασία ἐστὶν, ἡ ὅλη δὲ γβ, τῆς αὐτῆς γδ, τριπλασία ἐστὶν, ἀλλ' ἡ γβ, τῆς κγ, δέδεικται διπλασία, ἡ γβ, ἄρα μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν γδ, ἢ τὴν κγ, ὥστε κατὰ τὴν ι: τοῦ ε: τοῦ Στοιχειωτοῦ ἡ κγ, μείζων ἐστὶ τῆς γδ. Διαμέτρου ἄρα σφαίρας δοθείσης αἱ τῶν πέντε σωμάτων πλευραὶ εὕρηνται, τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ περιλαμβανομένων.

Πρότασις Β′:

Διαμέτρου σφαίρας δοθείσης, τὰς τῶν πέντε σωμάτων ἐπιφανείας εὑρεῖν.

Ἔστω διάμετρος σφαίρας ἡ αβ, καὶ ζητηθήτω α: ἡ τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ τετραέδρου ἐπιφάνεια. Τμηθήτω δὴ ἡ αβ, κατὰ τὸ δ, ὥστε τὴν αδ, διπλασίαν εἶναι τῆς δβ, καὶ γραφέντος περὶ αὐτὴν ἡμικύκλιον τὸ αεβ, ἀπὸ δὲ τοῦ δ, σημείου ἀνεστάσθω κάθετος ἡ δζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αζ. εἶτα γενέσθω ὡς ὁ 3, πρὸς τὸν 4, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αζ, τετράγωνον πρὸς ἄλλο τι κατὰ τὴν κ': τοῦ ς': τοῦ παρ:, καὶ εὑρεθήτω ἡ τούτου τετράγωνος ῥίζα, καὶ ἔστω αὐτὴ ἡ ηθ. τμηθείσης δὲ τῆς αζ, δίχα, πολλαπλασιασθήτω ἡ ηθ, ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς αζ, καὶ τὸ γενόμενον πολλαπλασιασθήτω αὖθις ἐπὶ τὸν 4, καὶ ἕξεις τὸ ζητούμενον. κατὰ γὰρ τὴν ἀνωτέρω ἡ αζ, πλευρά ἐστι τετραέδρου τοῦ ἐν τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ, ὥστε ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος τῆς τοῦ ἐν αὐτῇ τετραέδρου πλευρᾶς δυνάμει ἡμιόλιός ἐστι κατὰ τὴν γ': τοῦ α: τοῦ παρόντος, ἡ δὲ τῆς σφαίρας διάμετρος δέδοται, δέδοται πάντως καὶ ἡ αζ, καὶ ἡ ταύτης ἡμίσεια. Ὅτι δὲ καὶ ἡ ηθ, δέδοται, δῆλον ἐκ τῆς κατασκευῆς. Ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ ηθ, ἴση ἐστὶ τῇ καθέτῳ, τῇ πιπτούσῃ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, οὗ πλευρὰ ἡ αζ, ἐπὶ τῆς αὐτοῦ βάσεως κατὰ τὴν ιε': ἢ ι': τοῦ δ': τοῦ α: μέρους, πάντως γε πολλαπλασιαζομένης τῆς ηθ, ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς αζ, τὸ γενόμενον ἴσον ἔσται τῷ ἐμβαδῷ τοῦ αὐτοῦ τριγώνου κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιβ': τοῦ γ': τοῦ α: μέρους. ἀλλὰ τὸ τετράεδρον

Geom: Sol. lib. 2. Fig. 2.



περιέχεται τέτταρσιν ἰσοπλεύροις τριγώνοις, ἄρα τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου, οὗ πλευρὰ ἡ αζ, εὑρεθέντος, καὶ ἐπὶ τὸν 4, πολλαπλασιασθέντος, γνωσθήσεται ἡ τοῦ τετραέδρου ἐπιφάνεια· ὅπερ ἦν τὸ προσαχθέν.

Ζητηθήτω β': ἡ τοῦ κύβου ἐπιφάνεια τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ. Πολλαπλασιασθήτω δὴ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, ἐφ' ἑαυτήν, καὶ τὸ γενόμενον διπλασιασθήτω, καὶ ἕξεις ἐμβαδὸν ἴσον τῇ τοῦ κύβου ἐπιφανείᾳ, τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ. κατὰ γὰρ τὴν α': τοῦ α': τοῦ παρόντος τὸ τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας τετράγωνον ὑποδιπλάσιόν ἐστι τῆς τοῦ κύβου ἐπιφανείας τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ.

Ζητηθήτω γ': ἡ τοῦ ὀκταέδρου ἐπιφάνεια. Εὑρεθήτω δὴ α': ἡ τοῦ τετραέδρου ἐπιφάνεια τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ, καὶ ταύτης δίχα διαιρεθείσης, προστεθήτω τῇ ὅλῃ ἡ ἡμίσεια, καὶ τὸ γενόμενον ἴσον ἔσται τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ὀκταέδρου τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ ὄντος σφαίρᾳ, ἐν ᾗ καὶ τὸ ὀκτάεδρον, κατὰ γὰρ τὴν ια': τοῦ α': τοῦ παρόντος ἡ τοῦ ὀκταέδρου ἐπιφάνεια ἡμιόλιός ἐστι τῆς τοῦ τετραέδρου τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ.

Ζητηθήτω δ': ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνεια. Εὑρεθήτω δὴ ἡ αὐτοῦ πλευρὰ κατὰ τὴν ἀνωτέρω, καὶ πολλαπλασιασθήτω ἐφ' ἑαυτήν, καὶ τοῦ γενομένου τετραγώνου ἀφῃρήσθω τὸ δ': τοῦ δ' ἐναπολειφθέντος εὑρεθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα, καὶ αὕτη πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς εὑρεθείσης πλευρᾶς τοῦ εἰκοσαέδρου, τὸ δὲ γενόμενον πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸν 20, καὶ γενήσεται ἐμβαδὸν ἴσον τῇ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφανείᾳ, τοῦ ἐν τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ. ἐπεὶ γὰρ τὸ εἰκοσάεδρον ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων περιέχεται κατὰ τὸν κη': ὅρον τοῦ ια': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἡ δὲ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρὰ δυνάμει ἐπίτριτός ἐστι τῆς ἀπὸ μιᾶς τῶν αὐτοῦ γωνιῶν ἐπὶ τὴν ἀπεναντίον πλευρὰν καθέτου κατὰ τὴν ι': τοῦ δ': τοῦ α': μέρους, πάντως γε ἀφαιρουμένου τοῦ δ': μέρους ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς εὑρεθείσης τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρᾶς, καὶ τοῦ ἐναπολειφθέντος τῆς τετραγώνου εὑρεθείσης ῥίζης, εὑρεθήσεται ἡ κάθετος ἡ ἀπὸ μιᾶς τῶν γωνιῶν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, οὗ πλευρὰ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου, ταύτης δὲ ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰκοσαέδρου πολλαπλασιασθείσης τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αὐτοῦ δίδοται τριγώνου. τούτου δὲ ἐπὶ τὸν εἴκοσι πολλαπλασιαζομένου, δίδοται ἅπασα ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνεια.

Ζητηθήτω ε': ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια τοῦ τῇ αὐτῇ περιλαμβανομένου σφαίρᾳ, ᾗ καὶ τὰ λοιπά. Εὑρεθήτω δὴ κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἥ τε τοῦ κύβου πλευρά, καὶ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνεια. εἶτα γενέσθω ὡς ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ κύβου, οὕτως ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ δωδεκαέδρου. Δείκνυται διὰ τῆς δ': τοῦ ιδ': τοῦ Στοιχειωτοῦ.

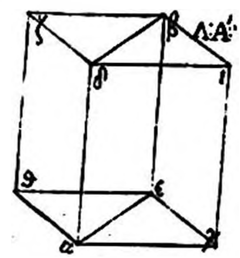
Λῆμ-

Λῆμμα Α'.

Τριγωνοειδοῦς δοθέντος πρίσματος τὸ στερεὸν αὐτοῦ εὑρεῖν.

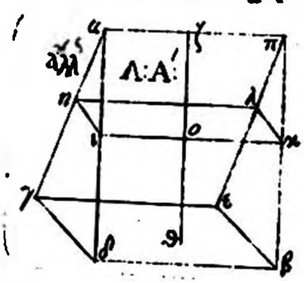
Ἔστω τριγωνοειδὲς πρίσμα τὸ α γ ε β δ, καὶ ζητείσθω τὸ τούτου στερεόν. Εὑρεθήτω δὴ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ α γ ε, τριγώνου κατὰ τὸ πόρισμα τῆς α: τοῦ η: τοῦ α: τμήμ:, καὶ πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὴν ε β, καὶ ἔσται τὸ ζητούμενον. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ ε, παράλληλος τῇ α γ, ἡ ε θ, ἀπὸ δὲ τοῦ α, ἡ α θ, παράλληλος καὶ αὐτὴ τῇ γ ε, καὶ πληρωθήσεται τὸ α γ ε θ, παραλληλόγραμμον διπλάσιον ὂν τοῦ α γ ε, τριγώνου, τούτου δὲ ἐπὶ τὴν ε β, πολλαπλασιαζομένου, συσταθήσεται τὸ α β, διπλάσιον ὂν καὶ αὐτὸ τοῦ δοθέντος πρίσματος. πᾶν γὰρ παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τινὶ τεμνόμενον κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίων, δίχα τέμνεται κατὰ τὴν κη: τοῦ ια: τοῦ Στοιχειωτοῦ. ὥσπερ οὖν τὸ ὅλον α β, παραλληλεπίπεδον διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς ὅλης α γ ε θ, βάσεως ἐπὶ τὸ ε β, ὕψος συνίσταται, οὕτω δήπουθεν καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ αὐτοῦ διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῆς α γ ε, ἡμισείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ αὐτὸ ε β, ὕψος συσταθήσεται. Ὅτι δὲ καὶ τὸ α β, παραλληλεπίπεδον δίχα τέμνεται, δῆλον. τέμνεται γὰρ τῷ α ε β δ, ἐπιπέδῳ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν α γ ε θ, δ ι β ζ, ἀπεναντίων ἐπιπέδων.

Geom. Sol Lib. 2. Fig:3



Ἄλλως. Ἔστω τριγωνοειδὲς πρίσμα τὸ α β, οὗ βάσις παραλληλόγραμμος ἡ β δ γ ε, κορυφὴ δὲ ἡ α π, εὐθεῖα, κοινὴ συνδρομὴ τοῦ τε α δ β π, καὶ α γ ε π, παραλληλογράμμου, καὶ ζητείσθω τὸ τούτου στερεόν. Πιπτέτω δὴ ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς α π, κάθετος ἐπὶ τῆς γ β, βάσεως ἡ ζ θ, καὶ τμηθήτω δίχα κατὰ τὸ ο, εἶτα πολλαπλασιασθήτω ἡ γ β, βάσις ἐπὶ τὸ θ ο, ἥμισυ τοῦ ζ θ, ὕψους. ἢ γοῦν τμηθήτω δίχα ἡ γ β, βάσις, καὶ τὸ ἥμισυ ταύτης πολλαπλασιασθήτω ἐφ' ὅλον τὸ ζ θ, ὕψος, καὶ τὸ γινόμενον καθ' ἑκάτερον τὸν τρόπον, ἴσον ἔσται τῷ δοθέντι πρίσματι. εἰ γὰρ ἡ γ β, βάσις ἐφ' ὅλον τὸ ζ θ, ὕψος πολλαπλασιασθῇ, γενήσεται παραλληλεπίπεδον διπλάσιον τοῦ πρίσματος, ὥστε πολλαπλασιαζομένης τῆς γ β, βάσεως ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ζ θ, ὕψους, ἢ τοῦ ζ θ, ὕψους πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς γ β, βάσεως, γενήσεται παραλληλεπίπεδον ἴσον τῷ δοθέντι

Geom: Sol. lib. 2. Fig. 4.



 θέν-

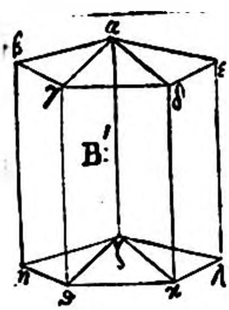
θέντι πρίσματι, Τριγωνοειδοῦς ἄρα πρίσματος δοθέντος τὸ στερεὸν αὐτοῦ εὕρηται.

Λῆμμα Β':

Πρίσματος οἱουδήποτε δοθέντος, τὸ στερεὸν αὐτοῦ εὑρεῖν.

Ἔστω πρίσμα τυχὸν τὸ α θ κ, καὶ ζητηθήτω τὸ τούτου στερεόν. διαιρεθήτω ἑκατέρα τῶν παραλλήλων αὐτοῦ πλευρῶν α β γ δ ε, ζ η θ κ λ, εἰς τρίγωνα τὰ α β γ, α γ δ, α δ ε, ζ η θ, ζ θ κ, ζ κ λ, καὶ εὑρεθήτω τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τριγώνου τῶν τῆς μιᾶς πλευρᾶς, δῆς εἰπεῖν τῆς ζ η θ κ λ, καὶ συναφθήτωσαν τὰ ζ η θ, ζ θ κ, ζ κ λ, εὑρεθέντα τρίγωνα εἰς ἓν, κἀκεῖνο πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ δοθέντος πρίσματος, κἄντε ὀρθὸν ᾖ, κἄν τε πλάγιον, καὶ τὸ γενόμενον ἴσον ἔσται τῷ δοθέντι πρίσματι. Διῃρημένων γὰρ τῶν α β γ δ ε, ζ η θ κ λ, παραλλήλων πλευρῶν, διαιρεῖται καὶ τὸ δοθὲν πρίσμα εἰς τοσαῦτα τριγωνοειδῆ πρίσματα, εἰς ὅσα καὶ ἑκατέρα τῶν αὐτοῦ πλευρῶν διαιρεῖται τρίγωνα, εὑρεθέντων δὲ τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων τῆς ζ η θ κ λ, πλευρᾶς, εὑρίσκεται καὶ ὅλη ἡ ζ η θ κ λ, πλευρά. ὥσπερ οὖν ἕκαστον τριγωνοειδὲς πρίσμα συνίσταται διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς μιᾶς τῶν παραλλήλων αὐτοῦ πλευρῶν ἐπὶ τὸ αὐτοῦ ὕψος κατὰ τὸ ἀνωτέρω λῆμμα, οὕτω καὶ τὸ πολυγωνικὸν πρίσμα συνίσταται διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς μιᾶς τῶν παραλλήλων αὐτοῦ πλευρῶν ἐπὶ τὸ ὕψος. Πρίσματος ἄρα τοῦ α θ κ, δοθέντος τὸ στερεὸν αὐτοῦ εὕρηται.

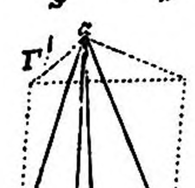
Geom. Sel. Lib. 2. Fig. 5.



Λῆμμα Γ':

Τῆς τυχούσης πυραμίδος τὸ στερεὸν εὑρεῖν.

Ἔστω τυχοῦσα πυραμὶς ἡ α β δ ε, καὶ ζητηθήτω τὸ στερεὸν αὐτῆς. Πιπτέτω δὴ κάθετος ἀπὸ τῆς α, κορυφῆς τῆς αὐτῆς πυραμίδος ἐπὶ τῆς β δ ε, βάσεως ἡ α ζ, καὶ τμηθήτω ἡ αὐτὴ α ζ, εἰς τρία ἴσα. Εἶτα εὑρεθήτω τὸ ἐμβαδὸν τῆς β δ ε, βάσεως, καὶ πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸ γ': μέρος τῆς α ζ. ἢ γοῦν διαιρεθήτω ἡ β δ ε, βάσις εἰς τρία ἴσα, καὶ τὸ γ': αὐτῆς μέρος πολλαπλασιασθήτω ἐφ' ὅλην τὴν α ζ, καὶ τὸ γενόμενον καθ' ἑκάτερον τὸν τρόπον ἴσον ἔσται τῷ στερεῷ τῆς δοθείσης πυραμίδος. κατὰ γὰρ τὸ πόρισμα τῆς ζ': τοῦ ιβ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, πᾶσα πυραμὶς γ': μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ



τὴν

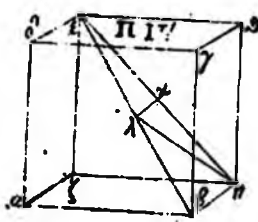
τὴν αὐτὴν βάσιν αὐτῇ ἔχοντος, καὶ ὕψος ἴσον, ἀλλὰ τὸ τοῦ πρίσματος στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γενομένῳ διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῆς αὐτοῦ βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος, ἄρα ἡ πυραμὶς ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ γ': μέρους τῆς βάσεως αὐτῆς ἐφ' ὅλον τὸ ὕψος, ἢ τῆς ὅλης βάσεως ἐπὶ τὸ γ': τοῦ ὕψους μέρος. Τῆς τυχούσης ἄρα πυραμίδος τὸ στερεὸν εὕρηται.

Πρότασις Γ':

Διαμέτρου σφαίρας δοθείσης τὰ τῶν πέντε σωμάτων στερεὰ εὑρεῖν.

Δοθήτω ἡ ιβ, διάμετρος τῆς σφαίρας, καὶ ἔστω ὁ: κύβος ἐν τῇ σφαίρᾳ, οὗ τὸ στερεὸν ζητεῖται ὁ αθ. Μεριζέσθω δὴ τὸ τετράγωνον τῆς ιβ, δοθείσης διαμέτρου ἐπὶ τὸν 3, ἀριθμὸν, καὶ τοῦ πηλίκου εὑρεθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα, καὶ αὕτη ἔσται ῥίζα καὶ τοῦ δοθέντος κύβου, ἴση δηλ: τῇ αβ· εἶτα πολλαπλασιασθήτω ἡ εὑρεθεῖσα αὕτη κυβικὴ ῥίζα ἐφ' ἑαυτὴν δὶς, καὶ συσταθήσεται ὁ δοθεὶς αθ, κύβος. ἡ γὰρ ιβ, δοθεῖσα τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς τοῦ ἐν αὐτῇ κύβου πλευρᾶς κατὰ τὴν ζ': τοῦ ε: τοῦ παρ: μεριζομένου ἄρα τοῦ τετραγώνου τῆς αὐτῆς ιβ, ἐπὶ τὸν 3, τὸ πηλίκον πάντως γε ἴσον ἐστὶ τῷ αγ, πλευρᾷ τοῦ αθ, κύβου, τούτου δὲ ἡ τετράγωνος εὑρεθεῖσα ῥίζα, ἔσται ἡ αβ, ἥτις ἐστὶ καὶ ῥίζα κυβικὴ τοῦ αθ, κύβου· πολλαπλασιασθείσης δὲ τῆς αβ, ἐφ' ἑαυτὴν, γενήσεται τὸ αγ, τετράγωνον, ὃ καὶ πλευρά ἐστι τοῦ αὐτοῦ κύβου. τούτου δὲ αὖθις ἐπὶ τὴν αὐτὴν αβ, ἤτοι τὴν αζ, τὸ ὕψος τοῦ δοθέντος κύβου πολλαπλασιαζομένου, συνίσταται δήπουθεν ὁ αθ, κύβος.

Geom. Sol Lib. 2. Fig.6.



Ἄλλως. Μεριζέσθω τὸ τετράγωνον τῆς κβ, ἡμιδιαμέτρου τῆς δοθείσης σφαίρας ἐπὶ τὸν 3, καὶ τοῦ πηλίκου εὑρεθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα. εἶτα πολλαπλασιασθήτω τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ιβ, δοθείσης διαμέτρου ἐπὶ τὸ γ': μέρος τῆς εὑρεθείσης ῥίζης, καὶ τὸ γενόμενον ἴσον ἔσται τῷ στερεῷ τοῦ δοθέντος αθ, κύβου. Ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ κ, κέντρου τῆς δοθείσης σφαίρας εὐθεῖαι ἀχθῶσιν ἐφ' ἑκάστην γωνίαν τοῦ ἐν αὐτῇ κθ, κύβου, διαιρεθήσεται ὁ αὐτὸς κύβος εἰς πυραμίδας ἓξ ἴσας, ὧν βάσεις μὲν αἱ πλευραὶ τοῦ αὐτοῦ κύβου, ὕψος δὲ τὸ κ, κέντρον, ὥστε ἐὰν ἀπὸ τοῦ κ, κέντρου πέσῃ κάθετος ἐπὶ τῆς αγ, βάσεως ὡς ἡ κλ, καὶ ἐπὶ τὸ γ': μέρος τῆς αὐτῆς πολλαπλασιασθῇ ὅλη ἡ τοῦ κύβου ἐπιφάνεια, συσταθήσεται πάντως ὁ αθ, δοθεὶς κύβος· πᾶσα γὰρ πυραμὶς συνίσταται διὰ πολλα-

πλα-

πλασιασμοῦ τῆς βάσεως αὐτῆς ἐπὶ τὸ γ': τοῦ ὕψους. τὸ γὰρ στερεὸν τῆς πυραμίδος οὑτωσὶ θηρεύεται, ὡς εἴρηται ἐν τῷ γ': λήμ: τῆς παρούσης, καὶ ἐν τῇ στερεομετρίᾳ. Ἐπεὶ δὲ ἡ τῆς σφαίρας ἡμιδιάμετρος δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς καθέτου τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἐν αὐτῇ κύβου πιπτούσης κατὰ τὴν θ': τοῦ α': τοῦ παρόντος, πάντως γε εὑρεθείσης τῆς τετραγώνου ῥίζης τοῦ γ': μέρους τοῦ τετραγώνου τῆς κβ, ἡμιδιαμέτρου, εὑρίσκεται ἡ κλ, τὸ ὕψος δηλ: τῶν ἓξ πυραμίδων, ἐφ' ἃς ὁ κύβος αθ, διαιρεῖται. ἀλλὰ τὸ τετραγ: τῆς εβ, διαμέτρου δυνάμει ὑποδιπλάσιόν ἐστι τῆς τοῦ αθ, κύβου ἐπιφανείας κατὰ τὴν α': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἐὰν τὸ διπλάσιον τοῦ αὐτοῦ τετραγώνου ἐπὶ τὸ γ': μέρος τῆς εὑρεθείσης τοῦ τετραγώνου ῥίζης πολλαπλασιασθῇ, ὁ αθ, συσταθήσεται κύβος. Διαμέτρου ἄρα σφαίρας δοθείσης, τὸ στερεὸν τοῦ ἐν αὐτῇ εὕρηται κύβου.

Ἔστω β': ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ τετράεδρον ἐγγεγραμμένον, καὶ ζητηθήτω τὸ αὐτοῦ στερεόν. Εὑρεθήτω δὴ α': κατὰ τὰ εἰρημένα τὸ στερεὸν τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύβου, καὶ εἰλήφθω τούτου τὸ γ': καὶ τοῦτο ἔσται τὸ ζητούμενον. κατὰ γὰρ τὴν ιβ': τοῦ α': τοῦ παρ: τὸ τοῦ κύβου στερεὸν τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ τετραέδρου τριπλάσιόν ἐστιν.

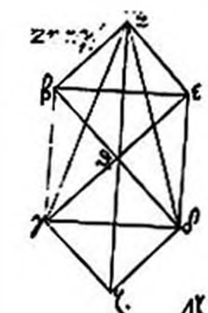
Ἄλλως. Τμηθήτω ἡ τῆς σφαίρας δοθεῖσα διάμετρος εἰς τρία ἴσα, καὶ εἰλήφθωσαν τὰ δύο τρίτα αὐτῆς μέρη· εἶτα πολλαπλασιασθήτω ἡ ὅλη ἡμιδιάμετρος ἐφ' ἑαυτήν, καὶ τμηθήτω τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον εἰς τρία. ἀφαιρουμένου δὲ ἀπ' αὐτοῦ ἑνὸς τρίτου, εὑρεθήτω τοῦ λοιποῦ ἡ τετραγώνου ῥίζα, καὶ γινέσθω ὡς ὁ 4, πρὸς τὸν 3, οὕτω τὸ τετράγωνον τῆς εὑρεθείσης ταύτης τετραγώνου ῥίζης πρὸς ἄλλο τι, ἐφ' ὃ καὶ πολλαπλασιασθήτω ἡ ἡμίσεια τῆς εὑρεθείσης ῥίζης, τὸ δὲ γενόμενον αὖθις πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸ γ': μέρος τῶν εἰλημμένων δύο τρίτων τῆς δοθείσης διαμέτρου, καὶ ἔσται τὸ ζητούμενον. πᾶσα γὰρ πυραμὶς κατὰ τὸ λῆμμα τὸ γ': τῆς παρούσης προτάσεως συνίσταται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῆς οἰκείας βάσεως ἐπὶ τὸ γ': μέρος τοῦ ὕψους. Ὅτι δὲ κἀνταῦθα τοῦτο γίνεται, δῆλον. δοθείσης γὰρ τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας, καὶ εἰς τρία διαιρεθείσης, λαμβάνεται τὰ δύο αὐτῆς τρίτα μέρη, ὅτι ἐγνωσμένον δεῖ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ τετραέδρου. πολλαπλασιαζομένης δὲ τῆς δοθείσης διαμέτρου ἐφ' ἑαυτήν, καὶ εὑρισκομένης τῆς τετραγώνου ῥίζης τῶν δύο τρίτων τοῦ ἀπ' αὐτῆς τετραγώνου, γινώσκεται καὶ ἡ τοῦ τετραέδρου πλευρά. κατὰ γὰρ τὴν γ': τοῦ α': τοῦ παρόντος ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιόλιός ἐστι τῆς πλευρᾶς τῆς ἐν αὐτῇ πυραμίδος, γνωσθείσης δὲ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραέδρου, καὶ μεθόδου γενομένης τῶν τριῶν, ὥστε εἶναι ὡς ὁ 4, πρὸς τὸν 3, οὕτω τὸ τετράγωνον τῆς τοῦ τετραέδρου πλευρᾶς πρὸς ἄλλο τι, γινώσκεται καὶ ἡ κάθετος ἡ ἀπὸ μιᾶς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, τῆς τοῦ τετραέδρου δηλ: βάσεως, ἐπὶ τὴν ἀπεναντίον τοῦ αὐτοῦ τριγώνου πίπτουσα πλευρὰν κατὰ τὴν ι': τοῦ δ': τοῦ παρόντος. πολ-

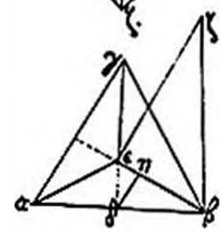
λα-

λαπλασιαζομένης δὲ τῆς ἡμισείας τῆς τοῦ τετραέδρου πλευρᾶς ἐπὶ τὴν εὑρεθεῖσαν κάθετον, γινώσκεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς τοῦ τετραέδρου βάσεως κατὰ τὴν β′: τοῦ παρόντος, ταύτης δὲ πολλαπλασιαζομένης ἐπὶ τὸ γ′: τοῦ ὕψους τοῦ τετραέδρου, γινώσκεται τὸ στερεὸν τοῦ αὐτοῦ τετραέδρου. ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ζητηθήτω γ′: τὸ στερεὸν τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ ὀκταέδρου, ἧς ἡ διάμετρος δέδοται. Πολλαπλασιαθήτω δὴ τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου τῆς δοθείσης διαμέτρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ γ′: μέρος τῆς αὐτῆς διαμέτρου, καὶ τὸ γινόμενον, ἔσται τὸ ζητούμενον. Ἔστω γὰρ ὀκτάεδρον τὸ αβγδεζ, διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας, ἣ τὸ δοθὲν περιλαμβάνεται ὀκτάεδρον, ἡ γε. Ἐπεὶ δὲ τὸ τῆς γε, τετράγ: ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν γβ, βε, κατὰ τὴν μζ′: τοῦ α′: τῶν Στοιχειωτῶν, δῆλον, ὅτι τὸ αὐτὸ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς βγ, μόνου, ἤτοι τοῦ βγδε. ἐγνωσμένης δὲ τῆς γε, γινώσκεται καὶ τὸ ταύτης τετράγωνον, τούτου δὲ εἰς δύο ἴσα τεμνομένου, γινώσκεται καὶ τὸ βγδε. ἀλλ᾽ ἐὰν τοῦτο ἐπὶ τὸ γ′: τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς σφαίρας πολλαπλασιασθῇ, γενήσεται ἡ αβγδε, ἢ ἡ ζδεβγ, πυραμίς· ἄρα ἐὰν τὸ βγδε, τετράγωνον τὸ ἥμισυ δηλ: τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ γ′: μέρος τῆς δοθείσης διαμέτρου πολλαπλασιασθῇ, γενήσεταί τι σῶμα ἴσον ταῖς δυσὶ ταύταις πυραμίσι αβγδε, ζδεβγ, ἤτοι τῷ αβγδεζ, ὀκταέδρῳ.

Geom. Sol. Lib. 3 Fig. 7.





Ζητηθήτω δ′: τὸ στερεὸν τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ εἰκοσαέδρου. Εὑρεθήτω δὴ α′: ἥτε πλευρὰ καὶ ἐπιφάνεια τοῦ εἰκοσαέδρου κατὰ τὰς ἀνωτέρω, εἶτα ζητηθήτω ἐν τοῖς πίναξι τῶν ἡμιτόνων, ἀποτομένων τε καὶ τεμνουσῶν ἡ τέμνουσα μοίρας 30, καὶ τὸ ἀπ᾽ αὐτῆς τετράγωνον ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς δοθείσης ἡμιδιαμέτρου τῆς σφαίρας, τοῦ δὲ ὑπολειφθέντος εὑρεθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα, καὶ ταύτης ληφθήτω τὸ γ′: μέρος, καὶ ἐπὶ τοῦτο πολλαπλασιασθήτω ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνεια, καὶ τὸ γενόμενον ἔσται τὸ ζητούμενον. Ἔστω γὰρ πλευρὰ εἰκοσαέδρου ἡ αβ, καὶ συνεστάθω ἐπ᾽ αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ αβγ, οὗ κέντρον τὸ ε, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ αε, βε, γε, καὶ ἀνεστάθω κάθετος ἐπὶ τοῦ αβγ, πρὸς τῷ ε, σημείῳ ἡ εζ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ βζ, ἴση οὖσα τῇ δοθείσῃ τῆς σφαίρας ἡμιδιαμέτρῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ζε, ὀρθή ἐστι

πρὸς

πρὸς τὸ τοῦ α β γ, τριγώνου ἐπίπεδον, ὀρθὴ πάντως ἐστὶ καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ β ε ζ, γωνία. ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ζ β, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ συναμφοτέροις τοῖς ἀπὸ τῶν β ε, ε ζ, τετραγώνοις κατὰ τὴν μζ΄: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ. Αὖθις ἐπεὶ τὸ α β γ, ἰσόπλευρόν ἐστι, πάντως γε καὶ ἰσογώνιον· ὥστε ἑκάστη τῶν αὐτοῦ γωνιῶν μοιρ: 60: αἱ τρεῖς γὰρ ὁμοῦ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἡ ὑπὸ α β γ, ἄρα γωνία μοιρ: ἐστι ξ΄: , τέμνεται δὲ δίχα τῇ β ε, εὐθείᾳ, ὡς δειχθήσεται μετὰ, ἄρα ἡ ὑπὸ δ β ε, μοιρ: ἐστι 30· ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ γ ε, ἐκβαλλομένη πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἐπὶ τῆς α β, διὰ τὸ δίχα αὐτὴν τέμνειν, δῆλον, ὅτι τοῦ δ β ε, τριγώνου ἡ μὲν β δ, πλευρὰ ὁλικόν ἐστιν ἡμίτονον, ἡ δὲ δ ε, ἀπτομένη, καὶ ἡ β ε, τέμνουσα, εὑρεθήσεται ἄρα ἡ β ε, ἐν τοῖς πίναξι τῶν ἡμιτόνων, ἀπτομένων, καὶ τεμνουσῶν, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς β ζ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν β ε, ε ζ, ὡς δέδεικται, ἄρα ἐὰν τὸ ἀπὸ τῆς β ε, τετράγωνον ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς β ζ, ἐγκαταλειφθήσεται τὸ ἀπὸ τῆς ε ζ, τετράγωνον. τούτου δὲ τῆς τετραγώνου εὑρεθείσης ῥίζης, γνωσθήσεται ἡ ε ζ. Ἐπεὶ δὲ τὸ εἰκοσάεδρον διαιρεῖται εἰς πυραμίδας ἴσας εἴκοσι, ὧν κοινὴ κορυφὴ τὸ τῆς σφαίρας κέντρον, ἡ ε ζ, δήπουθεν ὕψος κοινόν ἐστι τῶν αὐτῶν πυραμίδων, ἀλλ' ἑκάστης πυραμίδος τὸ στερεὸν εὑρίσκεται, ἐὰν ἡ βάσις αὐτῆς ἐπὶ τὸ γ΄: μέρος τοῦ ὕψους πολλαπλασιασθῇ κατὰ τὸ εἰρημένον γ΄: λῆμμα τῆς παρούσης, πολλαπλασιαζομένης ἄρα ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπὶ τὸ γ΄: τῆς ε ζ, εὑρεθήσεται τὸ αὐτοῦ στερεόν.

Ὅτι δὲ ἡ α γ, δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνεται ὑπὸ τῆς β ε, ἐκβαλλομένης, ὥσπερ καὶ ἡ α β, ὑπὸ τῆς γ ε, δῆλον. τὸ γὰρ ε, κέντρον τοῦ α β γ, ἰσοπλεύρου τριγώνου, κέντρον ἐστὶ καὶ τοῦ περὶ αὐτὸ κύκλου. ὥστε αἱ ε α, ε β, ε γ, εὐθεῖαι ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ ἴσαι ἔτι καὶ αἱ α β, β γ, γ α, ἄρα τὰ α ε β, β ε γ, γ ε α, τρίγωνα ἰσόπλευρά ἐστι καὶ ἰσογώνια, ἀλλὰ καὶ ἰσοσκελῆ, αἱ ἓξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ε α β, ε β α, ε β γ, ε γ β, ε γ α, ε α γ, ἴσαι εἰσίν. ἐξαγομένων ἄρα τῶν α ε, β ε, γ ε, διαιρεθήσονται αἱ α β, β γ, γ α, δίχα· καὶ ἐπεὶ ἑκάστη τῶν α ε, β ε, διὰ τοῦ κέντρου διέρχεται, πάντως γε κατὰ τὴν γ΄: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ ἡ α β, πρὸς ὀρθὰς τέμνεται ὑπὸ τῆς γ ε, ἐκβαλλομένης, ὥσπερ καὶ αἱ λοιπαὶ δύο ὑπὸ τῶν λοιπῶν δύο.

Ἰστέον δ' ὅτι ἡ β ζ, ἡμιδιάμετρος ὀφείλει εἶναι δεδομένη κατὰ τὴν τῶν ἡμιτόνων, ἀπτομένων καὶ τεμνουσῶν διαίρεσιν, τουτέστι περιεκτικὴν εἶναι τοσούτων μορίων, οἵων οἱ β ε, ἀντὶ ἡμιδιαμέτρου λαμβανομένη. ἔσται γὰρ οὕτως ἡ μὲν α β, ἀπτομένη τῆς ὑπὸ ε β ζ, γωνίας, ἡ δὲ β ζ, τέμνουσα.

Ζητείσθω ε: τὸ τοῦ δωδεκαέδρου στερεόν. Εὑρεθήτω δὴ κατὰ τὴν ἀνωτέρω τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου στερεόν. εἶτα γενέσθω ὡς ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ κύ-

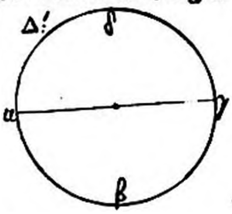
κύβου, ὅπω τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου στερεὸν πρὸς ἄλλο τι. καὶ τοῦτο ἔσται τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου κατὰ τὴν δ': τοῦ ιδ': τοῦ Στοιχειωτοῦ.

Πρότασις Δ':

Διαμέτρου σφαίρας δοθείσης τὸ στερεὸν αὐτῆς εὑρεῖν.

Ἔστω τυχοῦσα σφαῖρα ἡ α β γ δ, ἧς διάμετρος ἡ α γ, δεδομένη, καὶ ζητηθήτω τὸ ταύτης στερεόν. Εὑρεθήτω δὴ α': τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγίστου αὐτῆς κύκλου, καὶ πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὴν διάμετρον τῆς αὐτῆς σφαίρας, τοῦ δὲ γενομένου ἀφῃρήσθω τὸ ἓν τρίτον, καὶ τὸ ἐναπολειπόμενον ἴσον ἔσται τῷ τῆς δοθείσης σφαίρας στερεῷ. τὸ γὰρ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ μεγίστου τῆς σφαίρας κύκλου ἐπὶ τὴν αὐτῆς διάμετρον ἴσον ἐστὶ τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ τὴν σφαῖραν κυλίνδρῳ, ὁ δὲ περὶ τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένος κύλινδρος ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας κατὰ τὴν μ α': τοῦ α': τοῦ παρόντος, ἄρα ἐὰν τὸ γ': ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου, ἐναπολείπεται τὸ τῆς σφαίρας στερεόν.

Geom.Sol. Lib. 2. Fig.8.



Ἄλλως. Πολλαπλασιασθήτω ὁ μέγιστος τῆς δοθείσης σφαίρας κύκλος ἐπὶ τὰ δύο τρίτα τῆς διαμέτρου αὐτῆς, καὶ τὸ γενόμενον ἴσον ἔσται τῷ τῆς σφαίρας στερεῷ. κατὰ γὰρ τὸ β': πόρισμα τῆς αὐτῆς προτάσεως, ἡ σφαῖρα ἴση ἐστὶ κυλίνδρῳ, οὗ βάσις ὁ μέγιστος τῆς σφαίρας κύκλος, καὶ ὕψος δύο τρίτα τῆς διαμέτρου τῆς αὐτῆς σφαίρας.

Ἄλλος. Τετραπλασιασθήτω ὁ μέγιστος τῆς σφαίρας κύκλος, καὶ τὸ γενόμενον πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸ γ': τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς αὐτῆς σφαίρας, καὶ ἔσται τὸ ζητούμενον. κατὰ γὰρ τὸ α': πόρισμα τῆς ῥηθείσης προτάσεως ἡ σφαῖρα ἴση ἐστὶ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν κύκλος τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου τῆς σφαίρας κύκλου, ὕψος δὲ ἡ τῆς σφαίρας ἡμιδιάμετρος, τὸ δὲ τοῦ κώνου στερεὸν εὑρίσκεται, ἐὰν ἡ αὐτοῦ βάσις ἐπὶ τὸ γ': μέρος πολλαπλασιασθῇ τοῦ ἰδίου ὕψους, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς εἰρήσεται.

Τέλος τοῦ δευτέρου τῶν στερεῶν τῆς Γεωμετρίας.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

ΠΕΡΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

ΟΡΟΙ.

Α': Πρᾶξις Γεωμετρικὴ, ἐστὶ μέθοδος ἀποδεικτικὴ πρὸς εὕρεσιν μήκους, πλάτους, καὶ βάθους δι' ὀργάνων Γεωμετρικῶν συμβάλλουσα.

Β': Τὰ τῆς Γεωμετρικῆς πράξεως μέρη ἕξ εἰσι, Μηκομετρία, Ἐπιπεδομετρία, Γεωδαισία, Εἰκονογραφία, Στερεομετρία, καὶ Κοιλομετρία.

Γ': Μηκομετρία ἐστὶν εὕρεσις τοῦ δοθέντος ὡρισμένου μήκους, ἢ γεωμετρικῷ τινι ἁπλῷ μέτρῳ μετρητὸν γίνεται. ταύτης δὲ δύο τὰ μέρη Μηκομετρία, καὶ ὑψομετρία, ἐν ᾗ καὶ ἡ τοῦ βάθους διαμέτρησις.

Δ': Ἐπιπεδομετρία ἐστὶν εὕρεσις ἐμβαδῶν τῶν ἐπιπέδων σχημάτων, ἢ καὶ ταῦτα Γεωμετρικῷ τινι συνθέτῳ μέτρῳ μετρητὰ γίνεται.

Ε': Γεωδαισία ἐστὶ διανομὴ ἐπιπέδων κατὰ τὸν δοθέντα λόγον.

ς': Εἰκονογραφία, καταγραφή ἐστιν ἐπὶ χάρτου, ἢ ἄλλου τινὸς εὐκατεργάστου σώματος, τῶν ἐπιπέδων. ταύτης δὲ δύο τὰ μέρη, Ἰχνογραφία, καὶ Χωρογραφία. Χωρογραφία δὲ, ἥτις καὶ Τοπογραφία λέγεται, Καταγραφή ἐστι χωρίων ἐν διαφόροις τόποις κειμένων, λειμῶνος φέρ' εἰπεῖν, κήπου, ἄστεος, καὶ ἄλλων ὁμοίων.

Ζ': Στερεομετρία ἐστὶν εὕρεσις τῶν στερεῶν σωμάτων, ἢ γεωμετρικῷ τινὶ καταλλήλῳ μέτρῳ μετρητὰ γίνεται.

Η': Κοιλομετρία ἐστὶν εὕρεσις τῆς κοιλότητος τῶν καμπυλοειδῶν, καὶ καμπυλεπιπέδων στερεῶν σωμάτων, ἢ χωρητικά εἰσιν ὑγρῶν, καὶ ἄλλων τινῶν σωμάτων.

Θ': Μέτρον Γεωμετρικὸν ἐστὶ συνεχὴς ποσότης ὡρισμένη, ᾗτινι γραμμαὶ, ἐπιφάνειαι καὶ σώματα καταμετρεῖται. ἢ μέγεθος ὡρισμένον, δι' οὗ ἐγνωσμένου, τὸ ἄγνωστον θηρεύεται.

Ι': Τὰ Γεωμετρικὰ μέτρα πολλά εἰσι καὶ διάφορα ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος ἐπὶ τὸ

μεῖ-

μεῖζον χωρῦντα, ἐν χρήσει δὲ μᾶλλον ταῦτα, Δάκτυλος, Παλαιστὴς, πῦς, Βῆμα, Στάδιον, Μίλιον, καὶ Λεύκη ἢ Λεύγα. παρὰ ταῦτα δὲ εἰσιν, ἡ Οὐγγία, ἡ Διχὰς, ἡ Σπιθαμὴ, ὁ Πῆχυς, ἡ Ὀργυιὰ, ὁ Κάλαμος καὶ ἄλλα.

ΙΑ': Δάκτυλος ἐςὶ τὸ ἐκ τεσσάρων κόκκων κριθῆς συγκείμενον, κατὰ πλάτος παρατιθεμένων.

ΙΒ': Παλαιστὴς δὲ τὸ ἐκ τεσσάρων μὲν Δακτύλων συγκείμενον, κόκκων δὲ κριθῆς ἑκκαίδεκα.

ΙΓ': Πῦς δὲ τὸ ἐκ τεσσάρων μὲν παλαιςῶν, ἑκκαίδεκα δὲ δακτύλων συγκείμενον.

ΙΔ': Βῆμα δὲ τὸ ἐκ ποδῶν μὲν πέντε συγκείμενον, παλαιςῶν δὲ εἴκοσι, καὶ δακτύλων ὀγδοήκοντα.

ΙΕ': Στάδιον δὲ τὸ ἐκ βημάτων μὲν πέντε καὶ εἴκοσι πρὸς τοῖς ἑκατὸν συγκείμενον, ποδῶν δὲ πέντε καὶ εἴκοσι πρὸς τοῖς ἑξακοσίοις, παλαιςῶν δὲ πεντακοσίων καὶ δύο χιλιάδων, καὶ δακτύλων δέκα χιλιάδων.

Ιϛ': Μίλιον δὲ τὸ ὀκτὼ μὲν περιέχον ςάδια, διὸ καὶ ὀκτωςάδιον ἤκουσε, βήματα δὲ χίλια, πόδας δὲ πεντακοσίους, παλαιςὰς δὲ χιλιάδας εἴκοσι, καὶ δακτύλυς χιλιάδας ὀγδοήκοντα.

ΙΖ': Λεύκη δὲ, ἡ καὶ Λεύγα λέγεται, τὸ περιέχον μίλια μὲν τέσσαρα, ςάδια δὲ δύο καὶ τριάκοντα, βήματα δὲ χιλιάδας τέσσαρας. πόδας δὲ χιλιάδας εἴκοσι, παλαιςὰς δὲ χιλιάδας ὀγδοήκοντα, καὶ δακτύλυς χιλιάδας εἴκοσι πρὸς τοῖς τριακοσίοις. κατ' ἄλλυς δὲ ἡ μὲν κοινὴ Λεύκη περιέχει μίλια τρία, ἡ δὲ Βιλγικὴ δύο.

ΙΗ': Οὐγγία ἐςὶ τὸ περιέχον δακτύλυς τρεῖς.

ΙΘ': Διχὰς δὲ τὸ περιέχον παλαιςὰς μὲν τρεῖς, δακτύλυς δὲ δώδεκα.

Κ': Σπιθαμὴ δὲ τὸ περιέχον παλαιςὰς μὲν τρεῖς, δακτύλυς δὲ δώδεκα.

ΚΑ': Πῆχυς τὸ περιέχον πόδα μὲν ἕνα μετὰ ἡμίσεως, παλαιςὰς δὲ ἕξ, καὶ δακτύλυς τέσσαρας καὶ εἴκοσι.

ΚΒ': Ὀργυιὰ δὲ τὸ περιέχον πόδας μὲν ἕξ, παλαιςὰς δὲ τέσσαρας καὶ εἴκοσι, καὶ δακτύλυς ἓξ καὶ ἐνενήκοντα.

ΚΓ': Κάλαμος δὲ τὸ περιέχον πόδας μὲν δέκα, παλαιςὰς δὲ τεσσαράκοντα καὶ δακτύλυς ἑξήκοντα πρὸς τοῖς ἑκατόν.

ΚΔ': Τὰ Γεωμετρικὰ μέτρα, ἢ ἁπλᾶ εἰσιν, ἢ μικτά.

ΚΕ': Ἁπλᾶ μὲν εἰσι τὰ κατὰ μῆκος μόνον θεωρούμενα, καὶ οἷς μόνα τὰ μήκη καταμετρῦνται.

Κϛ': Μικτὰ δὲ τὰ κατά τε μῆκος καὶ πλάτος θεωρούμενα, οἷά εἰσι τὰ Τετράγωνα, οἷς αἱ ἐπιφάνειαι καταμετρῦνται. καὶ τὰ κατὰ τὰς τρεῖς διαςάσεις λαμβανόμενα, οἷά εἰσιν οἱ Κύβοι, δι' ὧν τὰ ςερεὰ γινώσκεται.

προσαγορεύεται δὲ τά τε ἁπλᾶ καὶ μικτὰ τοῖς αὐτοῖς ὀνόμασι κατὰ τὸ ὡρισμένον μέτρον. Ποῦς γὰρ καὶ τὸ κατὰ μῆκος θεωρούμενον λέγεται, ἡνίκα τὸ τοῦ ποδὸς φέρει μέγεθος. Ποῦς δ' ἔτι καὶ τὸ κατὰ τὰς δύο, ἢ καὶ τὰς τρεῖς λαμβανόμενον διαστάσεις, πλὴν ἐκεῖνο μὲν ἁπλῶς, ταῦτα δὲ μετὰ προσθήκης. οἷον Ποῦς τετράγωνος, ἢ Ποῦς κυβικός. ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

ΕΖ': Ὄργανον Γεωμετρικὸν ἐστὶ διάγραμμα ἐπί τινος στερεοῦ σώματος, ξύλου φημὶ, ὀρειχάλκου, ἢ ἄλλης τινὸς ὕλης εὐκατεργάστου, κατά τινα ἀναλογίαν εὐφυῶς κατεσκευασμένον, ᾧ τινι οἱ τῶν Γεωμετρῶν παῖδες τὰς διαστάσεις, τὴν αὐτῶν ποσότητα γεωμετρικῷ τινι παρισαζομένην μέτρῳ ἀναλόγως τοῖς ἐν τῷ ὀργάνῳ διδομένοις μέρεσι θηρεύονται.

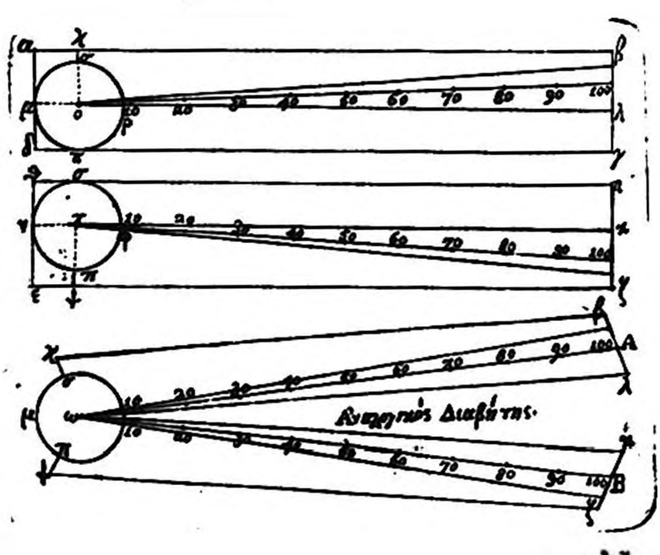
ΚΗ': Τὰ Γεωμετρικὰ ὄργανα πολυειδῆ εἰσι καὶ δυσχερῆ τὴν αὐτῶν κατασκευὴν ἔχοντα, εὐχρηστότερα δὲ ταῦτα, ὁ Ἀναλογικὸς Διαβήτης, ὃς καὶ ὄργανον τῶν μερῶν λέγεται, ἡ Κλίμαξ, Τὸ Τεταρτημόριον τῶν ἀναλογιῶν, τὸ Ἡμικύκλιον, ὁ Γνώμων, ὁ Γεωμετρικὸς Σταυρός, ἡ Μαγνητικὴ Πυξίς, τὸ Γεωμετρικὸν Τετράγωνον, καὶ ἄλλα. γνωσθήσεται δ' ἕκαστον ὁποῖον μέν ἐστιν ἐν τῇ ἑρμηνείᾳ τῆς αὐτοῦ κατασκευῆς, τίσι δὲ χρησιμεύει, ἐν τῇ τῆς χρήσεως διδασκαλίᾳ.

Πρότασις Α':

Τοῦ μήκους δοθέντος στερεοῦ τινος σώματος, Ἀναλογικὸν κατασκευάσαι Διαβήτην.

Θαυμασιώτατόν ἐστι τὸ ὄργανον τοῦτο, καὶ πολλοῖς ἐς τὰ μάλιστα χρησιμεῦον, διὸ καὶ ἡ κατασκευὴ αὐτοῦ δυσχερεστάτη τε ἅμα, καὶ πολυειδής, καὶ ἂν Θεὸς διδῷ ἐν τῇ ἑρμηνείᾳ τῆς περὶ αὐτοῦ καθ' αὐτὸ πραγματείας ἀκριβέστερον τὰ πρὸς κατασκευὴν αὐτοῦ καὶ χρῆσιν ἀνήκοντα ῥηθήσεται, ἐνταῦθα δὲ μόνον καθὸ πρὸς Γεωμετρικὰς συμβάλλεται πράξεις, ἡ περὶ τῆς

Geom. Pr. Lib. 3. Fig. 1.



αὐτοῦ

αὐτοῦ κατασκευῆς, ἔτι δὲ καὶ χρήσεως γενήσεται ἑρμηνεία. Παρασκευασθήτωσαν δὲ ἐξ ὀρειχάλκου, ἢ ξύλου, ἢ ἄλλης τινὸς ὕλης στερεᾶς καὶ εὐκατεργάστου δύο κανόνες ἐπιμήκεις, ἴσοι τε καὶ ἰσοπαχεῖς, κατὰ τὸ δοθὲν μῆκος, σχῆμα φέροντες ἑκάτερος παραλληλογράμμου ἑτερομήκους, οἷοι οἱ α β γ δ, ε ζ η θ· εἶτα ληφθήτωσαν τὰ β λ, ζ κ, διαστήματα ἴσα, καὶ τοῦτο ἔσται τὸ τοῦ ὀργάνου πλάτος. διὸ ἔξεστί σοι ὅσον περ αὖ σοι ἀρεστὸν, τοσοῦτον ποιῆσαι· καὶ διὰ μὲν τοῦ λ, παραλλήλως τῇ α β, ἤχθω ἡ λ μ, διὰ δὲ τοῦ κ, παραλλήλως τῇ ε ζ, ἤχθω ἡ κ ν· καὶ ἐπὶ μὲν τοῦ α β γ δ, κανόνος κέντρῳ μὲν τῷ ο, διαστήματι δὲ τῷ ο μ, γραφήτω κύκλος ὁ μ π ρ σ, ἐπὶ δὲ τοῦ ε ζ η θ, κέντρῳ μὲν τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ τ ν, ἴσῳ τῷ ο μ, γραφήτω κύκλος ὁ ν σ φ π· καὶ διὰ μὲν τοῦ ο, ἤχθω παράλληλος τῇ α μ, ἡ ο χ, διὰ δὲ τοῦ τ, παράλληλος τῇ ν ε, ἡ τ ψ. τούτων κατεσκευασμένων, ἀπὸ μὲν τοῦ α β γ δ, κανόνος ἀφαιρεθήτωσαν ἀκριβῶς τὰ α μ σ χ, μ δ π, π ρ λ γ, μέρη, καὶ ἀποβαλλέσθωσαν δίκην ἀχρήστων. Ἐναπολειφθήτω δὲ μόνον τὸ χ σ μ π ρ λ β, σχῆμα, ἀπὸ δὲ τοῦ ε ζ η θ, ἀφαιρεθήτωσαν ὁμοίως τὰ ε ν π ψ, ν θ σ, σ φ κ η, καὶ ἐναπολειφθήτω μόνον τὸ ψ π ν φ σ κ ζ. εἶτα συνδεθήτωσαν ταῦτα ἀλλήλοις ἥλῳ τινὶ στρογγύλῳ, ὥστε περὶ αὐτὸν ὁμαλῶς ὡς περὶ ἴδιον ἄμφω συγκινεῖσθαι ἄξονα, ἐκτεινόμενα καὶ συστελλόμενα, ὡς ἂν ἡ χρεία ἀπαιτῇ. Δεῖ δὲ εὐφυῶς οὕτω, καὶ ἐπιδεξίως κατασκευάζεσθαι, ὥστε τὸν κύκλον τοῦ ἑτέρου μὲν τῶν δύο τούτων μερῶν τοῦ ὀργάνου, δὸς εἰπεῖν τοῦ χ σ μ π ρ λ β, διπλοῦν εἶναι, κατὰ μέσον δηλ: τῆς αὐτοῦ σχιζόμενον παχύτητος, τοῦ δὲ ἑτέρου μονομερῆ ἑκατέρωθεν ἐπίσης ἐξεσμένον καὶ κατὰ τὴν αὐτοῦ ἐλαττούμενον παχύτητα, ἵνα ἐν τῇ διὰ τοῦ ἥλου συναφῇ τὸν τοῦ μονομεροῦς κύκλου εἰσβαλλόμενον ἐν τῷ τοῦ διμεροῦς, ταύτῃ ἐφαρμόττεσθαι, καὶ ὡς οὕτως εἰπεῖν ἕνα ἀποτελεῖσθαι κύκλον. Κἀπειδάν τις χρεία τῷ ὀργάνῳ ἀντὶ κανόνος χρῆσθαι, δύνασθαι οὕτω τὰ κ, καὶ λ, πόῤῥω ἀλλήλων ἀφίστασθαι, ὥστε τὰς σ χ, καὶ π ψ, γραμμὰς ἀλλήλαις συμπίπτειν, καὶ τὴν μὲν χ β, ἐπ' εὐθείας εἶναι, ἀκριβέστατα τῇ ψ ζ, τὴν δὲ μ λ, τῇ ν κ συμπιπτόντων δ' ἀλλήλοις τῶν λ κ, σημείων, συμπίπτειν ἀλλήλοις καὶ τὰς μ λ, ν κ, ὥστε μίαν ἀποτελεῖν εὐθεῖαν, κατὰ μέσον δὲ τοῦ ἥλου, τοῦ συνδέοντος τὰ τοῦ ὀργάνου μέρη ὀφείλει εἶναι τὸ κέντρον, ὡς τὸ ω, σημεῖον, ἀφ' οὗ ἐξαχθήτωσαν ἐν ταῖς ἐπιφανείαις τῶν τοῦ ὀργάνου μερῶν δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ὡς αἱ ω Λ, ω Β, ἐξίσου ἀφιστάμεναι, ἡ μὲν τοῦ λ, ἡ δὲ τοῦ κ, καὶ διαιρεθήτω ἑκατέρα εἰς ὅσα βούλει μέρη ἴσα ἀλλήλοις, φέρ' εἰπεῖν ἑκατὸν, ἢ διακόσια ἢ καὶ πλείω. Καὶ τοιαύτη μὲν ἡ τοῦ ὀργάνου τούτου κατασκευὴ, ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος. Ἡ χρῆσις δὲ αὐτοῦ ἐν τοῖς ἑξῆς δηλωθήσεται. Ἐὰν δὲ ἐπὶ τῶν τριῶν σημείων Λ, Θ, ω, πηγμάτια, εἴτουν διόπτραι στηρίχθωσι, πολυχρηστότερόν σοι ἔσται τὸ ὄργανον.

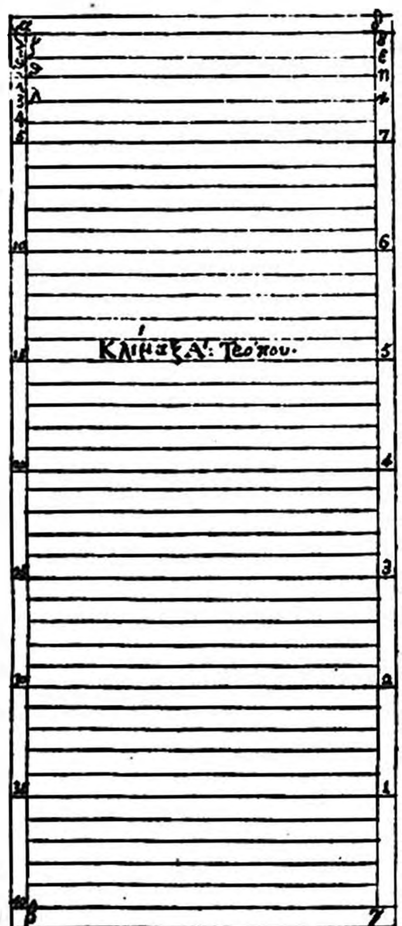
Προ-

Πρότασις Β΄:

Μήκους καὶ πλάτους δοθέντος, Κλίμακα κατασκευάσαι.

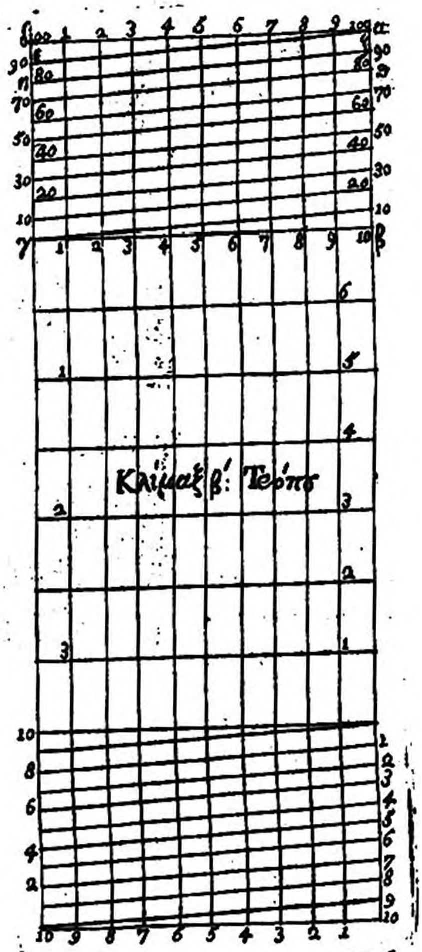
Α΄: Τρόπος. Ἔστω μῆκος ἡ αβ, γραμμὴ, πλάτος δὲ ἡ αδ, καὶ ζητείσθω κατασκευασθῆναι ὄργανον Γεωμετρικὸν, ὃ καλεῖται Κλίμαξ. Ἐπί τινος τοίνυν σανίδος οὑτωσὶ ἐξειργασμένης, ὥστε τὴν αὐτῆς ἐπιφάνειαν ἀκριβῶς ἐπίπεδον εἶναι. ἢ γοῦν ἐπὶ πετάλου τινὸς ὁμοίως παρεσκευασμένου ἐξ ὀρειχάλκου ἢ ἄλλης τινὸς ὕλης στερεᾶς, γραφήτω ἡ αβ, εὐθεῖα ἴση τῷ δοθέντι μήκει, πρὸς δὲ τῷ α, αὐτῆς σημείῳ συσταθήτω κάθετος ἡ αδ, ἴση τῷ δοθέντι πλάτει, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ αγ, παραλληλόγραμμον. ὅσῳ δ' αὖ μᾶλλον ἐπιμηκέστεραι ὦσιν αἱ αβ, δγ, εὐθεῖαι, καὶ ὅσῳ μᾶλλον ἀλλήλων ἀφίστανται, τοσούτῳ καὶ τὸ ὄργανον εὐχρηστότερόν σοι ἔσται. Διαιρεθείσης δὲ ἑκατέρας τῶν αβ, δγ, εἰς ἴσα μέρη μοναδικὰ ἢ δεκαδικὰ, ὡς εἰπεῖν δέκα, ἢ εἴκοσι, ἢ τριάκοντα, ἢ ὅσα αὖ σοι ἀρεστὸν, ἀχθήτωσαν διὰ τῶν καταλλήλων σημείων τῶν τομῶν εὐθεῖαι παράλληλοι, ὡς εζ, ηθ, κλ, καὶ λοιπαὶ, καὶ κατασκευασθήσεταί σοι ὄργανον τὸ καλούμενον Παραλληλόγραμμον, ἢ Κλίμαξ, πρὸς διαίρεσιν εὐθειῶν, ὡς ὀψόμεθα, συμβάλλουσα τὴν εἰς ἴσα γενομένην. ἄλλως.

Geom. Pr. Lib. 3. Fig. 2.



Β΄: τρόπος. Γραφήτωσαν δὴ ὡς προειρημένως αἱ αβ, δγ, παράλληλοι εὐθεῖαι, καὶ διαιρεθήτωσαν εἰς ἴσα μέρη δεκαδικὰ, φέρ' εἰπεῖν δέκα, ὥστε ἑκατέραν εἶναι δυνάμει διῃρημένην εἰς μέρη ἑκατὸν, ἢ γοῦν μοναδικὰ, ὥστε καὶ ἐνεργείᾳ εἰς δέκα εἶναι ἄμφω διῃρημένας μέρη. Εἶτα ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, βγ, εὐθεῖαι συνδέουσαι τὰς αβ, γδ, καὶ συμπληροῦσαι τὸ αγ, παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον· διαιρεθεισῶν δὲ ὁμοίως εἰς μέρη ἴσα δέκα, καὶ τῶν αδ, βγ, ἀχθήτωσαν διὰ τῶν καταλλήλων σημείων τῶν τομῶν εὐθεῖαι, καὶ ἔσονται πάντως παράλληλοι ἀλλήλαις τε καὶ ταῖς αβ, γδ· εἶτα παρεωραμένου ἐπὶ μὲν τῆς αβ, τοῦ α: μέρους, ἐπὶ δὲ τῆς γδ, τοῦ ἐσχάτου τῶν καὶ διαμέτρον διαγωνίως ἀντικειμένων, ἀχθήτωσαν διὰ τῶν λοιπῶν σημείων εὐθεῖαι ἀλλήλαις μόνον παράλληλοι, ὡς αἱ αε, ζη, θκ, καὶ λοιπαί, καὶ κατασκευασθήσεταί σοι καὶ οὕτω Κλίμαξ θαυμάσιος πρὸς λῆψιν οἱουδήποτε μέρους, ὡς καὶ τοῦτο ἐν τοῖς ἑξῆς δηλωθήσεται. Εἰδὲ τὰς αβ, γδ, διπλασιάσῃς, τριπλασιάσῃς, ἢ κατ᾽ ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν αὐξήσῃς, πολυχρηστότερόν σοι ἔσται τὸ ὄργανον.

Geom: Pr. lib. 3. Fig. 3.



Πρότασις Γ΄:

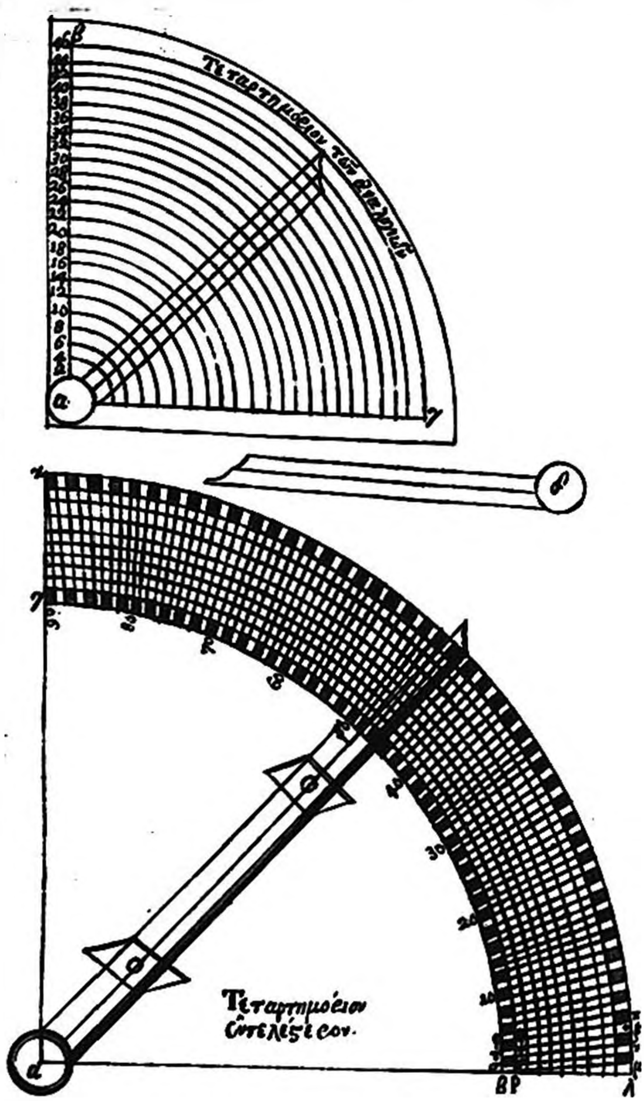
Ἡμιδιαμέτρου δοθείσης, Τεταρτημόριον κατασκευάσαι.

Ἔστω ἡμιδιάμετρος ἡ αβ, καὶ ζητηθήτω κατασκευασθῆναι Τεταρτημόριον, Γραφήτω δὴ ἡ αβ, ἢ ἄλλη τις γραμμὴ ἴση τῇ αβ, ἐπί τινος ἐπιπέδου ὕλης στερεᾶς καὶ εὐκατεργάστου. ὅσῳ δ᾽ αὖ ἡ αβ, ἐπιμηκεστέρα εἴη, τοσούτῳ δὴ καὶ τὸ ὄργανον ἐντελέστερον ἔσται. ἀπὸ δὲ τοῦ α, σημείου ἀνεστάσθω ἐπ᾽ αὐτῆς κάθετος ἡ αγ, ἴση τῇ αβ· εἶτα κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αβ, ἢ αγ, γραφήτω τὸ βγ, τεταρτημόριον, καὶ διαιρεθήτω ἡ αβ, εἰς ὅσα βούλει ἴσα ἀλλήλοις μέρη, φέρ᾽ εἰπεῖν ρ, σ, φ. δι᾽ ἑκάστου δὲ σημείου ἀπὸ

τῶ

τοῦ α, κέντρου γραφήτωσαν τόξα, ταὐτὸν δ' ἐστὶν εἰπεῖν τεταρτημόρια ἰσοπληθῆ τοῖς τῆς αβ, μέρεσι. παρασκευασθήτω δὲ καὶ κανών, ἤτοι δρομεὺς ἴσος τῇ αβ, ὁ δε, καὶ συνδεθήτω τὸ δ, αὐτοῦ πέρας πρὸς τῷ α, κέντρῳ ἥλῳ τινί, ὥστε τὴν δε, συμπίπτειν τῇ αβ, πλευρᾷ τοῦ αβγ, τεταρτημορίου, καὶ δύνασθαι τὸν δε, δρομέα ὁμαλῶς φέρεσθαι ἀπὸ τοῦ β, ἐπὶ τὸ γ, περὶ τὸ δ, κινούμενος κέντρον, καὶ συμπίπτειν αὖθις τὴν δε, τῇ αγ. καὶ οὕτω κατασκευασθήσεταί σοι τὸ καλούμενον Ὄργανον τῶν ἀναλογιῶν, χρησιμεῦον πρὸς διαίρεσιν εὐθειῶν, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς ὀψόμεθα.

Geom: Pr. lib. 3. Fig. 4.



Ἄλλως. Γεγραμμένου τοῦ αβγ, τεταρτημορίου, ὡς προηρμήνευται, διαιρεθήτω τὸ βγ, τόξον εἰς μοίρας ἐνενήκοντα κατὰ τὸ πόρ: τῆς δ': τοῦ β': βιβλίου τοῦ πρώτου μέρους, καὶ ἀπὸ τοῦ α, κέντρου ἐφ' ἑκάστην μοῖραν ἀχθήτωσαν εὐθεῖαι, καὶ κατασκευασθήσεται ὄργανον πρὸς κατασκευὴν καὶ εὕρεσιν τῶν δοθεισῶν γωνιῶν.

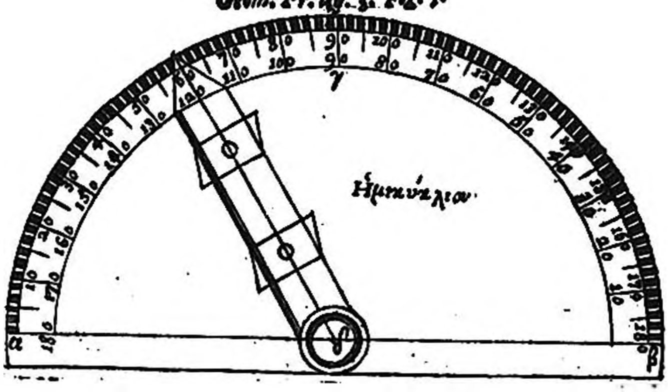
Ἄλ.

Ἄλλως. Τοῦ αβγ, τεταρτημορίου ἀκριβῶς κατεσκευασμένου, καὶ τοῦ βγ, τόξου εἰς μοίρας ἐνενήκοντα διῃρημένου, τοῦ δὲ κανόνος, ὡς προηρμήνευται, ἐφαρμοττομένου, παρασκευασθήτωσαν διόπτραι δύο ἴσαι τε καὶ ὅμοιαι ἀλλήλαις, αἵτινες ὀφείλουσιν ἐπὶ τοῦ κανόνος ἐφίστασθαι κατ' εὐθεῖαν, ὥστε τοῦ ὀφθαλμοῦ ἐπὶ τῆς ὀπῆς τῆς μιᾶς διόπτρας τιθεμένου κατὰ χρείαν διοπτείας, διέρχεσθαι τὴν ὀπτικὴν ἀκτῖνα καὶ διὰ τῆς ὀπῆς τῆς ἑτέρας, καὶ τοῦτο δὴ τὸ ὄργανον χρησιμεύσει ἐπὶ τῶν Γεωμετρικῶν Πράξεων, ὡς καὶ τοῦτο ἐν τοῖς ἑξῆς πιστωθήσεται. Ἕτεροι δὲ ἐπὶ τῆς μιᾶς τοῦ ὀργάνου πλευρᾶς τὰς διόπτρας ἐπιστηρίζουσι, καὶ τότε δὴ τὸ ὄργανον καὶ ἄνευ τοῦ κανόνος τὴν αὐτὴν πληρώσει χρείαν. Εἰ δέ σοι βουλητὸν ἐντελέστερον ἔχειν τὸ ὄργανον, γράψον μείζονι διαστήματι ἀπὸ τοῦ α, κέντρου τὸ κλ, τόξον, καὶ δίελε αὐτὸ ὡς καὶ τὸ βγ, εἰς μοίρας ἐνενήκοντα, τὰς μνξοπ, καὶ λοιπάς. εἶτα ἔξαγε διαγωνίως τὰς ρμ, σν, τξ, καὶ λοιπὰς εὐθείας, καὶ δίελε ἕκαστον τούτων εἰς μέρη ἴσα δέκα. τούτων γὰρ οὕτω διῃρημένων, ἕξεις οὐ μόνον τὰς μοίρας τῶν γωνιῶν, ἀλλά γε καὶ τὸ δέκατον ἑκάστης μοίρας, ἔτι δὲ καὶ δύο δέκατα, καὶ τρία δέκατα καὶ τὰ λοιπά. ὁ γὰρ δρομεὺς διερχόμενος διὰ τοῦ δεκάτου μέρους φέρ' εἰπεῖν τῆς σν, εὐθείας, δώσει σοι καὶ τὸ δέκατον τῆς στ, μοίρας, διερχόμενος δὲ διὰ τοῦ δεκάτου μέρους τῆς τξ, δώσει σοι τὸ δέκατον καὶ τῆς τφ, ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

Πρότασις Δ':

Διαμέτρου δοθείσης, Ἡμικύκλιον κατασκευάσαι.

Geom. Tr. lib. 3. Fig. 5.



Δοθήτω διάμετρος ἡ αβ, καὶ ἔστω κατασκευάσαι Ὄργανον Γεωμετρικὸν τὸ καλούμενον Ἡμικύκλιον. Γραφήτω δὴ ἐπί τινος ἐπιπέδου ἀκριβῶς κατειργασμένου, ὡς καὶ ἐν τοῖς πρότερον εἴρηται, ἐκ ξύλου, ἢ ἄλλης τινὸς ὕλης στερεᾶς, ἡ αβ, δοθεῖσα διάμετρος, ἢ ἄλλη τις ἴση τῇ αβ, περὶ ἣν δίχα τμηθεῖσαν γραφήτω τὸ αγβ, ἡμικύκλιον, καὶ διαιρεθήτω εἰς μοίρας ρπ: κατὰ τὴν προρρηθεῖσαν δ': πρότασιν τοῦ β': βιβλίου τοῦ α: μέρους. Εἶτα τεθήτω καὶ ἐν αὐτῷ κανὼν συνεχόμενος

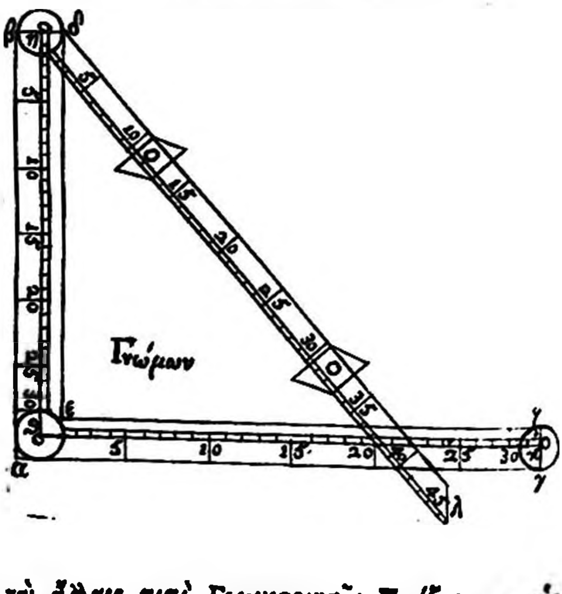
νος ἄλλῳ τινὶ, καὶ τῷ δ, ἐπερειδόμενος κείσθω, φέρων ἐν αὐτῷ καὶ διόπτρας δύο, ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ τεταρτημορίου εἴρηται. Χρησιμεύσει δὲ καὶ τοῦτο ἐν οἷς καὶ τὸ τεταρτημόριον. ἔστι μέντοι ἐκείνου εὐχρηστότερον. Δεῖ δὲ τὸν κανόνα εὐκίνητον εἶναι, ὥστε ἐφαρμοττόμενον ἐπὶ τῆς δ α, δύνασθαι μεταφέρεσθαι, ὁμαλῶς κινούμενον ἀπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὸ β, οἱονεὶ περιγράφειν τὸ α γ β, Ἡμικύκλιον.

Πρότασις Ε΄:

Διαστήματος δοθέντος, ὄργανον κατασκευάσαι Γεωμετρικόν, ὃ καλεῖται Γνώμων.

Παρασκευασθήτωσαν δύο κανόνες ἀκριβέστατοι καὶ ἴσοι κατὰ τὸ δοθὲν μῆκος, ἔχοντες πρὸς τούτῳ τό, τε πλάτος καὶ πάχος ἴσον, οἷοι οἱ α β, α γ, καὶ κείσθωσαν ἀλλήλοις συναπτόμενοι πρὸς ὀρθὰς γωνίας, ὥστε ἑκατέραν τῶν ὑπὸ β α γ, δ ε ζ, γωνιῶν ὀρθὴν εἶναι, καὶ τὰς β α, α γ, καὶ δ ε, ε ζ, πρὸς ἀλλήλας ὀρθάς. Εἶτα διὰ μέσου ἑκατέρου τῶν κανόνων γραφήτωσαν παραλλήλως ταῖς β α, α γ, ἢ δ ε, ε ζ, αἱ η θ, θ κ, ὥστε καὶ ταύτας πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις κεῖσθαι, καὶ τὴν ὑπὸ η θ κ, γωνίαν ὀρθὴν ποιεῖν. ἐφ᾽ ἑκατέρας δὲ τῶν θ η, θ κ, ἐστηρίχθωσαν διόπτραι ἴσαι, ὥστε τὴν μὲν ἐν τῷ θ, εἶναι σημ: τὴν δὲ ἐν τῷ η, ἢ ἐν ἄλλῳ τινὶ τῶν ἐπὶ τῆς θ η, καὶ τὴν γ: ἐν τῷ κ, ἢ γοῦν ἐν ἄλλῳ τινὶ τῶν ἐπὶ τῆς θ κ. Δεῖ δὲ τὴν

Geom. Pr. lib. 3. Fig. 6.

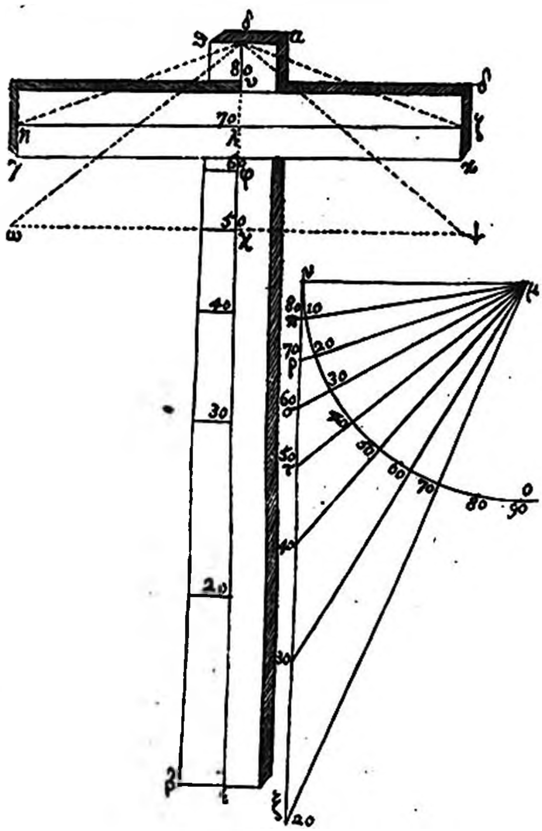


ἐν τῷ θ, εὐκίνητον εἶναι, ὥστε περιφερομένην, ὁτὲ μὲν πρὸς τὴν ἐν τῷ η, ἀφορᾶν, ὁτὲ δὲ πρὸς τὴν ἐν τῷ κ, ὡς ἂν ἡ χρεία καλέσῃ. καὶ ἕξεις ὄργανον πρὸς κατασκευὴν ὀρθῶν γωνιῶν τῶν ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων πάνυ χρησιμεῦον. Ἐὰν δὲ καὶ κανὼν πρὸς τῷ η, ἐπιστηριχθῇ, ὥστε δύνασθαι ἀπὸ τοῦ θ, τὸ ἕτερον αὐτοῦ ἄκρον ἐπὶ τὸ κ, μεταβαίνειν, καὶ ἀνάπαλιν ἀπὸ τοῦ κ, ἐπὶ τὸ θ, μεταφέρεσθαι, ὁμαλῶς τοῦ αὐτοῦ κανόνος κινουμένου. ἐπὶ δὲ τοῦ κανόνος ἐστηριχθῶσι καὶ πηγμάτια δύο, εἴπουν διόπτραι, χρησιμεύσει πάντως τὸ ὄργανον καὶ ἄλλαις τισὶ Γεωμετρικαῖς Πράξεσιν, ὡς ἐψόμεθα. Ἔξεστι δὲ τὰς πλευρὰς τοῦ Γνώμονος καὶ ἀνίσους εἶναι, ὡς τὰς α β,

α γ,

α γ, καὶ πρὸς τῷ α, σημείῳ ἐσηεργμένον εἶναι κανόνα κινητόν· τῶν δὲ α β, α γ, πλευρῶν τοῦ ὀργανίου, καὶ τοῦ λ δ, ἔτι δρομέως εἰς ἴσα διῃρημένων μέρη, χρησιμεύσει καὶ οὕτω τὸ ὄργανον εἰς διαφόρους Γεωμετρικὰς πράξεις, καὶ μᾶλλον εἰς τὰς τῆς Μηκομετρείας. Ἰστέον δ' ὅτι ὁ Γνώμων τειχῶς δύναται κατασκευασθῆναι μετὰ τοῦ δρομέως δηλ: καὶ ἄνευ τούτου, κἂν μὲν ἄνευ δρομέως ᾖ, ἕξει τὰς διόπτρας ἐπὶ τῶν ἐνμέσῳ τῶν κανόνων γραμμῶν, ὡς προηρμηνεύεται. εἰ δὲ μετὰ δρομέως, ἔσται ὁ δρομεὺς ἐσηεργμένος ἢ ἐν τῇ κοινῇ συμπλεύσει τῶν η θ, θ κ, δηλ: ἐν τῷ θ, σημείῳ, ἢ ἐν ἑνὶ τῶν ἄκρων, ταὐτὸν εἰπεῖν ἐν τῷ η. ὀφείλει δὲ ὁ α ζ, κανὼν ἐπιμηκέστερος εἶναι τοῦ α δ,

Geom.Pr. Lib. 3. Fig. 7.



Πρότασις ϛ':

Μήκους δοθέντος, Γεωμετρικὸν κατασκευάσαι Σταυρόν.

Δεδόσθω μῆκος τὸ α β, καὶ ἔστω κατασκευάσαι Γεωμετρικὸν Σταυρὸν ἔχοντα τὸ δοθὲν μῆκος. Παρασκευασθήτωσαν δὲ ἐξ οἱασδήποτε ὕλης στερεᾶς δύο κανόνες ἀκριβέστατοι, ἴσον ἔχοντες πλάτος οἱ α β, γ δ. ὁ μὲν α β, ἔχων τὸ δοθὲν μῆκος, ὁ δὲ γ δ, ἐλάττων τούτου ὑπάρχων· καὶ διὰ μέσου τῆς ἑκατέρου ἐπιφανείας ἀχθήτωσαν αἱ δ ε, ζ η, ἡ μὲν παραλλήλως τῇ β θ, ἡ δὲ τῇ γ κ. τμηθείσης δὲ τῆς ζ η, δίχα κατὰ τὸ λ, εἰλήφθω ἡ μ ν, ἴση τῇ ζ λ, ἢ λ η, καὶ πρὸς τῷ ν, σημείῳ συνιστάσθω κάθετος ἡ ν ξ. κέντρῳ δὲ τῷ μ, καὶ διαστήματι τῷ μ ν, γραφήτω τὸ ν ο, τεταρτημόριον, καὶ διαιρεθήτω εἰς μοίρας ἐνενήκοντα, ἢ γοῦν εἰς μέρη δεκαδικὰ ἐννέα τὰ ν ι ο, ιο, 20, 20· 30, καὶ λοιπά. εἶτα ἀπὸ τοῦ μ, δι' ἑκάστου σημείου τοῦ ν ο, τεταρτημορίου, ἀχθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ μ π, μ ρ, μ σ, μ τ, καὶ λοιπαὶ τέμνουσαι τὴν ν ξ, κατὰ τὰ π, ρ, σ, τ, σημεῖα. Οὑτωσὶ δὲ τῆς ν ξ, διαιρεθείσης, μετενεχθήτωσαν τὰ ἐπὶ τῆς ν ξ, διαστήματα ἐπὶ τῆς δ ε, ἀρχόμενα ἀπὸ τοῦ δ, ὥστε εἶναι τὸ μὲν δ υ, διάστημα ἴσον τῷ ν π, τὸ δὲ υ λ, τῷ π ρ, τὸ δὲ λ φ, τῷ ρ σ, τὸ δὲ φ χ, τῷ σ τ, καὶ τῶν λοιπῶν ἕκαστον τῶν ἐπὶ τῆς δ ε, ἑκάστῳ τῶν λοιπῶν τῶν ἐπὶ τῆς ν ξ. Τούτων δ' οὕτω γενομένων, ἐφαρμοσθήτω ἀκριβῶς ὁ δ γ, κανὼν ἐπὶ τοῦ α β, οὕτως, ὥστε τὴν ζ η, πρὸς ὀρθὰς ἐφίστασθαι ἐπὶ τῆς δ ε, καὶ τὸν δ γ, κανόνα κινητὸν εἶναι, καὶ φέρεσθαι ὁμαλῶς ἀπὸ τοῦ δ, ἐπὶ τὸ ε, καὶ ἀνάπαλιν ἀπὸ τοῦ ε, ἐπὶ τὸ δ, τὴν αὐτὴν ἀεὶ τηρεῖν θέσιν, καὶ τὴν ζ η, πρὸς ὀρθὰς τέμνειν τὴν δ ε. δεῖ δὲ καὶ διόπτρας ἐφίστασθαι ἐπὶ τῶν δ, ζ, η, σημείων.

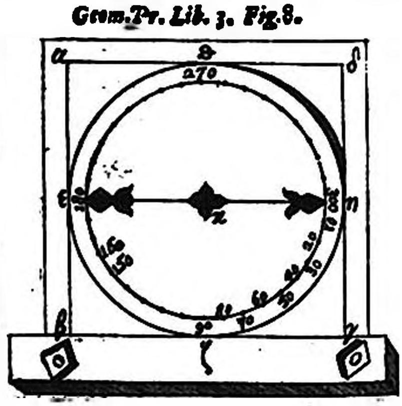
Ἰστέον δ' ὅτι, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ν π μ, γωνία μοιρ: ἐστὶν π:, διὰ τὸ εἶναι τὴν μὲν πρὸς τῷ ν, ὀρθήν, τὴν δὲ ὑπὸ ν μ π, μοιρ: ι, ἡ δὲ ὑπὸ ν ρ μ, ο: διὰ τὸ εἶναι τὴν ὑπὸ ν μ ρ, μοιρ: κ: ἐὰν ὁ δ γ, κανὼν προσεγγίσῃ τῷ δ, ὥστε τὴν ζ η, διέρχεσθαι διὰ τοῦ λ, δευτέρου σημείου, ἡ ὑπὸ ζ δ η, γωνία μοιρ: ἔσται ρμ: ὥσπερ καὶ ἡ ὑπὸ ψ δ ω, μοιρ: ἐστὶ ρ: ἡ μὲν γὰρ ὑπὸ ζ δ η, διπλῆ ἐστὶ τῆς ὑπὸ ν ρ μ, οὔσης μοιρ: ο: ἡ δὲ ὑπὸ ψ δ ω, ὁμοίως διπλῆ ἐστὶ τῆς ὑπὸ ν τ μ, οὔσης μοιρ: ν: ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

Πρότασις Ζ':

Ὁποία ἡ Μαγνητικὴ λεγομένη Πυξίς, καὶ τίσι χρησιμεύει.

Ἡ Μαγνητικὴ λεγομένη Πυξὶς κυβώτιον ἐστίν, ἢ γοῦν θυλάκιον κυλινδροειδές, ἐπίπεδον τὴν βάσιν ἔχον, καὶ τετράγωνον, ὥστε εἶναι τὴν μὲν τοῦ θυλακίου βάσιν κύκλον ἐγγεγραμμένον εἰς τετράγωνον, τὴν δὲ περίμετρον τῆς ὅλης βάσεως, τετράγωνον περὶ κύκλον περιγεγραμμένον, οἷα ἐστὶν ἡ α β γ δ, ἔκ στερεᾶς τινος κατεσκευασμένη ὕλης. ἐντὸς δὲ τοῦ θυλακίου ἐπὶ τῆς αὐτοῦ βάσεως κύκλος ἐστὶ γεγραμμένος, καὶ εἰς μοίρας ἔτι διῃρημένος, ὡς ὁ ε ζ η θ, οὗ κέντρον τὸ κ. ἐν δὲ τῷ τοῦ κύκλου κέντρῳ βελόνη τις ἐκ μετάλλου, οὐ μὴν δὲ ἐκ σιδήρου ἐστήρικται, καὶ ἐπ' αὐτῆς ὁ μαγνητικὸς ἔλασμα ἐπιστηρίζεται γνώμων, ὥστε ἀκωλύτως δύνασθαι κινεῖσθαι. ἐπὶ μιᾶς δὲ τῶν πλευρῶν τῆς τοῦ θυλακίου βάσεως ἐφηρμοσμένος ἐστὶ κανὼν ἀκριβέστατος, δύο ἐν αὐτῷ

Geom.Pr. Lib. 3. Fig.8.



διό-

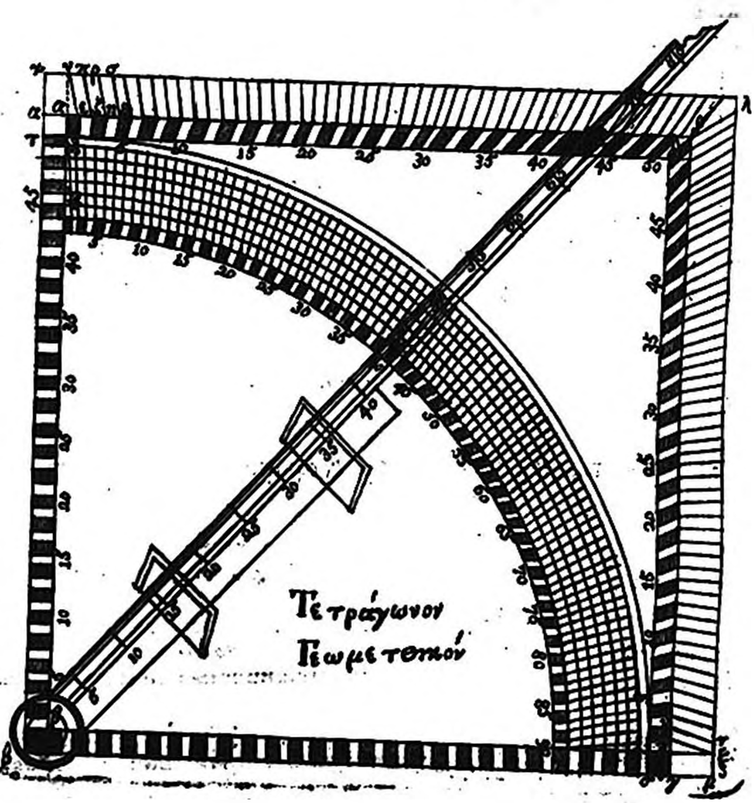
διόπτρας φέρων. εἰς δὲ συντήρησιν τῆς μαγνητικῆς βελόνης ὑάλινον τὴν ἄνω τὸ θυλάκιον ἔχει βάσιν, χρησιμεύει δὲ ἡ Μαγνητικὴ πυξὶς πρὸς εὕρεσιν γωνιῶν.

Πρότασις Η':

Μήκους δοθέντος, Τετράγωνον Γεωμετρικὸν κατασκευάσαι.

Ἔστω μῆκος ἡ αβ, καὶ ζητηθήτω κατασκευασθῆναι Τετράγωνον Γεωμετρικὸν ἔχον τὸ δοθὲν μῆκος. παρασκευασθήτω δὴ ἐξ οἱασδήποτε ὕλης στερεᾶς καὶ ἀκατεργάστου τετραγωνοειδὲς παραλληλεπίπεδον, μῆκος μὲν καὶ πλάτος ἔχον τὸ δοθὲν, δὲς εἰπεῖν ἑνὸς ποδὸς, ἢ ὅσον βούλει. πάχος δὲ ἑνὸς δακτύλου, ἢ καί τι πρὸς, ἵν' ἀσφαλέστερον ᾖ. καὶ γραφήτω ἐφ' ἑνὸς μέρους τοῦ αὐτοῦ τετράγωνον τὸ αβγδ. Διαιρεθείσης δὲ ἑκατέρας τῶν αδ, δγ, πλευρῶν εἰς μέρη ἴσα πεντήκοντα, ἢ ἑκατὸν, ἢ ὅσα ἂν ἐθέλῃς, τὰ αε, εζ, ζη, ηθ, καὶ λοιπά. εἰλήφθω ἀπὸ μὲν τῆς αβ, τὸ ακ, ἀπὸ δὲ τῆς βγ: τὸ γμ: ἴσον ἑκάτερον τῇ αε, καὶ ἠχθήτωσαν παράλληλοι ταῖς αδ, δγ, αἱ κλ, λμ. εἶτα κατασκευασθήτω κανὼν ἀκριβέστατος, καὶ στερεωθήτω ἐπὶ τοῦ β, καθ' ἓν πέρας, ὥστε συμ-

Geom. Pr. Lib. 3. Fig. 9.



συμπίπτειν τῇ α β, καὶ ἀπὸ τοῦ α, δύνασθαι ὁμαλῶς κινούμενον μεταφέρεσθαι ἐπὶ τὸ δ, ἀπὸ δὲ τοῦ δ, ἐπὶ τὸ γ, καὶ συμπίπτειν αὖθις τῇ β γ.

Ἀρχόμενος δὲ ἀπὸ τοῦ α, μετάφερε αὐτὸν ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου ἐφ᾽ ἕτερον ἐφεξῆς ἄχρι τοῦ δ, συνδιαιρῶν τῇ διαβήτῃ τὴν κ λ, τῇ α δ. ἀπὸ δὲ τοῦ δ, δεύτεραν ποιῶν ἀρχὴν, μετακόμισον αὐτὸν ἑξῆς ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου ἐφ᾽ ἕτερον συνδιαιρῶν καὶ τὴν λ μ, τῇ δ γ. ἐξαχθείσης δὲ τῆς μὲν α β, ἐπὶ τὸ ν, τῆς δὲ β γ, ἐπὶ τὸ ξ, ὥστε τὸ α ν, διάστημα ἴσον εἶναι τῇ γ ξ, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ν ε, π ζ, ρ η, σ θ, καὶ π ξ, υ τ, καὶ λοιπαὶ, ὧν ἑκάστη διαιρεθήτω εἰς μέρη δέκα. Ἐπὶ δὲ τοῦ κανόνος στηριχθήτωσαν δύο διόπτραι, καὶ ἕξεις ὄργανον θαυμάσιον τὸ καλούμενον Γεωμετρικὸν Τετράγωνον ἐν πολλοῖς χρησιμεῦον. Ἐὰν δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ β, σημείου σφαιρίδιόν τι ἀπαιωρηθῇ, ἐντελέστερον ἔσται τὸ ὄργανον. Δυνατὸν δὲ ἐν τούτῳ καὶ τὸ σ τ, γραφῆναι τετραπλεύρῳ καθ᾽ ὃν προηρμηνεύεται τρόπον, ὥστε διπλοῦν εἶναι τὸ ὄργανον. Ὀφείλει δὲ καὶ ὁ κανὼν διῃρημένος εἶναι εἰς μέρη ἴσα ἀλλήλοις τε καὶ τοῖς τῶν πλευρῶν μέρεσι. Τινὲς δὲ καὶ τὰς λοιπὰς δύο τοῦ ὀργάνου πλευρὰς εἰς ἴσα τε καὶ ἰσοπληθῆ διαιροῦντες τμήματα, καθ᾽ ὃν καὶ αἱ α δ, δ γ, διῄρηνται τρόπον, δύο κανόνας ἴσους καὶ εἰς ἴσα διῃρημένους κατασκευάζουσι, τὸν μὲν τῇ β, τὸν δὲ τῇ γ, ἐπιστηρίζοντες γωνίᾳ, ὥστε τὰ ἕτερα τῶν κανόνων ἄκρα δύνασθαι προσεγγίζειν ἀλλήλοις, καὶ ἀπ᾽ ἀλλήλων ἀφίστασθαι, καὶ τὸν μὲν τῇ α β, συμπίπτειν πλευρᾷ τοῦ ὀργάνου, τὴν δὲ τῇ γ δ.

Πρότασις Θ:

Μήκους δοθέντος τὸν καλούμενον Κανόνα κατασκευάσαι.

Παρασκευασθήτω ἐξ ὕλης στερεᾶς καὶ δυσκατεργάστου, ξύλου φέρ᾽ εἰπεῖν, ἢ ὀρειχάλκου, ἢ χάλυβος, ἢ ἄλλου τινὸς μετάλλου παραλληλεπίπεδον ἑτερόμηκες, μῆκος ἔχον τὸ δοθὲν, ἢ ὅσον ἂν βούλῃ, πλάτος δ᾽ ἑνὸς δακτύλου καὶ ἡμίσεως, πάχος δὲ τετάρτου δακτύλου ἢ πέμπτου, οἷος ὁ α β ε δ. δεῖ δὲ τὰς α β, δ ε, πλευρὰς αὐτοῦ παραλλήλους τε

Geom. Pr. Lib. 3. Fig. 10.

εἶναι καὶ ἀκριβῶς κατ᾽ εὐθεῖαν ἐκτεταμένας, καὶ οὕτω ἔσται ὁ καλούμενος κανὼν

πρὸς

πρὸς ἐγχάραξιν εὐθειῶν γραμμῶν χρησιμεύων. Ἀνακρινεῖς δὲ τὰς α β, δ ε, πλευρὰς τοῦ κανόνος, εἴγε ἐπ' εὐθείας εἰσὶν ἀκριβῶς, θεὶς τὸν κανόνα ἐπί τινος ἐπιπέδου ἐπιφανείας, καὶ τῷ διαβήτῃ ἐγχαράττων τὴν α β, δὸς εἰπεῖν γραμμὴν, εἶτα τρέψας τὸν αὐτὸν κανόνα, ὥστε τὸ μὲν α, αὐτοῦ πέρας ἐπὶ τοῦ β, ἐφαρμοσθῆναι, τὸ δὲ β, ἐπὶ τὸ α, καὶ ἐγχαράττων αὖθις ἑτέραν εὐθεῖαν, κἂν μὲν αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι συμπέσωσιν, ὥστε τὴν δευτέραν εἶναι τὴν αὐτὴν παντάπασιν τῇ προτέρᾳ, ἀκριβεστάτη ἡ α β, πλευρά. Τὸν αὐτὸν τρόπον βασανισθήσεται καὶ ἡ δ ε, ἐὰν δὲ ἡ δευτέρον ἐγχαραχθεῖσα εὐθεῖα παραλλάξῃ τι τῆς πρότερον κεχαραγμένης, ὁ κανὼν οὐκ ἔσται ἀκριβέστατος, ἀλλὰ διορθώσεως δεῖται. Εἰδὲ καὶ ἕτερον ὅμοιον κατὰ πάντα κατασκευάσῃς κανόνα, καὶ τοὺς δύο τούτους συνδέσῃς τοῖς ζ η, θ κ, παραλλήλοις συνδέσμοις, ὥστε δύνασθαι τοὺς κανόνας ὁμαλῶς ἀλλήλων ἀφίστασθαι καὶ προσεγγίζειν ἀλλήλοις, ἕξεις καὶ τὸ πρὸς ἐγχάραξιν παραλλήλων γραμμῶν χρησιμεῦον ὄργανον, ὃ καὶ ἐκ τοῦ τέλους αὐτὸ τοῦτο παραλλήλους τινὲς ὀνομάζουσι.

Πρότασις 1.

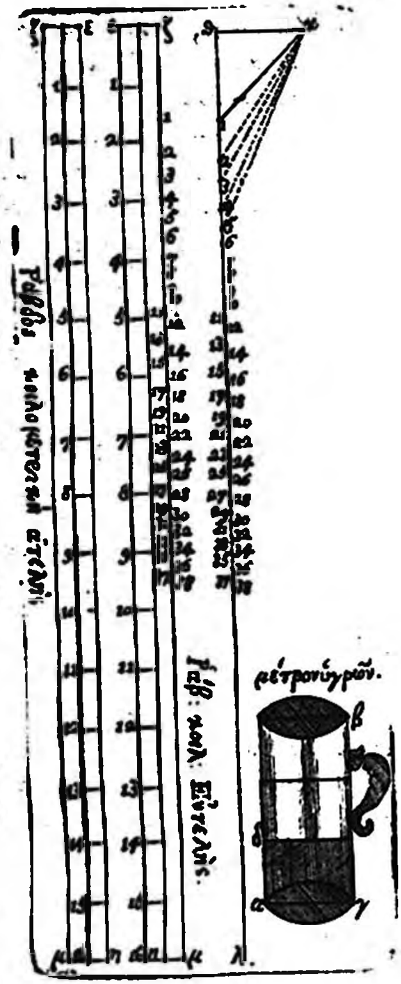
Μέτρου δοθέντος Ῥάβδον κατασκευάσαι πρὸς διαμέτρησιν χρησιμεύουσαν τῆς τῶν ἀγγείων κοιλότητος, τῶν σχῆμα κυλινδροειδές πως ἢ κωνοειδὲς φερόντων, καὶ τοῦ ἐν αὐτοῖς ὑγροῦ.

Ἔστω μέτρον κυλινδροειδὲς τὸ α β, (ὅρα σελ: 328.) χωροῦν ἕνα, ἢ δύο, ἢ καὶ πλείονας ἀμφορεῖς, ἢ γοῦν ξέστας, καὶ ζητείσθω ἡ κατασκευὴ τῆς Ῥάβδου, δι' ἧς τὰς κοιλότητας τῶν κυλινδροειδῶν ἢ κωνοειδῶν μετρεῖν ἔχομεν. Κατασκευαζέσθω δὴ Ῥάβδος ἐπιμήκης ἡ ε η. εἶτα ἐγχυθήτω τῷ α β, κυλίνδρῳ, οἶνα, ἢ ὕδατος ξέστης εἷς, σημειωθήτω τὸ ὕψος τοῦ ἐγχυθέντος ὑγροῦ, καὶ ἔστω τοῦτο τὸ α δ. ληφθέντος δὲ τοῦ α δ, διαστήματος τῷ κοινῷ διαβήτῃ διαιρεθήτω ἡ ῥάβδος ἀφ' ἑνὸς μέρους εἰς ἴσα διαστήματα τῷ ληφθέντι τὰ 1, 2, 3, 4, καὶ λοιπά. τῆς δὲ θ λ, γραμμῆς κειμένης ἴσης τῇ ε η, ῥάβδῳ, συνιστάσθω πρὸς τῷ θ, σημείῳ κάθετος ἡ θ κ, καὶ ἔστω ἴση τῇ α γ, διαμέτρῳ τῆς τοῦ α β, κυλίνδρου βάσεως, εἰλημμένης δὲ καὶ τῆς θ ι, ἴσης τῇ θ κ, ἐπιζεύχθω ἡ κ ι, καὶ τῇ μὲν κ ι, ἴση γενέσθω ἡ θ 2, τῇ δὲ κ 2, ἡ θ 3, τῇ δὲ κ 3, ἡ θ 4, τῇ δὲ κ 4, ἡ θ 5, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁμοίως. Τελευταῖον μεταφερέσθωσαν τὰ ἐπὶ τῆς θ λ, σημεῖα ἐπὶ τὸ ἕτερον μέρος τῆς ε η, Ῥάβδου, καὶ οὕτω ἑκατέρωθεν διῃρημένη ἡ ε η, Ῥάβδος, ἔσται ὄργανον προσφυέστατον πρὸς διαμέτρησιν τῶν ἐν τοῖς κυλινδρικοῖς καὶ κωνικοῖς ἀγγείοις ὑγρῶν, ὡς ἐν τῷ περὶ κοιλομετρίας ὀψόμεθα. Ἐὰν δὲ τῷ α β, κυλίνδρῳ δύο ἐγχυθῶσι ξέσται, ἢ ἀμφορεῖς, ὥστε τοῦ ἐν αὐτῷ ὑγροῦ ὕψος εἶναι τὸ γ β, διαιρεθήτω ἡ ε η, Ῥάβδος κατὰ τὴν ᾱ: αὐτῆς διαίρεσιν εἰς ἴσα τῷ γ β, τὰ δὲ λοιπὰ γενέσθω ὡς προηρμηνεύεται, καὶ ἔσται τὸ ὄργανον εὐχρηστότερον καὶ ἡ πρᾶξις εὐχερεστέρα. ὁ

γὰρ

γὰρ τοῦ περιεχομένου ὑγροῦ ἀριθμὸς ἐλάττων ἐστὶ, μείζονος ὄντος τοῦ μέτρου, ὥσπερ καὶ τοὐναντίον, ἐλάττονος γὰρ τοῦ μέτρου ὄντος, ὁ τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ ἀγγείῳ ὑγροῦ ἀριθμὸς αὔξεται.

Geom. Pr. Lib. 3. Fig. 11.



Ὁ δὲ λόγος τῆς β': διαιρέσεως τῆς Ῥάβδου ἐν ἄλλοις πλατύτερον εἰρήσεται. ἀλλὰ κἀνταῦθα δέον εἰδέναι, ὅτι ὁ τῆς ζ 2, διαμέτρου κύκλος διπλάσιος ἐστὶ τοῦ κύκλου τῆς ζ ι, διαμέτρου, τριπλάσιος δὲ ὁ τῆς ζ 3, ὁ δὲ τῆς ζ 4, τετραπλάσιος, καὶ ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς ἀναλόγως κατὰ τὴν τοῦ πολλαπλασίου φυσικὴν πρόοδον. Ἐπεὶ γὰρ τοῦ ι θ κ, ὀρθογωνίου τριγώνου τὸ τῆς ι κ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τῶν ι θ, θ κ, τετραγώνοις κατὰ τὴν μζ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἀλλ' αἱ ι θ, θ κ, ἴσαι εἰσὶν, ἄρα τὸ τῆς ι κ, τετράγωνον διπλάσιον ἐστὶ τοῦ τῆς ι θ, τετραγώνου. ὑπόκειται δὲ ἡ θ 2, ἴση τῇ ι κ, ἄρα καὶ τὸ τῆς θ 2, τετράγωνον διπλάσιον ἐστὶ τοῦ τῆς θ ι. Αὖθις τὸ τῆς κ 2, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τῶν 2 θ, θ κ, τετραγώνοις. ἔστι δὲ τὸ τῆς θ 2, διπλάσιον τοῦ τῆς θ κ, ἄρα τὸ τῆς κ 2, τετράγωνον τριπλάσιον ἐστὶ τοῦ τῆς θ κ, ἤτοι τοῦ τῆς ι θ. Ὁμοίως δειχθήσεται καὶ τὸ θ 3, τριπλάσιον τοῦ αὐτοῦ, τὸ δὲ θ 4, τετραπλάσιον, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ἀναλόγως, ὅτι ἡ μὲν θ 3, ἴση ἐστὶ τῇ κ 2, ἡ δὲ θ 4, τῇ κ 3, ὥσπερ καὶ ἡ θ 5, τῇ κ 4, καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς ὁμοίως. ἀλλὰ καὶ οἱ κύκλοι ἔχουσιν ὡς τὰ τετράγωνα κατὰ τὴν β': τοῦ ιβ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἤτοι ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων κατὰ τὴν α: τοῦ γ': τοῦ α: μέρους. ἡ

δὲ

δι' τῆς θ λ, διαίρεσις μετατεθῇ ἀπαραλλάκτως ἐπὶ τῆς ζ μ, πλευρᾶς τῆς Ῥάβδου, ἄρα ὁ αὐτὸς λόγος τῶν διαμέτρων ἀληθεύει πάντως καὶ ἐπὶ τῶν τῆς ζ μ μερῶν.

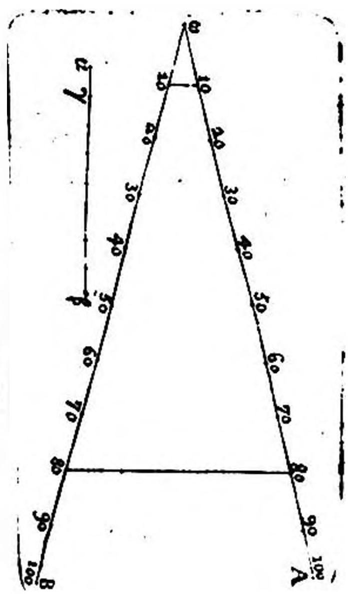
Παρὰ ταῦτα δ' εἰσὶ καὶ ἄλλα τινὰ Γεωμετρικὰ ὄργανα, ἡμεῖς δὲ περὶ ὧν ἐδιδάχθημεν, καὶ ὧν ἀποσημειώσεις τινὰς εὕρομεν, οἷς ἐνετύχομεν βιβλίοις, τούτων καὶ τὴν κατασκευὴν κατὰ τὸ δυνατὸν ἡμῖν ἐξεθέμεθα. οὔτε γὰρ πάντα ταῦτα κεκτήμεθα, οὔτε γοῦν ἰδεῖν πάντα ἠδυνήθημεν. διὸ δὴ συγγνώμη ἔσται κἄν τε ἀτελής πως ἡ περὶ τῆς κατασκευῆς τινος Ἑρμηνεία γέγονεν, ἑπόμενον δ' ἐστὶν εἰπεῖν καὶ περὶ τῆς τούτων χρήσεως.

Πρότασις ΙΑ'.

Τὴν δοθεῖσαν πεπερασμένην εὐθεῖαν εἰς ὁσαδηποτοῦν μέρη διελεῖν.

Α': Ἔστω εὐθεῖα ἡ α β, καὶ κείσθω ταύτην διελεῖν εἰς μέρη ὀκτώ. Ληφθήτω δὴ τὸ τῆς α β, εὐθείας μῆκος τῷ κοινῷ διαβήτῃ. καὶ τούτου θάτερον μὲν πόδα θὲς ἐπί τινι ἀριθμῷ τῷ ἐν τῷ ἀναλόγῳ Διαβήτῃ ὄγδοον ἔχοντι μέρος, οἷος ὁ 80, ὁ ἐπὶ τῆς ω Β, γραμμῆς, τὸν δ' ἕτερον πόδα ἐφάρμοσον τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ τῷ ἐπὶ τῆς ω Α, γραμμῆς, ἐκτεινομένου τοῦ ὀργάνου ἢ συστελλομένου, ἕως οὗ τὸ τῆς α β, ληφθὲν μῆκος τῷ 80, 80, ἐφαρμοσθῇ ἀριθμῷ, ἀκινήτου δὲ τοῦ ὀργάνου τηνικαῦτα μένοντος, τὸ 10, 10, διάστημα μετενεχθήτω ἐπὶ τῆς α β, ἀφελὸν ἀπ' αὐτῆς τὸ α γ, καὶ τοῦτο ἔσται τὸ ὄγδοον τῆς α β. Ἢ γοῦν ληφθήτω τὸ 70, 70, διάστημα ἀπὸ τοῦ ὀργάνου, καὶ ἀφαιρεθήτω τοῦτο ἀπὸ τῆς α β, καὶ τὸ ἐναπολειπόμενον α γ, ὁμοίως ὄγδοον ἔσται μέρος τῆς ὅλης α β, ᾧτινι ὀκτάκις ἡ αὐτὴ α β, μετρεῖται, καὶ εἰς ὀκτὼ ἴσα διαιρεῖται μέρη, ὡς ὁρᾷς.

Geom. Pr. Lib. 3. Fig. 12.



Ἄλλως. Ληφθήτω τὸ τῆς α β, γραμμῆς μῆκος ὡς εἴρηται τῷ κοινῷ διαβήτῃ, καὶ ἐφαρμοσθήτω ὁ ἕτερος τοῦ διαβήτου ποῦς ἐπὶ τοῦ ι, σημείου τῆς κατὰ τὸν α': τρόπον γενομένης κλίμακος, ἥτις καὶ παραλληλόγραμμον ἤκουσεν, ὁ δὲ ἕτερος ἐκτανθήτω ἐπὶ τὴν ἐναντίαν γραμμὴν τοῦ αὐτοῦ ὀργάνου, καὶ ἔστω ἐφαρμόττων κατὰ τὸ η, καὶ ἕξεις τὸ ζητούμενον. Διαιρεθήσεται γὰρ ἡ α β, εἰς τὰ ι μ, μ ν, ν ξ, καὶ λοιπὰ ἴσα μέρη κατὰ τὸ προσταχθέν.

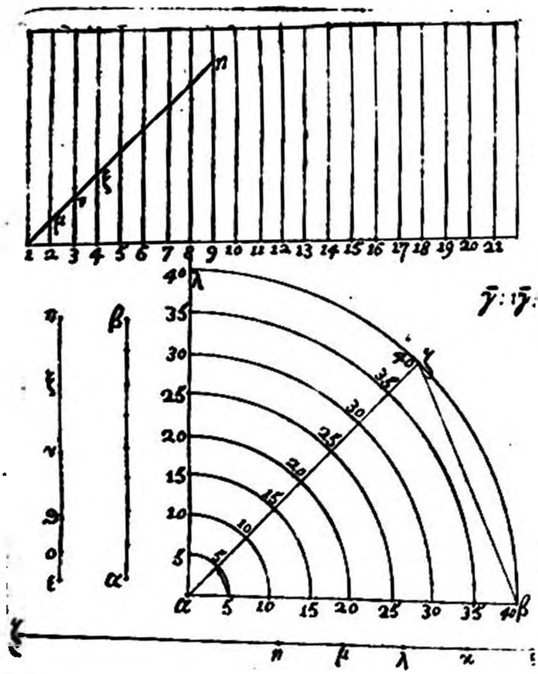
Ἄλλως. Λάβε ἀπό τινος τόξου τῶν ἐν τῷ τεταρτημορίῳ τῶν ἀναλογιῶν διάστη-

Τ τ μα

μα ἴσον τῇ αβ, δοθείσῃ γραμμῇ, δεῖ δὲ τὸ τόξον δι' ἀριθμοῦ διέρχεσθαι ὄγδοον ἔχοντος μέρος, ὡς τὸ βα. Ἀπὸ τούτου οὖν εἰλήφθω τὸ βζ, ἴσον ὡς εἴρηται τῇ αβ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ αζ· ἡ γοῦν ἐφαρμοσθήτω ὁ δρομεὺς, εἴπερ ἐστὶν ἐν τῷ ὀργανίῳ, ἐπὶ τοῦ ζ, εἶτα εἰλήφθω τὸ 5, 5, διάστημα, καὶ διαιρεθήσεται τῷ αὐτῷ διαστήματι ἡ αβ, εἰς μέρη ἴσα ὀκτώ. τοῦτον τὸν τρόπον ἔξεστί σοι διελεῖν τὴν οἱανδήποτε εὐθεῖαν εἰς ὁσαδηποτοῦν μέρη δι' ἑκάστου τῶν τριῶν τουτωνὶ ὀργανίων.

Geom. Pr. Lib.3. Fig.13.

ὁ λόγος δέ πως ὁ αὐτὸς καὶ ἐπὶ τῶν τριῶν πράξεων. Ἐπὶ μὲν γὰρ τῆς α: ἐπεὶ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ ω, 80, 80, τριγώνου ἦκται παράλληλος ἡ 10, 10, διάστασις, πάντως γε τὰ ω 10, 10, ω 80, 80, τρίγωνα, ἰσογώνια εἰσὶ, καὶ κατὰ τὴν δ': τοῦ ς': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὡς ἡ ω 80, πρὸς τὴν 80, 80, ἐστὶ καὶ ἡ ω, 10, πρὸς τὴν 10, 10, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ω, 80, πρὸς τὴν ω 10, ἡ 80, 80, πρὸς τὴν 10, 10, ἀλλ' ἡ ω 80, ὀκταπλάσιός ἐστι τῆς ω 10, ἄρα καὶ ἡ 80, 80, ἤτοι ἡ αβ, ὀκταπλάσιός ἐστι τῆς 10, 10, καὶ ἑπομένως τὸ 10, 10, διάστημα ὀκτάκις καταμετρήσει τὴν αβ, εἰς ὀκτὼ πάντως καὶ ἴσα αὐτὴν διαιρεῖ. Ἐπὶ δὲ τῆς β: πράξεως, τῆς διὰ τῆς κλίμακος, ἐπεὶ τῇ η, 9, πλευρᾷ τοῦ ι η 9, τριγώνου παράλληλοι εἰσὶν αἱ 2μ, 3ν, 4ξ, καὶ λοιπαὶ, πάντως κατὰ τὴν β': τοῦ αὐτοῦ αἱ ι9, ιη, ἀναλόγως τέμνονται, ἀλλ' ἡ ι9, εἰς ὀκτὼ ἴσα τετμημένη ἐστὶ κατὰ τὴν κατασκευὴν, ἄρα καὶ ἡ ιη, εἰς ὀκτὼ ἴσα τέμνεται μέρη.



Ἐπὶ δὲ τῆς γ': πράξεως τῆς διὰ τοῦ τετάρτημορίου, ἐπὶ τῇ βζ, παράλληλος ἐστὶν

ἐστὶν ἡ 5, 5, συνάγεται ὡς καὶ ἐπὶ τῆς α: πράξεως τὴν β ζ, ἤτοι τὴν α β, δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἔχειν πρὸς τὴν 5, 5, ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν α 5, ἀλλὰ ἡ α β, ὀκτάκις μετρεῖται ὑπὸ τῆς α 5, ἄρα καὶ ἡ β ζ, ὀκτάκις μετρεῖται ὑπὸ τῆς 5, 5,

Ἐὰν δὲ ἡ διαιρεθησομένη μείζων ᾖ, ὥστε μὴ δύνασθαι ἔν τινι τῶν εἰρημένων ὀργάνων ἐμπεριλαμβάνεσθαι, εἰλήφθω τὸ ταύτης ἥμισυ, ἐὰν δὲ καὶ τοῦτο μεῖζον ᾖ, ληφθήτω τὸ γ': ἢ τὸ δ': ἢ ἄλλ' ὁτιοῦν μέρος τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ δυνάμενον ἐν τῷ ὀργάνῳ ἐμπεριλαμβάνεσθαι, καὶ διαιρεθήτω κατὰ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, καὶ τὸ τούτου μέρος ἐπαναληφθήτω ἐπὶ τῆς ληφθείσης εὐθείας τοσάκις, ὁσάκις τὸ διαιρεθὲν ὑπὸ τῆς ὅλης ἐμπεριλαμβάνεται. Οἷον ἔστω διελεῖν τὴν ε ζ, εὐθεῖαν εἰς μέρη τέσσαρα, καὶ ἐπεὶ ἡ ε ζ, ἐν οὐδενὶ ἐμπεριλαμβάνεται ὀργάνῳ, οὔτε μὴν τὸ ταύτης ἥμισυ, ληφθήτω τὸ ε η, τρίτον αὐτῆς μέρος, καὶ διαιρεθήτω ὡς προειρημένον διά τινος τῶν τριῶν εἰρημένων ὀργάνων, κατὰ τὸ προσταχθὲν, καὶ ἔστω τούτου μέρος δ': τὸ ε θ, τοῦτο δὲ μετενεχθήτω ἐπὶ τῆς ε ζ, ἀπὸ τοῦ ε, ἐπὶ τὸ κ, εἶτα ἐπαναληφθήτω ἀπὸ τοῦ κ, ἐπὶ τὸ λ, καὶ ἀπὸ τοῦ λ, ἐπὶ τὸ μ, ὅτι καὶ ἡ ε η, τρὶς ἐν ὅλῃ τῇ ε ζ, ἐμπεριέχεται, καὶ τὸ ε μ, ἐστὶ τὸ ζητούμενον δ': μέρος τῆς ε ζ. Geom.Pr.Lib.3.Fig.14.

Εἰ δέ γε ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἐλαχίστη ᾖ, ὥστε μὴ δύνασθαι διαιρεθῆναι μηδενὶ ὀργάνῳ, ὡς ἡ ε ν, διπλασιασθήτω αὕτη καὶ ποιείτω τὴν ε η, εἶτα διαιρεθήτω ἡ ε η, εἰς μέρη τέσσαρα κατὰ τὸ προσταχθὲν, τὰ ε θ, θ ν, ν ξ, ξ η, τὸ δὲ ε θ, διαιρεθήτω τῷ κοινῷ διαβήτῃ δίχα κατὰ τὸ ο, καὶ τὸ ο ε, δ': ἔσται μέρος τῆς ε ν, δοθείσης, ὑφ' οὗ καὶ τετράκις καταμετρουμένη εἰς τέσσαρα διαιρεῖται ἴσα μέρη.

Ἐὰν δὲ πάλιν ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τῶν τῆς προκειμένης γραμμῆς μερῶν, ὃς ἐν οὐδενὶ εὑρίσκεται ὀργάνῳ δὸς εἰπεῖν ὁ ρ κ̄, ἢ ρ ν̄, ἢ σ̄, διαιρεθήτω ἡ δοθεῖσα γραμμὴ εἰς τὰ τούτων ὑποδιπλάσια, ἢ ὑποτριπλάσια, οἷον τὰ ξ̄: ἢ ν̄: ἢ ρ̄: καὶ τούτων ἕκαστον πάλιν εἰς δύο ἢ τρία κατὰ τὸν λόγον τοῦ ληφθέντος ἀριθμοῦ πρὸς τὸν ζητούμενον.

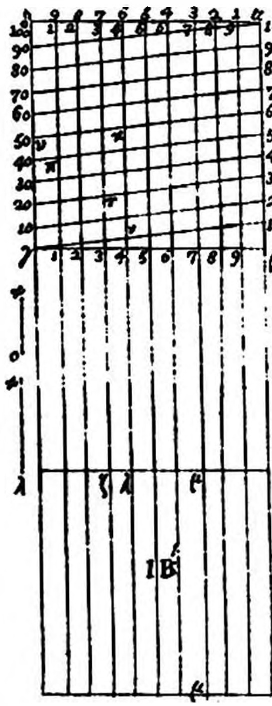
Πρότασις ΙΒ'.

Εὐθεῖαν γραμμὴν εὑρεῖν τὰ δοθέντα παρὰ τῆς κατὰ τὸν β': τρόπον κλίμακος περιέχουσαν μέρη.

Ἔστω εὑρεῖν εὐθεῖαν γραμμὴν περιέχουσαν μέρη, οἷα τὰ τῆς α β, πλευρᾶς τῆς Κλίμακος 54. Ληφθήτω δὴ ἀπὸ μὲν τῆς γ δ, πλευρᾶς τῆς κλίμακος ὁ 50, ἀριθμὸς, ἀπὸ δὲ τῆς γ β, ὁ 4, καὶ ἐπεὶ ἡ κοινὴ τούτων συνδρομή ἐστι κατὰ τὸ κ, πάντως γε ἡ 4, κ, ἔσται ἡ ζητουμένη. τῆς μὲν γὰρ α β, πλευρᾶς τῆς κλίμακος εἰς ρ̄, οὔσης διῃρημένης, ἡ 4, ν, περιεκτική ἐστι πέντων μερῶν δ, ἡ δὲ ν κ, πεντήκοντα, ὥστε ἡ ὅλη 4, κ, περιέχει ν δ. ὅτι δὲ τοῦτο ἀληθὲς δῆλον. τοῦ γὰρ β γ 10, τριγώνου ἐπεὶ ἡ 4, ν, παράλληλος ἐστὶ τῇ β 10, πάντως γε ὡς ἡ γ 4, πρὸς τὴν γ β, ἔστι καὶ ἡ 4 ν, πρὸς β 10, κατὰ τὴν β': τοῦ ς': τῶν Στοιχειωτῶν, ἀλλ' ἡ γ 4, περιεκτικὴ ἐστὶ δ, δεκαδικῶν ἀριθμῶν τῆς γ β, ἄρα καὶ ἡ 4 ν, ὁμοίως περιεκτικὴ ἐστὶ τεσσάρων δεκαδικῶν μερῶν τῆς β 10, τὰ δὲ τῆς β 10, δεκαδικὰ μέρη ἑκατοστὰ πρὸς τὴν α β, ὅλην λογίζονται, ἄρα ἡ 4 ν, περιέχει μέρη, οἷα τὰ τῆς α β, δ, ἀλλ' ἡ ν κ, περιέχει τοιαῦτα μέρη ν̄: ἴση γὰρ ἐστὶ τῇ γ υ, ἄρα ἡ ὅλη 4, κ, περιέχει τοιαῦτα μέρη ν δ.

Ἐὰν δὲ ζητηθῇ εὐθεῖα περιέχουσα πλείω τῶν ἑκατὸν μέρη, φέρ' εἰπεῖν ρ̄ν̄δ, ἔσται αὕτη ἡ λ κ. ἡ μὲν γὰρ λ 4, περιέχει μέρη ρ̄, ἴση γὰρ ἐστι τῇ α β, ἡ δὲ 4 κ, ὡς δέδεικται περιεκτικὴ ἐστι τοιούτων μερῶν ν̄δ, ὥσθ' ὅλη ἡ λ κ, περιέχει μέρη οἷα τὰ τῆς κλίμακος ρ̄ν̄δ.

Geom.Pr.Lib.3.Fig.15.



Πρότασις ΙΓ':

Τὴν δοθεῖσαν πεπερασμένην εὐθεῖαν τῇ κατὰ τὸν β': τρόπον Κλίμακι παραβαλεῖν, καὶ εὑρεῖν πόσα τῆς αὐτῆς περιέχει κλίμακος μέρη.

Δεδόσθω εὐθεῖα ἡ κ ο, καὶ ἔστω εὑρεῖν πόσα αὕτη μέρη τῆς α β, περιέχει εἰς ρ̄, διῃρημένης. Λαβὲ δὴ τῷ κοινῷ διαβήτῃ τὸ κ ο, διάστημα, καὶ θὲς τὸν ἕτερον αὐτοῦ πόδα ἐπὶ τῆς γ β, δὸς εἰπεῖν ἐπὶ τοῦ 3, σημείου, τὸν δὲ ἕτερον ἔκτεινον πρὸς τὴν α δ· κἂν ἔλαττον εἴη τῆς α β, τὸ ληφθὲν διάστημα, ἐφαρμοσθήσεται ὁ β': τοῦ διαβήτου ποὺς ἐπί τινος σημείου τῆς 3, 3, ἔστω γοῦν ἐπὶ τοῦ τ· καὶ ἐπεὶ τὸ 3, τ, διάστημα περιέχει μέρη κ̄γ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, πάντως γε καὶ ἡ κ ο, τοσαῦτα περιέχει μέρη, οἷα τὰ τῆς α β, εἰς ρ̄, διῃρημένης. Ἔστω ἔτι ἡ κ λ, καὶ τῆς αὐτῆς γενομένης πράξεως, ἐπεὶ ἐφαρμόττεται ἐπὶ τῆς ι π, πάντως γε ὅσων ἂν εἴη μερῶν τὸ ι π, διάστημα περιεκτικὸν, τοσούτων ἔσται καὶ ἡ κ λ, ἀλλὰ τὸ ι π, διάστημα περιέχει μέρη μ̄α, ἄρα καὶ ἡ κ λ, μερῶν ἐστι περιεκτικὴ μ̄α.

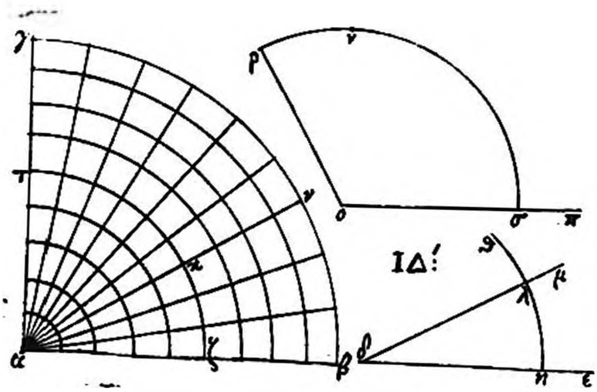
Πρό-

Πρότασις ΙΔʹ:

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν συστήσασθαι, ἢ γοῦν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὑρεῖν.

Ἔστω ἡ δε, εὐθεῖα, καὶ ζητηθήτω συσταθῆναι πρὸς τῷ δ, σημείῳ γωνία μοιρ: λ̄. Ληφθήτω δὴ τὸ αζ, διάστημα ἀπὸ τοῦ ὀργάνου, καὶ ὡς ἀπὸ κέντρου τοῦ δ, γραφήτω τὸ ηθ, τόξον, εἶτα ληφθήτω τὸ ζκ, καὶ ἀφαιρήσθω ἀπὸ τοῦ ηθ, ἴσον τῷ ζκ, τὸ ηλ, καὶ διὰ τῶν δ, καὶ λ, σημείων ἤχθω ἡ δμ, καὶ ἡ ὑπὸ εδμ, γωνία μοιρῶν ἔσται λ̄, ἴση γάρ ἐστι τῇ ὑπὸ καζ, ἡ ὑπὸ ηδλ, κατὰ τὴν κατασκευήν. ἀλλ' ἡ ὑπὸ καζ, γωνία μοιρῶν ἐστι λ̄, ὅτι καὶ τὸ βν, τόξον μοιρῶν ὁμοίως ἐστὶ λ̄. ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ εδμ, μοιρῶν ἐστι λ.

Geom. Pr. Lib.3. Fig.16.



Ἔστω ἔτι ἡ ὑπὸ εδμ, γωνία, καὶ ζητηθήτω πόσων ἂν εἴη αὕτη μοιρῶν. Ληφθήτω δὴ ὡς πρότερον τὸ αζ, διάστημα, καὶ γραφήτω τὸ ηλ, τόξον, τοῦτο δὲ παραβληθήτω τῷ ζτ, τεταρτημορίῳ, καὶ ἐπεὶ εὑρίσκεται ἴσον τῷ ζκ, μοιρῶν ὄντι λ̄, ἔσται καὶ ἡ ὑπὸ εδμ, ὁμοίως λ̄. εἰ δὲ ἡ γωνία ἀμβλεῖα εἴη, ὡς ἡ ὑπὸ ροπ, ληφθήτω τὸ αζ, διάστημα ὡς πρότερον, καὶ γραφήτω τὸ ρσ, τόξον ἀπὸ κέντρου τοῦ ο. εἶτα ληφθήτω τὸ ζτ, τεταρτημόριον, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ρσ, τὸ σν, ἴσον τῷ ζτ, τεταρτημορίῳ, τὸ δὲ ἐναπολειφθὲν νρ, ἐφαρμοσθήτω ἐπὶ τὸ ζτ, καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ζκ, πάντως γε ἡ ὑπὸ ροπ, γωνία μοιρῶν ἐστι ρκ̄, τὸ μὲν γὰρ σν, τόξον μοιρῶν ἐστιν ϙ̄, ἴσον γὰρ εἴληπται τῷ ζτ, τεταρτημορίῳ, τὸ δὲ νρ, μοιρῶν ἐστι λ̄, ἴσον γὰρ εὕρηται τῷ ζκ, ὥστε τὸ ὅλον σρ, μοιρῶν ἐστι ρκ̄, τοῦτο δὲ μέτρον ἐστὶ τῆς ὑπὸ ροπ, γωνίας, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ροπ, γωνία μοιρῶν ἐστι ρκ̄.

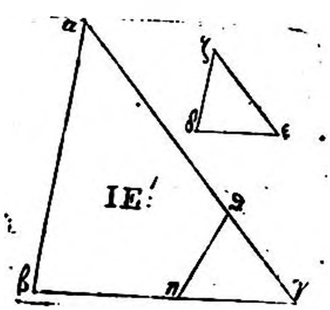
Τὸν αὐτὸν τρόπον ἡ μὲν ὑπὸ εδμ, γωνία συσταθήσεται, αἱ δὲ ὑπὸ εδμ, καὶ ὑπὸ ροπ, εὑρεθήσονται καὶ διὰ τοῦ τεταρτημορίου. εὐχερέστερον μέντοι καὶ ἁπλούστερον εὑρεθήσεται ἡ ὑπὸ ροπ, γωνία διὰ τοῦ ἡμικυκλίου, ὅλον γὰρ τὸ σρ, σ ρ, τόξον λαμβανόμενον ἅπαξ τῷ διαβήτῃ, καὶ τῷ ἡμικυκλίῳ παραβαλλόμενον, εὑρεθήσεται διὰ μιᾶς πράξεως, πόσων ἂν εἴη μοιρῶν.

Πρότασις ΙΕ':

Τοῦ δοθέντος τριγώνου μιᾶς πλευρᾶς ἐγνωσμένης, καὶ γωνιῶν δεδομένης, καὶ δύο αὐτοῦ γωνιῶν τὰς λοιπὰς εὑρεῖν πλευράς.

Ἔστω τριγώνου τοῦ α β γ, ἡ β γ, πλευρὰ, ποδῶν φέρ᾽ εἰπεῖν ι θ, ἡ δὲ ὑπὸ α β γ, γωνία μοιρῶν ἑβδομήκοντα, καὶ ἡ ὑπὸ α γ β, ξ, καὶ ζητηθήτωσαν αἱ λοιπαὶ τοῦ αὐτοῦ τριγώνου πλευραὶ αἱ α β, α γ. Ληφθήτω δὴ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸν β': τρόπου κλίμακος ἡ δ ε, εὐθεῖα μορίων, οἷα τὰ τῆς κλίμακος, ι θ, καὶ πρὸς μὲν τῷ δ, σημείῳ συνιστάσθω διὰ τῆς ἀνωτέρω ἡ ὑπὸ ε δ ζ, γωνία μοιρῶν ο, πρὸς δὲ τῷ ε, ἡ ὑπὸ δ ε ζ, μοιρῶν ξ. εἶτα εἰλήφθω τὸ δ ζ, διάστημα καὶ παραβληθήτω τῇ κλίμακι, κατὰ τὴν ι γ': τοῦ παρόντος, καὶ ἐπεὶ εὑρίσκεται περιέχειν μόρια τῆς κλίμακος ι ζ, πάντως γε καὶ ἡ α β, ποδῶν ἐστὶ ι ζ. Παραβληθήτω δ᾽ ὁμοίως τῇ κλίμακι καὶ τὸ ε ζ, διάστημα, καὶ ἐπεὶ εὑρίσκεται μορίων κ α. τοσούτων δήπουθεν ποδῶν ἐστι καὶ ἡ α γ. ὁ δὲ λόγος σαφής. τὰ γὰρ α β γ, ζ δ ε, τρίγωνα ὅμοιά εἰσι, ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγως ἔχουσι.

Geom. Pr. Lib. 3. Fig. 17.



Πρότασις Ις':

Τοῦ δοθέντος τριγώνου δύο πλευρῶν ἐγνωσμένων καὶ μιᾶς τῶν αὐτοῦ γωνιῶν, τὴν λοιπὴν πλευρὰν καὶ τὰς λοιπὰς γωνίας εὑρεῖν.

Ἔστω τοῦ αὐτοῦ α β γ, τριγώνου ἡ μὲν β γ, πλευρὰ ποδῶν ι θ, ἡ δὲ β α, ποδῶν ι ζ, καὶ ἡ ὑπὸ α β γ, γωνία μοιρῶν ο, καὶ ζητηθήτω ἥτε α γ, πλευρὰ, καὶ αἱ ὑπὸ α γ β, β α γ, γωνίαι. Ληφθήτω δὴ ἀπὸ τῆς κλίμακος ἡ δ ε, μορίων ι θ, καὶ συνιστάσθω πρὸς τῷ δ, σημείῳ γωνία ἡ ὑπὸ ε δ ζ, κατὰ τὴν ι δ': τοῦ παρόντος μοιρῶν ο, καὶ εἰλήφθω ἡ δ ζ, μοιρῶν ι ζ, οἷα τὰ τῆς κλίμακος κατὰ τὴν ι β': τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ζ ε. εἶτα παραβληθήτω ἡ ζ ε, τῇ κλίμακι, καὶ ἐπεὶ εὑ-

εὑρίσκεὀρίσκεται μοιρίων κᾱ, πάντως γε καὶ ἡ α γ, ποδῶν ἐστὶ κᾱ. ἀριθμήτω δὲ κατὰ τὴν ι δ': τοῦ παρόντος καὶ ἡ ὑπὸ δ ε ζ, γωνία, καὶ ἐπεὶ μοιρ: ἐστὶ ξ̄, τοσούτων δήπουθεν ἐστὶ καὶ ἡ πρὸς τῷ γ, ὥστε λοιπὴ ἡ ὑπὸ β α γ, μοιρ: ἐστὶ ν̄. ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν ὑπὸ α β γ, μοιρ: ὑπετέθη ο̄, ἡ δὲ ὑπὸ β γ α, εὕρηται μοιρ: ξ̄, συμποσούμεναι δὲ εἰς μίαν ποιοῦσι γωνίαν μοιρ: ρλ̄, ἐὰν ἀφαιρεθῶσιν αἱ ρλ̄, μοῖραι τῶν ρπ̄, τοσούτων γὰρ αἱ παντὸς τριγώνου τρεῖς γωνίαι μοιρῶν, ἡ λοιπὴ ἔσται ν̄. τὰ δὲ λοιπὰ δῆλα ἐκ τῆς κατασκευῆς διὰ τὴν τῶν τριγώνων ὁμοιότητα.

Πρότασις ΙΖ':

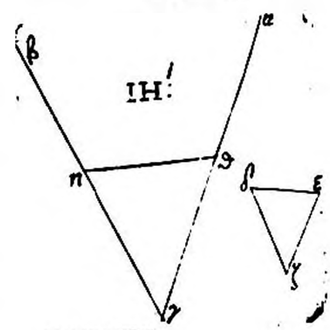
Τοῦ δοθέντος τριγώνου τῶν πλευρῶν ἐγνωσμένων, ἢ γοῦν δεδομένων τὰς γωνίας εὑρεῖν.

Ἔστωσαν τοῦ αὐτοῦ α β γ, τριγώνου αἱ πλευραὶ α β, β γ, γ α, ἐγνωσμέναι, καὶ ζητηθήτωσαν ἑαυτοῦ γωνίαι, καὶ ἡ μὲν α β, ἔστω ποδῶν ιζ, ἡ δὲ β γ, ιθ̄, καὶ ἡ γ α, κᾱ. Ληφθήτωσαν δὴ ἀπὸ τῆς κλίμακος τρεῖς εὐθεῖαι αἱ ζ δ, δ ε, ε ζ, ἡ μὲν ζ δ, μοιρ: ιζ, ἡ δὲ δ ε, μοιρ: ιθ̄, καὶ ἡ ε ζ, κᾱ, καὶ συσταθήτω ἐξ αὐτῶν τὸ ζ δ ε, τρίγωνον κατὰ τὴν κ β': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, εἶτα εὑρεθήτωσαν διὰ τοῦ τεταρτημορίου, ἢ ἡμικυκλίου αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ ζ δ ε, τριγώνου. τούτων γὰρ ἐγνωσμένων, γνωσθήσονται πάντως καὶ αἱ τοῦ α β γ, διὰ τὴν τῶν τριγώνων ὁμοιότητα.

Πρότασις ΙΗ':

Τὴν ἐπί τινος ἐπιπέδου γωνίαν εὑρεῖν, καὶ ἐν χάρτῃ, ἢ ἄλλῳ τινὶ σώματι καταγράψαι.

Geom. Pr. Lib. 3. Fig. 18.



Ἔστω καταγράψαι ἐν χάρτῃ τὴν ὑπὸ β γ α, γωνίαν ἐν ἐπιπέδῳ τινὶ κειμένην. εἰ μὲν οὖν ὁμαλὸν εἴη τὸ ἐπίπεδον, ἔξεστί σοι διά τινος ὀργάνου γεωμετρικοῦ ταύτην θηρεῦσαι. Λάβε δὴ τὸ τεταρτημόριον, ἢ ἡμικύκλιον, καὶ τὸ κέντρον αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ γ, θὲς, ὥστε τὴν μίαν αὐτοῦ πλευρὰν ἀφορᾶν καὶ ἐπεκτείνεσθαι πρὸς τὸ β, τὸν δὲ δρομέα μετάφερε ἐπὶ τῆς γ α, καὶ γνωσθήσεταί σοι ἡ ὑπὸ β γ α, γωνία. εἰδὲ μὴ τοῦτο δυνατὸν γενέσθαι, μετρηθήτω μέτρῳ τινὶ γεωμετρικῷ ἥτε γ η, καὶ γ θ, ἔτι καὶ ἡ η θ, καὶ ληφθήτωσαν ἀπὸ τῆς κατὰ τὸν β': τρόπον κλίμακος αἱ δ ζ, ζ ε, δ ε,

ἀνά-

ἀνάλογοι ταῖς η θ, θ γ, η γ, καὶ συςαθήτω ἐξ αὐτῶν τὸ δ ζ ε, τρίγωνον κατὰ τὴν εἰρημένην κ β': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ, καὶ ἔςαι τὸ ζητούμενον. ὁ λόγος σαφής. τὰ γὰρ η γ θ, καὶ δ ε ζ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν.

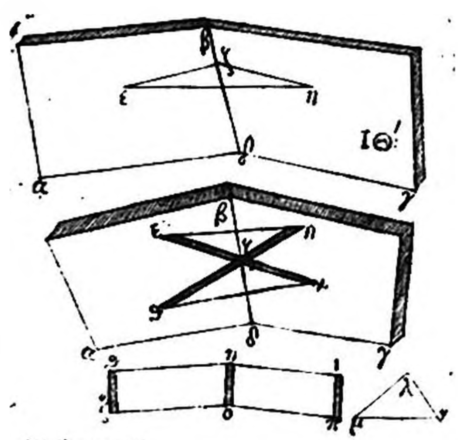
Ἔςω ἔτι εἰς ζήτησιν ἡ ὑπὸ α γ β, γωνία, τεθείτω εἰ δυνατὸν ἡ Μαγνητικὴ πυξὶς ἐπὶ τοῦ β, σημείου, ὥστε διὰ τῶν ἐν τῷ αὐτῆς κανόνι διοπτρῶν διοπτεύεσθαι τὸ γ, σημεῖον, καὶ σημειωθήτω ἡ μοῖρα ἐν ᾗ ὁ μαγνητικὸς πίπτει γνώμων, κἂν ἐπὶ τοῦ μεσημβρινοῦ ᾖ σημείου, δῆλον ὅτι καὶ ἡ β γ, μεσημβρινή ἐστιν. εἶτα μετενεχθήτω ἐπὶ τῆς γ α, καὶ σημειωθήτω αὖθις ἡ μοῖρα, καθ' ἣν ὁ γνώμων ἀφορᾷ, καὶ τὸ μεταξὺ τῶν δύο σημειωθεισῶν μοιρῶν διάςημα τὴν ζητουμένην δείξει γωνίαν.

Πρότασις ΙΘ':

Τὴν ὑπὸ τοίχων περιεχομένην γωνίαν εὑρεῖν.

Ἔςωσαν δύο τοῖχοι οἱ α β, β γ, κοινὴν ἔχοντες πλευρὰν τὴν β δ, καὶ ζητείσθω α': ἡ ἐντὸς αὐτῶν γωνία, ἡ ὑπὸ ε ζ η. Ἀχθήτω δὴ ἐπὶ τῶν ἐντὸς ἐπιφανειῶν τῶν τοίχων αἱ ζ ε, ζ η, εὐθεῖαι, καὶ μετρηθήτω ἑκατέρα Γεωμετρικῷ τινι μέτρῳ, μετρηθείσης δ' ἔτι καὶ τῆς ταύτας ἐπιζευγνυούσης, τῆς ε η, κατασκευασθήτω τρίγωνον ὅμοιον τῷ ε ζ η, καὶ εὑρεθήτω ἡ ἀνάλογος τῇ ὑπὸ ε ζ η, αὐτοῦ γωνία κατὰ τὴν ι δ': τοῦ παρόντος.

Geom. Tr. Lib. 3. Fig. 19.



Ζητείσθω β': ἡ ἐκτὸς τῶν τοίχων γωνία, ἡ ὑπὸ τῶν ἐκτὸς ἐπιφανειῶν περιεχομένη τῶν τοίχων. Ἐφαρμοσθήτω δὴ ἐφ' ἑκατέρας τῶν ἐκτὸς ἐπιφανειῶν τῶν τοίχων δύο δοκίδες, ὥστε ἀλλήλας τέμνειν, ὡς αἱ η θ, ι κ, κατὰ τὸ ζ, σημεῖον, δι' οὗ ἡ β δ, διέρχεται. εἶτα μετρηθήτω ἑκατέρα τῶν ζ θ, ζ κ, ἔτι δὲ καὶ ἡ θ κ, καὶ συςαθήτω ἐν χάρτῃ ἢ ἄλλῳ τινὶ τρίγωνον ὅμοιον τῷ ζ θ κ. τὸ λ μ ν, τούτου δ' εὑρεθήτω ἡ ὑπὸ μ λ ν, γωνία, καὶ γνωσθήσεται ἡ ὑπὸ θ ζ κ, ἀλλὰ τῇ ὑπὸ θ ζ κ, ἴση ἐςὶν ἡ ζητουμένη, κατὰ κορυφὴν γάρ, γνωσθήσεται ἄρα καὶ ἡ ἐκτὸς τῶν τοίχων ζητουμένη γωνία.

Ἄλλως. Ἐμπεπήχθωσαν τῷ ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ οἱ τοῖχοι ἐφίςανται, τρεῖς ῥάβδοι κατὰ κάθετον αἱ ξ, ο, π, ὥστε τὴν ἐν μέσῳ παραλλήλως ἐφίςασθαι τῇ β δ, τὰς δὲ θ η, η ι, ἐπιζευγνυούσας γραμμὰς τὰς ῥάβδους, παραλλήλους εἶναι ταῖς

α δ,

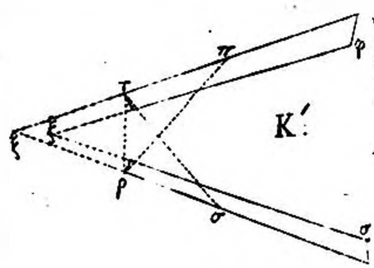
αδ, δγ, βάσεσι τῶν τοίχων, καὶ μετρηθήτω διὰ τοῦ τεταρτημορίου, ἢ ἡμικυκλίου ἡ ὑπὸ θηι, γωνία, καὶ ἐπεὶ αὕτη ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αδγ, τῇ δὲ ὑπὸ αδγ, ὁμοίως ἴση ἐστὶν ἡ ζητουμένη, γνωσθήσεται πάντως ἡ τῶν τοίχων ζητουμένη γωνία.

Πρότασις Κʹ:

Δύο τοίχων ἐγκλινομένων ἀτελευτώντων, τὴν ὑπ' αὐτῶν δυνάμει περιεχομένην γωνίαν εὑρεῖν.

Ἔστωσαν ἀντὶ τῶν βάσεων τῶν τοίχων αἱ τφ, ρσ, εὐθεῖαι ἐγκλινόμεναι πρὸς ἀλλήλας, μὴ μέντοι συμπίπτουσαι, καὶ ζητείσθω ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία ἐκβαλλομένων, ἡ ὑπὸ τξρ. Ἐπεζεύχθω ἡ τρ, εἶτα ἀχθήτωσαν αἱ τσ, ρπ, ὡς ἔτυχε, καὶ μετρηθήτω διὰ τῆς κλίμακος ἑκάστη τῶν τρ, ρσ, στ, ρπ, καὶ συσταθήτω τραπέζιον ὅμοιον τῷ τρσπ, τῶν δὲ πλευρῶν αὐτοῦ ἀναλόγων ταῖς τφ, ρσ, ἐξαγομένων, εὑρεθήτω ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία, καὶ αὕτη ἔσται ἡ ζητουμένη, ὡς ἐκ τῆς πράξεως δῆλον.

Geom. Pr. Lib.3. Fg.20.



Τέλος τοῦ Τρίτου τοῦ δευτέρου μέρους τῆς Γεωμετρίας.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

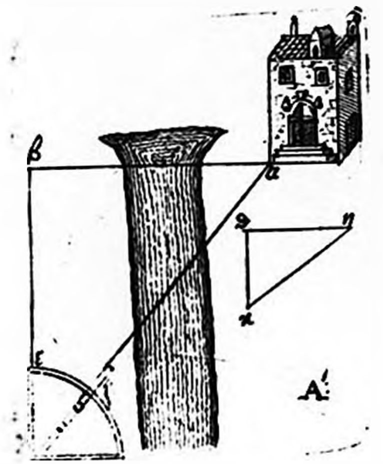
ΠΕΡΙ ΜΗΚΟΜΕΤΡΙΑΣ.

Πρότασις Α'.

Γραμμὴν ὁριζοντικὴν καθ᾽ ἓν μόνον ἄκρον προσιτὴν ἀριθμῆσαι.

Κείσθω γραμμὴ ὁριζοντικὴ ἡ αβ, προσιτὴ μὲν κατὰ τὸ β, σημεῖον, ἀπρόσιτος δὲ κατὰ τὸ α, διά τινα δὲς εἰπεῖν ποταμὸν, ἢ ἄλλο τι κωλύον, καὶ ἔσω εὑρεῖν πόσων ἂν εἴη αὕτη ποδῶν, ἢ βημάτων. Συνεστάσθω δὴ πρὸς τῷ β, σημείῳ κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, γραμμῆς διὰ τοῦ Τεταρτημορίου, ἢ Γνώμονος, ἢ Γεωμετρικοῦ σταυροῦ, ἢ ἄλλου τινὸς ὀργάνου εἰς τοῦτο χρησιμεύοντος ἡ βγ, τῆς δὲ βγ, μετρηθείσης γεωμετρικῷ τινι μέτρῳ, ληφθήτω τὸ Τεταρτημόριον, καὶ ἐφαρμοσθήτω τὸ κέντρον αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ γ, σημείου, καὶ διὰ μιᾶς τῶν αὐτοῦ πλευρῶν δὸς εἰπεῖν τῆς γε, διοπτευθήτω τὸ β, σημεῖον, διὰ δὲ τοῦ ἐν αὐτῷ δρομέως γζ, διοπτευθήτω τὸ α, ἀπρόσιτον σημεῖον. εἶτα χαρακτηρισθήτω τὸ εζ, τόξον πόσων ἂν εἴη μοιρῶν, καὶ τοσούτων πάντως ἔσται καὶ ἡ ὑπὸ βγα, γωνία. κἂν μὲν εἴη μοιρῶν με. δῆλον ὅτι ἡ βα, ἴση ἐστὶ τῇ βγ. ὀρθῆς γὰρ οὔσης τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, τῆς δὲ πρὸς τῷ γ, μοιρ: με, πάντως καὶ ἡ πρὸς τῷ α, μοιρῶν ἔσται με. αἱ τρεῖς γὰρ τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὥστε τὸ αβγ, τρίγωνον ἰσοσκελές ἐστιν. εἰ δέ γε τὸ εζ, τόξον μὴ εἴη μοιρ: με, ἀλλὰ φέρ᾽ εἰπεῖν λ, ἡ βα, δήπουθεν ἐλάττων ἔσται τῆς βγ, ὥσπερ καὶ τοὐναντίον, εἴ γε τὸ εζ, τόξον μοιρῶν εἴη δὸς εἰπεῖν ξ, ἡ βα,

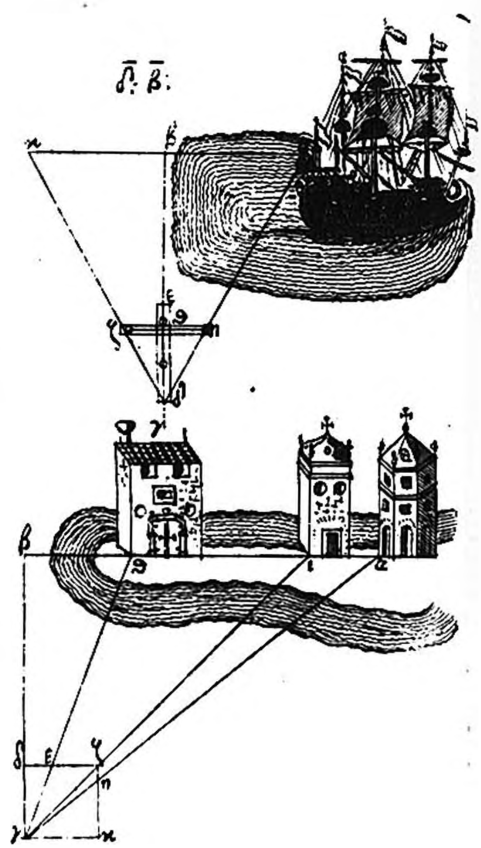
Geom. Pr. Lib. 4. Fig. 1.



ἡ βα, μείζων ἔσαι τῆς βγ, ὑπὸ γὰρ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει. Εἰς εὕρεσιν δὲ τῆς βα, συνιςάσθω τρίγ: ὅμοιον τῷ αβγ, ἐπὶ χάρτε, ἢ ἑτέρε τινὸς τὸ ηθκ, καὶ ἀριθήτω διὰ τῆς ις: τε γ': τε παρόντος ἡ θη, πλευρὰ τε ηθκ, τριγώνε, καὶ γνωσθήσεται πάντως ἡ αβ. ὅσων γὰρ ἂν εἴη μορίων ἡ θη, οἷα τὰ τῆς κλίμακος, τοσέτων ἔσαι ἡ βα, ποδῶν, ἢ βημάτων, οἵων ἡ βγ. Τίνι δὲ τρόπῳ συνίςαται τρίγωνον ὅμοιον τῷ αβγ, δῆλον. ἐὰν γὰρ ἡ θκ, ληφθῇ τοσέτων ἐκ τῆς κλίμακος μορίων, ὅσων ποδῶν, ἢ βημάτων ἐςὶν ἡ βγ, καὶ πρὸς μὲν τῷ θ, ὀρθὴ γωνία συςαθῇ, πρὸς δὲ τῷ κ, ἴση τῇ πρὸς τῷ γ, τὸ ηθκ, τρίγωνον ἴσον ἔσαι καὶ ὅμοιον τῷ αβγ, τριγώνῳ, καὶ τὰς πλευρὰς ἀναλόγως ἕξει. ὥστε ὡς ἔχει ἡ κθ, πρὸς τὴν θη, ἔχει καὶ ἡ γβ, πρὸς τὴν βα.

ΑΛΛΩΣ.

Geom. Pr. Lib. 4. Fig. 2.



Ληφθήτω ὁ Γεωμετρικὸς ςαυρὸς, καὶ τῆς βγ, εὐθείας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς βα, ὡς πρότερον ἠγμένης, τεθήτω ἕτως ἐπὶ τῆς βγ, κατὰ τὸ τυχὸν σημεῖον, ὥστε διὰ μὲν τε δε, κανόνος διοπτεύεσθαι τὸ β, σημεῖον, διὰ δὲ τῶν δ, η, διοπτρῶν τὸ α, τέτε γὰρ γενομένε, δῆλον, ὅτι ὡς ἡ δθ, πρὸς τὴν θη, ἡ δβ, πρὸς τὴν βα, τὰ γὰρ δθη, δβα, τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν. ὅσων ἄρα μερῶν εἴη ἡ θη, οἵων καὶ ἡ δθ, τοσούτων ἔσαι καὶ ἡ βα, οἵων ἡ βδ, ὥστε ὀφείλει πρότερον ἡ βδ, μετρηθῆναι, εἶτα γενέσθαι διὰ τῆς μεθόδε τῶν τριῶν ὡς ἡ δθ, πρὸς τὴν θη, ἡ δβ, πρὸς ἄλλην τινὰ, καὶ αὕτη ἔσαι ἡ ζητεμένη βα. Δυνατὸν δὲ καὶ ἄλλως τὴν αὐτὴν γενέσθαι πρᾶξιν διὰ τε αὐτε ὀργάνε. οἷον διὰ μὲν τῆς πρὸς τῷ η, διόπτρας διοπτευθήτω τὸ α, σημεῖον, διὰ δὲ τῆς πρὸς τῷ ζ, τὸ κ. εἶτα μετρηθήτω ἡ βκ, καὶ ὅσων ἂν εἴη αὕτη ποδῶν, ἢ βημάτων, τοσέτων ἔσαι καὶ ἡ βα. ἴσαι γὰρ αἱ βα, βκ, διὰ τὴν τῶν αβδ, κβδ, τριγώνων ἰσότητα.

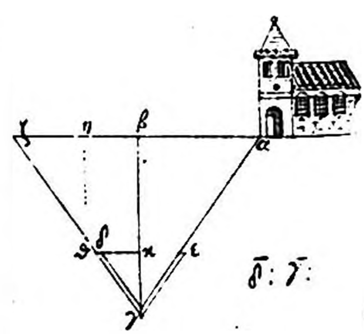
ΑΛΛΩΣ.

Τῆς βγ, καθέτε ἐπὶ τῆς βα, αχθείσης, θὲς τὸ δγεζ, τεταρτημόριον ἐπὶ τῆς βγ, εὐθείας, ὥστε διὰ μὲν τῶν ἐπὶ τῆς γ δ, αὐτοῦ πλευρᾶς πηγματίων τὸ β, διοπτεύεσθαι σημεῖον, διὰ δὲ τῆς ἐπὶ τοῦ δρομέως τὸ α. Ἐπεὶ δὲ τετραχῶς ἐνδέχεται γενέσθαι, ἡ γὰρ ὁ δρομεὺς διὰ τοῦ πέρατος τῆς δ ζ, πλευρᾶς τοῦ ὀργάνου διελεύσεται, ἢ ἐντὸς τούτου, ἢ γοῦν ἐκτός. Ἔσω δὴ τὸ ὑπόδειγμα καὶ κατὰ τοὺς τρεῖς τούτους τρόπους. ὁ αὐτὸς γὰρ ἔσται λόγος ἐν πᾶσι. Πρῶτον ἴσως διελθέτω ἐντὸς διὰ τοῦ ι, σημείου, ὡς ἡ γ ι. β΄: διὰ τοῦ ζ, ὡς ἡ γ ζ, καὶ γ΄: διὰ τοῦ ν, ὡς ἡ γ ν. συμβήσεται δὲ ἡ πρᾶξις κατὰ μὲν τὸν α΄: τρόπον, ἐπειδὴ ἡ ζητουμένη γραμμὴ ἐλάττων εἴη τῆς καθέτου, ὡς ἡ β θ, κατὰ δὲ τὸν β΄: ὅτι ἴση ἐστίν, ὡς ἡ β ι, καὶ κατὰ τὸν γ΄: ὅτι μείζων, ὡς ἡ β α. Ὅτι δὲ ὁ αὐτὸς ἐν πᾶσι λόγος, δῆλον. ὡς γὰρ ἡ γ δ, πρὸς τὴν δ ε, ἡ γ β, πρὸς τὴν β θ, ὡς δὲ ἡ γ δ, πρὸς τὴν δ ζ, ἡ γ β, πρὸς τὴν β ι, καὶ ὡς ἡ η κ, πρὸς τὴν κ γ, ἡ γ β, πρὸς τὴν β α. τὸ γὰρ γ δ ε, τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ γ β θ, τὸ δὲ γ δ ζ, τῷ γ β ι, καὶ τὸ κ η γ, τῷ γ β α. ἡ μὲν γὰρ πρὸς τῷ κ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ β, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ἡ δὲ ὑπὸ η γ κ, τῇ ὑπὸ γ α β, κατὰ τὴν κθ΄: τοῦ α΄: τῶν Στοιχείων, ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ κ η γ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ β γ α,. Διῃρημένων τοίνυν τῶν γ δ, δ ζ, πλευρῶν τοῦ ὀργάνου, καὶ τῆς β γ, ἐγνωσμένης, γενέσθω διὰ τῆς Μεθόδου τῶν τριῶν, ὡς ἡ γ δ, πρὸς τὴν δ ε, ἡ γ β, πρὸς ἄλλην τινά, καὶ γνωσθήσεται ἡ β θ. ἢ ὡς ἡ γ δ, πρὸς τὴν δ ζ, ἡ γ β, πρὸς ἄλλην τινά, καὶ γνωσθήσεται ἡ β ι. πρὸς εὕρεσιν δὲ τῆς β α, γενέσθω ὡς ἡ η κ, πρὸς τὴν κ γ, ἡ γ β, πρὸς ἄλλην τινά. κἂν μὲν διῃρημέναι ὦσι πᾶσαι αἱ τοῦ ὀργάνου πλευραί, ἕξεις τὸ ζητούμενον. εἰ δέ γε μή, παραβληθήτω τὸ η κ, διάστημα ἐπὶ τῆς γ δ, καὶ γνωσθήσεται πόσων μερῶν ἐστι τὸ η κ, οἷα τὰ τῆς γ δ, ἢ δ ζ. ἡ γὰρ κ γ, ἐγνωσμένη ἐστίν, ἴση γὰρ τῇ τε γ δ, καὶ δ ζ.

ΑΛΛΩΣ.

Τῆς β γ, ὡς πρότερον ἀχθείσης, ληφθήτω ὁ δ γ ε, γνώμων, καὶ τεθήτω ἐπὶ τῆς β γ, καθέτως, ὥστε διὰ μὲν τῆς γ ε, αὐτοῦ πλευρᾶς τὸ α, διοπτεύεσθαι σημεῖον, διὰ δὲ τῆς γ δ, τὸ ζ. ἐξαχθείσης ἤδη τῆς α β, ἀπὸ τοῦ β, σημείου κατὰ τὸ συνεχὲς ἀορίστως, εἶτα μετρηθείσης τῆς β ζ, γενέσθω διὰ τῆς Μεθόδου τῶν τριῶν, ὡς ἡ ζ β, πρὸς τὴν β γ, ἡ β γ, πρὸς ἄλλην τινά, καὶ γνωσθήσεται πάντως ἡ β α. τὰ γὰρ ζ β γ, γ β α, τρίγωνα ὅμοιά εἰσι κατὰ τὴν η΄: τοῦ ϛ΄: τῶν Στοιχ:, εἰ δὲ ἡ β ζ, μετρηθῆναι ὅλη οὐ δύναται, ἀλλ' ἡ ζ η, μόνη, ἀχθήτω καθέτως ἐπὶ τῆς ζ ν, ἡ η θ, καὶ μετρηθήτω ἥ τε ζ η, καὶ η θ. εἶτα γενέσθω καθὰ καὶ πρότερον, ὡς

Geom. Pr. lib. 4. Fig. 3.

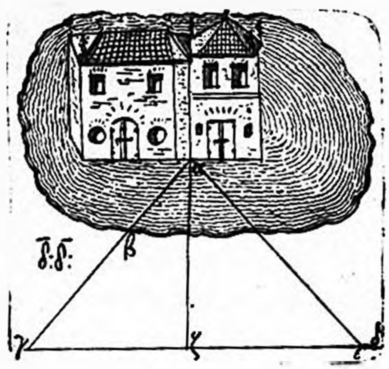


ἡ ζη, πρὸς τὴν ηθ, ἡ βγ, πρὸς ἄλλην τινά. τὸ γὰρ ζηθ, τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ζβγ. Η' ἄχθήτω ἀπὸ τοῦ δ, κάθετος ἐπὶ τῆς βγ, ἡ δκ, καὶ μετρηθήτω ἥτε δκ, καὶ κγ, εἶτα γινέσθω ὡς ἡ δκ, πρὸς τὴν κγ, ἡ γβ, πρὸς ἄλλην τινά, ὅτι καὶ τὸ δκγ, τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ τε βζγ, καὶ γβα.

Α' Λ Λ Ω Σ.

Ε'ξαχθήτω ἡ αβ, ἀπὸ τοῦ β, σημείου κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπὶ τὸ γ, σημεῖον, καὶ μετρηθήτω ἡ βγ πρὸς δὲ τῷ γ, σημείῳ συνιστάσθω γωνία μοιρῶν ξ: διὰ τοῦ τεταρτημορίου ἢ ἡμικυκλίου κατὰ τὴν ιδ': τοῦ γ': τοῦ παρόν: ἡ ὑπὸ αγδ· τοῦ δ' αὐτοῦ ὀργάνου μεταφερομένου ἐπὶ τῆς γδ, καὶ τοῦ ἐν αὐτῷ δρομέως ἐπὶ τῆς ξ': κειμένου μοίρας κατὰ τὴν προτέραν πρᾶξιν, συνιστάσθω καὶ ἡ ὑπὸ αεγ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ αγε, ἤτοι μοιρ: ξ: εἶτα ἀφῃρήσθω ἡ γβ, ἀπὸ τῆς γε, καὶ τὸ ἐναπολειφθὲν ἴσον ἔσται τῇ ζητουμένῃ αβ. τὸ γὰρ αγε, τρίγωνον ἰσόπλευρόν ἐστιν. Ε'πεὶ δὲ δυσχερὴς ἐστιν ὁ τρόπος οὗτος, ὀφείλει γὰρ τὸ ὄργανον εἰς διαφόρους τίθεσθαι τόπους· ὅπως δ' αὖ ἡ ὑπὸ αεγ, γωνία ἴση γένηται τῇ ὑπὸ αγε, παρατηρηθήτω ἐν τίνι σημείῳ πίπτει ἡ ἀπὸ τοῦ α, κάθετος ἐπὶ τῆς γδ, ὡς ἡ αζ, καὶ ἡ γζ, ἡμίσεια ἔσται τῆς αγ, ὥστε διπλασιασθείσης τῆς γζ, καὶ ἀπ' αὐτῆς ἀφαιρεθείσης τῆς βγ, τὸ ἐναπολειπόμενον ἔσται τὸ ζητούμενον. ὁ λόγος σαφής.

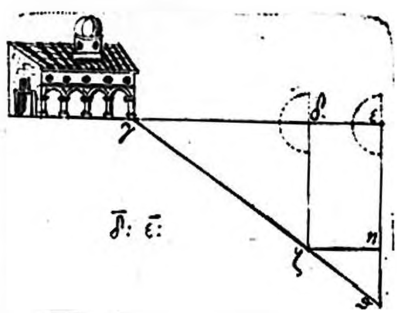
Geom. Pr. Lib. 4. Fig. 4.



Α' Λ Λ Ω Σ.

Ε'στω μετρῆσαι τὴν γδ, γραμμὴν προσιτὴν μόνον κατὰ τὸ δ. Ε'κβληθήτω δὴ ἡ γδ, εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ δ, σημείου κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπὶ τὸ ε, σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ τεταρτημορίου, ἢ ἡμικυκλίου συσταθήτωσαν γωνίαι πρὸς τοῖς δ, καὶ ε, σημείοις ἴσαι αἱ γδζ, γεη, κατὰ τὴν ιδ': τοῦ γ': τοῦ παρόντος, καὶ τῆς δζ, ἐξαγομένης κατὰ τὸ συνεχὲς ἀορίστως διοπτευθήτωσαν ἀπό τινος τῶν ἐπ' αὐτῆς σημείων, δὸς εἰπεῖν τοῦ ζ, τὰ γ, καὶ θ, σημεῖα ἑκατέρωθεν τοῦ ζ, κείμενα. εἶτα μετρηθήτωσαν αἱ ηθ, ηζ, ζδ, καὶ γενέσθω ὡς ἡ θη, πρὸς τὴν ηζ, ἡ ζδ, πρὸς ἄλλην τινά, καὶ αὕτη ἔσται ἡ δγ. τὰ γὰρ θηζ, ζδγ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν. Εἰ δὲ βούλει γνῶναι τὴν ὅλην γε, πρόσθες τῇ γδ, γνωσθείσῃ τὴν ζη. ἴση γὰρ ἡ ζη, τῇ δε. διὰ τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ δη. ἢ γοῦν μετρηθήτω ἡ θε, καὶ γινέσθω, ὡς ἡ θη, πρὸς τὴν ηζ, ἡ θε, πρὸς ἄλλην. τὰ γὰρ θηζ, θγε, τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν.

Geom. Pr. Lib. 4. Fig. 5.

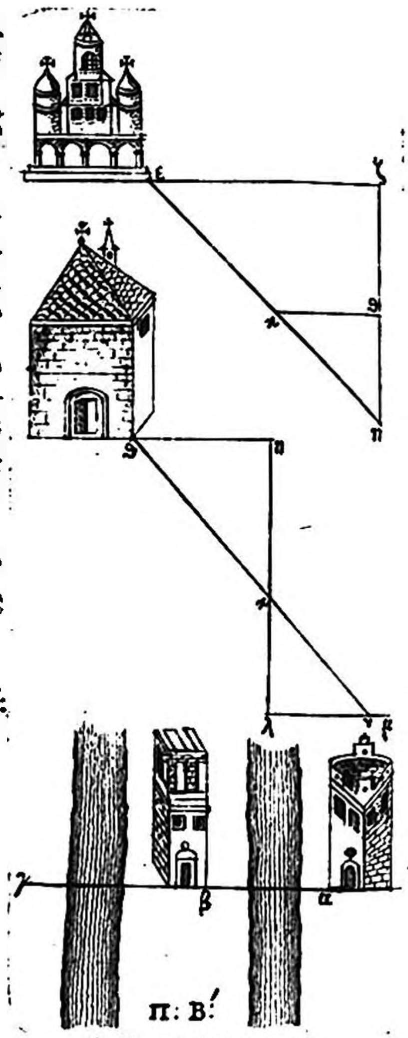


Α' Λ.

Geom. Pr. Lib. 4. Fig. 6.

ΑΛΛΩΣ.

Ζητείσθω ἡ εζ, γραμμὴ προσιτὴ κατὰ τὸ ζ. Ἤχθήτω δὴ ἀπὸ μὲν τοῦ ζ, σημείου ἡ ζη, ἀπὸ δὲ τοῦ θ, τυχόντος σημείου τῆς ζη, ἡ θκ, ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ηθκ, ἴσην τῇ ὑπὸ ηζε, ἀπὸ δὲ τοῦ κ, διοπτευθήτω τὸ ε. εἶτα μετρηθήτωσαν αἱ ηθ, θκ, ηζ. καὶ γενέσθω ὡς ἡ ηθ, πρὸς τὴν θκ, ἡ ηζ, πρὸς ἄλλην τινὰ, καὶ αὕτη ἔσται ἡ ζητουμένη ζε. ὁ λόγος σαφής. τὰ γὰρ ηθκ, ηζε, τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν.



ΑΛΛΩΣ.

Ζητείσθω ἔτι ἡ ηθ, προσιτὴ κατὰ τὸ η. Ἤχθήτω δὴ ἡ ηλ, ἀορίστως. καὶ πρὸς τῷ λ, σημείῳ συσταθήτω ἡ ὑπὸ ηλμ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ λ ηθ, ἀπὸ δὲ τοῦ κ, τυχόντος σημείου τῆς ηλ, διοπτευθήτωσαν διά τινος ὀργάνου τὰ θ, καὶ ν, σημεῖα. εἶτα μετρηθήτωσαν αἱ λκ, λν, κη, καὶ γενέσθω ὡς ἡ κλ, πρὸς τὴν λν, ἡ κη, πρὸς τὴν ηθ. ὁ λόγος ὁ αὐτός. τὰ γὰρ κλν, κηθ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν. ἔχουσι γὰρ τήν τε ὑπὸ κλν, γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ κηθ, καὶ τὴν ὑπὸ λκν, τῇ ὑπὸ ηκθ, ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ κνλ, ἴση ἐστὶ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ηθκ.

Πρότασις Β'.

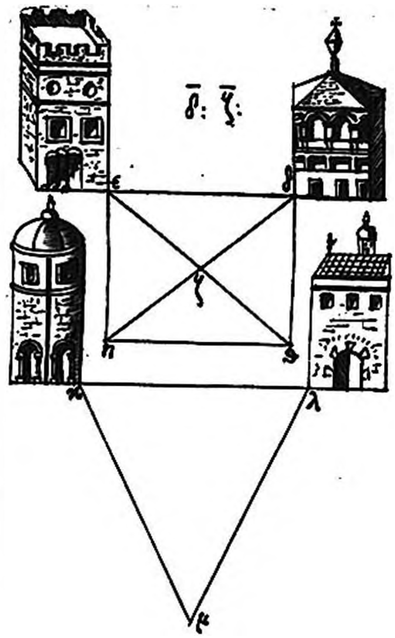
Γραμμὴν ὁριζοντικὴν καθ' ἑκάτερον τῶν ἄκρων ἀπρόσιτον ἀριθμῆσαι.

Ἔστω ἀριθμῆσαι εὐθεῖαν ὅλως ἀπρόσιτον τὴν αβ. Ληφθήτω δὴ τὸ τυχὸν ὄργανον, καὶ δι' αὐτοῦ διοπτευθήτωσαν τὰ β, καὶ α' σημεῖα ἀπό τινος προσιτοῦ σημείου, δὲς εἰπεῖν τοῦ γ, εἶτα μετρηθήτω κατά τινα τῶν εἰρημένων τρόπων ἥτε γα, καὶ γβ, καὶ ἀφῃρήσθω ἡ γβ, ἀπὸ τῆς γα, καὶ τὸ ἐναπολειπόμενον ἔσται ἡ βα. ὁ λόγος σαφής. ἡ γὰρ ζητουμένη αβ, διὰ τῆς δ: διοπτείας ἦκται κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπὶ τὸ γ, καὶ γέγονεν

ἐκαἑκατέρα τῶν αγ, γβ, προσιτὴ καὶ τὸ γ· ὥστε δυνατὸν καὶ μετρηθῆναι ἑκατέραν. Ἐγνωσμένων δ' ἀμφοτέρων, ἐὰν ἡ βγ, ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς αγ, γνωσθήσεται πάντως καὶ ἡ ζητουμένη βα. Geom. Pr. Lib.4. F 7

ἌΛΛΩΣ.

Ἔστω εἰς ζήτησιν ἡ δε, ἀπρόσιτος καὶ αὕτη καθ' ἑκάτερον τῶν ἄκρων. Διοπτευθήτωσαν δὴ τὰ ε, καὶ δ, σημεῖα ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου ζ, καὶ παρατηρηθήτω ἡ εζδ, γωνία πόσων ἂν εἴη μοιρῶν, ἔστω δὴ ϙ· εἶτα ἐξαχθήτω ἑκατέρα τῶν ζε, ζδ, κατὰ τὸ συνεχὲς, καὶ ζητηθήτωσαν τὰ η, καὶ θ, σημεῖα, πρὸς οἷς αἱ συνιστάμεναι γωνίαι ἤτοι ὑπὸ ζηε, καὶ ζθδ, μοιρῶν εἰσι με, ἴσαι δηλ: ἑκατέρα τῇ ἡμισείᾳ τῆς ὑπὸ εζδ· καὶ μετρηθήτω ἡ ηθ, καὶ οὕτω γνωσθήσεται ἡ εδ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ εζδ, ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ ζηε, ζεη, ὡς ἐκτὸς κατὰ τὴν λβ': τοῦ ά: τοῦ Στοιχειωτοῦ, καὶ εὕρηται μοιρ: ϙ, γέγονε δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζηε, μοιρ: με, πάντως γε καὶ ἡ ὑπὸ ζεη, μοιρ: ἐστὶ με, ὥστε ἡ ζε, ἴση ἐστὶ τῇ ζη. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ζδ, ἴση ἐστὶ τῇ ζθ. τῶν ἄρα εζδ, ηζθ, τριγώνων, ἐπεὶ αἱ δύο πλευραὶ εζ, ζδ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς ηζ, ζθ, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ εζδ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ηζθ, ἴση, πάντως καὶ βάσις ἡ εδ, βάσει τῇ ηθ, ἴση ἐστὶ κατὰ τὴν δ': τοῦ ά: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὥστε γνωσθείσης τῆς ηθ, γνωσθήσεται καὶ ἡ εδ, ζητουμένη.



ἌΛΛΩΣ.

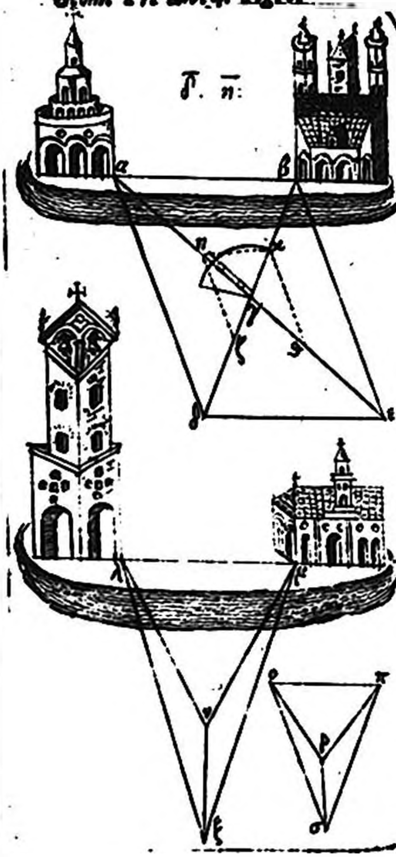
Ζητηθήτω ἡ κλ, ἑκατέρωθεν οὖσα καὶ αὐτὴ ἀπρόσιτος. Ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου τοίνυν τοῦ μ, διοπτευθήτωσαν τὰ κ, καὶ λ, σημεῖα, διὰ τοῦ τεταρτημορίου, ἢ ἡμικυκλίου, ἢ ἄλλου τινὸς ὁμοίου ὀργάνου, καὶ εὑρεθήτω ἡ πρὸς τῷ μ, γωνία πόσων ἂν εἴη μοιρ:. εἶτα μετρηθήτωσαν αἱ κμ, λμ, προσιταὶ εὐθεῖαι κατὰ τὸ μ, κατά τινα τῶν ἀνωτέρω τρόπων. τούτων δὲ γνωσθεισῶν, καὶ τῆς πρὸς τῷ μ, γωνίας διδομένης, ζητηθήτω ἡ κλ, διὰ τῆς ιϛ': τοῦ γ': τοῦ παρόντος, καὶ ἔσται σοι τὸ προσταχθέν.

Ἄλ.

Α'' Λ Λ Ω Σ.

Ζητηθήτω ἡ α β, ἀπρόσιτος ἑκατέρωθεν. Ἀπὸ τοῦ γ, τινὸς τυχόντος σημείου διοπτευθήτωσαν τὰ α, καὶ β, σημεῖα, καὶ τῶν α γ, β γ, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐξαγομένων ἐπὶ τὰ δ, καὶ ε, σημεῖα, διοπτευθήτω ἀπὸ μὲν τοῦ δ, σημείου τὸ α, ἀπὸ δὲ τοῦ ε, τὸ β, καὶ μετρηθήτωσαν αἱ ὑπὸ γ δ α, γ ε β, γωνίαι. εἶτα ληφθήτω τὸ γ ζ, πηλίκον μέρος τῆς γ δ, δὸς εἰπεῖν δ', καὶ συνεστάσθω ἡ ὑπὸ γ ζ η, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ γ δ α, ληφθήτω δὲ καὶ τὸ γ θ, ὅμοιον μέρος τῆς γ ε, καὶ γενέσθω ἡ ὑπὸ γ θ κ, ἴση τῇ ὑπὸ γ ε β, καὶ μετρηθήτω ἡ η κ, ἐπιζευχθεῖσα, εἶτα τετραπλασιασθήτω, καὶ ὁ γενόμενος ἀριθμὸς τὴν α β, ζητουμένην γραμμὴν παραστήσει. ἐπεὶ γὰρ αἱ ὑπὸ α δ γ, η ζ γ, γωνίαι γεγόνασιν ἴσαι, πάντως γε ἡ ζ η, παράλληλός ἐστι τῇ δ α, κατὰ τὴν κζ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, κατὰ δὲ τὴν β': τοῦ ϛ': τοῦ αὐτοῦ, ὡς ἡ γ ζ, πρὸς τὴν γ δ, ἐστὶ καὶ ἡ γ η, πρὸς τὴν γ α. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὡς ἡ γ θ, πρὸς τὴν γ ε, ἡ γ κ, πρὸς τὴν γ β. ἀλλ' ἥτε γ ζ, τῆς γ δ, καὶ ἡ γ θ, πρὸς τὴν γ ε, τέταρτόν ἐστι μέρος κατὰ τὴν ὑπόθεσιν. ἄρα καὶ ἡ μὲν γ η, τῆς γ α, ἡ δὲ γ κ, τῆς γ β, ὁμοίως δ': μέρος ἐστίν, ὥστε ὡς ἡ γ η, πρὸς τὴν γ α, ἡ γ κ, πρὸς τὴν γ β, καὶ ἑπομένως ἡ η κ, παράλληλός ἐστι τῇ α β, κατὰ τὴν β': τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, κατὰ δὲ τὸ πόρ: τῆς δ': τοῦ αὐτοῦ, ὡς ἡ γ η, πρὸς τὴν γ α, ἢ ἡ γ κ, πρὸς τὴν γ β, ἐστὶ ἡ η κ, πρὸς τὴν α β, ἀλλ' ἥτε γ η, τῆς γ α, καὶ ἡ γ κ, τῆς γ β, δ': μέρος ἐστίν, ὡς δέδεικται, τετραπλασιασθείσης ἄρα τῆς η κ, γενήσεται ἡ α β.

Geom. Pr. Lib. 4. Fig. 8.



Α'' Λ Λ Ω Σ.

Ζητηθήτω ἡ λ μ, ὅλως ἀπρόσιτος. καὶ ἀπὸ τοῦ ν, τυχόντος σημείου διοπτευθήτωσαν τὰ λ καὶ μ, σημεῖα καὶ παρατηρηθήτω ἡ λ ν μ, γωνία πόσων ἂν εἴη μοιρῶν, εἶτα ἀχθήτω ἡ ν ξ, ὡς ἔτυχε. Διοπτευθήτωσαν αὖθις καὶ ἀπὸ τοῦ ξ, τὰ αὐτὰ λ καὶ μ, σημεῖα, ἔτι δὲ καὶ τὸ ν, καὶ σημειωθήτω ἑκατέρα τῶν ὑπὸ λ ξ ν,

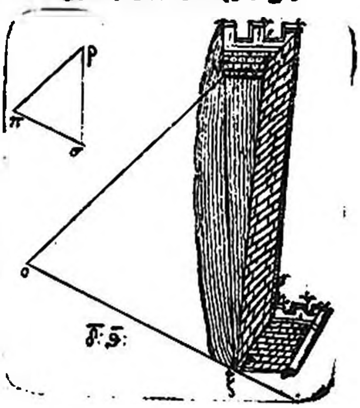
ν ξ μ,

ν ξ μ, ὑπόσων ἂν εἴη μοιρῶν καὶ μετρηθήτω ἡ ν ξ. τούτων δὲ γενομένων, εἰλήφθω ἀπὸ τῆς Κλίμακος ἡ ρ σ, τοσούτων μερῶν, ὅσων ἐστὶ ποδῶν, ἢ βημάτων ἡ ν ξ, καὶ γενέσθω ἐν χάρτῃ ἡ μὲν ο ρ π, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ λ ν μ, ἡ δὲ ὑπὸ ο σ ρ, τῇ ὑπὸ λ ξ ν, καὶ ἡ ὑπὸ ρ σ π, τῇ ὑπὸ ν ξ μ. καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ο π. εἶτα παραβληθήτω ἡ ο π, τῇ Κλίμακι, καὶ ὅσων ἂν εὑρεθείη μερῶν, τοσούτων ποδῶν, ἢ βημάτων ἔσαι καὶ ἡ λ μ. τὸ γὰρ ο σ π ρ, σχῆμα ὅμοιον γέγονε τῷ λ ξ μ ν, ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει.

Α'ΛΛΩΣ.

Ζητηθήτω ἡ ν ξ, ὅλως ἀπρόσιτος. Ἀπὸ τοῦ ο, τίνος τυχόντος σημείου διοπτευθήτωσαν τὰ ν, καὶ ξ, σημεῖα, καὶ παρατηρηθήτω ἡ ὑπὸ ν ο ξ, γωνία διὰ τοῦ τεταρτημορίου, ἢ ἡμικυκλίου, ἢ ἄλλου τινὸς ὁμοίου, καὶ ἐπεὶ αἱ ο ν, ο ξ, προσιταί εἰσι κατὰ τὸ ο, σημεῖον, εὑρεθήτω ἑκατέρα κατά τινα τῶν εἰρημένων τρόπων ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω. εἶτα εἰλήφθω ἀπὸ τῆς Κλίμακος ἡ π ρ, εὐθεῖα τοσούτων μερῶν, ὅσων ἂν εἴη ποδῶν, ἢ βημάτων ἡ ο ν, πρὸς δὲ τῷ π, σημείῳ συςαθήτω ἡ ὑπὸ ρ π σ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ν ο ξ, καὶ εἰλήφθω ἡ π σ, ὁμόλογος τῇ ο ξ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ρ σ. ἐπεὶ δὲ τοῦ π ρ σ, τριγώνου ἐγνωσμέναι εἰσὶν αἱ δύο πλευραὶ π ρ, π σ, καὶ μία γωνία ἡ ὑπὸ ρ π σ, ζητηθήτω διὰ τῆς ις': τοῦ γ': τοῦ παρόντος ἡ ρ σ, καὶ ὅσων ἂν εὑρεθείη αὕτη μερῶν τῶν τῆς Κλίμακος, τοσούτων ποδῶν, ἢ βημάτων ἔσαι ἡ ν ξ, διὰ τὴν τῶν τριγώνων ὁμοιότητα.

Geom. Pr. Lib. 4. Fig. 9.



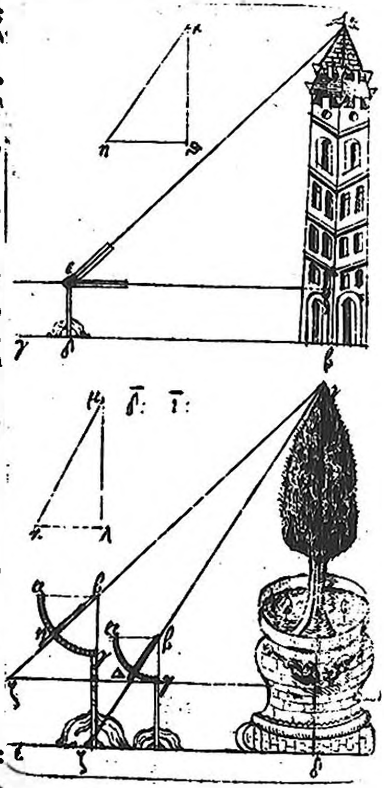
Πρότασις Γ': Περὶ Ὑψομετρίας.

Ὕψος προσιτὸν ἐν ὁριζοντικῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς κείμενον μετρῆσαι.

Ἔςω ὕψος τὸ α β, ἐν ὁριζοντικῷ ἐπιπέδῳ τῷ β γ, προσιτὸν κατὰ τὸ β, σημεῖον, καὶ ζητηθήτω ἡ αὐτοῦ διάςασις. Ἐμπεπήχθω δὴ ἐπὶ τοῦ τυχόντος σημείου τοῦ β γ, ἐπιπέδου παραλλήλως τῷ β α, ὕψει ἡ δ ε, ῥάβδος. καὶ ληφθήτω τὸ β ζ, διάςημα τοῦ β α, ὕψους ἴσον τῇ δ ε, ῥάβδῳ, ἀπὸ δὲ τοῦ ε, διοπτευθήτωσαν διὰ τοῦ Ἀναλόγου Διαβήτου τὰ ζ, καὶ α, σημεῖα, καὶ παρατηρηθήτω κατὰ τὰ προειρημένα ἡ ὑπὸ ζ ε α, γωνία πόσων ἂν εἴη μοιρῶν. εἶτα μετρηθήτω ἡ β δ, Γεωμετρικῷ τινι μέτρῳ, καὶ ληφθήτω ἡ η θ, ἀπὸ τῆς

Κλίμακος τοσούτων μερῶν, ὅσων ἂν εἴη ποδῶν, ἢ βημάτων ἡ βδ, καὶ συνεστάσθω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον τὸ ηθκ, ὅμοιον τῷ εζα, καὶ παραβληθήτω ἡ θκ, τῇ Κλίμακι, καὶ γνωσθήσεται ἡ ζα. ὅσων γὰρ ἂν ἡ θκ, ἀριθμῇ μερῶν τῆς Κλίμακος, τοσούτων ποδῶν ἢ βημάτων ἐστὶ καὶ ἡ ζα. προστιθεμένης δὲ τῆς βζ, ἐγνωσμένης, γνωσθήσεται ὅλη ἡ βα. διὰ γὰρ τὴν ὁμοιότητα ὡς ἡ ηθ, πρὸς τὴν θκ, ἡ εζ, πρὸς τὴν ζα.

Geom. Pr. Lib. 4. Fig. 10.



ΑΛΛΩΣ.

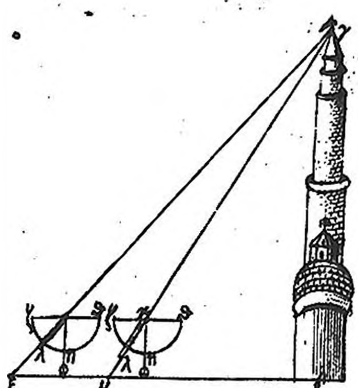
Ἔστω ὕψος τὸ γδ, προσιτὸν κατὰ τὸ δ, ἐν ἐπιπέδῳ κείμενον ὁριζοντικῷ τῷ δε. Τεθήτω δὴ ἐπὶ τοῦ τυχόντος σημείου τοῦ δε, ἐπιπέδου στηρίγματι ἔμπεδον, ἐν ᾧ τὸ ὄργανον ὀφείλει ἐφίστασθαι. εἶτα ληφθήτω τὸ Τεταρτημόριον, καὶ τεθήτω ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου στηρίγματος, ὥστε τὴν μὲν αβ, αὐτοῦ πλευρὰν παραλλήλως κεῖσθαι τῷ ὁρίζοντι, τὴν δὲ βγ, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τοῦ δε, ὁριζοντικοῦ ἐπιπέδου. τοῦτο δ' ἔσται ἐὰν τὸ ἀπὸ τοῦ β, σημείου ἀπῃωρημένον σπαρτίον τῇ βγ, συμπέσῃ. τούτου δὲ οὕτω κειμένου, διοπτευθήτω διὰ τοῦ βΔ, κανόνος τὸ γ, σημεῖον, ἔτι δὲ καὶ τὸ ζ. ἐπεὶ δὲ τοῦτο διχῶς ἐνδέχεται συμβῆναι, εἰ γὰρ ὁ κανὼν διὰ τοῦ ἐν μέσῳ σημείου τοῦ αΔγ, διελεύσεται Τεταρτημορίου, ἢ δι' ἄλλου τινός. Ἔστω α: διὰ τοῦ ἐν μέσῳ, ὥστε τὴν ὑπὸ αβΔ, γωνίαν μοιρῶν εἶναι με. ἐπὶ τούτου τοίνυν μετρηθήτω ἡ δζ, καὶ ὅσων ἂν εἴη αὕτη ποδῶν, ἢ βημάτων, τοσούτων ἔσται καὶ ἡ δγ. ἡ γὰρ βζδ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αβζ, ὡς ἐναλλάξ, ἀλλ' ἡ αβζ, μοιρῶν ὑπετέθη με, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ βζδ, μοιρῶν ἐστι με, ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ δ, ὀρθή, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ δγζ, μοιρῶν ἐστὶ με, αἱ γὰρ τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὥστε τὸ γδζ, τρίγωνον ἰσοσκελές ἐστι, καὶ ἡ γδ, ἴση τῇ δζ. Ἔστω β: τὸν ὁρμέα διὰ τοῦ η, διέρχεσθαι, καὶ τὴν ὑπὸ αβη, γωνίαν ἐλάττονα εἶναι τῆς ἡμισείας, ἤτοι μοιρ: λ. Μετρηθήτωσαν δὴ αἱ ηα, αβ, εδ. εἶτα γενέσθω ὡς ἡ ηα, (διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν) πρὸς τὴν αβ, ἡ εδ, πρὸς ἄλλην τινά, καὶ γνωσθήσεται ἡ δγ. ὁ λόγος σαφής· τὰ γὰρ ηαβ, εδγ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν, ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς ἀναλόγους ἔχουσι.

σι, καὶ ταῦτα μὲν Γεωμετρικῶς. Διὰ δὲ τῆς Τριγωνομετρίας γενέσθω ὡς τὸ Ἡμίτονον τῆς ὑπὸ ε γ δ, πρὸς τὸ Ἡμίτονον τῆς ὑπὸ γ ε δ, οὕτως ἡ ε δ, ἐγνωσμένη πρὸς ἄλλην τινὰ, καὶ γνωσθήσεται πάντως ἡ δ γ, κατὰ τὴν α: τοῦ περὶ διαλύσεως τῶν τριγώνων· ἢ καὶ οὕτω, ὡς τὸ Ὁλικὸν Ἡμίτονον πρὸς τὴν Ἀποτομένην τῆς ὑπὸ γ ε δ, γωνίας, ἡ ε δ, πρὸς ἄλλην τινὰ, καὶ γνωσθήσεται ὁμοίως ἡ δ γ, κατὰ τὴν β: τοῦ αὐτοῦ.

ΑΛΛΩΣ.

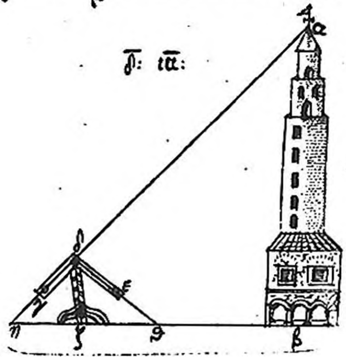
Τοῦ αὐτοῦ ὕψους κειμένου, καὶ τῶν αὐτῶν πράξεων γενομένων, ὡς ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω, διὰ τοῦ ἡμικυκλίου, ἐπεὶ κἀνταῦθα διχῶς ἐνδέχεται ἡ ἔφοδος γενέσθαι, ὡς ἐπὶ τοῦ σχήματος καθορᾶται, ὁ αὐτὸς ἔσται λόγος, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω πράξεως. τοῦ γὰρ ζ κ θ, ἡμικυκλίου ἐπὶ τοῦ στηρίγματος ὀρθῶς ἐπιτιθεμένου, ὁ δρομεὺς ἡ διὰ μέσου τοῦ ζ κ, διελεύσεται τεταρτημορίου, ὥστε τὴν ὑπὸ ζ κ λ, γωνίαν μοιρῶν εἶναι μέ, καὶ ἔσται τότε ἡ μ δ, ἴση τῇ δ γ, ἢ ἐκτὸς τοῦ ἐν μέσῳ σημείου διελεύσεται, ὥστε εἶναι τὴν ὑπὸ ζ ν λ, γωνίαν ἐλάττονα τῶν μέ. διὸ δεῖ καὶ τὰς αὐτὰς γενέσθαι ἀναλογίας Γεωμετρικάς τε καὶ Τριγωνομετρικάς.

Geom. Pr. Lib. 4. Fig. 11.



ΑΛΛΩΣ.

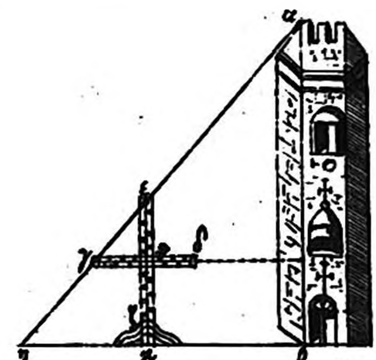
Τοῦ α β, ὕψους ζητουμένου προσιτοῦ ἤδη κατὰ τὸ β, ληφθήτω ὁ Γεωμετρικὸς Γνώμων γ δ ε, καὶ τεθήτω ἐπὶ τοῦ δ ζ, πρὸς ὀρθὰς κειμένου στηρίγματος ἐπὶ τοῦ η β, ὁριζοντικοῦ ἐπιπέδου, ὥστε διὰ μὲν τῆς γ δ, αὐτοῦ πλευρᾶς διοπτεύεσθαι τὰ α, καὶ η, σημεῖα, διὰ δὲ τῆς δ ε, τὸ θ. εἶτα μετρηθήτωσαν αἱ η δ, δ θ, η β, καὶ γενέσθω Ἀριθμητικῶς μὲν διὰ τῆς Μεθόδου τῶν Τριῶν, ὡς ἡ η δ, πρὸς τὴν δ θ, ἡ η β, πρὸς ἄλλην τινὰ, καὶ γνωσθήσεται ἡ β α. τὰ γὰρ η δ θ, η β α, τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν, ἔχουσι γὰρ τάς τε ὑπὸ η δ θ, η β α, γωνίας ἴσας, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, καὶ τὴν πρὸς τῷ η, κοινὴν, ὥστε καὶ λοιπὰς τὰς ὑπὸ δ θ η, β α η, ἴσας ἔχουσιν, ἰσογώνια ἄρα. διὸ δὴ καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσι κατὰ τὴν δ: τοῦ ς: τοῦ Στοιχειωτοῦ. Τριγωνομετρικῶς δὲ, ὡς τὸ Ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας πρὸς τὸ Ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ η, γενέσθω ἡ η β, πρὸς ἄλλην τινὰ, καὶ αὕτη ἔσται ἡ β α. ἢ ὡς τὸ Ὁλικὸν Ἡμίτονον πρὸς τὴν Ἀποτομένην



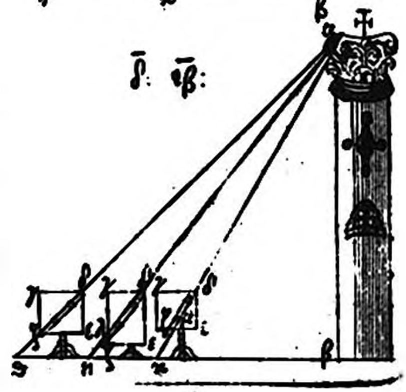
τῆς πρὸς τῷ η, γωνίας, ἡ ηβ, πρὸς ἄλλην τινὰ ὡς πρότερον, καὶ γνωσθήσεται ἡ βα.

ΑΛΛΩΣ.

Ζητουμένου τοῦ αβ, ὕψους προσιτοῦ κατὰ τὸ β, ληφθήτω ὁ Γεωμετρικὸς Σταυρὸς γδεζ, καὶ τεθήτω ἐπί τινος στηρίγματος ἐπὶ τοῦ βη, ἐπιπέδου ὀρθῶς κειμένου, Geom. Pr. Lib.4. Fig.12. ὥστε διὰ τῶν ἐν τῷ γ, καὶ ε, πτυγματίων διοπτεύεσθαι τὰ α, καὶ η, σημεῖα· κἂν μὲν αἱ τοῦ πλευραὶ γδ, εζ, εἰς ἴσα εἰσὶ διῃρημέναι, μετρηθήτω ἡ ηβ, μόνον διάστασις· εἶτα γενέσθω ὡς ἡ γθ, πρὸς τὴν θε, ἡ ηβ, πρὸς ἄλλην τινὰ, καὶ γνωσθήσεται ἡ βα, ζητουμένη. τὰ γὰρ γθε, ηβα, τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν. εἰδέ γε αἱ γδ, εζ, οὐκ εἰσὶ διῃρημέναι εἰς ἴσα, ἀπαιωρηθήτω ἀπὸ τοῦ ε, σημείου σφαιρίδιόν τι πίπτον ἐπὶ τοῦ κ· εἶτα μετρηθήτωσαν αἱ ηκ, κε, ηβ, καὶ γενέσθω ὡς ἡ ηκ, πρὸς τὴν κε, ἡ ηβ, πρὸς ἄλλην τινὰ, καὶ γνωσθήσεται πάντως κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ βα.



δ: ιβ:



Εἰδ᾽ ἔσοι βουλητὸν εὑρεθῆναι καὶ διὰ τῆς Τριγωνομετρίας τὸ ζητούμενον ὕψος, γενέσθω ὡς ἀνωτέρω προειρημένον ἐστί.

ΑΛΛΩΣ.

Τοῦ αβ, ὕψους κειμένου εἰς εὕρεσιν, ληφθήτω τὸ Γεωμετρικὸν Τετράγωνον γδεζ, καὶ τεθήτω ἐπί τινος στηρίγματος, καθὰ καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων εἴρηται· τὴν μὲν γδ, αὐτοῦ πλευρὰν παραλλήλως κεῖσθαι τῷ ὁρίζοντι, τὴν δὲ γζ, πρὸς ὀρθὰς, καὶ διοπτευθήτωσαν διὰ τοῦ ἐν αὐτῷ δρομέως τὰ α, καὶ η, σημεῖα, ὡς κατὰ διάμετρον ἀντικείμενα, τὸ μὲν ἐπὶ τῆς κορυφῆς ὂν τοῦ ὕψους, τὸ δὲ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ὁριζοντικῷ ἐπιπέδῳ. ἀλλ᾽ ἐπεὶ καὶ τοῦτο τριχῶς ἐνδέχεται συμβῆναι, ἢ γὰρ ὁ δρομεὺς διὰ τῆς πρὸς τῷ ζ, διελεύσεται γωνίας, ἢ διὰ μέσου τῆς γζ, πλευρᾶς, ἢ γοῦν διὰ μέσου τῆς ζε· παρατηρηθήτω κατὰ τίνα τρόπον ἡ πρᾶξις γίνεται, κἂν μὲν κατὰ τὸν α: πάντως γε ἡ βη, ἴση ἔσται τῇ βα· εἰ δὲ κατὰ τὸν β:, ἔσται τὸ λγδ, τρίγωνον ὅμοιον τῷ αβθ, ὥστε ἐὰν γένηται ὡς ἡ δγ, πρὸς τὴν γλ, ἡ θβ, πρὸς ἄλλην τινὰ, γνωσθήσε-

ται

ται ἡ βα. εἰ δὲ πλάγιον κατὰ τὸν γ': τρόπον γένηται ἡ πρᾶξις, ἔσαι τὸ μεδ, τρίγ: ὅμοιον τῷ κβα, κἂν γένηται ὡς ἡ με, πρὸς τὴν εδ, ἡ κβ, πρὸς ἄλλω τινά, δοθήσεται ἡ βα,. ὁ λόγος σαφής.

Α'ΛΛΩΣ.

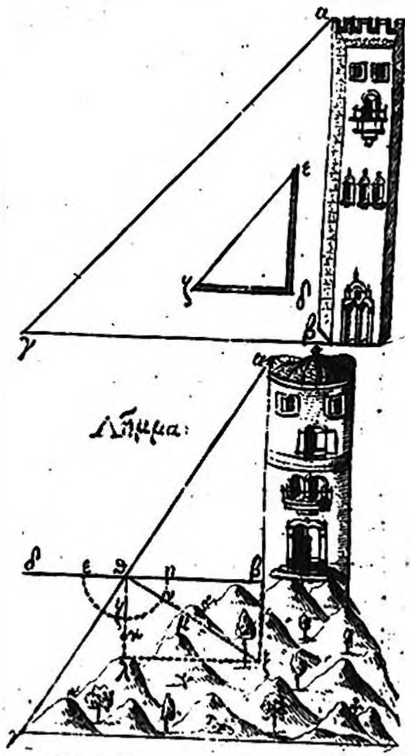
Ε'ςω ὕψος τὸ αβ, ποιοῦν σκιὰν τὴν βγ. Ε'μπεπήχθω ἐπὶ τοῦ ὁριζοντικοῦ ἐπιπέδου ῥάβδος τις ἡ δε, ποιοῦσα σκιὰν τὴν δζ. εἶτα μετρηθήτω ἡ μὲν βγ, σκιὰ τοῦ βα, ὕψους Γεωμετρικῷ τινι μέτρῳ,

Geom. Pr. lib. 4. Fig. 13.

ἡ δὲ ζδ, ᾧ τινι καὶ ἡ δε, μετρεῖται ῥάβδος, καὶ γενέσθω ὡς ἡ ζδ, πρὸς τὴν δε, ἡ γβ, πρὸς ἄλλω τινά, καὶ ἔσαι τὸ ζητούμενον. τὰ γὰρ ζδε, γβα, τρίγωνα ὅμοιά εἰσι.

ΛΗ'ΜΜΑ.

Υ'ψος προσιτοῦ ἐπὶ ἐγκλινομένου ἐπιπέδου ὄντος, τὴν τῆς ἐγκλίσεως αὐτοῦ γωνίαν εὑρεῖν.



Ε'ςω ὕψος τὸ αβ, ἐπὶ ἐγκλινομένου ἐπιπέδου τοῦ βγ, Γραμμὴ δὲ ὁριζοντικὴ ἡ βδ, καὶ ζητηθήτω ἡ ὑπὸ δβγ, τῆς ἐγκλίσεως γωνία. Τεθήτω δὴ τὸ εζη, Ἡμικύκλιον, ὥστε διὰ τῆς αὐτοῦ εη, διαμέτρου ὁρᾶσθαι τὸ β, σημεῖον. ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἀπῃωρήσθω τὸ θκ, σφαιρίδιον, καὶ ἐκτεινέσθω ἡ θκ, μέχρι τοῦ λ. τῆς δὲ βλ, δίχα διαιρεθείσης κατὰ τὸ μ, μετενεχθήτω ὁ τοῦ ὀργάνου δρομεὺς ἐπὶ τὸ ν, ὥστε δι' αὐτοῦ τὸ μ, ὁρᾶσθαι σημεῖον. καὶ ὅσων ἂν ἦν μερῶν ἡ ὑπὸ ηθν, γωνία, τοσούτων ἔσαι καὶ ἡ ὑπὸ ηβμ. τῆς μὲν γὰρ αξ, ἐννοουμένης κατὰ τὸ συνεχὲς ἐξάγεσθαι, ὥστε τὴν βξ, ἴσην τε καὶ παράλληλον εἶναι τῇ θλ. τὴν δὲ λξ, τῇ θβ, καὶ τῆς θμ, ἐπὶ τὸ ξ, κατὰ τὸ συνεχὲς ἠγμένης, δῆλον, ὅτι τὸ θξ, παραλληλόγραμμόν ἐστιν. ἐπεὶ δὲ ἡ μὲν βμ, ἴση ἐστὶ τῇ μλ, ἡ δὲ θβ, τῇ λξ, καὶ ἡ ὑπὸ θβμ, γωνία τῇ ὑπὸ ξλμ, πάντως γε καὶ ἡ θμ, ἴση ἐστὶ τῇ μξ, ἀλλ' ἡ ὅλη βλ, ἴση ἐστὶ τῇ θξ, ὡς δειχθήσεται, ἄρα καὶ ἡ ἡμίσεια βμ, ἴση ἐστὶ τῇ ἡμισείᾳ θμ, καὶ τὸ θμβ, τρίγωνον ἰσοσκελές· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ βθμ,

τῇ

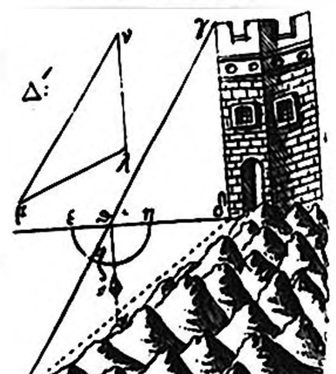
τῇ ὑπὸ θβμ. ἐγνωσμένης ἄρα τῆς ὑπὸ βθμ, γινώσκεται καὶ ἡ ὑπὸ θβμ, ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Ὅτι δὲ ἡ βλ, ἴση ἐστὶ τῇ θξ, δῆλον. τὸ γὰρ θλξβ, ὀρθογώνιόν ἐστιν, ὀρθαὶ γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ θβξ, βθλ, διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς αξ, θλ. καὶ ἐπεὶ αἱ δύο βθ, θλ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς λξ, βξ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βθλ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βξλ, ἴση, δῆλον, ὅτι καὶ βάσις ἡ βλ, βάσει τῇ θξ, ἴση ἐστί.

Πρότασις Δʹ:

Ὕψος πρόσιτον ἐπὶ ἐγκλινομένου ἐπιπέδου μετρῆσαι.

Ἔστω ὕψος τὸ γδ, ἐπὶ ἐγκλινομένου ἐπιπέδου τοῦ δε, καὶ ζητείσθω ἡ δγ, τούτου διάστασις. Τεθήτω δὴ τὸ εζη, ἡμικύκλιον κατὰ τὸ θ, ὥστε διὰ τῆς εη, διαμέτρου τοῦ αὐτοῦ ὁρᾶσθαι τὸ δ, σημεῖον παραλλήλως τῷ ὁρίζοντι κειμένης, καὶ διοπτευθήτωσαν διὰ τοῦ ἐν αὐτῷ δρομέως τὰ γ καὶ ε, σημεῖα. εἶτα ζητείσθω ἡ ὑπὸ γδε, γωνία. εὑρεθήσεται γὰρ ὡς ὀψόμεθα, καὶ ἔστω ὡς εἰπεῖν μοιρῶν ρκ. παρατηρηθήτω δὲ καὶ ἡ ὑπὸ εθζ, καὶ ταύτης ἀφῃρήσθωσαν μοῖραι λʹ: ἡ τῆς γδε, ὑπεροχὴ πρὸς τὴν ὀρθήν, καὶ ἐναπολειφθήσεται ἡ ὑπὸ θεδ. ταύτης δὲ γνωσθείσης μετρηθήτω ἡ δε, ὅσων δ' αὖ εἴη ποσῶν(?) ἡ δε, τοσούτων μερῶν ληφθήτω ἀπὸ τῆς κλίμακος ἡ λμ, καὶ συνεστάσθω πρὸς μὲν τῷ λ, σημείῳ ἡ ὑπὸ μλν, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ εδγ, πρὸς δὲ τῷ μ, ἡ ὑπὸ λμν, ἴση τῇ ὑπὸ δεγ, καὶ συσταθήσεται τὸ μλν, τρίγωνον ὅμοιον τῷ εδγ. ἐπεὶ δὲ τοῦ μλν, τριγώνου ἔγνωσται ἡ μλ, πλευρά, καὶ αἱ δύο αὐτοῦ γωνίαι αἱ ὑπὸ μλν, λμν, πάντως γνωσθήσεται καὶ ἡ λν, κατὰ τὴν ιε: τοῦ γ: τοῦ παρόντος, ὅσων δ' αὖ εἴη μοιρῶν ἡ λν, τοσούτων ἔσται δήπουθεν ποδῶν ἢ βημάτων ἡ δγ, ζητουμένη διάστασις. ὡς γὰρ ἡ μλ, πρὸς τὴν λν, ἐστὶ καὶ ἡ εδ, πρὸς τὴν δγ, διὰ τὴν τῶν τριγώνων ὁμοιότητα. Τίνος δὲ χάριν ζητεῖται ἡ ὑπὸ γδε; ἢ ἵνα ἡ τῆς ἐγκλίσεως γνωσθῇ γωνία, καθ' ἣν ἡ ὑπὸ γδε, τὴν ὀρθὴν ὑπερέχει, καὶ αὕτη ἐστὶν ἡ ὑπὸ θδε, ἀφαιρεῖται δ' αὕτη ἀπὸ τῆς εθζ, ὅτι ἡ μὲν εθζ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γθδ, ἡ δὲ ὑπὸ γθδ, ἴση ὁμοίως ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ θεδ, θδε. Διὰ δὴ ἀφαιρουμένης τῆς ὑπὸ θδε, γινώσκεται ἡ ὑπὸ θεδ, ἐγνωσμένης δὲ καὶ τῆς ὑπὸ εδγ, τῆς δὲ εδ, μετρηθείσης δυνατὸν συσταθῆναι τὸ μλν, τρίγωνον ὅμοιον τῷ εδγ, τριγώνῳ. τὰ λοι-

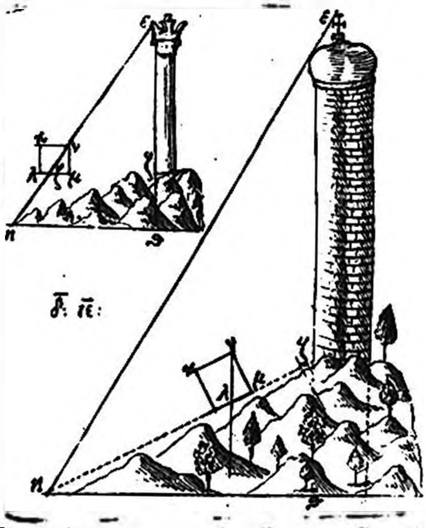


Geom. Pr. lib. 4. Fig. 4.

πὰ

τὰ δῆλα. τὴν δὲ ὑπὸ ε δ γ, γωνίαν διχῶς ἔξεστι θηρεύειν. ἢ γὰρ ζητεῖται διὰ τοῦ ἀνωτέρω σχήματος ἡ ὑπὸ θ δ ε, καὶ εὑρεθεῖσα προστίθεται τῇ ὀρθῇ, ἢ μερίζεται ἑκατέρα τῶν θ ε, θ κ. καὶ ἐπεὶ ἐγνωσμένη ἐστὶν ἡ ὑπὸ ε θ κ, γωνία, εὑρίσκεται διὰ τῆς ιϛ': τοῦ γ': τοῦ παρόντος καὶ ἡ ὑπὸ θ κ ε, αὕτη δὲ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ε δ γ, κατὰ τὴν κη': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ. Geom. Pr. Lib.4. Fig.15.

ΑΛΛΩΣ.



Ἔστω δὴ μετρῆσαι τὸ ε ζ, ὕψος πρόσιτον μὲν κατὰ τὸ ζ, σημεῖον, κείμενον δὲ ἐπὶ τοῦ ζ η, ἐγκλινομένου ἐπιπέδου. Ζητηθήτωσαν τοίνυν α': ἥτε διὰ τοῦ πέρατος τοῦ ζ η, ἐγκλινομένου ἐπιπέδου ὁριζοντικὴ γραμμή, οἷον ἡ η θ, καὶ ἡ ζ θ, ἡ ἐπ' εὐθείας προσκειμένη τῇ ζ ε, καὶ μὴ τῇ αἰσθήσει ὑποπίπτουσα, ὥσπερ καὶ ἡ η θ. Εὑρεθήσονται δὲ αὗται ἐὰν τὸ κ λ μ ν, τετράγωνον ἐπὶ τοῦ ζ η, τεθῇ ἐγκλινομένου ἐπιπ: ὥστε τὴν μίαν τῶν αὐτοῦ πλευρῶν δὸς εἰπεῖν τὴν λ μ, ἐφαρμόττεσθαι τῷ ζ η, ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ ν, κρεμάμενον σφαιρίδιον κατὰ κάθετον πίπτειν τῷ ὁρίζοντι. οὕτω γὰρ τοῦ ὀργάνου κειμένου τὰ λ μ ν, η θ ζ, τρίγωνα ὅμοια ἔσονται. ἔχουσι γὰρ τάς τε ὑπὸ η θ ζ, λ μ ν, γωνίας ἴσας, ἅτε δὴ ὀρθὰς, καὶ τὰς ὑπὸ ν λ μ, λ ζ θ, ἴσας, ὡς ἐναλλάξ, ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσιν, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ν λ, πρὸς τὴν λ μ, ἡ η ζ, πρὸς τὴν ζ θ, καὶ ὡς ἡ ν λ, πρὸς τὴν ν μ, ἡ ζ η, πρὸς τὴν η θ. Τριχῶς δὲ καὶ τοῦτο συμβαίνειν ἐνδέχεται, ἢ γὰρ ἡ λ ν, διαγωνίως διέρχεται, καὶ εἰσὶν ἴσαι αἱ η θ, θ ζ, ἢ ἐκτὸς τοῦ λ, πίπτει, καὶ εἰσὶν ἄνισοι. Ἔστωσαν δὴ ἐγνωσμέναι διὰ τῶν ἀνωτέρω εἰρημένων αἱ η θ, θ ζ, καὶ τεθήτω τὸ κ λ μ ν, Γεωμετρικὸν τετράγωνον, ὥστε τὰς κ ν, λ μ, αὐτοῦ πλευρὰς παραλλήλως κεῖσθαι τῷ ὁρίζοντι, καὶ διὰ τοῦ ἐν αὐτῷ δρομέως διοπτεύεσθαι τὰ ε καὶ η, σημεῖα. εἶτα γινέσθω ὡς ἡ ζ μ, πρὸς τὴν μ ν, ἡ η θ, πρὸς τὴν θ ε, τὰ γὰρ ζ μ ν, η θ ε, τρίγ: ἰσογώνιά εἰσιν, ὡς δῆλον τῷ καὶ μικρὸν ἐπιστήσαντι, καὶ γνωσθήσεται δήπουθεν ἡ θ ε, ταύτης δὲ ἀφαιρεθείσης τῆς θ ζ, ἐγνωσμένης, γνωσθήσεται καὶ τὸ ζ ε, ὕψος. ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

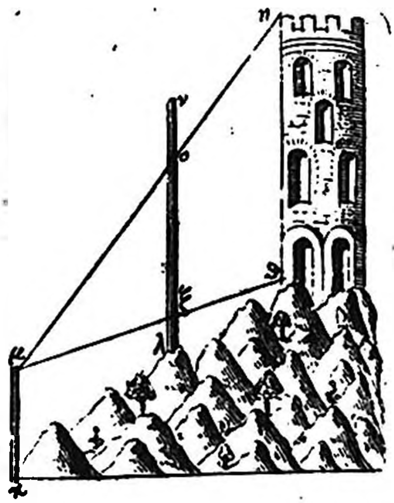
ΑΛΛΩΣ.

Ζητηθήτω ἔτι τὸ η θ, ὕψος τὸ ἐπὶ τοῦ θ κ, ἐγκλινομένου ἐπιπέδου. Ληφθήτωσαν δὴ δύο ῥάβδοι ἄνισοι, καὶ ἡ μὲν ἐλάττων κ μ, ἐμπεπήχθω πρὸς τῷ κ, σημείῳ τοῦ θ κ, ἐπιπέδου, ὥστε πρὸς ὀρθὰς εἶναι τῷ ὁρίζοντι. ἡ δὲ μείζων

λ ν,

Geom. Pr. Lib.4. Fig.16.

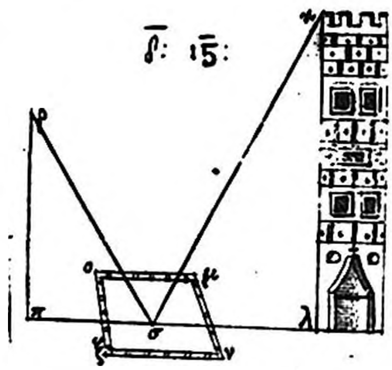
λν, τὸν αὐτὸν τρόπον πρὸς τῷ λ· ἀπὸ δὲ τοῦ μ, διοπτευθήτωσαν τὰ η καὶ θ, σημεῖα, καὶ σημειωθήτωσαν τὰ ξ καὶ ο, σημεῖα, καθ' ἃ τέμνεται ἡ λν, ῥάβδος διὰ τῶν ὀπτικῶν δι' αὐτῆς διερχομένων ἀκτίνων. Εἶτα μετρηθήτωσαν αἱ μξ, ξο, μθ, καὶ γενέσθω ὡς ἡ μξ, πρὸς τὴν ξο, ἡ μθ, πρὸς ἄλλην τινά, καὶ γνωσθήσεται ἡ θη· τὰ γὰρ μξο, μθη, τρίγωνα ὅμοιά εἰσι, διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν λν ῥάβδον τῇ κμ.



ΑΛΛΩΣ.

Ἔστω ὕψος τὸ κλ, προσιτὸν κατὰ τὸ λ, σημεῖον, καὶ ζητηθήτω ἡ αὐτοῦ κλ, διάστασις. Τεθήτω δὴ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ τὸ ὕψος ἐφίσταται, κάτοπτρον τὸ μνξο, ἢ ἀγγεῖον τι πλῆρες ὕδατος, μικρόν τι ἀφιστάμενον τοῦ λ, σημείου· καὶ στῆθι ἔν τινι τόπῳ φέρε δὴ τῷ π, ἐξ οὗ δυνατόν σοι ἐν τῷ κειμένῳ ἐνοπτρίζοντι κατόπτρῳ τὸ κ, ὁρᾶσθαι σημεῖον, ἡ κορυφὴ δηλονότι τοῦ ζητουμένου ὕψους, διὰ τῆς ρσ, ὀπτικῆς ἀκτῖνος. Δεῖ δὲ τὸ λπ, ἐπίπεδον ἐν ᾧ τὸ κλ, ὕψος, ὁριζοντικὸν εἶναι, καὶ μὴ ἐγκλινόμενον. εἶτα μετρηθήτωσαν αἱ λσ, σπ, πρ, εὐθεῖαι, καὶ γενέσθω ὡς ἡ σπ, πρὸς τὴν πρ, ἡ σλ, πρὸς ἄλλην τινά, καὶ αὕτη ἔσται ἡ λκ, ζητουμένη. ἐὰν γὰρ ἡ κσ, ὑποτεθῇ ἐπιζευγνύουσα τὰ κσ, σημεῖα, ἀποτελεσθήσονται δύο τρίγ: τὰ κλσ, ρπσ, ὅμοια. ἔχουσι γὰρ τάς τε ὑπὸ κλσ, ρπσ, γωνίας ἴσας. ἐπεὶ ἑκατέρα ὀρθή ἐστι, καὶ τὰς κσλ, ρσπ, ὡς γωνίας ἀνακλάσεως, ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς σπ, πρ σλ, λκ, ἀνάλογον ἔχουσιν. ἐγνωμένων δὴ τῶν τριῶν σπ, πρ, σλ, γνωσθήσεται πάντως διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν καὶ ἡ δ': λκ. Τοῦτ' αὐτὸ γενήσεται καὶ πρὸς εὕρεσιν ὁριζοντικῆς γραμμῆς, ἐὰν τὸ κάτοπτρον ὀρθὸν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου σταθῇ. Κείσθω γὰρ τὸ κλ, διάστημα ὁριζοντικὴν εἶναι γραμμήν, καὶ τὸ μνξο, κάτοπτρον ὄρθιον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐπὶ τῆς λπ, γραμμῆς πρὸς ὀρθὰς ἀπὸ τοῦ λ, ἠγμένης ἐπὶ τῆς κλ εἶτα ἀπό τινος σημείου ὅθεν εἴπερ τὸ ρ, καὶ ἴστω ἐν τῷ

δ: 15:



ἐπι-

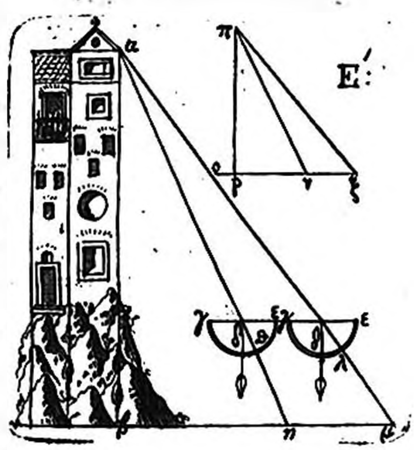
ἐπιπέδῳ κειμένῃ, ὁραθήτω σοι τὸ κ, σημεῖον, τῷ κατόπτρῳ ἐνατενίζοντι διὰ τῆς ρσ, ὀπτικῆς γραμμῆς, ἀπὸ δὲ τοῦ ρ, πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς λπ, γραμμῆς, καὶ τὰ λοιπὰ γενέσθω ὡς προηρμηνεύεται, καὶ ἔσαι τὸ αὐτό.

Πρότασις Ε'.

Ὕψος ὅλως ἀπρόσιτον μετρῆσαι.

Ἔςω ὕψος ὅλως ἀπρόσιτον τὸ αβ, καὶ ζητείσθω πόσων ἂν εἴη ποδῶν ἡ αβ, διάςασις. Τεθήτω δὲ τὸ γδε, ἡμικύκλιον κατὰ τὸ ζ, σημεῖον, ὥςε τὴν γε, αὐτοῦ διάμετρον παράλληλον εἶναι τῷ ὁρίζοντι· καὶ διοπτευθήτω διὰ τοῦ ἐν αὐτῷ δρομέως τὰ α, καὶ η, σημεῖα, καὶ παρατηρείσθω ἡ ὑπὸ εζθ, γωνία πόσων ἂν εἴη μοιρῶν. εἶτα μετατεθήτω τὸ αὐτὸ ὄργανον ἐπὶ τὸ κ, σημεῖον, καὶ τῆς αὐτῆς γενομένης παρατηρήσεως, ζητηθήτω ἡ ὑπὸ εκλ, γωνία, καὶ μετρηθήτω ἡ ημ, διάςασις. ὅσων δ' ἂν εἴη αὕτη ποδῶν, τοσούτων μορίων ληφθήτω ἀπὸ τῆς Κλίμακος ἡ νξ. ταύτης δὲ κατὰ τὸ συνεχὲς ἐξαχθείσης ἐπὶ τὸ ο, σημεῖον, συνιςάσθω πρὸς μὲν τῷ ν, σημείῳ γωνία ἡ ὑπὸ ονπ, ἴση τῇ ὑπὸ εζθ, πρὸς δὲ τῷ ξ, ἡ ὑπὸ οξπ, ἴση τῇ ὑπὸ εκλ, ἀπὸ δὲ τοῦ π, πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς οξ, ἡ πρ, καὶ τὸ πρ, διάςημα παραβληθήτω τῇ Κλίμακι κατὰ τὴν ιγ': τοῦ γ': τοῦ παρόντος, καὶ ὅσων ἂν εἴη αὕτη μορίων, οἷα τὰ τῆς Κλίμακος, τοσούτων ποδῶν ἔσαι τὸ αβ, διάςημα. ἡ γὰρ ὑπὸ εζθ, γωνία ἴση ἐςὶ τῇ κατὰ κορυφὴν αζγ, γέγονε δὲ τῇ ὑπὸ εζθ, ἴση ἡ ὑπὸ ονπ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ονπ, ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ αζγ ἀλλὰ τῇ ὑπὸ αζγ, ἴση ἐςὶ καὶ ἡ ὑπὸ αηβ, κατὰ τὴν κθ': τοῦ α: τῆς Στοιχειώσεως, ἄρα ἡ ὑπὸ ονπ, γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ αηβ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ οξπ, ἴση τῇ ὑπὸ αμβ. ὥςε τὸ πνξ, τρίγωνον ὅμοιόν ἐςι τῷ αημ, ἔςι δὲ καὶ ἡ μὲν πρ, κάθετος ἐπὶ τῆς οξ, ἡ δὲ αβ, ἐπὶ τῆς βμ, ἄρα καὶ τὸ πρξ, ὅμοιόν ἐςι τῷ αβμ· ὥςε ὡς ἡ νξ, πρὸς τὴν πρ, ἔχει καὶ ἡ ημ, πρὸς τὴν αβ, γνωσθείσης ἄρα τῆς πρ, γνωσθήσεται ἡ αβ· ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

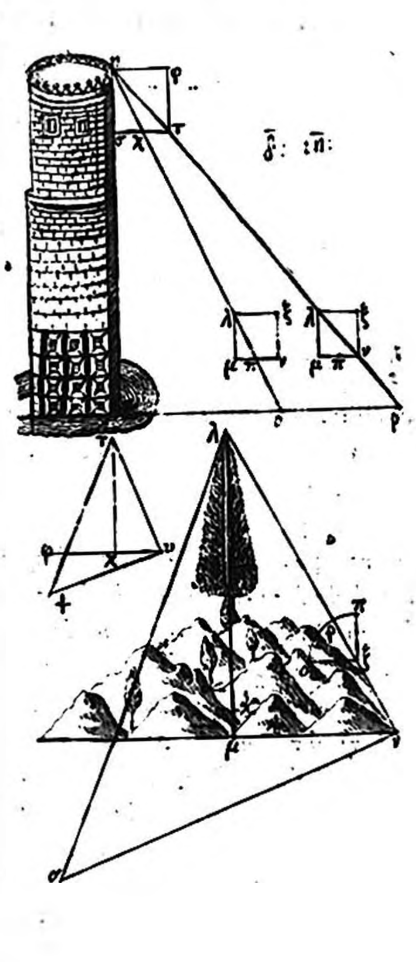
Geom. Pr. Lib. 4. Fig. 17.



ἌΛΛΩΣ.

Ζητείσθω ἔτι τὸ ηκ, ὅλως ἀπρόσιτον ὕψος. Τεθήτω δὲ τὸ Γεωμετρικὸν τετράγωνον λμιξ, ἐπίπεδος πως, ὥςε τὴν λξ, αὐτοῦ πλευρὰν παράλληλον εἶναι τῷ ὁρίζοντι· καὶ διοπτευθήτωσαν διὰ τοῦ ἐν αὐτῷ δρομέως τὰ η, καὶ ο, σημεῖα, καὶ σημειωθήτω τὸ π, σημεῖον τὸ ἐν τῇ μν, πλευρᾷ τοῦ ὀργάνου, δι' οὗ ὁ δρομεὺς διέρχεται. τούτου δὲ γενομένου μετατεθήτω τὸ αὐτὸ ὄργανον εἰς ἕτερον τόπον, καὶ τῶν αὐτῶν ἐπιτελουμένων πράξεων, σημειωθήτω καὶ τὸ ν, σημεῖον, δι' οὗ ὁ δρομεὺς ἐπὶ τῆς β': διέρχεται παρατηρήσεως. εἶτα μηκυνθήτω ἡ ορ, καὶ γενέσθω ὡς ἡ πν, πρὸς τὴν λμ, ἡ ορ, πρὸς ἄλλην τινά, καὶ γνωσθήσεται ἡ νκ. ληφθήτω γὰρ ἡ νσ, ἴση τῇ πλευρᾷ τοῦ λμνξ, ὀργάνου, καὶ συνεστάσθω τὸ νστφ, τετράγωνον, καὶ τοῦτο ἴσον ἔσται τῷ λμνξ, καὶ τὴν αὐτὴν ἐκείνῳ ἕξει θέσιν. καὶ ἐπεὶ ἡ στ, παράλληλός ἐστι τῇ μν, πάντως γε ἡ ὑπὸ νχσ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ λπμ, ἡ δὲ ὑπὸ ντσ, τῇ ὑπὸ λμν, ἀλλὰ τῇ μὲν ὑπὸ λπμ, ἴση ἐστὶ διὰ τὰ αὐτὰ ἡ ὑπὸ νοκ, τῇ δὲ ὑπὸ λνμ, ἡ ὑπὸ νρκ, ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ νοκ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ νχσ, ἡ δὲ ὑπὸ νρκ, τῇ ὑπὸ ντσ, καὶ τὸ μὲν νρο, τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ντχ, τὸ δὲ νρκ, τῷ ντσ, ὥστε ὡς ἡ χτ, ἤτοι πν, πρὸς τὴν τὴν νσ, δηλ: τὴν λμ, ἔχει καὶ ἡ ορ, πρὸς τὴν νκ, ἐγνωσμένης ἄρα τῆς λμ, γινώσκεται καὶ ἡ νκ, ὅπερ καὶ τὰ ἑξῆς.

Geom. Pr. Lib.4. Fig.18.



ΑΛΛΩΣ.

Ζητηθήτω τὸ λμ, ὕψος ἀπρόσιτον. ἀπὸ δὲ τοῦ τυχόντος σημείου τοῦ ξ, διοπτευθήτωσαν τὰ λ, καὶ ν, σημεῖα διὰ τοῦ οξπ, Τεταρτημορίου, ἢ ἄλλου τινὸς τῶν προειρημένων ὀργάνων, καθ' ὃν προσηρμόσθαι τρόπον. καὶ παρατηρηθήτω ἡ ὑπὸ ρξο, γωνία, καὶ ὅσων ἂν εἴη αὕτη μοιρῶν, τοσούτων ἔσται καὶ ἡ ὑπὸ λνμ. ἴσαι γὰρ διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς οξ, μν. Ἐπεὶ δὲ ἡ λν, γραμμὴ προσιτή ἐστι κατὰ τὸ ν, μετρηθήτω αὐτὴ κατά τινα τῶν εἰρημένων τρόπων κατὰ τὴν α: τοῦ παρόντος ἀπὸ τοῦ σ, φέρ' εἰπεῖν σημείου. εἶτα ληφθήτω ἡ τυ, τοσούτων μορίων, οἷα τὰ τῆς Κλίμακος, ὅσων εὕρηται ποδῶν ἢ βημάτων ἡ λν, καὶ συνεστάσθω πρὸς τῷ υ, σημείῳ γωνία ἡ ὑπὸ τυφ, ἴση τῇ ὑπὸ λνμ. ἀπὸ δὲ τοῦ τ, πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς υφ, ἡ τχ. καὶ ἐπεὶ τοῦ τυχ, ἐγνωσμέναι εἰσὶν αἱ δύο γωνίαι τυχ, τχυ, καὶ ἡ τυ, πλευρά, εὑρεθήτω διὰ τῆς ιε: τοῦ γ': τοῦ

πα.

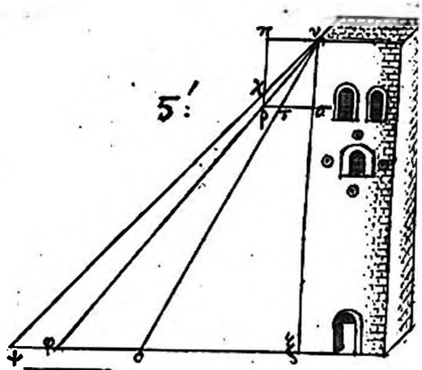
παρόντος ἡ τ χ, καὶ ὅσων ἂν εἴη αὕτη μορίων, οἷα τὰ τῆς Κλίμακος, τοσύτων ἔσαι ἡ λ μ, ποδῶν ἢ βημάτων, οἵων καὶ ἡ λ ν. ὁ λόγος σαφὴς ἐκ τῶ ἀνωτέρω.

Πρότασις ϛ':

Γραμμὴν ὁριζοντικὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ὕψους τινὸς ἐγνωσμένου μετρῆσαι.

Ἔσω ὕψος ἐγνωσμένον τὸ ν ξ, καὶ ζητηθήτω ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτῶ, δηλονότι τῶ ν, ἡ ξ ο, ὁριζοντικὴ γραμμή. Ληφθήτω δὴ τὸ Γεωμετρικὸν τετράγωνον π ρ σ ν, καὶ ἐφαρμοσθήτω ἡ ν σ, πλευρὰ αὐτῶ ἐπὶ τὸ ὕψος· ὥστε τὴν μὲν ν σ, πρὸς ὀρθὰς εἶναι ἐπὶ τῶ ὁρίζοντος, τὴν δὲ π ν, παραλλήλως κεῖσθαι τῇ ὁριζοντικῇ· καὶ διοπτευθήτω ἀπὸ τῶ ν, σημείου τὸ πέρας τῆς ζητουμένης ὁριζοντικῆς γραμμῆς· καὶ ἐπεὶ κατὰ τριχῶς ἐνδέχεται συμβῆναι, ἢ γὰρ ὁ δρομεὺς διὰ μέσου τῆς ρ σ, διελεύσεται, ἢ διὰ τῶ ρ, τοῦ κατὰ διάμετρον ἀντικειμένου τῷ ν, ἢ γοῦν διὰ μέσου τῆς π ρ. Κείσθω α': διέρχεσθαι διὰ μέσου τῆς ρ σ, ἤτοι διὰ τῶ τ, καὶ ἀφορισθήσεται ἡ ξ ο. ὡς γὰρ ἡ ν σ, πρὸς τὴν σ τ, ἔστι καὶ ἡ ν ξ, πρὸς τὴν ξ ο, διὰ τὴν τῶν ν σ τ, ν ξ ο, τριγώνων ὁμοιότητα. ὥστε ἐγνωσμένων τῶν ν σ, σ τ, ν ξ, ἐὰν ζητηθῇ τούτων δ': ἀνάλογος διὰ τῆς Μεθόδου τῶν τριῶν, ἔσαι αὕτη ἡ ξ ο.

Geom. Pr. Lib. 4. Fig. 19.



Ἔσω β': διέρχεσθαι διὰ τῶ ρ, καὶ τοῦτον τὸν τρόπον ἀφορισθήσεται ἡ ξ φ, ὡς γὰρ ἡ ν σ, πρὸς τὴν σ ρ, ἔστι καὶ ἡ ν ξ, πρὸς τὴν ξ φ, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. ἀλλ' ἡ ν σ, ἴση ἐστὶ τῇ σ ρ, ἄρα καὶ ἡ ν ξ, ἴση ἐστὶ τῇ ξ φ.

Ἔσω γ': διερχόμενος ὁ δρομεὺς διὰ μέσου τῆς π ρ, φέρ' εἰπεῖν διὰ τῶ χ, καὶ ἀφορισθήσεται πάντως ἡ ξ ψ. ἐπεὶ γὰρ τὰ χ π ν, ν ξ ψ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν, ὡς ὀψόμεθα, ἔσαι ὡς ἡ χ π, πρὸς τὴν π ν, ἡ ν ξ, πρὸς τὴν ξ ψ, ὥστε ἐγνωσμένων τῶν χ π, π ν, ν ξ, ἔσαι ἡ ξ ψ, δ': αὐτῶν ἀνάλογος.

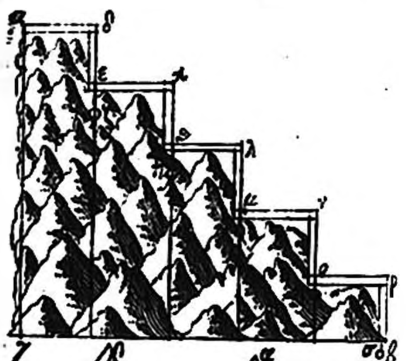
Ὅτι δὲ τὰ χ π ν, ν ξ ψ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσι δῆλον. ἔχουσι γὰρ τὰς πρὸς τοῖς π, καὶ ξ, σημείοις γωνίας ὀρθάς, καὶ τὰς ὑπὸ π χ ν, ξ ν ψ, ὡς ἐναλλὰξ ἴσας, ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ π ν χ, ἴση ἐστὶ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ξ ψ ν, καὶ ἑπομένως τὰ χ π ν, ν ξ ψ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν.

Πρότασις Ζ':

Ὕψος ὄρους βατοῦ μὲν ἐξ ἑνὸς μέρους, ἐξ ἑτέρου δὲ ἀβάτου εὑρεῖν, καὶ τὴν ὑπ' αὐτῷ νοουμένην ὁριζοντικὴν μετρῆσαι γραμμήν.

Ἔστω ὄρος τὸ α β γ, βατὸν μὲν ἔχον τὸ α β, πλάγιον αὐτοῦ μέρος, ἄβατον δὲ τὸ α γ, ὄρθιον ὕψος, ὁριζοντικὴ δὲ νοουμένη γραμμὴ τοῦ αὐτοῦ ὄρους ἔστω ἡ γ β, καὶ ζητηθήτω τό, τε α γ, ὕψος αὐτοῦ, καὶ ἡ γ β, ὁριζοντικὴ γραμμή. Ληφθήτω δὴ ὁ Γνώμων, καὶ ἐφαρμοσθήτω τὸ πέρας τῆς μιᾶς αὐτοῦ πλευρᾶς ἐπὶ τοῦ α, σημείου τῆς κορυφῆς δηλ: τοῦ ὄρους, ὥστε τὴν μὲν α δ, παραλλήλως κεῖσθαι τῷ ὁρίζοντι, τὴν δὲ δ ε, πρὸς ὀρθάς. Γίνεται δὲ τοῦτο, ἐὰν ἀπὸ τοῦ δ, βαρύλλιον, ἢ μολύβδινον κατάρτιον ἐξαρτώμενον ἅπτηται τοῦ ὄρους, ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος κατὰ τὸ ζ· ἐν ᾧ ῥάβδου συνεχισθείσης πρὸς ὀρθὰς κειμένης τῷ ὁρίζοντι, καὶ τῇ δ ε, ἐφαρμοττομένης, σημειωθήτω τὸ ε, πέρας τῆς δ ε, τοῦ γνώμονος πλευρᾶς. καὶ ἐφαρμοσθήτω ὁ αὐτὸς γνώμων κατὰ τὸ ε, τὸ δὲ βαρύλλιον ἁπτέσθω τοῦ ὄρους κατὰ τὸ κ. Σημειωθέντος δ' αὖθις καὶ τοῦ θ, γενέσθω πάλιν τὸ αὐτὸ ἕως ἂν εἰς τὴν τοῦ ὄρους καταντήσῃς ὑπόρειαν· εἶτα συναρθήτωσαν ἡ αἱ α δ, ε κ, θ λ, μ ν, ο ρ, πλάγιαι πλευραὶ τοῦ γνώμονος, καὶ ἀποτελείτωσαν γραμμὴν μίαν, καὶ ἡ γενομένη μετρηθήτω, καὶ ὅσων ἂν εἴη αὕτη ποδῶν, ἢ βημάτων, τοσούτων ἔσται καὶ ἡ β γ, ζητουμένη. Συναφθήτωσαν δὲ καὶ τὰ δ ε, κ θ, λ μ, ν ο, ρ σ, ὁμοίως εἰς μίαν, καὶ γνωσθήσεται πάντως τὸ α γ, ὕψος, ὡς δῆλον ἐκ τῆς τοῦ ὀργάνου θέσεως.

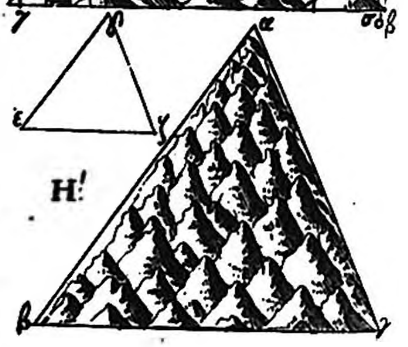
Geom. Pr. Lib. 4. Fig. 10.



Πρότασις Η':

Τὴν τοῦ δοθέντος ὄρους παχύτητα εὑρεῖν.

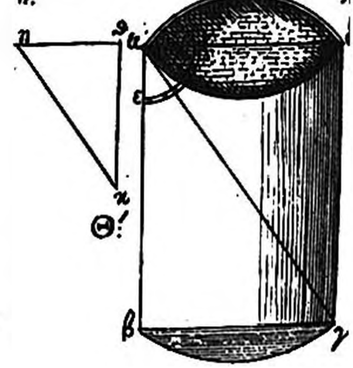
Ἔστω ὄρος τὸ α β γ, καὶ ζητηθήτω ἡ αὐτοῦ παχύτης β γ. Διοπτευθήτω δὴ ἀπὸ τοῦ α, σημείου τῆς τοῦ δοθέντος ὄρους κορυφῆς τὰ β, καὶ γ, σημεῖα, εἴγε δυνατόν· καὶ παρατηρηθήτω πόσων μοιρῶν ἐστὶν ἡ ὑπὸ β α γ, γωνία διὰ τῆς ι δ': τοῦ γ': τοῦ παρόντος. μετρηθήτωσαν δὲ καὶ αἱ α β, α γ, γραμμαὶ κα-



τά τιτεινα τῶν προοιμιασθέντων τρόπων. Εἴτε εἰλήφθω ἀπὸ τῆς Κλίμακος ἡ δε, τοσούτων μορίων, ὅσων ἂν εἴη ποδῶν, ἢ βημάτων ἡ αβ, καὶ πρὸς τῷ δ, σημείῳ συνεςάθω ἡ ὑπὸ εδζ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ βαγ, καὶ ληφθήτω ἡ δζ, ὁμοίως ἀπὸ τῆς Κλίμακος τοσούτων μορίων, ὅσων ἂν ποδῶν ἢ βημάτων εὑρεθείη ἡ αγ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εζ. Ἐπεὶ δὲ τοῦ εδζ, τριγώνου ἐγνωσμέναι εἰσὶν αἱ δύο πλευραὶ εδ, δζ, καὶ μία γωνία ἡ ὑπὸ εδζ, ζητηθήτω κατὰ τὴν ιϛʹ: τοῦ αὐτοῦ ἡ εζ, βάσις, καὶ ὅσων ἂν εὑρεθείη αὕτη μορίων, τοσούτων πάντως ἔςαι ποδῶν ἢ βημάτων ἡ βγ. ὁ λόγος σαφὴς διὰ τὴν τῶν αβγ, δεζ, τριγώνων ὁμοιότητα.

Εἰ δέ γε ἀπὸ τῆς τοῦ ὄρους κορυφῆς μὴ ἔξεςιν ἀφ' ἑνὸς τόπου ἄμφω τὰ σημεῖα τῆς ζητουμένης εὐθείας διοπτευθῆναι ὡς ἐπὶ τοῦ ηθλκ, ὄρους. Διοπτευθήτωσαν δή: ἀφ' ἑνὸς σημείου φέρε δὴ τοῦ η, τὰ κ, καὶ θ, ἀφ' ἑτέρου δὲ τοῦ θ, τὰ η, καὶ λ. καὶ διά τινος ὀργάνου πρὸς εὕρεσιν γωνιῶν χρησιμεύοντος εὑρεθήτω ἥ τε ὑπὸ κηθ, γωνία, καὶ ηθλ, καὶ μετρηθήτωσαν αἱ κη, ηθ, θλ. εἶτα συνεςάθω τὸ μνξο, τραπέζιον ὅμοιον τῷ ηκλθ, τραπεζίῳ, λαμβανομένων τῶν μν, μο, οξ, πλευρῶν ἀπὸ τῆς Κλίμακος, ὥστε ἀναλόγως εἶναι ταῖς κη, ηθ, θλ. καὶ τῶν ὑπὸ νμο, μοξ, γωνιῶν ἴσων γενομένων ταῖς ὑπὸ κηθ, ηθλ, ἐπεζεύχθω ἡ νο. εἶτα διὰ τῆς ῥηθείσης ιϛʹ: εὑρεθήτω δ: ἡ νο, βάσις τοῦ νμο, τριγώνου, καὶ ἡ ὑπὸ μον, γωνία, καὶ ὅσων ἂν μορίων ἡ νο, εἴη γραμμὴ, τοσούτων ποδῶν πάντως ἢ βημάτων ἔςαι ἡ κθ, ὅσων δὲ μοιρῶν εἴη ἡ ὑπὸ μον, γωνία, τοσούτων καὶ ἡ ὑπὸ ηθκ. Τελευταῖον ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ μον, γωνία ἀπὸ τῆς μοξ, καὶ γνωσθήσεται ἡ νοξ. ἐπεὶ δὲ τοῦ νοξ, τριγώνου ἐγνωσμέναι εἰσὶν αἱ νο, οξ, πλευραὶ, καὶ μία γωνία ἡ ὑπὸ νοξ, εὑρεθήτω διὰ τῆς αὐτῆς ιϛʹ: προτάσεως ἡ νξ, βάσις, καὶ πάντως γε ὅσων ἂν μορίων εὑρεθῇ αὕτη εἶναι, τοσούτων ποδῶν ἢ βημάτων ἔςαι ἡ κλ, διὰ τὴν τῶν σχημάτων ὁμοιότητα.

Geom. Pr. Lib. 4. Fig. 31.



Πρότασις Θʹ:

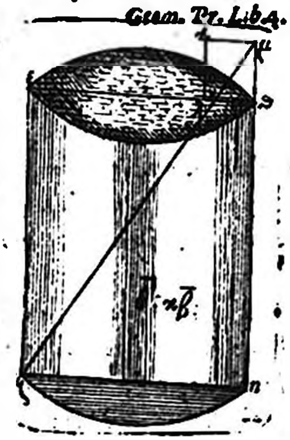
Τοῦ δοθέντος φρέατος τὸ βάθος εὑρεῖν.

Ἔςω φρέαρ τὸ αβγδ, καὶ ζητηθήτω τὸ τούτου βάθος, ἡ δγ, δηλ: διάςασις. Ληφθήτω δὴ τὸ αεζ, τεταρτημόριον, καὶ ἐφαρμοσθήτω ἐπὶ τῆς κορυφῆς τοῦ φρέατος, ὥστε τὴν μὲν αε, αὐτοῦ πλευρὰν συμπίπτειν τῇ αβ, τὴν δὲ αζ, τῇ αδ, καὶ διὰ τῶν ἐν τῇ αε, διοπτεῦον διοπτευθήτω τὸ β, σημεῖον, διὰ δὲ τοῦ δρομέως τὸ γ, καὶ παρατηρηθήτω ἡ ὑπὸ β α γ, γωνία, καὶ αὕτη ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τῆς ὀρθῆς, καὶ γνωσθήσεται πάντως ἡ ὑπὸ γ α δ. Εἶτα μετρηθήτω ἡ α δ, καὶ ὅσων ἂν εἴη αὕτη ποδῶν, τοσούτων μορίων ληφθήτω ἡ η θ, ἀπὸ τῆς Κλίμακος, καὶ πρὸς μὲν τῷ θ, συνεστάθω ὀρθὴ γωνία ἡ ὑπὸ η θ κ. πρὸς δὲ τῷ η, ἡ ὑπὸ θ η κ, ἴση τῇ ὑπὸ δ α γ, καὶ συσταθήσεται πάντως τὸ η θ κ, τρίγωνον ὅμοιον τῷ α δ γ. ὥστε ἐὰν ἀριθμῇ ἀπὸ τῆς Κλίμακος ἡ θ κ, καὶ γένηται ὡς ἡ η θ, πρὸς τὴν θ κ, ἡ α δ, μετρηθεῖσα διάστασις πρὸς ἄλλην τινὰ, γνωσθήσεται ἡ δ γ, ὁ λόγος σαφὴς διὰ τὴν τῶν η θ κ, α δ γ, τριγώνων ὁμοιότητα.

Α'ΛΛΩΣ.

Ζητηθήτω τὸ η θ, βάθος τοῦ ε ζ η θ, φρέατος. Μετρηθήτω δὴ ἡ ε θ, καὶ τεθήτω ἐπ' αὐτῆς τὸ κ λ θ μ, Τετράγ:, ὥστε τὴν μὲν θ μ, αὐτοῦ πλευρὰν ἐπ' εὐθείας κεῖσθαι τῇ θ η, τὴν δὲ λ θ, συμπίπτειν τῇ ε θ, καὶ ἀπὸ τοῦ μ, σημείου διοπτευθήτω διὰ τοῦ ἐν αὐτῷ δρομέως τὸ ζ, σημεῖον, καὶ σημειωθήτω τὸ ν, δι' οὗ ὁ δρομεὺς διέρχεται. εἶτα γενέσθω ὡς ἡ ν θ, πρὸς τὴν θ μ, ἡ ε θ, πρὸς ἄλλην τινὰ, καὶ γνωσθήσεται ἡ θ η. τὰ γὰρ ν θ μ, ζ η μ, τρίγ: ὅμοιά εἰσιν, ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς ν θ, θ μ, ζ η, η μ, ἀνάλογον ἔχουσιν. ἀλλ' ἡ ζ η, ἴση ἐστὶ τῇ ε θ, ἐγνωσμένων ἄρα τῶν τριῶν ν θ, θ μ, ε θ, ὅρων, γνωσθήσεται πάντως καὶ ὁ δ':, ἡ η μ, δηλονότι διάστασις, ἀφαιρεθείσης δὲ τῆς θ μ, τοῦ ὀργάνου πλευρᾶς, ἐναπολειφθήσεται γνωστὴ ἡ θ η, ζητουμένη.

Geom. Pr. Lib.4. Fig.22.

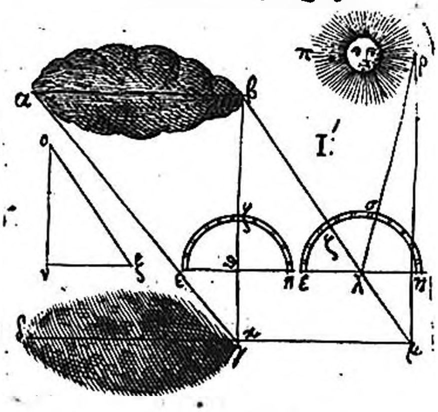


Πρότασις Ι':

Τὴν τῶν νεφελῶν ἀπὸ τῆς γῆς ἀπόστασιν μετρῆσαι, ἡνίκα αὗται ἠρεμοῦσαι.

Ἔστω νεφέλη ἠρεμοῦσα ἡ α β, ἧς σκιὰ ἡ γ δ καὶ ζητηθήτω ἡ ταύτης ἀπὸ τῆς γῆς ἀπόστασις. Ληφθήτω δὴ τὸ ε ζ η, ἡμικύκλιον, καὶ ἐστηρίχθω ἐπί τινος ῥάβδου τῆς θ κ, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου, ὥστε τὴν ε η, αὐτοῦ διάμετρον παράλληλον εἶναι τῷ ὁρίζοντι· καὶ διοπτευθήτωσαν τὰ β καὶ γ, σημεῖα. Τὸ αὐτὸ γενέσθω καὶ ἐφ' ἑτέρου τόπου, φέρε δὴ τοῦ λ, καὶ διοπτευθήτωσαν τὰ β καὶ γ, σημεῖα. εἶτα παρατηρηθήτωσαν αἱ ζ θ η, ζ λ ε, γωνίαι πόσων

Geom. Pr. lib. 4. Fig. 23.



σων αὖ εἴη ἑκατέρα μοιρῶν, καὶ μετρηθήτω ἡ γ μ διάςασις. ἀπὸ δὲ τῆς Κλίμακος λαφθήτω ἡ ν ξ, τοσέτων μορίων, ὅσων αὖ εἴη ποδῶν, ἢ βημάτων ἡ γ μ, καὶ πρὸς μὲν τῷ ν, σημείῳ συςαθήτω ἡ ὑπὸ ξ ν ο, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ η θ ζ, πρὸς δὲ τῷ ξ, ἡ ὑπὸ ν ξ ο, ἴση τῇ ὑπὸ ε λ ζ. καὶ ἐπεὶ τῦ ο ν ξ, τριγώνε ἐγνωσμέναι εἰσὶν αἱ δύο γωνίαι ἤτε ὑπὸ ο ν ξ, καὶ ἡ ὑπὸ ο ξ ν, καὶ ἡ μία αὐτῦ πλευρὰ ν ξ, ἀριθμήτω διὰ τῆς ιε: τῦ γ': τῦ παρόντος ἡ ο ν, καὶ ὅσων αὖ εἴη αὕτη μορίων, οἷα τὰ τῆς Κλίμακος, τοσέτων ποδῶν, ἢ βημάτων ἔςαι ἡ β γ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ε η, παράλληλός ἐςι τῇ γ μ, πάντως γε ἡ μὲν ὑπὸ β γ μ, γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ ζ θ η, ἡ δὲ ὑπὸ β μ γ, τῇ ὑπὸ ζ λ ε. ἀλλὰ τῇ μὲν ὑπὸ ζ η θ, ἴση γέγονεν ἡ ὑπὸ ο ν ξ, τῇ δὲ ὑπὸ ζ λ ε, ἡ ὑπὸ ο ξ ν. ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ β γ μ, ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ ο ν ξ, ἡ δὲ ὑπὸ β μ γ, τῇ ὑπὸ ο ξ ν, ὥςε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ γ β μ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ ν ο ξ, ἴση ἐςὶ, καὶ τῷ β γ μ, τρίγωνον ὅμοιον τῷ ο ν ξ, τριγώνῳ. ὥςε καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχυσι. Διὰ δὲ τὸ ἀκριβέςερον δύο ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ διοπτευτὰς δεῖ εἶναι, τὸν μὲν ἐν τῷ θ, τόπῳ, τὸν δὲ ἐν τῷ λ, ἵνα μή τις ἀπάτη παρὰ τὴν ἀνεπαίσθητον τῆς νεφελῆς συμβῇ κίνησιν.

ΑΛΛΩΣ.

Ἀπὸ τῦ τυχόντος τόπε μικρόν τι ἀφιςαμένε τῆς γ δ, σκιᾶς τῆς α β, νεφέλης, δὸς εἰπεῖν τῦ λ, διοπτευθήτωσαν τὰ β καὶ μ, σημεῖα, καὶ σημειωθήτω ἡ ὑπὸ ζ λ ε, γωνία. διοπτευθήτω δὲ ἀπὸ τῦ αὐτῦ τόπε καὶ τὸ ρ, σημεῖον τῦ π ρ, Ἡλίε, καὶ σημειωθήτω ἡ ὑπὸ ζ λ σ, γωνία. εἶτα μετρηθήτω τὸ μεταξὺ τῆς σκιᾶς καὶ τῦ μ, διάςημα, ἡ γ μ, δηλ: γραμμὴ παραλλήλως τῇ ε η, κειμένη, καὶ ὅσων αὖ ποδῶν ἢ βημάτων ἡ γ μ, γραμμὴ, τοσέτων μορίων εἰλήφθω ἀπὸ τῆς Κλίμακος ἡ ν ξ, καὶ πρὸς μὲν τῷ ξ, σημείῳ συνιςάσθω ἡ ὑπὸ ν ξ ο, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ε λ ζ, πρὸς δὲ τῷ ν, ἡ ὑπὸ ξ ν ο, ἴση τῇ ἐναπολειπομένῃ ἀπὸ τῶν δύο ὀρθῶν, ἀφαιρημένων τῶν ε λ ζ, ζ λ τ, δύο γωνιῶν, καὶ τὰ λοιπὰ γενέσθω ὡς πρότερον, καὶ γνωσθήσεται ἡ β γ. Ἐννοείσθω γὰρ ἡ μ ρ, γραμμὴ, καὶ ἐπεὶ αἱ ρ μ, ρ λ, β γ, παράλληλοί εἰσιν, ὡς πρὸς αἴσθησιν διὰ τὴν μεγίςην ἀπόςασιν τῦ Ἡλίε, πάντως γε αἱ ὑπὸ β μ ρ, μ β γ, ζ λ σ, γωνίαι εἰσὶν ἴσαι, ὥςε ἐγνωσμένης τῆς ὑπὸ ζ λ σ, ἐγνωσμένη ἔςαι καὶ ἡ ὑπὸ γ β μ. σεσημείωται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ε λ ζ, καὶ ταύτῃ ἴση ἐςὶν ἡ ὑπὸ γ μ β, ἄρα τῦ β γ μ, τριγώνε ἐγνωσμέναι εἰσὶν αἱ ὑπὸ γ β μ, γ μ β, γωνίαι. ὥςε ἀφαιρεθεισῶν τῶν δύο αὐ-

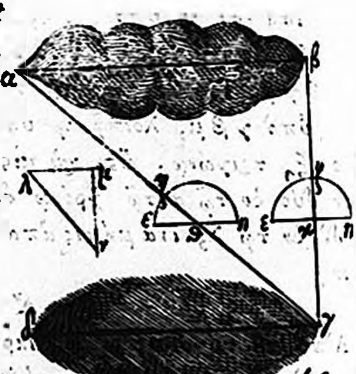
τῶν

τῶν γωνιῶν ἀπὸ τῶν δύο ὀρθῶν, ἀναπολειφθήσεται ἡ ὑπὸ β γ μ· τῇ δὲ ὑπὸ β γ μ, γέγονεν ἴση ἡ ὑπὸ ο ν ξ, καὶ τῇ ὑπὸ β μ γ, ἡ ὑπὸ ο ξ ν· τὰ ἄρα ο ν ξ, β γ μ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν, καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσι. Εὑρεθείσης ἄρα τῆς ο ν, γνωσθήσεται ἡ β γ.

ΑΛΛΩΣ.

Διοπτευθήτωσαν καθ' ὃν προειρημένον τρόπον τὰ α καὶ γ, σημεῖα τὰ διαγωνίως ἀντικείμενα τῆς τε νεφέλης καὶ τῆς σκιᾶς αὐτῆς· ἀπὸ δὲ τοῦ κ, τὰ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη β καὶ γ, καὶ σημειωθήτωσαν αἱ ὑπὸ ε θ ζ, ε κ ζ, γωνίαι· καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ε θ ζ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ α γ δ, ἡ δὲ ὑπὸ ε κ ζ, τῇ ὑπὸ β γ δ, ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ε θ ζ, τῆς ὑπὸ β γ δ, καὶ γνωσθήσεται ἡ ὑπὸ β γ α· ἀλλὰ τῇ ὑπὸ α γ δ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ γ α β, ἐναλλάξ, ἔστι δὲ ἐγνωσμένη ἡ ὑπὸ α γ δ, ἄρα ἐγνωσμένη ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ γ α β· μετρηθήτω δὲ καὶ ἡ γ δ, καὶ γνωσθήσεται πάντως ἡ α β, ἴσαι γὰρ αἱ α β, γ δ· εἶτα γινέσθω καὶ τὸ ἀνωτέρω τρίγωνον ὅμοιον τῷ α β γ, καὶ ἔστω τοῦτο τὸ λ μ ν· ἐπεὶ δὲ καὶ αἱ δύο γωνίαι αἱ μ λ ν, λ ν μ, ἐγνωσμέναι εἰσίν, ἐγνωσμένη πάντως ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ λ μ ν· εἰλήφθω δὲ καὶ ἡ λ μ, τοσούτων μοιρῶν ἐκ τῆς Κλίμακος, ὅσων ποδῶν ἢ βημάτων ἐστὶν ἡ γ δ. Ζητηθήτω δὲ διὰ τῆς ιε: τοῦ γ': τοῦ παρόντος ἡ μ ν, καὶ γνωσθήσεται ἡ β γ, ἀπόστασις· ὅπερ ἔδει τὸ ζητούμενον.

Geom. Pr. lib. 4. Fig. 24.



Περὶ Ἐπιπεδομετρίας.

Πρότασις ΙΑ':

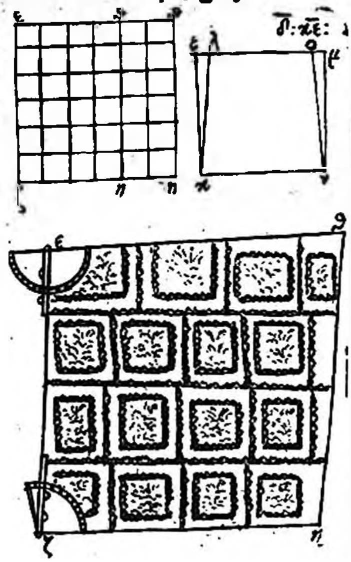
Τὸ δοθὲν παραλληλογραμμοειδὲς ἐπίπεδον μετρῆσαι.

Ἔστω ἐπίπεδον παραλληλογραμμοειδὲς δοθὲν, εἴτε ἀγρὸς, ἢ λειμών, ἢ ἕτερόν τι ὅμοιον τὸ α β γ δ, καὶ ζητείσθω τὸ τούτου ἐμβαδὸν, ἤτοι πόσων ἂν εἴη ποδῶν, ἢ βημάτων, καὶ πόσων τετραγώνων εἴη πηχικῶν. Ἐπεὶ δὲ κατὰ διαφόρους ἐνδέχεται προβάλλεσθαι, ἢ γὰρ τὸ δοθὲν παραλληλογραμμοειδὲς ὀρθογώνιόν ἐστιν, ἢ μὴ ὀρθογώνιον. Ζητείσθω ἡ μία τῶν αὐτοῦ

γω-

γωνιῶν φέρ' εἰπεῖν ἡ ὑπὸ α β γ, Γεωμετρικῷ τινι ὀργάνῳ Τεταρτημορίῳ δηλ: Ἡμικυκλίῳ, ἢ ἄλλῳ τινὶ πρὸς εὕρεσιν γωνιῶν χρησιμεύοντι, κἂν μὲν ὀρθὴ εἴη ἡ αὐτὴ γωνία, μετρηθήτω ἑκατέρα τῶν α β, β γ, αὐτῆ πλευρῶν Γεωμετρικῷ τινι ἁπλῷ μέτρῳ, ποδὶ δὸς εἰπεῖν, ἢ βήματι, ἢ ἄλλῳ τινὶ, καὶ εἰλήφθω ἀπὸ τῆς Κλίμακος ἡ μὲν ε ζ, τοσούτων μορίων, ὅσων ἂν εὑρεθείη ἡ α β, ἡ δὲ ζ η, ὅσων ἂν εἴη ἡ β γ, καὶ τῆς πρὸς τῷ ζ, ὀρθῆς γωνίας συςαθείσης ἐν χάρτῃ, ἢ ἄλλῳ τινὶ, ἀναπεπληρώσθω τὸ ζ θ, παραλληλόγραμμον· εἶτα πολλαπλασιασθήτω ὁ ἀριθμὸς τῶν τῆς ε ζ, μερῶν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν τῆς ζ η, μερῶν, καὶ ὁ γενόμενος ἔςαι ὁ ζητούμενος.

Geom. Pr. Lib. 4. Fig. 25.



Κείσθω γὰρ τὴν μὲν α β, βημάτων εἶναι ϛ: τὴν δὲ β γ, δ· καὶ εἰλήφθω ἡ μὲν ε ζ, ἀπὸ τῆς Κλίμακος μορίων ϛ: ἡ δὲ ζ η, δ. εἶτα πολλαπλασιασθήτω ὁ ϛ, ἐπὶ τὸν δ, ἢ καὶ ἀνάπαλιν, καὶ ἐπεὶ καθ' ἑκάτερον τὸν τρόπον ὁ κδ, συνίςαται ἀριθμός· δῆλον, ὅτι τὸ α γ, τετραπλευροειδὲς ἐπίπεδον βημάτων ἐςὶ τετραγώνων κδ. παντὸς γὰρ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου τὸ ἐμβαδὸν περιεκτικόν ἐςι τοσούτων τετραγώνων, ὅσαι εἰσὶν αἱ μονάδες, αἱ ἐν τῷ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν τῆς μιᾶς αὐτοῦ πλευρᾶς μερῶν ἐπὶ τὰ τῆς ἑτέρας γινομένῳ ἀριθμῷ κατὰ τὴν β': τοῦ η: τοῦ α: μέρους· εἰδὲ ἑκατέρα τῶν α β, β γ, ποδῶν ἦ ϛ: ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος διαγράμματος, ἐπεὶ ὁ ϛ: ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαζόμενος ποιεῖ τὸν λϛ πάντως γε τὸ ὅλον α γ, χωρίον ποδῶν ἔςαι Γεωμετρικῶν λϛ.

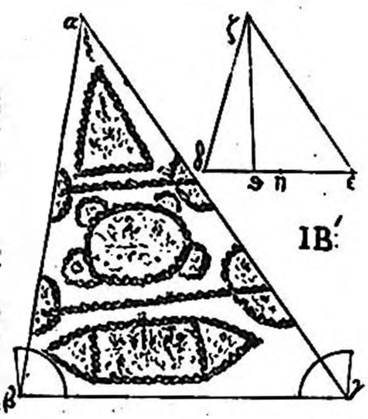
Εἰ δὲ τὸ δοθὲν τετραπλευροειδὲς ἐπίπεδον μὴ εἴη ὀρθογώνιον ὡς τὸ ε ζ η θ. εὑρεθήτωσαν διὰ τῆς ι δ': τοῦ γ': τοῦ παρόντος αἱ ὑπὸ ε ζ η, ζ ε θ, γωνίαι, καὶ μετρηθήτω ἑκατέρα τῶν ε ζ, ε θ, αὐτοῦ πλευρῶν Γεωμετρικῷ τινι μέτρῳ. εἶτα εἰλήφθω ἀπὸ τῆς Κλίμακος ἡ μὲν κ λ, τοσούτων μορίων, ὅσων ἐςὶ ποδῶν, ἢ βημάτων ἡ ε ζ, ἡ δὲ λ μ, ὅσων ἡ ε θ· καὶ συςαθήτω ἐν χάρτῃ, ἢ ἄλλῳ τινὶ πετάλῳ τὸ κ λ μ ν, σχῆμα ὅμοιον τῷ ε ζ η θ, κατὰ τὴν κ η: τοῦ ϛ': α: τοῦ παρόντος· τῆς δὲ λ μ, κατὰ τὸ συνεχὲς ἀπὸ τοῦ μ, ἐκβαλλομένης, πιπτέτωσαν ἐπ' αὐτῆς κάθετοι ἀπὸ τῶν κ, καὶ ν, σημείων αἱ κ ξ, ν ο· καὶ εὑρεθήτω διὰ τῆς Κλίμακος πόσων μορίων περιεκτική ἐςιν ἡ κ ξ, οἷα τὰ τῆς αὐτῆς κλίμακος. τούτου δὲ γενομένου πολλαπλασιασθήτω ἡ κ ξ, ἐπὶ τὴν ξ ο, καὶ ὁ γενόμενος παραςατικὸς ἔςαι τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ λ ν, σχήματος κατὰ τὴν β': τοῦ η: τοῦ α: μέρους.

Ἐπεὶ δὲ τὸ λν, ὅμοιον γέγονε τῷ ζθ, πάντως γε ὁ γενόμενος ἀριθμὸς ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς κξ, ἐπὶ τὴν ξο, παραστατικὸς ἔσται καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ζθ, δοθέντος τετραπλευροειδοῦς ἐπιπέδου. ὅπερ ἦν τὸ προσαχθέν.

Πρότασις ΙΒ′:

Τὸ δοθὲν τριγωνοειδὲς ἐπίπεδον μετρῆσαι.

Geom. Pr. Lib. 4. Fig. 36.



Ἔστω ἐπίπεδον τριγωνοειδὲς τὸ αβγ, καὶ ζητείσθω τὸ αὐτοῦ ἐμβαδόν. Μετρηθήτω δὴ ἡ βγ, φέρ' εἰπεῖν πλευρὰ τοῦ αὐτοῦ Γεωμετρικῷ τινι μέτρῳ. διὰ δὲ τῆς ιδ′: τοῦ γ′: τοῦ παρόντος ἀριθμείσθω ἥτε ὑπὸ αβγ, καὶ αγβ, γωνία. καὶ εἰλήφθω ἀπὸ τῆς Κλίμακος ἡ δε, ἀνάλογος τῇ βγ, τουτέστι τοσούτων μορίων, οἷα τὰ τῆς Κλίμακος, ὅσων ποδῶν, ἢ βημάτων ἐστὶν ἡ βγ· καὶ πρὸς μὲν τῷ δ, σημείῳ συνεστάθω διὰ τῆς αὐτῆς ἡ ὑπὸ εδζ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ γβα· πρὸς δὲ τῷ ε, ἡ ὑπὸ δεζ, ἴση τῇ ὑπὸ βγα. τμηθείσης δὲ τῆς δε, δίχα κατὰ τὸ η, πιπτέτω κάθετος ἀπὸ τοῦ ζ, ἡ ζθ. καὶ πολλαπλασιασθήτω ἡ ηε, ἡμίσεια τῆς δε, ἐπὶ τὴν ζθ, κάθετον, καὶ ὅσων ἂν μονάδων περιεκτικὸς εἴη ὁ γενόμενος ἀριθμός, τοσούτων ποδῶν ἢ βημάτων τετραγώνων ἔσται περιεκτικὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αβγ, ἐπιπέδου. Ὁ λόγος σαφὴς διὰ τῆς α: τοῦ η: τοῦ α: τοῦ παρόντος. τὰ γὰρ ζδε, αβγ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν.

Ἡ αὐτὴ δὲ πρᾶξις ἀληθεύει ἐπὶ παντὸς εἴδους τριγώνου. Ἐὰν δὲ τὸ ἐπίπεδον ἀπρόσιτον εἴη, μετρηθήτωσαν αἱ τρεῖς αὐτοῦ πλευραὶ αβ, βγ, γα. καὶ εἰλήφθωσαν ἀπὸ τῆς Κλίμακος τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογοι ταῖς αὐταῖς, καὶ συσταθήτω δι' αὐτῶν τρίγωνον. τὰ δὲ λοιπὰ γενέσθω ὡς προηρμήνευται, καὶ ἔσται τὸ αὐτό.

Πρότασις ΙΓ′:

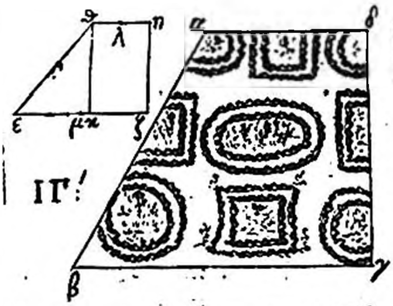
Τὸ δοθὲν τραπεζοειδὲς ἐπίπεδον μετρῆσαι.

Ἔστω ἐπίπεδον τραπεζοειδὲς τὸ αβγδ, καὶ ζητείσθω τὸ τούτου ἐμβαδόν. Ἐπεὶ δὲ τοῦτο διχῶς ἐνδέχεται συμβῆναι, ἢ γὰρ τὰς δύο μόνον ἀπεναντίον πλευρὰς παραλλήλους ἕξει, ἢ οὐδεμίαν οὐδεμιᾷ. Ἐχέτω α: τὰς αδ, βγ, παραλ-

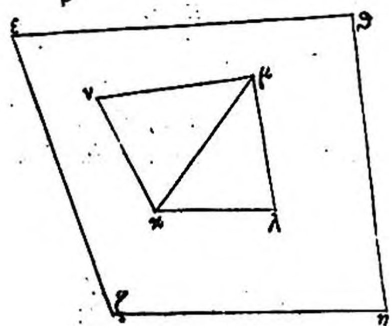
Geom. Pr. lib. 4. Fig. 27.

ραλλήλους. μετρηθήτω δὴ ἡ βγ, γεωμετρικῷ τινι ἁπλῷ μέτρῳ· καὶ εἰλήφθω ἀπὸ τῆς κλίμακος ἡ εζ, ὁμοία τῇ βγ, ἤτοι τοσούτων μορίων, ὅσων ἡ βγ, ποδῶν ἐστιν, ἢ βημάτων· καὶ παραβληθήτω παρὰ τὴν εζ, τὸ εζηθ, τραπέζιον ὁμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον τῷ αβγδ, διὰ τῆς κδ': τοῦ ϛ': τοῦ α: τοῦ παρόντος. ἀπὸ δὲ τοῦ θ, πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς εζ, ἡ θκ, καὶ τμηθήτωσαν αἱ θη, εζ, εὐθεῖαι δίχα κατὰ τὰ λ, καὶ μ, σημεῖα. Εἶτα συναφθήτωσαν αἱ θλ, εμ, εἰς μίαν, καὶ ἐπ' αὐτὴν πολλαπλασιασθήτω ἡ θκ, ἢ καὶ ἀνάπαλιν, καὶ ὁ γενόμενος παραστήσει σοι πόσων τετραγώνων ποδῶν, ἢ βημάτων ἐστὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αβγδ, δοθέντος τραπεζοειδοῦς ἐπιπέδου, κατὰ τὴν γ': τοῦ η: τοῦ α: τοῦ παρόντος.

Ἔστω β': τὸ εζηθ, τραπεζοειδὲς, οὗ οὐδεμία πλευρὰ οὐδεμιᾷ ἐστι παράλληλος, καὶ ζητηθήτω ὁμοίως τὸ τούτου ἐμβαδόν. Μετρηθήτω τοίνυν ἡ μία τῶν αὐτοῦ πλευρῶν φέρε, δὴ ἡ ζη· καὶ εἰλήφθω ἀπὸ τῆς κλίμακος ἡ κλ, τοσούτων μορίων, ὅσων βημάτων, ἢ ποδῶν ἐστιν ἡ ζη· καὶ παραβληθήτω παρὰ τὴν κλ, τὸ κλμν, τραπέζιον ὅμοιον τῷ ζηθε, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν κδ': τοῦ α: τοῦ παρόντος. τῆς δὲ κμ, ἀχθείσης, εὑρεθήτω διὰ τῆς ἀνωτέρω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τε κλμ, καὶ μνκ, τριγώνου, καὶ τὸ ἐξ ἀμφοῖν δηλώσει σοι πόσων ποδῶν ἢ βημάτων τετραγώνων ἐστὶ τὸ ὅλον ἐμβαδὸν τοῦ εζηθ, δοθέντος ἐπιπέδου κατὰ τὴν δ': τοῦ η: τοῦ α: τοῦ παρόντος.



ΙΓ'



Πρότασις ΙΔ'.

Τὰς τῶν τοίχων ὁριζοντικὰς ἐπιφανείας, ἤτοι τὸ πάχος αὐτῶν μετρῆσαι.

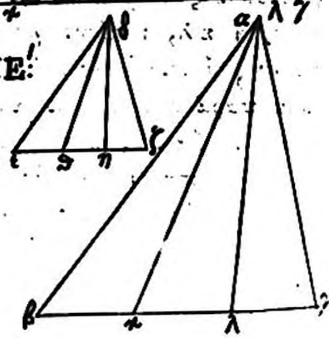
Ἔστω πύργος ὁ α β γ δ, ἧ πλευραὶ οἱ α ζ, β λ, γ ξ, κ α, τοῖχοι, καὶ ζητείσθωσαν αἱ ὁριζοντικαὶ ἐπιφάνειαι, ἤτοι αἱ βάσεις τῶν αὐτῶν τοίχων αἱ α ζ, β λ, γ ξ, κ α. Ληφθήτω δὴ τὸ μῆκος ἑκάστου τοίχου, καὶ πλάτος, καὶ πολλαπλασιασθήτωσαν πρὸς ἄλληλα, καὶ ἔσαι τὸ ζητούμενον. ἡ μὲν γὰρ α ζ, βάσις περιέχεται ὑπό τε τοῦ α β, μήκους, καὶ β ζ, πλάτους. ἡ δὲ β λ, ὑπό τε τοῦ β γ, καὶ γ λ· ἡ δὲ γ ξ, ὑπό τε τοῦ γ δ, καὶ δ ξ. καὶ ἡ κ α, ὑπό τε τοῦ α δ, καὶ δ κ. Ἰστέον δ' ὅτι ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τούτου ἐὰν τὰ ἔξω μήκη α β, β γ, γ δ, δ α, ληφθῶσι, τὰ α θ, β η, γ π, κ ξ, δὶς λαμβάνονται καὶ ὀφείλουσιν ἅπαξ μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀφαιρεῖσθαι. εἰδὲ τὰ μήκη τῶν ἐντὸς ἐπιφανειῶν ληφθῶσι, τὰ αὐτὰ παραλληλόγραμμα ἐναπολείπονται, καὶ διὰ τοῦτο μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν ὀφείλουσιν ἅπαξ προστίθεσθαι.

Geom. Pr. lib. 4. Fig. 28.

Πρότασις ΙΕ'.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος τριγωνοειδοῦς ἐπιπέδου τὰ δοθέντα μέρη ἀφελεῖν.

ΙΕ:

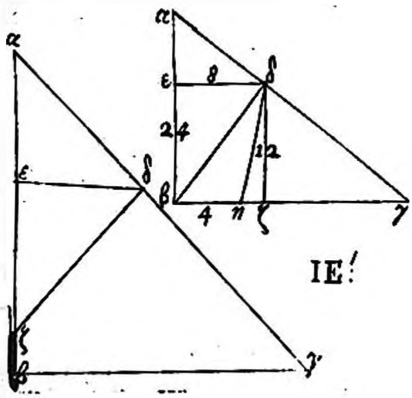


Ἔστω ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ α β γ, τριγωνοειδοῦς ἐπιπέδου βήματα φέρ' εἰπεῖν ρ. Γραφήτω δὴ ἐν χάρτῃ ἢ σανίδι, ἢ ἄλλῳ τινὶ ἐπιπέδῳ τὸ δ ε ζ, τρίγ: ὅμοιον τῷ α β γ, κατὰ τὴν κγ': τοῦ ς': τοῦ α: τοῦ παρόντος. καὶ πιπτέτω κάθετος ἀπὸ τοῦ δ, ἡ δ η, αὕτη δὲ παραβληθήτω τῇ Κλίμακι, καὶ ἔστω μοιρῶν κε. τοῦ δὲ ρ, ἀριθμοῦ μεριζομένου ἐπὶ τὸν κε, ἔσαι πηλίκον ὁ δ: εἶτα ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τῆς ε ζ, ἡ ε θ, ὥστε εἶναι μορίων, οἷα τὰ τῆς δ η, η, καὶ ἐπιζευχθήτω ἡ δ θ. καὶ τὸ δ ε θ, τρίγωνον ἔσαι μορίων τετραγώνων ρ. ὥστε ἐὰν ἀφαιρεθῇ καὶ ἀπὸ τῆς β γ, βάσεως τοῦ δοθέντος τριγωνοειδοῦς ἐπιπέδου ἡ β κ, βημάτων ἁπλῶν η. καὶ ἐπιζευχθῇ διὰ σπαρτίου ἡ α κ, τὸ α β κ, μέρος τοῦ α β γ, ἔσαι τὸ ζητούμενον. τὸ γὰρ ἐμβαδὸν τοῦ α β κ, τριγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἀ-

ειθἀριθμῷ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς αλ, καθέτου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς βκ, αὐτοῦ βάσεως. ὥσπερ γὰρ διῃρημένου τοῦ ρ̄, ἐπὶ τὸν κε̄, δίδοται πηλίκον ὁ δ̄, οὕτω τοῦ κε̄, ἐπὶ τὸν δ̄, πολλαπλασιαζομένου συνίσταται ὁ ρ̄.

Εἰ δὲ τὸ σημεῖον δοθῇ, ἀφ' οὗ ὀφείλει γενέσθαι ἡ ἀφαίρεσις ἐπὶ τῆς αγ, ἢ ἄλλης τινὸς πλευρᾶς, ὡς τὸ δ· πιπτέτω κάθετος ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου δ, ἐπὶ τῆς αβ, ἡ δε· τῆς πράξεως ἐπὶ τοῦ ἐν χάρτῃ ἢ σανίδι γενομένης σχήματος· καὶ μετρηθεῖσα ἡ δε, ἔστω δὸς εἰπεῖν ποδῶν ῑ· εἶτα εἰλήφθω ἀπὸ τῆς αβ, ἡ αζ, μορίων κ̄, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ δζ, καὶ τὸ αδζ, ἔσται τὸ ζητούμενον. ὡς δῆλον ἐκ τῆς ζ': τοῦ ϛ': τοῦ α': τοῦ παρόντος.

Geom. Tr. Lib. 4. Fig. 29.



Ἐὰν δὲ ἡ αβ, ἐλάττων τύχῃ τοῦ ληφθησομένου διαστήματος ὡς ἐπὶ τοῦ β': σχήματος· τῆς δε, καθέτου, ἠγμένης, ἐπιζεύχθω ἡ δβ· καὶ ἐπεὶ τὸ αδβ, ἔλαττόν ἐστι τοῦ ζητουμένου· ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ δβγ, τὸ ἐλλεῖπον. Οἷον ἔστω ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ αβγ, βήματα ρκ̄. Ἔστω δὴ ἡ δε, βημάτων ἁπλῶν φέρ' εἰπεῖν η̄· τοῦ δὲ ρκ̄, ἐπὶ τὸν η̄, μεριζομένου, ἐπεὶ δίδοται πηλίκον ὁ ιε̄, δεῖ πάντως γε ληφθῆναι ἀπὸ τῆς αβ, βήματα ἁπλᾶ λ̄. ἐπεὶ δὲ ἡ αβ, μετρουμένη εὑρίσκεται βημάτων κδ̄, τῆς δβ, ἐπιζευγνυμένης, πολλαπλασιαθήτω ἡ δε, δηλ: ὁ η̄, ἀριθμὸς ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς αβ, δηλ: τὸν ιβ̄, καὶ ἔσται τὸ αβδ, βημάτων τετραγώνων ϟϛ̄, τούτων δὲ ἀφαιρουμένων ἀπὸ τῶν ρκ̄, ἐναπολείπονται κδ̄· πιπτέτω δὴ κάθετος ἀπὸ τοῦ δ, ἐπὶ τῆς βγ, ἡ δζ, καὶ μετρουμένη ἔστω καὶ αὕτη βημάτων ιβ̄· ἐπεὶ δὲ τοῦ κδ̄, ἐπὶ τὸν ιβ̄, μεριζομένου δίδοται πηλίκον ὁ β̄: εἰλήφθω ἀπὸ τῆς βγ, ἡ βη, βημάτων δ̄, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ δη· καὶ τὸ αβηδ, τραπέζιον ἔσται τὸ ζητούμενον. τὸ μὲν γὰρ αβδ, τρίγωνον βημάτων ἐστὶ ϟϛ̄, ὡς εἴρηται, ἔστι δὲ καὶ τὸ δβη, κδ̄, ὥστε συναπτόμενα τὰ δύο ἀλλήλοις, ποιήσουσι τὸν ρκ̄.

ΑΠΟΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

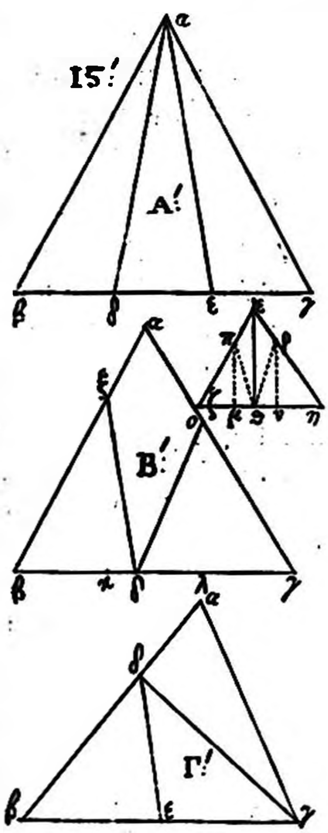
Τῇ αὐτῇ ἐφόδῳ χρώμενος, δυνήσῃ πάντως γε καὶ παντὸς ἄλλου εἴδους πολυγώνου ἰσοπλεύρου τε καὶ μή, τὸ ἐμβαδὸν μετρεῖν, ἐὰν πρῶτον εἰς τρίγωνα τὸ δοθὲν διέλῃς· εἶτα τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τριγώνου εὑρὼν, εἰς ἓν τὰ πάντα συνάψῃς ἐπὶ ὁμοίου σχήματος τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ τὴν πρᾶξιν ποιῶν. καὶ ἐνὶ λόγῳ δοθέντος οἱουδήποτε σχήματος, ἢ τοῦ ἐμβαδοῦ αὐτοῦ ζητουμένου, εὑρήσεις ἐν τῷ γ'ῳ καὶ ι': τοῦ α': τοῦ παρόντος τὸν τρόπον, καθ' ὃν ἔξεστί σοι τοῦτο θηρεύειν, ἢ τὸ προσα μέρος ἀφελεῖν. διὸ δὴ ἵνα μὴ ταυτολογοῦντες, κατακορεῖς τισι ὀφθείημεν, ἐατὰ καὶ ταῦτα ἐπὶ τοῦ παρόντος.

Περὶ Γεωδαισίας. Πρότασις ΙϚ:

Τὸ δοθὲν τριγωνοειδὲς ἐπίπεδον εἰς ὁσαδηποτοῦν μέρη διελεῖν κατὰ τὸν δοθέντα λόγον.

Ἔςω δὴ α: διελεῖν τὸ α β γ, τριγωνοειδὲς ἐπίπεδον εἰς τρία ἴσα μέρη ἀπὸ τοῦ α, σημείου τῶν διαιρετικῶν ἀγομένων γραμμῶν. Τμηθήτω δὴ ἡ β γ, βάσις τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εἰς τρία ἴσα μέρη τὰ β δ, δ ε, ε γ, καὶ ἀχθήτωσαν διὰ σπαρτίου αἱ α δ, δ ε, γραμμαί, καὶ ἔςαι τὸ προςαχθὲν κατὰ τὴν ς: τοῦ η: τοῦ α: τοῦ παρόντος. Εἰδὲ γε ζητηθῇ διαιρεθῆναι τὸ αὐτὸ κατά τινα λόγον, φέρε δὴ τοῦ γ, πρὸς τὴν α, διαιρεθήτω ἡ β γ, κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἀπὸ δὲ τοῦ α, σημείου ἀχθήτωσαν αἱ διαιρετικαὶ γραμμαί, καὶ γενήσεται τὸ προςαχθὲν κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν πρότασιν.

Geom. Pr. Lib. 4. Fig. 30.



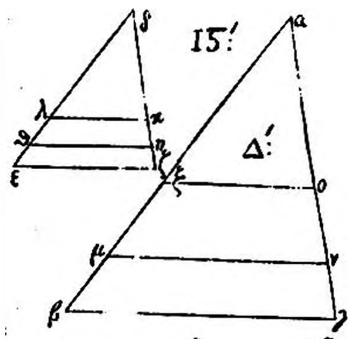
Ἔςω β: διελεῖν τὸ αὐτὸ εἰς τρία ἴσα ἀπὸ τοῦ δ, σημείου τοῦ ἐπὶ τῆς β γ. Συνιςάσθω δὴ ἐν χάρτῃ κατὰ τὴν κγ: τοῦ ς: τοῦ α: τοῦ παρόντος, καὶ τὴν α: τοῦ περὶ Ἰχνογραφίας τὸ ε ζ η, τρίγωνον ὅμοιον τῷ δοθέντι α β γ. καὶ ὅσων ἂν εἴη ποδῶν, ἢ βημάτων ἡ β δ, τοσούτων μοιρῶν εἰλήφθω ἀπὸ τῆς Κλίμακος ἡ ζ θ. εἶτα διαιρεθήτω τὸ ε ζ η, τρίγ: ἀπὸ τοῦ θ, σημείου εἰς τρία ἴσα κατὰ τὴν θ: τοῦ η: τοῦ αὐτοῦ. Ἐπεὶ δὲ ἡ ζ η, ὁμοία ἐςὶ τῇ β γ, διαιρεθήτω ἡ β γ, εἰς τρία μέρη τὰ β κ, κ λ, λ γ, ἀνάλογα τοῖς τρισὶ μέρεσι τῆς ζ η, δηλονότι τοῖς ζ μ, μ ν, ν η. Ἐπεὶ δ' αὖθις καὶ ἑκατέρα τῶν ε ζ, ε η, ὁμόλογός ἐςιν ἑκατέρα τῶν α β, α γ. εἰλήφθω ἡ μὲν β ξ, τοσούτων ποδῶν, ἢ βημάτων, ὅσων ἂν εἴη μοιρῶν, οἷα τὰ τῆς Κλίμακος, ἡ ζ π, ἡ δὲ γ ο, ὅσων ἐςὶν ἡ η ρ. καὶ διὰ σπαρτίου ἀχθήτωσαν αἱ δ ξ, δ ο, καὶ ἔςαι τὸ προςαχθὲν κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν θ: πρότασιν.

Ἔςω γ: διελεῖν τὸ αὐτὸ εἰς τρία ἴσα ἀπὸ διαφόρων σημείων. Εἰλήφθω δὴ α: ἀπὸ τῆς α β, τὸ α δ, γ: μέρος. εἶτα διαιρεθήτω ἡ β γ, εἰς δύο ἴσα

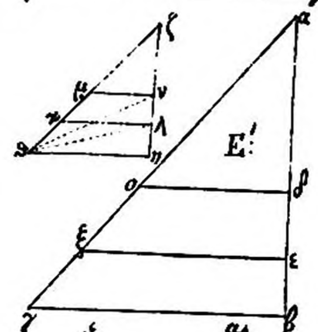
τὰ

τὰ βε, εγ. τούτων δὲ γενομένων, ἀχθήτωσαν διὰ σπαρτίου, ἢ ἄλλου τινὸς αἱ γδ, εδ, γραμμαί· καὶ διαιρεθήσεται πάντως τὸ αβγ, εἰς τρία ἴσα τὰ αδγ, βδε, εγδ, κατὰ τὴν ι: τοῦ η: τοῦ α: τοῦ παρόντος. Geom. Pr. Lib. 4. Fig. 31.

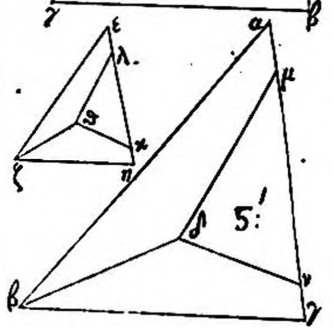
Ἔστω δ': διελεῖν τὸ αὐτὸ εἰς τρία ἴσα διὰ παραλλήλων γραμμῶν μιᾷ τῶν αὐτοῦ πλευρῶν, φέρ' εἰπεῖν τῇ βγ. Συνιστάσθω δὴ ἐν χάρτῃ τὸ δεζ, τρίγ: ὅμοιον τῷ αβγ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν κγ': τοῦ ς': τοῦ α: τοῦ παρόντος· καὶ διαιρεθήτω κατὰ τὴν ιβ: τοῦ η: τοῦ αὐτοῦ, εἰς τὰ εζηθ, θηκλ, λκδ. Εἶτα εἰλήφθω ἡ μὲν βμ, τοσούτων ποδῶν, ἢ βημάτων, ὅσων μορίων ἐστὶν ἡ εθ, οἷα τὰ τῆς Κλίμακος· ἡ δὲ γν, ὅσων ἡ ζη, ἡ δὲ μξ, ὅσων ἡ θλ, καὶ ἡ νο, ὅσων ἡ ηκ. καὶ ἐπιζευχθῶσαν αἱ μν, ξο, διὰ σπαρτίου, καὶ διαιρεθήσεται τὸ αβγ, εἰς τὰ ζητούμενα αὐτοῦ μέρη. ὁ λόγος σαφὴς ἐκ τῆς εἰρημένης ιβ': τοῦ η: τοῦ α: τοῦ παρόντος.



Ἔστω ε': διελεῖν τὸ αὐτὸ εἰς μέρη τρία ἴσα ἀπὸ τῶν δοθέντων σημείων δε, ἐπὶ μιᾶς τῶν αὐτοῦ πλευρῶν, δὸς εἰπεῖν τῆς αβ. Συνιστάσθω δὴ ἐν χάρτῃ τὸ ζηθ, τρίγ: ὅμοιον τῷ δοθέντι αβγ, τριγωνοειδεῖ ἐπιπέδῳ· καὶ ληφθήτωσαν τὰ ηλ, λν, νξ, ἀνάλογα τοῖς βε, εδ, δα. εἶτα διαιρεθήτω τὸ ζηθ, κατὰ τὴν ιγ': τοῦ η: τοῦ α: τοῦ παρόντ: εἰς τὰ ηθκλ, λκμν, νμζ, μέρη· τούτου δὲ ἀκριβῶς γενομένου, εἰλήφθωσαν τὰ γξ, ξο, οα, ἀνάλογα τοῖς θκ, κμ, μζ. καὶ ἐπιζευχθῶσαν αἱ εξ, δο· καὶ διαιρεθήσεται τὸ αβγ, εἰς τρία ἴσα τὰ εβγξ, ξεδο, οδα, κατὰ τὸ προσαχθέν, ὡς διὰ τῆς ῥηθείσης ιγ': προτάσεως δείκνυται.



Ἔστω ς': διελεῖν τὸ αὐτὸ εἰς τρία ἴσα ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἐν αὐτῷ σημείου τοῦ δ. Συνιστάσθω δὴ ἐν χάρτῃ τὸ εζη, τρίγωνον ὅμοιον τῷ αβγ, δοθέντι τριγωνοειδεῖ ἐπιπέδῳ. καὶ τῆς δβ, μετρηθείσης, εἰλήφθω ἡ ζθ, τοσούτων μορίων ἀπὸ τῆς Κλίμακος, ὅσων ἡ βδ, ποδῶν ἐστιν, ἢ βημάτων· τῶν δὲ εζθ, θζη, γωνιῶν



νιῶν ἴσων ταῖς αβδ, δβγ, γενομένων. Εἶτα διαιρεθήτω τὸ εζθ τρίγ: ἀπὸ τοῦ θ, εἰς τρία ἴσα τὰ ζηκθ, θζελ, λθκ, διὰ τῆς ιε: τοῦ εἰρημένου ή: καὶ τῷ μὲν ελ, ληφθήτω ὁμοία ἡ αμ, τῷ δὲ ηκ, ἡ γν. καὶ διαχθήτωσαν αἱ δμ, δν. καὶ ἔσται τὸ προσταχθὲν κατὰ τὴν αὐτὴν ιε: πρότασιν.

ἈΠΟΣΗΜΕΙΏΣΙΣ.

Ἰστέον, ὅτι τὰ τῆς Γεωδαισίας προβλήματα πάμπολλά τε εἰσὶ καὶ ποικίλα, καὶ ἐπὶ παντὸς εἴδους σχήματος προβαλλόμενα. Ἡρμήνευται δὲ ὁ τρόπος, καθ᾽ ὃν δυνάμεθα ἐν ἑκάστῳ προβλήματι τὸ προσταχθὲν ποιεῖν ἐν τῷ η: βιβλίῳ τοῦ α: τοῦ παρόντος, πλατύτερόν τε ἅμα καὶ ἀκριβέστερον μετὰ καὶ τῶν προσηκουσῶν ἑκάστῳ ἀποδείξεων. Διὸ δὴ ὁ περὶ τὰς ἐν ἐκείνῳ προτάσεις ἀκριβῶς ἠσκημένος, καὶ ἐν ἕξει πως τὰ ἐν ἐκείνῳ ἔχων, μὴ μέντοι καὶ τῶν ἐν τοῖς πρὸ αὐτοῦ ἀπορῶν, δυνήσεται μὴ μόνον τὰ τριγωνοειδῆ ἐπίπεδα, ἀλλά γε καὶ τὰ τετραπλευροειδῆ, εἴτε παραλληλογραμμοειδῆ εἰσιν, εἴτε καὶ τραπεζοειδῆ, καὶ τὰ παντὸς ἄλλου οἱουδήποτε σχήματος εἰς ἴσατε καὶ ἄνισα μέρη διαιρεῖν, πλείω τε καὶ ἐλάττω τῶν τριῶν, μεταμορφῶν μέντοι α: τὸ δοθὲν ἐπίπεδον ἐν χάρτῃ, ἢ ἄλλῳ τινὶ ἐπιπέδῳ ἐξ ὕλης τινὸς κατεργάσου, κἀκεῖνο εὐμεθόδως διαιρῶν κατὰ τὸν δοθέντα λόγον. εἶτα μεταφέρων τὴν τῶν πλευρῶν ἐκείνου διαίρεσιν εἰς τὰς τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου πλευράς, καὶ τὰς διαιρετικὰς γραμμὰς διὰ τῶν γενομένων ἐν ταῖς τοῦ δοθέντος πλευραῖς σημείων διεξάγων σπαρτίῳ, ἢ ἄλλῳ τινὶ χρώμενος ὀργάνῳ πρὸς τὰς διαιρέσεις. Ὅθεν δὴ τὴν ταυτολογίαν φεύγοντες, ἵνα μὴ καὶ περιττολογίαν εἴπω, οὐκ ἔτι περαιτέρω τὸν λόγον ἐνταῦθα ἐφαπλοῦμεν, ἱκανῶν ὄντων, ὡς ἤδη εἴρηται, τῶν ἐν τῷ η: σεσημειωμένων πρὸς τὸ ποιεῖν εὐμεθόδως τε καὶ κατὰ λόγον τὸ ἐν οἱῳδηποτοῦν προβλήματι προσταττόμενον, ἢ γοῦν ζητούμενον. Σεσημείωται δὲ καὶ ταῦτα ἐπὶ τοῦ τριγωνοειδοῦς μόνου σχήματος τῶν ἐπιπέδων. ἵνα μὴ τὰ ἐν τῇ τῶν ὅρων τοῦ παρόντος ἐκθέσει ὑποτεθέντα ἀπλήρωτα εἶναι δόξῃ. καὶ ἵνα μᾶλλον τὰ ἐν τῷ εἰρημένῳ η: βιβλίῳ εὐληπτότερα γένηται, καὶ τισι μαθημάτων χρησιμεύωσι.

Τέλος τοῦ Τετάρτου τοῦ δευτέρου μέρους τῆς Γεωμετρίας.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩ͂Ν ΠΡΑ΄ΞΕΩΝ.

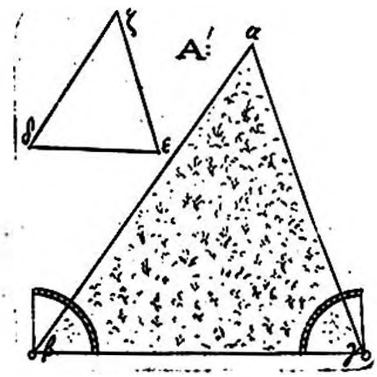
ΒΙΛΒΙ΄ΟΝ ΠΕ΄ΜΠΤΟΝ.

ΠΕΡΙ΄ ΕΙ΄ΚΟΝΟΓΡΑΦΙ΄ΑΣ, Η῏ΓΟΥ͂Ν Ι΄ΧΝΟΓΡΑΦΙ΄ΑΣ.

Πρότασις Α΄.

Τῷ δοθέντι τριγωνοειδεῖ ἐπιπέδῳ ὅμοιον ἐν χάρτῃ, ἢ ἄλλῳ τινὶ καταγράψαι.

Geom. Pr. Lib. 5. Fig. 1.



Ἔστω τριγωνοειδὲς ἐπίπεδον, φέρ' εἰπεῖν ἀγρὸς, ἢ κῆπος, ἢ λειμὼν, ἢ ἕτερόν τι ὅμοιον, τὸ α β γ, καὶ ζητηθήτω καταγραφῆναι ἐν χάρτῃ σχῆμα ὅμοιον τῷ α β γ. Μετρηθήτω δὴ μία τῶν τοῦ α β γ, πλευρῶν δὸς εἰπεῖν ἡ β γ· καὶ εὑρεθήτω ἑκατέρα τῶν ὑπὸ α β γ, α γ β, γωνιῶν Γεωμετρικῷ τινι ὀργάνῳ, ὡς προηρμήνευται ἐν τοῖς πρότερον. εἶτα εἰλήφθω ἀπὸ τῆς Κλίμακος ἡ δ ε, τοσούτων μοιρῶν, ὅσων ποδῶν, ἢ βημάτων ἐστὶν ἡ β γ· καὶ πρὸς μὲν τῷ δ, συνιστάσθω γωνία ἡ ὑπὸ ε δ ζ, ἴση τῇ πρὸς τῷ β, πρὸς δὲ τῷ ε, ἡ ὑπὸ δ ε ζ, ἴση τῇ πρὸς τῷ γ. καὶ τὸ ζ δ ε, ὅμοιον ἔσται τῷ α β γ, δοθέντι· ἔχει γὰρ καὶ τὴν ὑπὸ δ ζ ε, γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ α.

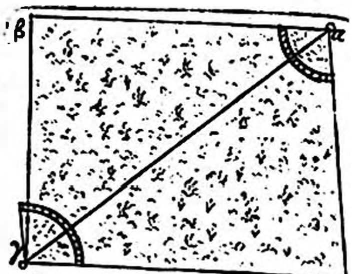
Πρότασις Β΄:

Τῷ δοθέντι τετραπλευροειδεῖ ἐπιπέδῳ ὅμοιον ἐν χάρτῃ καταγράψαι.

Ἔστω τετραπλευροειδὲς ἐπίπεδον τὸ α β γ δ, καὶ ζητηθήτω γενέσθαι ἐν χάρτῃ ὅμοιον σχῆμα τῷ δοθέντι α β γ δ. Ἀπὸ μὲν δὴ τοῦ γ, σημείου εὑρεθήτω ἑκατέρα τῶν ὑπὸ β γ α, α γ δ, γωνιῶν ὀργάνῳ τινὶ Γεωμετρικῷ· ἀπὸ δὲ τοῦ α, εὑ-

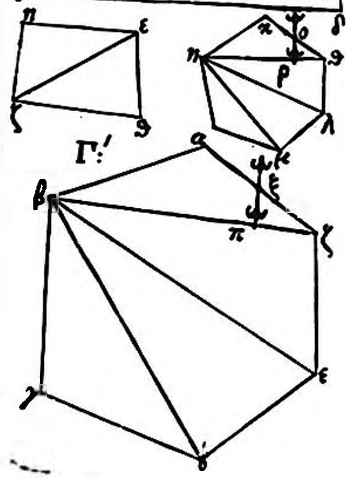
Geom. Pr. Lib. 5. Fig. 2.

ρεθήτω ὁμοίως ἑκατέρα τῇ ὑπὸ β α γ, γ α δ, καὶ μιζευχθήτω ἡ α γ. εἶτα εἰλήφθω ἀπὸ τῆς Κλίμακος ἡ ε ζ, ἀντὶ τῆς α γ. καὶ πρὸς μὲν τῷ ζ, συςαθήτωσαν αἱ ὑπὸ ε ζ η, ε ζ θ, γωνίαι ἴσαι ταῖς ὑπὸ α γ β, α γ δ, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. πρὸς δὲ τῷ ε, αἱ ὑπὸ ζ ε η, ζ ε θ, ἴσαι ταῖς ὑπὸ γ α β, γ α δ, καὶ τὸ ε η ζ θ, ὅμοιον ἔςαι τῷ α β γ δ. ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον, ἐκ τῆς κατασκευῆς δῆλον.



Πρότασις Γ'.

Τῷ δοθέντι πολυγωνοειδεῖ ἐπιπέδῳ ὅμοιον ἐν χάρτῃ καταγράψαι σχῆμα.



Ἔςω πολυγωνοειδὲς ἐπίπεδον τὸ α β γ δ ε ζ. καὶ τούτῳ ὅμοιον ἐν χάρτῃ καταγραφῆναι ἐπροςζητηθήτω σχῆμα. Μιζευχθήτωσαν δὲ πᾶσαι αἱ τοῦ δοθέντος α β γ δ ε ζ, ἐπιπέδου πλευραὶ, ἔτι δὲ καὶ αἱ διαιροῦσαι αὐτὸ εἰς τὰ ἐν αὐτῷ τρίγωνα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀρχόμεναι αἱ β ζ, β ε, β δ. εἶτα εἰλήφθω ἀπὸ τῆς κλίμακος ἡ μὲν η θ, ἀντὶ τῆς β ζ, ἡ δὲ η κ, ἀντὶ τῆς β α, καὶ ἡ κ θ, ἀντὶ τῆς α ζ. καὶ κέντροις μὲν τοῖς η θ, διαστήμασι δὲ τοῖς η κ, θ κ, γραφήτωσαν τόξα τεμνόμενα κατὰ τὸ κ, καὶ συςαθήτω τὸ η θ κ, τρίγ: ὅμοιον τῷ β ζ α. Εἰλήφθω δὲ καὶ ἡ μὲν θ λ, ἀντὶ τῆς ζ ε, ἡ δὲ η λ, ἀντὶ τῆς β ε, καὶ συςαθήτω τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ η θ λ, τρίγ:. Τὸ αὐτὸ γενέσθω καὶ πρὸς σύςασιν τοῦ η λ μ, καὶ η μ ν, καὶ τὸ κ η ν μ λ θ, σχῆμα ὅμοιον ἔςαι τῷ δοθέντι α β γ δ ε ζ, ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς δῆλον.

ἌΛΛΩΣ.

Τῶν α β, β γ, γ δ, δ ε, ε ζ, μιζευχθεισῶν πλευρῶν τοῦ α β γ δ ε ζ, ἐπιπέδου, μιζευχθήτωσαν καὶ αἱ τούτου γωνίαι πᾶσαι. Εἶτα ληφθήτω ἀπὸ τῆς Κλίμακος ἡ η κ, ἀντὶ τῆς β α, καὶ συνιςάσθωσαν αἱ ὑπὸ η κ θ, κ η ν, γωνίαι ἴσαι ταῖς ὑπὸ β α ζ, α β γ. εἰλημμένων δὲ καὶ τῶν κ θ, η ν, ἀντὶ τῶν α ζ, β γ, συςαθήτωσαν αἱ ὑπὸ κ θ λ, κ η ν, γωνίαι ἴσαι ταῖς ὑπὸ α ζ ε, α β γ. εἰλημμένων δ'

ἔτι

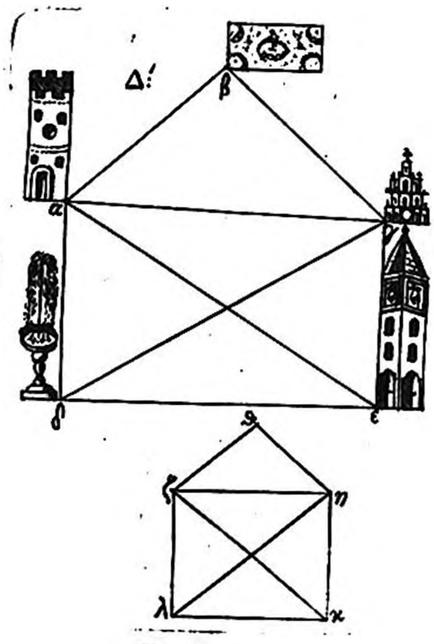
ἔτι καὶ ἀντὶ τῶν ζε, γδ, αἱ θλ, νμ, συσαθήτωσαν αἱ ὑπὸ θλμ, ηνμ, ἴσαι ταῖς ὑπὸ ζεδ, βγδ, καὶ ἔσαι τὸ αὐτό.

Εἰδ' βέλει καὶ τὴν αὐτὴν θέσιν τηρεῖν τὸ κηνμλθ, πολύγωνον τῷ αβγδεζ, δοθέντι, τμηθήτω ἡ μὲν αζ, δίχα κατὰ τὸ ξ, ἡ δὲ κθ, ὁμόλογος αὐτῇ κατὰ τὸ ο, καὶ τῆς Μαγνήτιδος τεθειμένης ἐπὶ τὸ ξ, παρατηρηθήτω ἡ ὑπὸ αξπ, γωνία. εἶτα μετενεχθήτω ἡ αὐτὴ Μαγνῆτις ἐπὶ τῷ ο, καὶ κινηθήτω ὁ χάρτης, ἐν ᾧ τὸ κηνμλθ, γέγραπται σχῆμα τὸ δὲ κάτωθεν, ἕως ἂν ἡ ὑπὸ κορ, γωνία ἴση γένηται τῇ ὑπὸ αξπ, καὶ τὸ κηνμλθ, σχῆμα ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον ἔσαι τῷ αβγδεζ, δοθέντι. Geom. Pr. lib. 5. Fig. 3.

Περὶ Χωρογραφίας, ἤτοι Τοπογραφίας.

Πρότασις Δ:

Ἐν διαφόροις τόποις διαφόρων σχημάτων ἐπιπέδων τε καὶ στερεῶν κειμένων, τὴν τούτων θέσιν ἐν χάρτῃ καταγράψαι, ὥστε ἀναλόγως τὴν πρὸς ἄλληλα καὶ τούτῳ τηρεῖν σχέσιν.



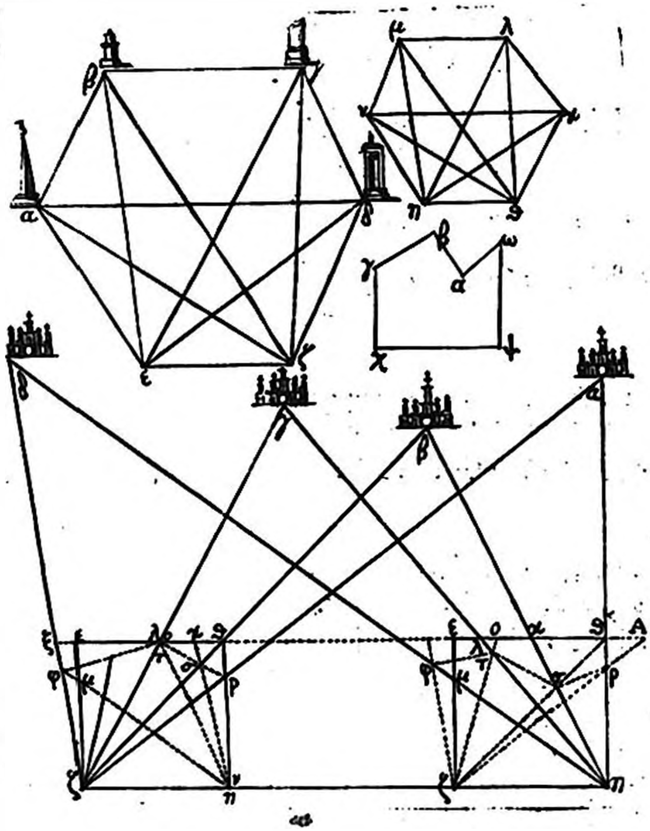
Κείθωσαν δὴ ἐν διαφόροις τόποις τὸ α, δηλ: φρέαρ, ὁ β, λειμών, τὸ γ, ἄστυ, ἡ δ, πηγή, καὶ τὸ ε, ἀροσκοπεῖον, καὶ ἔσω καταγράψαι ταῦτα ἐν χάρτῃ, ὥστε τὴν αὐτὴν πρὸς ἄλληλα ἀναλόγως τηρεῖν σχέσιν. Μετρηθήτωσαν δὴ αἱ αγ, αε, καὶ ἀντὶ μὲν τῆς αγ, ληφθήτω ἡ ζη, καὶ συνεστάθω ἐπ' αὐτῆς τὸ μεν ζηθ, τρίγωνον ὅμοιον τῷ αβγ, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, τὸ δὲ ζηκ, ὅμοιον τῷ αγε, καὶ ἐπὶ τῆς κζ, ληφθείσης ἀντὶ τῆς αε, συνεστάθω ἔτι τὸ ζλκ, ὅμοιον τῷ αδε. καὶ ἔσαι τὸ θζλκη, πολύγ: ὅμοιον τῷ βαδεγ, ὥστε τὸ μεν α, φρέαρ τακτέον κατὰ τὸ ζ, τὸν δὲ β, λειμῶνα κατὰ τὸ θ, τὸ δὲ γ, ἄστυ κατὰ τὸ η, τὴν δὲ δ, πηγὴν κατὰ τὸ λ, καὶ τὸ ε, ἀροσκοπεῖον κατὰ τὸ κ, καὶ ἔσαι τὸ προσαχθέν.

ΑΛΛΩΣ.

Μετρηθήτωσαν αἱ αβ, βγ, γε, εδ, δα, καὶ τῆς λκ, ληφθείσης ἀντὶ δε, ἀπὸ τῆς Κλίμακος, συνιστάσθω ἐπ᾽ αὐτῆς καὶ τὴν ἀνωτέρω τὸ λκηθζ, πολύγωνον ὅμοιον τῷ δεγβα.

Κείσθω ἔτι καταγράψαι ἐν χάρτῃ τὰ α, β, γ, δ, στερεὰ σώματα. Ληφθήτωσαν δὲ δύο τόποι ἱκανῶς ἀφιστάμενοι τούτων οἱ ε, ζ. καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ ε, μετρηθήτωσαν αἱ αεζ, βεζ, γεζ, δεγ, γωνίαι, ἀπὸ δὲ τοῦ ζ, μετρηθήτωσαν ἔτι αἱ δζε, γζε, βζε, αζε. καὶ εἰλήφθω ἀντὶ τῆς εζ, ἡ ηθ. καὶ πρὸς μὲν τῷ θ, συνεστάθητωσαν αἱ ηθκ, ηθλ, ηθμ, ηθν, γωνίαι ἴσαι ταῖς εζδ, εζγ, εζβ, εζα. πρὸς δὲ τῷ η, συνεστάθητωσαν αἱ νηθ, μηθ, ληθ, κηθ, ἴσαι ταῖς αεζ, βεζ, γεζ, δεζ, καὶ συνεσταθήσεται πάντως τὸ ηθκλμν, πολύγωνον ὅμοιον τῷ εζδγβα. ὁ λόγος σαφὴς ἐκ τῶν προειρημένων.

Geom. Pr. lib. 5. Fig.4.



ΑΛΛΩΣ.

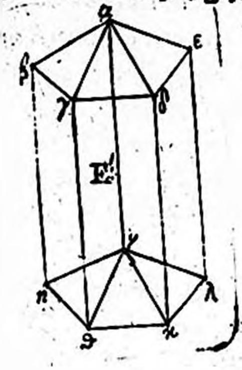
Ἔστωσαν πόλεις αἱ α, β, γ, δ, αἵτινες ὀφείλουσιν ἐν χάρτῃ, ἢ σανίδι, ἢ ἄλλῳ τινὶ ὁμαλῷ ἐπιπέδῳ ἐξ ὕλης δυσκατεργάστου κατεσκευασμένῳ καταγραφῆναι. Ληφθήτω δὴ τὸ δύο ἔχον κανόνας τετράγωνον, οἷον τὸ εζηθ· καὶ ἀπό τινος τόπου φέρ᾽ εἰπεῖν τοῦ η, διοπτευθήτω διὰ τοῦ ἐν τῷ η, ἐστηριγμένου κανόνος ἑκάστη τῶν πόλεων, καὶ σημειωθήτωσαν τὰ θκλμ, σημεῖα, τὰ ἐν ταῖς πλευραῖς τοῦ αὐτοῦ ὀργάνου, δι᾽ ὧν ὁ κανὼν διέρχεται. εἶτα μεταφέρε τὸ ὄργανον ἐφ᾽ ἑτέρου τόπου, δὸς εἰπεῖν τοῦ ζ, καὶ διοπτευθήτωσαν διὰ

τοῦ

τοῦ ἐν τῷ ζ, ἐστηριγμένου κανόνος αἱ αὐταὶ πόλεις, καὶ σημειωθήτωσαν τὰ ξ ο θ ρ, σημεῖα, δι᾽ ὧν ὁ κανὼν διέρχεται. τούτων δὲ γενομένων, ἀχθήτωσαν ἀπὸ τοῦ η, διὰ τῶν θ κ λ μ, τῶν ἐν τῇ προτέρᾳ γενομένων διοπτείᾳ σημείων, αἱ η θ, η κ, η λ, η μ· καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν η θ, τέμνει τὴν ζ ρ Α, κατὰ τὸ ρ, ἡ δὲ η κ, τὴν ζ θ β, κατὰ τὸ σ, ἡ δὲ η λ, τὴν ζ λ γ, κατὰ τὸ τ, καὶ ἡ η μ, τὴν ζ ξ δ, κατὰ τὸ φ, ἐπιζευχθῶσαν αἱ ρ σ, σ τ, τ φ· καὶ τῇ τοιαύτῃ ἐφόδῳ θηρεύονται τὰ τῶν δοθεισῶν πόλεων διαστήματα α β, β γ, γ δ, οἷς ἀναλογεῖ τὰ ρ σ, σ τ, τ φ, ὡς ὀψόμεθα. Εἰς δὲ καταγραφὴν τῶν αὐτῶν πόλεων ληφθήτω ἡ χ ψ, ἀντὶ τῆς ζ η, καὶ ἐπ᾽ αὐτῆς συνεστάθω τὸ χ ψ ω α β γ, πολύγ: ὅμοιον τῷ ζ η ρ σ τ φ, καὶ ἐν μὲν τῷ ω, τεθήτω ἡ α, πόλις, ἐν δὲ τῷ α, ἡ β, ἐν δὲ τῷ β, ἡ γ, καὶ ἐν τῷ γ, ἡ δ, καὶ ἔσονται πάντως ἀνάλογα τὰ ω α, α β, β γ, διαστήματα τοῖς α β, β γ, γ δ, διαστήμασι τῶν πόλεων· καὶ αἱ ἐν τῷ χάρτῃ, ἢ σανίδι καταγεγραμμέναι τὴν αὐτὴν ἕξουσι θέσιν ταῖς δοθείσαις πόλεσιν. Ὅτι δὲ τὰ ρ σ, σ τ, τ φ, ἀναλογεῖ τοῖς α β, β γ, γ δ, διαστήμασι τῶν πόλεων, δῆλον. ἐπεὶ γὰρ αἱ ζ ρ α, ζ ρ, εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν διὰ τὴν τῶν ὀργάνων παράλληλον θέσιν, καὶ εἰς αὐτὰς πεπτώκασιν αἱ ζ η, η α, πάντως γε αἵ τε ὑπὸ η ζ ρ, η ζ α, γωνίαι, καὶ αἱ η ρ ζ, η α ζ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν κθ': τοῦ α': Εὐκλ:, ἔχουσι δὲ καὶ τὴν ὑπὸ ζ η α, κοινὴν, ἄρα τὰ ζ η α, ζ η ρ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσι. Πάλιν ἐπεὶ ἡ ζ σ β, παράλληλός ἐστι τῇ ζ σ θ, πάντως γε αἵ τε ὑπὸ η ζ β, η ζ σ, γωνίαι, καὶ αἱ ὑπὸ ζ β η, ζ σ η, ἴσαι εἰσίν. ἔχουσι δὲ κοινὴν καὶ τὴν ὑπὸ ζ η β, ἄρα τὰ ζ η β, ζ η σ, τρίγ: ὅμοιά εἰσι. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσονται καὶ τὰ ζ η γ, ζ η λ, ζ η δ, ζ η φ, ὅμοια. ὥστε καὶ τὰ ζ η ρ σ λ φ, καὶ ζ η α β γ δ, πολύγ: ὅμοιά εἰσιν, ὅτι καὶ ἐξ ὁμοίων σύγκειται τριγώνων.

Τοῦτον δὴ τὸν τρόπον ἐξετάσοι τῶν κατά τε μῆκος καὶ πλάτος κειμένων πόλεων τὰ διαστήματα θηρεύειν. ἐὰν δὲ ἐφεξῆς καὶ ἄλλαι πόλεις τύχωσιν οὖσαι μετατιθεμένου τοῦ αὐτοῦ ὀργάνου ἐπ᾽ ἄλλον καὶ ἄλλον τόπον, καὶ τῶν αὐτῶν γενομένων πράξεων, εὑρεθήσονται κἀκείνων τὰ διαστήματα, καὶ ἐν χάρτῃ ἀναλόγως καταγραφήσονται.

Geom. Pr. Lib. 5. Fig. 5.



Περὶ Στερεομετρίας.

Πρότασις Ε':

Πρίσματος οἱουδήποτε τὸ στερεὸν εὑρεῖν.

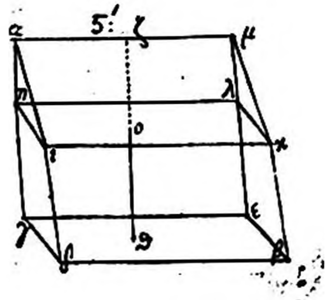
Ἔστω πρίσμα τυχὸν τὸ α θ κ, καὶ ζητείσθω τὸ στερεὸν αὐτοῦ. Εὑρεθήτω δὴ τὸ, τὸ ἐμβαδὸν θατέρου τῶν παραλλήλων αὐτοῦ ἐπιπέδων, δὸς εἰπεῖν τὸ α β γ δ ε, καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὅλου πρίσματος, εἴπω μῆκος κατὰ τὰ προειρημένα δηλ: ἡ αζ. εἶτα πολλαπλασιασθήτωσαν τὰ ἀριθμέντα εἰς ἄλληλα, καὶ ὁ γινόμενος ἀριθμὸς ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν αὐτῶν τὸ στερεὸν τοῦ δοθέντος αθκ, πρίσματος παραστήσει κατὰ τὸ β΄: λῆμμα τῆς γ΄: τοῦ β΄: τοῦ παρόντος.

Πρότασις ς΄:

Πρίσματος κολοβοῦ τετμημένου ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῇ αὐτοῦ βάσει, τὸ στερεὸν εὑρεῖν.

Ἔστω πρίσμα κολοβὸν τὸ πγδβιλκι, καὶ τεμνέτω αὐτὸ τὸ πκ, ἐπίπεδον παράλληλον ὂν τῇ γβ, αὐτοῦ βάσει, καὶ ζητείσθω τὸ τούτου στερεόν. Μετρηθήτω δὲ τὸ τοῦ δοθέντος πρίσματος ὕψος θο. εἶτα ἀριθμήτω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐν μέσῳ ἐπιπέδου τοῦ ἐξ ἴσου δηλ: ἀφισαμένου τῆς πγβ, βάσεως τοῦ πρίσματος, καὶ πκ, ἐπιπέδου τοῦ τὸ αὐτὸ τέμνοντος κολοβὸν πρίσμα, καθ᾽ ὃν σημειωθήσεται τρόποι. καὶ πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸ θο, ὕψος, καὶ ὁ γινόμενος ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀριθμὸς, παραστατικὸς ἔσται τοῦ στερεοῦ τοῦ δοθέντος πρίσματος. ἐὰν γὰρ δὴ ἑκάστου μέρους τοῦ θο, ὕψους διαβαίνειν ἐπίπεδα ἐννοηθῶσιν παραλλήλως ἔχοντα τῇ πγβ, βάσει τοῦ πρίσματος, καὶ τῷ πκ, ἐπιπέδῳ, καὶ ἀποπληροῦντα τὸ δοθὲν πρίσμα, ταῦτα πάντως ἀριθμητικῶς εἰσιν ἀνάλογον, ταυτὸν δ᾽ ἐστιν εἰπεῖν, ἴσῃ ὑπεροχῇ ἀλλήλων τὰ μὲν μείζω ὑπερέχουσι, τὰ δ᾽ ἐλάττω ὑπερέχονται, ὥσπερ καὶ αἱ τούτων πλευραί. ὥστε ἐὰν τὸ, πγβ, μέγιστον αὐτοῦ ἐπίπεδον καὶ πκ, ἐλάχιστον ἐπὶ τὸ θο, πολλαπλασιασθῇ ὕψος χωρὶς, δύο συσταθήσονται στερεὰ ἴσῃ ὑπεροχῇ τὸ μὲν ὑπερέχον, τὸ δ᾽ ἐλλεῖπον τοῦ δοθέντος πρίσματος. Ἐὰν δ᾽ αὖθις καὶ τὸ μέσον ἐπίπεδον ἐπὶ τὸ θο, πολλαπλασιασθῇ ὕψος, συσταθήσεταί τι στερεὸν ἴσῃ καὶ αὐτὸ ὑπεροχῇ τὸ μὲν ἔλαττον τῶν γενομένων στερεῶν ὑπερέχον, ὑπὸ δὲ τοῦ μείζονος ὑπερεχόμενον, ὥσπερ καὶ τὸ δοθὲν πρίσμα. τὸ ἐκ τοῦ μέσου ἄρα ἐπιπέδου καὶ ὕψους τοῦ δοθέντος πρίσματος στερεὸν, ἴσον ἐστὶ τῷ δοθέντι πρίσματι.

Geom. Tr. Lib. 5. Fig. 6.



Εὑρεθήσεται δὲ τὸ μέσον δυσὶ τρόποις. ἢ γὰρ τῶν γβ, πκ, ἐπιπέδων συναπτομένων, λαμβάνεται τὸ τοῦ γινομένου ἥμισυ, καὶ τοῦτό ἐστι τὸ μέσον· ἴσῃ γὰρ ὑπεροχῇ ὑπερέχει καὶ ὑπερέχεται. ἢ τῶν γδ, πκ, πλευρῶν συναπτομένων, τὸ τοῦ ὅλου ἥμισυ ἐπὶ τὴν δβ, πολλαπλασιάζεται πλευράν, καὶ τὸ γινόμενον ἔσται μέσον τῶν πκ, γβ, ἐπιπέδων.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

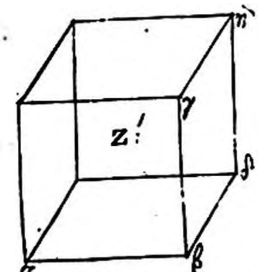
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τῶν ἀριθμητικῶς ἀνάλογον ἐπιπέδων ἡ σύναψις, ἴση ἐστὶ τῷ μέσῳ τῶν ἄκρων ἐπιπέδων, τοσάκις λαμβανομένῳ, ὅσα εἰσὶ καὶ τὰ ἐπίπεδα.

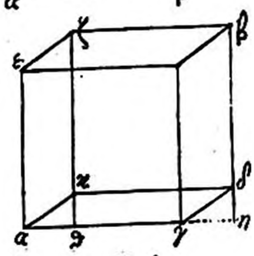
Πρότασις Ζ΄.

Ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου δοθέντος, τὸ στερεὸν αὐτοῦ εὑρεῖν.

Ἔστω παραλληλεπίπεδον τὸ αη, καὶ ζητείσθω τὸ αὐτοῦ στερεόν. Ἐπεὶ δὲ τοῦτο διχῶς ἐνδέχεται συμβῆναι, ἢ γὰρ τοῦ δοθέντος παραλληλεπιπέδου πᾶσαι αἱ πλευραὶ ὀρθογώνιά εἰσι παραλληλόγραμμα, ἢ αἱ δύο μὲν, ἡ βάσις καὶ ἡ ταύτῃ ἀπεναντίον ῥομβοειδεῖς εἰσιν, αἱ δὲ λοιπαὶ ὀρθογώνια. Ἔστωσαν α΄: αἱ πλευραὶ πᾶσαι τοῦ δοθέντος παραλληλεπιπέδου ὀρθογώνια. εἶτα πολλαπλασιασθήτω ἡ αβ, ἐπὶ τὴν βδ, καὶ τὸ δα, γενόμενον πολλαπλασιασθήτω ὁμοίως ἐπὶ τὴν βγ, καὶ ἔσται τὸ ζητούμενον. πολλαπλασιαζομένης γὰρ τῆς αβ, ἐπὶ τὴν βδ, συνίσταται ἡ αδ, βάσις. τῆς δὲ αδ, πάλιν ἐπὶ τὴν βγ, πολλαπλασιαζομένης, συνίσταται τὸ ὅλον αη. τὸ γὰρ στερεὸν ὑπὸ τριῶν διαστημάτων λέγεται περιέχεσθαι, μήκους, πλάτους καὶ βάθους, ὥσπερ τὸ ἐπίπεδον ὑπὸ δύο, μήκους δηλον: καὶ πλάτους. διὸ τοῦτο μὲν, τοῦ μήκους μόνον ἐπὶ τὸ πλάτος πολλαπλασιαζομένου, ἢ καὶ ἀνάπαλιν, συνίσταται. ἐκεῖνο δὲ, τοῦ τε μήκους ἐπὶ τὸ πλάτος πολλαπλασιαζομένου, καὶ τοῦ γενομένου ἐπὶ τὸ ὕψος.

Geom. Pr. Lib. 3. Fig. 3.





Ἔστω ἔτι παραλληλεπίπεδον τὸ αβ, καὶ ἐχέτω τὰς δύο τῶν αὐτοῦ πλευρῶν τήν τε βάσιν αδ, καὶ τὴν ταύτῃ ἀπεναντίον εβ, ῥομβοειδεῖς, τὰς δὲ λοιπὰς αζ, γβ, δζ, γε, ὀρθογώνια. Ἀναχθήτω δὴ ἡ αδ, βάσις ἐπὶ τὸ θκδη, ὀρθογώνιον κατὰ τὴν β΄: τοῦ η: τοῦ α: μέρους· εἶτα πολλαπλασιασθήτω ἡ θη, ἐπὶ τὴν ηδ, τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος, καὶ γενήσεται πάντως τὸ θδ. τοῦτο δὲ πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸ αε, ὕψος, καὶ κατὰ τὰ ἀνωτέρω συσταθήσεται τὸ αβ, παραλληλεπίπεδον, ἴσον ὂν τῷ δοθέντι. ἕκαστον γὰρ τῶν ὀρθῶν παραλληλεπιπέδων, μῆκος, πλάτος, καὶ βάθος, ἢ γοῦν ὕψος ἔχον, δυσὶ συνίσταται πολλαπλασιασμοῖς, ὡς ἤδη δέδεικται.

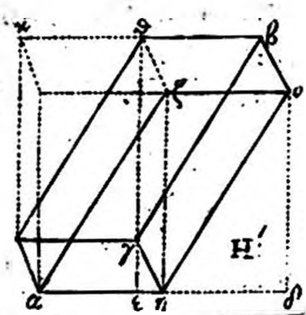
Πρό-

Πρότασις Η':

Ἐγκλινομένου παραλληλεπιπέδου δοθέντος, τὸ στερεὸν αὐτοῦ εὑρεῖν.

Ἔστω ἐγκλινόμενον παραλληλεπίπεδον τὸ αβ, καὶ ζητείσθω τὸ τούτου στερεόν. Ἀλλ' εἰ καὶ τοῦτο διχῶς ἐνδέχεται συμβῆναι, ἢ γὰρ ἡ τούτου βάσις ὀρθογώνιος εἴη, ἢ μή, δεῖ ἔμπης α: τὸ τῆς βάσεως ἐμβαδὸν ζητεῖν. Εὑρεθήσεται δὲ τοῦτο διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς μιᾶς αὐτοῦ πλευρᾶς, ἐὰν ὀρθογώνιον ᾖ, ἐπὶ τὴν ἑτέραν, ὡς ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω δέδεικται. Εἰ δὲ μὴ ὀρθογώνιον εἴη, ἀλλὰ ῥόμβος τις, ἢ ῥομβοειδές, ὀφείλει τὸ τούτου εὑρεθῆναι ὕψος, καὶ ἐπ' αὐτὸ πολλαπλασιασθῆναι τὴν πλευράν, ἐφ' ἧς ἡ κάθετος πίπτει. εἶτα τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ τοῦ ἐγκλινομένου ἐπιπέδου ὕψος ὁμοίως πολλαπλασιασθῆναι. Εὑρεθήτω οὖν τὸ ὕψος τῆς αγ, βάσεως, πιπτούσης καθέτου ἀπὸ τοῦ γ, ἐπὶ τῆς αη, καὶ πολλαπλασιασθήτω ἡ αη, ἐπὶ τὴν ἐπ' αὐτῆς κάθετον, καὶ γνωσθήσεται πάντως ἡ αγ, βάσις. τῆς δὲ αη, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκβαλλομένης, πιπτέτω κάθετος ἐπ' αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ο, σημείου ἡ οδ, καὶ τοῦτο ἔσται τὸ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου ὕψος. εἶτα πολλαπλασιασθήτω ἡ αγ, βάσις ἐπὶ τὴν δο, κάθετον, καὶ τὸ γενόμενον ἔσται τὸ ζητούμενον. διὰ γὰρ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς αη, ἐπὶ τὴν γε, θηρεύεται τὸ τῆς αγ, βάσεως ἐμβαδόν, τῆς δὲ αγ, ἐπὶ τὴν δο, πολλαπλασιασθείσης, συνίσταται τὸ αθ, παραλληλεπίπεδον· καὶ ἐπεὶ τὰ αβ, αθ, στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εἰσι βάσεως τὸ αὐτὸ ἔχοντα ὕψος, πάντως γε ἴσα εἰσὶ κατὰ τὴν κθ': τοῦ ιά: τῶν Στοιχείων· ὥστε ἐγνωσμένου τὸν τρόπον τοῦτον τοῦ στερεοῦ τοῦ αθ, παραλληλεπιπέδου, γινώσκεται καὶ τὸ τοῦ αβ, ἐγκλινομένου στερεόν. Ἐγκλινομένου ἄρα ἐπιπέδου δοθέντος, τὸ στερεὸν αὐτοῦ εὕρηται.

Geom. Pr. Lib. 5. Fig. 8.



Πρότασις Θ':

Τοίχου παραλληλεπιπέδου δοθέντος, τὸ στερεὸν αὐτοῦ εὑρεῖν.

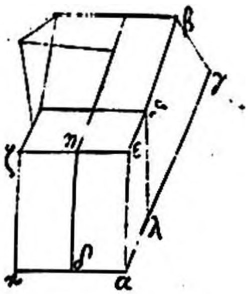
Ἔστω τοῖχος παραλληλεπίπεδος ὁ κθ, οὗ μῆκος μὲν τὸ κα, πλάτος δὲ τὸ αλ καὶ ὕψος τὸ αε· καὶ ζητείσθω τὸ τούτου στερεόν. Πολλαπλασιασθήτω δὲ τὸ κα, μῆκος ἐπὶ τὸ αλ, πλάτος, ἢ καὶ ἀνάπαλιν, καὶ τὸ γενόμενον ὁμοίως πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸ αε, ὕψος, καὶ εὑρεθήσεται τὸ τοῦ κθ, στερεὸν κατὰ τὴν ἀνωτέρω. Εἰ δὲ δύο ὦσι τοῖχοι ἰσοπαχεῖς, πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις

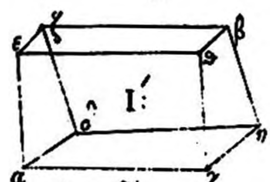
κεί-

κείμενοι, ὡς οἱ κθ, δβ, καὶ ζητηθῇ τὸ τούτων στερεὸν, εὑρεθήτω α: τὸ στερεὸν ἑκατέρου χωρὶς κατὰ τὸν προδηλωθέντα τρόπον, καὶ τὰ εὑρεθέντα στερεὰ συναφθήτωσαν εἰς ἕν. εἶτα εὑρεθήτω καὶ τὸ τοῦ δθ, μέρους στερεὸν, καὶ τοῦτο ἀφαιρείσθω ἀπὸ τοῦ ὅλου, κοινὸν γὰρ ὂν ἑκατέρῳ τοίχῳ λαμβάνεται δὶς, καὶ τὸ ἐναπολειφθὲν ἴσον ἔσται τοῖς κθ, δβ, δοθεῖσι τοίχοις. Geom. Pr. Lib. 5. Fig. 9. ὁ λόγος σαφής· κἂν πλείονα ὦσι τείχη εἰς περιοχὴν τόπου τινὸς τὸ αὐτὸ γινέσθω.

Πρότασις Ι′:

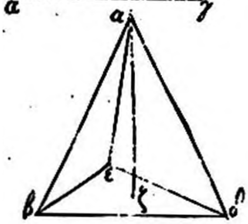
Τείχους ἀνίσου τῇ παχύτητι δοθέντος, τὸ στερεὸν αὐτοῦ εὑρεῖν.





Ἔστω τεῖχος ἄνισον τῇ παχύτητι τὸ αβ, οὗ μῆκος μὲν τὸ αγ, πλάτος δὲ πρὸς τῇ βάσει τὸ αδ, καὶ ὕψος τὸ αε. πρὸς δὲ τῇ κορυφῇ ἔστω πλάτος τὸ εζ, ἔλαττον τοῦ αδ, καὶ ζητηθήτω τὸ τούτου στερεόν. Εὑρεθήτω δὴ κατὰ τὴν ϛ′: τοῦ παρόντος τὸ μέσον ἐπίπεδον, τὸ μεταξὺ δηλονότι τοῦ αη, καὶ εβ, ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ὑπερέχον τε καὶ ὑπερεχόμενον. καὶ πολλαπλασιασθήτω τοῦτο ἐπὶ τὸ αε, ὕψος, καὶ τὸ γενόμενον ἴσον ἔσται τῷ στερεῷ τοῦ αβ, δοθέντος τείχους. Ἡ δεῖξις ἡ αὐτή ἐστι τῇ ἐν τῇ ῥηθείσῃ ϛ′: τοῦ παρόντος. τὸ γὰρ τοιοῦτον τεῖχος πρίσμα ἐστὶ τετμημένον τῷ εβ, ἐπιπέδῳ, παραλλήλῳ ὄντι τῇ αη, βάσει.

Πρότασις ΙΑ′:



Τῆς τυχούσης πυραμίδος τὸ στερεὸν εὑρεῖν·

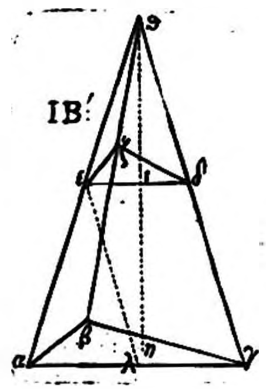
Ἔστω πυραμὶς ἡ αβδε, καὶ ζητηθήτω τὸ ταύτης στερεόν. Εὑρεθήτω α: τὸ ἐμβαδὸν τῆς βδε, αὐτῆς βάσεως, καὶ ζα, ὕψος. εἶτα πολλαπλασιασθήτω ἡ ὅλη βδε, βάσις ἐπὶ τὸ γ′: τοῦ αζ, ὕψους, ἢ ὅλον τὸ αζ, ὕψος ἐπὶ τὸ γ′: τῆς βδε, βάσεως, καὶ τὸ γενόμενον καθ' ἑκάτερον τὸν τρόπον ἴσον ἔσται τῷ στερεῷ τῆς δοθείσης πυραμίδος κατὰ τὸ γ′: λῆμμα τοῦ β′: τοῦ παρόντος.

Πρότασις ΙΒ':

Πυραμίδος κολούρου δοθείσης τὸ στερεὸν αὐτῆς εὑρεῖν.

Ἔστω κόλουρος πυραμὶς ἡ α β γ δ ε ζ, καὶ ζητηθήτω τὸ ταύτης στερεόν. Μετρηθήτω δὴ ἥτε ε δ, βάσις τῆς κορυφῆς τῆς δοθείσης πυραμίδος, καὶ τὸ ὕψος τῆς αὐτῆς Γεωμετρικῷ τινι μέτρῳ κατὰ τὰ ἐν τῇ Ὑψομετρίᾳ εἰρημένα, εἶτα ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς α γ, ἡ λ γ, ἴση τῇ ε δ· καὶ μετρηθήτω αὖθις ἥτε α λ, καὶ α ε, τῷ αὐτῷ μέτρῳ, ᾧ καὶ ἡ ε δ, μεμέτρηται. μετρηθέντων δὲ καὶ τούτων, γενέσθω ὡς ἡ α λ, ὑπεροχὴ, ᾗ ὑπερέχει ἡ α γ, τὴν ε δ, πρὸς αὐτὴν τὴν ε δ, οὕτως ἡ η ι, τὸ ὕψος δηλονότι τῆς δοθείσης πυραμίδος πρὸς ἄλλο τι, καὶ εὑρεθήσεται ἡ ι θ, ὡς ὀψόμεθα. δέδοται δὲ καὶ ἡ η ι, ἄρα καὶ ὅλη ἡ θ η, δεδομένη ἔσαι. τούτων δ' οὕτω γενομένων, τμηθήτω ἑκατέρα τῶν θ η, θ ι, εἰς τρία ἴσα, καὶ εὑρεθήτω τὸ ἐμβαδὸν ἑκατέρου τῶν α β γ, δ ε ζ, ἐπιπέδων· καὶ ἐπὶ μὲν τὸ γ': τῆς θ η, πολλαπλασιασθήτω ἡ α β γ, βάσις, ἐπὶ δὲ τὸ γ': τῆς θ ι, πολλαπλασιασθήτω ἔτι ἡ δ ε ζ, τὸ δὲ γενόμενον διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς δ ε ζ, ἐπὶ τὸ γ': τῆς θ ι, ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ γινομένου διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς α β γ, ἐπὶ τὸ γ': τῆς θ η, καὶ τὸ ἐναπολειφθὲν ἴσον ἔσαι τῷ στερεῷ τῆς δοθείσης α β γ δ ε ζ, κολούρου πυραμίδος· ἀναπεπληρώσθω γὰρ ἡ α β γ θ, πυραμίς. καὶ ἐπεὶ ἡ λ γ, ἴση εἴληπται τῇ ε δ, καὶ παράλληλός ἐστι τῇ αὐτῇ, πάντως γε καὶ αἱ ε λ, δ γ, ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι κατὰ τὴν λ γ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ· ὥστε κατὰ τὴν β': τοῦ ς': τοῦ αὐτοῦ αἱ α γ, α θ, εὐθεῖαι ἀναλόγως τέμνονται· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α λ, πρὸς τὴν λ γ, ἢ τὴν ἴσην ταύτῃ τὴν ε δ, ἡ α ε, πρὸς τὴν ε θ, ὡς δὲ ἡ α ε, πρὸς τὴν ε θ, ἔχει καὶ ἡ η ι, πρὸς τὴν ι θ, κατὰ τὴν ι ζ': τοῦ ι α': τοῦ αὐτοῦ· ἄρα καὶ ὡς ἡ α λ, πρὸς τὴν ε δ, ἔχει ἡ η ι, πρὸς τὴν ι θ. ἐγνωσμένων ἄρα τῶν τριῶν ὅρων α λ, ε δ, η ι, γνωσθήσεται πάντως καὶ ὁ δ': ι θ, ὥστε καὶ ὅλη ἡ η θ, ἐγνωσμένη ἔσαι. πολλαπλασιαζομένης δὲ τῆς μὲν α β γ, βάσεως ἐπὶ τὸ γ': τῆς η θ, συνίσαται κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἡ ὅλη α β γ θ, πυραμίς. πολλαπλασιαζομένης δὲ τῆς ε δ ζ, βάσεως ἐπὶ τὸ γ': τῆς ι θ, συνίσαται κατὰ τὴν αὐτὴν ἡ ε δ ζ θ, πυραμίς. ἀφαιρουμένης δὲ τῆς ε δ ζ θ, πυραμίδος ἀπὸ τῆς α β γ θ, ἐναπολείπεται ἡ α β γ δ ε ζ, δοθεῖσα κόλουρος πυραμίς. ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Geom. Pr. Lib. 5. Fig. 10.



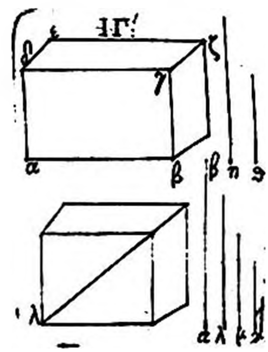
Πρό-

Πρότασις ΙΓ'.

Τὸ δοθὲν στερεὸν κατὰ τὸν δοθέντα λόγον Γεωμετρικῶς αὐξῆσαι.

Ἔστω στερεὸν τὸ α ζ, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς η, πρὸς τὴν θ, καὶ ζητείσθω ἕτερον στερεὸν ὅμοιον τῷ δοθέντι. ὥστε ἔχειν τὸ δοθὲν πρὸς ἐκεῖνο, ὡς ἡ η, πρὸς τὴν θ. Γενέσθω δὴ ὡς ἡ η, πρὸς τὴν θ, ἡ α β, πρὸς τὴν κ, καὶ τῶν α β, κ, εὑρεθήτωσαν δύο ἑξῆς μέσοι ἀνάλογοι κατὰ τὴν ι: τοῦ α: τοῦ α: μέρους, αἱ λ, μ, καὶ συνεστάσθω ἐπὶ τῆς λ, στερεὸν ὅμοιον τῷ δοθέντι α ζ, καὶ τοῦτο ἔσται τὸ ζητούμενον. Ἐπεὶ γὰρ αἱ α β, λ, μ, κ, εὐθεῖαι ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογοι, πάντως γε τὸ ἐπὶ τῆς α β, α: πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς λ, β': ἔχει ὡς ἡ α β, α: πρὸς τὴν κ, δ': τὰ γὰρ ὅμοια στερεὰ ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἀλλὰ ἡ α β, πρὸς τὴν κ, ἔχει, ὡς ἡ η, πρὸς τὴν θ, ἄρα καὶ τὸ ἐπὶ τῆς α β, στερεὸν πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς λ, ὅμοιον στερεὸν ἔχει ὡς ἡ η, πρὸς τὴν θ. Τὸ δοθὲν ἄρα στερεὸν κατὰ τὸν δοθέντα γεωμετρικῶς ηὔξηται λόγον.

Geom. Pr. lib. 5. Fig. 11.



Πρότασις ΙΔ'.

Τὸ δοθὲν στερεὸν κατὰ τὸν δοθέντα λόγον ἀριθμητικῶς αὐξῆσαι.

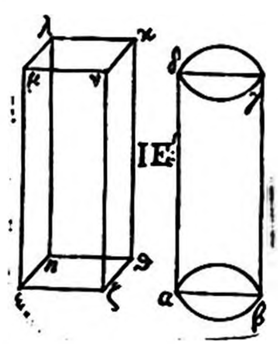
Ἔστω στερεὸν τὸ αὐτὸ α ζ, καὶ ζητείσθω ἕτερον στερεὸν τούτου διπλάσιον, τριπλάσιον, ἢ ἄλλως πως μεῖζον. Διπλασιασθήτω δὴ τὸ α ζ, στερεὸν, ἢ τριπλασιασθήτω, ἢ ἄλλως πως πολλαπλασιασθήτω κατὰ τὸν δοθέντα λόγον, καὶ τοῦ γινομένου εὑρεθήτω ἡ κυβικὴ ῥίζα, καὶ αὕτη ἔσται ῥίζα τοῦ ζητουμένου. ἐὰν γὰρ εὑρεθῇ καὶ ἡ τοῦ δοθέντος στερεοῦ κυβικὴ ῥίζα, οἱ δύο οὗτοι κύβοι λόγον ἕξουσι πρὸς ἀλλήλους τὸν δοθέντα. ἀλλ' ὡς οἱ κύβοι, ἔχουσι καὶ τὰ ὅμοια στερεά. ἐὰν ἄρα γένηται ὡς ἡ κυβικὴ τοῦ δοθέντος ῥίζα πρὸς τὴν αὐτοῦ πλευρὰν, οὕτως ἡ εὑρεθεῖσα κυβικὴ ῥίζα πρὸς ἄλλην τινὰ, καὶ ἐπ' ἐκείνης συσταθῇ στερεὸν ὅμοιον τῷ δοθέντι, τὸ γενόμενον ἕξει πρὸς τὸ δοθὲν στερεὸν τὸν δοθέντα λόγον. Εἰ δὲ τὸ δοθὲν στερεὸν ἄγνωστον ᾖ, δίδοται δὲ ἡ αὐτοῦ πλευρὰ, συσταθήτω ἐπὶ τῆς δοθείσης πλευρᾶς κύβος, καὶ οὗτος διπλασιασθήτω, τριπλασιασθήτω κατὰ τὸν δοθέντα λόγον. Εἰ δὲ τελευταῖον οὔτε μὴν ἡ πλευρὰ αὐτοῦ δίδοται, μετρηθήτωσαν Γεωμετρικῷ τινι μέτρῳ αἱ πλευραὶ τοῦ δοθέντος, καὶ τὰ λοιπὰ γινέσθω, ὡς προειρημένον ἐστί.

Πρότασις ΙΕ':

Τὸ τοῦ ὀρθοῦ κυλίνδρου στερεὸν εὑρεῖν.

Ἔστω κύλινδρος ὁ αβγδ, καὶ ζητηθήτω τὸ τούτου στερεόν. Εὑρεθήτω δὴ τὸ ἐμβαδὸν τῆς αβ, αὐτοῦ βάσεως, καὶ ὕψος τοῦ αὐτοῦ. καὶ πολλαπλασιασθήτω ἡ αβ, αὐτοῦ βάσις ἐπὶ τὸ βγ, ὕψος. ὑποκείσθω γὰρ τὸ εκ, πρίσμα ἴσον τε καὶ ἰσοϋψὲς τῷ δοθέντι αβγδ, κυλίνδρῳ. καὶ ἐπεὶ τὸ εκ, πρίσμα ἴσον τῷ δοθέντι αβγδ, κυλίνδρῳ, καὶ ὕψος δὲ ἔχει ἴσον, πάντως γε ὥσπερ τὸ εκ, πρίσμα συνίσταται, τῆς αὐτοῦ βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος πολλαπλασιαζομένης κατὰ τὴν ε: τοῦ παρόντος, οὕτω καὶ ὁ αγ, δοθεὶς κύλινδρος συσταθήσεται τῆς αὐτοῦ αβ, βάσεως ἐπὶ τὸ βγ, πολλαπλασιαζομένης ὕψος. Εἰ γὰρ μή, ἔσται δήπουθεν ἡ αβ, αὐτοῦ βάσις μείζων, ἢ ἐλάττων τῆς τοῦ εκ, πρίσματος βάσεως. τὸ γὰρ ὕψος ὑπετέθη ἴσον. Ἔστω δὴ α: μείζων ἡ αβ, βάσις τοῦ αγ, κυλίνδρου τῆς εθ, βάσεως τοῦ εκ, πρίσματος. δυνατὸν ἄρα κατὰ τὴν ιζ': τοῦ δ': τοῦ α: τοῦ παρόντος ἐγγραφῆναι εἰς τὸν αβ, κύκλον πολύγωνον, οὗ ἡ περίμετρος μείζων ἔσται τῆς περιμέτρου τῆς εθ, βάσεως τοῦ εκ, πρίσματος. Ἐὰν δὲ τὸ πολύγωνον ἐκεῖνο ἐπὶ τὸ βγ, ὕψος τοῦ αγ, κυλίνδρου πολλαπλασιασθῇ, συσταθήσεται πρίσμα μεῖζον μὲν τοῦ εκ, τῷ παχύτητι, ἰσοϋψὲς δὲ τῷ αὐτῷ. ἀλλὰ τὸ εκ, πρίσμα ἰσοπαχές ἐστι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα τὸ συσταθὲν ἐκεῖνο πρίσμα, οὗ ἡ πολύγωνος βάσις εἰς τὸν αβ, κύκλον ἐγγέγραπται, μεῖζον ἔσται καὶ τοῦ αγ, κυλίνδρου, ἀλλὰ καὶ περιέχεται, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἔστιν ἄρα ὁ αβ, κύκλος μείζων τῆς εθ, βάσεως τοῦ εκ, πρίσματος.

Geom. Pr. Lib. 5. Fig. 12.



Ἔστω β': ὁ αβ, κύκλος, ἡ βάσις δηλ: τοῦ δοθέντος αγ, κυλίνδρου ἐλάττων τῆς εθ, βάσεως τοῦ εκ, πρίσματος. κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ἄρα ιζ': δύναται περιγραφῆναι περὶ τὸν αβ, κύκλον πολύγωνον, οὗ ἡ περίμετρος ἐλάττων ἔσται τῆς περιμέτρου τῆς εθ, βάσεως τοῦ εκ, πρίσματος. ὥστε πολλαπλασιαζομένου τοῦ περιγεγραμμένου ἐκείνου πολυγώνου ἐπὶ τὸ βγ, ὕψος τοῦ αγ, κυλίνδρου, συσταθήσεται πρίσμα ἔλαττον τοῦ τε εκ, πρίσματος, καὶ τοῦ αγ, κυλίνδρου. τὸ γὰρ εκ, πρίσμα ὑπετέθη ἴσον τῷ αγ, κυλίνδρῳ, ἀλλὰ καὶ περιέχει τὸν κύλινδρον, ἄτοπον ἄρα. ὥστε ὁ αβ, κύκλος οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶ τῆς εθ, βάσεως τοῦ εκ, πρίσματος. δέδεικται δὲ οὐδὲ μείζων, ἴσος ἄρα. Ὥσπερ οὖν τὸ πρίσ-

μα

μα συνίσταται, πολλαπλασιαζομένης τῆς αὐτῆς πλευρᾶς ἐπὶ τὸ ὕψος, οὕτω καὶ ὁ κύλινδρος, τοῦ αὐτοῦ γενομένου, συνίσταται. τὸ τοῦ ὀρθοῦ ἄρα κυλίνδρου εὕρηται στερεόν.

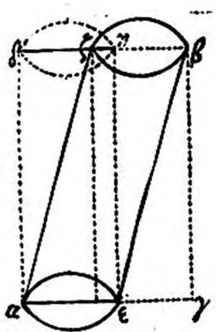
ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι οἱ ἰσοϋψεῖς κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἔχουσιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἡμιδιαμέτρων τῶν αὐτῶν βάσεων τετράγωνα. οἱ γὰρ τοιοῦτοι ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ αὐτῶν βάσεις, αἱ δὲ βάσεις ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἡμιδιαμέτρων αὐτῶν τετράγωνα, ὥστε καὶ δὴ ἴσου.

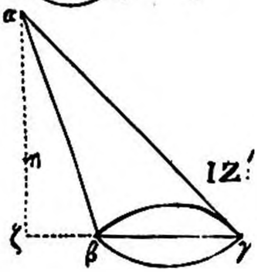
Πρότασις Ις':

Τὸ τοῦ ἐγκλινομένου κυλίνδρου στερεὸν εὑρεῖν.

Geom. Pr. Lib. 5. Fig. 13.



Ἔστω ἐγκλινόμενος κύλινδρος ὁ α β, καὶ ζητηθήτω τὸ τούτου στερεόν. Μετρηθήτω δὴ Γεωμετρικῷ τινι ὀργάνῳ τὸ ὕψος αὐτοῦ, ταὐτὸν δ' ἐστὶν εἰπεῖν ἡ β γ, κάθετος, καὶ εὑρεθήτω τὸ ἐμβαδὸν τῆς α ε, αὐτοῦ βάσεως. εἶτα πολλαπλασιασθήτω ἡ α ε, βάσις ἐπὶ τὸ β γ, ὕψος, καὶ τὸ γενόμενον παραστατικὸν ἔσται τοῦ στερεοῦ τοῦ α β, κυλίνδρου. συνεστάθω γὰρ ἐπὶ τῆς α ε, βάσεως ὀρθὸς κύλινδρος ὁ α η, τὸ αὐτὸ ἔχων ὕψος τῷ α β· καὶ ἐπεὶ οἱ α β, α η, κύλινδροι ἴσοι εἰσί, διὰ τὸ καὶ τὰ διὰ τῶν ἀξόνων αὐτῶν παραλληλόγραμμα ἴσα εἶναι κατὰ τὴν λε': τοῦ α': τοῦ Στοιχ', ὁ δὲ ε δ, συνίσταται κατὰ τὴν ἀνωτέρω διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς α ε, βάσεως ἐπὶ τὸ α δ, ὕψος, πάντως γε καὶ ὁ α β, συσταθήσεται ὁμοίως διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς α ε, βάσεως ἐπὶ τὴν β γ, ἴση γὰρ ἡ β γ, τῇ α δ, κατὰ τὴν λδ': τοῦ αὐτοῦ. τοῦ δοθέντος ἄρα ἐγκλινομένου κυλίνδρου, τὸ στερεὸν εὕρηται.



IZ'

Πρότασις IZ':

Τὸ τοῦ κώνου στερεὸν εὑρεῖν.

Ἔστω κῶνος τυχών, καὶ ζητηθήτω τὸ τούτου στερεόν. Μετρηθήτω δὴ τό, τε ὕψος καὶ ἡ διάμετρος τῆς βάσεως τοῦ αὐτοῦ Γεωμετρικῷ τινι ὀργάνῳ, ἔτι δὲ καὶ ἡ

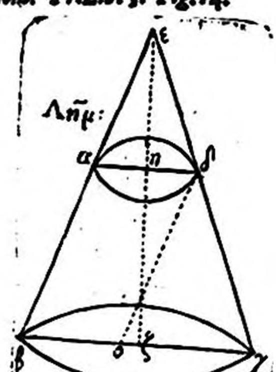
τῆς

τῆς ἐγκλίσεως γωνία, εἴγε ἐγκλινόμενος ᾖ. εἶτα ληφθήτω ἀπὸ τῆς Κλίμακος τό, τε ἀναλογοῦν ὕψος, καὶ ἡ τῆς βάσεως διάμετρος, καὶ κατασκευασθήτω ἐν χάρτῃ ὅμοιος κῶνος τῷ δοθέντι α β γ· καὶ εὑρεθέντος τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς β γ, βάσεως, πολλαπλασιασθήτω ἡ β γ, βάσις ἐπὶ τὸ γ': μέρος τοῦ α ζ, ὕψους, δηλ: ἐπὶ τὸ ζ η, καὶ τὸ γενόμενον ἔσαι τὸ ζητούμενον. Εἰ γὰρ ἡ β γ, βάσις ἐφ' ὅλην τὴν α ζ, πολλαπλασιασθῇ, συςαθήσεται κύλινδρος ἴσος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος ἔχων τῷ α β γ, κώνῳ. ἀλλ' ὅτι ὁ κῶνος τῷ κυλίνδρῳ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχει καὶ ὕψος ἴσον, γ': μέρος ἐσὶ τοῦ κυλίνδρου, ἄρα τῆς β γ, βάσεως ἐπὶ τὴν ζ η, γ': μέρος τῆς α ζ, πολλαπλασιαζομένης, συνίςαται ὁ α β γ, κῶνος.

ΛΗ͂ΜΜΑ.

Κολοβοῦ κώνου δοθέντος τὸ τοῦ ὁλοκλήρου ὕψος εὑρεῖν.

Ἔςω κολοβὸς κῶνος ὁ α β γ δ, καὶ ζητηθήτω τὸ ὕψος τοῦ ὁλοκλήρου. Ἀχθήτω δὴ ἀπὸ τοῦ δ, παράλληλος τῇ α β, ἡ δ ο. Εἶτα γινέσθω ὡς ἡ ο γ, πρὸς τὴν α δ, τὸ ζ η, ὕψος τοῦ α β γ δ, κολοβοῦ κώνου πρὸς ἄλλο τι, καὶ τοῦ εὑρεθέντος συναπτομένου τῷ ζ η, ὕψει, τὸ γενόμενον ἔσαι τὸ ζητούμενον. συμπεπληρώσθω γὰρ ὁ α β γ δ, κολοβὸς κῶνος, καὶ ἤχθω ἡ ζ η, ἐπὶ τὸ ε. καὶ ἐπεὶ αἱ γ β, δ α, παράλληλοί εἰσι, καὶ εἰς αὐτὰς πέπτωκεν ἡ ε γ, πάντως γε αἱ ὑπὸ ε δ α, ε γ β, γωνίαι ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ διὰ τὰ αὐτὰ ἴσαι εἰσὶν ἔτι καὶ αἱ ὑπὸ ε α δ, ε β γ, τῇ δὲ ε β γ, ἴση ἐσὶν ἡ ὑπὸ δ ο γ, διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι καὶ τὰς α β, δ ο· ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ε α δ, ἴση ἐσὶ τῇ ὑπὸ δ ο γ. ὥςε τὰ ε α δ, δ ο γ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσιν. ἔσιν ἄρα ὡς ἡ γ ο, πρὸς τὴν ο δ, ἡ δ α, πρὸς τὴν α ε, καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ ο γ, πρὸς τὴν α δ, ἡ δ ο, ἤτοι ἡ α β, πρὸς τὴν α ε. ὡς δὲ ἡ β α πρὸς τὴν α ε, ἔχει καὶ ἡ ζ η,



Geom. Pr.Lib. 5. Fig.14.

πρὸς τὴν η ε, κατὰ τὴν β': τοῦ ς': τοῦ Στοιχ: ἄρα ὡς ἡ ο γ, πρὸς τὴν α δ, ἔχει καὶ ἡ ζ η, πρὸς τὴν η ε. ἐπεὶ δὲ ἡ ζ η, ὕψος ἐσὶ τοῦ ὁλοκλήρου κώνου, πάντως γε ἐὰν γίνηται ὡς ἡ ο γ, πρὸς τὴν α δ, ἡ ζ η, πρὸς ἄλλο τι, εὑρεθήσεται ἡ η ε, ἄγνωσος, ἧς τῆς ζ η, προςιθεμένης, γινώσκεται ἡ ὅλη ζ ε. ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρό-

Πρότασις ΙΗ':

Τὸ τοῦ κολοβοῦ κώνου στερεὸν εὑρεῖν.

Ἔστω κῶνος κολοβὸς ὁ τυχὼν, καὶ ζητηθήτω τὸ τούτου στερεόν. Μετρηθήτω δὴ ὑπὸ διάμετρος τῆς βάσεως, καὶ ὕψος τοῦ δοθέντος κώνου. Εἶτα λαμβανομένων ἐκ τῆς Κλίμακος τῶν ἀναλόγων τῇ τε διαμέτρῳ τῆς βάσεως, καὶ τῷ ὕψει τοῦ αὐτοῦ κώνου, συνιστάσθω ἐν χάρτῃ ὁ α β γ δ, κῶνος ὅμοιος τῷ δοθέντι. καὶ ἀναπεπληρώσθω κατὰ τὸ ἀνωτέρω λῆμμα ὁ ε β γ, ὁλόκληρος κῶνος. ἀπὸ δὲ τοῦ ε, πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς β γ, διαμέτρου τῆς αὐτοῦ βάσεως ἡ ε ζ, καὶ ἡ μὲν ε ζ, ὕψος ἔσται τοῦ ὁλοκλήρου κώνου, ἡ δὲ ζ η, τοῦ α β γ δ, κολοβοῦ κώνου, καὶ ἡ η ε, τοῦ α δ ε, τοῦ εἰς ἀναπλήρωσιν τοῦ ὁλοκλήρου κώνου. τούτων δ' ἐγνωσμένων, ζητηθήτω τὸ ἐμβαδὸν τῆς τε β γ, βάσεως τοῦ ὁλοκλήρου κώνου, καὶ α δ, κορυφῆς μὲν τοῦ κολοβοῦ κώνου, βάσεως δὲ τοῦ εἰς ἀναπλήρωσιν τοῦ ὁλοκλήρου. καὶ διαιρεθήτω ἑκατέρα τῶν ε ζ, ε η, εἰς τρία ἴσα χωρὶς. εἶτα πολλαπλασιασθήτω ἡ μὲν β γ, βάσις ἐπὶ τὸ γ': τῆς ζ ε, καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς β γ, ἐπὶ τὸ γ': τῆς ζ ε, ἀφῃρήσθω τὸ γινόμενον διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς α δ, ἐπὶ τὸ γ': τῆς η ε, καὶ τὸ ἐναπολειπόμενον ἔσται τὸ ζητούμενον. κατὰ γὰρ τὴν ἀνωτέρω πολλαπλασιαζομένης τῆς β γ, ἐπὶ τὸ γ': τῆς ε ζ, συνίσταται ὁ ε β γ, ὁλόκληρος κῶνος. πολλαπλασιαζομένης δὲ καὶ τῆς α δ, ἐπὶ τὸ γ': τῆς η ε, συνίσταται ὁ ε α δ, τούτου δ' ἀφαιρουμένου ἀπὸ τοῦ ε β γ, ἐναπολείπεται ὁ α β γ δ, κολοβὸς κῶνος, ἀναλογῶν τῷ δοθέντι.

Πρότασις ΙΘ':

Τὸ τῆς σφαίρας στερεὸν εὑρεῖν.

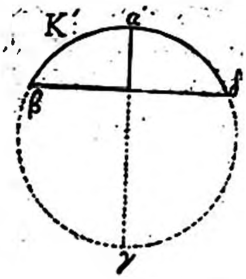
Ἔστω ἡ τυχοῦσα σφαῖρα, καὶ ζητηθήτω τὸ ταύτης στερεόν. Ληφθήτω δὴ ἡ διάμετρος τῆς αὐτῆς σφαίρας, καὶ μετρηθήτω γεωμετρικῷ τινι μέτρῳ. Εἶτα εἰλήφθω ἀπὸ τῆς κλίμακος εὐθεῖα ἔχουσα τοσαῦτα μέρη, ὅσους πόδας, ἢ βήματα ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας περιέχει διάμετρος, καὶ ταύτης δίχα τμηθείσης, γραφήτω περὶ αὐτὴν κύκλος, καὶ εὑρεθήτω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αὐτοῦ κύκλου, καὶ τὰ λοιπὰ γινέσθω ὡς προηρμήνευται προτάσει δ': τοῦ β': τοῦ παρόντος, καὶ ἔσται σοι τὸ ζητούμενον.

Πρότασις Κ':

Παντὸς τμήματος σφαίρας τὸ στερεὸν εὑρεῖν.

Ἔστω τμῆμα σφαίρας τὸ τυχὸν, καὶ ζητείσθω τὸ στερεὸν αὐτοῦ. Μετρείσθω δὴ ἡ τῆς βάσεως αὐτοῦ διάμετρος, καὶ τὸ ὕψος τοῦ δοθέντος τμήματος τῆς σφαίρας, καὶ συνιστάσθω ἐν χάρτῃ τὸ α β δ, ἀναλογοῦν τῷ δοθέντι, καὶ ἀναπεπληρώσθω ἡ ὅλη α β γ δ, σφαῖρα. Εἶτα εὑρισθήτω τὸ ἐμβαδὸν τῆς β δ, βάσεως τοῦ α β δ, δοθέντος τμήματος, καὶ γενέσθω ὡς τὸ ὕψος τοῦ β γ δ, λοιποῦ τμήματος τῆς αὐτῆς σφαίρας πρὸς τὸ ὕψος τοῦ α β δ, οὕτως ἡ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἡμιδιάμετρος πρὸς ἄλλο τι, καὶ τὸ εὑρεθὲν συναφθήτω τῷ ὕψει τοῦ α β δ, τμήματος τοῦ ἀναλογοῦντος τῷ δοθέντι, τοῦ δὲ γενομένου ἀφῃρήσθω τὸ γ': μέρος, καὶ ἐπ' αὐτὸ πολλαπλασιασθήτω ἡ β δ, βάσις τοῦ α β δ, τμήματος, καὶ τὸ γινόμενον ἔσται ἴσον τῷ στερεῷ τοῦ δοθέντος τμήματος κατὰ τὴν μδ': τοῦ πρώτου βιβλίου τοῦ παρόντος.

Geom. Pr. Lib. 5. Fig. 15.

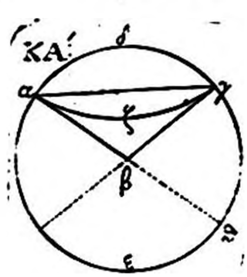


Πρότασις ΚΑ':

Τὸ τοῦ τομέως τῆς σφαίρας στερεὸν εὑρεῖν.

Ἔστω τομεὺς σφαίρας ὁ τυχὼν, καὶ ζητείσθω τὸ τούτου στερεόν. Μετρείσθω δὴ ἥ τε πλευρὰ τοῦ δοθέντος τομέως, ἥτις ἐστὶν ἡμιδιάμετρος τῆς αὐτοῦ σφαίρας, καὶ ἡ διάμετρος τῆς αὐτοῦ α ζ γ δ, βάσεως, καὶ συνιστάσθω ἐν χάρτῃ ὁ α β γ δ, τομεὺς τῆς α ε γ δ, σφαίρας. Εἶτα εὑρεθήτω ἡ ἐπιφάνεια τῆς α δ γ ζ, βάσεως τοῦ δοθέντος τομέως κατὰ τὴν λε': τοῦ α': τοῦ β': καὶ πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸ γ': τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς σφαίρας, ἧς ἐστιν ὁ τομεὺς, καὶ τὸ γενόμενον ἔσται τὸ ζητούμενον. κατὰ γὰρ τὴν μγ': τοῦ α': τοῦ παρόντος ὁ α β γ δ, τομεὺς ἴσος ἐστὶ κώνῳ, οὗ βάσις ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς α ζ γ δ, βάσεως τοῦ α β γ δ, τομέως, καὶ ὕψος ἴσον τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἀλλὰ τὸ τοῦ κώνου στερεὸν παράγεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῆς αὐτοῦ βάσεως ἐπὶ τὸ γ': μέρος τοῦ ὕψους κατὰ τὴν ιζ': τοῦ παρόντος, ἐὰν ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῆς α δ γ ζ, βάσεως τοῦ α β γ δ, τομέως ἐπὶ τὸ γ': τῆς ἡμιδιαμέτρου τῆς α ε γ δ, σφαίρας πολλαπλασιασθῇ, τὸ τοῦ τομέως ἐξαχθήσεται στερεόν.

Geom. Pr. lib. 5. Fig. 16.

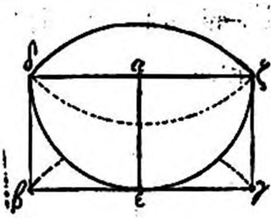


Πρό-

Πρότασις ΚΒʹ.

Τὸ τοῦ πιναχίσκου τοῦ τῇ ἀφαιρέσει τοῦ ἡμισφαιρίου ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου στερεὸν εὑρεῖν.

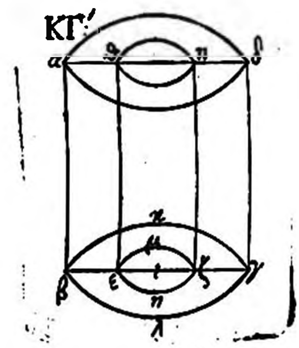
Ἔστω πινακίσκος ὁ δεζγβ, καὶ ζητείσθω τὸ τούτου στερεόν. Πολλαπλασιασθήτω ὁ περὶ τὴν δζ, γραφόμενος κύκλος ἐπὶ τὸ γʹ: μέρος τῆς αε, ἡμιδιαμέτρου, ἀγνοουμένης ἢ ἐκδιδομένης ἤ. εἰδὲ μὴ, μετρηθήτω ὅ, τε περὶ τὴν δζ, γραφόμενος κύκλος, καὶ ἡ τούτου ἡμιδιάμετρος, καὶ τὰ λοιπὰ γινέσθω ὡς εἴρηται. καὶ τὸ γενόμενον ἔσται τὸ ζητούμενον. κατὰ γὰρ τὸ γʹ: πόρισμα τῆς μαʹ: τοῦ αʹ: τοῦ παρόντος ὁ πινακίσκος ἴσος ἐστὶ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ μέγιστος τῆς σφαίρας κύκλος, καὶ ὕψος ἡ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἡμιδιάμετρος. ἀλλ᾽ ὁ κῶνος συνίσταται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς αὐτοῦ βάσεως ἐπὶ τὸ γʹ: τοῦ ὕψους, ἄρα ἐὰν καὶ ὁ περὶ τὴν δζ, γραφόμενος κύκλος ἐπὶ τὸ γʹ: τῆς αε, πολλαπλασιασθῇ, τὸ τοῦ δβγζε, δοθέντος πινακίσκου στερεὸν γενήσεται. Geom. Pr. Lib. 5. Fig. 15.



Πρότασις ΚΓʹ:

Τὸ τοῦ κυλινδρικοῦ σίφωνος στερεὸν εὑρεῖν.

ΚΓʹ

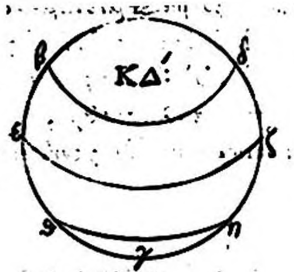


Ἔστω σίφων κυλινδρικὸς ὁ τυχὼν, καὶ ζητείσθω τὸ τούτου στερεόν. Μετρηθήτω δὴ ἥ τε διάμετρος τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, ἐν ᾧ ὁ σίφων, καὶ τὸ ὕψος τοῦ αὐτοῦ. ἔτι δὲ καὶ ἡ διάμετρος τῆς βάσεως τοῦ μέρους τοῦ κυλίνδρου, οὗ τῇ ἀφαιρέσει ὁ σίφων ἐναπολείπεται. καὶ γραφήτω ἐν χάρτῃ ὁ αβγδ, κύλινδρος, ἔχων ὕψος μὲν ἀναλογοῦν τῷ τοῦ δοθέντος ὕψει τὴν αβ. διάμετρον δὲ τὴν βγ. αὐτὸ δὲ σίφωνος τὸ αβεθηζγδ, μέρος. Εἶτα εὑρεθήτω τὸ τετράγωνον τῆς βι, ἡμιδιαμέτρου, καὶ τὸ τῆς κγλβεμζη, ζώνης ὀρθογώνιον, ἤτοι τὸ ὑπὸ τῶν βε, εγ, περιεχόμενον. καὶ γενέσθω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βι, ἡμιδιαμέτρου τετράγωνον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν βε, εγ, ὀρθογώνιον, τὸ τοῦ αβγδ, κυλίνδρου στερεὸν πρὸς ἄλλο τι. καὶ τὸ εὑρεθὲν ἴσον ἔσται τῷ αεζδ, κυλινδρικῷ σίφωνι κατὰ τὴν ιθʹ: τοῦ πρώτου τοῦ παρόντος.

Πρότασις ΚΔ΄.

Τοῦ οἱουδήποτε τῆς σφαίρας μέρους τὸ στερεὸν εὑρεῖν, τοῦ ὑπὸ δύο περιεχομένου κύκλων παραλλήλων, ἢ μή.

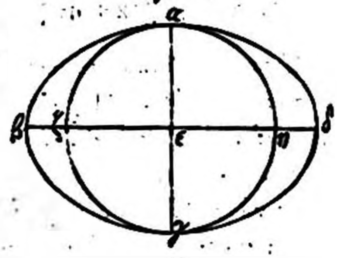
Ζητείσθω δὴ τὸ στερεὸν τοῦ β ε ζ δ, τμήματος τῆς α ε γ ζ, σφαίρας, περιεχομένου ὑπό τε τοῦ β δ, καὶ ε ζ, κύκλου. Εὑρεθήτω α: τὸ στερεὸν τῶν τε α β δ, καὶ α ε ζ, μέρους κατὰ τὴν κ΄: τοῦ παρόντος. εἶτα ἀφῃρήσθω τὸ τοῦ α β δ, ἐλάττονος στερεὸν ἀπὸ τοῦ μείζονος α ε ζ, καὶ τὸ ἐναπολειπόμενον ἔσται τὸ ζητούμενον. ὁ λόγος σαφής. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον εὑρεθήσεται καὶ τὸ στερεὸν τοῦ ε θ η ζ, καὶ παντὸς ἄλλου μέρους τῆς δοθείσης σφαίρας. Geom. Pr. Lib. 5. Fig. 18.



Πρότασις ΚΕ΄.

Τὸ τῆς σφαιροειδοῦς ἐλλείψεως στερεὸν εὑρεῖν.

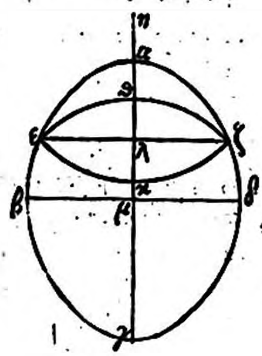
Ἔστω σφαιροειδὴς ἔλλειψις ἡ α β γ δ, καὶ ζητείσθω τὸ ταύτης στερεόν. Μετρηθήτω δὲ ἑκατέρα τῶν ταύτης διαμέτρων ἥτε α γ, καὶ δ β· καὶ εὑρεθήτω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τοῦ περὶ μίαν τῶν αὐτῶν διαμέτρων γραφομένου, ὁποιανδήποτε βούλει, δὸς εἰπεῖν τοῦ α ζ γ η, κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ζ η, ἴση τῇ α γ, ἐλάττονι διαμέτρῳ τῆς ἐλλείψεως. τῆς δὲ λοιπῆς β δ, ληφθήτωσαν τὰ δύο τρίτα. εἶτα πολλαπλασιασθήτω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ζ α η γ, κύκλου ἐπὶ τὸ ληφθὲν ἀπὸ τῆς δ β, καὶ τὸ γινόμενον ἔσται τὸ ζητούμενον κατὰ τὴν μϛ΄: τοῦ α: τοῦ παρόντος.



Πρότασις Κϛ΄.

Τοῦ οἱουδήποτε τῆς σφαιροειδοῦς ἐλλείψεως τμήματος τὸ στερεὸν εὑρεῖν.

Ἔστω σφαιροειδὴς ἔλλειψις ἡ α β γ δ, καὶ ζητείσθω τὸ στερεὸν τοῦ ε α ζ, αὐτῆς τμήματος. Εὑρεθήτω δὴ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ε θ ζ κ, κύκλου τοῦ περὶ τὴν ε ζ, γραφομένου· καὶ μετρηθήτω τό, τε λ α, ὕψος τοῦ ε α ζ, καὶ τὸ λ γ, τοῦ ε γ ζ, τμήματος. ἔτι δέ, καὶ ἡ γ μ, ἡμιδιάμετρος. Εἶτα εὑρεθήτω ἡ τετάρτη



ἀνάλογος τῶν γλ, γμ, λα, καὶ προστεθήτω αὕτη τῇ λα, ὕψει τοῦ εαζ, τμήματος, ὥστε γενέσθαι τὴν ὅλην λη. ταύτης δὲ γενομένης, πολλαπλασιασθήτω τὸ ἔμβαδον τοῦ εθζκ, κύκλου ἐπὶ τὸ γ′: τῆς λη, καὶ τὸ γινόμενον ἴσον ἔσται τῷ στερεῷ τοῦ εαζ, δοθέντος τμήματος κατὰ τὴν μη: τοῦ ε: τοῦ παρόντος.

Περὶ Κοιλομετρίας.

Πρότασις ΚΖ′:

Τὸ δοθὲν κυλινδρικὸν ἀγγεῖον μετρῆσαι.

Ἔστω ἀγγεῖον κυλινδρικὸν, οὗ αἱ ἀπεναντίον βάσεις ἴσαι, τὸ αβγδ, καὶ ζητηθήτω τὸ τούτου χωρητικόν. Ληφθήτω δὴ ἡ ζη, ῥάβδος ἡ πρὸς τὰ τοιαῦτα χρησιμεύουσα, ἧς ἡ κατασκευὴ ἐν τῇ γ′: τοῦ παρόντος διδάσκεται προτάσει ι: καὶ παραβληθήτω ἡ μὲν βγ, διάμετρος τῆς αὐτοῦ βάσεως τῇ ἐπὶ τοῦ ζμ, μέρους τῆς ῥάβδου διαιρέσει, ἤτοι τῇ τῶν διαμέτρων, καὶ ἔστω ἴση τῇ ζ 3, διαμέτρῳ. ἡ δὲ αβ, παραβληθήτω τῇ ἐπὶ τοῦ εη, μέρους τῆς αὐτῆς ῥάβδου διαιρέσει, ἤτοι τῇ τῶν ὑψῶν, καὶ ἔστω ἴση τῇ ε 4. Εἶτα πολλαπλασιασθήτω ὁ γ, ἐπὶ τὸν δ, καὶ ὁ γενόμενος ιβ, παρίστησί σοι τὸ αβγδ, κυλινδρικὸν ἀγγεῖον, χωρητικὸν εἶναι ξεστῶν φέρ᾽ εἰπεῖν, ἢ ἄλλου τινὸς μέτρου τῶν ὑγρῶν, καθ᾽ ὃ καὶ ἡ ῥάβδος διῄρηται, δυοκαίδεκα. ὁ λόγος σαφής. κατὰ γὰρ τὸν τῆς διαιρέσεως λόγον τῆς ἐπὶ τῆς ζμ, πλευρᾶς τῆς ῥάβδου, ἡ τοῦ αβγδ, ἀγγείου βάσις, τριπλασία ἐστὶ τῆς τοῦ δαγβε, κυλινδρικοῦ μέτρου βάσεως, τὸ δὲ ὕψος τοῦ αὐτοῦ αβγδ, ἀγγείου τετραπλάσιον τοῦ ὕψους τοῦ δαγβε, κυλινδρικοῦ μέτρου. ὥστε τὸ αβγδ, ἀγγεῖον μέχρι μὲν τοῦ βε, ὕψους χωρεῖ ξέστας τρεῖς, μέχρι δὲ τοῦ βζ, ἕξ, μέχρι δὲ τοῦ βη, ἐννέα, καὶ μέχρι τοῦ βα, δυοκαίδεκα.

Geom. Pr. Lib. 5. Fig. 19.

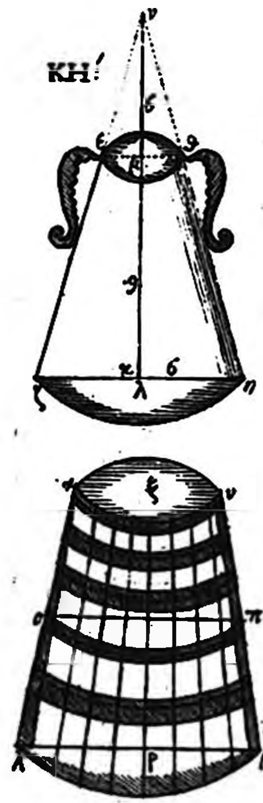
Πρότασις ΚΗ′:

Τὸ δοθὲν κωνοειδὲς ἀγγεῖον μετρῆσαι.

Ἔστω ἀγγεῖον κολοβοῦ κώνου φέρον σχῆμα, οἷος ὁ κάδος, τὸ εζηθ, καὶ ζητηθήτω τὸ τούτου χωρητικόν. Μετρηθήτωσαν δὴ αἱ τῶν αὐτοῦ βάσεων διάμετροι τῇ τῶν μήκεων γραμμῇ, καὶ ἀριθμείσθω ἡ ὑπεροχὴ τῆς ζη, πρὸς τὴν εθ, καὶ ἔσω αὕτη ἡ κη. Εἶτα γενέσθω ὡς ἡ ηκ, πρὸς τὴν εθ, τὸ λμ, ὕψος τοῦ εζηθ, ἀγγείου πρὸς ἄλλο τι, καὶ τοῦτο ἔσαι τὸ μν· ὥστε τὸ λν, ὕψος ἐσὶ τοῦ ὁλοκλήρου ζην, κώνου κατὰ τὸ λῆμμα τῆς ιη: τοῦ παρόντος. τούτου δ' ἀριθμέντος μετρείσθω ἑκάτερον τῶν λν, μν, εἰς τρία ἴσα χωρίς. Καὶ μετρηθήτω αὖθις ἑκατέρα τῶν ζη, ἐπὶ τῇ τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων γραμμῇ, τῇ ἐν τῇ κοιλομετρικῇ ῥάβδῳ, καὶ ἡ μὲν ζη, πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸ γ': τῆς λν, ἡ δὲ εθ, ἐπὶ τὸ γ': τῆς μν, καὶ τὸ γενόμενον ἀπὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς εθ, ἐπὶ τὸ γ': τοῦ μν, ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ γενομένου ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς ζη, ἐπὶ τὸ γ': τῆς λν, καὶ τὸ λειπόμενον ἔσαι τὸ ζητούμενον. *Οἷον ἔσω ἡ μὲν ζη, μερῶν ἴσων ἀλλήλοις δέκα, ἡ δὲ εθ, τεσσάρων. ὥστε ἡ διαφορὰ αὐτῶν κη, ἔσαι μερῶν ϛ. ἔσω καὶ ἡ λμ, μερῶν θ: Γενέσθω δὴ ὡς ἡ κη, ϛ: πρὸς τὴν εθ, δ: ἡ λμ, θ: πρὸς ἄλλην τινά, καὶ ἀριθμήσεται ἡ μν, μερῶν ϛ: ἡ ὅλη ἄρα λν, μερῶν ἔσαι ιε: ἧς τρίτον μέρος ὁ ε: τῆς δὲ μν, ὁ β. Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ζη, παραβαλομένη τῇ τῶν διαμέτρων κοιλομετρικῇ γραμμῇ εὕρηται ἴση τῷ ζ 10, ἡ δὲ εθ, τῷ ζ 4. πολλαπλασιασθήτω τοιγαροῦν ἡ ζη, δηλ: ὁ ι: ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν ε: τὸ τρίτον τῆς λν. καὶ γενήσεται ὁ ν: ἀριθμὸς, δηλωτικὸς τοῦ ζην, κώνου. πολλαπλασιαζομένης δὲ καὶ τῆς εθ, τοῦ δ: δηλ: ἐπὶ τὸν β: τὸ τρίτον ἀμέλει τῆς μν, γενήσεται ὁ η: παρασατικὸς τοῦ εθν, κώνου. ἀφαιρουμένου τοίνυν τοῦ η: ἀπὸ τοῦ ν: τὸ ἐναπολειπόμενον ἔσαι μβ: καὶ τοσούτων ξεσῶν ὑγροῦ ἔσαι χωρητικὸν τὸ εζηθ, ἀγγεῖον.

Geom. Pr. Lib. 5. Fig. 30.

ΚΗ'



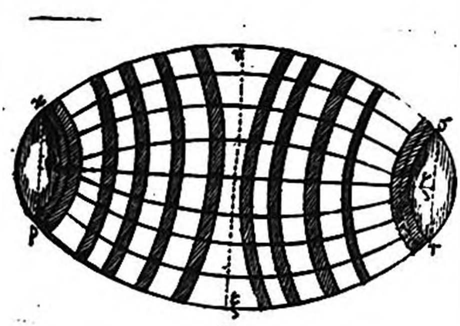
Τοῦτον τὸν τρόπον θηρεύεται τὸ χωρητικὸν τῶν κολοβοῦ κώνου φερόντων σχῆμα ἀγγείων· ἡνίκα ἡ τῶν βάσεων διαφορὰ μεγάλη πώς ἐσιν, ὅτε δὲ ἐλαχίση, οὕτως. Ἔσω εἰς ζήτησιν τὸ χωρητικὸν τοῦ κλμν, γείου. Μετρηθήτω δὴ τῇ μὲν τῶν ὕψεων γραμμῇ τὸ ρξ, αὐτοῦ ὕψος, τῇ δὲ τῶν

δια-

διαμέτρων ἡ ο π, μέση τῶν βάσεων· καὶ ἔστω ἡ μὲν ρ ξ, μερῶν τεσσάρων, ἡ δὲ ο π, ἴση τῇ ζ 4. Εἶτα πολλαπλασιασθήτω ὁ τέσσαρα ἐπὶ τὸν τέσσαρα, καὶ γενήσεται ὁ δεκαέξ, καὶ τοσούτων ξεστῶν ἔσται τὸ κ λ μ ν, ἀγγεῖον χωρητικὸν ὑγροῦ.

Πρότασις ΚΘ':

Τοῦ δοθέντος ἀγγείου σχῆμα ὠοειδὲς φέροντος τὸ χωρητικὸν εὑρεῖν κατὰ τὸ κοινὸν ἔθος. Geom. Pr. Lib. 5. Fig. 81.



Ἔστω ἀγγεῖον ὠοειδὲς κολοβὸν ἑκατέρωθεν τὸ κ ρ τ σ, καὶ ζητηθήτω τὸ τούτου χωρητικόν. Μετρηθήτω δὴ ἡ τε κ ρ, διάμετρος τῇ τῶν διαμέτρων γραμμῇ, καὶ ἡ ἐν μέσῳ τῆς τε κ ρ, καὶ σ τ, δηλ: ἡ ν ξ, καὶ ἔστω ἡ μὲν ν ξ, ἴση τῇ Θ β, ἤτοι μερῶν ἑπτὰ καὶ ἡμίσεως, ἡ δὲ κ ρ, ἴση τῇ Θ σ, ἤτοι δύο καὶ ἡμίσεως. Εἶτα ληφθήτω ἡ μέση τούτων πέντε, καὶ μετρηθήτω ἡ ρ ζ, τῇ τῶν ὕψεων γραμμῇ, καὶ ἔστω ἴση τῇ ε 7. εἶτα πολλαπλασιασθήτω ὁ πέντε ἐπὶ τὸν ἑπτά, καὶ γενήσεται ὁ πέντε καὶ τριάκοντα· καὶ τοσούτων ξεστῶν, ἢ ἄλλου τινὸς μέτρου χωρητικὸν ἔσται τὸ κ ρ τ σ, δοθὲν ἀγγεῖον.

Α'ΛΛΩΣ Α'ΚΡΙΒΕ'ΣΤΕΡΟΝ.

Εὑρεθήτω α: τὸ χωρητικὸν τοῦ ἡμίσεος τοῦ δοθέντος ἀγγείου, ἤτοι τὸ κ ρ ξ ν, κατὰ τὴν ἀνωτέρω. Εἶτα εὑρεθήτω κατὰ τὴν αὐτὴν καὶ τὸ τοῦ ἑτέρου ἡμίσεος χωρητικόν, ἤτοι τοῦ ν ξ τ σ· καὶ συναφθήτωσαν ἄμφω εἰς ἕν, καὶ τὸ ὅλον ἔσται παραστατικὸν τοῦ ὅλου κ ρ τ σ. μικρᾶς τινος γενομένης ἀπάτης διὰ τὴν τῶν κ σ, ρ τ, κυρτότητα. Τοῦτον τὸν τρόπον δύναται εὑρεθῆναι καὶ τὸ χωρητικὸν ἑκάστης ἀποθήκης σίτου, κριθῆς, ζειᾶς, κέγχρου, καὶ τῶν ὁμοίων. δύναται γὰρ κατασκευασθῆναι χοῖνιξ, ἢ ἕτερόν τι μέτρον χωρητικὸν ὡρισμένης τινὸς ποσότητος, φέρ' εἰπεῖν λιτρῶν δέκα, ἢ καὶ πλειόνων, ὅμοιον φέρον σχῆμα τῷ τῆς ἀποθήκης, καὶ διαιρεθῆναι τὴν ῥάβδον τῇ τῆς βάσεως τοῦ αὐτοῦ χοίνικος πλευρᾷ, καθ' ὃν διῄρηται τρόπον. καὶ τὰ λοιπὰ γενέσθω ὡς ἀνωτέρω.

Πρότασις Λ':

Τὸν τῆς ψάμμου ἀριθμὸν, ὃν ἅπασα ἡ Γῆ περιέχειν ἠδύνατο, εὑρεῖν.

Ὅτι γε τὸ ἄπειρον ἐνεργείᾳ οὐκ ἐνδέχεται εἶναι, δέδεικται μὲν ὑπὸ πολλῶν ἀφύκτοις τισὶν ἐμπεδούμενον ἀποδείξεσιν· ἀκριβέστερον δὲ ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους. Ἐπεὶ δέ τινες τὴν παρὰ τὸ χεῖλος τῆς Θαλάσσης κειμένην Ἄμμον ἄπειρον εἶναι ὑπολαμβάνουσιν, ὡς ἀριθμῷ ἐγνωσμένῳ ἀπερίληπτον· ὁ Ἀρχιμήδης καὶ ταύτην βουλόμενος ἀνελεῖν τὴν ὑπόληψιν, διδάσκει τὸν τρόπον, καθ' ὃν ἠδύνατό τις μὴ μόνον τὴν παρὰ τὸ χεῖλος μιᾶς τινος Θαλάσσης, ἢ καὶ δύο ἀριθμῆσαι, ἀλλὰ καὶ τὴν ἐν πάσῃ τῇ Γῇ, εἴγε τὸ ταύτης στερεὸν ἐκ λεπτοτάτων τῆς ἄμμου μορίων συγκείμενον εἴη. Ἐφοδεύει δὲ τὸν λόγον οὕτω, διὰ μιᾶς μόνης ὑποθέσεως. Ὑποτίθησι τοίνυν α: κόκκον κοριάνδρου ἐκ χιλίων ἐλαχίστων τῆς ἄμμου συγκεῖσθαι μορίων· δέκα δὲ κόκκους κοριάνδρου ἐφεξῆς κειμένους δάκτυλον ἕνα ποιεῖν· τὸν δὲ πόδα συγκεῖσθαι ἐκ δακτύλων ἑκκαίδεκα· ἐπεὶ δὲ τὸ βῆμα ἐκ ποδῶν σύγκειται πέντε, πάντως γε ἐὰν ὁ ιϛ, ἐπὶ τὸν ε, πολλαπλασιασθῇ, γενήσεται ὁ π. καὶ τοσούτων κόκκων κοριάνδρου τὸ βῆμα ἔσται παραστατικόν. τὸ δὲ ὀκτωστάδιον περιεκτικὸν ὂν βημάτων χιλίων· ἐὰν ὁ ὀγδοήκοντα ἐπὶ τὸν χίλια πολλαπλασιασθῇ περιέξει πάντως κόκκους κοριάνδρου χιλιάδας ὀγδοήκοντα. ἐπεὶ δὲ ἡ τῆς Γῆς διάμετρος ὀκτωσταδίων ἐστὶ 6876. ἐὰν ὁ 80000, ἐπὶ τὸν 6876, πολλαπλασιασθῇ, καὶ γένηται ὁ 550080000, δῆλον ὅτι ἡ τῆς γῆς ἅπασα διάμετρος σύγκειται ἐκ κόκκων κοριάνδρου 550080000, ὥστε ἡ τῆς γῆς ἅπασα διάμετρος τῇ τοῦ κοριάνδρου παραβαλλομένη διαμέτρῳ εὑρίσκεται ἔχειν ὡς 1 πρὸς 5500 80000. ἀλλ' αἱ σφαῖραι ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων. ἄρα ἐὰν γένηται ὡς 1 πρὸς 5500 80000, ἡ τοῦ κοριάνδρου δηλ: διάμετρος πρὸς τὴν τῆς γῆς, οὕτως ὁ χίλια τὸ τοῦ κοριάνδρου στερεὸν πρὸς τὸν 5500 80000000. Εἶτα ὡς 1 πρὸς 5500 80000, οὕτω 5500 80000000 πρὸς τὸν 30248800 640000000000, καὶ πλάσταιον ὡς 1 πρὸς 550080000, οὕτω 30258800-640000000000 πρὸς 1664576105605120000000000000000. ἔσται τὸ ὅλον τῆς τῆς γῆς στερεὸν περιεκτικὸν μορίων ψαμμοειδῶν ὅσων μονάδων ὁ ἔσχατός ἐστιν ἐνταῦθα ἀριθμός.

Τέλος τῆς ὅλης Γεωμετρικῆς Πραγματείας.

ΠΕΡΙ' ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙ'ΑΣ ΣΥΝΤΟΜΟΣ Ε'ΡΜΗΝΕΙ'Α.

ΠΡΟΟΙ'ΜΙΟΝ.

Εἰς δύο τῆς Γεωμετρίας τὰ ὁλοσχερέστερα αὐτῆς μέρη, ὡς ἐν τῷ περὶ ἐκείνης εἴρηται φιλοπονήματι, διαιρουμένης, τὸ Στοιχειῶδές φημι, εἴτ' οὖν Θεωρητικὸν, καὶ τὸ ταύτης Πρακτικόν. Ὅτι γε ἡ Τριγωνομετρία τῷ μὲν ὀφείλει ἕπεσθαι, τοῦ δὲ προηγεῖσθαι, καὶ μέσην τινὰ τόπον ἔχει χώραν, ἐντεῦθεν δῆλον. ὥσπερ γὰρ ἐν πολλοῖς τῶν παρ' αὐτῇ θεωρημάτων τε καὶ προβλημάτων τὰς ἀρχὰς παρὰ τοῦ Στοιχειώδους τῆς Γεωμετρίας ἐρανίζεται μέρους, καὶ πολλῷ μᾶλλον τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων, δι' ὧν καὶ τὰς ἀποδείξεις Γεωμετρικῶς κατασκευάζουσα ἐμπεδοῦται· οὕτω δὴ καὶ αὐτὴ τὸν αὐτὸν τρόπον τῷ πρακτικῷ ἐκείνης βοηθεῖ μέρει. Εἶτα ἐπεὶ αἱ ἕξεις ἐκ τοῦ ὑποκειμένου, περὶ ὃ καταγίνονται, καὶ τοῦ τέλους τὴν πρὸς ἀλλήλας διαφορὰν ἢ κοινωνίαν ἐσχήκασι. Πάντως γε καὶ δι' αὐτὸ τοῦτο εἰκότως τοῖς μέρεσι τῆς Γεωμετρίας συγκαταλέγεταί πως καὶ ἡ Τριγωνομετρία. περὶ γὰρ τὸ συνεχὲς ποσὸν καὶ αὐτὴ, ὥσπερ καὶ ἐκείνη, καταγίνεται· καὶ τοῦτο, ἢ ἀσχέτως καὶ καθ' αὑτὸ θεωρούμενον λαμβάνεται. Τέλος δ' ἔχει τὴν γνῶσιν τῶν ἐν αὐτῇ προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων, καὶ μέχρι τούτου τὰς ἀποδείξεις ἐφαπλοῖ. ἀλλ' ἐπεὶ πάλιν ἐκείνη μὲν περὶ παντὸς εἴδους σχημάτων, ἐπιπέδων τε καὶ στερεῶν πολυπραγμονεῖ, αὕτη δὲ περὶ μόνων τῶν τριγώνων τὴν διάσκεψιν ποιεῖται· τὸ δὲ τρίγωνον πρωτεύει τῶν ἄλλων ἁπάντων· ὅτι ἐκεῖνα ὡς ἐκ τριγώνων πως συνίσταται, καὶ εἰς τρίγωνα αὖθις ἀναλύεται, αὐτὸ δὲ οὔτε ἐξ ἄλλου τὴν σύστασιν ἔχει, οὔτε μὴν εἰς ἄλλο ἀναλυθῆναι δύναται, ἀλλ' ἐξ αὐτοῦ πως καὶ εἰς αὐτό· δῆλον, ὅτι μέσην ὀφείλει ἔχειν χώραν· ἵνα ὡς μερικὸν μὲν ἔχουσα τὸ ὑποκείμενον ὑπὸ τοῦ Στοιχειώδους τῆς Γεωμετρίας ταχθῇ μέρους, ὡς δὲ τὸ πρώτιστον τῶν σχημάτων, τοῦ πρακτικοῦ προηγεῖται, καὶ τοῦτο μᾶλλον κατὰ τὸ Στοιχειῶδες αὐτῆς, ἢ τὸ καὶ Θεωρητικὸν ἔλαχε μέρος. Διαιρεῖται γὰρ καὶ αὕτη, ὡς εἰρήσεται, εἰς δύο, καθὰ καὶ ἡ Γεωμετρία. τὸ δὲ πρακτικὸν ταύτης μέρος εἰς δύο ὑποδιαιρούμενον, ὧν θάτερον μὲν περὶ τῆς τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων ἀναλύσεως, θάτερον δὲ περὶ τῆς τῶν σφαιρικῶν πραγματεύεται, οὐκ ἀναγ-

ἀναγκαῖον κατ᾽ ἄμφω τὸ πρακτικοῦ προηγεῖσθαι τῆς Γεωμετρίας μέρους. Διότι τινὲς τὴν ἐσχάτην τοῦ β′: παρέχουσι τάξιν, μὴ μόνον τὸ πρακτικὸν τῆς Γεωμετρίας μέρος αὐτῆς προτάττοντες, ἀλλά γε καὶ τὰ περὶ τῶν σφαιρικῶν τριγώνων κατὰ Θεοδόσιον πραγματευόμενα.

Ε῎στι δὲ Τριγωνομετρία ἕξις τις διανοητικὴ δι᾽ ἀποδεικτικῆς μεθόδου πρὸς τὴν τῶν τριγώνων συμβάλλουσα γνῶσιν, καὶ τὴν τῶν ἐμβαδῶν αὐτῶν εὕρεσιν, καθ᾽ ἣν τινῶν ἐγνωσμένων, ἢ γοῦν ὑποτιθεμένων τὰ λοιπὰ ζητεῖται. Ε῎ξ γὰρ ἐπὶ παντὸς θεωρεῖται τριγώνου, τρεῖς δηλ: πλευραὶ, καὶ γωνίαι τρεῖς. τούτων δὲ τὰ τρία μὲν ἐπιρογονῇ δεῖ, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, γινώσκεσθαι, ἢ γοῦν δίδοσθαι, τὰ λοιπὰ δὲ ζητεῖσθαι. Διττὰ δὲ γένους εἰσὶ τὰ τρίγωνα, εὐθύγραμμά τε καὶ σφαιρικά· καὶ εὐθύγραμμα μὲν τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα γραμμῶν, καὶ ἐν ἐπιπέδοις συνιστάμενα· ὡς καὶ ἐν ἄλλοις πλατύτερον εἴρηται. σφαιρικὰ δὲ τὰ ὑπὸ καμπύλων γραμμῶν περιεχόμενα, καὶ ἐν σφαίρᾳ καταγραφόμενα, ὧν αἱ πλευραὶ τόξα εἰσὶ μεγίστων κύκλων.

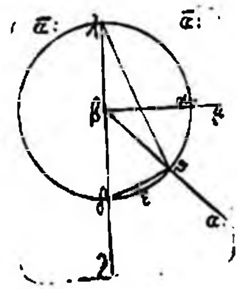
Διαιρεῖται δὲ ἡ Τριγωνομετρία εἰς δύο τὸ α′: τὸ Στοιχειῶδες αὐτῆς μέρος καὶ τὸ Πρακτικὸν, ὡς ἤδη εἴρηται. καὶ ἐν μὲν τῷ Στοιχειώδει περιέχεται ἐν δυσὶ βιβλίοις ἡ τῶν Ἡμιτόνων, Α᾽πτομένων τε καὶ Τεμνουσῶν Ἑρμηνεία, ἔτι δὲ καὶ ἡ περὶ τῶν Λογαρίθμων διδασκαλία, καὶ ἄλλα τινὰ πρὸς τὸ β′: αὐτῆς μέρος ὅτι μάλιστα συμβαλλόμενα. τὸ δὲ Πρακτικὸν αὖθις μέρος τῆς Τριγωνομετρίας διαιρεῖται εἰς δύο, καὶ τὸ μὲν α′: ἐνασχολεῖται εἰς τὴν τῶν εὐθυγράμμων τε καὶ ἐπιπέδων τριγώνων διάλυσιν. ὃ καὶ Τριγωνομετρία ἐπίπεδος ἐπιγράφεται· τὸ δὲ β′: εἰς τὴν τῶν σφαιρικῶν τριγώνων Ἑρμηνείαν τε καὶ διάλυσιν, ὃ καὶ Σφαιρικὴ Τριγωνομετρία ἤκουσε. Πρὸς μὲν οὖν τὴν Σφαιρικὴν Τριγωνομετρίαν ἱκανὰ τὰ δύο κατὰ Θεοδόσιον περὶ σφαιρικῶν βιβλία, τὸ α′: φημὶ καὶ β′: καὶ τὸ Πρακτικὸν τῆς Α᾽ριθμητικῆς μέρος· πρὸς δὲ τὴν ἐπίπεδον συμβάλλει ἐς τὰ μάλιστα τὰ ἐξ τοῦ Εὐκλείδου ἐπίπεδα βιβλία, τὸ Πρακτικὸν τῆς Α᾽ριθμητικῆς μέρος, καὶ Στοιχειῶδες τῆς Γεωμετρίας. Διὸ δεῖ τῷ βουλομένῳ ἐγκρατεῖ τῶν ἐν ἑκατέρῳ μέρει τῆς Τριγωνομετρίας γενέσθαι, ἐν ἐκείνοις ἀκριβῶς προγεγυμνάσθαι. Τὸ δὲ κινῆσαν τοὺς τῆς Μαθηματικῆς γνησίους ἐραστὰς καὶ εἰς τὴν τῆς Τριγωνομετρίας ἔκθεσιν· ὅτι τῶν ἄλλων ἕκαστον σχημάτων εἰς Τρίγωνα ἀναλυθῆναι δύναται, ὥστε ἐγνωσμένων τῶν τριγώνων, γνωσθήσεται πάντως καὶ ὁ, τιοῦν ἄλλο σχῆμα. Ε᾽πεὶ δὲ παντὸς τριγώνου εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου αἱ πλευραὶ τόξα ὑποτείνουσι, δῆλον, ὅτι ἐγνωσμένου τοῦ λόγου, ὃν αἱ τῶν τόξων ὑποτείνουσαι πρὸς ἀλλήλας τε καὶ πρὸς τὴν διάμετρον ἔχουσι, γνωσθήσονται πάντως καὶ αἱ τῶν τριγώνων πλευραὶ, καθ᾽ ὃν πρὸς ἀλλήλας ἔχουσι λόγον· διὸ δεῖ πρὸς τὴν τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων διάλυσιν ζητεῖται ἡ γνῶσις τῶν ὑποτεινουσῶν.

Ε῎στι δὲ, ὡς ἐν κεφαλαίῳ εἰπεῖν, τὰ ἐν ὅλῃ τῇ παρούσῃ Πραγματείᾳ θεω-

ρῦμένα ἓξ· α': τὰ Ἡμίτονα, αἱ Ἀπτόμεναι ἑκάστου τόξου, καὶ αἱ Τέμνουσαι, καὶ ἡ τῶν Κανονίων τούτων κατασκευή· β': ἡ τῶν Λογαρίθμων φύσις, Τρίτον ἡ Χρῆσις αὐτῶν, δ': ἡ τῶν εὐθυγράμμων Τριγώνων Διάλυσις, ε': ἡ περὶ τῶν σφαιρικῶν Τριγώνων Θεωρία, καὶ ϛ': καὶ τελευταῖον ἡ τῶν αὐτῶν Διάλυσις. ὧν τὰ μὲν α: τέσσαρα εἰς τὸ α: τῆς Τριγωνομετρίας, ὡς εἴρηται, περιέχεται μέρος· τὰ δὲ λοιπὰ δύο ἐν τῷ β': ἐπεὶ δὲ ἐν ὁποιαδήποτε σχεδὸν Μαθηματικῇ Πραγματείᾳ οἱ ὅροι προτάττεσθαι ὀφείλουσι, πάρεργον κἀνταῦθα τοὺς εἰς τὴν παροῦσαν ἀνήκοντας ὅρους ἐκθέσθαι. Ἵνα δὴ τὰ ἑξῆς εὐληπτότερα γένηται, καὶ ἡ διδασκαλική, ἵνα μὴ καὶ ἐπιστημονικὴ εἴπω, κἀνταῦθα τηρηθῇ τάξις, οὗ τί ἂν ἄλλο εἰς εὐμάθειαν ἀναγκαιότερον;

ὍΡΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ.

Α': Εὐθύγραμμος γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ εὐθειῶν γραμμῶν περιεχομένη, ὡς ἡ ὑπὸ α β γ. Trigon. Lib. I. Fig. I.



Β': Μέτρον δὲ πάσης εὐθυγράμμου γωνίας ἐστὶ τόξον κύκλου ἀπὸ τῆς συνδρομῆς τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν, ὡς ἀπὸ κέντρου γραφομένου. ἔστι δὲ τοῦτο ἢ ἴσον τεταρτημορίῳ ὡς τὸ δ ε κ, ἢ μεῖζον ὡς τὸ θ κ λ, ἢ ἔλαττον ὡς τὸ δ ε θ. καὶ τὸ μὲν δ ε θ, μέτρον ἐστὶ τῆς ὑπὸ α β γ, γωνίας, τὸ δὲ δ ε κ, τῆς ὑπὸ μ β γ, καὶ τὸ θ κ λ, τῆς ὑπὸ α β λ. ὥστε ἐπεὶ ὁ κύκλος εἰς μοίρας τξ, διαιρεῖται, εὐλόγως λέγεται καὶ τὸ τόξον ἢ ἡ γωνία τοσούτων ἢ τοσούτων μοιρῶν εἶναι.

Γ': Ὑποτείνουσα δὲ τόξου ἐστὶν ἡ τὰ πέρατα τοῦ τόξου ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα, ὡς ἡ δ θ, τοῦ δ ε θ, τόξου. Δύναται δὲ λέγεσθαι ἡ αὐτὴ δ θ, ὑποτείνουσα καὶ τοῦ μείζονος τόξου θ κ λ δ· οἰκειότερον ὅμως λέγεται τοῦ δ ε θ, ἐλάττονος, ὡς δυναμένου γωνίαν ὑποτείνειν. Ἐπεὶ δὲ τὸ δ ε θ, μέτρον ἐστὶ τῆς ὑπὸ α β γ, γωνίας, ὡς ἤδη εἴρηται, λέγεται ἔτι ἡ αὐτὴ δ θ, ὑποτείνουσα καὶ τῆς ὑπὸ α β γ, γωνίας.

Δ': Ὑποτείνουσα παραπληρώματος τόξου πρὸς ἡμικύκλιον ἐστὶν ἡ τὰ πέρατα τοῦ λοιποῦ τόξου μέχρι τοῦ ἡμικυκλίου ἐπιζευγνύουσα, ὡς ἡ θ λ, ἥτις ὑποτείνουσα λέγεται τοῦ θ κ λ, παραπληρώματος τοῦ δ ε θ, τόξου. τὸ γὰρ δ ε θ, τόξον μετὰ τοῦ θ κ λ, ἡμικύκλιον ἀποπληροῖ.

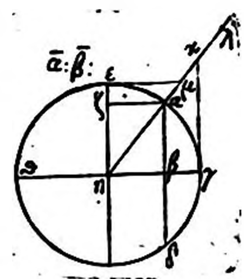
Ε': Παραπλήρωμα δὲ ἁπλῶς τόξου ἐστὶν ὑπεροχή, καθ' ἣν ὑπερέχεται τὸ τόξον ὑπὸ τοῦ τεταρτημορίου, ἢ ὑπερέχει τὸ τεταρτημόριον, ὡς τὸ θ κ, παραπλήρωμα λέγεται τοῦ τε δεθ, τόξου, καὶ τοῦ λκθ. τὸ μὲν γὰρ δεθ, ὃ περιέχεται ὑπὸ τοῦ δθκ, τεταρτημορίου, τὸ δὲ λκθ, ὑπερέχει τὸ λκ, τεταρτημόριον καὶ τὸ θκ, ὅπερ καὶ διαφορὰ λέγεται τοῦ δεθ, πρὸς τὸ δθκ, καὶ τοῦ λκ, πρὸς τὸ λκθ.

ϛ': Κοινὸν δὲ παραπλήρωμα ἔχειν δύο τόξα λέγεται, ὅταν τὰ τόξα ἄμφω ἡμικύκλιον ἀποπλῶσιν, ὡς τὰ δεθ, θκλ, τόξα, κοινὸν ἔχουσι παραπλήρωμα τὸ θκ, ὅτι ἐκ τῶν δεθ, θκλ, τόξων συνίσταται τὸ δεθλ, ἡμικύκλιον.

Ζ': Παραπλήρωμα δὲ γωνίας ἐστὶν ὑπεροχὴ, καθ' ἣν ἡ γωνία ὑπὸ τῆς ὀρθῆς ὑπερέχεται, ἢ γοῦν ὑπερέχει τὴν ὀρθὴν, ὡς ἡ ὑπὸ αβμ, γωνία παραπλήρωμα λέγεται τῆς τε ὑπὸ αβγ, καὶ ὑπὸ αβλ. Ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ αβγ, ὑπερέχεται ὑπὸ τῆς δβμ, ὀρθῆς, ἡ δὲ ὑπὸ αβλ, ὑπερέχει τὴν λβμ, ὀρθὴν κατὰ τὴν ὑπὸ αβμ, ἥτις καὶ διαφορὰ γωνιῶν λέγεται.

Η': Κοινὸν δὲ παραπλήρωμα γωνίαι ἔχειν λέγονται, ὅτε δύο ὀρθὰς ἄμφω ποιοῦσιν ὡς αἱ δβα, αβλ.

Trigon. Lib. 1. Fig. 2.



Θ': Ἡμίτονον ἐστὶν ἡ ἡμίσεια ὑποτεινούσης διπλασίου τόξου, ὡς ἡ αβ. Ἡμίτονον λέγεται τοῦ αγ, τόξου, ὅτι ἡμίσειά ἐστι τῆς αδ, ὑποτεινούσης τοῦ αγδ, τόξου διπλασίου τοῦ αγ. ἔστι δὲ τῶν ἡμιτόνων τὸ μὲν Ὀρθὸν, τὸ δὲ Πλάγιον, καὶ τοῦ ὀρθοῦ αὖθις τὸ μὲν Ὁλικὸν λέγεται, τὸ δὲ τοῦ τόξου, τὸ δὲ τοῦ παραπληρώματος.

Ι': Ὀρθὸν Ἡμίτονόν ἐστιν εὐθεῖα γραμμὴ ἐλάττων τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ κύκλου, πρὸς ὀρθὰς ἀπό τινος σημείου τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου ἀγομένην, ὡς ἡ αβ.

ΙΑ': Πλάγιον Ἡμίτονόν ἐστιν εὐθεῖά τις γραμμὴ ἐναπολαμβανομένη μεταξὺ τοῦ ὀρθοῦ Ἡμιτόνου, καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ὡς ἡ βγ, καὶ εζ· καλεῖται δὲ τὸ Πλάγιον Ἡμίτονον καὶ ὀϊστός.

ΙΒ': Ὁλικὸν Ἡμίτονόν ἐστιν ὀρθὸν Ἡμίτονον τεταρτημορίου, αὐτὴ δηλ: ἡ ἡμιδιάμετρος, οἷον ἡ εη. Ὁλικόν ἐστιν Ἡμίτονον τοῦ τε εαγ, τεταρτημορίου καὶ τοῦ εθ, διὸ καὶ μέγιστόν ἐστι τῶν λοιπῶν πάντων Ἡμιτόνων.

ΙΓ': Τόξου Ἡμίτονον ἐστὶν ὀρθὸν Ἡμίτονον ἐλάττονος ἢ μείζονος τόξου τοῦ τεταρτημορίου, ὡς τὸ αβ, ὅπερ Ἡμίτονον λέγεται τοῦ τε αγ, τόξου ἐλάττονος τοῦ εαγ, τεταρτημορίου, καὶ τοῦ αεθ, μείζονος τοῦ εθ, τεταρτημορίου· τὸ δὲ τοῦ τόξου Ἡμίτονον λέγεται καὶ τῆς γωνίας, ἧς τὸ τόξον μέτρον ἐστί. τὸ γὰρ αβ, Ἡμίτονον τοῦ αγ, τόξου, λέγεται ἔτι Ἡμίτονον τῆς τε ὑπὸ γηα, καὶ ὑπὸ αηθ, γωνίας.

ΙΔ':

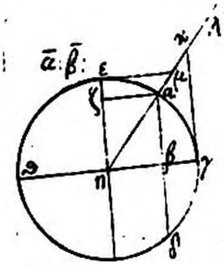
ΙΔ': Παραπληρώματος Η'μίτονόν ἐστιν, ὃ καὶ δεύτερον Η'μίτονον λέγεται, ὀρθὸν ἡμίτονον παραπληρώματος τόξου, ὡς τὸ α ζ. τοῦτο γὰρ λέγεται Η'μίτονον παραπληρώματος, ὅτι ὀρθόν ἐστιν Η'μίτονον τοῦ α ε, τόξου, ὅπερ παραπλήρωμά ἐστι τοῦ α γ, τόξου, καθὰ ἐνταῦθα ὑπετέθη. ἐπεὶ δὲ τὸ παραπλήρωμα μὴ μόνον πρὸς τὸ ἔλαττον τοῦ τεταρτημορίου λαμβάνεται, ἀλλὰ καὶ πρὸς τὸ μεῖζον· τὸ αὐτὸ α ζ, λέγεται Η'μίτονον παραπληρώματος τοῦ τε α γ, τόξου καὶ τοῦ α ε θ, τόξου. ἄμφω γὰρ τὰ γ α, α ε θ, τόξα τὸ αὐτὸ α ε, ἔχουσι παραπλήρωμα, τὸ μὲν κατ' ἔλλειψιν, τὸ δὲ καθ' ὑπεροχὴν πρὸς τὸ τεταρτημόριον. ὥστε δῆλον ὅτι τὸ τεταρτημόριον οὐκ ἔχει Η'μίτονον παραπληρώματος, ὅτι οὐδὲ παραπλήρωμα ἔχει. τὰ αὐτὰ δὲ καὶ περὶ τῶν γωνιῶν ἁρμόττει λέγεσθαι. Ε'πεὶ δὲ τὸ α ζ, ἴσον ἐστὶ τῷ β η, δῆλον, ὅτι παραπληρώματος Η'μίτονόν ἐστι τὸ ἐναπολειπόμενον ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ Η'μιτόνου, ἀφαιρεθέντος τοῦ Πλαγίου Η'μιτόνου.

ΙΕ': Τὰ ἡμίτονα ἢ πρώτης τάξεώς εἰσιν, ἢ β': καὶ α: μὲν τάξεώς εἰσι παρὰ τὸ Ο'λικὸν Η'μίτονον, τέσσαρα, ἡμίτονον δηλ: μοιρ: λ. ἡμίτον: μοιρ: ιη: ἡμίτ: μοιρ· λς, καὶ ἡμίτ: μοιρ: μ. δευτέρας δὲ τὰ λοιπὰ μέχρι τῶν ἐσχάτων.

Ιϛ': Τὰ Η'μίτονα τόξων ἐλαχίστων ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς τόξοις, ὧν εἰσιν ἡμίτονα, ὡς πρὸς αἴσθησιν. ἡ γὰρ τοῦ ἡμικυκλίου περιφέρεια ἑκατέρωθεν συμπίπτει τῇ καθέτῳ, ὡς πρὸς αἴσθησιν, τῇ ἐπὶ τοῦ πέρατος τῆς διαμέτρου ἀγομένῃ.

ΙΖ': Α'πτομένη τόξου ἐστὶν εὐθεῖα γραμμὴ, καθ' ἓν πέρας τοῦ τόξου ἁπτομένη, καὶ περατουμένη ὑπὸ τῆς διὰ τοῦ κέντρου καὶ τοῦ ἑτέρου πέρατος ἀγομένης τοῦ τόξου, ἥτις καὶ παράλληλός ἐστι τῷ ὀρθῷ τοῦ τόξου ἡμιτόνῳ· οἷον ἡ γ κ, λέγεται ἁπτομένη τοῦ α γ, τόξου, ὅτι ἅπτεται αὐτοῦ κατὰ τὸ γ, καὶ περατοῦται ὑπὸ τῆς η λ, καὶ ἔστι τῷ α β, ὀρθῷ ἡμιτόνῳ τοῦ αὐτοῦ τόξου παράλληλος. ἡ αὐτὴ δὲ λέγεται ἁπτομένη καὶ τῆς ὑπὸ α η γ, γωνίας καὶ τῆς ὑπὸ α η θ.

Trigon. Lib.1. Fig. 3.



ΙΗ': Α'πτομένη δὲ παραπληρώματός ἐστιν ἡ καθ' ἓν πέρας τοῦ παραπληρώματος τοῦ τόξου ἁπτομένη εὐθεῖα, καὶ περατουμένη ὑπὸ τῆς διὰ τοῦ κέντρου καὶ τοῦ ἑτέρου πέρατος τοῦ αὐτοῦ παραπληρώματος, ὡς ἡ ε μ, ἥτις ἁπτομένη λέγεται τοῦ α ε, τόξου παραπληρώματος, τοῦ τε α γ, καὶ α ε θ, τόξου. Λέγεται δ' ἔτι καὶ τῆς ὑπὸ α η ε, γωνίας ἁπτομένη, ἥτις παραπλήρωμά ἐστι τῆς τε ὑπὸ α η γ, καὶ α η θ.

ΙΘ': Τέμνουσα τόξου ἐστὶν εὐθεῖα γραμμὴ διά τε τοῦ κέντρου καὶ τοῦ πέρατος τοῦ τόξου ἀγομένη, ἔξωθεν τοῦ κύκλου ὑπὸ τῆς τοῦ αὐτοῦ τόξου ἀπτομένης περατουμένη, ὡς ἡ νκ, ἥτις λέγεται τέμνουσα τοῦ τε αγ, καὶ αεθ, τόξου. ἡ δ' αὐτὴ ἔτι λέγεται τέμνουσα τῆς τε ὑπὸ ανγ, καὶ ανθ.

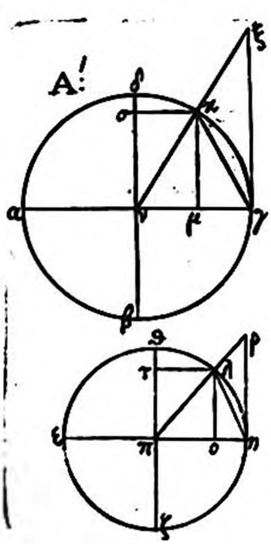
Κ΄: Τέμνουσα παραπληρώματος ἐστὶν εὐθεῖα γραμμὴ διά τε τοῦ κέντρου καὶ τοῦ πέρατος τοῦ παραπληρώματος τοῦ τόξου ἀγομένη, καὶ περατουμένη ὑπὸ τῆς τοῦ αὐτοῦ παραπληρώματος ἀπτομένης, ὡς ἡ νμ, ἥτις τέμνουσα λέγεται τοῦ αι, παραπληρώματος, τοῦ τε αγ, καὶ αεθ, τόξου. Ἡ αὐτὴ δ' ἔτι νμ, λέγεται Τέμνουσα καὶ τῆς ὑπὸ ανι, γωνίας, ἥτις ἐστὶ παραπλήρωμα τῆς τε ὑπὸ ανγ, καὶ ανθ, γωνίας.

Πρότασις Α΄: Θεώρημα.

Ἐν πᾶσι τοῖς κύκλοις ὁ αὐτός ἐστι λόγος τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου πρός τε τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον, καὶ παραπληρώματος ἡμίτονον, καὶ πλάγιον ἡμίτονον, καὶ ὑποτείνουσαν, καὶ ἀπτομένην, καὶ τέμνουσαν τῶν ὁμοίων τόξων.

Ἔστωσαν κύκλοι αἱ αβγδ, εζηθ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐπ' αὐτῶν τόξα ὅμοια τὰ γκ, ηλ. καὶ τοῦ μὲν γκ, ἔστω ὀρθὸν μὲν ἡμίτονον τὸ κμ, παραπληρώματος δὲ τὸ μν, πλάγιον δὲ τὸ μγ, ὑποτείνουσα δὲ ἡ γκ, ἀπτομένη δὲ ἡ γξ, καὶ τέμνουσα ἡ νξ. τοῦ δὲ ηλ, ὀρθὸν μὲν Ἡμίτονον τὸ λο, παραπληρώματος δὲ τὸ οπ, καὶ τὰ λοιπὰ ὡς ὁρᾶται ἐπὶ τοῦ σχήματος. Λέγω ὅτι ὡς ἔχει τὸ Ὁλικὸν Ἡμίτονον τοῦ γκ, τόξου, ἤτοι ἡ ἡμιδιάμετρος τοῦ αβγδ, κύκλου πρὸς τὴν κμ, μν, μγ, γξ, νξ, ἔχει καὶ τὸ Ὁλικὸν Ἡμίτονον τοῦ ηλ, τόξου, ἤτοι ἡ ἡμιδιάμετρος τοῦ εζηθ, κύκλου πρὸς τὴν λο, οπ, οη, ηλ, ηρ, πρ. Ἐπεὶ γὰρ τὰ γκ, ηλ, τόξα ὅμοιά εἰσι, πάντως γε αἱ ὑπὸ γνκ, ηπλ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸν β΄: ὅρον τοῦ παρόντος, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ κμν, λοπ, ἴσαι, ὅτι ἑκατέρα ὀρθὴ κατὰ τὸν ι: ὅρον τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ μκν, ἴση ἐστὶ τῇ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ολπ. ὥστε τὰ κμν, λοπ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσι, καὶ κατὰ τὸν δ΄: τοῦ ϛ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ νκ, Ὁλικὸν Ἡμίτονον πρὸς τὴν κμ, ὀρθὸν Ἡμίτονον, ἡ πλ, Ὁλικὸν Ἡμίτονον πρὸς τὴν λο, ὀρθὸν Ἡμίτο-

Trigon. Lib.1. Fig. 4.



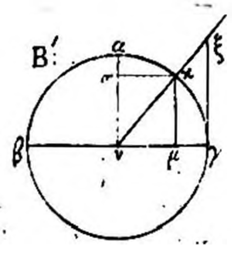
νον,

σον, ὅπερ ἦν τὸ α΄: ὡς δὲ ἡ κν, πρὸς τὴν νμ, ἤτοι τὴν κσ, ἡμίτ: παραπληρώματος, ἡ λπ, πρὸς τὴν πο, ἤτοι τὴν λτ, παραπληρώματος Ἡμίτονον, ὅπερ ἦν τὸ β΄: Αὖθις ἐπεὶ τὰ κνγ, λπη, τρίγωνα ἰσοσκελῆ εἰσι, καὶ αἱ ὑπὸ κνγ, λπη, ἴσαι, δῆλον ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ ὑπὸ νκγ, νγκ, λοιπαῖς ταῖς ὑπὸ πλη, πηλ, ἴσαι συναμφότεραι συναμφοτέραις. ἀλλὰ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἄρα καὶ ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ἴση ἐστὶν, ἡ μὲν ὑπὸ νγκ, τῇ ὑπὸ πηλ, ἡ δὲ ὑπὸ νκγ, τῇ ὑπὸ πλη. ἀφαιρουμένων δὲ τῶν ἴσων νκμ, πλο, ἀπὸ τῶν ἴσων νκγ, πλη, ἐναπολείπονται δήπουθεν ἴσαι αἱ ὑπὸ μκγ, ολη. ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ κμγ, λοη, ἴσαι εἰσὶ διὰ τὸ εἶναι ἑκατέραν ὀρθὴν, ἄρα καὶ τὰ κμγ, λοη, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσι. καὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν δ΄: ὡς ἡ κμ, πρὸς τὴν μγ, ἐστὶ καὶ ἡ λο, πρὸς τὴν οη, ὡς δὲ ἡ νκ, πρὸς τὴν κμ, δέδεικται καὶ ἡ πλ, πρὸς τὴν λο, τρία μεγέθη τὰ νκ, κμ, μγ, καὶ ἕτερα αὐτοῖς ἴσα τῷ πλήθει, τὰ πλ, λο, οη, ἐν τῷ αὐτῷ εἰσι λόγῳ σὺν δύο λαμβανόμενα, ὥστε καὶ διίσου ἀνάλογόν εἰσι κατὰ τὴν κβ΄: τοῦ ε΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ κν, Ὁλικὸν Ἡμίτονον πρὸς τὴν μγ, Πλάγιον Ἡμίτονον, ἡ πλ, Ὁλικὸν Ἡμίτονον πρὸς τὴν οη, Πλάγιον Ἡμίτονον, ὅπερ ἦν τὸ γ΄: εἰσὶ δὲ καὶ τὰ νγκ, πηλ, τρίγωνα ἰσογώνια ὡς δέδεικται, ἄρα ὡς ἡ νγ, Ὁλικὸν Ἡμίτονον πρὸς τὴν γκ, ὑποτείνουσαν, οὕτως ἡ πη, Ὁλικὸν Ἡμίτονον πρὸς τὴν ηλ, ὑποτείνουσαν, ὅπερ ἦν τὸ δ΄: Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται ἔτι καὶ ὡς ἡ νγ, Ὁλικὸν Ἡμίτονον πρὸς τὴν γξ, ἁπτομένην τοῦ γκ, τόξου, καὶ νξ, τέμνουσαν τοῦ αὐτοῦ, ἔχειν καὶ τὴν πη, Ὁλικὸν Ἡμίτονον πρὸς τὴν ηρ, ἁπτομένην τοῦ ηλ, τόξου, καὶ πρ, τέμνουσαν τοῦ αὐτοῦ. διὰ τὸ ἰσογώνια εἶναι τὰ νγξ, πηρ, τρίγωνα, ὡς δῆλον τῷ καὶ μικρὸν ἐπιστήσαντι. Ἐν πᾶσιν ἄρα τοῖς κύκλοις ὁ αὐτός ἐστι λόγος τοῦ Ὁλικοῦ Ἡμιτόνου πρός τε, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Β΄: Θεώρημα.

Τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον δύναται τό, τε ὀρθὸν ἡμίτονον καὶ ἡμίτονον παραπληρώματος ἑκάστου τόξου.

Trigon. Lib. 1. Fig. 5.



Ἔστω ἐπὶ τοῦ αβγ, κύκλου ὀρθὸν μὲν ἡμίτονον τοῦ γκ, τόξου τὸ κμ, ἡμίτονον δὲ παραπληρώματος τὸ κσ. Λέγω ὅτι τὸ ὁλικὸν Ἡμίτονον δύναται τό, τε κμ, καὶ κσ. ἐπεὶ γὰρ κατὰ τὸν ι΄: ὅρον ἡ κμ, πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν ἐπὶ τῆς γν, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς νκ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν κμ, μν, κατὰ τὴν μζ΄: τοῦ α΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. ἴση δὲ ἡ μν, τῇ κσ, ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς νκ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν κμ,

κσ,

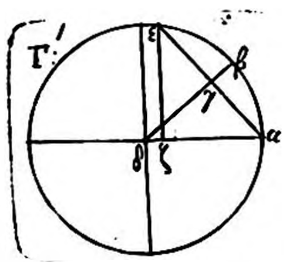
κσ, τετραγώνοις, ἀλλ' ἡ κν, ὁλικὸν ἡμίτονον, ἡ δὲ κμ, ὀρθὸν τοῦ κγ, τόξου, καὶ ἡ κσ, ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ τόξου. ἄρα τὸ Ὁλικὸν Ἡμίτονον δύναται τό, τε ὀρθὸν ἡμίτονον καὶ ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ γκ, τόξου, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Γ': Θεώρημα.

Ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τινος τόξου, οὕτως ἡ ὑποτείνουσα τοῦ διπλασίου τόξου πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ.

Ἔστω τόξον τὸ αβ, οὗ ὀρθὸν ἡμίτονον τὸ αγ, ἡμίτονον δὲ παραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ αβ, τὸ γδ, κατὰ τὸν ιδ': ὅρον. ἔστω καὶ διπλάσιον τόξον τοῦ αβ, τὸ αε, οὗ ἡμίτονον ὀρθὸν τὸ εζ. Λέγω ὅτι ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον ἤτοι ἡ αδ, πρὸς τὴν δγ, ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ αβ, τόξου, ἔστι καὶ ἡ αε, ὑποτείνουσα τοῦ αε, διπλασίου τόξου πρὸς τὴν εζ, ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ. ἐπεὶ γὰρ τῶν αγδ, αεζ, τριγώνων αἱ ὑπὸ αγδ, εζα, γωνίαι ὀρθαί εἰσι κατὰ τὸν ι: ὅρον, ἡ δὲ ὑπὸ εαζ, κοινή, πάντως γε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ αδγ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ αεζ, ἴση ἐστίν. ἰσογώνια ἄρα τὰ αδγ, αεζ, τρίγωνα. ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσι κατὰ τὴν δ': τοῦ ς': τοῦ Στοιχειωτοῦ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αδ, ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν δγ, ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ αβ, τόξου, οὕτως ἡ αε, ὑποτείνουσα τοῦ διπλασίου τόξου αε, πρὸς τὴν εζ, ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ. ὡς τὸ ὁλικὸν ἄρα ἡμίτονον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Trigon. Lib. 1. Fig. 6.



Πρότασις Δ': Θεώρημα.

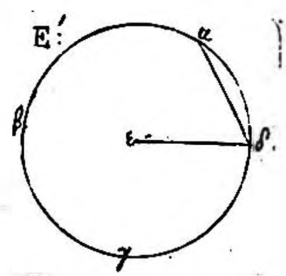
Τὸ ἡμίτονον τοῦ ἡμίσεως τόξου τινὸς μέσον ἐστὶν ἀνάλογον τοῦ τε ἡμίσεως τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου καὶ πλαγίου ἡμιτόνου τοῦ ὅλου τόξου.

Ἔστω ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σχήματος τόξον τὸ αε, καὶ τούτου ἥμισυ τὸ αβ, οὗ ἡμίτονον τὸ αγ, τοῦ δὲ αε, ἡμίτονον πλάγιον τὸ αζ. Λέγω ὅτι τὸ αγ, ἡμίτονον τοῦ αβ, τόξου, ἡμίσεως τοῦ αε, μέσον ἐστὶν ἀνάλογον τοῦ ἡμίσεως τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ αζ, πλαγ: ἡμιτ: τοῦ ὅλου αε, τόξου ἐπεὶ γὰρ τὰ αγδ, αεζ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσιν ὡς δέδεικται ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω, πάντως γε ὡς ἡ δα, ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν αγ, ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ αβ, τόξου ἡμίσεως τοῦ αε, οὕτως ἡ αε, ὑποτείνουσα πρὸς τὴν αζ, πλάγιον ἡμίτονον τοῦ ὅλου αε, τόξου, ὥστε καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ δα, ὁλιὀλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν αε, ὑποτείνουσαν, ἡ γα, ἡμίτ: τοῦ αβ, πρὸς τὴν αζ, πλάγιον ἡμίτ: τοῦ αε, ὡς δὲ ἡ δα, ὀλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν αε, ἐστι καὶ τὸ ἥμισυ τῆς δα, πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς αε, ἤτοι τὸ αγ· ἄρα καὶ ὡς τὸ ἥμισυ τῆς δα, ὀλικοῦ ἡμιτόνου πρὸς τὸ αγ· ἡμίτονον τοῦ αβ, τόξου ἡμίσεως τοῦ ὅλου αε, οὕτω τὸ αγ, πρὸς τὸ αζ, πλάγιον ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ αε. Τὸ ἡμίτονον ἄρα τοῦ ἡμίσεως τόξου τινὸς μέσον ἐστὶν ἀνάλογον καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Ε': Θεώρημα.

Ὑποτείνουσα τόξου μοιρῶν ξ, ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

Trigon. lib. 1. Fig. 7.



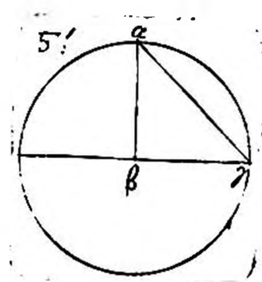
Ἔστω κύκλος ὁ αβγδ, οὗ ἡμιδιάμετρος ἡ εδ, ὑποτείνουσα δὲ μοιρῶν ξ: ἡ δα. Λέγω ὅτι ἡ δα, ἴση ἐστὶ τῇ εδ. καὶ τὸ πόρισμα γὰρ τῆς ιε: τοῦ δ': τῶν Στοιχ: ἡ εδ, ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ, τοῦ εἰς τὸν αβγδ, ἐγγραφομένου κύκλον. ἀλλὰ καὶ ἡ δα, πλευρά ἐστιν ἑξαγώνου. τοῦ γὰρ κύκλου ὅλου εἰς τξ: διαιρουμένου μοίρας, τὸ δα, τόξον μοιρῶν ὂν ξ, ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ ὅλου αβγδ, κύκλου. ἄρα ἡ δα, ἴση ἐστὶ τῇ εδ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϛ': Θεώρημα.

Ὑποτείνουσα τόξου μοιρῶν ϟ: δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

Ἔστω τόξον μοιρῶν ϟ: τὸ αγ, οὗ κέντρον τὸ β, ὑποτείνουσα δὲ ἡ αγ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, βγ. Λέγω ὅτι ἡ αγ, δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς βγ. ἐπεὶ γὰρ τὸ αγ, τόξον μοιρῶν ὑποτίθεται ϟ, καὶ μέτρον ἐστὶ τῆς ὑπὸ αβγ, γωνίας, πάντως γε καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, γωνία ὀρθή ἐστιν, ὥστε καὶ τὴν μζ': τοῦ α': τῶν Στοιχ: τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τετραγώνοις, ἀλλ' αἱ αβ, βγ, ἴσαι εἰσί, τὸ ἀπὸ τῆς αγ, ἄρα διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἑνός, ἤτοι τοῦ ἀπὸ τῆς βγ, καὶ ἑπομένως ἡ αγ, δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς βγ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Trigon. Lib. 1. Fig. 8.



Πρό-

Πρότασις Ζ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἐπὶ δύο ἀριθμοὺς μερισθῇ χωρὶς, οἱ μερισταὶ ἀντιπεπόνθασι τοῖς πηλίκοις.

Ἀριθμὸς ἤδη ὁ α, μερισθήτω α': ἐπὶ τὸν β, καὶ ἔστω πηλίκον ὁ γ, μερισθήτω β': ἐπὶ τὸν δ, καὶ ἔστω πηλίκον ὁ ε.

α	β	γ	δ	ε
60,	6,	10,	4,	15:

Λέγω δὴ εἶναι ὡς ὁ β, μεριστὴς τῆς α': διαιρέσεως πρὸς τὸν δ, μεριστὴν τῆς β': διαιρέσεως, οὕτω τὸ ε, πηλίκον τῆς β': διαιρέσεως πρὸς τὸ γ, πηλίκον τῆς α': διαιρέσεως. ἐπεὶ γὰρ ὁ β, τὸν α, μερίσας παρέχει πηλίκον τὸ γ, δῆλον ὅτι ὁ β, τὸν γ, πολλαπλασιάζων τὸν α, ποιεῖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ δ, τὸν ε, πολλαπλασιάζων τὸν αὐτὸν α, ποιεῖ. ὥστε τῶν β, γ, ὡς ἄκρων λαμβανομένων, τῶν δὲ δ, ε, ὡς μέσων, ἢ τὸ ἀνάπαλιν, ἔσαι τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. καὶ οἱ τέσσαρες οὗτοι ἀριθμοὶ οὑτωσὶ κείμενοι ἀνάλογον ἔσονται.

β	δ	ε	γ	δ	β	γ	ε
				ἀνάπαλιν			
6	4	15	10	4	6	10	15

ἔσαι ἄρα ὡς ὁ β, πρὸς τὸν δ, ὁ τῆς α': διαιρέσεως μεριστὴς πρὸς τὸν τῆς β': ὁ ε, πρὸς τὸν γ, τὸ τῆς β': διαιρέσεως πηλίκον πρὸς τὸ τῆς α':

ΠΟΡΙΣΜΑ.

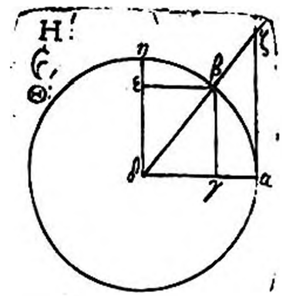
Τὸν αὐτὸν τρόπον δείκνυται, κἂν ἡ αὐτὴ συνεχὴς ποσότης διπλῇ διαιρεθῇ διανομῇ, τὸ τῆς α': διανομῆς διαιρετικὸν μέρος πρὸς τὸ τῆς β': ἔχειν, ὡς ὁ ἀριθμὸς τῶν παρεχομένων μερῶν τῆς β': διανομῆς πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν παρεχομένων τῆς α': διανομῆς μερῶν.

Πρότασις Η': Θεώρημα.

Ὡς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τόξου τινὸς πρὸς τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ τόξου, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀπτομένην τοῦ τόξου.

Ἔστω τόξον τὸ αβ, οὗ ὀρθὸν ἡμίτονον τὸ βγ, ἡμίτονον δὲ παραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ τόξου τὸ βε, καὶ ἀπτομένη ἡ αζ. Λέγω ὅτι ὡς τὸ βε, ἡμίτονον παραπληρώματος πρὸς τὸ βγ, ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ αβ, τόξου, οὕτω τὸ δα, ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν αζ, ἀπτομένην τοῦ αὐτοῦ αβ, τόξου. Ἐπεὶ γὰρ ἐπὶ τῆς δα, ἑκατέρα τῶν γβ, αζ, πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκε κατὰ τὸν ὅρον τοῦ ὀρθοῦ ἡμιτόνου καὶ τῆς ἀπτομένης, πάντως γε τὰ δβγ, δαζ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσι. παρὰ γὰρ τὰς πρὸς τῇ γ, ἡ α, ὀρθὰς γωνίας, ἔχουσι καὶ κοινὴν τὴν ὑπὸ β δ γ, ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δγ, πρὸς τὴν γβ, ἡ δα, πρὸς τὴν αζ. ἀλλ' ἡ δγ, ἴση ἐστὶ τῇ εβ, τῶν γὰρ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί, καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἄρα ὡς τὸ εβ, ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ αβ, τόξου πρὸς τὸ γβ, ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ τόξου, οὕτω τὸ δα, ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀπτομένην τοῦ αβ, τόξου, ἤτοι τὴν αζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Trigon. lib. 1. Fig. 8.



Πρότασις Θ'. Θεώρημα.

Τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον μέσον ἐστὶν ἀνάλογον τοῦ τε ἡμιτόνου τοῦ παραπληρώματος καὶ τῆς τεμνούσης τοῦ τόξου, καὶ ἀνάπαλιν.

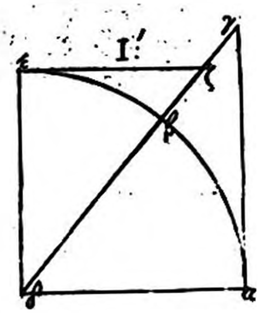
Ἔστω τόξον τὸ αβ, οὗ ἡμίτονον παραπληρώματος τὸ εβ, καὶ τέμνουσα ἡ δζ. Λέγω ὅτι ὡς τὸ εβ, ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ αβ, τόξου πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν δζ, τέμνουσαν τοῦ αὐτοῦ αβ, τόξου. Ἐπεὶ γὰρ αἱ βγ, ζα, ὀρθαί εἰσιν ἐπὶ τῆς δα, πάντως γε καὶ παράλληλοι. ὥστε κατὰ τὴν β': τοῦ ς': τοῦ Στοιχ: ὡς ἡ δγ, πρὸς τὴν δα, ἡ δβ, πρὸς τὴν δζ· ἀλλ' ἡ μὲν δγ, ἴση ἐστὶ τῇ εβ, ἥτις ὑπετέθη ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ αβ, τόξου, ἡ δὲ δα, τῇ δβ, ἡμιδιάμετρος γὰρ ἑκατέρα, ἄρα ὡς τὸ εβ, ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ αβ, τόξου πρὸς τὴν δβ, ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτως ἡ δβ, ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν δζ, τέμνουσαν τοῦ αὐτοῦ αβ, τόξου. Ὅτι δὲ καὶ ἀνάπαλιν δῆλον. λαμβανομένου γὰρ τοῦ βη, παραπληρώματος ἀντὶ τόξου, τοῦ δὲ αβ, ἀντὶ παραπληρώματος, ἔσται ὡς τὸ εβ, ἡμίτονον τόξου πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν δζ, τέμνουσαν τοῦ αβ, παραπληρώματος.

Πρότασις Ι'. Θεώρημα.

Τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον μέσον ἐστὶν ἀνάλογον τῆς ἀπτομένης τόξου τε καὶ παραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ τόξου.

Ἔστω τόξον τὸ αβ, οὗ ἀπτομένη ἡ αγ, παραπλήρωμα δὲ τοῦ αὐτοῦ τὸ βε, ἡ ἀπτομένη ὁμοίως ἡ εζ. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ αγ, ἀπτομένη τοῦ αβ, τόξου πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν εζ, ἀπτομένην τοῦ β ε, παραπληρώματος τοῦ β α, τόξου. Ἐπεὶ γὰρ τὸ α β, τόξον παραπληρώματός ἐστι, πάντως γε ἡ ὑπὸ α δ ε, γωνία ὀρθή ἐστιν· ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δ ε ζ, ὀρθὴ κατὰ τὸν ὅρον τῆς ἀπτομένης, ἄρα αἱ δ α, ε ζ, παράλληλοί εἰσιν. ὥστε καὶ αἱ ὑπὸ α δ ζ, ε ζ δ ἐναλλὰξ γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ δ α γ, δ ε ζ, ὁμοίως ἴσαι εἰσὶν, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα. ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ α γ δ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ ε δ ζ, ἴση ἐστίν. ἰσογώνια ἄρα τὰ α δ γ, ε δ ζ, τρίγωνα, ὥστε καὶ ὅμοια· καὶ δι' αὐτὸ τοῦτο καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσι, τὰς ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γ α, ἀπτομένη τοῦ α β, τόξου πρὸς τὴν α δ, ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτως ἡ δ ε, ὁλικὸν ἡμίτονον, ἴση γὰρ ἡ δ α, τῇ δ ε, πρὸς τὴν ε ζ, ἀπτομένην τοῦ α β, τόξου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Trigon. Lib. 1. Fig. 9.

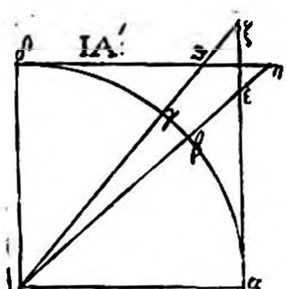


Πρότασις ΙΑ': Θεώρημα.

Ἀπτόμεναι τόξων ἀπτομέναις παραπληρωμάτων τῶν αὐτῶν τόξων ἀντιπεπονθότως εἰσὶν ἀνάλογον.

Ἔστωσαν τόξα μὲν τὰ α β, α γ, παραπληρώματα δὲ τῶν αὐτῶν τόξων τὰ β δ, γ δ, καὶ τοῦ μὲν α β, τόξου ἀπτομένη ἔστω ἡ α ε, τοῦ δὲ α γ, ἡ α ζ. ἔστω δὲ καὶ τοῦ μὲν β δ, παραπληρώματος τοῦ α β, τόξου ἀπτομένη ἡ δ η, τοῦ δὲ γ δ, παραπληρώματος τοῦ α γ, τόξου ἡ δ θ. Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ α ε, ἀπτομένη τοῦ α β, τόξου ἐλάττονος πρὸς τὴν α ζ, ἀπτομένην τοῦ α γ, μείζονος τόξου, οὕτως ἡ δ θ, ἀπτομένη τοῦ δ γ, παραπληρώματος τοῦ α γ, μείζονος τόξου πρὸς τὴν δ η, ἀπτομένην τοῦ β δ, παραπληρώματος τοῦ α β ἐλάττονος τόξου. κατὰ γὰρ τὴν ἀνωτέρω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον μέσον ἐστὶν ἀνάλογον τῶν ἀπτομένων τοῦ α β, ἐλάττονος τόξου καὶ β δ, παραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ὡς ἡ α ε, πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν δ η· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν α ε, δ η, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου τετραγώνῳ. ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν α ζ, δ θ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον διὰ τὰ αὐτὰ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου τετραγώνῳ. ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν α ε, δ η, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς α ζ, καὶ δ θ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, ὥστε τῶν α ε, δ η, ἀντὶ ἄκρων λαμβανομένων, τῶν δὲ α ζ, δ θ, ἀντὶ μέσων, ἔσται ὡς ἡ α ε, πρὸς

Trigon. Lib. 1. Fig. 10.



τὴν

τὴν αζ, ἡ δθ, πρὸς τὴν δη, κατὰ τὴν ιϛ′: τοῦ ϛ′: τοῦ Στοιχειωτοῦ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

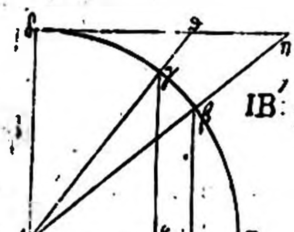
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι αἱ τῶν τόξων ἀπτόμεναι πρὸς τὰς τῶν παραπληρωμάτων τῶν αὐτῶν τόξων ἀπτομένας ἀντιπεπονθότως εἰσὶν ἀνάλογον· ἤτοι ὡς ἡ θατέρου τῶν τόξων ἀπτομένη πρὸς τὴν τοῦ παραπληρώματος τοῦ ἑτέρου τόξου ἀπτομένην, οὕτως ἡ τοῦ ἑτέρου τῶν τόξων ἀπτομένη πρὸς τὴν ἀπτομένην τοῦ παραπληρώματος τοῦ ἐξ ἀρχῆς τόξου. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ αι, πρὸς τὴν αζ, ἡ δθ, πρὸς τὴν δη, ἔσται πάντως, καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ αι, ἀπτομένη τοῦ αβ, τόξου πρὸς τὴν δθ, ἀπτομένην τοῦ γδ, παραπληρώματος τοῦ αγ, τόξου, οὕτως ἡ αζ, ἀπτομένη τοῦ αγ, τόξου πρὸς τὴν δη, ἀπτομένην τοῦ βδ, παραπληρώματος τοῦ αβ, τόξου.

Πρότασις ΙΒ′.

Ἡμίτονα τόξων καὶ τέμνουσαι παραπληρωμάτων τῶν αὐτῶν ἀντιπεπονθότως εἰσὶν ἀνάλογον.

Ἔστω τόξα τὰ αβ, αγ, ὧν ἡμίτονα τὰ βε, γζ, παραπληρώματα δὲ αὐτῶν τὰ βδ, γδ, ὧν τέμνουσαι αἱ ιη, ιθ. Λέγω ὅτι ἐστὶν ἀντιπεπονθότως, ὡς τὸ βε, ἡμίτονον τοῦ αβ, ἐλάττονος τόξου πρὸς τὸ γζ, ἡμίτονον τοῦ αγ μείζονος τόξου, οὕτως ἡ ιθ, τέμνουσα τοῦ γδ, παραπληρώματος τοῦ αγ, μείζονος τόξου πρὸς τὴν ιη, τέμνουσαν τοῦ βδ παραπληρώματος τοῦ αβ, ἐλάττονος τόξου. κατὰ γὰρ τὸ β′: μέρος τῆς θ′: τοῦ παρόντος τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον μέσον ἐστὶν ἀνάλογον τοῦ βε, ἡμιτόνου τοῦ αβ, τόξου, καὶ τῆς ιη, τεμνούσης τοῦ βδ, παραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ αβ, τόξου. ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν βε, ιη, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου τετραγώνῳ· ἀλλὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τοῦ γζ, ἡμιτόνου τοῦ αγ, τόξου, καὶ ιθ, τεμνούσης τοῦ γδ, παραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ αγ, τόξου περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου τετραγώνῳ, ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βε, ιη, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν γζ, ιθ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, ὥστε κατὰ τὴν ιϛ′: τοῦ ϛ′: τοῦ Στοιχειωτοῦ τῶν βε, ιη, ἀντὶ ἄκρων λαμβανομένων, τῶν δὲ γζ, ιθ, ἀντὶ μέσων, ἔσται ὡς τὸ βε, πρὸς τὸ γζ, ἡ ιθ, πρὸς τὴν ιη. καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ βε, ἡμίτονον τοῦ αβ, ἐλάττονος τόξου πρὸς τὴν ιθ, τέμνουσαν τοῦ γδ, παραπληρώ-

Trigon. Lib. I. Fig. II.



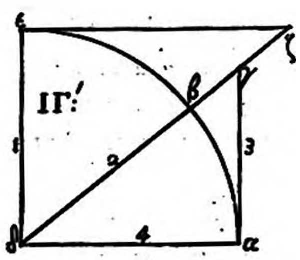
ρώματος τοῦ αγ, μείζονος τόξου· οὕτω τὸ γζ, ἡμίτονον τοῦ αγ, μείζονος τόξου πρὸς τὴν ιη, τέμνουσαν τοῦ βδ, παραπληρώματος τοῦ αβ, ἐλάττονος τόξου, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

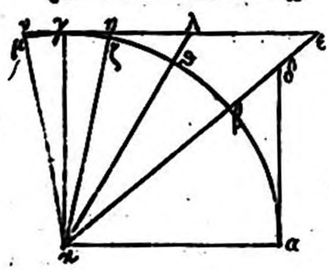
Πρότασις ΙΓ':

Ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνουσαν τοῦ παραπληρώματος τόξου τινὸς, οὕτως ἡ ἀπτομένη τοῦ τόξου πρὸς τὴν τέμνουσαν αὐτοῦ.

Ἔστω τόξον τὸ αβ, ἡ ἀπτομένη ἡ αγ, τέμνουσα δὲ ἡ δγ, παραπλήρωμα δὲ τοῦ αὐτοῦ τόξου ἔστω τὸ βε, οὗ ἀπτομένη μὲν ἡ εζ, τέμνουσα δὲ ἡ δζ. Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν δζ, ἡ αγ, πρὸς τὴν δγ. τὰ γὰρ δαγ, δεζ, τρίγωνα ὀρθογώνιά εἰσι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἀπτομένων. ὥστε ἡ ὑπὸ δαγ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δεζ. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ γδα, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δζε, ἐναλλὰξ, διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς δα, εζ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα ἐπὶ τῆς δε· ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ δγα, λοιπῇ τῇ ὑπὸ ζδε, ὁμοίως ἴση ἐστίν. ἰσογώνια ἄρα τὰ δαγ, δεζ, τρίγωνα, καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσι τὰς ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ εδ, πρὸς τὴν δζ, ἡ αγ, πρὸς τὴν γδ· ἀλλ' ἡ μὲν εδ, ὁλικόν ἐστιν ἡμίτονον, ἡ δὲ δζ, τέμνουσα τοῦ εβ, παραπληρώματος, ἡ δὲ αγ, ἀπτομένη τοῦ αβ, τόξου, καὶ ἡ δγ, τέμνουσα τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνουσαν τοῦ παραπληρώματος τόξου τινὸς, οὕτως ἡ ἀπτομένη τοῦ τόξου πρὸς τὴν τέμνουσαν τοῦ αὐτοῦ.

Trigon. Lib.1. Fig. 22.





Πρότασις ΙΔ':

Διαφορὰ ἀπτομένων δύο τόξων τεταρτημόριον συμπληρούντων διπλῆ ἐστὶν ἀπτομένης τῆς διαφορᾶς τῶν αὐτῶν τόξων.

Ἔστωσαν δύο τόξα συμπληρωτικὰ τεταρτημορίου τὰ αβ, βγ· καὶ τοῦ μὲν αβ, ἔστω ἀπτομένη ἡ αδ, τοῦ δὲ βγ, ἡ γε. Κείσθω δὲ τὸ μὲν αβ, ἔλαττον, μεῖζον δὲ τὸ βγ· καὶ εἰλήφθω τὸ βζ, ἴσον τῷ

αβ,

α β, ὥστε τὸ ζ γ, ὑπεροχὴν εἶναι τοῦ β γ, πρὸς τὸ α β, οὗ ἀπτομένη ἡ γ η. Λέγω τὴν ὑπεροχὴν τῆς γ ε, ἀπτομένης τοῦ β γ, μείζονος τόξου πρὸς τὴν α δ, ἀπτομένην τοῦ ἐλάττονος α β, τόξου διπλασίαν εἶναι τῆς γ η, ἀπτομένης τοῦ ζ γ, τόξου, καθ' ὃ ὑπερέχει τὸ β γ, τοῦ α β. εἰλήφθω γὰρ τὸ γ θ, τόξον ἴσον τῷ α β, καὶ διήχθω ἀπὸ τοῦ κ, κέντρου διὰ τοῦ θ, ἡ κλ. εἶτα εἰλήφθω καὶ τὸ γ μ, τόξον ἴσον τῷ γ ζ, καὶ διήχθω διὰ τοῦ μ, ἡ κ ν. καὶ ἐπεὶ τὸ α β, τόξον ἴσον ἐστὶ τῷ β ζ, δῆλον ὅτι ἡ ὑπὸ α κ ε, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ε κ η· ἀλλ' ἡ ὑπὸ α κ ε, ἴση ἐστὶ τῇ ἐναλλὰξ κ ε η, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ε κ η, ἴση τῇ ὑπὸ κ ε η, ἐστὶν, ὥστε καὶ ἡ κ η, ἴση ἐστὶ τῇ η ε, κατὰ τὴν ς: τοῦ α: τοῦ Στοιχ: αὖθις ἐπεὶ ἑκάτερον τῶν β ζ, γ θ, ἴσον εἴληπται τῷ α β, ἴσα πάντως καὶ ἀλλήλοις ἐστί. κοινοῦ δ' ἀφαιρουμένου τοῦ ζ θ, ἐναπολείπονται καὶ τὰ γ ζ, β θ, ἴσα. ἀλλὰ τῷ γ ζ, εἴληπται ἴσον τὸ γ μ, ἄρα καὶ τὰ γ μ, β θ, ἴσα εἰσίν. ὥστε προστιθεμένων τῶν ἴσων γ μ, β θ, τοῖς ἴσοις α β, θ γ, ἔσονται καὶ τὰ α θ, θ μ, ἴσα, καὶ ἑπομένως γωνία ἡ ὑπὸ α κ λ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ λ κ ν, ἴση. ἀλλ' ἡ ὑπὸ α κ λ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ κ λ ν ἐναλλὰξ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ λ κ ν, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ κ λ ν. ἡ κ ν, ἄρα εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ ν λ. ἡ δὲ κ ν, ἴση ἐστὶ τῇ κ η, κατὰ τὴν ς: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ. ἄρα ἡ ν λ, ἴση ἐστὶ τῇ κ η, τῇ δὲ κ η, ἴση δέδεικται καὶ ἡ η ε, ἡ ν λ, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ η ε. κοινῆς δ' ἀφαιρουμένης τῆς η λ, ἐναπολείπεται ἡ ν η, ἴση τῇ λ ε, ἀλλ' ἡ ν η, διπλασία ἐστὶ τῆς γ η, διὰ τὸ καὶ τὸ μ ζ, τόξον διπλοῦν εἶναι τοῦ γ ζ, ἄρα καὶ ἡ λ ε, διπλῆ ἐστι τῆς γ η. ἀλλ' ἡ μετὰ λ ε, διαφορά ἐστι τῆς γ ε, πρὸς τὴν α δ, ἡ γὰρ α δ, ἴση ἐστὶ τῇ γ λ, ὅτι καὶ τὰ α β, γ θ, τόξα ἴσα εἰσὶν, ἡ δὲ γ η, ἀπτομένη τοῦ γ ζ, διαφορᾶς τοῦ β γ, μείζονος τόξου πρὸς τὸ α β, ἔλαττον. ἄρα ἡ διαφορὰ τῆς γ ε, ἀπτομένης τοῦ β γ, μείζονος τόξου πρὸς τὴν α δ, ἀπτομένην τοῦ ἐλάττονος α β, τόξου διπλῆ ἐστι τῆς γ η, ἀπτομένης τοῦ γ ζ, διαφορᾶς τοῦ β γ, τόξου πρὸς τὸ α β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α':

Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι δοθείσης τῆς ἀπτομένης τῆς διαφορᾶς δύο τόξων τεταρτημόριον συμπληρούντων, καὶ τῆς τοῦ ἐλάττονος τόξου, δοθήσεται ἡ ἀπτομένη τοῦ μείζονος τόξου διὰ προσθήκης. τοὔμπαλιν δὲ δοθείσης τῆς ἀπτομένης τῆς διαφορᾶς δύο τόξων τεταρτημόριον συμπληρούντων, καὶ τῆς τοῦ μείζονος τόξου, δοθήσεται καὶ ἡ τοῦ ἐλάττονος δι' ἀφαιρέσεως.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β':

Ἔτι δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι ἡ ἀπτομένη τῆς διαφορᾶς δύο τόξων τεταρτημόριον συμπληρούντων μετὰ τῆς ἀπτομένης τοῦ ἐλάττονος ἴση ἐστὶ τῇ τεμνούσῃ τῆς διαφορᾶς τῶν αὐτῶν τόξων, ἡ γὰρ ν λ, ἴση δέδεικται τῇ η ε, ἡ δὲ η ε, τῇ κ η, ὥστε καὶ ἡ ν λ, υλ, ἴση ἐςὶ τῇ κη. σύγκειται δὲ ἡ υλ, ἐκ τῆς υγ, ἴσης τῇ γη, ἀποτομῇ τῆς διαφορᾶς τῶν αβ, βγ, τόξων, καὶ τῆς γλ, ἴσης τῇ αδ, ἀποτομῇ τοῦ αβ, ἐλάττονος τόξου, ἡ δὲ κη, ἡμίσεια ἐςὶ τοῦ γζ, τόξου, ὅπερ ἐςὶ διαφορὰ τοῦ βγ, πρὸς τὸ αβ.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Γ'.

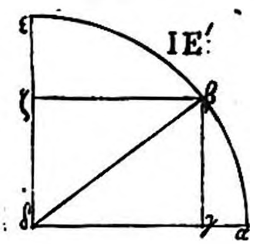
Τρίτον δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι ἡ ἀποτομὴ τοῦ μείζονος τόξου ἴση ἐςὶ τῇ τε ἀποτομῇ καὶ ἡμισείᾳ τῆς διαφορᾶς τοῦ αὐτοῦ τόξου πρὸς τὸ ἔλαττον. τοῦ γὰρ βγ, μείζονος τόξου ἀποτομή ἐςιν ἡ γι. ταύτης δὲ τὸ ηι, μέρος ἴσον ἐςὶ τῇ ηκ, ἡμισείᾳ τοῦ γη, τόξου, προστιθεμένης δὲ τῆς γη, ἡ ὅλη γι, ἴση γίγνεται ταῖς γη, ηκ, ὁμοῦ λαμβανομέναις. ἀλλὰ τὸ γζ, τόξον διαφορά ἐςι τοῦ βγ, τόξου πρὸς τὸ αβ, καὶ ἡ μὲν γη, ἀποτομὴ τοῦ αὐτοῦ, ἡ δὲ ηκ, ἡμίσεια, ἄρα ἡ γι, ἀποτομὴ τοῦ μείζονος τόξου ἴση ἐςὶ τῇ τε ἀποτομῇ καὶ ἡμισείᾳ τῆς αὐτοῦ διαφορᾶς πρὸς τὸ ἔλαττον.

Πρότασις ΙΕ'.

Ἡμιτόνου τόξου τινὸς δοθέντος τὸ ἡμίτονον εὑρεῖν τοῦ παραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ τόξου.

Δοθήτω τοῦ αβ, τόξου τὸ βγ, ὀρθὸν ἡμίτονον, καὶ ζητείσθω τὸ ἡμίτονον τοῦ βε, παραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ τόξου. Ἀφαιρεθήτω δὲ τὸ τοῦ βγ, τετράγωνον ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, καὶ τοῦ ἐναπολειπομένου εὑρεθήτω ἡ τετραγώνος ῥίζα, καὶ αὕτη ἔσται ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ αβ, τόξου. καὶ γὰρ τὴν β'. τοῦ παρόντος τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον δύναται τό, τε ὀρθὸν ἡμίτονον ἑκάςου τόξου, καὶ ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ, ὥςε τὸ τετράγωνον τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου ἐπὶ τοῦ αβε, τεταρτημορίου, ἴσον ἐςὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τοῖς τετραγώνοις τοῦ τε βγ, ὀρθοῦ ἡμιτόνου τοῦ αβ, τόξου, καὶ ζβ, ἡμιτόνου τοῦ παραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ τόξου. ἀφαιρουμένου ἄρα τοῦ τετραγώνου τοῦ βγ, ὀρθοῦ ἡμιτόνου ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, ἐναπολείπεται τὸ τετράγωνον τοῦ βζ, οὗ ἡ τετραγώνος ῥίζα ἐςὶν ἡ αὐτὴ βζ.

Trigon. Lib. I. Fig. 15.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἀφαιρουμένου τοῦ ἡμιτόνου τοῦ παραπληρώματος τινος τόξου, ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου γνωσθήσεται καὶ τὸ πλάγιον ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ τόξου. ἀφαιρουμένης γὰρ τῆς ζβ, ἤτοι τῆς δγ, ἀπὸ τῆς δα, ἐναπολείπεται ἡ γα, πλάγιον ἡμίτονον τοῦ αβ, τόξου.

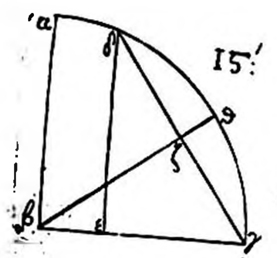
Πρό-

Πρότασις ΙϚ.

Ὀρθοῦ ἡμιτόνου τόξου τινὸς δοθέντος ὀρθὸν ἡμίτονον τόξου διπλασίου τοῦ δοθέντος εὑρεῖν, καὶ ἡμίσεως τοῦ αὐτοῦ.

Δεδόσθω τὸ γζ, ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ γθ, τόξου, καὶ ζητείσθω δὲ τὸ δε, ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ γδ, τόξου διπλασίου τοῦ γθ. Εὑρεθήτω δὴ κατὰ τὴν ἀνωτέρω τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τοῦ γθ, δοθέντος τόξου. εἶτα γενέσθω ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τοῦ γθ, τόξου, οὕτως ἡ ὑποτείνουσα τοῦ γθδ, τόξου διπλασίου τοῦ γθ, πρὸς ἄλλο τι, κἀκεῖνο ἔσται τὸ ζητούμενον, ἤτοι τὸ δε. ἐξαχθήτω γὰρ ἡ γζ, καὶ τὸ συνεχὲς ἐπὶ τὸ δ, ἀπὸ δὲ τοῦ β, ἤχθω διὰ τοῦ ζ, ἡ βζθ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνα τὰ βζγ, δεγ, ὀρθογώνιά εἰσι κατὰ τὰς ὑπὸ βζγ, δεγ, ἔχουσι δὲ καὶ κοινὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ βγδ, πάντως γε ἰσογώνιά εἰσιν, ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσι, τὰς ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γβ, πρὸς τὴν βζ, ἡ γδ, πρὸς τὴν δε, ἀλλ' ἡ μὲν γβ, ὁλικόν ἐστιν ἡμίτονον, ἡμιδιάμετρος γάρ, ἡ δὲ γδ, ὑποτείνουσα τοῦ γθδ, τόξου διπλασία οὖσα τοῦ γζ, ὀρθοῦ ἡμιτόνου, διὸ καὶ γνωστή, ἡ δὲ βζ, ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ γθ, τόξου, καὶ ἡ δε, ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ γθδ, διπλασίου τόξου τοῦ γθ· ἄρα ἐὰν γένηται ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τοῦ γθ, τόξου, οὕτως ἡ ὑποτείνουσα τοῦ γθδ, πρὸς ἄλλο τι, ἐκεῖνο ἔσται τὸ ἡμίτονον τοῦ γθδ, τόξου διπλασίου τοῦ γθ, δοθέντος· ὅπερ ἔδει τὸ α:

Trigon. Lib. 1. Fig. 14.



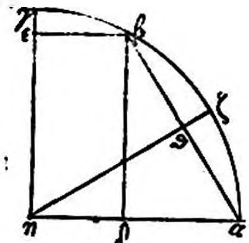
Δεδόσθω ἔτι τὸ γθδ, τόξον, οὗ ἥμισυ ἔστω τὸ γθ, καὶ ζητείσθω τὸ γζ, ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ γθ, τόξου. Εὑρεθήτω δὴ τὸ πλάγιον ἡμίτονον τοῦ γδ, ὅλου τόξου κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, καὶ πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, καὶ τοῦ γενομένου εὑρεθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα, καὶ αὕτη ἔσται ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ γθ, τόξου ἡμίσεως τοῦ γδ. κατὰ γὰρ τὴν δ': τοῦ παρόντος, τὸ ἡμίτονον τοῦ ἡμίσεως τόξου τινὸς μέσον ἐστὶν ἀνάλογον τοῦ τε ἡμίσεως τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, καὶ τοῦ πλαγίου ἡμιτόνου τοῦ ὅλου τόξου. ὥστε τὸ ὑπό τε τοῦ ἡμίσεως τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, καὶ τοῦ πλαγίου ἡμιτόνου τοῦ ὅλου τόξου περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ὀρθοῦ ἡμιτόνου τοῦ ἡμίσεως τόξου τοῦ δοθέντος τετραγώνῳ. ἄρα τοῦ πλαγίου ἡμιτόνου τοῦ ὅλου τόξου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου πολλαπλασιαζομένου γινώσκεται τὸ τετράγωνον τοῦ ὀρθοῦ ἡμιτόνου τοῦ ἡμίσεως τόξου, οὗ τετράγωνος ῥίζα τὸ ὀρθόν ἐστιν ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ τόξου.

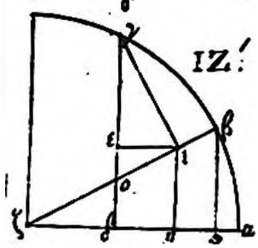
ΑΛ-

ΑʺΛ Λ Ω Σ.

Ἔςω τὸ αβ, τόξον, οὗ παραπλήρωμα τὸ βγ· καὶ διδόσθω μὲν τὸ εδ, ἡμίτονον τοῦ αβ, δοθέντος τόξου. ζητείσθω δὲ τὸ ἡμίτονον τοῦ αζ, ἡμίσεως τοῦ αὐτοῦ αβ. Ἐπιζεύχθωσαν δὴ αἱ βα, ηζ. καὶ ἐπεὶ αἱ εβ, ηδ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν λδʹ: τοῦ αʹ: τοῦ Στοιχειωτοῦ, εὑρεθήτω κατὰ τὴν αὐτὴν ἤτοι τὸ βε, ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ βγ, παραπληρώματος. εἶτα ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ηα, ὁλικοῦ ἡμιτόνου, καὶ γνωσθήσεται πάντως τὸ δα, πλάγιον ἡμίτονον τοῦ δοθέντος αβ, τόξου κατὰ τὸ πόρισμα τῆς αὐτῆς. τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ δα, συναφθήτω τῷ τετραγώνῳ τοῦ βδ, ὀρθοῦ ἡμιτόνου τοῦ αβ, τόξου, καὶ τοῦ γενομένου εὑρεθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα, καὶ γνωσθήσεται πάντως ἡ βα, ὑποτείνουσα, ἧς τὸ ἥμισυ αθ, ὀρθόν ἐστιν ἡμίτονον τοῦ αζ, ἡμίσεως. κατὰ γὰρ τὴν μζʹ: τοῦ αʹ: τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὸ ἀπὸ τῆς βα, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δα, δβ, τετραγώνοις. ὥστε ἐγνωσμένων τῶν ἀπὸ τῶν αδ, δβ, τετραγώνων, τὸ ἐξ αὐτῶν συντιθέμενον παρίστησι τὸ ἀπὸ τῆς βα.

Τριγον. Lib. 1. Fig. 1.





ΙΖʹ.

Πρότασις ΙΖʹ:

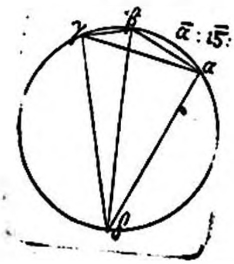
Ἡμιτόνων δύο ἀνίσων τόξων δοθέντων, ἀπολειπομένων τοῦ τεταρτημορίου, τὸ ἡμίτονον εὑρεῖν τοῦ ἐκ τῶν δοθέντων δύο τόξων συγκειμένου·

Ἔςωσαν ἄνισα τόξα τὰ αβ, βγ, ἀπολειπόμενα τεταρτημορίου. καὶ τοῦ μὲν αβ, ἔςω ἡμίτονον τὸ βθ, τοῦ δὲ βγ, τὸ γι, τοῦ δὲ αβγ, τοῦ ἐκ τῶν δοθέντων συγκειμένου ἔςω ἡμίτονον τὸ γδ. καὶ διδόσθωσαν μὲν τὰ βθ, γι. ζητείσθω δὲ τὸ γδ. Εὑρεθήτωσαν δὴ τὰ ἡμίτονα τῶν παραπληρωμάτων τῶν αβ, βγ, δοθέντων τόξων κατὰ τὴν ιεʹ: τοῦ παρόντος. εἶτα γενέσθω ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τοῦ βγ, τόξου. οὕτω τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ αβ, τόξου πρὸς ἄλλο τι, ὡς δὲ τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τοῦ αβ, τόξου, οὕτω τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ βγ, τόξου πρὸς ἄλλο τι, καὶ συναφθήτωσαν τὰ εὑρεθέντα εἰς ἕν, καὶ τοῦτο ἔςαι τὸ ζητούμενον. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ ι, τῇ μὲν βθ, παράλληλος ἡ ιν, τῇ δὲ θδ, ἡ ιε. καὶ ἐπεὶ τὰ ζδο, ζθβ, τρίγωνα ὀρθογώνιά εἰσιν, ἔχουσι δὲ καὶ κοινὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ θζβ, ὅμοια πάντως γέ εἰσι, καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσι. Πάλιν ἐπεὶ τὰ ζδο, οει, ὀρθογώνιά εἰσιν, ἔχουσι δὲ καὶ τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας, ἰσογώνια εἰσὶ καὶ ἄρα καὶ πάντά εἰσιν. ὅτι δὲ καὶ τὰ οει, γει, ἰσογώνιά εἰσι, δῆλον. ἄρα καὶ τὰ ζθβ, γει, ὅμοιά εἰσι, διὰ τὸ ἑκάτερον εἶναι ὅμοιον τῷ ζδο, ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βζ, ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ζθ, ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ αβ, τόξου, οὕτω τὸ γι, ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ βγ, τόξου πρὸς τὴν γε. Αὖθις ἐπεὶ ἡ ιη, παράλληλος ἦκται τῇ βθ, πάντως γε ὡς ἡ βζ, ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ζι, ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ βγ, τόξου, οὕτως ἡ βθ, ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ αβ, τόξου πρὸς τὴν ιη, ἢ γοῦν τὴν δε. γνωσθήσεται ἄρα ἡ εδ, ἔγνωσται δὲ καὶ ἡ γε, γνωσθήσεται δήπουθεν καὶ ἡ ὅλη γδ, τὸ ἡμίτονον δηλονότι τοῦ αβγ, τόξου τοῦ ἐκ τῶν δοθέντων αβ, βγ, συγκειμένου.

ΑΛΛΩΣ.

Ὑποκείσθω ὁ κύκλος διῃρημένος εἰς μοίρας ρπ, ὥστε τὰς ὑποτεινούσας ἑκάστου τόξου ἀντὶ ἡμιτόνων τῶν αὐτῶν λαμβάνεσθαι, ἀντὶ δὲ τεταρτημορίου τὸ ἡμικύκλιον. τῶν δὲ αβ, βγ, τόξων δοθέντων, τοῦ μὲν μοιρῶν ὄντος λ, τοῦ δὲ ιη, ζητείσθω τὸ ἡμίτονον τοῦ αβγ, τόξου μοιρῶν ὄντος μη. ἐπιζεύχθωσαν δὲ αἱ αβ, βγ, γα, αδ, γδ, ὧν ἡ μὲν αβ, ἀντὶ ἡμιτόνου λαμβάνεται κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τόξου μοιρῶν λ, ἡ δὲ βγ, ἀντὶ ἡμιτόνου τόξου μοιρῶν ιη, ἡ δὲ γα, ἀντὶ ἡμιτόνου τόξου μοιρῶν μη, ἡ δὲ αδ, ἀντὶ ἡμιτόνου τοῦ παραπληρώματος τοῦ αβ, ἤτοι τόξου μοιρῶν ξ, καὶ ἡ δγ, ἀντὶ ἡμιτόνου τοῦ παραπληρώματος τοῦ βγ, ἤτοι τόξου μοιρῶν οβ. Καὶ ἐπεὶ ὑποτίθενται ἐγνωσμέναι αἱ αβ, βγ, εὑρεθήσονται πάντως καὶ αἱ αδ, δγ, κατὰ τὴν ιε: τοῦ παρόντος. τούτων δὲ εὑρεθεισῶν πολλαπλασιασθήτω τὸ μὲν ἡμίτονον τοῦ αβ, ἤτοι ἡ αβ, ὑποτείνουσα, ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τοῦ γδ, παραπληρώματος τοῦ βγ, τόξου, ἤτοι ἐπὶ τὴν γδ, ὑποτείνουσαν, τὸ δὲ τοῦ βγ, ἡμίτονον ἐπὶ τὸ τοῦ αδ, ἡ βγ, δηλονότι ὑποτείνουσα ἐπὶ τὴν αδ, καὶ οἱ γενόμενοι συναφθήτωσαν εἰς ἕνα ἀριθμόν. εἶτα μεριζέσθω ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἐπὶ τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, ἤτοι τὴν βδ, καὶ τὸ πηλίκον ἔσται ἡ γα, ζητουμένη ἡμίτονον τόξου μοιρῶν μη. κατὰ γὰρ τὴν ιδ: τοῦ Δ': τοῦ α: τῆς Γεωμετρίας τὸ ὑπὸ τῶν γα, βδ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπὸ τῶν βα, γδ, καὶ γβ, δα, ὥστε ἐγνωσμένων τούτων, γινώσκεται πάντως καὶ τὸ ὑπὸ τῶν γα, βδ. ἐπεὶ δὲ γινώσκεται καὶ ἡ βδ, ὡς ὁλικὸν ἡμίτονον κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, δῆλον, ὅτι μεριζομένου τοῦ ἐκ τῶν δύο συμποσουμένου ἐπὶ τὴν βδ, γινώσκεται καὶ ἡ γα, ζητουμένη.

Trigon. Lib. 1. Fig. 16.

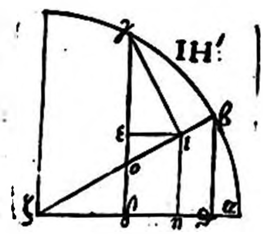


Πρότασις ΙΗ':

Ἡμιτόνων δύο τόξων ἀνίσων δοθέντων, τὸ ἡμίτονον τῆς τοῦ μείζονος πρὸς τὸ ἔλαττον διαφορᾶς εὑρεῖν.

Ἔστωσαν ἄνισα τόξα τὰ α β, α γ, ὧν διαφορὰ τὸ β γ, καὶ τοῦ μὲν α β, ἐλάττονος ἔστω ὀρθὸν ἡμίτονον τὸ β θ, τοῦ δὲ α γ, μείζονος τὸ γ δ· διδομένου δὲ ἑκατέρου, ζητηθήτω τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ β γ. Ἐπιζεύχθω δὲ ἡ ζ β, καὶ εὑρεθήτω τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τοῦ τε α β, τόξου, καὶ α γ, διὰ τῆς ιε: τοῦ παρόντος. Τούτων δ' εὑρεθέντων, γενέσθω ὡς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τοῦ α β, τόξου πρὸς τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ, οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τοῦ α γ, τόξου πρὸς ἄλλο τι, καὶ τὸ εὑρεθὲν ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ὀρθοῦ ἡμιτόνου τοῦ α γ, τόξου. Εἶτα γενέσθω αὖθις ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τοῦ α β, ἐλάττονος τόξου, οὕτω τὸ ἐναπολειφθὲν ἀπὸ τοῦ ὀρθοῦ ἡμιτόνου τοῦ α γ, μείζονος τόξου, διὰ τῆς α: πράξεως πρὸς ἄλλο τι, κἀκεῖνο ἔσται ὀρθὸν ἡμίτονον τῆς β γ, διαφορᾶς. Πιπτέτω γὰρ ἀπὸ τοῦ γ, κάθετος ἐπὶ τῆς ζ β, ἡ γ ι. καὶ ἐπεὶ αἱ β θ, γ δ, ὀρθαί εἰσιν ἑκατέρα ἐπὶ τῆς ζ α, τὰ ζ δ ο, πάντως ζ θ β, τρίγωνα ὅμοιά εἰσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ζ θ, ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ α β, πρὸς τὴν θ β, ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ, οὕτως ἡ ζ δ, ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ α γ, πρὸς τὴν δ ο. ὥστε ἐγνωσμένων τῶν ζ θ, θ β, ζ δ, γνωσθήσεται καὶ ἡ δ ο· ἀφαιρουμένης δὲ τῆς δ ο, ἀπὸ τοῦ γ δ, διδομένου, γνωσθήσεται καὶ τὸ ἐναπολειπόμενον ἀπὸ τοῦ γ δ, ἤτοι τὸ ο γ. Αὖθις ἐπεὶ τὸ ο ι γ, τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ζ δ ο, διὰ τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἑκάτερον, καὶ τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἔχειν, τὸ δὲ ζ δ ο, ὅμοιόν ἐστι καὶ τῷ ζ θ β, πάντως γε καὶ τὸ ο γ ι, ὅμοιόν ἐστι τῷ ζ θ β, ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζ β, ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ζ θ, ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ α β, τόξου, οὕτως ἡ ο γ, τὸ ἐναπολειπόμενον ἀπὸ τοῦ γ δ, ὀρθοῦ ἡμιτόνου τοῦ α γ, τόξου πρὸς τὴν γ ι, ὀρθὸν ἡμίτονον τῆς β γ, διαφορᾶς, ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Trigon. Lib. 1. Fig. 17.



Πρό-

Πρότασις ΙΘ΄.

Τῆς τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόμου διαιρέσεως δοθείσης τὰ ἡμίτομα ἑκάστου τόξου εὑρεῖν.

Κείσθω τὴν ἡμιδιάμετρον, τὸ ὁλικὸν δηλονότι ἡμίτονον, διῃρημένην εἶναι εἰς μέρη 10,000,000, καὶ ζητηθήτωσαν τὰ ἡμίτονα ἑκάστου τόξου μοιρῶν τε καὶ λεπτῶν. Διαιρεθήτω δὴ τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον εἰς δύο, καὶ τὸ τούτου ἥμισυ ὀρθὸν ἔσται ἡμίτονον μοιρῶν λ΄. ἡ γὰρ ἡμιδιάμετρος ἤτοι τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον ὑποτείνουσά ἐστι μοιρῶν ξ΄, κατὰ τὴν ε΄: τοῦ παρόντος, ἧς τὸ ἥμισυ ὀρθὸν ἐστιν ἡμίτονον τόξου μοιρῶν λ΄. δοθέντος δὲ τοῦ ἡμιτόνου τόξου μοιρῶν λ΄, εὑρεθήτω διὰ τῆς ιϛ΄: τοῦ παρόντος τὸ ἡμίτονον τόξου ἡμίσεως, ἤτοι μοιρῶν ιε΄. δοθέντος δὲ καὶ τούτου, εὑρεθήτω διὰ τῆς αὐτῆς αὖθις τὸ ἡμίτονον τοῦ ἡμίσεως τοῦ αὐτοῦ τόξου, ἤτοι μοιρῶν ζ΄, καὶ ἑξηκοστῶν α΄: λ΄: καὶ τοῦτο γενέσθω, ἄχρις ἂν δωδεκάτῃ ὑποδιαιρέσει εὑρεθῇ ἔσχατον ἡμίτονον τόξου νβ″, μδ‴, γ⁗, με⁗′, οὗ ἡμίτ: 2556: εἶτα ὑποκείσθω τοῦτο εἶναι ἡμίτονον τόξου ἑξηκοστῶν β΄: λ″, καὶ γενέσθω διὰ τῆς μεθόδου τῶν γ΄ ὡς τὰ νβ″, μδ‴, τῶν ἄλλων παρεωραμένων ἑξηκοστῶν πρὸς τὰ λ″, οὕτως ὁ ξ΄, πρὸς ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν, καὶ εὑρεθήσεται δ΄: ὅρος ὁ 34, καὶ [illegible]: τούτου δὲ γενομένου πολλαπλασιαθήτω ὅ, τε β΄: καὶ δ΄: ὅρος, ὁ 30, δηλ: ἀριθμὸς καὶ 34, [illegible]: ἐπὶ τὸν 60: καὶ ἐκ μὲν τοῦ 30, γενήσεται ὁ 1800, ἐκ δὲ τοῦ 34 [illegible]: ὁ 2048· ἐκ τούτων δὲ εἰλήφθω ἀντὶ μὲν α΄: ὅρου τῆς μεθόδου τῶν γ΄ ὁ 1800, ἀντὶ δὲ τοῦ β΄: ὁ 2048, καὶ ἀντὶ τοῦ γ΄: τὸ ἐσχάτως εὑρεθὲν ἡμίτονον, ἤτοι ὁ 2555. ἐπεὶ δὲ τὰ ἐναπολειπόμενα ἐν τῇ εὑρέσει τοῦ αὐτοῦ ἡμιτόνου μείζονά εἰσι τοῦ ἡμίσεως, ὡς κατωτέρω δηλωθήσεται, ληφθήτω ἀντὶ τούτου ὁ 2556, εἶτα πολλαπλασιαθήτω ὁ αὐτὸς ἐπὶ τὸν β΄: ὅρον, ταὐτὸν δ' εἰπεῖν τὸν 2048, ἀριθμὸν, καὶ ὁ γενόμενος 5234688, μεριζέσθω ἐπὶ τὸν α΄: ἤτοι τὸν 1800, καὶ τὸ πηλίκον ὁ 2908, ἡμίτονον ἔσται τόξου ἑνὸς α΄: ἑξηκοστοῦ. κατὰ γὰρ τὸν ιϛ΄: ὅρον τοῦ παρόντος τὸ ἡμίτονον τόξου 52″, 44‴, 3⁗, 45⁗′, ἤτοι ὁ 2556, καὶ τὸ ἡμίτονον τόξου ἑνὸς α΄: ἑξηκοστοῦ ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ἴδια τόξα, ἤτοι ὡς τὰ 52″, 44‴, 3⁗, 45⁗′, πρὸς 1΄. ἐγνωσμένων τοίνυν τῶν δύο τόξων, καὶ ἑνὸς ἡμιτόνου, τοῦ ἐσχάτως δηλ: εὑρεθέντος, ἔδει ληφθῆναι ἀντὶ α΄: ὅρου τὸ τόξον τῶν 52″, 44‴, 3⁗, 45⁗′, ἀντὶ δὲ β΄: τὸ τόξον 1, καὶ ἀντὶ γ΄: τὸ ἐσχάτως εὑρεθὲν ἡμίτονον, ἤτοι ὁ 2556, ἀριθμὸς, καὶ οὕτως ἂν εὑρεθείη διὰ τῆς μεθόδου τῶν γ΄ τὸ ἡμίτονον τόξου ι. Ἐπεὶ δὲ διὰ τὸ δυσχερέστερον εἴληπται ἀντὶ τῶν 52″, 44‴, 3⁗, 45⁗′, ὁ 30, διά τοι τοῦτο γέγονεν ὡς τὰ 52″, 44‴, πρὸς τὸν 30, ὁ 60, πρὸς τὸν 34, [illegible], τὰ γὰρ 60, ποιοῦσιν ἓν πρῶτον ἑξηκοστὸν, πεπολλαπλασίασται δὲ ἑκάτερος, ὅ, τε 30, δηλονότι καὶ 34, [illegible], ἐπὶ τὸν 60, διὰ τὸ ἀκριβέστερον. ὑγιῶς ἄρα γίγονεν ὡς ὁ 1800 πρὸς τὸν 2048, ἤτοι τόξον πρὸς τόξον, ὁ 2556 πρὸς τὸν 2908, ἡμίτονον δηλ: πρὸς ἡμίτονον. ἐπεὶ δὲ ἐναπολείπεταί τι ἐπὶ τῆς πράξεως, λαμβάνουσιν οἱ περὶ τὰ τοιαῦτα ἐνασχολούμενοι ἡμίτονον τόξου ἑνὸς α: ἑξηκοστοῦ τὸν 2909 ἀριθμόν. Εἰς σαφεστέραν δὲ τῶν εἰρημένων κατάληψιν σημειωθήτω ἐν συντομίᾳ καὶ ἡ ἑρμηνεία τῶν τούτων πράξεων.

ΠΡΑ'ΞΙΣ Α':

Ἔστω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον μορίων 10000000, οὗ τετράγ: ὁ, 100000000000000 ἀριθμός, καὶ ζητηθήτω τὸ ἡμίτονον τόξου μοιρῶν λ̄. διαιρεθήτω δὴ τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον εἰς δύο, καὶ τούτου ἥμισυ ἔσται ὁ 5000000 ἀριθμός, ὅστις κατὰ τὰ προειρημένα ἡμίτονόν ἐστι τόξου μοιρῶν λ̄. ὅπερ ἐστὶ τὸ α: ζητούμενον.

ΠΡΑ'ΞΙΣ Β':

Ἔστω ἡμίτονον τόξου μοιρῶν λ̄, μορίων 5000000 οἵων τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον 10000000, καὶ ζητηθήτω τὸ ἡμίτονον τόξου μοιρῶν ιε. Πολλαπλασιαθήτω δὴ ὁ 5000000 ἐφ' ἑαυτόν, καὶ ὁ γενόμενος 25,000,000,000,000 ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, ταὐτὸν δ' ἐστὶν εἰπεῖν ἀπὸ τοῦ 100,000,000,000,000, καὶ τοῦ ἐναπολειπομένου 75,000,000,000,000, ἀρθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα, καὶ ἔσται αὕτη ὁ 8,660,254 $\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$ ἀριθμός, ὅς ἐστιν ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ τόξου τοῦ δοθέντος ἡμιτόνου, ἤτοι τόξου μοιρῶν ξ̄ κατὰ τὴν ιε: τοῦ παρόντος. τοῦ γὰρ τόξου μοιρῶν λ̄, μέχρι τοῦ τεταρτημορίου παραπλήρωμά ἐστι τόξον μοιρῶν ξ̄. Εἶτα ἀφῃρήσθω ὁ 8,660,254 $\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$ ἀριθμὸς ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, ἤτοι τοῦ 10,000,000 ἀριθμοῦ, καὶ τὸ ἐναπολειπόμενον ἔσται πλάγιον ἡμίτονον τόξου μοιρῶν λ̄: τοῦτο δὲ πολλαπλασιαθήτω ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, ἤτοι τὸν 5000000 ἀριθμόν, καὶ τοῦ γενομένου ἀρθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα, καὶ αὕτη ἔσται ἡμίτονον τόξου ἡμίσεως ἤτοι μοιρῶν ιε, κατὰ τὴν ιϛ': τοῦ παρόντος μορίων ὂν 2,588,190 $\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$ οἵων τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον 10000000.

ΠΡΑ'ΞΙΣ Γ':

Ἔστω ἡμίτονον τόξου μοιρῶν ιε: μορίων, οἵων τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, 2,588,190 $\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$ καὶ ζητηθήτω ἡμίτονον τόξου ἡμίσεως, ἤτοι μοιρῶν ζ, καὶ ἑξηκοστῶν α: λ̄. πολλαπλασιαθήτω δὴ ὁ 2588190 μετὰ τοῦ προσκειμένου αὐτῷ λεπτοῦ ἐφ' ἑαυτόν, καὶ ὁ γενόμενος 6,698,729,810,778, ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ 100,000,000,000,000 τοῦ τετραγώνου δηλ: τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, καὶ τοῦ ἐναπολειπομένου 93,301,270,189,222 ἀρθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα καὶ ἕξεις τὸν 9,659,258 ἀριθμὸν μετὰ κλάσματος τοῦδε $\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$ ὅς ἐστι κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ιε': ἡμίτονον παραπληρώματος τόξου μοιρῶν ιε, ἤτοι ὀρθὸν ἡμίτονον τόξου μοιρῶν οε, τοῦτο ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ, καὶ τὸ ἐναπολειπόμενον πλάγιον ἔσται ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ τόξου, ἤτοι μοιρῶν ιε, ὅπερ πολλαπλασιαθήτω ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου τὸν 5000000 ἀριθμόν, καὶ τοῦ γενομένου ἀρθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα, καὶ αὕτη ἔσται τὸ ζητούμενον, ἡμίτονον δηλ: τόξου μοιρῶν ζ, καὶ λ̄, μορίων

ἐν

ὃν οἷων τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, 1,308, 252. ἐπεὶ δὲ ἐναπολείπονται [illegible], λαμβάνεται ἀντ᾽ αὐτοῦ ὁ 1,305,253.

ΠΡΑΞΙΣ Δ':

Ἔστω ἡμίτονον τόξου μοιρῶν ζ, καὶ λ': μορίων ὂν 1, 305, 253, καὶ ζητηθήτω τὸ ἡμίτονον τόξου μοιρῶν γ: καὶ με', πολλαπλασιαθήτω δὴ ὁ, 1, 305, 253 ἐφ᾽ ἑαυτὸν, καὶ ὁ γενόμενος 1, 703, 685, 394, 009: ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ 100, 000,000,000,000, καὶ τοῦ ἐναπολειπομένου 98, 296, 314,605, 991: εὑρεθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα, καὶ ἕξεις καὶ τὸ προειρημένα ἡμίτονον παραπληρώματος τόξου μοιρῶν ζ, καὶ λ': μορίων 9, 914, 449, μετὰ λεπτοῦ τοῦδε [illegible]. τοῦτο δ᾽ ἀφαιρείσθω ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, καὶ δοθήσεταί σοι ἡμίτονον πλάγιον τοῦ αὐτοῦ τόξου δηλ: μοιρῶν ζ, καὶ λ', οὗτινος πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸν 5000000, καὶ τοῦ γενομένου τῆς τετραγωνικῆς εὑρεθείσης ῥίζης, ἕξεις ἡμίτονον μοιρῶν γ: καὶ με:, ὅπερ ἤδη ἐζητεῖτο μορίων ὂν οἷων τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, 654,026 [illegible].

Τοῦτον δ᾽ ὢν τὸν τρόπον γενομένων καὶ τῶν λοιπῶν πράξεων, ἕξεις ἀεὶ τὸ ἥμισυ τοῦ προευρεθέντος ἡμιτόνου μέχρι τοῦ ἐσχάτου, ὅπερ ἐστὶν ἡμίτονον τόξου ἑξηκοστῶν β': μετὰ νβ'', γ': δὲ μδ''', δ': δὲ γ'''', καὶ ε: με''''' μορίων ὑπάρχον 2, 556, ὡς προείρηται, οἷων τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον 10,000, 000. καὶ οὗ δοθέντος γνωσθήσεται καὶ τὸ ἡμίτονον τόξου ἑνὸς ἑξηκοστοῦ α: ὡς προδεδήλωται. Ὑποτίθεται δὲ τὸ ὁλικὸν διῃρημένον εἰς 10,000,000 διὰ τὸ ἀκριβέστερον. Οἱ γὰρ Ἀρχαῖοι μετὰ καὶ τοῦ Πτολεμαίου εἰς 120 τοῦτο διῄρουν, ὡς ἔνεστιν εἰδεῖν ἐν τῷ περὶ Μεγάλης Συντάξεως αὐτοῦ φιλοπονήματι. ἐπεὶ δὲ ἐπὶ τῶν πράξεων τῆς τῶν ἡμιτόνων εὑρέσεως ἑκάστου τόξου παρορῶνταί τινα λεπτά. καὶ κατὰ τὴν τοιαύτην ὑπόθεσιν τῆς τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου διαιρέσεως οὐχ ἡ τυχοῦσα ἀπάτη συνέβαινε. διά τοι τοῦτο οἱ νεώτεροι εἰς πολλῷ πλείω τὸ ὁλικὸν διεῖλον ἡμίτονον. κἂν γὰρ καὶ ἐπὶ τῆς τοιαύτης ὑποθέσεως παροραθῆναί τινα λεπτὰ δεήσῃ, μικρά τις καὶ ἀνεπαίσθητος μέντοι ἀπάτη συμβήσεται διὰ τὴν τῶν παρεωραμένων ὀλιγότητα. Εἰ δέ σοι βουλητὸν καὶ τὰ τῶν ἐλαττόνων τόξων θηρεῦσαι ἡμίτονα, τῇ αὐτῇ πάντως κεχρημένος ἐφόδῳ, οὐκ ἂν ἁμάρτοις. δεῖ δὲ ἐπὶ τῶν πράξεων μετὰ πάσης σχεδὸν ἀκριβείας τὰ πάντα ποιεῖν, τῶν λεπτῶν μὴ παρεωραμένων, πλὴν τῶν ἐλαχίστων, καὶ ταῦτα ἐπὶ τῶν ἐλαττόνων τόξων. ἐπειδὰν δὲ τὰ ἐναπολειπόμενα λεπτὰ ἐπὶ τῆς εὑρέσεως τῶν ζητουμένων ἡμιτόνων, ἢ παραπληρωμάτων τῶν αὐτῶν ἐγγύς ἐστι τῇ ποσότητι τοῦ ὡς μεγίστου λαμβανομένου ἀνθ᾽ ἑνὸς μορίου λαμβανέσθωσαν, καὶ τῷ ἐσχάτῳ προστιθέσθωσαν χαρακτῆρι, ὡς ἐπὶ τῆς γ': ὁρᾶται τοῦτο γινομένου πράξεως.

ἡμί-

ἡμίτον. ὁλικὸν		10000.000	μοιρ.	
ἡμίτ. μοιρ.	λ. ι ιι ιιι ιιιι ιιιιι	5000.00	παραπλ: ξ. ι. ιι ιιι ιιι	86602.54
ἡμίτ.	ιε.	25881.90	παρ. οε.	96592.58.
ἡμίτ.	ζ. λ.	13052.53	παρ. πβ. λ.	99144.49.
ἡμίτ.	γ. με.	6540.26	παρ. πς. ιε.	99785.89.
ἡμίτ.	α. νβ. λ.	3271.87	παρ. πη. ζ. λ.	99946.45.
ἡμίτ.	νς. ιε.	1636.15	παρ. πθ. γ. με.	99986.61.
ἡμίτ.	κη. ζ. λ.	818.10	παρ. πθ. λα νβ. λ.	99996.65.
ἡμίτ.	ιδ. γ. με.	408.75	παρ. πθ. με. νς. ιε.	99999.16.
ἡμίτ.	ζ. α. νβ. λ.	204.37	παρ. πθ. νβ. κη. ζ. λ.	99999.79.
ἡμίτ.	γ. λ. νς. ιε.	102.18	παρ. πθ. νς. κθ γ. με.	99999.94.
ἡμίτ.	α. με. κη. ζ. λ.	51.09	παρ. πθ. νη. ιδ. λα. νβ. λ.	99999.98
ἡμίτ.	νβ. μδ. γ. με.	25.56	παρ.	

Δοθέντος δὲ τοῦ ἡμιτόνου τόξου ἑνὸς λεπτοῦ α': καθ' ὃν προείρηται τρόπον, εὑρεθήσεται διὰ τῆς ις': τοῦ παρόντος ἡμίτονον τόξου λεπτῶν δύο, δοθέντων δὲ τῶν ἡμιτόνων τῶν δύο τούτων τόξων τοῦ τε ἑνὸς λεπτοῦ καὶ δύο, εὑρεθήσεται διὰ τῆς ιζ': τοῦ αὐτοῦ ἡμιτ: τόξου λεπτῶν τριῶν, καὶ οὕτω διὰ τῶν αὐτῶν δύο προτάσεων καὶ τῆς ἐφεξῆς εὑρεθήσεται καὶ τὰ λοιπὰ πάντα, τὰ παρὰ τὰ ἤδη εὑρεθέντα κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἔφοδον, καὶ τὰ αὐτῶν ἔτι παραπληρώματα. Ἐὰν γὰρ ζητηθῇ τὸ τοῦ διπλασίου τόξου ἡμίτονον ἑνός τῶν διδομένων, συμβάλλει εἰς τὴν πρᾶξιν ἡ ις': ῥηθεῖσα πρότασις. εἰδέ γε τὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ δύο τῶν διδομένων, ἡ ιζ': χρησιμεύει. καὶ πλέον ἐὰν ζητηθῇ τὸ τῆς διαφορᾶς ἡμίτονον δύο δομένων τόξων, ἡ ιη: ἔσται ἐπωφελής.

ἌΛΛΩΣ.

Εὑρεθήτωσαν α': τὰ τῆς α: τάξεως ἡμίτονα, ἤτοι τῶν τεσσάρων τούτων τόξων, τοῦ τε μοιρῶν λ: καὶ τοῦ μοιρῶν με: καὶ τοῦ μοιρῶν ιη: καὶ τοῦ μοιρῶν λς. εἶτα εὑρεθήτωσαν τὰ ἡμίτονα τῆς β': τάξεως, καὶ α: τὰ παραπληρώματα τῶν τῆς α. τάξεως. μετὰ δὲ ταῦτα τὰ ἡμίτονα τῶν ἡμίσεων τῶν αὐτῶν τόξων, εὑρεθέντων δὲ καὶ τούτων, ζητηθήτωσαν τὰ ἡμίτονα τῶν ἐκ δύο συγκειμένων τόξων, ἀπολειπομένων τεταρτημορίου, καὶ τελευταῖον εὑρεθήτωσαν τὰ ἡμίτονα τῶν διαφορῶν τῶν μειζόνων τόξων πρὸς τὰ ἐλάττονα, ἕως ἂν εὑρεθῇ ἡμίτονον τόξου λεπτῶν με:, τὰ δὲ λοιπὰ γενέσθω ὡς προηρμήνευται. Οἷον ζητηθήτω α: τὸ ἡμίτονον τόξου μοιρ: λ: διαιρεθήτω δὴ τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον ἤτοι ὁ 10,000,000, ἀριθμὸς εἰς δύο, καὶ τὸ τούτου ἥμισυ δηλ: ὁ 5,000,000: ἀριθμὸς ἡμίτονον ἔσται τόξου μοιρ: λ, ὡς μικρὸν πρόσθεν εἴρηται.

Ζητηθήτω β': τὸ ἡμίτονον τόξου μοιρῶν με: διπλασιαθήτω δὴ τὸ τετράγωνον τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, ἤτοι ὁ 100,000,000,000,000: καὶ τοῦ γενομένου 200,000,

000,

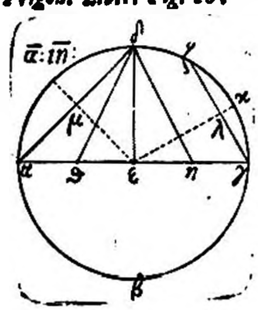
000,000,000 εὑρεθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα, καὶ ἔσται ὁ 14,142,135 ἀριθμός. ἐπεὶ δὲ ἐναπολείπονται μείζω τοῦ ἡμίσεως, λαμβάνεται ἀντὶ τοῦ ἐσχάτου 5 χαρακτῆρος ὁ 6, καὶ γίνεται ὁ 14,142,136 ἀριθμὸς ῥίζα τοῦ αὐτοῦ. τούτου δ' εὑρεθέντος ληφθήτω τὸ ἥμισυ, ἤτοι ὁ 7,071,068 ἀριθμός, καὶ οὕτως ἔσται ὁ ζητούμενος, τὸ ἡμίτονον δηλ: τόξου μοιρῶν με.

Ζητηθήτω γ': τὸ ἡμίτονον τόξου μοιρῶν ιη: συναφθήτωσαν δὴ εἰς ἕνα ἀριθμὸν τὸ τετράγωνον τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου ἤτοι ὁ 10,000,000,000,000 ἀριθμός, καὶ τὸ τετράγωνον ἡμιτόνου τόξου μοιρῶν λ̄: ἤτοι ὁ 25,000,000,000,000 ἀριθμός, καὶ τοῦ συμποσουμένου ἐξ αὐτῶν 125,000,000,000,000 εὑρεθήτω ἡ τετραγώνος ῥίζα, καὶ ἔσται ὁ 11,180,339 $\frac{19834079}{22360678}$ ἐπεὶ τὰ ἐναπολειπόμενα μείζω εἰσὶ τοῦ ἡμίσεως τοῦ ὡς μεριστοῦ ἐσχάτως λαμβανομένου ἐπὶ τῆς πράξεως ἤτοι τοῦ 22,360,669 ἀριθμοῦ, ληφθήτω ἀντ' αὐτοῦ ὁ 11,180,340, τούτου δ' ἀφῃρήσθω ὁ 5000000, καὶ τοῦ ἐναπολειπομένου δηλ: τοῦ 6,180,340 ληφθήτω τὸ ἥμισυ, καὶ ἔσται τοῦτο ἡμίτονον τόξου μοιρῶν ιη: μορίων ὂν 3,090,170, οἵων τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον 10,000,000.

Ζητηθήτω δ': τὸ ἡμίτονον τόξου μοιρῶν λϛ: Συναφθήτωσαν δὴ εἰς ἕνα ἀριθμὸν τὰ τετράγωνα τοῦ 6,180,340 ἀριθμοῦ (τοῦ ἐναπολειπομένου δηλ: ἀπὸ τῆς ἐν τῇ ἀνωτέρω πράξει εὑρεθείσης ῥίζης τῇ ἀφαιρέσει τοῦ 5000000) καὶ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, ἤτοι ὁ 38,196,602,515,600 ἀριθμός, καὶ 100,000,000,000,000, καὶ τοῦ γενομένου 138,196,602,515,600: εὑρεθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα καὶ ἔσται αὕτη 11755705: οὗ ληφθήτω τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἔσται ἡμίτονον τόξου μοιρῶν λϛ, μορίων ὂν 5,877,852, οἵων τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον 10,000,000: ἐπεὶ δ' ἐναπολείπεται καὶ ἥμισυ τοῦ ὡς μεριστοῦ ἐσχάτως λαμβανομένου ἐπὶ τῆς πράξεως, εἰλήφθω ἀντ' αὐτοῦ ὁ 5,877,853:

Ἔστω γὰρ ὁ αβγδ, κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ αγ, κέντρον δὲ τὸ ε, καὶ ληφθήτω τὸ γζ, τόξον, μοιρῶν ξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γζ· δίχα δὲ τῆς εγ, τμηθείσης κατὰ τὸ η, ἐπεζεύχθω ἡ δη, τῆς δὲ ηδ, μετενεχθείσης ἀπὸ τοῦ η, ἐπὶ τὸ θ, ἐπεζεύχθω ἡ θδ. Εἶτα ἐπεζεύχθω καὶ ἡ αδ. Δείκνυται· ἡ γζ, ὑποτείνουσα μοιρῶν ξ, ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιδιαμέτρῳ, ἤτοι τῷ ὁλικῷ ἡμιτόνῳ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιε': τοῦ δ': τοῦ στοιχ: καὶ ε': τοῦ παρόντος, ἧς τὸ ἥμισυ ἡμίτονόν ἐστιν ὀρθὸν τόξου μοιρῶν λ̄, ἤτοι τοῦ γκ, ἢ ζκ, κατὰ τὸν ι: ὅρον τοῦ παρόντος· ὥστε δεδομένης τῆς γζ, διὰ τὸ δεδομένον εἶναι καὶ τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, δοθήσεται πάντως καὶ τὸ ταύτης ἥμισυ γλ, τὸ ἡμίτονον τόξου μοιρῶν λ̄. Αὖθις ἐπὶ τὸ αεδ, τρίγωνον ὀρθογώνιόν ἐστι κατὰ τὸ ε, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς αδ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αε, εδ, τετραγώνοις κατὰ τὴν

Trigon. Lib.1. Fig. 18.



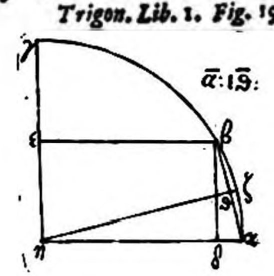
μζ': τοῦ ά: τοῦ Στοιχ: ἐγνωσμένων ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν αε, εδ, τετραγώνων γινώσκεται καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αδ, ἧς τῆς τετραγωνικῆς εὑρεθείσης ῥίζης, γνωσθήσεται καὶ ἡ αδ, ταύτης δὲ τὸ ἥμισυ αμ, ἡ δμ, ὀρθὸν ἐστιν ἡμίτονον τόξου μοιρῶν μ̄ε:, ὥστε γνωσθείσης τῆς αδ, καὶ δίχα διαιρεθείσης, γνωσθήσεται καὶ τὸ ἡμίτονον τόξου μοιρῶν μ̄ε.

Ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ εγ, ἡμιδιάμετρος δίδοται, ὡς ὁλικὸν ἡμίτονον, δίδοται πάντως καὶ τὸ ταύτης ἥμισυ εη. ἔστι δὲ διδομένη καὶ ἡ εδ, ὡς ἡμιδιάμετρος, καὶ τὸ δεη, τρίγωνον ὀρθογώνιόν ἐστιν, ἄρα κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν μζ': δίδοται καὶ ἡ δη, καὶ ἡ ταύτης ἴση ηθ, ἧς ἐγνωσμένου τοῦ εη, μέρους ὡς ἡμίσεως τῆς αγ, ἡμιδιαμέτρου, γινώσκεται καὶ τὸ θε, πλευρὰ δηλ: δεκαγώνου κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ι': τοῦ ιγ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἀλλ' ἡ τοῦ δεκαγώνου πλευρὰ ὑποτείνουσά ἐστι τόξου μοιρῶν λ̄ϛ, καὶ τὸ ταύτης ἥμισυ ἡμίτονόν ἐστιν ὀρθὸν τόξου ἡμίσεως, μοιρῶν δηλ: ῑη: ἐγνωσμένης ἄρα τῆς θε, γνωσθήσεται καὶ τὸ ἡμίτονον τόξου μοιρῶν ῑη.

Τελευταῖον ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν θε, εδ, δίδοται, καὶ τὸ θεδ, τρίγωνον ὀρθογώνιόν ἐστι κατὰ τὸ ε, δοθήσεται πάντως καὶ ἡ δθ. πλευρὰ οὖσα πενταγώνου κατὰ τὴν ι: τοῦ ῥηθέντος ιγ':, ἀλλ' ἡ μὲν τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ὑποτείνουσά ἐστι τόξου μοιρῶν ο̄β, τὸ δὲ ταύτης ἥμισυ ἡμίτονόν ἐστι τόξου μοιρῶν λ̄ϛ, ἄρα εὑρεθείσης τῆς θδ: καὶ δίχα διαιρεθείσης. εὑρεθήσεται πάντως καὶ τὸ ἡμίτονον τόξου μοιρῶν λ̄ϛ. εὕρηται ἄρα τὰ τῆς ά: τάξεως ἡμίτονα, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ζητηθήτωσαν δὲ καὶ τὰ ἡμίτονα τῆς β': τάξεως, καὶ ά: ἔστω εὑρεῖν τὰ παραπληρώματα τῶν τῆς ά: τάξεως ἡμιτόνων τούτου δηλ: μοιρῶν ξ̄, τόξου, καὶ τοῦ μοιρῶν μ̄ε:, καὶ τοῦ ο̄β, καὶ ν̄δ. οἷον ζητηθήτω τὸ ἡμίτονον τόξου μοιρῶν ξ̄: ὅπερ ἐστὶ παραπλήρωμα τόξου μοιρῶν λ̄. καὶ ἐπεὶ κατὰ τὰ ἀνωτέρω τὸ ἡμίτονον τόξου μοιρῶν λ̄, μορίων ἐστὶ 5,000,000 ἀφαιρεθήτω τὸ τετράγωνον αὐτοῦ, ἤτοι ὁ 25,000,000,000,000 ἀριθμὸς ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, ἤτοι τοῦ 100,000,000,000,000 ἀριθμοῦ, καὶ τοῦ ἐναπολειπομένου 75,000,000,000,000 εὑρεθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα, καὶ αὕτη ἔσται τὸ ζητούμενον. Πράξεως δὲ γενομένης ἔσται μορίων 8,660,254, $\frac{[illegible]}{[illegible]}$ οἵων τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον 10,000,000. δείκνυται διὰ τῆς ιέ: τοῦ παρόντος. Τοῦτον δὲ τὸν τρόπον εὑρεθήσεται τὸ παραπλήρωμα τούτου μοιρῶν ῑη, τόξου, καὶ τοῦ μοιρῶν λ̄ϛ, ἡμίτονον δηλ: τόξου μοιρῶν ο̄β, καὶ μοιρῶν ν̄δ. τὸ δὲ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τόξου μοιρῶν μ̄ε: ἴσον ἐστὶ τῷ ἡμιτόνῳ τοῦ αὐτοῦ τόξου, ἥμισυ γὰρ τοῦ ϟ: ὁ μ̄ε, ἐστὶν ἀριθμός.

Trigon. Lib. 1. Fig. 19.



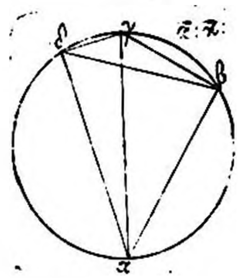
Εὑρεθέντων δὲ καὶ τούτων, ζητηθήτωσαν μετὰ ταῦτα τὰ ἡμίτονα τῶν ἡμίσεων τῶν εὑρεθέντων τόξων. οἷον ζητηθήτω τὸ ἡμίτονον τόξου μοιρῶν ῑε, τοῦ ἡμίσεως δηλ: τόξου μοιρῶν λ̄. ἀφαιρεθήτω δὴ τὸ ἡμίτονον τοῦ πα-

ρα-

ραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ τόξου, ἤτοι ὁ 8660254 ἀριθμὸς μετὰ τοῦ προσκειμένου αὐτῷ κλάσματος τοῦδὲ $\frac{8660254}{10000000}$ ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου ἤτοι τοῦ 10000000 ἀριθμοῦ, καὶ τοῦ ἐναπολειπομένου δηλ: τοῦ 1339746 ἀριθμοῦ, ὁ τετράγωνος ἀριθμὸς συναφθήτω τῷ τετραγώνῳ τοῦ 5000000, καὶ ὁ συμποσούμενος δίχα διαιρεθήτω, καὶ τὸ τούτου ἥμισυ ἔσται τὸ ζητούμενον, ἡμίτ: δηλ: τοῦ αζ, τόξου μοιρῶν ιε: ἡμίσεως ὄντος τοῦ αβ, δοθέντος τόξου. Πράξεως δὲ γενομένης εὑρεθήσεται μορίων 2,588,190, οἵων τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον 10000000. τοῦτον τὸν τρόπον εὑρεθήσεται τὸ ἡμίτονον τοῦ ἡμίσεως τοῦ τε μοιρῶν με, τόξου, καὶ τοῦ μοιρῶν ιη: καὶ μοιρῶν λς, καὶ τῶν τούτων παραπληρωμάτων, μοιρῶν δηλ: με, οβ, καὶ νδ. Δείκνυται διὰ τῆς ιϛ': τοῦ παρόντος.

Εὑρεθέντων δὲ καὶ τῶν ἡμιτόνων τῶν ἡμίσεων τόξων τῶν τῆς ά: τάξεως, καὶ παραπληρωμάτων τῶν αὐτῶν καθ' ὃν ἤδη ἡρμήνευται τρόπον, ζητηθήτωσαν μετὰ ταῦτα τὰ ἡμίτονα τῶν ἐκ δύο συγκειμένων τόξων, ἀπολειπομένων μέντοι τοῦ τεταρτημορίου. Οἷον ζητηθήτω τὸ τοῦ βγδ τόξου μοιρῶν ὄντος μη: ἐκ τε τοῦ βγ καὶ γδ, συγκειμένου. ὑποκείσθω δὲ τὸν κύκλον διῃρημένον εἶναι εἰς μοίρας ρπ· καὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ταύτην ἔσται ἡμίτονον τοῦ μὲν βγ, ἡ βγ, ὑποτείνουσα, τοῦ δὲ γδ, ἡ γδ· ὁμοίως δὲ καὶ τοῦ βα, παραπληρώματος ἡ βα, ὑποτείνουσα, τοῦ δὲ δα, ἡ δα. Πολλαπλασιασθήτω δὴ τὸ ἡμίτονον τοῦ βγ, τόξου μοιρῶν λ, ἤτοι ὁ 5000000 ἀριθμὸς ἐπὶ τὸ δα, ἡμίτονον ἤτοι τὸν 9510565 ἀριθμόν. τὸ δὲ ἡμίτονον τοῦ γδ, τόξου μοιρῶν ιη, ἤτοι ὁ 3,090,170, πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τοῦ βα, παραπληρώματος, δηλ: τὸν 8,660,254,

Trigon. Lib. 1. Fig. 20.



οἱ δὲ γενόμενοι 47,552,825,000,000, καὶ 26,761,657,103,180, συναφθήτωσαν εἰς ἕνα, καὶ ἔσται οὗτος ὁ 74,314,482,103,180. τούτου δὲ μεριζομένου ἐπὶ τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, ἔσται πηλίκον ὁ 7,431,448. τὸ ζητούμενον δηλ: ἡμίτονον τοῦ δοθέντος βγδ, τόξου μοιρῶν μη. δείκνυται διὰ τῆς ιζ': τοῦ παρόντος. Τοῦτον τὸν τρόπον καὶ τὰ ἡμίτονα εὑρεθήσονται τῶν λοιπῶν τόξων, τῶν ἐκ δύο συγκειμένων τόξων, ὧν τὰ ἡμίτονα ἐγνωσμένα, ἀπολειπομένων μέντοι τεταρτημορίου.

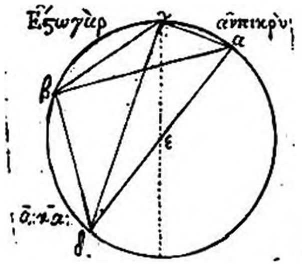
Ζητηθήτωσαν δὲ μετὰ ταῦτα καὶ τὰ ἡμίτονα τῶν διαφορῶν τῶν μειζόνων εὑρεθέντων τόξων πρὸς τὰ ἐλάττονα. Οἷον ἔστω εὑρεῖν ἡμίτονον τόξου μοιρῶν κζ. ὅπερ ἐστὶ διαφορὰ τόξου μοιρῶν με, πρὸς τόξον μοιρῶν ιη. καὶ ἐπεὶ τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου μοιρῶν με, ἐστὶ μορίων 7,071,068 κατὰ τὰ ἀνωτέρω, καὶ τοσούτων ἔτι ἐστὶ καὶ τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ μοιρῶν καὶ αὐτοῦ ὄντος με. τὸ δὲ ἡμίτονον τοῦ τόξου μοιρῶν ιη. ἐστὶ μορίων 3,090,170. καὶ τὸ τοῦ παραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ, ἤτοι τόξου μοιρ: οβ μορίων ἐστὶ 9,510,565. πολλαπλασιασθήτω ὁ μὲν 7071068. ἀριθμὸς τὸ ἡμίτονον δηλ: τοῦ παραπληρώματος τόξου μοιρῶν με ε, πὶ τὸν 3090170 τὸ ἡμίτονον δηλ: τόξου μοιρῶν ιη:, ὁ δὲ 9510565. ἐπὶ τὸν 7071,068: τὸ ἡμίτονον δηλονότι τοῦ παραπληρώματος τόξου μοιρῶν ιη. ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τόξου μοιρῶν με. ὁ δὲ γενόμενος ἐκ τοῦ ἡμιτόνου τοῦ παραπληρώματος τόξου μοιρῶν με, ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τόξου μοιρῶν ιη, ἤτοι ὁ 21,850,802,201,560. ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ γενομένου ἐκ τοῦ ἡμιτόνου τοῦ παραπληρώματος τόξου μοιρῶν ιη: ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τόξου μοιρῶν με: δηλ: τοῦ 67,249,851,833,420. καὶ ὁ ἐναπολειπόμενος 45,399,049,631,860. μεριζέσθω ἐπὶ τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον τὸν 10000000 ἀριθμὸν, καὶ τὸ πηλίκον, ἤτοι ὁ 4539904 ἔσται τὸ ζητούμενον. ἐπεὶ δὲ ἐναπολείπονται καὶ $\frac{9631860}{10000000}$, διά τι τοῦτο λαμβάνεται ἀντὶ τοῦ εὑρεθέντος ὁ 4539905. Ἔστω γὰρ τόξον τὸ αγβ, μοιρῶν με., τὸ δὲ αγ, μοιρῶν ιη. ὧν διαφορὰ τὸ γβ. Διήχθω δὴ διὰ τοῦ ε, κέντρου ἡ αδ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ γδ, βδ, καὶ ἔσται τοῦ μὲν αβ, παραπλήρωμα τὸ βδ, τόξον, τοῦ δὲ αγ, τὸ γβδ. ἐπιζευχθεισῶν δὲ καὶ τῶν αγ, γβ, αβ, ἔσται κατὰ τὸν β: τῆς ἀποδείξεως τρόπον τῆς ζ': τοῦ παρόντος τοῦ μὲν αβ, τόξου ἡμίτονον ἡ αβ, ὑποτείνουσα, τοῦ δὲ αγ, ἡ αγ, καὶ τοῦ γβ, ἡ γβ, ὑποτ:. Ἐπεὶ δὲ ἐγνωσμένα εἰσὶ τὰ αβ, αγ, βδ, γδ, αδ, ἡμίτονα, καὶ ζητεῖται τὸ γβ, πάντως γε ἐὰν τὸ δβ, ἐπὶ τὸ αγ, πολλαπλασιασθῇ, καὶ τὸ γενόμενον ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ γενομένου ἐκ τοῦ γδ, ἐπὶ τὸ αβ, ἐναπολειφθήσεται δήπουθεν κατὰ τὴν ιά: τοῦ δ': τοῦ ά: τῆς Γεωμετρίας τὸ ἀπό τε τοῦ βγ, καὶ αδ, ὁλικοῦ ἡμιτόνου γενόμενον. ἐὰν δὲ τοῦτο ἐπὶ τὸ αδ, ὁλικὸν ἡμίτονον μερισθῇ, γνωσθήσεται τὸ ζητούμενον. γβ. ὅπερ καὶ τὰ ἑξῆς.

ἈΠΟΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Ἐκ τῶν εἰρημένων τοίνυν δῆλον, ὅτι ἔξεστι τῷ βουλομένῳ παντὶ καὶ κατὰ τὸν β: τουτονὶ τρόπον τῆς τῶν ἡμιτόνων εὑρέσεως θηρεῦσαι ἀπταίστως βαδίζοντι οὐ μόνον τὰ ἡμίτονα τῶν τόξων τῶν μοιρῶν, ἀλλά γε καὶ αὐτῶν τῶν λεπτῶν. ἕξει γὰρ ά: τὰ ἡμίτονα τόξων μοιρῶν λ, με, ιη, λς. β': τὰ ἡμίτονα τῶν παραπληρωμάτων τῶν αὐτῶν δηλ: τόξων μοιρῶν ξ, οβ, νδ. τρίτον τὰ ἡμίτονα τῶν ἡμίσεων ἤτοι τόξων μοιρῶν ιε, κδ, θ, κζ. δ': τὰ ἡμίτονα τῶν ἐξ αὐτῶν συγκειμένων δηλ: τόξων μοιρῶν οε, μη, ξς, πδ, λθ, νζ, ξγ, ξθ, οη, λγ, μβ, να. ε: τὰ ἡμίτονα τῶν διαφορῶν, ἤτοι τόξων μοιρ: ιβ, ς, κδ, ε, κα, γ, θ, καὶ ἄλλων ὡς ἐπὶ τῆς πράξεως δῆλον καθίσταται. διὰ δὲ τὸ ἀσύγχυτον εὑρεθήτωσαν τὰ τῆς ά: τάξεως ἡμίτονα., ἤτοι τόξων μοιρῶν ιη, λ, λς, με. τούτων δ' εὑρεθέντων καθ' ὃν προειρημμένως εἴρηται τρόπον, ζητηθήτω τὸ ἡμίτονον τοῦ συγκειμένου

ἐκ τῶν

Trigon. Lib. 1. Fig. 21.



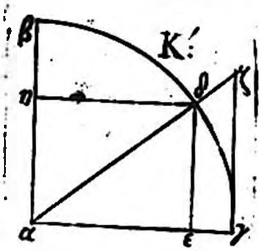
ἔχει τοῦ τόξου μοιρῶν ιη, καὶ τοῦ λ, δηλ: τόξου μοιρῶν μη. εἶτα ἀριθμήτω τὸ τούτου ἥμισυ, τόξου δηλ: μοιρῶν κδ. καὶ πάλιν τὸ τοῦ ἡμίσεως ἥμισυ, ἤτοι τόξου μοιρῶν ιβ, καὶ ϛ, καὶ γ, καὶ ἑνὸς, μετὰ α: ἑξηκοστῶν λ. καὶ τελευταῖον τὸ ἡμίτονον τόξου α: ἑξηκοστῶν με. ὅπερ ἐστὶ μορίων 130,896. ἀριθμέντος δὲ τούτου εἰρήσθω, εἰ τόξον ἑξηκοστῶν α: με, δίδωσιν ἡμίτον: 130, 896, τὸ ἑνὸς α: ἑξηκοστοῦ τόξον τί δώσει. Πράξεως δὲ γενομένης ἕξεις ἡμίτονον τόξου ἑνὸς α: ἑξηκοστοῦ μορίων ὂν 2908:οἵων τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον 10000000. ἐπεὶ δὲ ἐναπολείπονται 46/60. εἰλήφθω ἀντὶ τοῦ ἀριθμέντος ὁ 2909. λαβὼν δὲ τοῦτο ὡς ἄλλην τινὰ ἀρχὴν, ζήτησον τὸ τούτου διπλάσιον, ἤτοι τόξον ἑξηκοστῶν α: β, εἶτα τὸ ἐκ τῶν δύο τούτων συγκείμενον, δηλ: τόξον ἑξηκ: γ. εἶτα τὸ διπλάσιον τοῦ β, α: ἑξηκοστῶν δηλ: τόξου δ, ἑξηκ: εἶτα τὸ ἡμίτονον τοῦ ἐξ ἑνὸς καὶ δ, ἑξηκ: συγκειμένου, δηλ: τόξου ἑξηκ: α: ε, καὶ τοῦτο γενέσθω ἐφεξῆς ἄχρι τῶν ξ, α: ἑξηκοστῶν, δηλ: τοῦ τόξου μοίρας α. Ἀρχόμενος δ' αὖθις ἐκ τούτου ὡς ἀπ' ἄλλης ἀρχῆς ζήτησον τὸν αὐτὸν τρόπον τὰ ἡμίτονα τῶν ἐφεξῆς τόξων μοιρῶν δηλ: β, γ, δ, ε, καὶ λοιπῶν ἕως τῶν υ, ἄνευ λεπτῶν. Εἰ δέ σοι ἐφετὸν θηρεῦσαι καὶ τὰ ἡμίτονα τῶν μοιρῶν ἅμα τε καὶ λεπτῶν τόξων, ἵνα ἀκριβέστερον τὸ περὶ αὐτῶν κατασκευάσῃς κανόνιον, μετὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ἡμιτόνων τῶν ἄνευ λεπτῶν τόξων ἀπὸ τοῦ τόξου μοίρας α, μέχρι τῶν υ. Ζήτησον τὸ τοῦ συγκειμένου ἔχει μοίρας α, καὶ λεπτῶν α: δέκα. Εἶτα τὸ ἐκ μοίρας α, καὶ λεπτῶν κ, εἶτα τὸ ἐκ μοίρας α, καὶ λεπτῶν λ. οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ποίει τὴν τῶν ἐφεξῆς εὕρεσιν ἀνὰ δέκα ἀεὶ προβαίνων, καὶ ἕξεις ἐντελῆ τὴν τῶν κανονίων τῶν ἡμιτόνων κατασκευήν. ἐπεὶ δὲ τῶν τοιούτων κανονίων τὰ ἀκριβέστερα ἄρχονται μὲν ἀπὸ τοῦ τόξου τῶν ι, β': ἑξηκοστῶν, ἐφαπλοῦνται δὲ μέχρι τοῦ τόξου μοιρῶν μὲν πθ, ἑξηκ: δὲ α: νθ, καὶ β': ν, διὰ τὸ εἶναι θάτερον θατέρου παραπλήρωμα ἀριθμέντος τοῦ ἡμιτόνου τόξου ἑνὸς α: ἑξηκοστοῦ, ἤτοι β': ξ, ζητηθήτω διὰ τῆς ις': τοῦ παρόντος τὸ ἡμίτονον τόξου ἑξηκ: β': λ, μορίων ὄντος 1454, οὗ ἀριθμέντος εἰρήσθω, εἰ τὸ τόξον ἑξηκ: β': λ, παρέχει ἡμίτονον μορίων 1454, τὸ τόξον ἑξηκ: β': ι, τί παρέξει, καὶ ἀριθμήσεται μορίων 484, ἐπεὶ δὲ ἐναπολείπονται 40/60, εἰλήφθω ἀντ' αὐτοῦ ὁ 485, ἀριθμός. τούτου δ' ἀριθμέντος ζητηθήτωσαν τὰ ἐφεξῆς κατὰ τὸν δεκαδικὸν χωροῦντα ἀριθμὸν, ὡς ἤδη εἴρηται.

Πρότασις Κ'.

Ἡμιτόνων δοθέντων τὰς ἀπτομένας τῶν τόξων τῶν αὐτῶν εὑρεῖν ἡμιτόνων.

Δοθήτω τὸ ἡμίτονον τόξου μοιρῶν λϛ: μορίων ὂν 5877853, καὶ τὰ προειρημένα, καὶ ζητείσθω ἡ ἀπτομένη τοῦ τόξου. Γενέσθω δὴ ὡς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τοῦ δοθέντος τόξου εὑρισκόμενον ἐν καὶ αὐτὸ, πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ τόξου, ἤτοι ὁ 8090170, ἀριθμὸς πρὸς τὸν 5877853, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς ἄλλο τι, καὶ τὸ δοθὲν ἔσται τὸ ζητούμενον, ἡ ἀπτομένη δηλ: τόξου μοιρῶν λϛ. Πράξεως δὲ γενομένης ἔσται μορίων 7265425. ἐπεὶ δ' ἐναπολείπονται $\frac{6057770}{8090170}$. εἰλήφθω ἀντὶ τοῦ εὑρεθέντος ὁ 7265426. ἔστω γὰρ παρατιθέμενον τὸ αγβ, τὸ δὲ γδ, τόξον μοιρῶν λϛ, ἡ ἡμίτονον τὸ δε. παραπλήρωμα δὲ τὸ δβ, ἡ ἡμίτονον τὸ δη. Ἔστω δὲ καὶ ἀπτομένη τοῦ δοθέντος τόξου ἡ γζ, καὶ ἐπεὶ ἡ αε, ἴση ἐστὶ τῇ ηδ, ἡ τὰ αεδ, αγζ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσιν, ἐγνωσμένων τῶν αε, εδ, αγ, ἐὰν γένηται ὡς τὸ αε, πρὸς τὸ εδ, τὸ αγ, πρὸς ἄλλο τι, γνωσθήσεται πάντως ἡ γζ, ἀπτομένη. τὸν αὐτὸν τρόπον θηράσονται αἱ ἀπτόμεναι ἑκάστου τόξου μοιρῶν τε ἡ λεπτῶν.

Trigon. Lib. 1. Fig. 22.



Πρότασις ΚΑ'.

Ἡμιτόνων δοθέντων τὰς τεμνούσας τῶν τόξων τῶν αὐτῶν εὑρεῖν ἡμιτόνων.

Δοθήτω τὸ ἡμίτονον τόξου μοιρῶν λϛ, ἡ ζητείσθω ἡ τέμνουσα τοῦ αὐτοῦ τόξου. Γενέσθω δὴ ὡς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τοῦ δοθέντος τόξου πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, δηλ: ὁ 8090170 ἀριθμὸς πρὸς τὸν 10000000, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς ἄλλο τι, ἡ τὸ εὑρεθὲν ἔσται τέμνουσα τοῦ τόξου μοιρῶν λϛ, καὶ νῦν δ:τοῦ παρόντος. Πράξεως δὲ γενομένης εὑρεθήσεται μορίων 12360670. ἐπεὶ δ' ἐναπολείπεται $\frac{4870170}{8090170}$, εἰλήφθω ἀντὶ τοῦ εὑρεθέντος ὁ 12360680. Τοῦτον τὸν τρόπον εὑρεθήσονται αἱ τέμνουσαι καὶ τῶν λοιπῶν τόξων μοιρῶν τε ἡ λεπτῶν.

Κανόνιον τῶν ἡμιτόνων ἀποτεμνουσῶν καὶ τεμνουσῶν. Si deve fraponere tra la pagina 420. e 421.

α κ λ μ δε ν ξ ο ϑ

	° ′	ἡμίτονον	ἀποτομένη	τέμνουσα	° ′	ἡμίτονον	ἀποτομένη	τέμνουσα	
π	0.0	0	0	100000.00	60.0	100000.00	ἀδιόριστος	ἀδιόριστος	A
	10	4.85	4.85	100000.00	50	100000.00	2062646703.27	2062646706.75	
	20	9.70	9.70	100000.00	40	100000.00	1031324411.66	1031324416.50	
ρ	30	14.54	14.54	100000.00	30	100000.00	687549367.35	687549374.64	B
	40	19.39	19.39	100000.00	20	100000.00	515661532.65	515661942.34	
	50	24.24	24.24	100000.00	10	100000.00	412529669.38	412529681.51	
σ	1.0	29.09	29.09	100000.00	59.0	100000.00	343774672.78	343774687.32	Γ
	10	33.94	33.94	100000.01	50	99999.99	294663971.79	394663988.76	
	20	38.79	38.79	100000.01	40	99999.99	257831018.26	257831037.65	
τ	30	43.63	43.63	100000.01	30	99999.99	229983103.06	229183124.88	Δ
	40	48.48	48.48	100000.01	20	99999.99	206264773.97	206264798.21	
	50	53.33	53.33	100000.01	10	99999.99	187513450.87	187513477.52	
υ	2.0	58.18	58.18	100000.02	58.0	99999.98	171887314.58	171887343.66	E
	10	63.03	63.03	100000.02	50	99999.98	158665225.57	158665257.08	
	20	67.87	67.87	100000.02	40	99999.98	147331982.14	147332016.09	
φ	30	72.72	72.72	100000.03	30	99999.97	137509857.48	137509892.84	Z
	40	77.57	77.57	100000.03	20	99999.97	128915480.03	128915518.82	
	50	82.42	82.42	100000.03	10	99999.97	121332206.29	121332247.49	
χ	3.0	87.27	87.27	100000.04	57.0	99999.96	114591531.93	114591575.57	H
	10	92.11	92.11	100000.04	50	99999.96	108560389.37	108560435.43	
ψ	20	96.96	96.96	100000.05	40	99999.95	103132371.90	103132420.34	
	30	101.81	101.81	100000.05	30	99999.95	98221307.61	98221358.53	
	40	106.66	106.66	100000.06	20	99999.94	93756694.23	93756747.56	
	50	111.51	111.51	100000.06	10	99999.94	89680316.23	89680371.98	
ω	4.0	116.36	116.36	100000.07	56.0	99999.93	85943628.43	85943686.60	
	10	121.20	121.20	100000.07	50	99999.93	82505882.51	82505943.11	
	20	126.05	126.05	100000.08	40	99999.92	79332578.10	79332641.13	
	30	130.90	130.90	100000.09	30	99999.91	76394327.01	76394392.47	
	40	135.75	135.75	100000.09	20	99999.91	73665956.45	73666024.32	
	50	140.60	140.60	100000.10	10	99999.90	71125749.00	71125819.30	
	5.0	145.44	145.44	100000.11	55.0	99999.89	68754888.38	68754961.10	
	10	150.29	150.29	100000.11	50	99999.89	66536986.20	66537061.34	
	20	155.14	155.14	100000.12	40	99999.88	64457702.62	64457780.19	
	30	159.99	159.99	100000.13	30	99999.87	62504432.05	62504512.04	
	40	164.84	164.84	100000.14	20	99999.86	60666063.41	60666145.83	
	50	169.68	169.68	100000.14	10	99999.86	58932747.16	58932829.01	
	6.0	174.53	174.53	100000.15	54.0	99999.85	57295720.22	57295807.48	
	10	179.38	179.38	100000.16	50	99999.84	55747186.94	55747276.63	
	20	184.23	184.23	100000.17	40	99999.83	54280152.12	54280244.23	
	30	189.08	189.08	100000.18	30	99999.82	52888349.66	52888444.20	
	40	193.93	193.93	100000.19	20	99999.81	51366637.16	51566234.12	
	50	198.77	198.77	100000.20	10	99999.80	50308422.65	50308522.04	
	7.0	202.62	202.62	100000.21	53.0	99999.79	49110601.57	49110703.34	
	10	208.47	208.47	100000.22	50	99999.78	47968490.53	47968594.77	
	20	213.32	213.32	100000.23	40	99999.77	46878293.49	46878400.15	
	30	218.17	218.17	100000.24	30	99999.76	45836551.61	45836660.69	
	40	223.01	223.01	100000.25	20	99999.75	44840100.62	44840212.13	
	50	227.86	227.86	100000.26	10	99999.74	43886053.60	43886167.53	
	8.0	232.71	232.71	100000.27	52.0	99999.73	42971756.49	42971852.85	
	10	237.56	237.56	100000.28	50	99999.72	42094779.29	42094898.06	
	20	242.41	242.41	100000.29	40	99999.71	41252880.98	41253002.19	
	30	247.25	247.25	100000.31	30	99999.69	40443998.12	40444121.75	
	40	252.10	252.10	100000.32	20	99999.68	39666224.41	39666350.46	
	50	256.95	256.95	100000.33	10	99999.67	38927802.05	38927330.57	
	9.0	261.80	261.80	100000.34	51.0	99999.60	38197098.89	38197229.79	
	10	266.65	266.56	100000.36	50	99999.64	37502602.97	37502736.29	
	20	271.50	271.50	100000.37	40	99999.63	36829916.33	36823946.08	
	30	276.34	276.34	100000.38	30	99999.62	36186715.54	36186853.71	
	40	281.19	281.19	100000.40	20	99999.60	35562804.46	35562945.06	
	50	286.04	286.04	100000.41	10	99999.59	34960041.52	34960184.55	
	10.0	290.89	290.89	100000.42	50.0	99999.58	34377370.56	34377516.00	
					89				

β κ λ μ γζ ν ξ ο π

Πρότασις ΚΒʹ.

Τῶν ἡμιτόνων, ἀπτομένων τε, καὶ τεμνουσῶν, δοθέντων τὰ κανόνια αὐτῶν κατασκευάσαι.

Δοθήτωσαν τὰ ἡμίτονα, αἱ ἀπτόμεναι καὶ τέμνουσαι ἑκάστου τόξου, ἀπὸ τοῦ ἑξηκοστῶν δευτέρων δέκα τόξου μέχρι τοῦ μοιρῶν ϙʹ: καὶ ζητείσθω ἡ κατασκευὴ τῶν κανονίων τῶν αὐτῶν. Κατασκευασθήτωσαν δὴ παραλληλόγραμμα ὀρθογώνια δύο τῷ μὲν μήκει μεῖζον ἑκάτερον ἑνὸς ποδὸς Γεωμετρικοῦ, τῷ δὲ πλάτει ἐλάττονα τοῦ ἡμίσεως, τὰ αβγδ, εζηθ. καὶ διαιρεθήτω ἑκάτερον κατὰ μὲν τὸ πλάτος εἰς μέρη τέσσαρα τὰ ακ, κλ, λμ, μδ, εν, νξ, ξο, οθ. ὥστε τὰ μὲν κλ, λμ, μδ, ἴσα εἶναι ἀλλήλοις, καὶ τοῖς νξ, ξο, οθ, τὸ δὲ ακ, ἴσον τῷ εν, καὶ τούτων ἑκάτερον ὑποτριπλάσιον ἑκάστου τῶν κλ, λμ, μδ, εξ, ξο, οθ. κατὰ δὲ τὸ μῆκος διαιρεθήτωσαν εἰς μέρη δύο καὶ εἴκοσι τὰ απ, πρ, ρσ, στ, καὶ λοιπά, ΘΑ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, καὶ λοιπά. ἀφ᾽ ἑκάστου δὲ σημείου τῶν τομῶν ἀχθήτωσαν εὐθεῖαι παράλληλοι, αἱ μὲν τῇ τε αδ, καὶ εθ, ὡς αἱ ππ, ρρ, σσ, πΑ, ρΒ, σΓ, καὶ λοιπαί, αἱ δὲ τῇ τε αβ, καὶ εζ, ὡς αἱ κκ, λλ, μμ, νν, ξξ, οο. τούτων δ᾽ οὕτω κατασκευασθέντων, γραφήτωσαν ἐν μὲν τῷ ακ, οἱ ἀριθμοὶ τῶν τόξων ἀπὸ τοῦ ἑξηκοστῶν δέκα ὑπάρχοντος τόξου ἄχρι τοῦ δέκα ὄντος πρώτων ἑξηκοστῶν, ἀνὰ δέκα προβαίνοντες κατὰ μῆκος, κατὰ δὲ τὸ πλάτος γραφήτωσαν οἱ τῶν ἡμιτόνων τῶν αὐτῶν τόξων, ἀπτομένων τε καὶ τεμνουσῶν ἀριθμοὶ ἐν τοῖς λοιποῖς τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῖς κλ, λμ, μδ, συστοιχοῦντες ἀλλήλοις τε καὶ τοῖς ἀριθμοῖς τῶν αὐτῶν τόξων, ἐπιγραφομένων ἐν τῇ κορυφῇ τῶν κανονίων, τῶν ἀφ᾽ ὧν παρονομάζονται, ὀνομάτων, ἑκάστου ἐν τῷ ἰδίῳ τόπῳ. τοῦτ᾽ αὐτὸ γενέσθω καὶ ἐν τῷ ἑτέρῳ παραλληλογράμμῳ, ἐν ᾧ ὀφείλουσι γραφῆναι οἱ ἀριθμοὶ τῶν παραπληρωμάτων τῶν ἐν τῷ αʹ: κανονίῳ, ὥστε συστοιχεῖν τοὺς ἐν τῷ βʹ: τοῖς ἐν τῷ αʹ:, ὡς ὁρᾷς ἐπὶ τοῦ παρόντος διαγράμματος. διὸ τῷ βουλομένῳ πάντα τὰ κανόνια τῶν ἡμιτόνων, ἀπτομένων, καὶ τεμνουσῶν ὁλοκλήρως κατασκευάσαι, διαιρετέον πρῶτον τοὺς ἀριθμοὺς τῶν τόξων ἁπάντων εἰς δύο, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ δέκα ἀριθμοῦ τοῦ λαμβανομένου ἀντὶ τόξου ἑξηκ: βʹ: δέκα, τακτέον τοὺς ἐφεξῆς ἀδιάκτως μέχρι τοῦ πέντε καὶ τεσσαράκοντα ἀριθμοῦ, τοῦ λαμβανομένου ἀντὶ τόξου μοιρῶν μεʹ, ἀπὸ δὲ τούτου τὸ αὐτὸ ποιητέον μέχρι τοῦ ὀγδοήκοντα καὶ ἐννέα, ὅς ἐστι παραστατικὸς τόξου μοιρῶν πθʹ, μεθ᾽ ὃν ἕπονται λεπτὰ μοίρας μιᾶς εἰς ἀναπλήρωσιν τοῦ τεταρτημορίου, ἤτοι μοιρῶν ϙʹ: Ἐπεὶ δὲ ἡ μοῖρα εἰς ξʹ: διαιρεῖται μέρη, ἃ καὶ ἑξηκοστὰ αʹ: ὀνομάζεται. καὶ ἐν ἑκάστῳ κανονίῳ περιέχονται οἱ ἀριθμοὶ τῶν ἡμιτόνων, ἀπτομένων τε καὶ τεμνουσῶν ἀπὸ τοῦ αʹ: ἑξηκοστοῦ τῆς μοίρας μέχρι τῶν ἑξήκοντα, κατασκευαστέον κανόνια ἰσοπληθῆ ταῖς τοῦ τεταρτημορίου μοίραις, δηλ: ἐνενήκοντα. Ἐπεὶ δὲ πάλιν τὰ κανόνια διὰ τὸ ἐντελέστερον ἄρχονται ἀπὸ τοῦ τόξου τοῦ ἑξηκοστῶν βʹ: δέκα, ὡς εἴρηται, καὶ ἐν ἑκάστῳ κανονίῳ τῶν λεπ-

τῶν

τῶν περιέχονται οἱ ἀριθμοὶ τῶν ἡμιτόνων, ἁπτομένων καὶ τεμνουσῶν τόξων ἑξήκοντα καὶ ἑνὸς τῷ πλήθει, ὡς ἐπὶ τῶν ἤδη κατασκευασθέντων ὁρᾶται· ἀπὸ δὲ τοῦ τόξου τοῦ ἑξηκοστῶν ὄντος β': δέκα μέχρι τοῦ τόξου μοίρας μιᾶς ἐμπεριλαμβάνονται τόξα ἓξ καὶ ἑξήκοντα πρὸς τοῖς τριακοσίοις. Κατασκευαστέον κανόνια ἔτι ἕξ, καὶ ἕτερα τοσαῦτα, ἐν οἷς ἔσονται οἱ ἀριθμοὶ ἡμιτόνων ἁπτομένων τε καὶ τεμνουσῶν τῶν παραπληρωμάτων τῶν ἐν τοῖς ἓξ α: κανονίοις περιεχομένων, ὥστε εἶναι τὰ πάντα τῷ πλήθει δύο πρὸς τοῖς ἑκατόν. Τινὲς διὰ τὸ εὐχερέστερον κατασκευάζουσι κανόνια ἓξ καὶ ἐνενήκοντα τὰ πάντα, καὶ ἐν τῷ α: τάττουσι τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ἡμιτόνων, ἁπτομένων τε καὶ τεμνουσῶν ἀπὸ τοῦ τόξου τοῦ ἑξηκοστῶν β': δέκα μέχρι τοῦ δέκα α: ἑξηκοστῶν, ἐν δὲ τῷ β': τοὺς ἀπὸ τοῦ ἑξηκοστῶν α: δέκα μέχρι τοῦ εἴκοσι, ἐν δὲ τῷ γ': τοὺς ἀπὸ τῶν εἴκοσι α: ἑξηκοστῶν μέχρι τοῦ τριάκοντα, ἐν δὲ τῷ δ': τοὺς ἀπὸ τοῦ τριάκοντα πρώτων ἑξηκοστῶν μέχρι τοῦ ἑξήκοντα, ἤτοι τοῦ μοίρας μιᾶς, ἐν δὲ τῷ ε': τοὺς ἀπὸ τοῦ μοίρας μιᾶς μέχρι τοῦ μοίρας τε μιᾶς καὶ ἑξηκοστῶν α: ἑξήκοντα, ἤτοι τοῦ μοιρῶν δύο, ἐν δὲ τῷ ϛ': τοὺς ἀπὸ τῶν μοιρῶν δύο μέχρι τοῦ μοιρῶν τε δύο καὶ ἑξηκοστῶν α: ἑξήκοντα, ἤτοι τοῦ μοιρῶν τριῶν, καὶ τοῦτο ποιοῦσιν ἀπαραλλάκτως μέχρι τοῦ τεσσαρακοστοῦ ὀγδόου κανονίου· ἀπὸ δὲ τούτου μέχρι τοῦ ἐνενηκοστοῦ ἕκτου τὸ αὐτὸ ποιοῦσιν ἀναποδίζοντες καὶ τὴν τάξιν πως μεταβάλλοντες. ἀρχόμενοι γὰρ ἀπὸ τῶν κάτω μερῶν τῶν κανονίων προβαίνουσι πρὸς τὰ ἄνω, τοὐναντίον ποιοῦντες τῶν ἐν τοῖς α: , ὅπου γε εἰ καὶ τὸ αὐτὸ ποιοῦσιν· ἀρχόμενοι μέντοι ἀπὸ τῶν ἄνω αὐτῶν μερῶν πρὸς τὰ κάτω προχωροῦσι. τῶν γὰρ τοιούτων κανονίων τὰ μὲν τοῦ α: μέρους κανόνια, δηλ: τὰ ὀκτὼ καὶ τεσσαράκοντα τάττονται ἐν ταῖς πρὸς τὰ ἀριστερὰ καθ' ἡμᾶς σελίσι, τὰ δὲ λοιπὰ τοσαῦτα ἐν ταῖς πρὸς τὰ δεξιά, ἵνα ἀφορᾷ ἕκαστον πρὸς ἕκαστον, καὶ συστοιχῇ ἀλλήλοις τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα παραπληρώματος. ὥστε ἐπὶ τῆς τῶν κανονίων ἡμιτόνων, ἁπτομένων τε καὶ τεμνουσῶν ἑκάστου τόξου κατασκευῆς τρία τοὐλάχιστον παρατηρητέον, α: τὸ τὰ κανόνια πάντα ἴσα ἀλλήλοις εἶναι κατά τε μῆκος καὶ πλάτος, καὶ εἰς ἴσα κατ' ἄμφω διῃρημένα, ὅπως παρατιθεμένων ἀλλήλοις τῶν τοῦ α: μέρους δηλ: τοῖς τοῦ β': ἀναλόγως αἱ ἐν ἑκάστῳ κατὰ πλάτος γραμμαὶ ἐπ' εὐθείας πως ὦσιν, οἱ δὲ ἀριθμοὶ τῶν ἡμιτόνων, ἁπτομένων τε καὶ τεμνουσῶν συστοιχῶσιν, ὡς ἐπὶ μιᾶς γραμμῆς κείμενοι, καὶ μὴ τῇ ζητήσει τῶν ἡμιτόνων, ἁπτομένων τε καὶ τεμνουσῶν τόξου τινός, ἢ τοῦ παραπληρώματος αὐτοῦ ἀπάτη τις συμβῇ. β': τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς ἐν τοῖς τοῦ α: μέρους κανονίοις ἄρχεσθαι ἀπὸ τῶν ἄνω μερῶν, τοὺς δὲ ἐν τοῖς τοῦ β': ἀπὸ τῶν κάτω· καὶ γ': τὸ ἕκαστον τῶν τοῦ α: μέρους κανονίων συστοιχεῖν ἑκάστῳ τῶν τοῦ β': , καὶ ἀλλήλοις παρατίθεσθαι τὸ α: τῷ ἐσχάτῳ, καὶ τὸ ἔσχατον τῷ α: Τέτακται δ' ἐνταῦθα ἐν μιᾷ ἄμφω σελίδι τὸ α: δηλ: τῶν τοῦ α: μέρους κανόνιον καὶ τὸ ἔσχατον τῶν τοῦ β': εἰς κατάληψιν τῶν εἰρημένων, ὡς διά τινος ὑποδείγματος. καὶ τοιαύτη μὲν ἡ κατασκευὴ τῶν κανονίων ἡμιτόνων ἁπτομένων τε καὶ τεμνουσῶν ἑκάστου τόξου ποῦ τι-

ταρτεταρτημορίου ἡ δὲ χρῆσις τῶν αὐτῶν ἐν τοῖς ἑξῆς γνωσθήσεται προβλήμασι.

Χρησιμεύει δὲ τὰ κανόνια ταῦτα ὅτι μάλιστα εἰς τὸ β΄: τοῦ παρόντος μέρους, εἴς τε δηλονότι τὴν τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων διάλυσιν, καὶ τὴν τῶν σφαιρικῶν. ὥστε ἄνευ τούτων δυσχερέστατη, ἵνα μὴ εἴπω καὶ ἀδύνατον ἡ τῶν ἐν ἐκείνῳ προβαλλομένων σκέψις. Δοθέντος γὰρ τόξου τινὸς, ἢ γωνίας, τὸ ἡμίτονον αὐτῶν, ἡ ἀπτομένη καὶ τέμνουσα εὐχερῶς ἐν αὐτοῖς εὑρίσκεται. καὶ τοὐναντίον δοθέντος ἡμιτόνου τινὸς, ἀπτομένης τε καὶ τεμνούσης, τὸ τόξον αὐτῶν, ἢ ἡ γωνία εὑρίσκεται, ὡς ὀψόμεθα. Αὖθις τῶν ἡμιτόνων, ἀπτομένων τε καὶ τεμνουσῶν ἀντὶ πλευρῶν τοῦ τριγώνου εἰλημμένων, ἐκ τῶν διδομένων ἐν οἱῳδήποτε τριγώνῳ, καὶ τὰ λοιπὰ τῶν ἐν αὐτῷ θεωρουμένων διὰ τῆς Μεθόδου τῶν Τριῶν θηρεύεται, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς δηλωθήσεται.

Πρότασις ΚΓ΄:

Τόξου δοθέντος ἢ γωνίας, τὸ ἡμίτονον, τὴν ἀπτομένην, καὶ τέμνουσαν τοῦ αὐτοῦ τόξου, ἢ γωνίας εὑρεῖν.

Δοθήτω α΄: τόξον ἔλαττον τεταρτημορίου, ἡ γωνία ἐλάττων ὀρθῆς, καὶ ἔστω ἑξηκοστῶν α΄: ὀκτὼ, καὶ ζητηθήτω τὸ ἡμίτονον, ἡ ἀπτομένη καὶ τέμνουσα τοῦ αὐτοῦ τόξου ἢ γωνίας. Ἐρεύνησον δὴ τοὺς ἀριθμοὺς τοὺς ἐν τοῖς α΄: κανονίοις, ἐν οἷς περιέχονται τὰ τόξα πρώτων καὶ β΄: ἑξηκοστῶν, καὶ εὑρὼν τὸν ὀκτὼ ἐπισκόπησον κατὰ πλάτος τοὺς συστοιχοῦντας αὐτῷ ἀριθμοὺς, καὶ ἕξεις τὸ ζητούμενον. οἷον ἐπεὶ ὁ ὀκτὼ ἀριθμὸς κεῖται ἐν τῷ π κ, παραλληλογράμμῳ τοῦ α΄: κανονίου ἔνθα ὁ ἀστερίσκος, καὶ τούτῳ συστοιχεῖ α΄: ὁ 232-71 ἀριθμὸς, ἐφεξῆς δὲ ὁ αὐτὸς, μεθ' ὃν ὁ 100000,27, δῆλον ὅτι τοῦ δοθέντος τόξου ἢ γωνίας ἡμίτονον μὲν καὶ ἀπτομένη ἐστὶ μορίων 232,71, οἵων τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον 10000000, τέμνουσα δὲ 100000,27. Εἰ δὲ τῷ δοθέντι τόξῳ καὶ β΄: πρόσκειται λεπτὰ, δὸς εἰπεῖν δέκα, εὑρὼν τὸν ὀκτὼ, μετάβαινε ἐπὶ τὸν δέκα, καὶ εὑρήσεις ἡμίτονον μὲν καὶ ἀπτομένην τοῦ αὐτοῦ τὸν 237,56, τέμνουσαν δὲ τὸν 100000,28.

Δοθήτω β΄: τόξον μεῖζον τεταρτημορίου, ἢ γωνία μείζων ὀρθῆς. καὶ ἔστω μοιρῶν μὲν ἐννέα καὶ ἑβδομήκοντα πρὸς τοῖς ἑκατὸν, ἑξηκοστῶν δὲ α΄: ἑνὸς καὶ πεντήκοντα, καὶ β΄: πεντήκοντα, καὶ ζητηθήτω καὶ τούτου τὸ ἡμίτονον ἡ ἀπτομένη τε καὶ τέμνουσα. Ἀφαιρεθήτωσαν δὴ α΄: αἱ 179 καὶ α΄: ἑξηκοστὰ 51′, καὶ β΄: 50″, ἀπὸ μοιρῶν 180. καὶ ἐπεὶ ἐναπολείπονται α΄: ἑξηκοστὰ ὀκτὼ, καὶ β΄: δέκα, ζήτησον τὸ ἡμίτονον, ἀπτομένην τε καὶ τέμνουσαν τοῦ αὐτοῦ, καὶ αὐτὰ ταῦτα ἔσονται ἡμίτονα, ἀπτομένη τε καὶ τέμνουσα καὶ τοῦ δοθέντος τόξου τοῦ μείζονος τεταρτημορίου κατὰ τὸν ιγ΄: ὅρον τοῦ παρόντος.

Πρότασις ΚΔ':

Τόξου δοθέντος ἢ γωνίας τὸ παραπλήρωμα εὑρεῖν τοῦ αὐτοῦ τόξου ἢ γωνίας.

Δοθήτω τόξον ἢ γωνία, τὸ αὐτὸ γὰρ ἔσαι, καὶ ζητηθήτω τὸ παραπλήρωμα τοῦ αὐτοῦ τόξου ἢ γωνίας. Ἔςω δὴ τὸ δοθὲν τόξον, ἢ ἡ γωνία ἑξηκοςῶν α: ὀκτὼ, καὶ ἐπεὶ ὁ ὀκτὼ ἀριθμὸς ὁ παραςατικὸς α: ἑξηκοςῶν κεῖται ἐν τῷ π κ, παραλληλογράμμῳ τοῦ α: κανονίου, ἔνθα ὁ ἀςερίσκος, ἐπισκόπησον ἐν τῷ ἀντικρὺ κανονίῳ τῷ πρὸς τὰ δεξιὰ καθ' ἡμᾶς κειμένῳ, ἤτοι τῷ ε ν, τίς τῶν ἐν τῷ α: αὐτοῦ παραλληλογράμμῳ ἀριθμῶν συςοιχεῖ τῷ δοθέντι, καὶ ἐπεὶ εὑρίσκεται ὁ δύο καὶ πεντήκοντα α: ἑξηκοςῶν μετὰ μοιρῶν ἐννέα καὶ ὀγδοήκοντα, ὁ δύο πάντως καὶ πεντήκοντα μετὰ μοιρῶν ἐννέα καὶ ὀγδοήκοντα παραπλήρωμά ἐςι τοῦ δοθέντος τόξου ἢ γωνίας. ὁ γὰρ ὀκτὼ μετὰ δύο καὶ πεντήκοντα α: ἑξηκοςῶν ἀναπληροῦσι τὸν ἑξήκοντα ἀριθμὸν, ἤτοι μοῖραν μίαν. τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκονται καὶ τὰ ἡμίτονα, ἀπτόμεναι καὶ τεμνουσαι τῶν παραπληρωμάτων ἑκάςου τόξου, δοθέντος ἢ τοῦ τόξου ἢ τοῦ ἡμιτόνου αὐτοῦ, ἢ τῆς ἀπτομένης, ἢ γουῦ τῆς τεμνούσης.

Πρότασις ΚΕ':

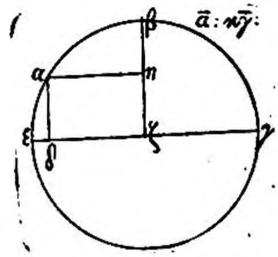
Τόξου δοθέντος τὸ πλάγιον αὐτοῦ ἡμίτονον εὑρεῖν.

Δοθήτω τόξον οἱονδήποτε, καὶ ζητηθήτω τὸ πλάγιον αὐτοῦ ἡμίτονον. Εὑρεθήτω κατὰ τὴν ἀνωτέρω τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ τόξου. κἂν μὲν τὸ δοθὲν τόξον ἔλαττόν ἐςι τεταρτημορίου, ἀφαιρεθήτω τὸ εὑρεθὲν ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, καὶ τὸ ἐναπολειφθὲν ἔσαι τὸ ζητούμενον. Οἷον ἔςω τὸ δοθὲν τόξον ἑξηκοςῶν α: δέκα, καὶ ἐπεὶ ἐν τῷ ἀντικρὺ κανονίῳ παραπλήρωμα αὐτοῦ εὑρίσκεται ὁ πεντήκοντα ἀριθμὸς, παραςατικὸς ὢν καὶ αὐτὸς ἑξηκοςῶν β':, καὶ τούτου ἡμίτονόν ἐςιν ὁ 99999,58 ἀριθμὸς, ἀφαιρεθήτω ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, καὶ ἐναπολειφθήσεται ὁ 42 ἀριθμὸς, καὶ οὗτος πάντως ἐςὶ πλάγιον ἡμίτονον τόξου ἑξηκοςῶν δευτέρων δέκα δηλ: τοῦ δοθέντος, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιε: τοῦ παρόντος.

Εἰ δὲ τὸ δοθὲν τόξον μεῖζόν ἐςι τεταρτημορίου, ἀφαιρεθήτω τοῦτο ἀπὸ τοῦ ἡμικυκλίου, ἤτοι μοιρῶν ρπ, καὶ εὑρεθήτω τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τοῦ ἐναπολειφθέντος, τοῦτο δὲ προςεθήτω τῷ ὁλικῷ ἡμιτόνῳ, καὶ τὸ γενόμενον ἔσαι ἡμίτονον πλάγιον τοῦ δοθέντος. Ἔςω γὰρ τόξον μοιρῶν ροθ, καὶ ἑξηκοςῶν α: ν, καὶ ἀφαιρεθήτωσαν αἱ ροθ, μοῖραι καὶ ἑξηκοςὰ α: ν: ἀπὸ μοιρῶν ρπ, καὶ ἐπεὶ ἐναπολείπονται ἑξηκοςὰ α: δέκα, εὑρεθήτω διὰ τῆς ἀνωτέρω ἡμίτονον παραπληρώματος τόξου ἑξηκοςῶν α: δέκα, καὶ ἔσαι μορίων 99999.

58.

Trigon. Lib. 1. Fig. 23.



58. τοῦτο προστεθήτω τῷ ὁλικῷ ἡμιτόνῳ, καὶ γενήσεται ὁ 199999.58. ὅς ἐστι πλάγιον ἡμίτονον τοῦ δοθέντος, ἤτοι τόξου μοιρῶν ρ̄ο̄θ̄, καὶ ἑξηκοστῶν α: ν̄. ζητηθήτω γὰρ τοῦ α β γ, τόξου τὸ πλάγιον ἡμίτονον, οὗ ἡμίτονόν ἐστι τὸ α δ, ὅπερ καὶ τοῦ α ε, παραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ μέχρι τοῦ ἡμικυκλίου κατὰ τὸν ι γ': ὅρον τοῦ παρόντος. ἡμίτονον δὲ παραπληρώματος μέχρι τεταρτημορίου τοῦ α ε, τόξου ἐστὶ τὸ δ ζ, κατὰ τὸν ϛ': ὅρον τοῦ αὐτοῦ, καὶ πλάγιον τὸ δ γ, κατὰ τὸν ι α: ὅρον. Εἰ οὖν τὸ α β γ, ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ε β γ, ἡμικυκλίου, καὶ τοῦ ἐναπολειφθέντος α ε, εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος, γνωσθήσεται πάντως τὸ δ ζ. ἐπεὶ δ' ἐγνωσμένον ἐστὶ καὶ τὸ ζ γ, ὁλικὸν ἡμίτονον, ἐὰν ἄρα τὸ δ ζ, ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ α β γ, δοθέντος τόξου προστεθῇ τῷ ζ γ, ὁλικῷ ἡμιτόνῳ, γνωσθήσεται καὶ τὸ δ γ, πλάγιον ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ.

Πρότασις Κϛ':

Δοθέντος τόξου τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ εὑρεῖν.

Ἔστω τόξον μοιρῶν ξ̄, καὶ ζητηθήτω ἡ αὐτοῦ ὑποτείνουσα. Εὑρεθήτω δὴ κατὰ τὸν κ γ': τοῦ παρόντος τὸ ἡμίτονον τοῦ ἡμίσεως τόξου, ἤτοι μοιρῶν λ̄:, καὶ ἔσται τοῦτο μορίων 5000000. Εἶτα διπλασιασθήτω, καὶ γενήσεται ὁ 10000000 ἀριθμὸς καὶ τοσούτων μορίων ἔσται ἡ ὑποτείνουσα τόξου μοιρῶν ξ̄. κατὰ γὰρ τὸν θ': ὅρον τοῦ παρόντος τὸ ἡμίτονον ἥμισυ μέρος ἐστὶ τῆς ὑποτεινούσης διπλασίου τόξου.

Πρότασις ΚΖ':

Ἡμιτόνου δοθέντος τὸ τόξον αὐτοῦ εὑρεῖν ἢ τὴν γωνίαν.

Ἔστω ἡμίτονον μορίων 203.62. καὶ ζητηθήτω τὸ τόξον αὐτοῦ, ἢ ἡ γωνία. Εὑρεθήτω δὴ ἐν τοῖς κανονίοις ὁ δοθεὶς ἀριθμός, καὶ ὁ συστοιχῶν αὐτῷ κατὰ τὰ ἀριστερὰ καθ' ἡμᾶς τοῦ κανονίου μέρη παραστατικός ἐστι τοῦ ζητουμένου τόξου. οἷον ἐπεὶ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εὑρίσκεται ὢν ἐν τῷ κ λ, παραλληλογράμμῳ τοῦ α: κανονίου, ἔνθα ἐστὶ τὸ σημεῖον ☛, καὶ τούτῳ συστοιχεῖ ὁ 7 ἀριθμὸς κείμενος ἐν τῷ α κ, παραλληλογράμμῳ καὶ παριστῶν ἑξηκοστὰ ά:, δῆλον ὅτι τὸ τόξον ἢ ἡ γωνία, ἧς ἡμίτονον ὁ 203.62 ἀριθμός, ἑξηκοστῶν ἐστι πρώτων ζ̄. τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκεται τὸ ζητούμενον τόξον, ἢ ἡ γωνία, δοθείσης καὶ τῆς ἀποτεμνούσης αὐτοῦ,

 ἢ τεμἢ τεμνούσης. εἰ δὲ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἢ τῆς ἁπτομένης, ἢ τεμνούσης οὐχ εὑρίσκεται ἐν τοῖς κανονίοις, ληφθήτω ὁ προσεχὴς αὐτῷ μείζων ἢ ἐλάττων ἀριθμὸς, καὶ γνωσθήσεται τίνος τῶν ἐν τῷ κανονίῳ εὑρισκομένων τόξων ἢ γωνιῶν μεῖζόν ἐστι τὸ ζητούμενον τόξον, ἢ ἡ γωνία, καὶ τίνος ἔλαττον. Τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκεται καὶ τὸ παραπλήρωμά τινος τόξου ἢ γωνίας, δοθέντος τοῦ ἡμιτόνου τοῦ αὐτοῦ παραπληρώματος. ὁ γὰρ συστοιχῶν ἀριθμὸς τῷ δοθέντι ἡμιτόνῳ ἀριστερόθεν παραπλ: ἐστὶ τοῦ δοθέντος τόξου ἢ γωνίας.

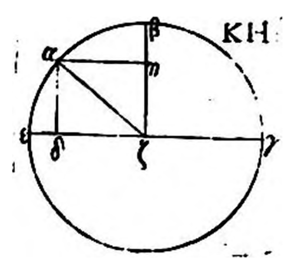
Πρότασις ΚΗ'.

Πλαγίου ἡμιτόνου δοθέντος τόξου τινὸς, ἢ γωνίας τὸ τόξον ἢ τὴν γωνίαν εὑρεῖν.

Ἔστω πλάγιον ἡμίτονον τόξου τινὸς, ἢ γωνίας, καὶ ζητηθήτω τὸ τόξον ἢ ἡ γωνία. Ἐπεὶ δὲ τὸ τοιοῦτον ἡμίτονον ἢ μεῖζον, ἢ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, ἔστω α: ἔλαττον, ἤτοι μορίων κζ, καὶ ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, καὶ ἐναπολειφθήσεται ὁ 99999,73 ἀριθμὸς, καὶ οὗτος ἔσται ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ ζητουμένου τόξου ἢ γωνίας. οὗ δοθέντος ζητηθήτω κατὰ τὴν ἀνωτέρω τὸ τόξον αὐτοῦ, καὶ εὑρεθήσεται μοιρῶν μὲν πθ, ἑξηκοστῶν δὲ α: νβ. τοῦτο ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ τεταρτημορίου, ἤτοι μοιρῶν ἐνενήκοντα, καὶ ἐναπολειφθήσονται ἑξηκοστὰ α: ὀκτὼ, καὶ τοσούτων μορίων ἔσται τὸ ζητούμενον τόξον, οὗ τὸ πλάγιον ἡμίτονον ἐστὶ μορίων κζ, ἢ γωνία ἡ ζητουμένη.

Ἔστω ἔτι πλάγιον ἡμίτονον μορίων 199999.73: μεῖζον τεταρτημορίου, καὶ ζητηθήτω τὸ αὐτοῦ τόξον. Ἀφαιρεθήτω δὴ τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον ἀπὸ τοῦ δοθέντος πλαγίου ἡμιτόνου, καὶ ἐπεὶ ἐναπολείπεται ὁ 99999.73 ἀριθμὸς, εὑρεθήτω κατὰ τὴν ἀνωτέρω τὸ τόξον τοῦ ἐναπολειφθέντος, καὶ ἔσται μοιρῶν μὲν πθ, ἑξηκοστῶν δὲ α: νβ. εἶτα προστεθήτω τὸ εὑρεθὲν τόξον τῷ τεταρτημορίῳ, καὶ γενήσεται ὁ ροθ, καὶ νβ', καὶ τοσούτων μοιρῶν ἔσται τὸ ζητούμενον τόξον, οὗ πλάγιον ἡμίτονον ὁ δοθεὶς 199999.73. ἀριθμός. ἔστω γὰρ ὁ εβγ, κύκλος, καὶ δεδόσθω α: τὸ εδ, πλάγιον ἡμίτονον τοῦ αε, τόξου. ἐὰν δὴ τὸ εδ, ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ εζ, ὁλικοῦ ἡμιτόνου γνωσθήσεται τὸ δζ, ἡμίτονον παραπληρώματος τοῦ αε, τόξου. εὑρεθέντος δὲ τοῦ δζ, ἐν τοῖς κανονίοις, γνωσθήσεται τὸ αβ, παραπλήρωμα. τούτου δὲ ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τοῦ βε τεταρτημορίου, γνωσθήσεται τὸ ζητούμενον αε, τόξον. Δοθήτω. β': τὸ δγ, πλάγιον ἡμίτονον τοῦ αβγ, τόξου. Ἐὰν δὴ ἀφαιρεθῇ

Trigon. Lib. 1. Fig. 24.



μεθῇ τὸ ζγ, ὁλικὸν ἡμίτονον ἀπὸ τοῦ δγ, δοθέντος πλαγίου ἡμιτόνου, γνωσθήσεται τὸ δζ. τούτου δ' ἀριθέντος ἐν τοῖς κανονίοις, γνωσθήσεται τὸ αβ, τόξον, ὅτινος προστιθέντος τῷ βγ, παρημοιρίῳ, γνωσθήσεται καὶ τὸ ζητούμενον αβγ, τόξον.

Πρότασις ΚΘ':

Πλαγίου ἡμιτόνου δοθέντος τοῦ παραπληρώματός τινος τόξου, τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου εὑρεῖν καὶ ἀνάπαλιν.

Δοθέντω πλάγιον ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τόξου ἑξηκοστῶν α: ὀκτὼ, καὶ ἔστω τοῦτο μοιρῶν 99767.29. Ζητηθήτω δὲ τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου, ἤτοι ἑξηκοστῶν α: ὀκτώ. Α'φαιρεθήτω δὴ τὸ δοθὲν πλάγιον ἡμίτονον, ἤτοι ὁ 99767.29. ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτ:, καὶ ἐναπολειφθήσεται ὁ 232.71., καὶ τοσούτων μοιρῶν ἔσται τὸ ἡμίτονον τόξου ἑξηκοστῶν α: ὀκτώ. Α'νάπαλιν δὲ δοθήτω τὸ ἡμιτ: τόξου ἑξηκοστῶν α: ὀκτὼ, ἤτοι ὁ 232.71. καὶ ζητηθήτω τὸ πλάγιον ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ παραπληρώματος. ἀφαιρεθήτω δὴ ὁ 232.71. ἀριθμὸς ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, καὶ ἐναπολειφθήσεται ὁ 99767.29., καὶ τοσούτων μοιρῶν ἔσται τὸ πλάγιον ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τόξου ἑξηκοστῶν α: ὀκτὼ, ὡς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σχήματος γίνεται δῆλον.

Πρότασις Λ':

Υ'ποτεινούσης δοθείσης τὸ τόξον αὐτῆς εὑρεῖν.

Ε'στω ὑποτείνουσά τινος τόξου μοιρῶν 46542., καὶ ζητηθήτω τὸ τόξον. Διαιρεθήτω δὴ ὁ 46542 ἀριθμὸς εἰς δύο. καὶ ἐπεὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ, δηλ: ὁ 232.71. ἡμίτονόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ ζητουμένου τόξου, εὑρεθήτω ἐν τῷ πίνακι καὶ τὴν κζ': τοῦ παρόντος τὸ τόξον τοῦ αὐτοῦ ἡμιτόνου, καὶ ἔσται ἑξηκοστῶν α: ὀκτώ. τοῦτο διπλασίασον, καὶ ἕξεις τόξον τῆς δοθείσης ὑποτεινούσης ὑπάρχον ῃ, ἑξηκ: α: Δυνάνται δὲ καὶ ἕτερα πλεῖω διαλυθῆναι προβλήματα διὰ τῶν τοιούτων κανονίων, ἱκανὰ δὲ καὶ ταῦτα πρὸς φανέρωσιν τοῦ χρησίμου τῶν αὐτῶν κανονίων.

Τέλος τοῦ πρώτου βιβλίου τοῦ πρώτου τῆς Τριγωνομετρίας μέρους.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΑΛΟΥΜΕΝΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ.

ΠΡΟΟΙΜΙΟΝ.

Ἡ ἀκόρεστος ἅμα καὶ ἀκάθεκτος τῶν εἰς τὰ Μαθηματικὰ προβλήματά τε καὶ θεωρήματα τὸν ἅπαντα δαπανησάντων βίον ἔφεσις διαφόρους καὶ τὰς μηχανὰς, καὶ πολυτρόπους τὰς ἐφόδους ἐφ' ἑκάστης αὐτοῖς ἐφεῦρε πραγματείας, ὅπως δι' αὐτῶν εὐχερέστερον τὰ οἱαδηποτοῦν μαθηματικὰ προβλήματα διαλύειν ἔχωσι, καὶ τὴν τῶν θεωρημάτων γνῶσιν ἐντελῆ πορίζεσθαι· καὶ τὰ μὲν ἐπεσκιασμένα καὶ πολλοῖς ἄγνωστα ἀνακαλύπτειν, τὰ δυσχερῆ δὲ, καί πως ἀνθρωπίνῃ ἀνέφικτα διανοίᾳ δοκοῦντα, ἢ ὅλως παρά τισιν ἀδύνατα λογιζόμενα, εὐχερῆ τε ἀποδεικνύειν, καὶ δυνατὰ πᾶσι τοῖς ποιεῖν ἐν τούτοις ἐθέλουσιν ἀπεργάζεσθαι. Διὸ δὴ καὶ ἐπὶ τῆς παρούσης πραγματείας εὕρηται παρ' αὐτοῖς τὰ ἡμίτονα, αἱ ἀπτόμεναι καὶ αἱ τέμνουσαι ἑκάστου τόξου, ὡς εἰς διάλυσιν τριγώνων εὐθυγράμμων τε καὶ σφαιρικῶν, ὅτι μάλιστα τῆς αὐτῶν συντελούσης χρήσεως. Ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ τούτων χρῆσις δυσχερής ἐστι καὶ ἐπίπονος, μὴ παντάπασιν ἐφησυχάσαντες εἰς τὴν τούτων εὕρεσιν, καὶ ἄλλην τινὰ προσεπινενοήκασιν ἔφοδον, εὐχερεστέραν τε ἅμα καὶ συντομωτέραν, τὴν τῶν Λογαρίθμων φημὶ σύνταξιν καὶ ῥυθμόν. Εἰσὶ δὲ Λογάριθμοι καὶ λέγονται ἀριθμοί τινες ἀριθμητικῶς ἀνάλογοι, τοῖς Γεωμετρικὴν ἀναλογίαν τηροῦσι παρατιθέμενοι, ὧν ἡ χρῆσις πολλῷ τῆς τῶν ἡμιτόνων, ἀπτομένων τε καὶ τεμνουσῶν εὐχερεστέρα. Ὅπερ γὰρ ἐν τοῖς Γεωμετρικῶς ἀναλόγοις διὰ πολλαπλασιάσεώς τε καὶ διαιρέσεως ἐν τῷ α΄. τῆς Ἀριθμητικῆς πραγματείας μέρει ἐδιδάχθημεν ποιεῖν εἰς εὕρεσιν τῶν ἑξῆς ἀναλόγων ἀριθμῶν, τοῦτ' αὐτὸ ποιεῖν ἔχομεν καὶ διὰ τῶν λογαρίθμων ἀπονώτερόν τε καὶ εὐχερέστερον. Ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ παραδείγματος Γεωμετρικῶς μὲν ἀνάλογοι ἀριθμοὶ οἱ ὑπὸ τοῦ α, στοιχείου, ἀριθμητικῶς δὲ οἱ συστοιχοῦντες τούτοις κατὰ πλάτος ἤτοι μονάδι ἀλλήλων ὑπερέχοντες, ὡς οἱ ὑπὸ τοῦ β καὶ ε, ἢ δυάδι, ὡς οἱ ὑπὸ τοῦ γ καὶ ζ, ἢ

α	β	γ	δ	ε	ζ	η.
1	1.	1.	.1.	0.	0.	0.
2	2.	3.	4.	1.	1.	1.
4	3.	5.	7.	2.	3.	4.
8	4.	7.	10.	3.	5.	7.
16	5.	9	13.	4.	7.	10.
32	6.	11.	16.	5.	9.	13.

τριά-

τριάδι ὡς οἱ ὑπὸ τῷ δ καὶ η, ἢ ἄλλῳ τινὶ ἀριθμῷ. οἱ μὲν οὖν ὑπὸ τοῦ β καὶ γ καὶ δ, καὶ λοιπῶν στοιχείων κείμενοι, Λογάριθμοι τῶν ὑπὸ τὸ α, κειμένων λέγονται. δύνανται δὲ οἱ αὐτοὶ ἢ ἀπὸ μονάδος ἄρχεσθαι, ὡς οἱ ὑπὸ τῶν β γ δ, ἢ ἀπὸ τζίφρας, ὡς οἱ ὑπὸ τῶν ε ζ η. Τίνες δὲ τῶν ἀριθμῶν Γεωμετρικὴν ἀναλογίαν τηροῦσι, καὶ τίνες ἀριθμητικὴν, εἴρηται ἐν τῷ περὶ ἀναλογιῶν τοῦ β΄: τμήματος τῆς ἀριθμητικῆς.

Τὸ δὲ χρήσιμον τῶν Λογαρίθμων τοιοῦτον τι. δοθέντων μὲν γὰρ δύο τινῶν ἀριθμῶν τῶν ἐν Γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ, ζητεῖται πάντως ὁ γ΄: δοθέντων δὲ τριῶν, ζητεῖται ὁ δ΄: εἰς εὕρεσιν δὲ τῶν ζητουμένων, ἐὰν μὲν δύο εἰσὶν οἱ δοθέντες, ὀφείλει ὁ β΄: ἐφ᾽ ἑαυτὸν πολλαπλασιασθῆναι, καὶ ὁ γενόμενος μερισθῆναι ἐπὶ τὸν α΄: ἐὰν δὲ τρεῖς, τὸν β΄: καὶ γ΄: δεῖ ἀλλήλους πολλαπλασιάζειν, καὶ τὸν γενόμενον ἐπὶ τὸν α΄: ὁμοίως μερίζεσθαι, τῆς ἐν αὐτοῖς ἀναλογίας τεταγμένης οὔσης, ὡς ἐν τῷ α΄: τῆς ῥηθείσης εἴρηται πραγματείας, ἔνθα περὶ Μεθόδων ἡ ἑρμηνεία ἐγίγνετο. Ἐπεὶ δὲ τοῦτο ἐπίπονον ὅτι μάλιστα τοῖς διὰ πλειόνων συνισταμένοις χαρακτήρων, καὶ οὐδὲ ἡ τυχοῦσα συμβαίνει πολλάκις ἀπάτη τοῖς μὴ μετ᾽ ἀκριβείας ἁπάσης καὶ προσοχῆς ποιοῦσι τὰς πράξεις· ἐξισίσοι λαμβάνειν ἀντὶ τῶν δοθέντων τοὺς συστοιχοῦντας αὐτοῖς λογαρίθμους, κἂν μὲν δύο ὦσιν οἱ οἱ δοθέντες, διπλασίασον τὸν τοῦ β΄: λογάριθμον, καὶ τοῦ γενομένου ἄφελε τὸν τοῦ α΄:, καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς παραστήσει σοι, τὸν ζητούμενον. εἰ δέ γε οἱ δοθέντες τρεῖς εἰσιν ἀριθμοὶ, σύναψον τὸν γ΄: τῷ β΄: λογαρίθμῳ, καὶ τοῦ γενομένου ἄφελε τὸν α΄:, καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς παρέξει σοι τὸν δ΄: κατὰ Γεωμετρικὴν ἀναλογίαν. ὥσπερ γὰρ ἐν τῇ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ ἐὰν τρεῖς ὦσιν οἱ ἀριθμοὶ, ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου, ἐὰν δὲ τέσσαρες, ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, οὕτω καὶ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ ἀναλογίᾳ ἐὰν μὲν τρεῖς ὦσιν οἱ ἀριθμοὶ, ὁ ἐκ τῶν ἄκρων διπλάσιός ἐστι τοῦ μέσου· ἐὰν δὲ τέσσαρες, ὁ ἐκ τῶν ἄκρων ἴσος τῷ ἐκ τῶν μέσων, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς δηλωθήσεται.

Διττοῦ δὲ γένους εἰσὶν οἱ Λογάριθμοι, οἱ μὲν γὰρ κοινοὶ, οἱ δὲ τριγωνομετρικοὶ προσαγορεύονται. καὶ κοινοὶ μὲν εἰσί τε καὶ λέγονται Λογάριθμοι, οἱ τοῖς κατὰ φυσικὴν πρόοδον συστοιχοῦντες ἀριθμοῖς, τριγωνομετρικοὶ δὲ οἱ τῶν ἡμιτόνων, ἀπτομένων τε καὶ τεμνουσῶν καλούμενοι Λογάριθμοι, περὶ ὧν ἐνταῦθα ὁ λόγος. Ἵνα δὲ ἐντελεστέρα γένηται ἡ περὶ τῶν λογαρίθμων ἑρμηνεία, περὶ εὑρέσεως τούτων κατὰ τὸ δυνατὸν ἐροῦμεν. Ἐπεὶ δὲ οὐδ᾽ ἄλλῃ τινὶ οἶμαι Μαθηματικῇ πραγματείᾳ οἰκειότερον τοῦτο ποιεῖν, ὡς ἐν τοῖς τῶν ἡμιτόνων, ἀπτομένων τε καὶ τεμνουσῶν κανονίοις κειμένων καὶ τῶν αὐτῶν λογαρίθμων· ὥστε εἰς ἐντελῆ κατασκευὴν τῶν τοιούτων κανονίων ἀναγκαία πάντως ἡ ἀνάπτυξις τοῦ τρόπου τῆς εὑρέσεως, μὴ μόνον τῶν ἡμιτόνων, ἀπτομένων τε καὶ τεμνουσῶν, ἀλλά γε καὶ τῶν λογαρίθμων τῶν αὐτῶν. Διὸ δὴ μετὰ τὴν εὕρεσιν ἐκείνων ἕπεται καὶ ἡ περὶ

εὑρεἀκριβεστέρως τούτων ἑρμηνεία, μεθ' ἣν ἡ περὶ χρήσεως τῶν αὐτῶν διδασκαλία, ὥσπερ καὶ ἐν ἐκείνοις. Διὰ τὸ εὐχρηστότερον μέν τοι, ἢ κρεῖττον εἰπεῖν οἰκειότερον τῇ διδασκαλικῇ τάξει, ἐκκείσθωσαν ὅροι τινὲς καὶ προβλήματα εἰς ἀνάπτυξιν μὲν τῶν εἰρημένων, σαφεστέραν δὲ τῶν ῥηθησομένων κατάληψιν.

ΟΡΟΙ.

Α': Ἀριθμοὶ Γεωμετρικῶς ἀνάλογόν εἰσιν οἱ τὸν αὐτὸν πρὸς ἀλλήλους ἔχοντες λόγον, κατά τι εἶδος τῆς κατ' ἀνισότητα τῶν ἀριθμῶν σχέσεως, ὡς οἱ α β γ δ, καὶ ε ζ η, ὧν οἱ μὲν ἐν ὑποδιπλασίῳ εἰσὶ λόγῳ, οἱ δὲ ἐν ἐφημιολίῳ. δύνανται δὲ συνεχεῖς τε καὶ διηχεῖς εἶναι. Ἴδιον δὲ τούτων τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, ἢ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου, ὡς καὶ ἐν ἄλλοις εἴρηται.

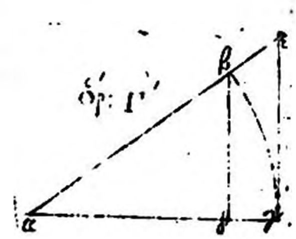
α.	β.	γ.	δ.
2.	4.	8.	16.
	ε.	ζ.	η.
	4.	6.	9.

Β': Ἀριθμοὶ Ἀριθμητικῶς ἀνάλογόν εἰσιν οἱ ἴσῃ ὑπεροχῇ ἀλλήλων ὑπερέχοντες, μονάδι φέρ' εἰπεῖν, ἢ δυάδι, ἢ τριάδι, ἢ ἄλλῳ τινὶ ἀριθμῷ, ὡς οἱ α β γ δ, ἢ ε ζ η θ, ἢ κ λ μ ν, καὶ οἱ ὅμοιοι. εἰσὶ δὲ καὶ οὗτοι συνεχεῖς τε καὶ διηχεῖς. ἴδιον δὲ τούτων τὸ ἐκ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἐκ τῶν μέσων, ἢ διπλάσιον τοῦ μέσου. οἱ δὲ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ συστοιχοῦντες τοῖς Γεωμετρικοῖς ἀνάλογον Λογάριθμοι ἐκείνων, ὡς ἤδη εἴρηται, λέγονται.

α.	β.	γ.	δ.
1.	2.	3.	
ε.	ζ.	η.	θ.
1.	3.	5.	7.
κ.	λ.	μ.	ν.
1.	4.	7.	10.

Γ': Ἐὰν ἀπό τινος σημείου τῆς μιᾶς πλευρᾶς ὀξείας τινὸς γωνίας κάθετος ἐπὶ τῆς ἑτέρας ἀχθῇ, ἡ μὲν κάθετος ὀρθὸν ἡμίτονον λέγεται τῆς γωνίας, τὸ δὲ ἐναπολαμβανόμενον μέρος τῆς πλευρᾶς, ἐφ' ἧς ἡ κάθετος πίπτει, μεταξὺ τῆς καθέτου καὶ τοῦ σημείου τῆς γωνίας ἡμίτονον παραπληρώματος τῆς αὐτῆς γωνίας, ὡς ἐπὶ τῆς ὑπὸ βαγ, γωνίας, ἡ μὲν βδ, κάθετος ἡμίτονον ὀρθὸν λέγεται τῆς αὐτῆς γωνίας, ἡ δὲ δα, ἡμίτονον παραπληρώματος μέχρι τῆς ὀρθῆς γωνίας. ἐὰν δὲ γραφομένου τόξου ἀπὸ τῆς συνδρομῆς τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας διὰ τοῦ εἰλημμένου σημείου ὡς τὸ βγ, ἡ ὅλη αγ, ὁλικὸν ἡμίτονον λέγεται τῆς ὑπὸ βαγ, γωνίας, ἡ δὲ ἐναπολαμβανομένη ὑπὸ τῶν γ, καὶ δ, σημείων πλάγιον ἡμίτονον τῆς αὐτῆς. ἐὰν δὲ αὖθις ἀπὸ τοῦ γ, σημείου κάθετος ἀχθῇ ἐπὶ τῆς αγ, καὶ τῇ αβ, ἐξαχθείσῃ συμπέσῃ ἐπ' ἄπειρον κατὰ τὸ ε, ἡ μὲν γε, ἀπτομένη λέγεται τῆς γωνίας, ἡ δὲ αε, τέμνουσα.

Trigon. Lib. 2. Fig. 1.



Δ': Τὸ

Δ'. Τὸ τινὸς ὀξείας γωνίας ἡμίτονον, λέγεται ἔτι ἡμίτονον κ τῆς ἀμβλείας, ἤτοι τῦ παραπληρώματος αὐτῆς μέχρι μοιρῶν ρπ, ὥστε ἐξ ἀμφοτέρων δύο συνίστασθαι ὀρθὰς γωνίας. οἷον ἐὰν ἡ ὀξεῖα γωνία μοιρῶν ξ λ, τὸ ἡμίτονον τῆς αὐτῆς λέγεται ἡμίτονον τῆς γωνίας μοιρῶν ρν.

Πρότασις Α'.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐκ τῶν ἄκρων ἴσος ἐςὶ τῷ ἐκ τῶν μέσων συνάψει.

Ἔςωσαν ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς ἀνάλογον οἱ α β γ δ, ὥςε εἶναι ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ. ἔςω δὲ καὶ διαφορὰ τῦ ε β, πρὸς τὸν α, κ τῦ δ, πρὸς τὸν γ, ὁ ε. Λέγω ὅτι ὁ ὑπὸ τῶν α δ, ἄκρων γενόμενος ἀριθμὸς ἴσος ἐςὶ τῷ ἐκ τῶν β, καὶ γ, μέσων γενομένῳ. ἀφαιρεθήτω γὰρ ὁ ε, ἀπὸ τῦ β, καὶ δ, κ ἐναπολειφθήσονται πάντως οἱ η, θ, ἀριθμοὶ, ὁ μὲν ἴσος τῷ α, ὁ δὲ τῷ γ. εἶτα συναφθήτω ὁ μὲν α, τῷ θ, ὁ δὲ γ, τῷ η, καὶ γενήσονται οἱ κ, λ, ἴσοι. ἐὰν γὰρ ἴσοις ἴσα προςεθῇ, τὰ ὅλα ἐςὶν ἴσα. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ ε, διαφορά ἐςι τῦ ε β, πρὸς τὸν α, καὶ τῦ δ, πρὸς τὸν γ, προςεθήτω ὁ αὐτὸς ε, ἑκατέρῳ τῶν κ, κ λ, κ γενήσονται πάντως οἱ μ ν, ἴσοι κ τὸ ῥηθὲν Β'. ἀξίωμα. ἀλλ' ὁ μὲν ν, ἐςὶν ὁ ἐκ τῶν ἄκρων α, καὶ δ, σύγκειται γὰρ ἐκ τῶν ε θ α, κ ὁ ε, κ θ, ποιῦσι τὸν δ. ὁ δὲ μ, ὁ ἐκ τῶν β, κ γ, μέσων. σύγκειται γὰρ ἐκ τῶν ε η γ, κ ὁ ε, κ η, ποιῦσι τὸν β. ἄρα ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐκ τῶν ἄκρων ἴσος ἐςὶ τῷ ἐκ τῶν μέσων.

α.	β.	γ.	δ.
4.	6.	5.	7.
ε.	2.	ε.	2.
η.	4.	θ.	5.
γ.	5.	α.	4.
κ.	9.	λ.	9.
ε.	2.	ε.	2.
μ.	11.	ν.	11.

Πρότασις Β'.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐκ τῶν ἄκρων γενόμενος διπλάσιός ἐςι τῦ μέσυ.

Ἔςωσαν οἱ α β γ, ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς ἀνάλογον, διαφορὰ δὲ τῦ ε β, πρὸς τὸν α, καὶ τῦ γ, πρὸς τὸν β, ἔςω ὁ δ. Λέγω τὸν ἐκ τῶν α, καὶ γ, ἄκρων γενόμενον εἶναι διπλάσιον τῦ β. ἔςω γὰρ καὶ διαφορὰ τῦ γ, πρὸς τὸν α, ὁ ε. εἶτα ἀφῃρήσθω ὁ μὲν δ, ἀπὸ τῦ β, ὁ δὲ ε, ἀπὸ τῦ γ, καὶ ἐναπολειφθήτωσαν οἱ ζ, καὶ η, ὧν ἑκάτερος ἴσος ἔςαι τῷ α. ἐπεὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ὑπεροχὴ τῦ μὲν β, πρὸς τὸν α. ἐςὶν ὁ δ, τῦ δὲ γ, πρὸς τὸν αὐτὸν α, ὁ ε, ὥςε οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ ζ η α, ἴσοι εἰσὶν, οἱ δὲ α ζ, ἄκροι συναπτόμενοι ἀλλήλοις διπλάσιον ποιῦσι

α	β	γ.	δ	ε.
4	6	8.	2	4.
	2	4.		
ζ.	4.	η. 4.	α.	4.
ζ.	4.	θ. 8.		
δ.	2.	ε. 4.		
λ.	6.	κ. 12.		

τῦ

τοῦ η, μέσου. Συναρθήτωσαν δὴ καὶ ποιείτωσαν τὸν θ, ὁ θ, ἄρα διπλάσιός ἐστι τοῦ η, ἀλλὰ καὶ ὁ ε, διπλάσιός ἐστι τοῦ δ, ὡς δείξομεθα. ἄρα ἐὰν ὁ ε, τῷ θ, προστεθῇ, καὶ γένηται ὁ κ, τῷ δὲ η, ὁ δ, καὶ γένηται ὁ λ, πάντως γε καὶ ὁ κ, διπλάσιός ἐστι τοῦ λ. ἀλλ' ὁ μὲν κ, ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν γ, καὶ α, ἄκρων γενομένῳ, σύγκειται γὰρ ἐκ τῶν η α ε, καὶ ὁ η, μετὰ τοῦ ε, ἴσος ἐστὶ τῷ γ, ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς δῆλον. ἀφαιρουμένου γὰρ τοῦ ε, ἀπὸ τοῦ γ, ἐναπολείπεται ὁ η, ὁ δὲ λ, ἴσος ἐστὶ τῷ β, μέσῳ, σύγκειται γὰρ ἐκ τῶν ζ, καὶ δ. ἄρα ὁ ἐκ τῶν α, καὶ γ, ἄκρων γενόμενος διπλάσιός ἐστι τοῦ β, μέσου.

Ὅτι δὲ ὁ ε, διπλάσιός ἐστι τοῦ δ, δῆλον, οἱ γὰρ α β γ, δοθέντες ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς εἰσὶν ἀνάλογον, καὶ ἴσῃ ὑπεροχῇ ὑπερέχει ὁ γ, τοῦ β, καὶ ὁ β, τοῦ α, ὥστε διπλασιαζομένων τῶν ὅρων, διπλασιάζεται καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ γ, πρὸς τὸν α. ἡ τοῦ γ, ἄρα ὑπεροχὴ πρὸς τὸν α, τῆς τοῦ β, ὑπεροχῆς πρὸς τὸν αὐτὸν α, διπλασία ἐστίν.

Α Λ Λ Ω Σ.

Εἰλήφθω ὁ δ, ἴσος τῷ β. καὶ ἐπεὶ ἴσῃ ὑπεροχῇ ὑπερέχει ὁ, ὁ β, τοῦ α, καὶ ὁ γ, τοῦ β, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, δῆλον, ὅτι ὁ β, τῇ αὐτῇ ὑπεροχῇ ὑπερέχει μὲν τοῦ α, ὑπερέχεται δὲ ὑπὸ τοῦ γ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν γ. Ἐὰν δὲ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς ὦσιν ἀνάλογον, ὁ ἐκ τῶν ἄκρων γενόμενος ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν μέσων κατὰ τὴν ἀνωτέρω, δῆλον, ὅτι ὁ ἐκ τῶν α, καὶ γ, ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν β, καὶ δ, ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν β, καὶ δ, διπλάσιός ἐστι τοῦ β, ἄρα καὶ ὁ ἐκ τῶν α, καὶ γ, ἄκρων διπλάσιός ἐστι τοῦ β, μέσου. ἐὰν ἄρα τρεῖς ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐκ τῶν ἄκρων γενόμενος διπλάσιός ἐστι τοῦ μέσου.

α	β	δ	γ
4	6	6	8

Πρότασις Γ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς ἀνάλογον, ἡ τοῦ ἐσχάτου παρὰ τὸν πρῶτον διαφορὰ πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου παρὰ τὸν α· τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὰ διαστήματα πάντα πρὸς ἓν κατὰ Γεωμετρικὴν ἀναλογίαν.

Ἔστωσαν ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς ἀνάλογον οἱ α β γ δ ε ζ η λέγω τὴν τοῦ η, ἐσχάτου ἀριθμοῦ παρὰ τὸν α, πρῶτον διαφορὰν τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου διαφορὰν παρὰ τὸν α, πρῶτον, ὃν καὶ τὰ μεταξὺ αὐτῶν διαστήματα πρὸς ἓν κατὰ γεωμετρικὴν ἀναλογίαν. Ἔστω γὰρ διαφορὰ τοῦ β, πρὸς τὸν α, ὁ θ. καὶ ἐπεὶ ἡ αὐτὴ διαφορά ἐστι καὶ τοῦ γ, πρὸς τὸν β, καὶ τοῦ δ, πρὸς τὸν γ, καὶ τοῦ ε, πρὸς τὸν δ, καὶ τοῦ ζ, πρὸς τὸν ε, καὶ τοῦ

α.	2.		θ. 2.
β.	4.		
γ.	6.		
δ.	8.		
ε.	10.		
ζ.	12.		
η.	14.		κ. 12
λ.	6.	μ. 1.	κ. 12.

, πρὸς

η, πρὸς τὸν ζ, πάντως γε ὁσάκις ἂν πολλαπλασιασθῇ τὸ μεταξὺ τοῦ β': καὶ α: διάστημα, τοσάκις πολλαπλασιασθήσεται καὶ ἡ τοῦ β': πρὸς τὸν α: διαφορά. ὥστε ὁ ἀριθμὸς τῶν διαστημάτων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, καὶ ἡ τοῦ η, ἐσχάτου ἀριθμοῦ διαφορὰ πρὸς τὸν α: ἰσάκις εἰσὶ πολλαπλάσια τοῦ μεταξὺ τοῦ β': καὶ α: ἀριθμοῦ διαστήματος, καὶ τῆς θ, τοῦ β: πρὸς τὸν α: διαφορᾶς. τὰ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια ἐν τῷ αὐτῷ εἰσὶ λόγῳ γεωμετρικῶς πρὸς τὰ ὧν εἰσιν ἰσάκις πολλαπλάσια. ἄρα ὁ ἀριθμὸς τῶν διαστημάτων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὸ μεταξὺ τοῦ β': καὶ α: διάστημα κατὰ γεωμετρικὴν ἀναλογίαν, ὃν καὶ ἡ τοῦ η, ἐσχάτου ἀριθμοῦ διαφορὰ πρὸς τὸν α, πρῶτον.

Πρότασις Δ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς ἑξῆς ἀνάλογον, ἡ τοῦ ἐσχάτου πρὸς τὸν α· διαφορὰ μεριζομένη ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν διαστημάτων παρέξει τὴν τῶν μειζόνων πρὸς τοὺς ἐλάττονας διαφοράν.

Ἔστωσαν οἱ αὐτοὶ ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς ἑξῆς ὄντες ἀνάλογον. Λέγω τὴν τοῦ ἐσχάτου η, διαφορὰν παρὰ τὸν α, πρῶτον μεριζομένην ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν διαστημάτων τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν παρέξειν τὴν διαφορὰν καθ' ἣν ὑπερέχει ὅ, τε β, τοῦ α, καὶ ὁ γ, τοῦ β, καὶ τῶν λοιπῶν ἕκαστος τῶν πρὸ αὐτοῦ. Ἀφῃρήσθω γὰρ ὁ α, τοῦ η, καὶ ἐναπολειφθήτω διαφορά, εἴτ' οὖν ὑπεροχὴ τοῦ η, πρὸς τὸν α, ὁ κ. ἔστω δὴ καὶ ἀριθμὸς τῶν διαστημάτων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ὁ λ. καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἡ τοῦ η, πρὸς τὸν α, διαφορὰ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον γεωμετρικῶς πρὸς τὴν τοῦ β, παρὰ τὸν α, διαφοράν, ὃν ὁ ἀριθμὸς τῶν διαστημάτων πρὸς ἓν διάστημα· ἔσται πάντως ὡς ὁ ἀριθμὸς τῶν διαστημάτων ἤτοι ὁ λ, πρὸς ἓν διάστημα, ἤτοι τὸ μ, ἡ τοῦ η, πρὸς τὸν α, διαφορά, δηλ: ὁ κ, ἀριθμὸς πρὸς τὴν τοῦ β, παρὰ τὸν α, διαφοράν. ὥστε πολλαπλασιαζομένου τοῦ κ, ἐπὶ τὸν μ, κατὰ τὸν κανόνα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, καὶ τοῦ γενομένου ἐπὶ τὸν λ, μεριζομένου, δοθήσεται ὁ δ': ἡ τοῦ β, δηλ: πρὸς τὸν α, διαφορά. Ἐπεὶ δὲ ὁ κ, ἐπὶ τὸν μ, πολλαπλασιαζόμενος ὁ αὐτὸς διαμένει, διά τοι τοῦτο ἐὰν ὁ κ, ἤτοι ἡ τοῦ η, πρὸς τὸν α, διαφορὰ ἐπὶ τὸν λ, ἀριθμὸν τῶν διαστημάτων μερισθῇ μόνον, δοθήσεται ἡ τοῦ β, πρὸς τὸν α, διαφορά. ἡ αὐτὴ δὲ διαφορά ἐστι καὶ τῶν λοιπῶν διαφορά. ἄρα ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Ε′:

Ἐὰν μὲν τέσσαρες ἀριθμοὶ γεωμετρικῶς ἀνάλογον ὦσιν, οἱ τῶν λογαρίθμων αὐτῶν ἄκροι ἀλλήλοις συναπτόμενοι ἴσοι εἰσὶ τοῖς μέσοις ἀλλήλοις καὶ αὐτοῖς συναπτομένοις. ἐὰν δὲ τρεῖς διπλάσιοι τοῦ μέσου.

Ἔστωσαν δὴ οἱ α β γ δ, ἀριθμοὶ γεωμετρικῶς ἀνάλογον, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ. Λογάριθμοι δὲ αὐτῶν ἔστωσαν οἱ ε ζ η θ. Λέγω ὅτι οἱ ε, καὶ θ, ἀλλήλοις συναπτόμενοι ἴσοι εἰσὶ τοῖς ζ η, ἀλλήλοις συναπτομένοις. ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα οἱ ε ζ η θ, ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς εἰσιν ἀνάλογον, τῶν δὲ οὕτως ἐχόντων, ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ὦσιν, ὁ ἐκ τῶν ἄκρων ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν μέσων κατὰ τὴν α: τοῦ παρόντος, ἄρα ὁ ἐκ τῶν ε, καὶ θ, ἄκρων ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν ζ, καὶ η, ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν ε, καὶ θ, ὥσπερ καὶ ὁ ἐκ τῶν ζ, καὶ η, γίνεται, συναπτομένων ἀλλήλοις τῶν αὐτῶν. ἄρα συναπτόμενοι ἀλλήλοις οἱ ε, καὶ θ, ἴσοι εἰσὶ τοῖς ζ, καὶ η, συναπτομένοις καὶ αὐτοῖς ἀλλήλοις. Ὁμοίως δειχθήσεται καὶ τὸ β′: δοθέντων γὰρ τῶν α β γ, ἐπεὶ οἱ ε ζ η, ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς εἰσιν ἀνάλογον, δῆλον ὅτι οἱ ε, καὶ η, ἀλλήλοις συναπτόμενοι διπλάσιοί εἰσι τοῦ ζ. ἐὰν ἄρα τέσσαρες ἀριθμοὶ, καὶ τὰ ἑξῆς.

α,	4,	ε,	4,
β,	6,	ζ,	5,
γ,	8,	η,	6,
δ,	12,	θ,	7,

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τριῶν μὲν δοθέντων λογαρίθμων, εὑρεθήσεται καὶ ὁ δ′: ἀφαιρουμένου τοῦ α′: ἀπὸ τοῦ γινομένου ἐκ τοῦ β′: καὶ γ′: ἀλλήλοις συναπτομένων. δύο δὲ ὁμοίως δοθέντων, εὑρεθήσεται ὁ γ′: ἐὰν ὁ β′: διπλασιασθῇ, καὶ τοῦ γινομένου ἀφαιρεθῇ ὁ α′:

Πρότασις ϛ′:

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀλλήλους πολλαπλασιάζοντες ποιῶσί τινα, οἱ τούτων λογάριθμοι ἴσοι εἰσὶ τῷ λογαρίθμῳ τοῦ τε ὑπ' αὐτῶν γενομένου καὶ τῷ τῆς μονάδος, ἐὰν ἐν τῇ μονάδι πρόσκηται ἀριθμὸς, ἀντὶ λογαρίθμου λαμβανόμενος.

Ἔστωσαν δὴ οἱ α β, ἀριθμοὶ, καὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιείτωσαν τὸν γ. ἔστωσαν δὴ καὶ λογάριθμοι τῶν α, καὶ β, οἱ ε, καὶ ζ, ἀπὸ τῆς δ, μονάδος ἀρχόμενοι, καὶ ἴσῃ ἀλλήλους ὑπεροχῇ ὑπερέχοντες. λέγω ὅτι οἱ ε, καὶ ζ, λογάριθμοι ἴσοι εἰσὶ τῷ τε τοῦ γ, λογαρίθμῳ καὶ τῷ τῆς μονάδος. κατὰ γὰρ τὸν τῆς πολλαπλασιάσεως κανόνα. ἐπεὶ ὁ α, πολλαπλασιάσας τὸν β,

δ.	α.	β.	γ.
1.	4.	6.	24.
1.	2.	3.	4.
θ.	ε.	ζ.	η.

πε-

πεποίηκε τὸν γ, ἔστιν ὡς ἡ δ, μονὰς πρὸς τὸν α, πολλαπλασιάσαντα, ὁ β, πολλαπλασιασθεὶς πρὸς τὸν γ, ἐξαχθέντα· ὥστε τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ δ α β γ, Γεωμετρικῶς εἰσιν ἀνάλογον, ἔχοντες λογαρίθμους τοὺς θ ε ζ η, ἄρα κατὰ τὴν ἀνωτέρω οἱ θ καὶ η, ἄκροι ἀλλήλοις συναπτόμενοι ἴσοι εἰσὶ τοῖς ε καὶ ζ, μέσοις ἀλλήλοις συναπτομένοις. ἀλλ' οἱ ε καὶ ζ, λογάριθμοί εἰσι τῶν α καὶ β, ἀλλήλους πολλαπλασιασάντων ἀριθμῶν, ὁ δὲ η, τοῦ ὑπ' αὐτῶν γενομένου, καὶ ὁ θ, τῆς μονάδος. ἐὰν ἄρα δύο ἀριθμοὶ ἀλλήλους, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ὅταν δὲ τῇ μονάδι πρόσκειται τζίφρα ἀντὶ λογαρίθμου, οἱ τῶν πολλαπλασιαζόντων λογάριθμοι εἰσὶν ἴσοι τῷ ὑπ' αὐτῶν γινομένῳ. Ὑποκείσθω γὰρ τῇ δ, μονάδι τζίφρα, τοῖς δὲ α καὶ β, ἀριθμοῖς οἱ κ καὶ λ. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ δ, μονὰς πρὸς τὸν α, ἔστι καὶ ὁ β, πρὸς τὸν γ, δῆλον ὅτι κατὰ τὰ εἰρημένα ὁ τοῦ γ, λογάριθμος μετὰ τοῦ τῆς μονάδος λογαρίθμου ἴσος ἐστὶ τοῖς κ καὶ λ, λογαρίθμοις τῶν α καὶ β, πολλαπλασιαζόντων ἀλλήλους ἀριθμῶν. ἀλλ' ἡ τζίφρα οὐδέν τι προστίθησιν, ἄρα οἱ κ καὶ λ, ἀλλήλοις συναπτόμενοι ἴσοι εἰσὶ τῷ μ, τῷ τοῦ ὑπ' αὐτῶν γινομένου λογαρίθμῳ.

δ.	α.	β.	γ.
1.	4.	6.	24.
0.	1.	2.	3.
	κ.	λ.	μ.

Πρότασις Ζ΄.

Παντὸς ἀριθμοῦ ὁ λογάριθμος διπλασιαζόμενος, ἐὰν ἀπὸ τοῦ γενομένου ὁ τῆς μονάδος ἀφαιρεθῇ λογάριθμος, ἴσος ἐστὶ τῷ λογαρίθμῳ τοῦ ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνου.

Ἔστω τυχὼν ἀριθμὸς ὁ α, οὗ λογάριθμος ὁ β, καὶ ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαζόμενος ποιείτω τὸν γ· Λέγω ὅτι ὁ β, διπλασιαζόμενος, ἐὰν ἀπὸ τοῦ γενομένου ἀφαιρεθῇ ὁ τῆς μονάδος λογάριθμος, ἴσος ἐστὶ τῷ τοῦ γ, λογαρίθμῳ. Εἰλήφθω γὰρ ὁ δ, ἴσος τῷ α, καὶ ἔστω τῆς ε, μονάδος λογάριθμος ὁ ζ. καὶ ἐπεὶ ὁ α, τὸν δ, πολλαπλασιάσας, τὸν γ, πεποίηκεν, ἄρα κατὰ τὴν ἀνωτέρω οἱ τῶν α καὶ δ, λογάριθμοι ἀλλήλοις συναπτόμενοι ἴσοι εἰσὶ τῷ τε τοῦ γ, λογαρίθμῳ καὶ τῷ τῆς μονάδος. ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν λογαρίθμων τοῦ α καὶ δ, γινόμενος διπλάσιός ἐστι τοῦ λογαρίθμου τοῦ α. ἄρα διπλασιαζόμενος ὁ λογάριθμος τοῦ α, ἴσος ἐστὶ τῷ τε τοῦ γ, λογαρίθμῳ καὶ τῷ τῆς μονάδος. ἔχοντες οὖν ἐγνωσμένον τὸν λογάριθμον τοῦ α, καὶ τοῦτον διπλασιάζοντες, ἐὰν ἀφέλωμεν ἀπὸ τοῦ γενομένου τὸν τῆς μονάδος λογάριθμον

ε.	α.	δ.	γ.
1.	4.	4.	16.
ζ.	β.	β.	
1.	2.	2.	3.

ριθμον δεδομένον καὶ αὐτὸν, εὑρήσομεν τὸν λογάριθμον τοῦ γ. παντὸς ἄρα ἀριθμοῦ ὁ λογάριθμος διπλασιαζόμενος καὶ τὰ ἑξῆς.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι δοθέντος τοῦ λογαρίθμου τοῦ τετραγώνου, ἐὰν μὲν καὶ τῇ μονάδι πρόσκηται ἀριθμὸς ἀντὶ λογαρίθμου, προστιθεμένου τοῦ τῆς μονάδος λογαρίθμου τῷ τοῦ τετραγώνου λογαρίθμῳ, ὁ γινόμενος διπλάσιός ἐστι τοῦ τῆς ῥίζης λογαρίθμου, ὥστε εἰς δύο ἐκείνου διῃρημένου, γινώσκεται ὁ τῆς ῥίζης λογάριθμος. ἐὰν δὲ τῇ μονάδι πρόσκηται τζίφρα, ὁ τοῦ τετραγώνου λογάριθμος μόνος διπλάσιός ἐστι τοῦ τῆς ῥίζης. διὸ δεῖ ἐκεῖνον δίχα διαιρεῖν, καὶ γνωσθήσεται ὁ τῆς ῥίζης λογάριθμος.

Πρότασις Η':

Ὁ τῆς ῥίζης λογάριθμος τριπλασιαζόμενος ἴσος ἐστὶ τῷ τοῦ κύβου λογαρίθμῳ, καὶ τῷ διπλασίῳ ἀριθμῷ τοῦ τῆς μονάδος λογαρίθμου.

θ.	α.	γ.	δ.
1.	4.	16.	64.
η.	β.	ε.	ζ.
1.	2.	3.	4

Ἔστω δὴ ἀριθμὸς ὁ α, οὗ λογάριθμος ὁ β, καὶ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας, ποιείτω τὸν γ, τετράγωνον, οὗ λογάριθμος ὁ ε. τὸν γ, δὲ πολλαπλασιάσας ποιείτω τὸν δ, κύβον. Λέγω τὸν β, λογάρ: τοῦ α, ἀριθμοῦ, ῥίζαν ὄντα τοῦ γ, τριπλασιαζόμενον ἴσον εἶναι τῷ τοῦ δ, λογαρίθμῳ μετὰ τοῦ διπλασίου ἀριθμοῦ τοῦ τῆς μονάδος λογαρίθμου. Ἔστω γὰρ μονὰς ἡ θ, καὶ ταύτης λογάριθμος ὁ η. καὶ ἐπεὶ ὁ α, τὸν γ, πολλαπλασιάσας πεποίηκε τὸν δ, πάντως γε κατὰ τὴν ϛ': τοῦ παρόντος οἱ β καὶ ε, ἴσοι εἰσὶ συναμφότεροι συναμφοτέροις τοῖς η καὶ ζ. κοινοῦ δὲ λαμβανομένου τοῦ η, οἱ η, β, ε, ὁμοῦ ἴσοι εἰσὶ τῷ ζ, μετὰ τοῦ η, δὶς λαμβανομένου, ἀλλ' οἱ ε καὶ η, διπλάσιοί εἰσι τοῦ β, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, οἱ τρεῖς δὲ η β ε, τριπλάσιοι τοῦ αὐτοῦ. ἄρα τοῦ β, τριπλασιαζομένου, ὁ γινόμενος ἴσος ἔσται τῷ ζ, μετὰ τοῦ η, δὶς λαμβανομένου. ἔστι δὲ ὁ μὲν β, ὁ τῆς ῥίζης λογάριθμος, ὁ δὲ ζ, ὁ τοῦ κύβου, καὶ ὁ η, ὁ τῆς μονάδος. ὁ τῆς ῥίζης ἄρα λογάριθμος τριπλασιαζόμενος ἴσος ἐστὶ τῷ τοῦ κύβου καὶ τὰ ἑξῆς.

Π Ο' Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἔνθα τῇ μονάδι τζίφρα κεῖται ἀντὶ λογαρίθμου, δοθέντος τοῦ λογαρίθμου τοῦ κύβου, καὶ εἰς τρία διῃρημένου, γινώσκεται ὁ τῆς ῥίζης

λο-

λογάριθ: καὶ ἀνάπαλιν, δοθέντος τοῦ λογαρίθμου τῆς ῥίζης, καὶ τούτου τριπλασιαζομένου, γινώσκεται ὁ τοῦ κύβου λογάριθμος.

Πρότασις Θ:

Ἐὰν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀλλήλους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινα, οἱ τῶν πολλαπλασιαζόντων λογάριθμοι ὁμοῦ λαμβανόμενοι ἴσοι εἰσὶ τῷ τοῦ ἐσχάτου ἐξ αὐτῶν ἐξαγομένου.

Ἔστωσαν ἀριθμοὶ οἱ α β γ δ, καὶ ἀλλήλους πολλαπλασιάσαντες ποιείτωσαν τὸν ε. Λέγω τὸν τοῦ ε, λογάριθμον ἴσον εἶναι τοῖς λογαρίθμοις τῶν α β γ δ, ἀριθμῶν ὁμοῦ εἰλημμένοις. ἐπεὶ γὰρ ὁ α, τὸν β, πολλαπλασιάσας πεποίηκε τὸν ζ, οἱ τοῦ α, καὶ β, λογάριθμοι ἴσοι εἰσὶ τῷ τοῦ ζ, κατὰ τὴν ϛʹ: τοῦ παρόντος. ἐὰν δὲ ὁ γ, τὸν ζ, πολλαπλασιάσῃ, ποιήσει πάντως τὸν η, καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν ὁ τοῦ η, λογάριθμος ἴσος ἐστὶ τοῖς λογαρίθμοις τῶν γ καὶ ζ. ἀλλ' ὁ τοῦ ζ, ἴσος δέδεικται τοῖς λογαρίθμοις τῶν α καὶ β, ὁ τοῦ η, ἄρα λογάριθμος ἴσος ἐστὶ τοῖς τῶν α β γ, λογαρίθμοις. ὁμοίως πάλιν, ἐὰν ὁ δ, τὸν η, πολλαπλασιάσῃ, ποιήσει πάντως τὸν ε, ὥστε κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ϛʹ: ὁ τοῦ ε, λογάριθμος ἴσος ἐστὶ τοῖς τοῦ η καὶ δ, λογαρίθμοις. ἀλλ' ὁ τοῦ η, λογάριθμος ἴσος δέδεικται τοῖς τῶν α β γ, λογαρίθμοις. ἄρα ὁ τοῦ ε, λογάριθμος ἴσος ἐστὶ τοῖς τῶν α β γ δ, λογαρίθμοις. Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται κἂν πλείονες ὦσιν οἱ ἀριθμοὶ τὸν τοῦ ἐσχάτου λογάριθμον ἴσον εἶναι τοῖς τῶν δοθέντων ἀριθμῶν λογαρίθμοις. ἐὰν ἄρα ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀλλήλους, καὶ τὰ ἑξῆς.

α.	β.	γ.	δ.	ε.
2.	4.	5.	8.	320.

α.	β.	ζ.
2.	4.	8.

γ.	ζ.	η.
5.	8.	40.

δ.	η.	ε.
8.	40.	320.

Πρότασις Ι:

Ἐὰν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ γεωμετρικῶς ἀνάλογον ὦσιν ἀπὸ μονάδος ἀρχόμενοι, δοθέντος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἐσχάτου ἀριθμοῦ, εὑρεθήσεται ὁ λογάριθμος τοῦ αʹ: μετὰ τὴν μονάδα, τῶν λογαρίθμων ἀπὸ τῆς μονάδος ἀρχομένων.

Τῶν α β γ δ ε ζ η, ἀριθμῶν ἐν γεωμετρικῇ ὄντων ἀναλογίᾳ δοθήτω ὁ τοῦ η, ἐσχάτου λογάριθμος, καὶ ζητείσθω ὁ τοῦ α, αʹ: μετὰ τὴν μονάδα. Μεριζέσθω δὴ ὁ τοῦ η, λογάριθ: ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν διαστημάτων, καὶ τὸ πηλίκον ἔσται ὁ ζητούμενος. ἐπεὶ γὰρ ἐνταῦθα οἱ λογάριθμοι ἄρχονται ἀπὸ τοῦ

β, τζι.

β, τζίφρας τῇ μονάδι προσκειμένης, δῆλον, ὅτι ὅσα εἰσὶ τὰ διαστήματα τὰ μεταξὺ μονάδος α καὶ η, ἀριθμοῦ, τοσοῦτοί εἰσι τῷ πλήθει καὶ οἱ λογάριθμοι, ὁ δὲ τῷ α: μετὰ τὴν μονάδα κείμενος ἀριθμὸς διαφοράς ἐστι, καθ᾽ ἣν ἀλλήλων οἱ λογάριθμοι ὑπερέχουσιν ἢ ὑπερέχονται ἐν παντὶ εἴδει ὑπεροχῆς καὶ ἐλλείψεως, ἄρα κἀνταῦθα ὁ τοῦ β, λογάριθμος διαφοράς ἐστι τῶν λογαρίθμων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, καὶ ὁ τοῦ η, λογαρ: ἑξαπλάσιός ἐστι τοῦ λογαρίθμου τοῦ β, τοσαῦτα δέ εἰσι καὶ τὰ διαστήματα. ἐὰν ἄρα ὁ τοῦ η, λογάριθμος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν διαστημάτων μεριθῇ, ἐδοθήσεται ὁ τοῦ β, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

α.	1.	0
β.	2.	3
γ.	4.	
δ.	8.	
ε.	16.	
ζ.	32.	
η.	64.	18.

Πρότασις ΙΑ΄.

Ἀριθμῶν ὁποσωνοῦν ἐφεξῆς γεωμετρικῶς ἀνάλογον κειμένων, τῶν τοῦ α: καὶ β΄: λογαρίθμων δοθέντων, τοὺς τῶν λοιπῶν εὑρεῖν λογαρίθμους.

Ἔστωσαν ἐφεξῆς γεωμετρικῶς ἀνάλογον οἱ α β γ δ ε ζ η, ἀριθμοί, καὶ τῶν τοῦ α καὶ β, λογαρίθμων δοθέντων, ζητηθήτωσαν οἱ τῶν λοιπῶν λογάριθμοι. Ἀφαιρεθήτω δὴ ὁ ἐλάττων ἀπὸ τοῦ μείζονος, καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς ἐὰν μὲν ἐπὶ τὸ μεῖζον χωρῶσιν οἱ ἀριθμοί, προστεθήτω τῷ μείζονι, ἐὰν δὲ ἐπὶ τὸ ἔλαττον, ἀφελε αὐτὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος, καὶ ἕξεις τοὺς ζητουμένους. οἱ γὰρ λογάριθμοι ἴσῃ ἀλλήλους ὑπερέχουσιν ὑπεροχῇ, ἢ ἀλλήλοις ὑπερέχονται. δοθέντων ἄρα τῶν τοῦ α: καὶ β΄: λογαρίθμων, καὶ τοῦ ἐλάττονος ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρουμένου, γνώσκεται ἡ τῶν λογαρίθμων διαφορά. ὑγιῶς ἄρα εἴρηται προστίθεσθαι μὲν τῷ μείζονι, ἐπὶ τὸ μεῖζον προβαινόντων τῶν ἀριθμῶν, ἀφαιρεῖσθαι δὲ ταύτην ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος, ἐπὶ τὸ ἔλαττον ἰόντων. Ἢ καὶ οὕτω, διπλασιασθήτω ὁ β΄: καὶ τοῦ γινομένου, ἀφαιρεθήτω ὁ α:, καὶ εὑρεθήσεται πάντως ὁ γ΄: τούτου δ᾽ αὖθις διπλασιαζομένου, ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ γενομένου ὁ β΄:, καὶ γνωσθήσεται ὁ δ΄: τοῦτο δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς γενέσθω, καὶ εὑρεθήσονται πάντως οἱ λογάριθμοι τῶν λοιπῶν κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ε: τοῦ παρόντος. Ἀριθμῶν ἄρα ὁποσωνοῦν, καὶ τὰ ἑξῆς.

α.	2.	2.
β.	4.	4.
γ.	8.	6.
δ.	16.	8.
ε.	32.	10.
ζ.	64.	12.
η.	128.	14.

Πρότασις ΙΒ΄.

Ἀριθμῶν ὁποσωνοῦν ἐφεξῆς γεωμετρικῶς ἀνάλογον κειμένων, τῶν τοῦ α΄. καὶ ἐσχάτου λογαρίθμων δοθέντων, τοὺς τῶν ἐν μέσῳ λογαρίθμους εὑρεῖν.

Ἔστωσαν ἐφεξῆς ἀνάλογον γεωμετρικῶς οἱ α β γ δ ε ζ η, ἀριθμοί, καὶ τῶν τοῦ α, πρώτου, καὶ η, ἐσχάτου δοθέντων λογαρίθμων, ζητηθήτωσαν οἱ τῶν ἐν μέσῳ λογάριθμοι. Ἀφαιρεθήτω δὴ ὁ ἐλάττων ἀπὸ τοῦ μείζονος, καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς μερισθήτω ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν διαστημάτων, καὶ τὸ πηλίκον προστεθήτω τῷ ἐλάττονι, ἢ ἀφαιρεθήτω τοῦ μείζονος, καὶ τοῦτο γινέσθω κἂν τοῖς ἑξῆς, καὶ εὑρεθήσονται οἱ ζητούμενοι λογάριθμοι. Ἴσῃ γὰρ ἀλλήλων, ὡς εἴρηται, οἱ λογάριθμοι ὑπεροχῇ ὑπερέχουσιν. ὥστε ἐκτὸς τοῦ α΄. ὅσα εἰσὶ τὰ διαστήματα, τοσαῦταί εἰσι καὶ αἱ διαφοραί. Διὸ δεῖ τὸν ἐλάττω τοῦ μείζονος ἀφελεῖν, ἵνα τὸ ἐκ πασῶν τῶν διαφορῶν ἐναπολειφθῇ. τούτου δὲ μεριζομένου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν διαστημάτων, γινώσκεται ἡ ἑκάστου διαφορά, ἥτις προστιθεμένη τῷ ἐλάττονι παρέχει τὸν μετ᾽ αὐτόν. τούτῳ δ᾽ αὖθις προστιθεμένη, δίδωσι τὸν μετ᾽ ἐκεῖνον, καὶ οὕτως εὑρεθήσονται πάντες οἱ μεταξύ. τὸ αὐτὸ γενήσεται, κἂν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἡ διαφορὰ ἀφαιρεθῇ, καὶ τοῦτο γένηται καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν. ἀριθμῶν ἄρα ὁποσωνοῦν ἐφεξῆς γεωμετρικῶς ἀνάλογον κειμένων, καὶ τὰ ἑξῆς.

α.	2.	3.
β.	6.	6.
γ	18.	9.
δ.	51.	12.
ε.	162.	15.
ζ.	186.	18.
η.	1158.	21.

Πρότασις ΙΓ΄.

Τοῦ τῆς δεκάδος λογαρίθμου δοθέντος, πάντων τῶν λοιπῶν τῶν κατὰ τὸν δεκαδικὸν λόγον προβαινόντων τοὺς λογαρίθμους εὑρεῖν.

Κείσθω λογάριθμος μονάδος μὲν 0, δεκάδος δὲ 10000000, καὶ ζητηθήτωσαν οἱ λογάριθμοι τῶν ἐπὶ τὸ μεῖζον κατὰ τὸν δεκαδικὸν χωρούντων λόγον ἀριθμῶν, φέρ᾽ εἰπεῖν τοῦ 10, 100, 1000, καὶ λοιπῶν. διπλασιασθήτω ὁ λογάριθμος τοῦ 10, δηλ: ὁ 10000000. τριπλασιασθήτω, τετραπλασιασθήτω, πενταπλασιασθήτω, καὶ ἐνὶ λόγῳ αὐξηθήτω κατὰ τὴν ἐπακολούθησιν τῶν τοῦ πολλαπλασίου εἰδῶν, καὶ εὑρεθήσονται οἱ ζητούμενοι λογάριθμοι τῶν κατὰ τὸν δεκαδικὸν προϊόντων λόγον ἀριθμῶν, ὡς ὁρᾷς ἐπὶ

0—	000000.00
10—	100000.00
100—	200000.00
1000—	300000.00
10000—	100000.00
100000 —	500000.00
1000000 —	600000.00
10000000—	700000.00
100000000—	800000.00
1000000000—	900000.00

τοῦ

τοῦ ἐπ' ὄψιν ὑποδείγματος. καὶ γὰρ τὸ πόρισμα τῆς ζ': τοῦ παρόντος, ὁ τοῦ δέκα λογάριθμος διπλασιαζόμενος ἴσος ἐστὶ τῷ τοῦ 100 λογαρίθμῳ, τριπλασιαζόμενος δὲ, ἴσος γίνεται τῷ τοῦ 1000 καὶ τὴν ἑξ: τοῦ αὐτοῦ. ὁ μὲν γὰρ 100 τετράγωνός ἐστιν, ὁ δὲ 1000 κύβος, ὧν ῥίζα ὁ 10. Ἐπεὶ δὲ καὶ οἱ λοιποὶ καὶ τὸν αὐτὸν χωροῦσι λόγον, οἱ δὲ λογάριθμοι τῶν καὶ τὸν αὐτὸν προβαινόντων λόγον ἴσῃ ἀλλήλων ὑπερέχουσιν ὑπεροχῇ· ἄρα ὁ τοῦ 10000 λογάρ: τετραπλάσιός ἐστι τοῦ τῆς δεκάδος, ὁ δὲ τοῦ 100000 πενταπλάσιος, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁμοίως. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον εὑρεθήσονται καὶ τῶν κατά τινα ἄλλον χωρούντων λόγον ἀριθμῶν, τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἐν αὐτοῖς α: δοθέντος.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι τῶν μέσον μονάδος καὶ δεκάδος ἀριθμῶν, ἤτοι τῶν μοναδικῷ παρισαμένων χαρακτῆρι, οἱ λογάριθμοι ἄρχονται ἀριστερόθεν ἀπὸ τῆς 0, οἱ δὲ δυσὶ σημειούμενοι, καὶ μέσον ὄντες δεκάδος τε καὶ ἑκατοντάδος, ἀπὸ τοῦ 1. οἱ δὲ τρισὶν, ἀπὸ τοῦ 2. οἱ δὲ τέτταρσιν, ἀπὸ τοῦ 3. καὶ ἀεὶ ὁ α: χαρακτὴρ τῶν λογαρίθμων καὶ τὰ ἀριστερὰ μονάδι ἐλλείπει τοῦ ἀριθμοῦ τῶν χαρακτήρων, ἐξ ὧν συνίσταται ὁ ἀριθμὸς, οὗ ἐστι λογάριθμος.

Πρότασις ΙΔ':

Μεταξὺ μονάδος καὶ τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ μέσον ἀνάλογον εὑρεῖν.

Ζητείσθω δὴ ὁ μέσος ἀνάλογος μονάδος τε καὶ δεκάδος. εὑρεθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα τῆς δεκάδος, καὶ αὕτη ἔσται ὁ ζητούμενος. Ἐπεὶ γὰρ ἡ τετράγωνος ῥίζα παντὸς ἀριθμοῦ ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιαζομένη ποιεῖ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. ἄρα κατὰ τοὺς τῆς πολλαπλασιάσεως κανόνας ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὴν τετράγωνον ῥίζαν παντὸς ἀριθμοῦ, οὕτω καὶ ἡ ῥίζα πρὸς τὸν αὐτόν. εὑρεθήτω οὖν ἡ τετράγωνος ῥίζα τοῦ 10, καὶ ἔστω ὁ 3 μετὰ τοῦ $\frac{1}{3}$: ἐπεὶ τοίνυν ἐστὶν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν $3\frac{1}{3}$: οὕτως ὁ $3\frac{1}{3}$: πρὸς τὸν 10, ἄρα ὁ 3 μετὰ τοῦ $\frac{1}{3}$: μέσος ἀνάλογός ἐστι μονάδος τε καὶ τοῦ 10: Τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρεθήσεται ὁ μέσος ἀνάλογος μεταξὺ μονάδος καὶ παντὸς ἄλλου ἀριθμοῦ. Δεῖ δὲ μέντοι γε, ἵνα ἀκριβεστέρα γένηται ἡ πρᾶξις τῇ τε μονάδι καὶ τῷ διδομένῳ ἀριθμῷ πολλὰς προσλαμβάνεσθαι τζίφρας. ὅσῳ δ' αὖ πλείους ὦσι, τοσούτῳ καὶ ἡ πρᾶξις ἀκριβεστέρα ἔσται. εἶτα πολλαπλασιάζεσθαι ἀλλήλοις, καὶ τοῦ γενομένου τὴν τετράγωνον ἐξάγεσθαι ῥίζαν.

1	$\mid 3.\frac{1}{3}$
,10	
,3	

Ἔστω ἀντὶ μονάδος μὲν ὁ 10000000., ἀντὶ δεκάδος δὲ ὁ 100000000:, καὶ πολλαπλασιασθήτωσαν πρὸς ἀλλήλους, καὶ τοῦ γενομένου 1000000000000000

ἐξαχ-

ἐξαχθήτω ἡ τετραγώνος ῥίζα, καὶ ἔςαι αὕτη ὁ 31622776. Ἐὰν δὲ ζητηθῇ καὶ ὁ μεταξὺ μονάδος καὶ τοῦ 31622776 μέσος ἀνάλογος, πολλαπλασιαθήτω ὁ 31622776 ἐπὶ τὸν 10000000, καὶ τοῦ γινομένου 316227.760000000 εὑρεθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα, κἀκείνη ἔςαι ὁ ζητούμενος. τούτων γινομένων καὶ ἐπὶ παντὸς ἄλλου ἀριθμοῦ, εὑρεθήσεται ὁ μέσος ἀνάλογος αὐτοῦ τε καὶ τῆς μονάδος ἐγγύτερον τῇ ἀληθείᾳ.

,3
0,5,8
0,4,1,9
0,4,6,2,7,0,5
0,4,5,8,3,0,3,8
0,1,5,7,0,4,4,5,2,3
0,1,2,7,9,1,7,5,9,3,4
0,3,4,4,8,5,2,1,8,7,6,7,8,2
,0,1,4,9,8,4,6,6,2,6,2,1,2,1,6,4
,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0 | 31622776

Πρότασις ΙΕ'.

Τῶν ἡμιτόνων ἑκάςου τόξου δοθέντων τοὺς λογαρίθμους αὐτῶν εὑρεῖν καὶ τὰ κανόνια αὐτῶν κατασκευάσαι.

,3
,6,1
,6,2,6
,6,3,2,2
,6,3,2,4,1
,6,3,2,4,4,7
,6,3,2,4,5,4,7
,6,3,2,4,5,5,4,6:

Δοθήτωσαν τὰ ἡμίτονα ἑκάςου τόξου, ἢ γοῦν εὑρεθήτωσαν κατά τινα τῶν προειρημένων τρόπων, καὶ ζητηθήτωσαν οἱ αὐτῶν λογάριθμοι. Κείσθω οὖν τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου λογάριθμος οἱ 100000.00. εἶτα γενέσθω ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον πρώτως αὐτοῦ ἔλαττον, οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦτο πρὸς ἄλλο τι. καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν προεκτεθεῖσαν ἑρμηνείαν τῆς τῶν ἡμιτόνων εὑρέσεως, καὶ τῆς τῶν κανονίων κατασκευῆς πρώτως ἔλαττον τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου ἐςὶ τὸ ἡμίτονον 9999999, γενέσθω ὡς ὁ 10000000 πρὸς τὸν 9999999, οὕτως ὁ 9999999 πρὸς ἄλλον τινά, καὶ εὑρεθήσεται γ': ἑξῆς ἀνάλογος ὁ 9999998. τούτου δ' εὑρεθέντος ζητηθήτω τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ ὁ δ':, καὶ ἔςιν οὗτος ὁ 9999996. τῶν λεπτῶν ἤδη παρεωραμένων. ὡς γὰρ ὁ 9999999 πρὸς τὸν 9999998, ἔχει καὶ ὁ 9999998, πρὸς τὸν 9999996. τῆς πράξεως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς γινομένης, εὑρεθήσεται ε': μὲν ἐν τῷ αὐτῷ τοῖς προτέροις λόγῳ ὁ 9999994., ς': δὲ ὁ 9999992. ζ': δὲ ὁ 9999990. η': δὲ ὁ 9999988. θ': δὲ ὁ 9999985. ι': δὲ ὁ 9999982. Τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρεθήσονται καὶ οἱ λοιποὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων, ὃν καὶ ὁ α': πρὸς τὸν β': καὶ ὁ β': πρὸς τὸν γ': καὶ ὁ γ': πρὸς τὸν δ':, καὶ καθεξῆς ὁμοίως. τούτων δὲ γε εὑρεθέντων, διπλασιαθήτω κατὰ πλάτος ἕκαςον τῶν κανονίων ἡμιτόνων, ἀπτομένων τε καὶ τεμνόντων, ὥςε διῃρημένον εἶναι ἕκαςον τῶν κανονίων τούτων κατὰ πλάτος εἰς ἑπτὰ παραλληλόγραμμα ὀρθογώνια. κατὰ μῆκος δὲ εἰς ὅσα καὶ ἕκαςον τῶν ἡμιτόνων, ἀπτομένων νοντε καὶ τεμνουσῶν κανόνιον διαιρεῖται. καὶ ἐν μὲν τῷ α': παραλληλογράμμῳ ταχθήτωσαν οἱ τῶν τόξων ἀριθμοὶ, ἐν δὲ τῷ β': οἱ τῶν ἡμιτόνων ἑκάστου τόξου εὐτάκτως, ὡς προηρμήνευται, ἐν δὲ τῷ γ': οἱ τῶν ἀπτομένων, καὶ ἐν τῷ δ': οἱ τῶν τεμνουσῶν. τούτων δὲ οὕτω κειμένων ἀρξάμενος ἀπὸ τοῦ α: ὅρου τῶν ἡμιτόνων, θὲς ἐν τῷ α: παραλληλογράμμῳ τοῦ αὐτοῦ κανονίου κατὰ συστοιχίαν τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου τὸν 100000000, λογάριθμον, κατὰ συστοιχίαν δὲ τοῦ β': ὅρου τῶν ἡμιτόνων, ἤτοι τοῦ 9999999 τὸν 99999999. κατὰ συστοιχίαν δὲ τοῦ γ': ἤτοι τοῦ 9999998 τὸν 99999999. κατὰ συστοιχίαν δὲ τοῦ δ': ἤτοι τοῦ 9999996 τὸν 99999998:, καὶ ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς τὰς κατ' ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν εὐτάκτως χωροῦντας ἐπὶ τὸ ἔλαττον μονάδι ἀλλήλων ἐλλείποντας. Ἐπεὶ δὲ ἐν μέσῳ α: τε καὶ β': ὅρου, ὥσπερ καὶ β': καὶ γ':, καὶ γ': καὶ δ':, καὶ τῶν λοιπῶν περιεμπίπτουσι τὰ ἡμίτονα τῶν μεταξὺ τόξων, ἵνα καὶ τοὺς λογαρίθμους τούτων ἐν τοῖς αὐτοῖς ἔχῃς κανονίοις προχείρως, ἀπὸ μὲν τοῦ α: ὅρου τῶν ἡμιτόνων μέχρι τοῦ β': τάττε τὸν αὐτὸν λογάριθμον ἤτοι τὸν 100000000, ἀπὸ δὲ τοῦ β': μέχρι τοῦ γ': τὸν αὐτὸν, ἤτοι τὸν 99999999, ἀπὸ δὲ τοῦ γ': μέχρι τοῦ δ': τὸν αὐτὸν, ἤτοι τὸν 99999998, ἀπὸ δὲ τοῦ δ': μέχρι τοῦ ε: τὸν αὐτὸν, ἤτοι τὸν 999999998: ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων, καὶ ἕξεις κανόνια ἐντελῆ τῶν τε ἡμιτόνων, ἀπτομένων, καὶ τεμνουσῶν ἑκάστου τόξου μετὰ τῶν λογαρίθμων αὐτῶν, ὡς ἐν τοῖς ἑξῆς σαφέστερον δηλωθήσεται.

Ἰστέον δ' ὅτι ἐπεὶ μεταξὺ τῶν ὅρων τῶν ἡμιτόνων ἀπὸ τοῦ ὁλικοῦ ἀρχομένων, πλείονες μεσολαβοῦσιν ἀριθμοὶ συστοιχοῦντες τοῖς λεπτοῖς, καὶ μηδὲν, ἢ μικρόν τι παραλλάττοντες κατὰ τὸν α: χαρακτῆρα, τὸν εἰς χώραν κείμενον μονάδος, διὰ τοῦτο ὁ α: ὅρος τῶν λογαρίθμων ἐφαπλοῦται μέχρι τοῦ ι: στίχου τοῦ συστοιχοῦντος τόξῳ μοιρ: πθ, νη', λ'': τὰ γὰρ μείζω τούτων τόξα μᾶλλον προσεγγίζουσι τῷ τεταρτημορίῳ. διὸ δὴ καὶ οἱ συστοιχοῦντες αὐτοῖς ἀριθμοὶ τῶν ἡμιτόνων, κἂν οἱ αὐτοί εἰσι τῷ β': ὅρῳ τῶν ἡμιτόνων, συμπίπτονται μέντοι τῷ α: διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὁ β': ἐφαπλοῦται μέχρι τοῦ ἑπτακαιδεκάτου στίχου τῶν ἡμιτόνων, τοῦ συστοιχοῦντος τόξῳ μοιρ: πθ, κϛ'. κ'', ὥστε ἐπὶ τῇ τῶν λογαρίθμων καταστρώσει, ἔνθα πλείονές εἰσιν ἀριθμοὶ τοῦ αὐτοῦ ὅρου τῶν ἡμιτόνων, τοὺς πλείονας μὲν δεῖ συντάττειν τῷ προηγουμένῳ, τὸν δ' ἔσχατον τῷ ἑπομένῳ, καὶ οὕτως ἴσμεν μέχρι τίνος ἕκαστος τῶν ὅρων τῶν λογαρίθμων ὀφείλει ἐφαπλοῦσθαι. ὅτι δὲ καὶ ἡ ἔφοδος αὕτη κατὰ λόγον χωρεῖ πρὸς εὕρεσιν τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων ἑκάστου τόξου, δῆλον. οἱ γὰρ λογάριθμοι ἀριθμοί εἰσιν ἀριθμητικῶς, ὡς εἴρηται, ἀνάλογον, τοῖς γεωμετρικῶς ἀνάλογον κειμένοις συστοιχοῦντες. ἀλλὰ μὴν καὶ οἱ τὸν τρόπον τοῦτον εὑρισκόμενοι τοιοῦτοί εἰσιν, ἄρα τῶν ἡμιτόνων δοθέντων, ἑκάστου τόξου εὕρηνται καὶ οἱ τούτων λογάριθμοι.

Πρότασις Ιϛʹ:

Τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων δοθέντων, τοὺς τῶν ἀπτομένων λογαρίθμους εὑρεῖν.

Δοθήτωσαν οἱ τῶν ἡμιτόνων λογάριθμοι, ἢ γοῦν εὑρεθήτωσαν διὰ τῆς ἀνωτέρω, καὶ ζητηθήτωσαν οἱ τῶν ἀπτομένων λογάριθμοι. Λάβε δὴ τὸν λογάριθμον τοῦ παραπληρώματός τινος τόξου ἀντὶ αʹ: ὅρου, ἀντὶ βʹ: δὲ τὸν λογάριθμον τοῦ ἡμιτόνου τοῦ αὐτοῦ τόξου, καὶ ἀντὶ γʹ: ὅρου τὸν λογάριθμον τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου. Εἶτα σύναψον τὸν γʹ: ὅρον τῷ βʹ:, καὶ τοῦ γενομένου ἄφελε τὸν αʹ: καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς ἔσται λογάριθμος τῆς ἀπτομένης τοῦ αὐτοῦ τόξου. οἷον ζητηθήτω ὁ λογάριθμος τῆς ἀπτομένης τόξου ἑξηκ: βʹ: ῑ. ἐπεὶ δὲ τούτου παραπλήρωμά ἐστι τόξον μοιρ: π̄θ, νθʹ, νʺ. τούτου δὲ λογάριθμός ἐστιν ὁ 100000000, θὲς αὐτὸν ἐν βαθμῷ αʹ:, ὑπ' αὐτὸν δὲ κατὰ βάθος ἐν βʹ: βαθμῷ θὲς τὸν λογάριθμον τοῦ αὐτοῦ τόξου δηλ: τὸν 56855749. ἐν δὲ γʹ: βαθμῷ ὑπὸ τὸν βʹ: θὲς αὖθις τὸν λογάριθμον τοῦ ἡμιτόνου τοῦ ὁλικοῦ, τὸν 100000000. εἶτα σύναψον τὸν γʹ: ὅρον τῷ βʹ: καὶ τοῦ γενομένου 156855749 ἄφελε τὸν αʹ: ἤτοι τὸν 100000000, καὶ ἐπεὶ ἐναπολείπεται ὁ 56855749, δῆλον ὅτι λογάριθμος τῆς ἀπτομένης τόξου ἑξηκ. βʹ: ῑ, ἐστὶν ὁ 56855749. ἔστι δὲ ἴσος τῷ λογαρίθμῳ τοῦ ἡμιτόνου τοῦ αὐτοῦ τόξου, ὅτι καὶ ἐπὶ τῆς πράξεως ὁ γʹ: τῷ αʹ: ὅρῳ ἴσος ἐστί. κατὰ γὰρ τὴν ηʹ: τοῦ αʹ: τοῦ παρόντος ὡς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματός τινος τόξου πρὸς τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον τοῦ αὐτοῦ τόξου, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀπτομένην τοῦ αὐτοῦ τόξου. οἱ δὲ λογάριθμοι ἀριθμητικῶς εἰσιν ἀνάλογον τριῶν ὅρων δοθέντων, καὶ ζητουμένου τοῦ δʹ: ἐὰν ὁ γʹ: συναφθῇ τῷ βʹ: καὶ τοῦ γενομένου ἀφαιρεθῇ ὁ αʹ: ὁ λειπόμενός ἐστιν ὁ ζητούμενος. ὥστε καὶ ἐπὶ τοῦ παρόντος, ἐπεὶ δίδονται οἱ τρεῖς ὅροι καὶ ἐζητεῖτο ὁ δʹ: ὑγιὴς πάντως ἡ πρᾶξίς ἐστιν.

ὅρος αʹ:	100000000
βʹ:	156855749
γʹ:	100000000
	156855749
	100000000
	56855749

Ζητηθήτω ἔτι διὰ τὸ σαφέστερον ὁ λογάριθμος τόξου ἑξηκ. αʹ: ζ, οὗ λογάριθμος ὁ 73088239. Ἐπεὶ οὖν τούτου παραπλήρωμά ἐστι τόξον μοιρῶν π̄θ, νγʹ, οὗ λογάριθμος ὁ 99999991, εἰλήφθω ἀντὶ αʹ: ὅρου ὁ λογάριθμος οὗτος 99999991, ἀντὶ δὲ βʹ: ὁ 73088239, καὶ ἀντὶ τοῦ γʹ: ὁ λογάριθμος τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, δηλ: ὁ 100000000. Εἶτα συναφθήτω ὁ γʹ: τῷ βʹ: καὶ τοῦ γενομένου 173088239 ἀφαιρεθήτω ὁ αʹ: δηλ: ὁ 99999991. καὶ ὁ ἐναπολειπόμενος 73088248 ἔσται ὁ ζητούμενος λογάριθμος ὁ τῆς ἀπτομέ-

αʹ:	99999991
βʹ:	73088239
γʹ:	100000000
	173088239
	99999991
	73088248

της δηλ: τόξου ἑξηκ: α: ζ. τῇ αὐτῇ χρώμενος ἐφόδῳ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν, εὑρήσεις πάντας τοὺς τῶν ἀπτομένων ἑκάστου τόξου λογαρίθμους.

Πρότασις ΙΖ':

Τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων δοθέντων τοὺς τῶν τεμνουσῶν ἑκάστου τόξου λογαρίθμους εὑρεῖν.

Δοθήτωσαν οἱ τῶν ἡμιτόνων λογάριθμοι, ἢ γοῦν εὑρεθήτωσαν κατὰ τὴν ιε: τοῦ παρόντος, καὶ ζητηθήτωσαν οἱ λογάριθμοι τῶν τεμνουσῶν ἑκάστου τόξου. ἀρξάμενος δὲ ἀπὸ τοῦ τόξου μοιρῶν π̄θ, ν̄θ, ν'', ὅπερ ἐστὶν ἔσχατον, λάβε ἀντὶ μὲν α: ὅρου τὸν λογάριθμον τοῦ ἡμιτόνου τοῦ αὐτοῦ τόξου, δηλονότι τὸν 100000000, ἀντὶ β': δὲ τὸν λογάριθμον τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, ἤτοι τὸν αὐτὸν 100000000. τούτου δὲ διπλασιασθέντος, ἀφαιρεθήτω τοῦ γενομένου 200000000 ὁ α: καὶ ἐπεὶ ἐναπολείπεται ὁ 100000000, θὲς κατὰ συστοιχίαν τοῦ παραπληρώματος, τοῦ ἐξ ἀρχῆς εἰλημμένου τόξου, τοῦ ἑξηκ: δηλονότι β: ῑ, ἀντὶ τῆς τεμνούσης αὐτοῦ λογάριθμον τὸν 100000000. κατὰ γὰρ τὴν θ': τοῦ α: τοῦ παρόντος ὡς τὸ ἡμιτονόν τινος τόξου πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνουσαν τοῦ παραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ τόξου. οἱ δὲ λογάριθμοι ἀριθμητικῶς εἰσὶν ἀνάλογον. ἄρα δοθέντων τῶν δύο ὅρων τοῦ λογαρίθμου δηλ: τοῦ ἡμιτόνου τοῦ δοθέντος τόξου, καὶ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, καὶ τοῦ γ': ζητουμένου, κατὰ τὸ πόρ: τῆς ε: τοῦ παρόντος ὀφείλει ὁ β': διπλασιασθῆναι, καὶ τοῦ γενομένου ἀφαιρεθῆναι ὁ α: καὶ ὁ ἐναπολειπόμενος ἔσται ὁ ζητούμενος. ἀλλὰ δὴ τοῦτ' αὐτὸ γέγονε καὶ ἐπὶ τοῦ παρόντος, ὑγιὴς ἄρα ἡ πρᾶξις.

Ζητηθήτω ἔτι ὁ λογάριθμος τῆς τεμνούσης τόξου ἑξηκ. α: ῑ. εἰλήφθω ἀντὶ α: ὅρου ὁ λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου τόξου μοιρῶν π̄θ: ν', ὅπερ ἐστὶ παραπλήρωμα τοῦ δοθέντος, δηλονότι ὁ 99999982. ἀντὶ δὲ β: ὁ λογάριθμος τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, ἤτοι ὁ 100000000. τούτου δὲ διπλασιασθέντος, ἀφῃρήσθω τοῦ γενομένου 200000000 ὁ 99999982, καὶ ἐπεὶ ἐναπολείπεται ὁ 100000018, δῆλον ὅτι λογάριθμος ἀντὶ τεμνούσης τόξου ἑξηκ. α: ῑ ἐστὶν ὁ 100000018. τούτου γενομένου ἀκριβῶς καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν, εὑρεθήσονται δήπουθεν οἱ λογάριθμοι τῶν τεμνουσῶν ἑκάστου τόξου, ὅπερ ἔδει τὸ ζητούμενον.

ἈΠΟΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

Εὑρεθέντων δὲ τῶν λογαρίθμων ἡμιτόνων, ἀπτομένων τε καὶ τεμνουσῶν καθ' ὃν ἤδη ἡρμήνευται τρόπον, καὶ τῶν κανονίων κατασκευασθέντων. ἐπεὶ ἐν μὲν τῷ α: παραλληλογράμμῳ οἱ τὰ τόξα ἐνσημαίνοντες ἐγγράφονται ἀριθμοί, ἐν δὲ τῷ β': οἱ τὰ ἡμίτονα παριστῶντες, ἐν δὲ τῷ γ': οἱ τὰς ἀπτομένας, καὶ ἐν τῷ δ': οἱ τὰς τεμνούσας, καὶ ἐν τῷ ε: οἱ τῶν ἡμιτόνων λογάριθμοι, ὡς εἴρηται πρὸς τῇ ιε: τοῦ παρόντος, ἵνα πληρέστατα ὦσι τὰ αὐτὰ κανόνια, ταχθήτωσαν ἐν μὲν

τῷ

Παρενθετέον τὸ παρὸν κανόνιον μεταξὺ τῆς 44[illegible] καὶ 44[illegible] σελίδος. Si deve fraponere tra la pagina 444: e 445.

Κανόνιον τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτ: ἀποτομ: καὶ τεμνουσῶν:

A

α: ι	β: ἡμίσεα	γ: ἀποτέμνουσαι	δ: τέμνουσαι	ε: λογάρ: ἡμιτ:	ϛ: λογ: ἀποτομ:	ζ: λογάρ: τεμν:
0	1145.24	1745.51	100015.23	824185.53	8244[illegible]2.15	1000006.62
1	1774.32	1774.60	100015.74	824903.32	824[illegible]0.15	1000006.84
2	1803.41	1803.70	100016.26	825609.43	825[illegible]6.40	1000007.06
3	1832.49	1832.80	100016.79	826304.23	826[illegible]1.93	1000007.29
4	1861.58	1861.90	100017.33	826988.10	826[illegible]5.63	1000007.53
5	1890.66	1891.00	100017.88	827661.36	827[illegible]9.32	1000007.78
6	1919.74	1920.10	100018.43	828324.34	828[illegible]2.34	1000008.00
7	1948.83	1949.20	100018.59	828977.34	828[illegible]5.59	1000008.25
8	1977.91	1978.30	100019.58	829920.67	829[illegible]9.17	1000008.50
9	2006.99	2007.40	100010.14	830254.60	830[illegible].35	1000008.75
10	2036.08	2036.50	100020.73	830879.41	830[illegible].42	1000009.00
11	2065.16	2065.60	100021.33	831495.36	831[illegible].62	1000009.26
12	2094.24	2094.70	100021.94	832102.69	831[illegible].21	1000009.53
13	2123.32	2123.80	100022.55	832701.63	831[illegible].43	1000009.79
14	2152.41	2152.91	100023.17	833292.41	833[illegible].40	1000010.06
15	2181.49	2182.01	100023.80	833875.29	833[illegible].63	1000010.34
16	2210.57	2211.11	100024.44	834450.43	834[illegible].05	1000010.61
17	2239.65	2240.21	100025.02	835018.05	835[illegible].99	1000010.89
18	2268.73	2269.32	100025.75	835578.35	835[illegible].53	1000011.18
19	2297.81	2298.42	100026.40	836131.50	836[illegible].97	1000011.47
20	2326.00	2327.53	100027.08	836177.69	836[illegible].45	1000011.76
21	2355.98	2356.63	100027.76	837217.10	837[illegible].15	1000012.06
22	2385.06	2386.74	100028.45	837749.88	837[illegible].23	1000012.36
23	2414.14	2414.84	100029.15	838276.20	838[illegible].86	1000012.66
24	2443.22	2443.95	100029.86	838796.22	838[illegible].19	1000012.97
25	2472.30	2473.05	100030.58	839310.08	839[illegible].36	1000013.28
26	2501.38	2502.16	100031.30	839817.93	839[illegible].52	1000013.59
27	2530.46	2531.27	100032.03	840319.90	840[illegible].81	1000013.91
28	2559.54	2560.38	100032.77	840816.14	840[illegible].37	1000014.23
29	2588.62	2589.48	100033.52	841306.76	841[illegible].32	1000014.56
30	2617.69	2618.59	100034.28	841791.90	841[illegible].79	1000014.88
31	2646.77	2647.70	100035.05	842271.68	842[illegible].90	1000015.22
32	2675.85	2676.81	100035.82	842746.21	842[illegible].76	1000015.55
33	2704.93	2705.92	100036.60	843215.61	843[illegible].50	1000015.89
34	2734.01	2735.03	100037.39	843679.99	843[illegible].22	1000016.24
35	2763.09	2764.14	100038.19	844139.44	8441[illegible].03	1000016.58
36	2792.16	2793.25	100039.00	844594.09	8446[illegible].03	1000016.94
37	2821.24	2822.36	100039.82	845044.02	8450[illegible].31	1000017.29
38	2850.30	2851.48	100040.65	845489.34	845[illegible].99	1000017.65
39	2879.40	2880.59	100041.48	845930.13	8459[illegible].14	1000018.01
40	2908.47	2909.70	100042.32	846366.49	8463[illegible].86	1000018.38
41	2937.55	2938.82	100043.17	846798.50	84681[illegible].25	1000018.75
42	2966.62	2967.93	100044.03	847226.26	8472[illegible].38	1000019.12
43	2995.70	2997.05	100044.90	847649.84	8476[illegible].33	1000019.50
44	3024.78	3026.16	100045.78	848069.32	8480[illegible].20	1000019.88
45	3053.85	3055.28	100046.67	848484.79	8485[illegible].05	1000020.26
46	3082.93	3084.39	100047.56	848896.32	8489[illegible].96	1000020.65
47	3112.00	3113.57	100048.46	849303.98	8493[illegible].02	1000021.04
48	3141.08	3142.63	100049.37	849707.84	8497[illegible].28	1000021.44
49	3170.15	3171.74	100050.29	850107.98	850129.82	1000021.33
50	3199.22	3200.86	100051.22	850504.47	850526.72	1000022.24
51	3228.30	3229.98	100052.15	850897.36	850920.01	1000022.64
52	3257.37	3259.10	100053.09	851286.73	851309.78	1000023.05
53	3286.44	3288.22	100054.05	851672.64	851696.10	1000023.47
54	3315.52	3317.34	100055.01	852055.14	852079.02	1000023.88
55	3344.59	3346.46	100055.98	852434.30	852458.60	1000024.30
56	3373.66	3375.58	100056.96	852810.17	852834.90	1000024.73
57	3402.73	3404.71	100057.95	853182.81	853207.97	1000025.16
58	3431.81	3433.83	100058.94	853552.28	853577.87	1000025.53
59	3460.88	3462.95	100059.94	853918.63	853944.66	1000026.02
60	[illegible]	3492.08	100060.95	854281.92	854308.38	1000026.46

Γ

α: ι	β: ἡμίσεα	γ: ἀποτέμνουσαι	δ: τέμνουσαι	ε: λογ: ἡμιτ:	ϛ: λογ: ἀποτομ:	ζ: λογ: τεμν:
60	99984.77	5728996.16	5729868.85	999993.38	1175807.85	1175814.47
59	99984.26	5635058.96	5635946.19	999993.16	1175089.85	1175096.68
58	99983.74	5544151.67	5545053.45	999992.94	1174383.57	1174390.57
57	99983.21	5456130.03	5457046.35	999992.71	1173688.47	1173695.77
56	99982.67	5370858.75	5371789.62	999992.47	1173004.37	1173011.90
55	99982.12	5288210.91	5289156.37	999992.24	1172330.88	1172338.64
54	99981.57	5208067.26	5209017.22	999992.00	1171667.66	1171675.66
53	99981.01	5130315.66	5131290.17	999991.75	1171014.41	1171022.66
52	99980.44	5054850.59	5055839.65	999991.50	1170370.83	1170379.33
51	99979.86	498[illegible]572.64	498[illegible]576.23	999991.25	1169736.69	1169743.40
50	99979.27	4910388.06	4911406.20	999991.00	1169111.58	1169120.59
49	99978.67	4841208.41	4842241.10	999990.74	1168495.38	1168504.64
48	99978.06	4773950.14	4774997.38	999990.47	1167887.79	1167897.31
47	99977.45	4708134.30	4709598.08	999990.21	1167288.57	1167298.37
46	99976.83	4644886.20	4645962.53	999989.94	1166697.51	1166707.57
45	99976.20	4582935.12	5584025.99	999989.66	1166114.37	1166124.71
44	99975.56	4522614.07	4523719.49	999989.39	1165538.95	1165549.57
43	99974.91	446385[illegible].56	4464979.52	999989.11	1164971.05	1164981.95
42	99974.25	4406611.32	4407745.83	999988.82	1164410.47	1164421.65
41	99973.59	4350812.16	4351961.22	999988.53	1163857.03	1163868.50
40	99972.92	4296407.73	4297571.34	999988.24	1163310.55	1163822.31
39	99972.24	4243346.39	4244524.54	999987.94	1162770.85	1162782.89
38	99971.55	4191578.99	4162771.88	999987.64	1162237.77	1162250.12
37	99970.85	4141058.76	4142266.00	999987.34	1161711.14	1161723.80
36	99970.14	4091741.16	4092962.95	999987.03	1161190.82	1161203.78
35	99969.43	4043583.75	4044810.09	999986.72	1160676.64	1160688.92
34	99968.71	3996546.05	3997796.94	999986.41	1160168.48	1160182.07
33	99967.98	3950589.46	3951854.89	999986.09	1159666.19	1159680.10
32	99967.24	3905677.11	3906957.09	999985.77	1159169.63	1159183.86
31	99966.49	3861773.81	3863068.24	999985.44	1158678.68	1158693.24
30	99965.73	3818845.93	3820155.00	999985.12	1158193.21	1158208.10
29	99964.96	3776861.30	3778184.92	999984.78	1157713.10	1157728.32
28	99964.19	3735789.17	3737127.24	999984.45	1157238.24	1157253.79
27	99963.41	3695600.11	3696952.82	999984.11	1156768.50	1156784.39
26	99962.62	3656265.92	3657633.18	999983.76	1156303.78	1156320.01
25	99961.82	3617759.62	3619141.43	999983.42	1155843.97	1155860.56
24	99961.01	3580055.33	3581451.68	999983.06	1155388.97	1155405.91
23	99960.19	3543128.25	3544539.15	999982.71	1154938.69	1154955.98
22	99959.36	3506954.58	3508380.03	999982.35	1154493.01	1154510.66
21	99958.53	3471511.50	3472951.50	999981.99	1154051.86	1154069.87
20	99957.69	3436777.09	3489231.63	999981.62	1153615.14	1153633.51
19	99956.84	3402730.29	3404199.39	999981.25	1153182.75	1153201.50
18	99955.98	3369350.86	3370834.53	999980.88	1152754.62	1152773.74
17	99955.11	3336619.45	3338117.63	999780.50	1152330.67	1152350.16
16	99954.24	3304517.27	3306030.00	999980.12	1151910.80	1151930.68
15	99953.36	3273026.37	3274553.65	999979.74	1151494.95	1151515.31
14	99952.47	3242129.46	3243671.29	999979.35	1151083.04	1151103.68
13	99951.57	3211809.88	3213365.26	999978.96	1150674.98	1150696.02
12	99950.60	3182051.60	3183622.52	999978.56	1150270.72	1150292.16
11	99949.74	3152839.16	3154424.63	999978.17	1149870.18	1149892.02
10	99948.81	3124157.67	3125757.70	999977.76	1149473.29	1149495.53
9	99947.88	3095992.80	3097607.37	999977.36	1149079.99	1149102.64
8	99946.94	3068330.70	3069956.82	999976.95	1148690.22	1148713.27
7	99945.99	3041158.02	3042801.69	999976.53	1148303.87	1148327.36
6	99945.03	3014461.89	3016120.10	999976.12	1147920.98	1147944.86
5	99944.06	2988229.86	2989902.63	999975.70	1147541.40	1147565.70
4	99943.08	2962449.05	2964137.26	999975.27	1147165.10	1147189.83
3	99942.09	2937110.55	2938812.41	999974.84	1146792.03	1146817.19
2	99941.09	2912200.47	2913916.88	999974.41	1146422.13	1146447.72
1	99940.09	2887708.88	2889439.84	999973.98	1146055.34	1146081.37
0	99939.08	2863625.33	2865370.83	999973.54	1145691.62	1145718.08

Δ

τῷ ϛʹ: παραλληλογράμμῳ οἱ λογάριθμοι τῶν ἀπτομένων, ἐν δὲ τῷ ζʹ: οἱ λογάριθμοι τῶν τεμνουσῶν, καὶ ἕξεις ταῦτα κανόνια ἐντελῆ πρὸς διάλυσιν τῶν τριγώνων ὅτι μάλιστα συμβαλλόμενα.

Πρότασις ΙΗʹ:

Τῶν κανονίων δοθέντων, ἢ γοῦν κατασκευασθέντων, τὸν λογάριθμον ἡμιτόνου ἀπτομένης τε καὶ τεμνούσης ἑκάστου τόξου εὑρεῖν, ἐλάττονος ὄντος τεταρτημορίου, ἢ γωνίας ἐλάττονος ὀρθῆς.

Ζητείσθωσαν αʹ: οἱ τοῦ ἡμιτόνου, ἀπτομένης τε καὶ τεμνούσης λογάριθμοι τόξου μοίρας μιᾶς, ἢ γωνίας. Ἐρεύνησον δὲ ἐν τίνι τῶν κανονίων εὑρίσκεται ἐπιγεγραμμένη ἐν ἀρχῇ τοῦ αʹ: παραλληλογράμμου κατὰ τὸ ἀριστερὰ μία μοῖρα. Εἶτα σκόπησον ἐν τῷ εʹ: ϛʹ: καὶ ζʹ: παραλληλογράμμῳ τοῦ αὐτοῦ κανονίου τοὺς συστοιχοῦντας ἀριθμοὺς κατὰ πλάτος τῇ ὑπὸ τὸν ἀριθμὸν τῆς μοίρας κατὰ βάθος κειμένῃ τζίφρᾳ, καὶ ὁ μὲν ἐν τῷ εʹ: ὤν, λογάριθμός ἐστι τοῦ ἡμιτόνου τοῦ δοθέντος τόξου ἢ γωνίας μοίρας μιᾶς. ὁ δὲ ἐν τῷ ϛʹ: τῆς ἀπτομένης τοῦ αὐτοῦ, καὶ ὁ ἐν τῷ ζʹ: τῆς τεμνούσης. οἷον ἐπεὶ ἐπὶ τοῦ παρόντος κανονίου ΑΒ, ἐν τῷ αʹ: μὲν παραλληλογράμμῳ ἐπιγράφεται ὁ χαρακτὴρ οὗτος 1. καὶ ὑπ' αὐτὸν κατὰ βάθος κεῖται 0, ταύτῃ δὲ συστοιχεῖ τῶν μὲν ἐν τῷ εʹ: παραλληλογράμμῳ ἀριθμῶν ὁ 824185, 53., τῶν δὲ ἐν τῷ ϛʹ. ὁ 824192, 15., καὶ τῶν ἐν τῷ ζʹ. ὁ 1000006, 62. δῆλον ὅτι ὁ μὲν 824185, 53. λογάριθμός ἐστι τοῦ ἡμιτόνου τόξου ἢ γωνίας μοίρας μιᾶς. ὁ δὲ 824192, 15. τῆς ἀπτομένης τῶν αὐτῶν, καὶ ὁ 1000006, 62. τῆς τεμνούσης.

Ζητείσθωσαν βʹ: οἱ λογάριθμοι ἡμιτόνου, ἀπτομένης τε καὶ τεμνούσης τόξου ἢ γωνίας μοιρῶν πηʹ. ἐρεύνησον δὲ ἐν τῷ παρακειμένῳ κανονίῳ τῷ προτέρῳ τῷ ἐπὶ τῆς ἀντικειμένης σελίδος τῆς κατὰ τὰ δεξιὰ ἐν τίνι τῶν αὐτοῦ παραλληλογράμμων γεγραμμένος ἐστὶν ὁ 88 ἀριθμός. καὶ ἐπεὶ τούτῳ ἐπιγράφεται τζίφρα, ἐρεύνησον αὖθις τίνες εἰσὶν οἱ συστοιχοῦντες ἀριθμοὶ τῇ τζίφρᾳ τῶν ἐν τῷ εʹ, ϛʹ: καὶ ζʹ: παραλληλογράμμῳ, καὶ ὁ μὲν ἐν τῷ εʹ: εὑρισκόμενος λογάριθμός ἐστι τοῦ ἡμιτόνου τόξου ἢ γωνίας μοιρ: πηʹ, ὁ δὲ ἐν τῷ ϛʹ: τῆς ἀπτομένης τῶν αὐτῶν, καὶ ὁ ἐν τῷ ζʹ: τῆς τεμνούσης. οἷον ἐπεὶ ἐπὶ τοῦ παρατιθεμένου κανονίου τοῦ ΑΒ, δηλ: τοῦ ΓΔ ἐν μὲν τῷ αʹ: παραλληλογράμμῳ κατὰ τὸν ἔσχατον αὐτοῦ τόπον γεγραμμένος ἐστὶν ὁ 88, καὶ ἐπ' αὐτὸν κεῖται 0. ταύτῃ δὲ τῶν μὲν ἐν τῷ εʹ: παραλληλογράμμῳ ἀριθμῶν συστοιχεῖ ὁ 999970.83. τῶν δὲ ἐν τῷ ϛʹ: ὁ 1145691.62, καὶ τῶν ἐν τῷ ζʹ: ὁ 1145718.08. δῆλον ὅτι ὁ μὲν 999970.83 λογάριθμός ἐστι τοῦ ἡμιτόνου τόξου ἢ γωνίας μοιρ. πηʹ, ὁ δὲ 1145691.62, τῆς ἀπτομένης τῶν αὐτῶν, καὶ ὁ 1145718.08. τῆς τεμνούσης.

Τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρεθήσονται καὶ ἐν τοῖς ἄλλοις κανονίοις πάντες οἱ λο-

γαγάριθμοι ἡμιτόνων, ἀπτομένων τε καὶ τεμνουσῶν ἑκάστου τόξου ἢ γωνίας. Ἐπειδὰν δὲ ταῖς μοίραις πρόσκειται καὶ λεπτὰ, ζητηθήτωσαν μὴ μόνον αἱ μοῖραι, ἀλλὰ καὶ τὰ λεπτὰ τὰ κατὰ σειρὰν ταῖς μοίραις κατὰ βάθος ἢ κατὰ ὕψος προσκείμενα, καὶ τὰ λοιπὰ γενέσθωσαν, ὡς ἤδη εἴρηται. οἷον ζητηθήτωσαν οἱ λογάριθμοι ἡμιτόνου, ἀπτομένης τε καὶ τεμνούσης τόξου μοιρῶν π̄η, καὶ λεπτ. κ′. Σκόπησον δὲ ἐπὶ τοῦ ΓΔ, κανονίου ἐν τῷ α: παραλληλογράμμῳ κατὰ τὰ δεξιὰ, ἔνθα ἐστὶ γεγραμμένος ὁ 88. εὑρὼν δὲ τοῦτον, ἐρεύνησον πρὸς τὰ ἄνω τοὺς κατὰ σειρὰν κειμένους ἀριθμοὺς, καὶ εὑρήσεις ἐν τῷ ζ′: ὡς οὕτως εἰπεῖν, φυλακίῳ τοῦ αὐτοῦ παραλληλογράμμου τὸν 20 ἀριθμόν. Τοῦτον οὖν ὡς βάσιν λαβὼν, ἐρεύνησον τοὺς συστοιχοῦντας αὐτῷ τῶν ἐν τῷ ε: ς′: καὶ ζ′: παραλληλογράμμῳ ἀριθμῶν τοῦ αὐτοῦ κανονίου, καὶ ἐπεὶ εὑρίσκεται ἐν μὲν τῷ ε: παραλληλογράμμῳ συστοιχῶν τῷ 20 ἀριθμῷ ὁ 999981.62. ἐν δὲ τῷ ς′: ὁ 1153615, 14. καὶ ἐν τῷ ζ′: ὁ 1153633,51. δῆλον ὅτι ὁ μὲν 999981,62, λογάριθμός ἐστι τοῦ ἡμιτόνου τόξου ἢ γωνίας μοιρ. π̄η, καὶ κ′, ὁ δὲ 1153615.14. τῆς ἀπτομένης τῶν αὐτῶν, καὶ ὁ 1153633.51. τῆς τεμνούσης.

Πρότασις ΙΘ′:

Τῶν κανονίων δοθέντων, ἢ γωνιῶν κατασκευασθέντων τοὺς λογαρίθμους ἡμιτόνων, ἀπτομένων τε καὶ τεμνουσῶν εὑρεῖν ἑκάστου τόξου μείζονος τεταρτημορίου, ἢ γωνίας μείζονος ὀρθῆς.

Δοθήτω τόξον ἢ γωνία μοιρῶν ϟ̄α, καὶ μ′, καὶ ζητηθήτωσαν οἱ λογάριθμοι ἡμιτόνου, ἀπτομένης τε καὶ τεμνούσης τοῦ αὐτοῦ τόξου ἢ γωνίας. Ἀφαιρεθήτω δὴ τὸ δοθὲν τόξον, ἢ ἡ γωνία ἀπὸ τῶν ρ̄π, μοιρῶν, καὶ τοῦ ἐναπολειπομένου τόξου ἢ γωνίας εὑρεθήτωσαν κατὰ τὴν ἀνωτέρω οἱ λογάριθμοι ἡμιτόνου, ἀπτομένης τε καὶ τεμνούσης, κἀκεῖνοι ἔσονται οἱ ζητούμενοι. ἐπεὶ τοίνυν ἀφαιρέσεως γενομένης, καθὰ εἴρηται, ἐναπολείπεται τόξον, ἢ γωνία μοιρῶν π̄η, καὶ κ′. εὑρεθήτωσαν οἱ λογάριθμοι τοῦ ἡμιτόνου, ἀπτομένης τε καὶ τεμνούσης τοῦ δοθέντος τόξου ἢ γωνίας κατὰ τὸν ιγ′: ὅρον τοῦ α: τοῦ παρόντος, καὶ δ′: τοῦ β′: τοῦ αὐτοῦ.

Πρότασις Κ′:

Τῶν κανονίων δοθέντων, ἢ γωνιῶν κατασκευασθέντων, τοὺς λογαρίθμους ἡμιτόνου, ἀπτομένης τε καὶ τεμνούσης τοῦ παραπληρώματος τόξου τινὸς μέχρι τεταρτημορίου, ἢ γωνίας εὑρεῖν.

Δοθήτω τόξον, ἢ γωνία μοιρῶν π̄η, καὶ λεπτ. κ′. καὶ ζητηθήτωσαν οἱ λογάριθμοι ἡμιτόνου, ἀπτομένης καὶ τεμνούσης τοῦ παραπληρώματος τοῦ αὐτοῦ. Ἀφαιρεθήτωσαν δὴ αἱ π̄η καὶ κ′, ἀπὸ τῶν ϟ. καὶ ἐπεὶ ἐναπολείπεται τόξον μοίρας μιᾶς, καὶ λεπτ. μ′, ζητηθήτωσαν κατὰ τὴν ιη′ τοῦ παρόντος οἱ λογάριθμοι ἡμι-

ἡμιτόνου, ἀποτεμνούσης τε καὶ τεμνούσης τόξου μοίρας μιᾶς καὶ λεπτ: μ'. καὶ εὑρεθήσεται ἀντὶ μὲν ἡμιτόνου λογάριθ: ὁ 846366.49., ἀντὶ δὲ ἀποτεμνούσης ὁ 846384 86., καὶ ἀντὶ τεμνούσης ὁ 1000018.38. ἢ καὶ οὕτως, εὑρεθήτω ὁ ἀριθμὸς τῶν λεπτῶν τοῦ δοθέντος τόξου ἢ γωνίας, καὶ ζητηθήτωσαν οἱ τῷ αὐτῷ συστοιχοῦντες ἀριθμῷ τῶν ἐν τῷ παρακειμένῳ κανονίῳ κειμένων ἀριθμῶν, κἀκεῖνοι ἔσονται οἱ ζητούμενοι, ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος ὑποδείγματος δῆλον. Ἐπεὶ οὖν δίδοται τόξον ἢ γωνία μοιρῶν $\bar{\pi\eta}$, καὶ λεπτ: κ', καὶ τούτῳ συστοιχοῦσιν οἱ 1000018,38:846384,86: 846366,49. φανερὸν, ὅτι ὁ μὲν προσεγγίζων τῷ κ', δηλ. ὁ α: τῶν ἐν ταῦθα ἐκτεθέντων λογάριθμός ἐστι τῆς τεμνούσης τοῦ παραπληρώματος τοῦ δοθέντος τόξου, κεῖται γὰρ ἐν ἀρχῇ κατὰ τὰ δεξιὰ ἔνθα ἐπιγράφεται λογάριθμος ἀντὶ τεμνούσης, ὁ δὲ τούτῳ συστοιχῶν λογάρ. ἐστὶ τῆς ἀποτεμνούσης τοῦ αὐτοῦ, καὶ ὁ μετ' ἐκεῖνον τοῦ ἡμιτόνου.

Πρότασις ΚΑ':

Λογαρίθμου ἡμιτόνου τινὸς τόξου ἢ γωνίας δοθέντος, τὸ τόξον ἢ τὴν γωνίαν ἐν τοῖς κανονίοις εὑρεῖν.

Ἔστω λογάριθμος ἡμιτόνου ὁ 999985.12 καὶ ζητηθήτω τὸ τόξον. Εὑρεθήτω δὴ ἐν τῷ κανονίῳ ὁ δοθεὶς λογάριθμος καὶ παρατηρηθήτω τίνι τῶν ἐν τῷ α: παραλληλογράμμῳ ἀριθμῶν ἔνθα ἐπιγράφεται, ἢ γοῦν ὑπογράφεται ὁ τῶν μοιρῶν ἀριθμὸς, συστοιχεῖ ὁ δοθεὶς λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου, κἀκεῖνος ἔσται ὁ ζητούμενος. οἷον ἐπὶ ὁ 999985.12. εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ΓΔ, κανονίου ἐν τῷ ε: παραλληλογράμμῳ κατὰ τὸ ι: θυλάκιον τῆς ἀπαριθμήσεως ἀπὸ τῆς κάτω ἀρχομένης, καὶ οὗτος ὁ ἀριθμὸς συστοιχεῖ τῷ 30. ἀριθμῷ τῶν ἐν τῷ α: παραλληλογράμμῳ κατὰ τὰ ἀριστερὰ, δῆλον, ὅτι τὸ ζητούμενον τόξον, ἢ ἡ γωνία μοιρῶν ἐστι $\bar{\pi\eta}$ καὶ λ'. τοῦτον τὸν τρόπον εὑρίσκεται τὸ τόξον, ἢ ἡ γωνία, κἂν ὁ λογάριθμος τῆς ἀποτεμνούσης, ἢ τῆς τεμνούσης δοθῇ.

Εἰ δέ γε τὸ ζητούμενον τόξον μεῖζον ᾖ τεταρτημορίου, ἢ ἡ γωνία ἀμβλεῖα. εὑρεθήτω α: κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα ὁ ἀριθμὸς, ᾧ τινι ὁ δοθεὶς συστοιχεῖ λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου, ἢ τῆς ἀποτεμνούσης, ἢ γοῦν τῆς τεμνούσης τοῦ ζητουμένου τόξου, κἀκεῖνος ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τῶν $\bar{\rho\pi}$, καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς ἔσται ὁ ζητούμενος. οἷον δοθήτω λογάριθμος ἀντὶ ἀποτεμνούσης τόξου τινὸς μείζονος τεταρτημορίου, ἢ γοῦν γωνίας μείζονος ὀρθῆς ἤτοι ἀμβλείας, ὁ 839831.52, ἀριθμός. καὶ ζητηθήτω τὸ τούτου τόξον, ἢ ἡ γωνία. ἐπεὶ οὖν οὗτος ὁ ἀριθμὸς συστοιχεῖ τῷ 26, τῷ ἐν τῷ α: παραλληλογράμμῳ, ἐν ᾧ ἐπιγράφεται ὁ χαρακτὴρ οὗτος 1. ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ $\bar{\rho\pi}$, μοιρῶν μία μοῖρα, καὶ λεπτὰ $\bar{\kappa\varsigma}$, καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς $\bar{\pi\eta}$, καὶ λεπτ: λδ', ἔσται τὸ ζητούμενον. τὸ τόξον ἄρα, οὗ λογάριθμος δίδοται ἀντὶ ἀποτεμνούσης ἢ ἡ γωνία μοιρ: ἐστὶ $\bar{\pi\eta}$ καὶ λεπτ. λδ'.

Ἐὰν

Ἐὰν δὲ ὁ δοθεὶς λογάριθμος οὐχ εὑρίσκεται ἐν τοῖς κανονίοις, ληφθήτω ἀντὶ αὐτοῦ ὁ προσεχέστερος, κἀκεῖνος δείξει σοι τὸ ζητούμενον τόξον, ἢ τὴν γωνίαν. Ὁ ἔχων τοίνυν τὰ δοθέντα κανόνια δύναται τῇ τοιαύτῃ ἐφόδῳ εὑρίσκειν τοὺς λογαρίθμους ἡμιτ: ἀποτομ: τε καὶ τεμν. ἑκάστου τόξου ἢ γωνίας, δοθέντων ἤδη τῶν τόξων, ἢ τῶν γωνιῶν· καὶ ἀνάπαλιν, εὑρίσκειν δηλ. τὰ τόξα, ἢ τὰς γωνίας δοθέντων τῶν λογαρίθμων, ὡς ἤδη εἴρηται, τῷ δ' ἀμοιροῦντι κανονίων ἔξεστι τούτων τυχεῖν διὰ τῆς ιε: καὶ ιζ': τοῦ παρόντος.

Πρότασις ΚΒ':

Τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τὸν λογάριθμον εὑρεῖν ἐν τοῖς κανονίοις τῶν κοινῶν λογαρίθμων.

Κοινοὶ λογάριθμοί εἰσιν ἀριθμοὶ ἀριθμητικῶς ἀνάλογον, συστοιχοῦντες τοῖς γεωμετρικὴν τηροῦσιν ἀναλογίαν. Ἐφηύρηνται δὲ καὶ οὗτοι παρὰ τῶν τὰ τοιαῦτα ἀκριβῶς πραγματευσαμένων, ἵνα τὴν εἰς εὕρεσιν τῶν γεωμετρικῶς ἑξῆς ἀνάλογον δυσχέρειαν φύγωσιν. Ἐπεὶ δὲ τὰ τῆς γεωμετρικῆς ἀναλογίας εἴδη διάφορά τε εἰσί, καὶ ἀριθμῷ ἀπερίληπτα, πρὸς τὸ δύνασθαι εὑρίσκειν ἀπονώτερον οἱονδήποτε ἑξῆς ἀνάλογον, κατεσκευάσθησαν παρ' αὐτοῖς θαυμασίᾳ τινὶ μεθόδῳ καὶ τὰ τῶν κοινῶν λογαρίθμων κανόνια. Ἔστι δὲ τὸ τῶν κανονίων τούτων σχῆμα ἑτερόμηκές τι παραλληλόγραμμον εἰς δύο μὲν κατὰ πλάτος διῃρημένον, κατὰ βάθος δὲ εἰς ὅσ' ἂν ἡ χρεία δέῃ. καὶ ἐν μὲν τῷ α: παραλληλογράμμῳ τούτου οἱ ἀριθμοὶ τάττονται ἀπὸ μονάδος ἀρχόμενοι, καὶ κατὰ τὴν φυσικὴν αὐτῶν ἐπὶ τὸ μεῖζον χωροῦντες πρόοδον, ἐν δὲ τῷ β': οἱ τῶν ἀριθμῶν τάττονται λογάριθμοι, ἔντισι μὲν κανονίοις μετὰ τῶν διαφορῶν αὐτῶν, ἔντισι δὲ ἄνευ τούτων. τηροῦσι δὲ οἱ λογάριθμοι οὕτω τοιοῦτόν τινα πρὸς ἀλλήλους εἱρμὸν καὶ τάξιν, ὥστε ἀφαιρουμένων τῶν ἐλαττόνων λογαρίθμων ἀπὸ τῶν μειζόνων τῶν ἐν τῷ αὐτῷ ὄντων λόγῳ ἀριθμῶν, τὴν αὐτὴν ἀεὶ εὑρίσκεσθαι ὑπεροχήν, καὶ τῶν μὲν ἐν μείζονι λόγῳ μείζονα εἶναι καὶ τὴν διαφοράν, τῶν δὲ ἐν ἐλάττονι ἐλάττονα. ἐφαπλοῦται δὲ τὰ αὐτὰ κανόνια ὅσον ἂν εἴη ἑκάστῳ βουλητόν. διὸ δὴ τὰ μὲν μέχρι τοῦ 1000 ἀριθμοῦ, τὰ δὲ μέχρι τοῦ 10000, καὶ ἄλλα μέχρι τινὸς ἄλλου ἀριθμοῦ ἐκτείνεται. ἀλλ' ἵνα μὴ κατὰ μῆκος μόνον εἴη ἐκτεταμένα, εἰώθασί τινες μέχρι τοῦ 30. ἐφαπλοῦν τὸ α: παραλληλόγραμμον. Εἶτα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ὡς ἀπ' ἄλλης ἀρχόμενοι ἀρχῆς ἐφαπλοῦσι τὸ β': μέχρι τοῦ 60. τὸ δὲ γ': μέχρι τοῦ 90., τὸ δὲ δ': μέχρι τοῦ 120., ἀλλήλοις παρατιθέμενά τε, καὶ οἱονεὶ συναγόμενα. ἀρχομένου ἀεὶ τοῦ ἑπομένου ἐξ οὗ τὸ προηγούμενον λήγει, ὥστε ἔκτῃ ἐπαναλήψει κατασκευάζουσί τι κανόνιον διῃρημένον κατὰ πλάτος μὲν εἰς μέρη δυοκαίδεκα, κατὰ βάθος δὲ εἰς εἴκοσι, καὶ ἄλλοι ἄλλως. καὶ ἐν μὲν τῷ α: παραλληλογράμμῳ, γ': ε: ζ': θ': καὶ ια: τάττουσι τοὺς ἀριθμοὺς

ἀπὸ

Κανὼν τῶν κανῶν. Λογαρίθμων. Si deve fraponère tra la pagina 448: e 449.

ἀριθμοί	λογάριθμοι τῶν ἀριθμ:	ἀριθμοί	λογάριθμοι τῶν ἀριθμ:	ἀριθμοί	λογάριθμοι τῶν ἀριθμ:	ἀριθμοί	λογάριθμοι τῶν ἀριθμ:	ἀριθμοί	λογάριθμοι τῶν ἀριθμ:	ἀριθμοί	λογάριθμοι τῶν ἀριθμ:
0	0	30	147712.13	60	177815.13	90	195424.25	120	207918.12	150	217609.13
	0		1424.04		717.85		479.89		360.42		288.56
1	000000.00	31	149136.17	61	178532.98	91	195904.14	121	208278.54	151	217897.69
	30103.00		1378.83		706.19		474.64		357.44		286.67
2	030103.00	32	150515.00	62	179239.17	92	196378.78	122	208635.98	152	218184.36
	17609.13		1336.39		694.88		469.51		354.53		284.78
3	047712.13	33	151851.39	63	179934.05	93	196848.29	123	208990.51	153	218469.14
	12493.87		1296.50		683.95		464.50		351.66		282.93
4	060206.00	34	153147.89	64	180618.00	94	197312.79	124	209342.17	154	218752.07
	9691.00		1258.91		673.34		459.57		348.83		281.10
5	069897.00	35	154406.80	65	181291.34	95	197772.36	125	209691.00	155	219033.17
	7918.13		1223.45		663.05		454.76		346.05		279.29
6	077815.13	36	155630.25	66	181954.39	96	198227.12	126	210037.05	156	219312.46
	6694.67		1189.92		653.09		450.05		343.32		277.51
7	084509.80	37	156820.17	67	182607.48	97	198677.17	127	210380.37	157	219589.97
	5799.20		1158.19		643.41		445.44		340.63		275.74
8	090309.00	38	157978.36	68	183250.89	98	199122.61	128	210721.00	158	219865.71
	5115.25		1128.10		634.02		440.91		337.97		274.00
9	095424.25	39	159106.46	69	183884.91	99	199563.52	129	211058.97	159	220139.71
	4575.75		1099.54		624.89		436.48		335.37		272.29
10	100000.00	40	160206.00	70	184509.80	100	200000.00	130	211394.34	160	220412.00
	4139.27		1072.39		616.03		432.14		332.79		270.59
11	104139.27	41	161278.39	71	185125.83	101	200432.14	131	211727.13	161	220682.59
	3778.85		1046.54		607.42		427.88		330.26		268.91
12	107918.12	42	162324.93	72	185733.25	102	200860.02	132	212057.39	162	220951.50
	3476.22		1021.92		599.04		423.70		327.77		267.26
13	111394.34	43	163346.85	73	186332.29	103	201283.72	133	212385.16	163	221218.76
	3218.46		998.42		590.88		419.61		325.32		265.62
14	114612.80	44	164345.27	74	186923.17	104	201703.33	134	212710.48	164	221484.38
	2996.33		975.98		582.96		415.60		322.90		264.01
15	117609.13	45	165321.25	75	187506.13	105	202118.93	135	213033.38	165	221748.39
	2802.87		954.53		575.23		411.66		320.51		262.42
16	120412.00	46	166275.78	76	188081.36	106	202530.59	136	213353.89	166	222010.81
	2632.89		934.01		567.71		407.79		318.17		260.84
17	123044.89	47	167209.79	77	188649.07	107	202938.38	137	213672.06	167	222271.65
	2482.36		914.33		560.39		404.00		315.85		259.28
18	125527.25	48	168124.12	78	189209.46	108	203342.38	138	213987.91	168	222530.93
	2348.11		895.49		553.25		400.27		313.57		257.74
19	127875.36	49	169019.61	79	189762.71	109	203742.65	139	214301.48	169	222788.67
	2227.64		877.39		546.28		396.62		311.32		256.22
20	130103.00	50	169897.00	80	190308.99	110	204139.27	140	214612.80	170	223044.89
	2118.93		860.02		539.51		393.03		309.11		254.72
21	132221.93	51	170757.02	81	190848.50	111	204532.30	141	214921.91	171	223299.61
	2020.34		843.31		532.89		389.50		306.92		253.23
22	134242.27	52	171600.33	82	191381.39	112	204921.80	142	215228.83	172	223552.84
	1930.51		827.26		526.42		386.04		304.77		251.77
23	136172.78	53	172427.59	83	191907.81	113	205307.84	143	215533.60	173	223804.61
	1848.34		811.79		520.12		382.65		302.65		250.31
24	138021.12	54	173239.38	84	192427.93	114	205690.49	144	215836.25	174	224054.92
	1772.88		796.89		513.96		379.29		300.55		248.88
25	139794.00	55	174036.27	85	192941.89	115	206069.78	145	216136.80	175	224303.80
	1703.33		782.53		507.96		376.02		298.49		247.47
26	141497.33	56	174818.80	86	193449.85	116	206445.80	146	216435.29	176	224551.27
	1639.05		768.69		502.08		372.79		296.44		246.06
27	143136.38	57	175587.49	87	193951.93	117	206818.59	147	216731.73	177	224797.33
	1579.42		755.31		496.34		369.61		294.44		244.67
28	144715.80	58	176342.80	88	194448.27	118	207188.20	148	217026.17	178	225042.00
	1524.00		742.40		490.73		366.50		292.46		243.30
29	146239.80	59	177085.20	89	194939.00	119	207554.70	149	217318.63	179	225285.30
	1472.33		729.93		485.25		363.42		290.50		241.95
30	147712.13	60	177815.13	90	195424.25	120	207918.12	150	217609.13	180	225527.25

ἀπὸ μονάδος ἀρχομένους ὡς εἴρηται. ἐν δὲ τῷ β′: δ′: ϛ′: η′: ι′: ιβ′: τοὺς τῶν ἀριθμῶν λογαρίθμους ὡς ὁρᾷς ἐπὶ τοῦ παρόντος τοῦ χάριν ὑποδείγματος τεθέντος.

Ἔστω τοίνυν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς μὴ μείζων τοῦ ἐν τῷ κανονίῳ ἐσχάτου, καὶ ζητηθήτω ὁ τούτου λογάριθμος. Εὑρεθήτω δὴ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἐν τοῖς παραλληλογράμμοις τοῦ κανονίου, ἔνθα εἰσὶ γεγραμμένοι κατὰ τὴν φυσικὴν αὐτῶν πρόοδον ἀπὸ μονάδος ἀρχόμενοι. εὑρεθήσεται γὰρ πάντως γε διὰ τὴν ὑπόθεσιν. ὁ γὰρ μὴ ὑπερέχων τοῦ ἐν τῷ κανονίῳ ἐσχάτου, ἐντός ἐστι τῶν ἐν τῷ κανονίῳ. τούτου δ᾽ εὑρεθέντος ὁ κατὰ τὰ δεξιὰ αὐτῷ συστοιχῶν λογάριθμος ἔσται ὁ ζητούμενος. Οἷον δοθήτω ἀριθμὸς ὁ α, καὶ εὑρίσκεται ἐν τῷ γ′: παραλληλογράμμῳ, ἔνθα ὁ *, καὶ τούτῳ συστοιχεῖ ὁ β, δῆλον ὅτι ὁ β, λογάριθμός ἐστι τοῦ α, δοθέντος.

Ἔστω β′: ἀριθμὸς μείζων τοῦ τῶν ἐν τῷ κανονίῳ ἐσχάτου. ἐ-
πεὶ δὲ τοῦτο διχῶς ἐνδέχεται συμβαίνειν, ἢ γὰρ μείζων ἐ- α. 50.
στὶν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς τῇ ποσότητι τῶν χαρακτήρων, ἢ τῷ β. 169897.00
πλήθει. Ἔστω δὴ α′: μείζων τῇ τῶν χαρακτήρων ποσότητι,
ἐν δὲ τῷ βαθμῷ τῶν μονάδων ἐχέτω τζίφραν. καὶ ζητηθήτω ὁ τούτου λογάριθμος. Εὑρεθήτω οὖν ὁ λογάριθμος τῶν κατὰ τὰ ἀριστερὰ χαρακτήρων, ἀφαιρουμένης τῆς κατὰ τὰ δεξιὰ κειμένης τζίφρας ἀντὶ μονάδος. καὶ τούτου ἐναλλαχθήτω ὁ α′: κατὰ τὰ ἀριστερὰ χαρακτὴρ, ὥστε τὴν τούτου ποσότητα μονάδι ἐλλείπειν τοῦ πλήθους τῶν χαρακτήρων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, καὶ ὁ γενόμενος ἔσται ὁ ζητούμενος. Οἷον ζητηθήτω ὁ λογάριθμος τοῦ γ, ὑπερέχοντος τοῦ δ, ἐσχάτην ἐπέχοντος τάξιν ἐν τῷ παρόντι κανονίῳ τῇ τοῦ 9 χαρακτῆρος ποσότητι. εὑρεθήτω δὴ κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὁ λογάριθμος τῶν δύο κατὰ τὰ ἀριστερὰ χαρακτήρων αὐτοῦ, ἤτοι τοῦ 19. καὶ ἐπεὶ τούτου λογάριθμός ἐστιν ὁ ε, μεταλλαχθήτω ὁ α′:
κατὰ τὰ ἀριστερὰ χαρακτὴρ καὶ γενέσθω ὁ ζ, καὶ οὗτος ἔ- γ. 190. δ. 180.
σται λογάριθμος τοῦ δοθέντος. ὁ γὰρ δοθεὶς ἀριθμὸς ε. 127875. 36.
ἐκ τριῶν σύγκειται χαρακτήρων. διὸ δὴ ὀφείλει ὁ τού- ζ. 227875. 36.
του λογάριθμος ἄρχεσθαι ἀπὸ τοῦ 2. χαρακτῆρος.

Εἰ δέ γε ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἐν τῷ τῶν μονάδων βαθμῷ σημαντικὸν ἔχῃ χαρακτῆρα. Εὑρεθήτω α′: ὁ λογάριθμος τῶν κατὰ τὰ ἀριστερὰ χαρακτήρων αὐτοῦ, ἀφαιρουμένου τοῦ ἐσχάτου κατὰ τὰ δεξιά. Εἶτα ἀφαιρεθήτω ὁ αὐτὸς λογάριθμος ἀπὸ τοῦ ἑπομένου λογαρίθμου, ἐὰν οἱ λογάριθμοι ἐν τοῖς κανονίοις εὑρίσκονται ἄνευ τῶν διαφορῶν, εἰ δέ γε μετὰ τῶν διαφορῶν, ἐν αὐτοῖς εἰσι γεγραμμένοι, εἰλήφθω ἡ διαφορὰ ἀντὶ τοῦ β′: ὅρου, ἀντὶ δὲ τοῦ α′: ἡ μονὰς μετὰ μιᾶς τζίφρας, ἐπεὶ εἷς ἀφῄρηται χαρακτὴρ, καὶ ἀντὶ τοῦ γ′: ὁ ἔσχατος ἀφαιρεθεὶς χαρακτὴρ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ. καὶ γενέσθω μέθοδος τῶν τριῶν, καὶ ὁ εὑρεθεὶς δ′: ἀνάλογος προστεθήτω τῷ λογαρίθμῳ τῶν δύο χαρακτήρων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, τῷ ἐν τῷ κανονίῳ εὑρεθέντι, καὶ τοῦ γενομένου μεταλλαχθήτω ὁ α′: κατὰ τὰ ἀριστερὰ χαρακτὴρ, καὶ ἔσται ὁ ζητούμενος. Οἷον ζητηθήτω ὁ λογάριθμος τοῦ η.

ἀφαιρουμένου δὴ τοῦ ἐσχάτου κατὰ τὰ δεξιὰ χαρακτῆρος αὐτοῦ, εὑρεθήτω ὁ λογάριθμος τῶν λοιπῶν δύο κατὰ τὰ ἀριστερὰ χαρακτήρων, ἤτοι τοῦ 19 καὶ ἔστω οὗτος ὁ θ. καὶ ἐπεὶ τούτου διαφορά ἐστιν ὁ κ, εἰρήσθω εἰ ὁ 10 παρέχει τὸν κ, ὁ 8, τίνα παρέξει. πράξεως δὲ γενομένης εὑρεθήσεται δ': ἀνάλογος ὁ λ. συναφθήτω δὴ ὁ λ, τῷ θ, καὶ τοῦ γενομένου μεταλλαχθήτω ὁ α. κατὰ τὰ ἀριστερὰ χαρακτὴρ ἐπὶ τὸν 2. ἐκ τριῶν γὰρ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς συνίσταται χαρακτήρων, καὶ οὗτος ἔσται ὁ ζητούμενος.

η.	19, 8.
θ.	127875.36.
κ.	2227.64.
λ.	1782.11.
θ.	127875.36.
	229657.47.

Δοθήτω β'. ἀριθμὸς ὑπερέχων τοῦ ἐν τῷ κανονίῳ ἐσχάτου τῷ τῶν χαρακτήρων πλήθει. εἰ μὲν οὖν οἱ περιττεύοντες χαρακτῆρες τζίφραι ὦσιν, ἀφαιρεθήτωσαν αἱ τζίφραι ἐκεῖναι, καὶ τῶν ἐναπολειφθέντων χαρακτήρων εὑρεθήτω ὁ λογάριθμος, καὶ τούτου ὁ α. κατὰ τὰ ἀριστερὰ ἐναλλαχθήτω χαρακτήρ, κἀκεῖνος ἔσται ὁ ζητούμενος. Οἷον ζητηθήτω ὁ λογάριθμος τοῦ μ, ἀριθμοῦ, καὶ ἐπεὶ ὁ μ, ὑπερέχει τοῦ ἐν τῷ κανονίῳ ἐσχάτου ἤτοι τοῦ ν, τζίφρᾳ μιᾷ, ἀφαιρεθήτω ἀπ' αὐτοῦ τζίφρα, καὶ τοῦ ἐναπολειφθέντος ξ, εὑρεθήτω ὁ λογάριθμος κατὰ τὴν κβ': τοῦ παρόντος, καὶ ἔσται οὗτος ὁ π, οὗτινος ἐναλλαχθήτω ὁ 2, ἐπὶ τὸν 3. καὶ γενέσθω ὁ ρ, καὶ ὁ ρ, πάντως ἔσται ὁ ζητούμενος λογάριθμος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ 1500.

μ.	150,0.
ν.	180.
ξ.	150.
π.	217609.13.
ρ.	317609.13.

Εἰ δὲ οἱ περιττεύοντες χαρακτῆρες σημαντικοὶ εἴησαν, ἀφαιρουμένων τῶν αὐτῶν χαρακτήρων, εὑρεθήτω ὁ λογάριθμος τῶν ἐναπολειπομένων, καὶ ἡ τούτου πρὸς τὸν ἑπόμενον διαφορά. εἶτα γενέσθω ὡς προείρηται μέθοδος τῶν τριῶν, λαμβανομένης τῆς μονάδος μετὰ τοσούτων τζιφρῶν, ὅσοι εἰσὶν οἱ ἀφαιρεθέντες χαρακτῆρες ἀντὶ τοῦ α. ὅρου, τῆς δὲ εὑρεθείσης διαφορᾶς ἀντὶ τοῦ β': ὅρου, καὶ τῶν ἀφαιρεθέντων χαρακτήρων ἀντὶ τοῦ γ': ὁ δὲ δ': εὑρεθεὶς ἀνάλογος προστεθήτω τῷ εὑρεθέντι λογαρίθμῳ τῶν ἐναπολειφθέντων χαρακτήρων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, εἶτα ἐναλλαχθήτω ὁ α: κατὰ τὰ ἀριστερὰ χαρακτὴρ τοῦ γενομένου, κἀκεῖνος ἔσται ὁ ζητούμενος. Οἷον ζητηθήτω ὁ λογάριθμος τοῦ σ, καὶ ἐπεὶ ὁ σ, δοθεὶς ἀριθμὸς ὑπερέχει τοῦ τ, ἐσχάτου ὄντος τῶν ἐν τῷ κανονίῳ ἑνὶ χαρακτῆρι μόνον, ἀφαιρεθήτω ὁ 8 χαρακτὴρ ἀπὸ τοῦ σ, καὶ τῶν ἐναπολειπομένων τριῶν χαρακτήρων δηλ: τοῦ υ, ἀριθμοῦ εὑρεθήτω ὁ λογάριθμος, καὶ ἔσται οὗτος ὁ φ. εὑρεθήτω δὲ καὶ ἡ τούτου διαφορὰ πρὸς τὸν ἑπόμενον, καὶ ἔστω αὕτη ὁ χ. Τούτων δ' εὑρεθέντων ἐπειδὴ εἷς ἀφῄρηται

σ.	165,8.
τ.	180.
υ.	165.
φ.	221748.39.
χ.	262.42.
ψ.	209.93.
φ.	221748.39.
ω.	221958.32.
Α.	321958.32.

χα-

χαρακτὴρ, ληφθήτω ἡ μετ᾽ μονάς μετ᾽ μιᾶς τζίφρας ἀντὶ α: ὅρε, ὁ δὲ χ, ἀντὶ β': καὶ ὁ ἀφαιρεθεὶς χαρακτὴρ δηλ: ὁ 8. ἀντὶ γ': καὶ τοῦ β': ἐπὶ τὸν γ': πολλαπλασιασθέντος, μεριθήτω ὁ γενόμενος ἐπὶ τὸν α: ὅρον, καὶ εὑρεθήσεται δ': ἀνάλογος ὁ ψ. ὅστις συναρθήτω τῷ φ, καὶ γενήσεται ὁ ω. οὗτινος μεταλλαττομένου τοῦ α: κατὰ τὰ ἀριστερὰ χαρακτῆρος ἤτοι τοῦ 2 ἐπὶ τὸν 3. διὰ τὸ συνίσαθαι τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἐκ τεττάρων χαρακτήρων ὁ γενόμενος Α, λογάριθμός ἐστι τοῦ σ, δοθέντος ἀριθμοῦ.

Εἰ δὲ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς μείζων εἴη τοῦ ἐσχάτου τῶν ἐν τῷ κανονίῳ, τῇ τε τῶν χαρακτήρων ποσότητι καὶ τῷ πλήθει τῶν αὐτῶν, οἷος ὁ α, ἢ ὁ β. ἐπεὶ ἑνὸς ἀφαιρουμένου χαρακτῆρος κατὰ τὰ προειρημένα, εὑρίσκεται ὁ λογάριθμος τῶν τριῶν ἐναπολειπομένων χαρακτήρων, ἀφαιρεθήτωσαν χαρακτῆρες δύο κατὰ τὰ δεξιά, καὶ εὑρεθήτω ὁ λογάριθμος τῶν δύο ἐναπολειπομένων αὐτοῦ χαρακτήρων δηλ: τοῦ γ, ἢ τοῦ δ, καὶ τὰ λοιπὰ γενέσθω ὡς προηρμηνεύεται.

α.	2973.
β.	1968.
γ.	29.
δ.	19.

Ἰστέον δ' ὅτι τῇ τοιαύτῃ ἐφόδῳ εἰ καὶ μὴ πάντων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ἀκριβῶς εὑρίσκονται οἱ λογάριθμοι, εὑρίσκονται μέντοι οἱ προσεχέστεροι.

Πρότασις ΚΓ':

Ἀριθμοῦ ὁλοκλήρου δοθέντος μετά τινος λεπτοῦ τὸν λογάριθμον αὐτοῦ εὑρεῖν.

Δοθήτω ἀριθμὸς ὁ ε, καὶ ζητηθήτω ὁ τούτου λογάριθμος. Ἐπεὶ τοίνυν ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ δεκαδικός ἐστιν ἀριθμὸς, ἀναλυθήτω ὁ ὁλόκληρος ἀριθμὸς ἐπὶ τὸ προσκείμενον αὐτῷ λεπτὸν, καὶ τοῦ γενομένου εὑρεθήτω ὁ λογάριθμος κατὰ τὴν ἀνωτέρω, καὶ τοῦ εὑρεθέντος ἐναλλαχθήτω ὁ α: κατὰ τὰ ἀριστερὰ χαρακτὴρ, ὥστε μιᾷ ἐλλείπειν μονάδι τοῦ πλήθους τῶν χαρακτήρων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ. Πολλαπλασιασθήτω δὴ ὁ ε, ἐπὶ τὸν 10, παρονομαστὴν τοῦ λεπτοῦ, καὶ τῷ γενομένῳ ζ, συναφθήτω ὁ ἀριθμητὴς τοῦ αὐτοῦ λεπτοῦ, καὶ γενήσεται ὁ η. τούτου εὑρεθήτω ὁ λογάριθμος, καὶ ἔστω ὁ θ, καὶ ἐπεὶ ὁ δοθεὶς ε, ἀριθμὸς συνίσαται ἐκ δύο χαρακτήρων, ἐναλλαχθήτω ὁ α: κατὰ τὰ ἀριστερὰ χαρακτὴρ τοῦ εὑρεθέντος λογαρίθμου, ἤτοι ὁ 2. ἐπὶ τὴν μονάδα, καὶ ὁ γενόμενος κ, λογάριθμός ἐστι. τὰ αὐτὰ γινέσθω, κἂν ὁ παρονομαστὴς τοῦ λεπτοῦ ἑκατοστὸς, ἢ χιλιοστὸς, ἢ ἄλλου τινὸς τοιούτου εἴδους, εἴη, συνιστάμενος δηλ: ἐκ μονάδος καὶ μιᾶς ἢ πλειόνων τζιφρῶν.

ε. $48.\frac{5}{10}$.
10.
ζ. 480.
5
η. 485.

θ. 268574.17.ζ.
κ. 168574.17 η.

Εἰ δὲ καὶ ὁ παρονομαστὴς ἐκ σημαντικῶν εἴη συνιστάμενος χαρακτήρων, ἀναλυθηλυθήτω α: ὡς καὶ ἀνωτέρω, ὁ δοθεὶς ὁλόκληρος ἀριθμὸς ἐπὶ τὸ ἴδιον λεπτὸν, καὶ τοῦ γενομένου λεπτοῦ εὑρεθήτωσαν οἱ λογάριθμοι τούτου ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ, εἶτα ἀφαιρεθήτω ὁ τοῦ παρονομαστοῦ λογάριθμος ἀπὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς ἔσαι ὁ ζητούμενος. Οἷον ζητηθήτω ὁ λογάριθμος τοῦ λ· ἀναλυθήτω δὴ ὁ λ, ἐπὶ τὸ ἴδιον λεπτὸν, καὶ τοῦ γενομένου μ ν, λεπτοῦ εὑρεθήτω ὁ λογάριθμος τούτου ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ· καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν ἀριθμητοῦ μ, λογάριθμός ἐστιν ὁ ξ, τοῦ δὲ παρονομαστοῦ ὁ π, ἀφαιρεθήτω ὁ π, ἀπὸ τοῦ ξ, καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς ρ, ἐστὶ λογάριθμος τοῦ δοθέντος λ.

Τίνος δὲ χάριν ἐπὶ μὲν τοῦ α: ὑποδείγματος προστέτακται εὑρίσκειν μόνον τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ τούτου μεταλλάττειν τὸν α: χαρακτῆρα, ἐπὶ δὲ τοῦ β: εὑρίσκειν ἔτι καὶ τὸν τοῦ παρονομαστοῦ λογάριθμον; ἢ ὅτι ἐπ᾽ ἐκείνου μὲν ἐπεὶ ὁ παρον: δεκαδικός ἐστιν ἀριθμὸς, ἐὰν καὶ τούτου ὁ λογάρ: εὑρεθῇ, καὶ ἀπὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμητοῦ ἀφαιρεθῇ, τὸ αὐτὸ γενήσεται ὅπερ καὶ τῇ τοῦ α: χαρακτῆρος ἐναλλαγῇ. οἱ γὰρ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ, ἑκατοσοὶ, καὶ χιλιοσοὶ, ὡς εἴρηται κατὰ τὴν ιγ: τοῦ παρ: λογάριθμον ἔχουσιν ἐκ μονάδος ἀρχόμενον μετὰ τζιφρῶν ἑπτά. ἐπὶ τούτου δὲ ἐπεὶ ὁ παρονομαστὴς σύγκειται ἐκ σημαντικῶν χαρακτήρων, ἔχει πάντως καὶ λογάριθμον ὁμοίως ἐκ πολλῶν σημαντικῶν συνισάμενον χαρακτήρων. διὸ δὴ προστέτακται ἀφαιρεῖν τοῦτον ἀπὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμητοῦ.

λ.	56.$\frac{1}{4}$
	12.
	112.
	563.
μ.	675.
ν.	12.
ξ.	282930.38.
π.	107918.12.
ρ.	175012.26.

Πρότασις ΚΔ΄.

Δοθέντος οἱουδήποτε λογαρίθμου τὸν οὗ ἐστι λογάριθμος ἀριθμὸν εὑρεῖν.

Δοθήτω ὁ τυχὼν λογάριθμος, καὶ ζητηθήτω ὁ ἀριθμὸς, οὗ ἐστι λογάριθμος ὁ δοθείς. Εἰ μὲν οὖν ὁ δοθεὶς λογάριθμος ἀρκτικὸν ἔχει χαρακτῆρα κατὰ τὰ ἀριστερὰ μονάδα, ζήτησον αὐτὸν ἐν τῷ κανονίῳ, ἀρχόμενος ἀπὸ τοῦ συστοιχοῦντος τῷ 10. ἀριθμῷ. εἰ δὲ ἀπὸ τοῦ 2. ζήτησον αὐτὸν ἀρχόμενος ἀπὸ τοῦ συστοιχοῦντος τῷ 100:, εἰ δὲ ἀπὸ τοῦ 3: ἀρχόμενος ἀπὸ τοῦ συστοιχοῦντος τῷ 1000.. κατὰ γὰρ τὸ πόρ: τῆς ιγ: τοῦ παρόντος οἱ λογάριθμοι τῶν ἐν μέσῳ μονάδος καὶ δεκάδος ἀριθμῶν ἄρχονται ἀριστερόθεν ἀπὸ τῆς τζίφρας. οἱ δὲ τῶν ἐν μέσῳ δεκάδος τε καὶ ἑκατοντάδος ἀπὸ μονάδος, ὥσπερ καὶ οἱ τῶν ἐν μέσῳ ἑκατοντάδος τε καὶ χιλιάδος ἀπὸ δυάδος. καὶ ἀεὶ ὁ α: κατὰ τὰ ἀριστερὰ χαρακτὴρ τοῦ λογαρίθμου μονάδι ἐλλείπει τοῦ ἀριθμοῦ τῶν χαρακτήρων, ἐξ ὧν συνίσαται ὁ ἀριθμὸς,

ᾧ τι.

ᾧ τινι ὁ λογάριθμος συςοιχεῖ. εὑρεθέντος δὲ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου ὁ κατὰ τὰ ἀριςερὰ συςοιχῶν αὐτῷ ἀριθμὸς ἔςαι ὁ ζητούμενος. Οἷον ἔςω δοθεὶς λογάρ: ὁ α: καὶ ἐπεὶ οὗτος ἄρχεται ἀπὸ τοῦ 2. χαρακτῆρος, ζήτησον αὐτὸν ἐν τῷ κανονίῳ, ἀρχόμενος ἀπὸ τοῦ β, λογαρίθμου, συςοιχοῦντος τῷ γ, ἀριθμῷ, καὶ εὑρεθήσεται ὁ α, συςοιχῶν τῷ δ, ἀριθμῷ. ὁ δ, ἄρα ἀριθμὸς ἐςὶν ὁ ζητούμενος, οὗ λογάριθμος ὁ δοθεὶς α.

α.	220412.00
β.	200000.00
γ.	100
δ.	160.

Εἰ δὲ ὁ δοθεὶς λογάριθμος οὐχ εὑρίσκεται ἐν τοῖς κανονίοις ὁ αὐτὸς κατὰ πάντας τοὺς αὐτοῦ χαρακτῆρας, ἀλλὰ μετά τινος διαφορᾶς κατὰ τὸν α: μόνον χαρακτῆρα, μεταλλαττέσθω ὁ α: αὐτοῦ χαρακτὴρ, ὡς προηρμήνευται, ἢ τῷ συςοιχοῦντι αὐτῷ ἀριθμῷ προστιθέσθωσαν τζίφραι. καὶ εἰ μὲν ὁ α: τοῦ δοθέντος λογαρίθμου χαρακτὴρ μείζων εἴη τοῦ ἐν τοῖς πίναξιν εὑρισκομένου, προστιθήτωσαν τῷ ἀριθμῷ, ᾧτινι ὁ ἐν τοῖς κανονίοις εὑρεθεὶς συςοιχεῖ λογάριθμος τοσαῦται τζίφραι, ὥςε γενέσθαι τὸ πλῆθος τῶν χαρακτήρων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μονάδι ὑπερέχον τοῦ α: κατὰ τὰ ἀριςερὰ χαρακτῆρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου. Οἷον ἔςω λογάριθμος ὁ ε. καὶ ἐπεὶ οὗτος εὑρισκόμενος ἐν τῷ κανονίῳ συςοιχεῖ τῷ ζ, ἀριθμῷ, προστιθήτω τῷ ζ, ἀριθμῷ τζίφρα μία. ὅτι καὶ ὁ δοθεὶς λογάριθμος τοῦ ἐν τῷ κανονίῳ εὑρεθέντος μονάδι ὑπερέχει. καὶ ὁ γενόμενος η, ἐςὶν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς, οὗ λογάριθμος ὁ δοθεὶς ε.

ε.	251851.39
ζ.	33
η.	330

Ἐὰν δὲ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου ὁ α: χαρακτὴρ ἐλάττων ᾖ τοῦ α: χαρακτῆρος τοῦ ἐν τῷ κανονίῳ εὑρισκομένου, ἀφαιρεθήτωσαν ἀπὸ τοῦ ᾧ συςοιχεῖ ἀριθμοῦ ὁ ἐν τῷ κανονίῳ εὑρισκόμενος λογάριθμος, τοσοῦτοι χαρακτῆρες δεξιόθεν, ὥςε τὸν ἐναπολειπόμενον ἀριθμὸν μονάδι ὑπερέχειν τοῦ α: κατὰ τὰ ἀριςερὰ χαρακτῆρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου, τῷ πλήθει δηλ: τῶν αὐτοῦ χαρακτήρων, ἐκ δὲ τῶν ἀφαιρουμένων χαρακτήρων συνιςάσθω λεπτὸν δεκαδικὸν, καὶ ὁ ἐναπολειπόμενος ἀριθμὸς μετὰ τοῦ συνιςαμένου λεπτοῦ ἔςαι ὁ ζητούμενος, οὗ λογάριθμος ὁ δοθείς. Οἷον δοθήτω λογάριθμος ὁ θ, καὶ ζητείσθω ὁ ἀριθμὸς, ᾧτινι ὁ αὐτὸς θ, συςοιχεῖ λογάριθμος. Ζητείσθω οὖν ὁ λογάριθμος θ ἐν τῷ κανονίῳ, καὶ ἐπεὶ οὐχ εὑρίσκεται κατὰ πάντα τινὶ συμφωνῶν, ἀλλ' ἐκτὸς τοῦ α: χαρακτῆρος συμφωνεῖ τῷ κ. ᾧτινι συςοιχεῖ κατὰ τὰ ἀριςερὰ ὁ λ, ἀριθμὸς, ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ λ, ἀριθμοῦ ὁ 5. χαρακτὴρ καὶ ἐναπολειφθήτω ὁ μ, οὗ τινος τὸ πλῆθος τῶν χαρακτήρων μονάδι ὑπερέχει τοῦ α: χαρακτῆρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου. Εἶτα λαμβανομένου τοῦ ν, ἀφαιρεθέντος χαρακτῆρος ἀντὶ ἀριθμητοῦ, τοῦ δὲ ξ, ἀντὶ παρονομαςοῦ συνιςάσθω τὸ ν ξ, λεπτὸν, καὶ προστεθήτω τῷ μ, ἀριθμῷ, ὁ μ, ἄρα ἀριθμὸς μετὰ τοῦ ν ξ, λεπτοῦ ἐςὶν ὁ ζητούμενος, οὗ λογάριθμος ὁ δοθεὶς θ.

θ.	116136.80
κ.	216136.80
λ.	145
μ.	14
ν.	5
ξ.	10
μ.	$14.\frac{5}{10}$
θ.	11613.80

Καὶ

Καὶ ταῦτα μὲν γινέσθω, ἐπειδὰν ἡ διαφορὰ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου πρὸς τὸν ἐν τῷ κανονίῳ εὑρισκόμενον λογάριθμον κατὰ τὸν α: ἐστὶ χαρακτῆρα μόνον, τὸν κατὰ τὰ ἀριστερά. ὅταν δὲ ὁ δοθεὶς λογάριθμος συμφωνεῖ μὲν τῷ ἐν τῷ κανονίῳ εὑρισκομένῳ λογαρίθμῳ κατὰ τὸν α: χαρακτῆρα, διαφέρει δὲ κατὰ τοὺς λοιποὺς, εὑρεθήτω α: ἐν τῷ κανονίῳ ὁ προσεχῶς ἐλάττων λογάριθμος τοῦ δοθέντος, καὶ σημειωθήτω ὁ κατὰ τὰ ἀριστερὰ συστοιχῶν αὐτῷ ἀριθμός. Εἶτα ἀφαιρεθήτω ὁ εὑρεθεὶς προσεχῶς ἐλάττων ἀπό τε τοῦ δοθέντος καὶ τοῦ ἑπομένου, καὶ σημειωθήτωσαν αἱ τούτου πρὸς ἑκάτερον διαφοραὶ, ἐξ ὧν συσταθήτω λεπτὸν ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὴν τοῦ προσεχῶς ἐλάττονος εὑρεθέντος ἀριθμοῦ διαφορὰν πρὸς τὸν δοθέντα, παρονομαστὴν δὲ τὴν αὐτοῦ τούτου διαφορὰν πρὸς τὸν ἑπόμενον. καὶ ὁ εὑρεθεὶς πρότερον ἀριθμὸς, ᾧ τινι συστοιχεῖ ὁ προσεχῶς εὑρεθεὶς ἐλάττων λογάριθμος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου μετὰ τοῦ συσταθέντος λεπτοῦ ἐκ τῶν εἰρημένων διαφορῶν, ἔσται ὁ ζητούμενος, οὗ λογάριθμος ὁ δοθείς.

Οἷον ἔστω δοθεὶς λογάριθμος ὁ α. καὶ ζητηθήτω ὁ τούτου ἀριθμός. Εὑρεθήτω δὴ ἐν τοῖς κανονίοις ὁ προσεχῶς αὐτοῦ ἐλάττων λογάριθμος, καὶ ἔστω οὗτος ὁ β. ἐπεὶ δὲ ὁ β, συστοιχεῖ τῷ γ, ἀριθμῷ, σημειωθήτω ὁ γ, σημειωθήτω δὲ καὶ ὁ τῷ β, δηλ: ἑπόμενος λογάριθμος, καὶ ἔστω ὁ δ. εἶτα ἀφαιρεθήτω ὁ β, ἀπό τε τοῦ δοθέντος α, καὶ τοῦ ἑπομένου αὐτῷ δ. καὶ ἐπεὶ πρὸς μὲν τὸν δοθέντα α, ἔχει διαφορὰν τὸν ε. πρὸς δὲ τὸν ἑπόμενον δ, τὸν ζ, συνιστάσθω τὸ ε/ζ, λεπτὸν ἐκ τῶν ε, καὶ ζ, διαφορῶν. Εἶτα προστεθήτω τὸ αὐτὸ ε/ζ, λεπτὸν τῷ εὑρεθέντι γ, ἀριθμῷ, καὶ ὁ γ, ἀριθμὸς μετὰ τοῦ ε/ζ, λεπτοῦ ἐστὶν ὁ ζητούμενος, οὗ λογάριθμος ὁ δοθεὶς α..

α.	224268.54
β.	224054.92
γ.	174
δ.	224303.80
β.	224054.92
ζ.	248.88

α.	224268.54.
β.	224054.92.
ε.	213.62.
ζ.	24888

ε. 213.62 / ζ. 24888 — γ 174. ε/ζ. 213.62/24888

Ἐὰν δὲ πλείονα τε ἡ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου διαφορὰ πρὸς τὸν ἐν τῷ κανονίῳ εὑρισκόμενον εἴη κατά τε τὸν α: αὐτοῦ κατὰ τὰ ἀριστερὰ χαρακτῆρα, καὶ λοιποὺς, ἢ πάντας, ἢ τινὰς, εὑρεθήτω α: ὁ προσεχῶς αὐτοῦ ἐλάττων, καὶ ὁ ἑπόμενος τῷ ἐλάττονι λογάρ: εἶτα ἀφαιρεθήτω ἐλάττων παρά τε τοῦ ἑπομένου αὐτῷ λογαρίθμου, καὶ τοῦ δοθέντος, τοῦ α: χαρακτῆρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου μηδόλως ἐπιλογιζομένου, καὶ ἡ μὲν εὑρεθεῖσα διαφορὰ τοῦ προσεχῶς εὑρεθέντος ἐλάττονος πρὸς τὸν αὐτῷ ἑπόμενον εἰλήφθω ἀντὶ α: ὅρου, ἡ δὲ πρὸς τὸν δοθέντα ἀντὶ β': καὶ ἀντὶ γ': ἡ μονὰς μετὰ τοσούτων τζίφρων, ὅσαι καὶ αἱ μονάδες, καθ' ἃς ὁ α: τοῦ δοθέντος λογαρίθμου χαρακτὴρ ὑπερέχει τοῦ α: χαρακτῆρος, τοῦ εὑρισκομένου πρώτως ἐλάττονος ἐν τῷ κανονίῳ τοῦ δοθέντος. καὶ γινέγενέσθω μέθοδος τῶν ξιῶν, καὶ ὁ εὑρεθεὶς δ': ἀνάλογος προστεθήτω ἐφεξῆς τοῖς χαρακτῆρσι τοῦ εὑρεθέντος ἀριθμοῦ, ᾧτινι συστοιχεῖ ὁ εὑρεθεὶς προσεχῶς ἐλάττων λογάριθμος, καὶ ὁ γενόμενος ἔσται ὁ ζητούμενος. Οἷον ἔστω δοθεὶς λογάριθμος ὁ α, καὶ ζητηθήτω ὁ τούτῳ συστοιχῶν κατὰ τὰ ἀριστερὰ ἀριθμός. Εὑρεθήτω δὲ ὁ προσεχῶς ἐλάττων λογάρ: τοῦ δοθέντος, καὶ ἔστω ὁ β: ἀριθμὸς δὲ ᾧ συστοιχεῖ ὁ β, ἔστω ὁ γ, καὶ τοῦ β, ἑπόμενος λογάριθμος ἔστω ὁ δ. τούτων οὖν εὑρεθέντων ἀφαιρεθήτω ὁ β, ἀπὸ τοῦ δ, καὶ α. καὶ ἔστω τοῦ β, λογαρίθ: πρὸς μὲν τὸν δ, διαφορὰ ὁ ε, πρὸς δὲ τὸν α, ὁ ζ. εἶτα ληφθήτω ἀντὶ α: ὅρου ὁ ε, ἀντὶ β': δὲ ὁ ζ, καὶ ἀντὶ γ': ὁ 100. ὁ γὰρ 4 α: χαρακτὴρ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου δυσὶ μονάσιν ὑπερέχει τοῦ 2 α: χαρακτῆρος τοῦ εὑρεθέντος πρώτως ἐλάττονος τοῦ δοθέντος, δηλ: τοῦ β, καὶ γενέσθω μέθοδος τῶν ξιῶν, καὶ εὑρεθήσεται δ': ἀνάλογος ὁ η. Προστεθήτω δὴ ὁ η, τοῦ γ, ἐφεξῆς, καὶ γενέσθω ὁ θ. καὶ πάντως γε ὁ θ, ἀριθμὸς μετὰ τοῦ προσκειμένου αὐτῷ λεπτοῦ ἐστὶν ὁ ζητούμενος, οὗ λογάριθμος ὁ δοθεὶς α.

α. 414732.75
β. 214612.80
γ. 140
δ. 214921.91

δ. 214921.91
β. 214612.80
ε. 309.11

α. 414732.75
β. 214612,80
ζ. 119.95

α': 30911. β': 11995 γ': 100. δ': 38. η. 24882/30911

θ': 14038 24882/30911

Πρότασις ΚΕ':

Ἀριθμοῦ δοθέντος τὴν τετράγωνον αὐτοῦ ῥίζαν εὑρεῖν.

Δοθήτω ἀριθμὸς ὁ α, καὶ ζητηθήτω ἡ τετράγωνος αὐτοῦ ῥίζα. Εὑρεθήτω δὴ ἐν τοῖς κανονίοις ὁ λογάριθμος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ κατὰ τὴν κ β': τοῦ παρόντος, καὶ ἔστω οὗτος ὁ β. τούτου δὲ ἐπὶ τὸν 2, διῃρημένου, ἔστω πηλίκον ὁ γ. Εἶτα ζητηθήτω ὁ γ, ἐν τοῖς κανονίοις κατὰ τὴν κ δ': τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἐπεὶ εὑρίσκεται συστοιχῶν τοῦ δ, πάντως γε ὁ δ, ἀριθμὸς ῥίζα ἐστὶ τετράγωνος τοῦ δοθέντος α. κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ζ': τοῦ παρόντος.

α, 169
β. 222788. 67
γ. 111399. 33
δ. 13

Πρότασις Κϛʹ:

Ἀριθμοῦ δοθέντος τὴν κυβικὴν αὐτοῦ ῥίζαν εὑρεῖν.

Ἔστω δοθεὶς ἀριθμὸς ὁ α., καὶ ζητηθήτω ἡ τούτου κυβικὴ ῥίζα. Εὑρεθήτω δὴ κατὰ τὴν κβʹ: τοῦ παρόντος ὁ λογάριθμος τοῦ δοθέντος α, καὶ ἔστω οὗτος ὁ β, οὗτινος ἐπὶ τὸν 3 διῃρημένου, ἔστω πηλίκον ὁ γ. Εἶτα ζητηθήτω ὁ γ, ἐν τοῖς κανονίοις, καὶ ἐπεὶ εὑρίσκεται συστοιχῶν τῷ δ, ἀριθμῷ. ὁ δ, πάντως γε ἀριθμὸς ῥίζα κυβική ἐστι τοῦ δοθέντος α, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ηʹ: τοῦ παρόντος.

α.	125
β.	209691.60
γ.	69897.00
δ.	5

Πρότασις ΚΖʹ:

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων τρίτον γεωμετρικῶς ἑξῆς ἀνάλογον εὑρεῖν.

Ἔστωσαν δοθέντες ἀριθμοὶ οἱ ε ζ, καὶ ζητηθήτω ὁ γʹ: ἑξῆς αὐτῶν ἀνάλογος γεωμετρικῶς, ὥστε εἶναι, ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ὁ ζ, πρὸς ἐκεῖνον. Εὑρεθήτωσαν δὴ οἱ λογάριθμοι τῶν ε, καὶ ζ, δοθέντων κατὰ τὴν κβʹ: τοῦ παρόντος, καὶ ἔστω λογάριθμος τοῦ μὲν ε, ὁ η, τοῦ δὲ ζ, ὁ θ. Εἶτα διπλασιασθήτω ὁ θ, καὶ τοῦ γενομένου κ, ἀφαιρεθήτω ὁ η, ὁ δὲ ἐναπολειπόμενος λ, ζητηθήτω ἐν τοῖς κανονίοις κατὰ τὴν κδʹ: τοῦ αὐτοῦ. καὶ ἐπεὶ εὑρίσκεται συστοιχῶν τῷ μ, ὁ μ, πάντως γέ ἐστιν ὁ ζητούμενος κατὰ τὴν βʹ: τοῦ παρόντος.

ε.	15
ζ.	45
μ.	135
η.	117609.13.
θ.	165327.25
	2
κ.	330642.50
η.	117609.13
λ.	213033.37

Πρότασις ΚΗ:

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων τέταρτον γεωμετρικῶς ἀνάλογον εὑρεῖν.

Ἔστωσαν δοθέντες ἀριθμοὶ οἱ α, β, γ. καὶ ζητηθήτω δʹ: αὐτῶν γεωμετρικῶς ἀνάλογος. Εὑρεθήτωσαν δὴ κατὰ τὴν κβʹ: τοῦ παρόντος οἱ λογάριθμοι τῶν α, β, γ, δοθέντων ἀριθμῶν. καὶ ἔστω τοῦ μὲν α, λογάριθμος ὁ δ, τοῦ δὲ β, ὁ ε, τοῦ δὲ γ, ὁ ζ. Συναφθήτωσαν τοίνυν ἀλλήλοις οἱ ε, καὶ ζ, καὶ τοῦ γενομένου η, ἀφαιρεθήτω ὁ δ, ὁ δὲ ἐναπολειφθεὶς θ, ζητηθήτω ἐν τοῖς κανονίοις κατὰ τὴν κδʹ: τοῦ αὐτοῦ. καὶ

α.	6.	δ.	77815.13
β.	36.	ε.	155630.25
γ.	25.	ζ.	139794.00
κ.	150.	η.	295424.25
		δ.	77815.13
		θ.	217609.12

ἐπεὶ

ἐπεὶ δ' εὑρίσκεται ὁ αὐτὸς θ, συστοιχῶν τῷ κ, ἀριθμῷ, δῆλον ὅτι ὁ κ, ἀριθμός ἐστὶν ὁ ζητούμενος κατὰ τὴν α: τοῦ παρόντος. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν κ.

Ἄ Λ Λ Ο Σ.

Ἀφαιρεθήτω ὁ δ, ἀπὸ τοῦ ε, καὶ ὁ ἐναπολειπόμενος λ, συναφθήτω τῷ ζ, καὶ ὁ γενόμενος μ, ἔσται λογάριθμος τοῦ ζητουμένου. τῶν γὰρ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ λογάριθμοι ἴσῃ ἀλλήλων ὑπεροχῇ ὑπερέχουσιν, ὡς εἴρηται ἐν ἀρχῇ τῆς κβ': τοῦ παρόντος. ἐπεὶ δὲ κἀνταῦθα δίδονται οἱ α, β, γ, ἀριθμοί, καὶ ζητεῖται δ': ὥστε ἔχειν πρὸς αὐτὸν τὸν γ, ὡς ἔχει ὁ α, πρὸς τὸν β, δῆλον ὅτι ὁ τοῦ α, λογάριθμος τῇ αὐτῇ ὑπερέχεται ὑπεροχῇ ὑπὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ β, ᾗ τινι ὑπερέχεται καὶ ὁ τοῦ γ, λογάριθμος ὑπὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ζητουμένου δ': ὑγιῶς ἄρα ἀφαιρεῖται μὲν ὁ δ, ἀπὸ τοῦ ε, ἵνα ἡ ὑπεροχὴ γνωσθῇ, προστίθεται δὲ ἡ αὐτὴ ὑπεροχὴ τῷ ζ, ἵνα γένηται ὁ ζητούμενος λογάριθμος.

ε.	155630.25.
δ.	77815.13
λ.	77815.12.
ζ.	139794.00
μ.	217609.12

Πρότασις ΚΘ':

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων τέταρτον γεωμετρικῶς ἀνάλογον ἀντιστρόφως εὑρεῖν.

Ἔστωσαν δοθέντες ἀριθμοὶ οἱ α β γ, καὶ ζητείσθω δ': γεωμετρικῶς ἀνάλογος ἀντιστρόφως, ὥστε εἶναι ὡς ὁ β, πρὸς τὸν γ, ὁ ζητούμενος πρὸς τὸν α. Εὑρεθήτωσαν δὴ οἱ λογάριθμοι τῶν α β γ, κατὰ τὴν κβ': τοῦ παρόντος, καὶ ἔστωσαν οὗτοι οἱ δ ε ζ. τούτων δ' εὑρεθέντων συναφθήτωσαν ἀλλήλοις οἱ δ ε, καὶ τοῦ γενομένου η, ἀφαιρεθήτω ὁ ζ, ὁ δὲ ἐναπολειπόμενος θ, ζητηθήτω ἐν τοῖς κανονίοις κατὰ τὴν κδ': τοῦ αὐτοῦ. καὶ ἐπεὶ οὗτος συστοιχεῖ τῷ κ, ὁ κ, πάντως ἐστὶν ὁ ζητούμενος. Ἐὰν γὰρ δῶμεν τοὺς γ β α, καὶ ζητήσωμεν δ': γεωμετρικῶς ἀνάλογον εὐτάκτως, πάντως γε κατὰ τὴν ἀνωτέρω ὀφείλομεν συνάπτειν τοὺς ε, καὶ δ, ἀλλήλοις, ἀφαιρεῖν δὲ τοῦ γενομένου τὸν ζ, καὶ ὁ ἐναπολειπόμενος θ, δώσει τὸν κ. καὶ ἔσται ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν β, ὁ α, πρὸς τὸν κ. ὥστε καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ὁ β, πρὸς τὸν γ, ὁ κ, πρὸς τὸν α. ὅπερ ἔδει τὸ προσαχθέν.

κ.	6.	θ.	77815.13
α.	36.	δ.	155630.25
β.	25.	ε.	139794.00
γ.	150.	ζ.	217609.12
		η	295424.25
		ζ.	217609.12
		θ.	77815.13

Πρότασις Λ':

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, τέταρτον εὑρεῖν ἐν ὑποδιπλασίονι λόγῳ τοῦ α: πρὸς τὸν β':

Ἔστωσαν δοθέντες ἀριθμοὶ οἱ α β γ, καὶ ζητείσθω ὁ δ', ἀνάλογος, ὥστε εἶναι τὸν γ, πρὸς αὐτὸν ἐν λόγῳ ὑποδιπλασίονι, ἥπερ ὁ α, πρὸς τὸν β. Εὑρεθήτωσαν δὴ διὰ τῆς κβ': τοῦ παρόντος οἱ λογάριθμοι τῶν α β γ, δοθέντων. καὶ τοῦ μὲν α, ἔστω λογάριθμος ὁ δ, τοῦ δὲ β, ὁ ε, καὶ τοῦ γ, ὁ ζ. εἶτα ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ε, ὁ δ. ὁ δὲ ἐναπολειφθεὶς η, διπλασιασθήτω, καὶ ὁ γενόμενος θ, συναφθήτω τῷ ζ, καὶ γενήσεται ὁ κ. ὅστις ζητηθήτω ἐν τοῖς κανονίοις, καὶ ἐπεὶ εὑρίσκεται συστοιχῶν τῷ λ, ἀριθμῷ, πάντως γε ὁ λ, ἀριθμός ἐστιν ὁ ζητούμενος. Ἔστωσαν γὰρ γεωμετρικῶς ἑξῆς ἀνάλογον οἱ μ ν ξ ο, ἀριθμοί, ὧν λογάριθμοι οἱ π ρ σ τ. καὶ γοῦν τὰ πρότερον πολλάκις εἰρημένα οἱ π ρ σ τ, λογάριθμοι ἴσῃ ἀλλήλων ὑπερέχουσιν ὑπεροχῇ, ὅσον ἄρα ὑπερέχει ὁ ρ τοῦ π, ὑπερέχει καὶ ὁ σ τοῦ ρ. καὶ ὁ τ, τοῦ σ. ὥστε ὁ μὲν σ, ὑπερέχει τοῦ π, διπλῇ ὑπεροχῇ ἢ ὁ ρ, τοῦ αὐτοῦ π. ὁ δὲ τ, τριπλῇ, καὶ ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς ἀτάκτως, πλειόνων ὄντων τῶν ἀριθμῶν κατὰ τὴν τοῦ δοθέντος λόγου ἐν τοῖς ἀριθμοῖς αὔξησιν, αὔξεται καὶ ἡ ὑπεροχή. ὁ γὰρ ξ, πρὸς τὸν μ, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ὁ ν, πρὸς τὸν αὐτὸν μ, ὁ δὲ ο, τριπλασίονα. ἐπεὶ ἄρα καὶ ὁ λ, ἐν διπλασίονι ζητεῖται λόγῳ πρὸς τὸν γ, ἥπερ ὁ β, πρὸς τὸν α. ἄρα καὶ ἡ τοῦ θ, πρὸς τὸν ζ, ὑπεροχὴ διπλασία ἐστὶ τῆς τοῦ ε, πρὸς τὸν δ, ὑπεροχῆς. διὸ δὴ τοῦ δ, ἀπὸ τοῦ ε, ἀφαιρουμένου, ὁ ἐναπολειπόμενος η, διπλασιαζόμενος προστίθεται τῷ ζ. καὶ πάντως γε ὁ γενόμενος κ, λογάριθμός ἐστι τοῦ ζητουμένου.

α.	4.	δ.	60206.00
β.	8.	ε.	90309.00
γ.	20.	ζ.	130103.00
		θ.	60206.00
λ.	80.	κ.	190309.00
		ε.	90309.00
		δ.	60206.00
		η.	30103.00
		θ.	60206.00
μ.	2.	π.	30103.00
ν.	4.	ρ.	60206.00
ξ.	8.	σ.	90309.00
ο.	16.	τ.	120412.00
δ.	30.	η.	147712.13
ε.	10.	θ.	100000.00
ζ.	18.	κ.	125527.25
μ.	2.	λ.	30103.00

Εἰ δέ γε οἱ ὅροι ἀνάπαλιν ὦσιν διδόμενοι, τοὐναντίον ὀφείλομεν ποιεῖν ἐπὶ τῶν αὐτῶν λογαρίθμων. Ἔστωσαν γὰρ δοθέντες οἱ δ, ε, ζ, ἀριθμοί, καὶ ζητηθήτω ὁ δ': ὥστε τὸν ζ, πρὸς ἐκεῖνον ἐν διπλασίονι λόγῳ εἶναι, ἥπερ ὁ δ, πρὸς τὸν ε. Εὑρεθήτωσαν δὴ κατὰ τὰ εἰρημένα οἱ λογάριθμοι τῶν δοθέντων ἀριθμῶν δ ε ζ, καὶ ἔστωσαν οὗτοι οἱ η θ κ. Εἶτα ἀφαιρεθήτω ὁ θ, ἀπὸ τοῦ η, καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς διπλασιαζόμενος ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ κ, καὶ ὁ ἐναπολειπόμενος ἔσται λογάριθμος τοῦ ζητουμένου δ': ἀναλόγου. ἐπεὶ δὲ πράξεως γενομένης εὑρίσκεται ὁ λ, οὗτος δὲ συστοιχεῖ τῷ μ. ὁ μ, ἄρα ἀριθμός ἐστιν ὁ ζητούμενος. ἐπεὶ

γὰρ

γὰρ ὁ ζ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ πρὸς τὸν μ, ἥπερ ὁ δ, πρὸς τὸν ε, πάντως γε κατὰ τὰ εἰρημένα καὶ ὁ κ, τοῦ λ, διπλασίονι ὑπερέχει ὑπεροχῇ, ἥπερ ὁ η, τοῦ θ. διά τοι τοῦτο ἀφαιρεῖται ὁ θ, ἀπὸ τοῦ η, καὶ ὁ εὑρεθεὶς διπλασιάζεται, ὁ δὲ γενόμενος ἀφαιρεῖται τοῦ κ.

Πρότασις ΛΑ΄.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων ἐν οἱῳδήποτε λόγῳ, ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἑξῆς ἀνάλογον ὅσους ἂν ἐπιτάξῃ τις.

α.	2.	γ.	30103.00
β.	3.	δ.	47712.13

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες α β, ἀριθμοὶ ἐν διπλασίονι λόγῳ· καὶ ζητηθήτωσαν εὑρεθῆναι τρεῖς ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἑξῆς ἀνάλογοι τοῖς δοθεῖσιν α β. Εὑρεθήτωσαν δὲ ἐν τοῖς κανονίοις οἱ τῶν δοθέντων α β, λογάριθμοι, καὶ ἔστωσαν οἱ γ δ. εἶτα ἀφαιρεθήτω ὁ γ, ἀπὸ τοῦ δ, καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς συναφθήτω τῷ δ, καὶ ὁ γενόμενος ἔσται λογάριθμος τοῦ ἑπομένου τῷ β, ἀμέσως. τούτῳ δ' αὖθις συναπτόμενος ὁ αὐτὸς ἐναπολειφθεὶς ἀριθμὸς δώσει σοι τὸν ἑπόμενον τῷ εὑρεθέντι, ἤτοι δ΄: ἀνάλογον. ἐὰν δὲ καὶ τῷ δ΄: συναφθῇ ὁ πρότερον ἐναπολειφθεὶς ἀριθμὸς, εὑρεθήσεται ὁ ε΄: ἀνάλογος. ὁ λόγος ἐκ τῶν ἀνωτέρω σαφής. οἱ γὰρ τῶν ἐν οἱῳδήποτε λόγῳ ἀριθμῶν λογάριθμοι ἐν συνεχεῖ ὄντων ἀναλογίᾳ ἴσῃ ἀλλήλων ὑπερέχουσιν ὑπεροχῇ, ἀλλ' ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ γ, ἀπὸ τοῦ δ, γνωρίζεται ἡ διαφορὰ τῶν ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ ἀριθμῶν. ὑγιῶς ἄρα προστίθεται ὁ ἐναπολειφθεὶς τῷ προηγουμένῳ, ἵνα γνωσθῇ ὁ τούτῳ ἑπόμενος.

Πρότασις ΛΒ΄.

Δύο δοθέντων ἀριθμῶν, μέσον ἀνάλογον αὐτοῖς εὑρεῖν ἐν γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ.

α.	2.	γ.	30103.00
γ.	4.	ε.	60206.00
β.	8.	δ.	90309.00

Ἔστωσαν δοθέντες ἀριθμοὶ οἱ α β, καὶ ζητηθήτω αὐτῶν μέσος ἀνάλογος. Εὑρεθήτωσαν δὴ οἱ τῶν α β, δοθέντων ἀριθμῶν λογάριθμοι, καὶ ἔστωσαν ἤτοι οἱ γ δ. Εἶτα ἀφαιρεθήτω ὁ α, ἀπὸ τοῦ β, καὶ εὑρεθήσεται ἡ πρὸς ἀλλήλους αὐτῶν διαφορά. ἧς τινος δίχα διαιρουμένης τὸ ἥμισυ αὐτῆς συναφθήτω τῷ γ, ἢ ἀφαιρεθήτω τοῦ δ, καὶ γνωσθήσεται ὁ λογάριθμος τοῦ ζητουμένου. ὅστις εὑρισκόμενος ἐν τοῖς κανονίοις δώσει σοι τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν, δηλ: τὸν γ. Ἢ καὶ οὕτω, συναφθήτωσαν ἀλλήλοις οἱ τῶν α, καὶ β, λογάρ:, καὶ ὁ γενόμενος μερισθήτω ἐπὶ τὸν 2. καὶ τὸ πηλίκον ἔσται ὁ λογάρ: τοῦ ζητουμένου ἀριθ: τῶν γὰρ ἑξῆς ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἀναλόγων ἀριθμῶν οἱ λογάριθμοι ἴσῃ ἀλλήλων ὑπερέχουσιν ὑπεροχῇ, καὶ ὅταν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν ὁ ἐκ τῶν ἄκρων τῶν ἐν αὐτοῖς λογαρίθμων διπλάσιός ἐστι τοῦ μέσου.

Πρότασις ΛΓʹ.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων, ὅσους ἂν ἐπιτάξῃ τις μέσους εὑρεῖν ἀναλόγους.

δ.	2.	ζ.	30103.00
ξ.	4.	μ.	60206.00
ο.	8.	ν.	90309.00
ε.	16.	η.	120412.00
		θ.	30103.00
		κ.3	90309.00
		λ.	30103.00

Ἔστωσαν δοθέντες ἀριθμοὶ οἱ δ ε, καὶ ζητηθήτωσαν δύο μέσοι αὐτῶν ἀνάλογοι. Εὑρεθήτωσαν δὴ ἐν τοῖς κανονίοις οἱ λογάριθμοι τῶν δ, καὶ ε. καὶ ἔστω τοῦ μὲν δ, λογάριθμος ὁ ζ, τοῦ δὲ ε, ὁ η. εἶτα ἀφαιρεθήτω ὁ ζ, ἀπὸ τοῦ η, καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς θ, μεριθήτω ἐπὶ τὸν κ, καὶ τὸ πηλίκον λ, συναφθήτω τῷ ζ, καὶ γενήσεται ὁ μ. τῷ δὲ μ, αὖθις συναφθήτω ὁ αὐτὸς λ, καὶ γενήσεται ὁ ν. οἱ δὲ μ ν, εὑρεθήτωσαν ἐν τοῖς κανονίοις, καὶ ἐπεὶ ὁ μὲν μ, συστοιχεῖ τῷ ξ, ὁ δὲ ν, τῷ ο, δῆλον ὅτι οἱ ξ, καὶ ο, εἰσὶν οἱ ζητούμενοι. Ἐὰν δὲ ζητηθῶσι τρεῖς, μεριθήτω ἡ τῶν ἄκρων διαφορὰ, δηλ: ὁ θ, ἐπὶ τὸν τέσσαρα, οἱ δὲ τέσσαρες, ἐπὶ τὸν πέντε, καὶ ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς ἀναλόγως. δύο μὲν γὰρ ζητουμένων μέσων ἀναλόγων, τρία ἔσται τὰ διαστήματα, τριῶν δὲ, τέσσαρα, τεσσάρων δὲ, πέντε. δύο γὰρ τοῖς δοθεῖσι δυσὶ παρεντιθεμένων ἀριθμῶν, τέσσαρές ἐστιν οἱ ὅροι, τριῶν δὲ, πέντε. τεσσάρων δὲ, ἕξ. ὥστε οἱ μὲν ὅροι δυάδι ὑπερέχουσι τῶν ζητουμένων, τὰ δὲ διαστήματα μονάδι τῶν ὅρων μὲν ἐλλείπουσι, τῶν δὲ ζητουμένων ὑπερέχουσι. κατὰ δὲ τὴν δʹ: τοῦ παρόντος ἡ τοῦ ἐσχάτου διαφορὰ πρὸς τὸν αʹ: ἐν τοῖς ἀριθμητικῶς οὖσιν ἀνάλογον ἀριθμοῖς μεριζομένη ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν διαστημάτων παρέχει τὴν διαφορὰν τῶν μειζόνων πρὸς τοὺς ἐλάττονας. ὑγιῶς ἄρα εἴρηται, ὅτι δύο ἀριθμῶν δοθέντων, ἐὰν μὲν δύο ζητηθῶσι μέσοι ἀνάλογοι προσήκει τὴν τοῦ ἐσχάτου πρὸς τὸν αʹ: διαφορὰν ἐπὶ τὸν τρία διαιρεῖν, ἐὰν δὲ ζητηθῶσι τρεῖς, ἐπὶ τὸν τέσσαρα, καὶ ἀεὶ ἐπ' ἀριθμόν τινα μονάδι ὑπερέχοντα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ζητουμένων.

Τέλος τοῦ πρώτου τῆς Τριγωνομετρίας μέρους, καὶ δεκάτου βιβλίου τοῦ αὐτοῦ.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΔΙΑΛΥΣΕΩΣ.

ΟΡΟΙ.

Α': Διάλυσις τριγώνων ἐστὶν ἔφοδος ἀποδεικτικὴ πρὸς εὕρεσιν ὅτι μάλιστα συμπλήσασα τῶν πλευρῶν παντὸς τριγώνου καὶ γωνιῶν, καὶ αὐτοῦ ἔτι τοῦ ἐμβαδοῦ διά τινων ἐγνωσμένων, ἢ γοῦν δεδομένων ἐν αὐτοῖς πρὸς γνῶσιν τῶν λοιπῶν ἡμᾶς ἄγουσα.

Β': Ἐπὶ παντὸς τριγώνου δύο τῶν αὐτοῦ γωνιῶν δοθεισῶν, καὶ ἡ λοιπὴ γινώσκεται· αἱ τρεῖς γὰρ τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι, ἤτοι μοιρῶν ρπ, κατὰ τὴν λβ': τοῦ α': τῶν Στοιχείων.

Γ': Ἐπὶ παντὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου μιᾶς δοθείσης γωνίας, αἱ λοιπαὶ γινώσκονται. τὰ γὰρ ἰσόπλευρα καὶ ἰσογώνιά εἰσι κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ε': τοῦ α': Εὐκλείδου.

Δ': Ἐπὶ παντὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου μιᾶς δοθείσης γωνίας, καὶ αἱ λοιπαὶ γινώσκονται. τούτων γὰρ αἱ πρὸς τὴν βάσιν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ κατὰ τὴν ε': τοῦ αὐτοῦ:

Ε': Ἐπὶ παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου μιᾶς τῶν παρὰ τὴν ὀρθὴν γωνιῶν δοθείσης, ἡ λοιπὴ γινώσκεται. αἱ δύο γὰρ αἱ παρὰ τὴν ὀρθὴν ἴσαι εἰσὶ μιᾷ ὀρθῇ, ἤτοι μοιρῶν ϙ.

ς': Τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου δοθεισῶν αἱ τούτου πλευραὶ οὐ γνωσθήσονται. τῶν γὰρ ἀνίσων τὰ ὅμοια ἰσογώνια μέν ἐστιν, οὐ μὴν δὲ καὶ ἰσόπλευρα.

Πρότασις Α':

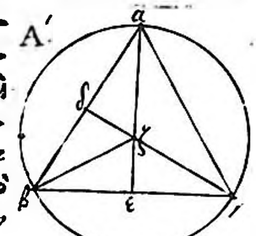
Παντὸς εὐθυγράμμου τριγώνου αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσι τοῖς τῶν ἀπεναντίων γωνιῶν ἡμιτόνοις.

Ἔστω α': τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ αβγ. Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ αβ, αὐτοῦ πλευρὰ πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αγβ, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον

τῆς

τῆς ὑπὸ βαγ. Γραφήτω δὴ περὶ τὸ αβγ, τρίγωνον κύκλος ὁ αβγ, κατὰ τὴν ε': τοῦ δ': τοῦ Στοιχ: καὶ εὑρεθήτω τὸ τοῦ κύκλου κέντρον κατὰ τὴν α: τοῦ γ': τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἔστω τοῦτο τὸ ζ. Εἶτα διαιρεθήτω δίχα ἑκατέρα τῶν αβ, βγ, κατὰ τὰ δ καὶ ε, σημεῖα. καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, κέντρου ἀχθήτωσαν αἱ ζδ, ζε, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ζβ, ζγ. ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν αβ, βγ, δίχα τέτμηται, καὶ αἱ ζδ, ζε, διὰ τοῦ κέντρου διέρχονται, πάντως γε κατὰ τὴν γ': τοῦ γ': τοῦ αὐτοῦ ἑκατέρα τῶν ζδ, ζε, καθετός ἐστιν. ὥστε καὶ τῶν βδ, βε, ἑκατέρα καθετός ἐστιν, ἡ μὲν ἐπὶ τῆς ζδ, ἡ δὲ ἐπὶ τῆς ζε. καὶ κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ β': τοῦ

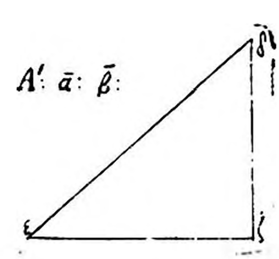
Trig. Anal. lib. 1. Fig. 1.



παρόντος, ἡ μὲν βδ, ὀρθὸν ἡμίτονόν ἐστι τῆς ὑπὸ βζδ, γωνίας, ἡ δὲ βε, τῆς ὑπὸ βζε. Αὖθις ἐπεὶ ἡ βγ, δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ζε, καὶ αἱ ζβ, ζγ, ἴσαι εἰσὶν ὡς ἀπὸ τοῦ κέντρου, κοινὴ δὲ ἡ ζε, δῆλον ὅτι τὰ ζβε, γζε, τρίγωνα ἴσα εἰσί, καὶ τάς τε πλευρὰς καὶ γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων ὑποτεινομένας πλευρῶν ἴσας ἔχει κατὰ τὴν η: τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ. ὥστε ἡ ὑπὸ βζε, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γζε. ἡ ὅλη δὲ ὑπὸ βζγ, τῆς ὑπὸ βζε διπλασία ἐστίν, ἀλλ' ἡ ὑπὸ βζγ, διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ, κατὰ τὴν κ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχ:, ἄρα ἡ ὑπὸ βζε, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βαγ, κατὰ τὸ Ζ': ἀξίωμα. ὥστε ἡ βε, ὀρθόν ἐστιν ἡμίτονον τῆς ὑπὸ βαγ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ βδ, ὀρθόν ἐστιν ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αγβ. ὅτι ἡ ὑπὸ βζδ, ἧς ἡμίτονον δέδεικται ἡ βδ, ἴση ἐστὶ διὰ τὰ αὐτὰ τῇ ὑπὸ αγβ. ὡς δὲ ἡ αβ, ὅλη πρὸς ὅλην τὴν βγ, ἐστὶ καὶ ἡ βδ, ἡμίσεια πρὸς τὴν βε, ἡμίσειαν, καὶ δέδεικται ἡ μὲν βδ, ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αγβ, ἡ δὲ βε, τῆς ὑπὸ βαγ. ἄρα τοῦ αβγ, τριγώνου ὡς ἡ αβ, πλευρὰ πρὸς τὴν βγ, ἐστὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αγβ, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ βαγ, γωνίας.

Ἔστω β': τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ δεζ. Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ εζ, πρὸς τὴν ζδ, οὕτω τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ δ, γωνίας πρὸς τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ ε. κατὰ γὰρ τὸν εἰρημένον γ': ὅρον τοῦ β'. τοῦ α': τοῦ παρόντος ἡ μὲν εζ, ὀρθὸν ἡμίτονόν ἐστι τῆς πρὸς τῷ δ, ἡ δὲ ζδ, τῆς πρὸς τῷ ε. ἄρα ὡς ἡ εζ, πρὸς τὴν ζδ, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ δ, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ ε. ἑκατέρα γὰρ τῶν εζ, ζδ, καὶ ὡς πλευρὰ ἡ αὐτὴ, καὶ ὡς ὀρθὸν ἡμίτονον λαμβάνεται κατὰ διάφορον λόγον.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 2.

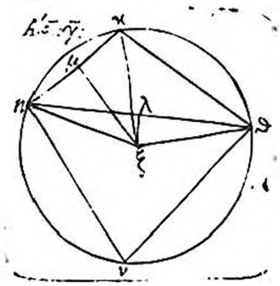


Ἔστω γ': ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ ηθκ, λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ θη, πρὸς

τὴν

τὴν η κ, οὕτω τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον τῆς ὑπὸ η κ θ, ἀμβλείας γωνίας πρὸς τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον τῆς ὑπὸ η θ κ, ὀξείας. Διαιρεθήτωσαν γὰρ αἱ θ η, η κ, δίχα ἑκατέρα κατὰ τὰ λ καὶ μ. καὶ γραφήτω περὶ τὸ η θ κ τρίγωνον κύκλος ὁ κ η ν θ, καὶ ἀπὸ τοῦ ξ, κέντρου ἀχθήτωσαν αἱ ξ λ, ξ μ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ξ η, ξ θ, ξ κ, η ν, θ ν, καὶ ἐπεὶ κατὰ τὰ προειρημένα ἡ η λ, ὀρθόν ἐστιν ἡμίτονον τῆς ὑπὸ η ξ λ, κάθετος γάρ ἐστιν ἐπὶ τῆς ξ λ, κατὰ τὴν γ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχ:, ἡ δὲ ὑπὸ η ξ λ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ η ν θ, διὰ τὸ διπλασίαν εἶναι τὴν ὑπὸ η ξ θ, ἑκατέρας, ὡς προδέδεικται, πάντως γε ἡ η λ, ὀρθόν ἐστιν ἡμίτονον καὶ τῆς ὑπὸ η ν θ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ η ν θ, παραπλήρωμά ἐστι τῆς ὑπὸ η κ θ, πρὸς δύο ὀρθὰς, κατὰ τὴν κ β': τοῦ γ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα κατὰ τὸν δ': ὅρον τοῦ β': τοῦ α: τοῦ παρόντος ἡ η λ, ὀρθόν ἐστιν ἡμίτονον καὶ τῆς ὑπὸ η κ θ, ἀμβλείας γωνίας. Ὅτι δὲ καὶ ἡ η μ, ὀρθόν ἐστιν ἡμίτονον τῆς ὑπὸ η θ κ, δῆλον. ἔστι γὰρ ἡ αὐτὴ η μ, ὀρθὸν ἡμίτονον τῆς ὑπὸ η ξ μ, ἡ δὲ ὑπὸ η ξ μ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ η θ κ, διὰ τὸ διπλασίαν εἶναι τὴν ὑπὸ η ξ κ, τῆς τε ὑπὸ η ξ μ, καὶ η θ κ, ἀλλ' ὡς ὅλη ἡ η θ, πρὸς ὅλην τὴν η κ, οὕτω καὶ ἡ η λ, ἡμίσεια πρὸς τὴν η μ, ἡμίσειαν. ἄρα ὡς ἡ θ η, πλευρὰ πρὸς τὴν η κ, πλευρὰν, οὕτω τὸ τῆς η κ θ, ὀρθὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ τῆς ὑπὸ η θ κ, ὀρθὸν ἡμίτονον. ὅπερ ἦν τὸ ὑποτεθέν. πάντως ἄρα διευγράμμου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 3.



Πρότασις Β':

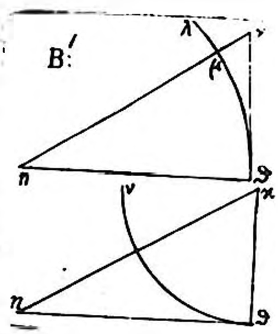
Ἐπὶ παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ μὲν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευραὶ ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς προσκειμένης γωνίας τῇ ἡγουμένῃ πλευρᾷ, καὶ ἀνάπαλιν. αἱ δὲ περὶ ἑκατέραν τῶν λοιπῶν γωνιῶν, ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνουσαν τῆς αὐτῆς γωνίας, καὶ ἀνάπαλιν.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ η θ κ, Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ η θ, πλευρὰ πρὸς τὴν θ κ, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς πρὸς τῷ η, γωνίας, τῆς τῇ η θ, ἡγουμένῃ πλευρᾷ προσκειμένης. καὶ πάλιν ὡς ἡ κ θ, πρὸς τὴν θ η, τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς πρὸς τῷ κ, γωνίας, προσκειμένης καὶ αὐτῆς τῇ θ κ, ἡγουμένῃ πλευρᾷ, καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἡ κ θ, πρὸς τὴν θ η, κατὰ τὴν α: ἀναλογίαν, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς πρὸς τῷ η, γωνίας πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον. ὡς δὲ ἡ η θ, κατὰ τὴν β': ἀναλογίαν, πρὸς τὴν θ κ, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς πρὸς τῷ κ, γωνίας πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον. καὶ ἔτι ὡς ἡ θ η,

πρὸς

πρὸς τὴν η κ, τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνουσαν τῆς πρὸς τῷ η, γωνίας· ὡς δὲ ἡ θ κ, πρὸς τὴν κ η, ἐπὶ τοῦ β': σχήματος, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνουσαν τῆς πρὸς τῷ κ, γωνίας. Κέντρῳ γὰρ τῷ η, καὶ διαστήματι τῷ η θ, γραφήτω τόξον τὸ θ λ. καὶ ἐπεὶ ἐν τούτῳ ἡ μὲν η θ, ὁλικόν ἐστιν ἡμίτονον τοῦ θ μ, τόξου, ἡ δὲ θ κ, ἀπτομένη τοῦ αὐτοῦ, τὸ δὲ θ μ, τόξον μεῖζον ἐστὶ τῆς πρὸς τῷ η, γωνίας κατὰ τὸν β': ὅρον τοῦ α: βιβλίου τοῦ α: τμήματος, πάντως γε κατὰ τὸν γ': τοῦ β': τοῦ αὐτοῦ, ἡ μὲν η θ, ὁλικόν ἐστιν ἡμίτονον καὶ τῆς πρὸς τῷ η, γωνίας, ἡ δὲ θ κ, ἀπτομένη, καὶ ἡ η κ, τέμνουσα τῆς αὐτῆς· λαμβανομένης τοίνυν τῆς μὲν η θ, καὶ ἀντὶ πλευρᾶς καὶ ἀντὶ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, τῆς δὲ θ κ, ὁμοίως ἀντὶ πλευρᾶς καὶ ἀντὶ ἀπτομένης, ἔσται πάντως ὡς ἡ η θ, πλευρὰ πρὸς τὴν θ κ, πλευρὰν, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ η, γωνίας πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς αὐτῆς γωνίας, ὥστε καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἡ κ θ, ἐπὶ τοῦ α: σχήματος πρὸς τὴν η θ, ἡ ἀπτομένη τῆς αὐτῆς γωνίας πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον. Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τοῦ β': σχήματος, ὡς ἡ κ θ, πρὸς τὴν θ η, τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς πρὸς τῷ κ, γωνίας. κέντρῳ γὰρ τῷ κ, καὶ διαστήματι τῷ κ θ, γραφομένου τοῦ θ ν, τόξου, ἔστι κατὰ τὰ εἰρημένα ἡ μὲν κ θ, ὁλικὸν ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ κ, γωνίας, ἡ δὲ θ η, ἀπτομένη τῆς αὐτῆς, καὶ ἡ η κ, τέμνουσα.

Trig. Anal. lib. 1. Fig 4



Πρὸς τούτοις λαμβανομένης τῆς μὲν θ η, καὶ ἀντὶ πλευρᾶς καὶ ἀντὶ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, τῆς δὲ η κ, καὶ ἀντὶ πλευρᾶς καὶ ἀντὶ τεμνούσης τῆς πρὸς τῷ η, γωνίας, συναχθήσεται εὐχερῶς, καὶ ὡς ἡ θ η, πρὸς τὴν η κ, τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνουσαν τῆς πρὸς τῷ η, γωνίας, καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἡ κ η πρὸς τὴν η θ, ἡ τέμνουσα τῆς πρὸς τῷ η, γωνίας πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ β': σχήματος.

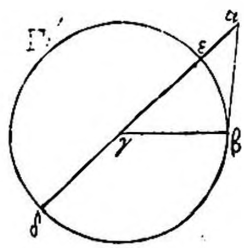
Πρότασις Γ'.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις ἑκατέρα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῆς τε ἐκ τῶν λοιπῶν πλευρῶν συγκειμένης, καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν αὐτῶν.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον κατὰ τὸ β, τὸ α β γ. Λέγω ὅτι ἡ α β, αὐτοῦ πλευρὰ μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῆς τε συγκειμένης ἐκ τῶν α γ, γ β, καὶ τῆς διαφορᾶς τῆς α γ, πρὸς τὴν γ β. Κέντρῳ γὰρ τῷ γ, καὶ διαστήματι τῷ γ β, γραφήτω κύκλος ὁ β ε δ, καὶ ἐξαχθήτω ἡ α γ, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπὶ τὸ δ. Ἐπεὶ οὖν τὸ γ,

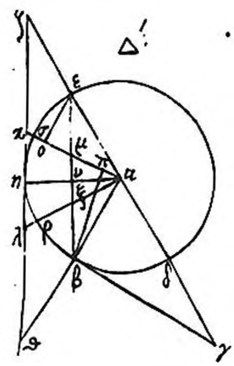
κενκέντρον ἐστὶ τοῦ β ε δ, κύκλου, πάντως γε αἱ γ β, γ ε, ἴσαι εἰσί. διαφορὰ δὲ τῆς α γ, πρὸς τὴν γ β, ἡ ε α. ἔστι δὲ καὶ ἡ γ δ, ἴση τῇ γ β, ἡ α δ, ἄρα ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν γ β, γ α. ἀλλ' ἡ β α, ἅπτεται τοῦ β ε δ, κύκλου, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ. ἡ δὲ α δ, τέμνει τὸν αὐτὸν κύκλον, ἄρα κατὰ τὴν λϛ': τοῦ αὐτοῦ, τὸ ἀπὸ τῆς α β, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν δ α, α ε, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ ἑπομένως ἡ α β, μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν α δ, α ε. ἀλλ' ἡ μὲν α δ, ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν α γ, γ β, ἡ δὲ α ε, ἡ τῆς α γ, πρὸς τὴν γ β, διαφορὰν, ὡς δέδεικται, ἄρα ἡ α β, μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῆς τε ἐκ τῶν α γ, γ β, συγκειμένης, καὶ τῆς αὐτῶν διαφορᾶς. Ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ἡ γ β, μέση ἀνάλογος τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν γ α, α β, καὶ τῆς διαφορᾶς τῆς α γ, πρὸς τὴν α β, τοῦ α, κέντρου λαμβανομένου, καὶ διαστήματι τῷ α β, γραφομένου τοῦ κύκλου· ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις ἄρα τριγώνοις ἑκατέρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 5.



Πρότασις Δ':

Ἐπὶ παντὸς εὐθυγράμμου τριγώνου ὡς ἡ ἐκ τῶν δύο συγκειμένη πλευρῶν τῶν περὶ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθεῖα πρὸς τὴν αὐτῶν διαφορὰν, οὕτως ἡ ἀπτομένη τοῦ ἡμίσεως τῶν λοιπῶν δύο ἀγνώστων γωνιῶν πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς ἡμιδιαφορᾶς αὐτῶν.



Ἔστω τρίγωνον εὐθύγραμμον τὸ α β γ, οὗ ἐγνωσμένη ἡ ὑπὸ β α γ, γωνία. Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β α, α γ, πλευρῶν πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν αὐτῶν, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς ἡμισείας τῶν ὑπὸ α β γ, α γ β, γωνιῶν πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς ἡμιδιαφορᾶς αὐτῶν. κέντρῳ μὲν δὴ τῷ α, καὶ διαστήματι τῇ α β, ἐλάττονι πλευρᾷ γραφήτω κύκλος ὁ β ε δ, τέμνων τὴν μείζονα πλευρὰν α γ, κατὰ τὸ δ, καὶ ἐξαχθήτω ἡ α γ, κατὰ τὸ συνεχὲς ἀπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὸ ζ, τέμνουσα τὸν κύκλον κατὰ τὸ ε. τοῦ δὲ β ε, τόξου δίχα διαιρουμένου κατὰ τὸ η, ἐπιζεύχθω ἡ α η, ἐφ' ἧς ἤχθω κάθετος διὰ τοῦ η, ἡ ζ θ, συμπίπτουσα τῇ α β, ἐκβαλλομένῃ κατὰ τὸ θ. ἀπὸ δὲ τοῦ α, παράλληλος τῇ β γ, ἤχθω ἡ ακ, καὶ γενέσθω τῇ ὑπὸ εακ, γωνία ἴση ἡ ὑπὸ θαλ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ εβ, τέμνουσα τὴν μέσ ακ, κατὰ τὸ μ, τὴν δὲ αη, κατὰ τὸ ν, καὶ τὴν αλ, κατὰ τὸ ξ. ἀπὸ δὲ τῶν ε καὶ β, σημείων συμπιπτέτωσαν κάθετοι ἐπὶ τῆς ακ, αἱ εο, βπ. καὶ ἐπεὶ τὸ α, κέντρον ἐστὶ τοῦ εβδ, κύκλου, πάντως γε ἡ αε, τῇ αβ, ἴση ἐστίν, ὥστε ἡ εγ, ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν βα, αγ, πλευρῶν. ἡ δὲ γδ, ἡ τῶν αγ, αβ, διαφορά. Ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ ακ, παράλληλος ἦκται τῇ βγ, δῆλον, ὅτι ἡ ὑπὸ εακ, ἐκτὸς γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αγβ, ἐντὸς κατὰ τὴν κθ': τοῦ α': τῶν Στοιχ: ἀλλ' ἡ ὑπὸ εαβ, ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ αγβ, αβγ, κατὰ τὴν λβ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ καβ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ βαγ, ἴση ἐστί. γέγονε δὲ ἡ ὑπὸ λαβ, ἴση τῇ ὑπὸ εακ, ἄρα ἡ ὑπὸ καλ, διαφορά ἐστι τῶν ὑπὸ καβ, εακ, δηλονότι τῶν ὑπὸ αβγ, αγβ. Αὖθις ἐπεὶ τὸ βε, τμῆμα τέτμηται δίχα κατὰ τὸ η, πάντως γε τὸ ηβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ηε. ἔστι δὲ καὶ τὸ βρ, ἴσον τῷ εσ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι καὶ τὰς ὑπὸ βαρ, εασ, γωνίας, ἄρα καὶ τὸ ρη, ἴσον ἐστὶ τῷ ησ. ὥστε ἡ ὑπὸ ηαρ, γωνία ἡμίσειά ἐστι τῆς διαφορᾶς τῶν ὑπὸ αβγ, αγβ, γωνιῶν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ εαη, ἴση τῇ ὑπὸ ηαβ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ὑπὸ εαβ, ἴση ταῖς ὑπὸ αβγ, αγβ, ὡς προδέδεικται, ἄρα ἡ ὑπὸ ηαβ, ἡμίσειά ἐστι τῶν ὑπὸ αβγ, αγβ. ἀλλ' ἡ μέσ ηθ, ἀπτομένη ἐστὶ τῆς ὑπὸ ηαβ, ἡ δὲ ηλ, τῆς ὑπὸ ηαρ. ἄρα ἡ μέσ ηθ, ἀπτομένη ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῶν ὑπὸ αβγ, αγβ, γωνιῶν, ἡ δὲ ηλ, τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν αὐτῶν. Τούτων οὖν οὕτω προαποδεδειγμένων, εὐχερῶς συναχθήσεται τὸ ὑποτεθέν. ἐπεὶ γὰρ ἡ αη, δίχα τέμνει τὴν εβ, περιφέρειαν κατὰ τὴν γ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, πάντως γε δίχα τέμνει καὶ τὴν εβ, ὑποτείνουσαν, ὥστε καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει κατὰ τὴν αὐτήν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ζθ, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς αη. καὶ κατὰ τὴν κζ': τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ ἡ εβ, παράλληλός ἐστι τῇ ζθ. κατὰ δὲ τὸ πόρισμα τῆς δ': τοῦ ϛ': τοῦ αὐτοῦ ὡς ἡ αη, πρὸς τὴν αν, ἔστι καὶ ἡ ηλ, πρὸς τὴν νξ. ἀλλ' ὡς ἡ αη, πρὸς τὴν αν, ἔστι καὶ ἡ ηθ, πρὸς τὴν νβ, ἄρα ὡς ἡ ηθ, πρὸς τὴν νβ, οὕτως ἡ ηλ, πρὸς τὴν νξ. πάλιν ἐπεὶ τὰ βπμ, εομ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσι, πάντως γε κατὰ τὴν δ': τοῦ αὐτοῦ, ὡς ἡ βπ, πρὸς τὴν εο, ἔστι καὶ ἡ βμ, πρὸς τὴν εμ, ἀλλ' ἡ μέσ βπ, ἡμίτονόν ἐστι τῆς ὑπὸ βαπ, ἤτοι τῆς ὑπὸ αβγ, ἡ δὲ εο, ἡμίτονον ὁμοίως ἐστὶ τῆς ὑπὸ εαο, ἤτοι τῆς ὑπὸ αγβ, ὡς δὲ τὰ ἡμίτονα, οὕτω καὶ αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ κατὰ τὴν α': τοῦ παρόντος. ἄρα ὡς ἡ αγ, πλευρὰ πρὸς τὴν αβ, ἡ βμ, πρὸς τὴν με, καὶ συνθέσει ὡς ἡ εγ, πρὸς τὴν δγ, διαφοράν, ἡ βε, πρὸς τὴν μξ, διαφοράν. ἴση γὰρ ἡ βξ, τῇ με. ἢ ὡς ἡ βν, ἡμίσεια πρὸς τὴν νξ, ἡμίσειαν διαφορᾶς. ἀλλ' ὡς ἡ βν, πρὸς τὴν νξ, δέδεικται καὶ ἡ θη, πρὸς τὴν ηλ. ἄρα ὡς ἡ εγ, πρὸς τὴν δγ, ἡ ηθ, πρὸς τὴν ηλ. ἐπὶ παντὸς ἄρα εὐθυγράμμου τριγώνου ὡς ἡ ἐκ τῶν δύο συγκειμένη, καὶ τὰ ἑξῆς.

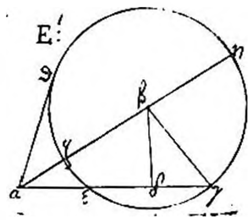
Πρό-

Πρότασις Ε′:

Ἐὰν ἐπὶ τῆς μείζονος πλευρᾶς τοῦ δοθέντος τριγώνου κάθετος ἀπὸ τῆς ἀπεναντίον ἀχθῇ γωνίας, ἔσται ὡς ἡ μείζων πλευρὰ, ἐφ' ἧς ἡ κάθετος πίπτει, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν λοιπῶν δύο, οὕτως ἡ διαφορὰ τῶν αὐτῶν πρὸς τὴν τῶν τμημάτων διαφορὰν τῆς μείζονος, τῶν ὑπὸ τῆς καθέτου γενομένων.

Ἔστω τρίγωνον τὸ α β γ, οὗ μείζων πλευρὰ ἡ α γ. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ β, σημείου κάθετος ἐπὶ τῆς α γ, ἡ β δ, Λέγω ὅτι ὡς ἡ α γ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν α β, β γ, οὕτως ἐστὶν ἡ τῶν α β, β γ, διαφορὰ πρὸς τὴν τῶν α δ, δ γ, μερῶν διαφοράν. Κέντρῳ γὰρ τῷ β, καὶ διαστήματι τῇ β γ, ἐλάττονι γραφήτω κύκλος ὁ γ η ζ ε, τέμνων τὴν μὲν α β, κατὰ τὸ ζ, τὴν δὲ α γ, κατὰ τὸ ε. καὶ ἀπὸ τοῦ α, σημείου ἤχθω ἐπτομένη τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἡ α θ, κατὰ τὴν ιζ′: τοῦ γ′: τοῦ Στοιχειωτοῦ, καὶ ἤχθω ἡ α β, ἐπὶ τὸ η. καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν λϛ′: τοῦ αὐτοῦ τὸ ἀπὸ τῆς α θ, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν η α, α ζ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν γ α, α ε. Λαμβανομένων δὴ τῶν γ α, α ε, ἀντὶ ἄκρων, τῶν δὲ η α, α ζ, ἀντὶ μέσων, ἔσται ὡς ἡ α γ, πρώτη πρὸς τὴν α η, β′: ἡ α ζ, γ′: πρὸς τὴν α ε, δ′: κατὰ τὴν ιϛ′: τοῦ ϛ′: τοῦ Στοιχ:. ἀλλ' ἡ μὲν α η, σύγκειται ἐκ τῶν α β, β γ, ἴση γὰρ ἡ β η, τῇ β γ, ἡ δὲ α ζ, διαφορά ἐστι τῆς α β, πρὸς τὴν β γ, ἴση γὰρ ἡ β ζ, τῇ β η, καὶ ἡ α ε, ὁμοίως διαφορά ἐστι τῶν α δ, δ γ, τμημάτων. ἴση γὰρ ἡ ε δ, τῇ δ γ, κατὰ τὴν γ′: τοῦ γ′: τοῦ Στοιχειωτοῦ. ἄρα ὡς ἡ γ α, μείζων πλευρὰ τοῦ α β γ, δοθέντος τριγώνου πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν α β, β γ, λοιπῶν πλευρῶν τοῦ αὐτοῦ, οὕτως ἡ τῶν α β, β γ, διαφορὰ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν α δ, δ γ. ἐὰν ἄρα ἐπὶ τῆς μείζονος πλευρᾶς τοῦ δοθέντος, καὶ τὰ ἑξῆς.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 6.

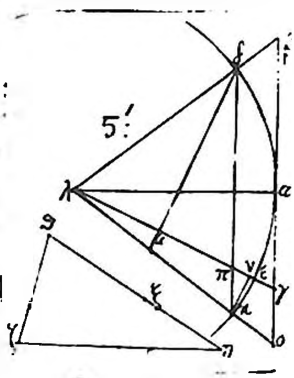


Πρότασις ϛ'.

Ἐὰν ἀπτόμεναι δύο τινῶν τόξων ἢ γωνιῶν, ἡμιτόνοις ἑτέρων τόξων ἢ γωνιῶν ἀνάλογον ὦσι, τὰ ἡμίτονα τῆς τε συνάψεως τῶν α: τόξων ἢ γωνιῶν, καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν αὐτῶν τόξων ἀνάλογον ἔσονται ταῖς ἀπτομέναις τῆς ἡμισυνάψεως καὶ ἡμιδιαφορᾶς τῶν β': τόξων.

Ἔστωσαν δὴ αἱ α β, α γ, ἀπτόμεναι τῶν α δ, α ε, τόξων ἀνάλογον τοῖς ἡμιτόνοις τῶν πρὸς τῷ ζ, καὶ η γωνιῶν τοῦ ζ η θ, τριγώνου. Λέγω ὅτι τὰ ἡμίτονα τῆς τε συνάψεως τῶν α δ, α ε, δοθέντων τόξων, καὶ διαφορᾶς τῶν αὐτῶν ἀνάλογόν εἰσι ταῖς ἀπτομέναις τῆς τε ἡμισυνάψεως καὶ ἡμιδιαφορᾶς τῶν πρὸς τῷ ζ καὶ η, γωνιῶν τοῦ ζ η θ, τριγώνου. Γενέσθω γὰρ τὸ α κ, τόξον ἴσον τῷ α δ, καὶ ἀπὸ τῶν δ καὶ κ, σημείων πιπτέτωσαν κάθετοι ἐπὶ τῆς λ γ, αἱ δ μ, κ ν, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ δ κ. καὶ ἐπεὶ τὸ α κ, τόξον ἴσον γέγονε τῷ α δ, τόξῳ, πάντως γε τὸ ε κ, διαφορά ἐστι τῶν α δ, α ε, τὸ δὲ δ ε, σύναψις τῶν αὐτῶν, καὶ τὸ μὲν δ μ, ἡμίτονον τῆς συνάψεως τῶν α δ, α ε, τὸ δὲ κ ν, ἡμίτονον τῆς διαφορᾶς τῶν αὐτῶν. ἔστω δὲ καὶ διαφορὰ τῶν η θ, θ ζ, ἡ η ξ. ἀλλ' ὡς ἡ β α, ἀπτομένη πρὸς τὴν α γ, ὑπετέθη καὶ τὸ τῆς πρὸς τῷ ζ, γωνίας ἡμίτονον τοῦ ζ η θ, τριγώνου πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ η. ὡς δὲ τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ ζ, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ η, ἔστι καὶ ἡ η θ, πρὸς τὴν θ ζ, κατὰ τὴν α: τοῦ παρόντος, ἄρα ὡς ἡ α β, ἤτοι ἡ α ο, πρὸς τὴν α γ, οὕτως ἡ η θ, πρὸς τὴν θ ζ, ἤτοι τὴν θ ξ, καὶ ἀναστροφῇ, ἄρα ὡς ἡ α ο, ἤτοι ἡ β α, πρὸς τὴν γ ο, ἡ η θ, πρὸς τὴν η ξ, ἀλλὰ καὶ διαιρέσει, ὡς ἡ θ ξ, ἤτοι ἡ θ ζ, πρὸς τὴν ξ η, ἡ α γ, πρὸς τὴν γ ο, συνθέσει ἄρα ὡς β γ, πρὸς τὴν γ ο, διαφορὰν ἡ ἐκ τῶν η θ, θ ζ, πρὸς τὴν ξ η, διαφοράν. ὡς δὲ ἡ ἐκ τῶν η θ, θ ζ, πρὸς τὴν ξ η, διαφοράν, ἔστι καὶ ἡ ἀπτομένη τῆς ἡμισυνάψεως τῶν πρὸς τοῖς ζ, καὶ η, γωνιῶν πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς ἡμιδιαφορᾶς αὐτῶν κατὰ τὴν δ': τοῦ παρόντος, ἄρα καὶ ὡς ἡ β γ, πρὸς τὴν γ ο διαφοράν, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς ἡμισυνάψεως τῶν πρὸς τοῖς ζ καὶ η, γωνιῶν πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν αὐτῶν, ἀλλ' ὡς ἡ β γ, πρὸς τὴν γ ο, ἔστι καὶ ἡ δ π, πρὸς τὴν π κ, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς δ': τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὡς δὲ ἡ δ π, πρὸς τὴν π κ, ἔστι καὶ τὸ δ μ, ἡμίτονον τοῦ δ ε, τόξου πρὸς τὸ κ ν, ἡμίτονον τοῦ ε κ, τόξου κατὰ τὴν δ': τοῦ ϛ: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἄρα ὡς τὸ δ μ, ἡμίτονον

Trig. Anal. lib. 1. Fig 7.



τῆς

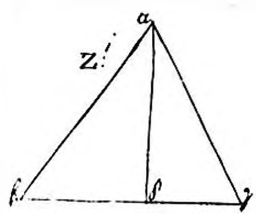
τῆς συνάψεως τῶν δοθέντων τόξων αδ, αε, πρὸς τὸ κε, ἡμίτονον τῆς αὐτῶν διαφορᾶς, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς ἡμισυνάψεως τῶν πρὸς τοῖς ζ, η, γωνιῶν πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς ἡμιδιαφορᾶς αὐτῶν· ἐὰν ἄρα ἅπτωνται δύο τινῶν τόξων ἢ γωνιῶν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Ζ'.

Ἐπὶ παντὸς εὐθυγράμμου τριγώνου ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος ἑκάστης γωνίας, οὕτω τὸ δὶς ὑπὸ τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν τετραγώνων τῶν αὐτῶν πλευρῶν, καθ' ἣν ὑπερέχει τοῦ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τὴν αὐτὴν γωνίαν τετραγώνου, ἢ γοῦν ὑπερέχεται ὑπ' ἐκείνου.

Ἔστω α': τρίγωνον ὀξυγώνιον τὸ αβγ. Λέγω ὅτι ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, οὕτω τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν τετραγώνων τῶν αὐτῶν αβ, βγ, πλευρῶν, καθ' ἣν ὑπερέχει τοῦ τετραγώνου τῆς αγ. Πιπτέτω δὴ ἀπὸ τοῦ α, κάθετος ἐπὶ τῆς βγ, ἡ αδ. Ἐπεὶ οὖν τοῦ αβδ, τριγώνου ἡ ὑπὸ αδβ, γωνία ὀρθή ἐστι, πάντως γε ἡ ὑπὸ δαβ, παραπλήρωμά ἐστι τῆς πρὸς τῷ β. καὶ διὰ τὴν α': τοῦ παρόντος ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον τῆς ὑπὸ δαβ, γωνίας, οὕτως ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ. Λαμβανομένων ἄρα τῶν αβ, βδ, ἀντὶ βάσεων, καὶ τῆς βγ, ἀντὶ ὕψους, καὶ τοῦ σχήματος ἀποπληρωμένου, ἔσται πάντως κατὰ τὴν α': τοῦ ς': τοῦ Στοιχειωτοῦ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν βγ, βδ, ἀλλ' ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, ἐστὶ καὶ τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ δαβ, ὡς δέδεικται. ἄρα τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ δαβ, ἔχει, ὡς τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν γβ, βδ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον· καὶ ἑπομένως, ὡς τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ δὶς ὑπὸ τῶν βγ, βδ, περιεχόμενον. ἀλλὰ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν βγ, βδ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἐστὶν ὑπεροχή, καθ' ἣν ὑπερέχουσι τὰ τετράγωνα τῶν αβ, βγ, τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, τετραγώνου, κατὰ τὴν ιγ': τοῦ β': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἡ δὲ ὑπὸ δαβ, γωνία παραπλήρωμά ἐστι τῆς πρὸς τῷ β, ἄρα ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, οὕτω τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώ-

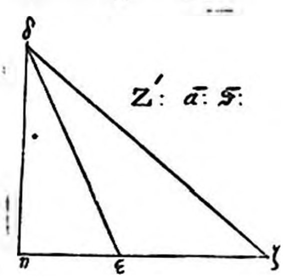
Trig. Anal. lib. 1. Fig. 8.



γώ-

γώνιον πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν τετραγώνων τῶν αβ, βγ, καθ' ἣν ὑπερέχουσι τοῦ τετραγώνου τῆς αγ. ἐπὶ παντὸς ἄρα εὐθυγράμμου τριγώνου ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Ἔστω βʹ: τὸ δεζ, ἀμβλυγώνιον τρίγωνον. Λέγω ὅτι ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς ὑπὸ δεζ, γωνίας, οὕτω τὸ δὶς ὑπὸ τῶν δε, εζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τῆς δζ, τετράγωνον τῶν ἀπὸ τῶν δε, εζ, τετραγώνων. Πιπτέτω γὰρ ἀπὸ τοῦ δ, σημείου κάθετος ἡ δη, συμβάλλουσα τῇ ζε, ἐκβαλλομένῃ κατὰ τὸ η. καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν αʹ: τοῦ παρόντος ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ η, ὀρθῆς γωνίας, ἤτοι ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ ηδε, οὕτως ἡ δε, πρὸς τὴν εη, καὶ ἀνάπαλιν, πάντως γε ἀντὶ βάσεων λαμβανομένων τῶν δε, εη, καὶ τῆς εζ, ἀντὶ ὕψους λαμβανομένης, ἔσται ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ ηδε, γωνίας, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν δε, εζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ηε, εζ, περιεχόμενον. κατὰ γὰρ τὴν αʹ: τοῦ ϛʹ: τῶν μὲν δε, εη, βάσεων τόπον ἐχουσῶν, ὕψους δὲ τῆς εζ, ἐστὶν ὡς ἡ δε, πρὸς τὴν εη, τὸ ὑπὸ τῶν δε, εζ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ηε, εζ. ἀλλ' ὡς ἡ δε, πρὸς τὴν εη, οὕτως ἐστὶ καὶ τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ δε,



Trig. Anal. lib. 1. Fig. 9.

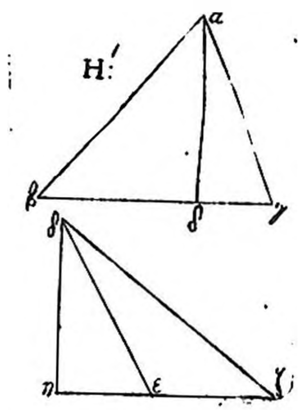
ὡς δέδεικται, ἄρα ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ ηδε, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν δε, εζ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ηε, εζ, οὕτως ἄρα καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν δε, εζ, πρὸς τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ηε, εζ. ἀλλὰ κατὰ μὲν τὸν ζʹ: ὅρον τὸν ἐν τῇ αʹ: τοῦ παρόντος τμήματος ἡ ὑπὸ ηδε, παραπλήρωμά ἐστι μὴ μόνον τῆς ὑπὸ ηεδ, ὀξείας γωνίας, ἀλλ' οὐχ ἧττον καὶ τῆς ὑπὸ δεζ, ἀμβλείας. κατὰ δὲ τὴν ιβʹ: τοῦ βʹ: τοῦ Στοιχειωτοῦ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ηε, εζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπεροχή ἐστι, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τῆς δζ, τετράγωνον τῶν ἀπὸ τῶν δε, εζ, τετραγώνων. ἄρα ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς ὑπὸ δεζ, γωνίας, οὕτω τὸ δὶς ὑπὸ τῶν δε, εζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τῆς δζ, τετράγωνον τῶν ἀπὸ τῶν δε, εζ, τετραγώνων. ἐπὶ παντὸς ἄρα εὐθυγράμμου τριγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρό-

Πρότασις Η':

Ἐπὶ παντὸς τριγώνου ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς τυχούσης γωνίας, οὕτως ἡ μία τῶν περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν πλευρῶν πρὸς τὴν κάθετον τὴν ἐπὶ τῆς ἑτέρας ἀγομένην πλευρᾶς ἀπὸ τῆς προσκειμένης γωνίας τῇ προτέρᾳ πλευρᾷ.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 10



Ἔστω τρίγωνον εὐθύγραμμον τὸ αβγ. Λέγω ὅτι ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, οὕτως ἡ αβ, πλευρὰ πρὸς τὴν αδ, κάθετον. κατὰ γὰρ τὸ ἐν α: τοῦ παρόντος ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ βδα, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, οὕτως ἡ αβ, πρὸς τὴν αδ. ἀλλὰ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ βδα, τὸ ὁλικόν ἐστιν ἡμίτονον, ἄρα ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, ἡ αβ, πρὸς τὴν αδ.

∴ Ὁμοίως δειχθήσεται τὸ αὐτὸ καὶ ἐπὶ τοῦ δεζ, ἀμβλυγωνίου τριγώνου. ὡς γὰρ τὸ τῆς πρὸς τῷ η, ὀρθῆς γωνίας ἡμίτονον, ἤτοι τὸ ὁλικὸν, πρὸς τὸ τῆς ὑπὸ ηεδ, γωνίας ἡμίτονον, οὕτως ἡ δε, πρὸς τὴν δη. ἀλλὰ τὸ ἡμίτονον τῆς δεη, γωνίας ἡμίτονόν ἐστι καὶ τῆς ὑπὸ δεζ, ἀμβλείας γωνίας κατὰ τὸν δ': ὅρον τοῦ β': τοῦ α: τοῦ παρόντος, ἄρα ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ δεζ, ἀμβλείας γωνίας, οὕτως ἡ δε, πρὸς τὴν δη, κάθετον. ἐπὶ παντὸς ἄρα τριγώνου ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Θ':

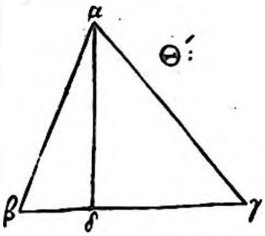
Ἐπὶ παντὸς τριγώνου ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονόν τινος γωνίας, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν πλευρῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ διπλοῦν ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ. Λέγω ὅτι ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ διπλοῦν ἐμβαδὸν τοῦ αβγ, τριγώνου. Ἐπεὶ γὰρ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, οὕτως ἡ αβ, πρὸς

τὴν

τὴν αδ. πάντως γε τῶν αβ, αδ, ἀντὶ βάσεων εἰλημμένων, καὶ τῆς βγ, ἀντὶ ὕψους, ἔσται ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αδ, βγ, περιεχόμενον. κατὰ γὰρ τὴν α: τοῦ ς: τοῦ Ἐπιχειωτοῦ τῶν μὲν αβ, αδ, ἀντὶ βάσεων, ἀντὶ δὲ ὕψους τῆς βγ, εἰλημμένης, ἔστιν ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν αδ, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αδ, βγ, περιεχόμενον. ἀλλ᾽ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν αδ, δέδεικται

Trig. Anal. lib. I. Fig 11.



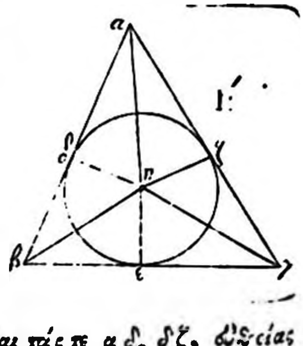
καὶ τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αδ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον διπλάσιόν ἐστι τοῦ αβγ, τριγώνου, κατὰ τὴν μα: τοῦ α: τοῦ Ἐπιχειωτοῦ, ἄρα ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, οὕτω τὸ ὑπὸ αβ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ διπλοῦν ἐμβαδὸν τοῦ αβγ, τριγώνου. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τοῦ δεζ, ἀμβλυγωνίου τριγώνου τῶν ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω. ὅτι ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ δεζ, ἀμβλείας γωνίας, οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν δε, εζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ διπλοῦν ἐμβαδὸν τοῦ δεζ, τριγώνου, τῆς εζ, ἀντὶ ὕψους λαμβανομένης, κειμένων τῶν δε, δη, ἀντὶ βάσεων. ἐπὶ παντὸς ἄρα τριγώνου ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονόν τινος γωνίας, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Ιʹ:

Ἐὰν εἰς τρίγωνον κύκλος ἐγγραφῇ τὸ ὑπό τε τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ τριγώνου περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τοῦ τριγώνου ἐμβαδῷ.

Trig. Anal. lib. I. Fig. 12.

Ἐγγραφέντος εἰς τὸ αβγ, τρίγωνον ὁ δεζ, κύκλος, καὶ ἐπιζεύχθωσαν ἀπὸ τοῦ η, κέντρου ἐπὶ τὰς ἁφὰς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου αἱ ηδ, ηζ, ηε. Λέγω ὅτι τὸ ὑπό τε τῆς δη, ἡμιδιαμέτρου τοῦ δεζ, κύκλου, καὶ ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἐμβαδῷ τοῦ αβγ, τριγώνου. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ αδη, γωνία ὀρθή ἐστι κατὰ τὴν ιη: τοῦ γ: τοῦ Ἐπιχειωτοῦ, πάντως γε κατὰ τὴν μα: τοῦ α: τοῦ αὐτοῦ τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δη, διπλάσιόν ἐστι τοῦ αδη, τριγώνου, ἤτοι ἴσον τῷ αδηζ, σχήματι. ἴσον γὰρ τὸ αδη, τρίγωνον τῷ αζη, τριγώνῳ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τάς τε αδ, αζ, εὐθείας



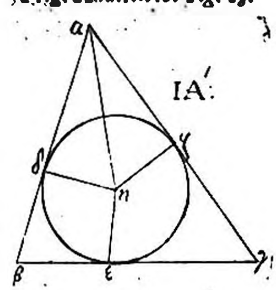
κατὰ τὸ πόρισμ: τῆς λϛ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, καὶ ἔτι τὰς δη, ηζ, ὡς ἀπὸ τοῦ κέντρου. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βε, εη, ἴσον τῷ βδηε, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν γε, εη, τῷ εηζγ. ὥστε τὴν μὲν δη, ἡμιδιαμέτρον ἀντὶ μιᾶς λαμβανομένης πλευρᾶς, ἀντὶ δὲ τῆς ἑτέρας τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν αδ, βε, εγ, τὸ περιεχόμενον ὑπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τοῖς δηζα, δηεβ, εηζγ, τουτέστι τῷ ἐμβαδῷ τοῦ αβγ, τριγώνου, ἀλλ' ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν αδ, βε, εγ, ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιπεριμέτρῳ τοῦ αβγ, τριγώνου, αἱ γὰρ δα, αζ, ἴσαι εἰσὶν, ὥσπερ καὶ αἱ δβ, βε, καὶ εγ, γζ, κατὰ τὸ ῥηθὲν πόρισμα τῆς λϛ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ. ὥστε αἱ τρεῖς αδ, βε, εγ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς αζ, δβ, ζγ, ἄρα τὸ ὑπό τε τῆς ἡμιδιαμέτρου τοῦ δεζ, κύκλου, καὶ τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἐμβαδῷ τοῦ αβγ, τριγώνου. ἐὰν ἄρα εἰς τρίγωνον κύκλος ἐγγραφῇ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΑ':

Ἐπὶ παντὸς τριγώνου ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀποτομὴν τῆς ἡμισείας ἑκάστης γωνίας, οὕτω τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ τριγώνου, καὶ τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ ἡμιπερίμετρος τῆς ὑποτεινούσης τὴν γωνίαν πρὸς τὸ τοῦ τριγώνου ἐμβαδόν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ. Λέγω ὅτι ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀποτομὴν τῆς ἡμισείας τῆς ὑπὸ βαγ, γωνίας, οὕτω τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου, καὶ τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ ἡμιπερίμετρος τοῦ αὐτοῦ αβγ, τριγώνου τῆς βγ, ὑποτεινούσης τὴν ὑπὸ βαγ, γωνίαν πρὸς τὸ τοῦ αβγ, τριγώνου ἐμβαδόν. Ἐγγραφήτω δὴ κύκλος εἰς τὸ αβγ, τρίγωνον κατὰ τὴν δ': τοῦ δ': τοῦ Στοιχειωτοῦ ὁ δεζ, οὗ κέντρον τὸ η. ἀπὸ δὲ τοῦ η, κέντρου τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἤχθωσαν αἱ ηδ, ηε, ηζ, ηα· καὶ ἐπεὶ τὸ αδη, τρίγωνον ὀρθογώνιόν ἐστι κατὰ τὸ δ, κατὰ τὴν ιη': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, πάντως γε κατὰ τὴν β': τοῦ παρόντος ὡς ἡ αδ, πρὸς τὴν δη, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀποτομὴν τῆς ὑπὸ δαη. λαμβανομένων δὲ τῶν αδ, δη, ἀντὶ βάσεων, καὶ τῆς ἡμιπεριμ: τοῦ αβγ, τριγώνου ἀντὶ ὕψους. ἐπεὶ κατὰ τὴν α': τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἐστὶν ὡς ἡ αδ, βάσις πρὸς τὴν δη, βάσιν, οὕτω τὸ ὑπὸ τῆς αδ, καὶ ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς δη, καὶ ἡμιπεριμέτρου τοῦ αὐτοῦ τριγώνου, ὡς δὲ ἡ αδ, πρὸς τὴν δη, δέδεικται καὶ τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀποτομὴν τῆς ὑπὸ δαη, γωνίας, ἄρα ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 13.



ἀποτομὴν τῆς ὑπὸ δαη, γωνίας, οὕτω τὸ ὑπό τε τῆς αδ, καὶ ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου πρὸς τὸ ὑπό τε τῆς δη, καὶ ἡμιπεριμέτρου τοῦ αὐτοῦ τριγώνου. ἀλλ᾽ ἡ μὲν ὑπὸ δαη, γωνία ἡμίσειά ἐστι τῆς ὑπὸ βαγ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τάς τε δα, αζ, καὶ δη, ηζ, ἡ δὲ αδ, ὑπεροχὴ τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου, καθ᾽ ἣν ὑπερέχει τῆς βγ, ὡς δειχθήσεται. καὶ τὸ ὑπὸ τῆς δη, καὶ ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τοῦ τριγώνου ἐμβαδῷ κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἄρα ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀποτομὴν τῆς ἡμισείας τῆς ὑπὸ βαγ, γωνίας, οὕτω τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου καὶ ὑπεροχῆς τῆς αὐτῆς, καθ᾽ ἣν ὑπερέχει τῆς βγ, ὑποτεινούσης πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αβγ, τριγώνου.

Ὅτι δὲ ἡ αδ, ὑπεροχή ἐστι τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου πρὸς τὴν βγ, δῆλον. ἐπεὶ γὰρ ὡς δέδεικται ἀνωτέρω αἱ δα, αζ, καὶ δβ, βε, καὶ εγ, γζ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, πάντως γε ἡ βγ, μετὰ τῆς αδ, ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιπεριμέτρῳ τοῦ αβγ, τριγώνου, ὑπεροχὴ ἄρα τῆς ἡμιπεριμέτρου πρὸς τὴν βγ, ἡ αδ, ἐστί. ἐπὶ παντὸς ἄρα τριγώνου, ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον καὶ τὰ ἑξῆς.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τούτου δῆλον ὅτι ὥσπερ ἡ αδ, ἡ αζ, ὑπεροχή ἐστι τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου πρὸς τὴν βγ, οὕτως ἡ βδ, ὑπεροχή ἐστι τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αὐτοῦ πρὸς τὴν γα, καὶ ἡ εγ, ἡ γζ, πρὸς τὴν αβ. ὥστε ἀχειρῶς δειχθήσεται τὸ αὐτὸ καὶ ἐφ᾽ ἑκατέρας τῶν λοιπῶν δύο γωνιῶν.

Πρότασις ΙΒ'.

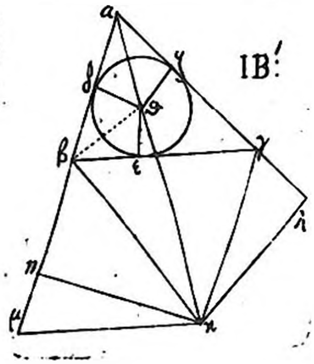
Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου μέσον ἐστὶν ἀνάλογον τοῦ περιεχομένου ὀρθογωνίου ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ τριγώνου, καὶ τῆς ὑπεροχῆς τῆς ἡμιπεριμέτρου πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν, καὶ τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν λοιπῶν ὑπεροχῶν τῆς ἡμιπεριμέτρου πρὸς τὰς ἄλλας τοῦ τριγώνου πλευράς.

Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ. Λέγω ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αβγ, τριγώνου μέσον ἐστὶν ἀνάλογον τοῦ περιεχομένου ὀρθογωνίου ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αὐτοῦ τριγώνου, καὶ αδ, ὑπεροχῆς τῆς ἡμιπεριμέτρου πρὸς τὴν βγ, πλευρὰν τοῦ αβγ, τριγώνου, καὶ τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν βε, εγ, λοιπῶν ὑπεροχῶν τῆς ἡμιπεριμέτρου πρὸς τὰς λοιπὰς γα, αβ, πλευράς. Ἐγγραφήτω δὴ κύκλος εἰς τὸ αβγ, τρίγωνον ὁ δεζ, καὶ τῆς αβ, ἐξαγομένης κατὰ τὸ συνεχὲς ἀορίστως, εἰλήφθω ἡ μὲν βη, ἴση τῇ εγ, ἡ δὲ ημ, ἴση τῇ βε. ἀπὸ δὲ τοῦ η, ἀνεστάθω κάθετος ἐπὶ τῆς αμ, ἡ ηκ, συμβάλλουσα τῇ αθ, διὰ τοῦ κέντρου ἐξαγομένῃ κατὰ τὸ κ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ βκ, μκ. ἐξαχθήτω δὲ καὶ ἡ αγ, ἐπὶ τὸ λ, ὥστε τὴν γλ, ἴσην εἶναι τῇ βε, ἤτοι τῇ ημ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ κγ, κλ. ἐπιζεύχθω ἔτι καὶ ἡ βθ.

ἡ βθ. Δείκνυται, ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀποτομὴν τῆς δαθ, γωνίας, οὕτω τὸ ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ τριγώνου αβγ, καὶ ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ἡ ἡμιπερίμετρος ὑπερέχει τῆς βγ, πλευρᾶς πρὸς τὸ τοῦ τριγώνου ἐμβαδὸν κατὰ τὴν αὐτοῦ ἐπτέρω. ἀλλ' ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀποτομὴν τῆς ὑπὸ δαθ, γωνίας, ἐστὶ καὶ ἡ αδ, πρὸς τὴν δθ, κατὰ τὴν β': τοῦ παρόντος. ὡς δὲ ἡ αδ, πρὸς τὴν δθ, ἡ αη, πρὸς τὴν ηκ, διὰ τὴν τῶν τριγώνων αδθ, αηκ, ὁμοιότητα, ἄρα ὡς ἡ αη, πρὸς τὴν ηκ, οὕτω τὸ ὑπό τε τῆς αδ, καὶ ἡμιπεριμέτρου τοῦ τριγώνου πρὸς τὸ αὐτοῦ ἐμβαδόν. Ἐπεὶ δὲ τῶν μὲν αη, ηκ, ἀντὶ βάσεων εἰλημμένων, τῆς δὲ θε, ἡμιδιαμέτρου ἀντὶ ὕψους, ἐστὶν ὡς ἡ αη, πρὸς τὴν ηκ, τὸ ὑπό τε τῆς αη, καὶ θε, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς θε, καὶ ηκ, κατὰ τὴν α': τοῦ ς': τοῦ Στοιχειωτοῦ, πάντως γε ὡς τὸ ὑπό τε τῆς αδ, καὶ ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου πρὸς τὸ τοῦ τριγώνου ἐμβαδὸν, οὕτω τὸ ὑπό τε τῆς αη, καὶ θε, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ὑπό τε τῆς θε, καὶ ηκ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῆς αη, καὶ θε, ἴσον ἐστὶ τῷ τοῦ τριγώνου ἐμβαδῷ κατὰ τὴν ι': τοῦ παρόντος. ἡ γὰρ αη, ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιπεριμέτρῳ τοῦ αβγ, τριγώνου, συγκειμένη ἐκ τῶν αδ, δβ, καὶ βη, ἤτοι εγ, τὸ δὲ ὑπό τε τῆς θε, καὶ ηκ, ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν διαφορῶν τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αὐτοῦ τριγώνου πρὸς τὰς λοιπὰς δύο αὐτοῦ πλευρὰς, ὡς ὀψόμεθα, ἄρα ὡς τὸ ὑπό τε τῆς αδ, καὶ ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αὐτοῦ, οὕτω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αβγ, τριγώνου πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν διαφορῶν τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αὐτοῦ πρὸς τὰς λοιπὰς πλευράς. ἡ δὲ αδ, ὑπεροχή ἐστι τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αὐτοῦ τριγώνου πρὸς τὴν βγ, αὐτοῦ πλευρὰν, ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αβγ, τριγώνου μέσον ἐστὶν ἀνάλογον τοῦ ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου καὶ αδ, διαφορᾶς αὐτῆς πρὸς τὴν βγ, πλευρὰν περιεχομένου ὀρθογωνίου, καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν λοιπῶν διαφορῶν τῆς ἡμιπεριμέτρου πρὸς τὰς αβ, αγ, πλευράς.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 14.

IB'



Ὅτι δὲ τὸ ὑπό τε τῆς θε, καὶ ηκ, ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν διαφορῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, οὑτωσὶ δειχθήσεται. Τοῦ τοίνυν δβεθ, τετραπλεύρου αἱ ὑπὸ δβε, δθε, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, διὰ τὸ καὶ τὰς λοιπὰς δύο δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι, ἀλλὰ κατὰ τὴν ιγ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ δβε, εβη, ἄρα αἱ δβε, δθε, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ δβε, εβη. κοινῆς δ' ἀφαιρουμένης τῆς ὑπὸ δβε, ἐγκαταλείπεται ἡ ὑπὸ δθε, ἴση τῇ ὑπὸ εβη. αὖθις αἱ δα, αζ, ὥσπερ καὶ αἱ δβ, βε, εἰσὶν ἴσαι κατὰ τὸ πόρισμα τῆς λς': τοῦ γ': τοῦ αὐτοῦ. εἴληπται δὲ καὶ ἡ γλ, ἴση τῇ βε, ἤτοι τῇ δβ. ἑκατέρα δὲ τῶν

 βη,

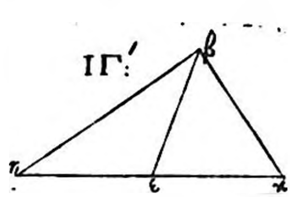
βη, ζγ ὁμοίως εἴληπται ἴση τῇ εγ, ἄρα αἱ αη, αλ, ἴσαι εἰσὶ, κοινὴ δὲ ἡ ακ, καὶ ἡ ὑπὸ ηακ, τῇ λακ, ἴση, ὡς ἐν τῇ ἀνωτέρω δέδεικται, ἄρα κατὰ τὴν δ΄: τοῦ α΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ ἴση ἐστὶ καὶ ἡ κη, τῇ κλ, καὶ ἡ ὑπὸ ακη, γωνία τῇ ὑπὸ αλκ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ημ, τῇ γλ, ἴση, ἄρα κατὰ τὴν αὐτὴν ἡ κμ, ἴση ἐστὶ τῇ κγ. ὥστε τῶν βμκ, βγκ τριγώνων ἐπεὶ αἱ δύο βμ, μκ, δυσὶ ταῖς βγ, γκ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, κοινὴ δὲ ἡ βκ, πάντως γε κατὰ τὴν η΄: τοῦ α΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ βμκ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βγκ, ἡ δὲ ὑπὸ μβκ, τῇ ὑπὸ γβκ, ἡ ἄρα ὑπὸ ηβγ, γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς βκ. τέμνεται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δθε, ὁμοίως δίχα ὑπὸ τῆς θβ, διὰ τὰ αὐτὰ, καὶ δέδεικται ἴση ἡ ὑπὸ ηβγ, τῇ ὑπὸ δθε, ἄρα καὶ ἡ ἡμίσεια ηβκ, τῇ ἡμισείᾳ βθε, ἴση ἐστὶν, ἀλλὰ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ βηκ, βεθ, ὀρθή ἐστιν, ἄρα τὰ βηκ, βεθ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν, ὥστε ὡς ἡ βη, πρὸς τὴν ηκ, ἡ θε, πρὸς τὴν εβ. ἐπεὶ δὲ τέσσαρα μεγέθη τὰ βη, ηκ, θε, εβ, ἀνάλογόν εἰσιν, ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων βη, εβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων ηκ, θε. ἀλλ' ἡ ηβ, ἴση εἴληπται τῇ εγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν γε, εβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ηκ, θε, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν γε, εβ, ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν διαφορῶν τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου πρὸς τὰς λοιπὰς βα, αγ, πλευρὰς, ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς θε, καὶ ηκ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν λοιπῶν διαφορῶν. ὅπερ ἦν τὸ ὑποτεθέν.

Πρότασις ΙΓ΄:

Ἐπὶ παντὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν αὐτοῦ σκελῶν, οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ ἡμίσεως τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνίας πρὸς τὴν βάσιν τοῦ αὐτοῦ.

Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ γεβ. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν βε, εγ, σκελῶν, οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ ἡμίσεως τῆς ὑπὸ βεγ, κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνίας πρὸς τὴν βγ, πλευράν. Ἐξήχθω γὰρ ἡ γε, ἐπὶ τὸ κ, ὥστε τὴν εκ, ἴσην εἶναι τῇ εγ, ἢ εβ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βκ. καὶ ἐπεὶ αἱ γε, εβ, εκ, ἴσαι εἰσὶ, πάντως γε ὁ κέντρῳ μὲν τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ εγ, γραφόμενος κύκλος διέρχεται καὶ διὰ τῶν β καὶ κ, σημείων, καὶ ἡ ὑπὸ γβκ, γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ ἐστὶ, καὶ ἑπομένως ὀρθὴ κατὰ τὴν λα΄: τοῦ γ΄: τοῦ Στοιχειωτοῦ. κατὰ δὲ τὴν λβ΄: τοῦ α΄: τοῦ αὐτοῦ ἡ ὑπὸ γεβ, γωνία ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ εβκ, εκβ. ἀλλ' αἱ ὑπὸ εβκ, εκβ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν ε΄: τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἡ ὑπὸ γεβ, διπλασία ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ὑπὸ εβκ, εκβ. ἐπεὶ δὲ κατὰ τὴν α΄: τοῦ παρόντος ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ γβκ, ὀρθῆς πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ βκγ,

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 13.



ὡς

οὕτως ἐστὶ καὶ ἡ η κ, πρὸς τὴν η β. πάντως γε καὶ ἐπὶ τοῦ η ε β, τριγώνου ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ ἡμίσεως τῆς ὑπὸ η ε β, γωνίας, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν η ε, ε β, αὐτοῦ σκελῶν, ἤτοι ἡ η κ, πρὸς τὴν η β, βάσιν τοῦ αὐτοῦ η ε β, ἰσοσκελοῦς τριγώνου, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ἡμίτ: τῆς ὑπὸ η β κ, τουτέστι, τὸ ὁλικὸν πρὸς τὴν η κ, συγκειμένην ἐκ τῶν σκελῶν τοῦ η ε β, τριγ: οὕτω τὸ ἡμίτ. τῆς ἡμισείας τῆς ὑπὸ η ε β, κατὰ κορυφὴν πρὸς τὴν η β, βάσιν τοῦ αὐτοῦ η ε β, τριγ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

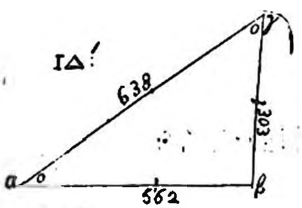
Ἰστέον δ' ὅτι καὶ ἐπὶ τοῦ παρόντος μετὰ τοὺς ὅρους ἐπετάχθησάν τινα θεωρήματα πρὸς τρανωτέραν τῶν ταχθησομένων ἐφεξῆς προβλημάτων κατάληψιν, καὶ τάξιν διδασκαλικὴν τῆς περὶ διαλύσεως τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων ἐφόδου. διὸ δεῖ προειδέναι καὶ τοῦτο, ὅτι τὰ μὲν διδόμενα ἐφ' ἑκάστου τριγώνου γραμμῇ ἐλαχίστῃ σημειοῦνται, τὰ δὲ ζητούμενα τζίφρᾳ. προηγήσεται δὲ ἡ περὶ τῶν ὀρθογωνίων ἔρευνα τῆς περὶ τῶν ἄλλων εἰδῶν τῶν τριγώνων.

Πρότασις ΙΔʹ:

Παντὸς ὀρθογωνίου τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν δοθεισῶν τὰς λοιπὰς αὐτοῦ δύο γωνίας εὑρεῖν.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον κατὰ τὸ β, τὸ α β γ, καὶ δοθεισῶν τῶν α β, β γ, αὐτοῦ πλευρῶν, ζητηθήτωσαν αἱ πρὸς τοῖς α καὶ γ, αὐτοῦ γωνίαι. Γενέσθω δὴ ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν β γ, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, καὶ ὁ εὑρεθεὶς δʹ: ἀνάλογος ζητηθήτω ἐν τοῖς κανονίοις, ἔνθα αἱ ἀπτόμεναι ἑκάστου τόξου, καὶ ὁ συστοιχῶν αὐτῷ κατὰ τὰ ἀριστερὰ ἀριθμὸς ἔσται ὁ ζητούμενος, δηλ: παραστατικὸς τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας. τούτου δ' ἀφαιρουμένου ἀπὸ μιᾶς ὀρθῆς μοιρῶν δηλ: ϞΌ: ὁ ἐναπολειφθεὶς ἔσται τῆς πρὸς τῷ γ, γωνίας παραστατικός. οἷον ἔστω ἡ μὲν α β, πλευρὰ ποδῶν φέρ' εἰπεῖν, ἢ ἄλλου τινὸς γεωμετρικοῦ μέτρου φξβ, ἡ δὲ β γ, τγ: πολλαπλασιασθήτω δὴ ὁ 303. ἐπὶ τὸν 100000.00. ἤτοι τὸ

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 16.



ὁλικὸν ἡμίτονον, καὶ ὁ γενόμενος 30300000.00 μερισθήτω ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῆς α β, πλευρᾶς δηλον: τὸν 562. καὶ τὸ πηλίκον ὁ 5391459, ζητηθήτω ἐν τοῖς κανονίοις, καὶ ἐπεὶ εὑρίσκεται συστοιχῶν σχεδὸν τῷ 28 καὶ 20ʹ. δῆλον ὅτι ἡ πρὸς τῷ α, γωνία μοιρῶν ἐστὶ σχεδὸν 28. καὶ 20ʹ.

ἀφαι-

ἀφαιρουμένου δὲ τοῦ 28 καὶ 20′ ἀπὸ τοῦ 90. ἐπεὶ ἐναπολείπεται ὁ 61 καὶ 40′. πάντως γε ἡ πρὸς τῷ γ, γωνία μοιρῶν ἐστὶ 61. καὶ 40′. κατὰ γὰρ τὴν β′: τοῦ παρόντος ἐπὶ παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευραὶ ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς προσκειμένης γωνίας τῇ ἡγουμένῃ πλευρᾷ, καὶ ἀνάπαλιν. Ἐπεὶ οὖν κἀνταῦθα ἡ μὲν α β, δύναται ληφθῆναι ἀντὶ ὁλικοῦ ἡμιτόνου τῆς ζητουμένης πρὸς τῷ α, γωνίας, ἡ δὲ β γ, ἀντὶ ἀπτομένης τῆς αὐτῆς γωνίας κατὰ τὸν γ′: ὅρον τοῦ β′: τοῦ ά: τοῦ παρόντος. δῆλον ὅτι ἐὰν γένηται ὡς ἡ α γ, πλευρὰ πρὸς τὴν β γ, πλευρὰν, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς ἄλλοτι, εὑρεθήσεται ἡ ἀπτομένη τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, καὶ διὰ τῶν κανονίων τῶν ἀπτομένων γνωσθήσεται ἡ πρὸς τῷ α, γωνία, ἧς τινος ἀφαιρουμένης ἀπὸ τῆς ὀρθῆς, γνωσθήσεται καὶ ἡ πρὸς τῷ γ, ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

562.—303.——10000.00
303

3030000000
562 { 2200
5140
820
2580
3320
5100
42
5391459.

Εἰ δὲ βούλει ἀπονώτερον τούτου τυχεῖν, εὑρεθήτωσαν καθ᾽ ὃν προειρημένως ὑπαι τρόπον οἱ λογάριθμοι καὶ τῶν τριῶν ὅρων τοῦ τε 562.303. καὶ 10000.00. καὶ οἱ μὲν τοῦ β′: καὶ γ′: ὅρου λογάριθμοι συναφθήτωσαν ἀλλήλοις, ἀπὸ δὲ τοῦ γενομένου ἀφαιρεθήτω ὁ λογάριθμος τοῦ ά: ὅρου, καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς εὑρεθήτω ἐν τοῖς κανονίοις, καὶ ὁ κατὰ τὰ ἀριστερὰ αὐτῷ συστοιχῶν ἀριθμὸς ἔσται ὁ ζητούμενος. ὁ λόγος σαφὴς ἐκ τῶν προειρημένων περὶ τῶν λογαρίθμων.

274973.63. λογάρ: ποδ: 562
248144.26. λογάρ: ποδ: 303
1000000.00. λογάρ: ὁλικοῦ ἡμιτόνου.
1248144.26. σύναψις β′: καὶ γ′: ὅρου.
274973.63
0973170.63. λογάρ: γων: μοιρ: 28.20′

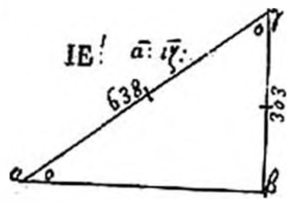
Πρότασις ΙΕ:

Παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου δοθείσης μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν, καὶ τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν, τὰς λοιπὰς δύο αὐτοῦ γωνίας εὑρεῖν.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον κατὰ τὸ β, τὸ α β γ, καὶ δοθείσης τῆς τε β γ, δυοῖν πλευρᾶς καὶ α γ, ὑποτεινούσης τὴν πρὸς τῷ β, ὀρθὴν γωνίαν. Ζητηθήτωσαν αἱ πρὸς τοῖς α, γ, λοιπαὶ γωνίαι. Γενέσθω δὴ ὡς ἡ α γ, πρὸς τὴν γ β, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, καὶ ὁ εὑρεθεὶς

δ′: ἀνα-

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 17.



δ': ἀνάλογος ζητηθήτω ἐν τοῖς κανονίοις, καὶ ὁ κατὰ τὰ δεξιτερὰ συστοιχῶν αὐτῷ ἀριθμὸς ἔσται ὁ ζητούμενος. Οἷον, ὑποκείσθω ἡ μὲν αγ, ποδῶν φέρ' εἰπεῖν 638. ἡ δὲ βγ, 303. πολλαπλασιασθήτω δὴ ὁ 303. ἐπὶ τὸν 10000000. , καὶ ὁ γενόμενος 3030000000. μεριζέσθω ἐπὶ τὸν 638. καὶ τὸ πηλίκον ὁ 4749216. ζητηθήτω ἐν τοῖς κανονίοις, ἔνθα ἐπιγράφονται τὰ ἡμίτονα. καὶ ἐπεὶ εὑρίσκεται προσεχέστερος τῷ 47485. 64. ὅστις συστοιχεῖ τῷ 28, καὶ 21'. δῆλον ἔτι ἡ πρὸ τῷ α, γωνία μοιρῶν ἐστι 28, καὶ 21'. ἧς τινος ἀφαιρουμένης ἀπὸ μοιρῶν 90. ὁ ἐναπολειφθεὶς ἔσται παραστατικὸς τῆς πρὸς τῷ γ, γωνίας. ὁ λόγος ἐκ τῆς α': τῆ παρούσης σαφής. Καὶ διὰ τῶν λογαρίθμων ἀπονώτερον. εὑρεθήτωσαν οἱ λογάριθμοι καὶ τῶν τριῶν ὅρων κατὰ τὰ προειρημένα περὶ χρήσεως τῶν λογαρίθμων. καὶ συναφθήτωσαν οἱ λογάριθμοι τοῦ τε β': καὶ γ': ὅρου, καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου ἀφαιρεθήτω ὁ τοῦ α': ὅρου λογάριθμος καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς ἔσται λογάριθμος τοῦ ζητουμένου δ': ὅστις εὑρεθεὶς ἐν τοῖς κανονίοις, δώσει σοι τὸν παραστατικὸν τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας.

638. πλ: αγ. ὅρ: α':
303. πλ: βγ: ὅρ: β':
10000000 ὁλικ: ἡμίτ: ὅρ: γ':
3030000000 τὸ ἐκ τοῦ β': καὶ γ': ὅρου.

638. 4780
3140
4880
1380
1040
4020
192

4749216. δ': ἀναλ: ἡμ: τῆς πρὸς τῷ α, γων:
280482.07. λογάρ: ὅρ: α': ἤτοι 638
248144.26. λογάρ: ὅρ. β': ἤτοι 303
1000000.00. λογάρ: ὅρ: γ': ἤτοι ὁλικ: ἡμιτ.
124844.26. τὸ ὑπό τε β': καὶ γ': γινόμ:
280482.07. ἀφαιρ: λογαρ: ὅρ. α':
967662.09. λογάρ: τῶν ζητουμένων μοιρῶν.
ἤτοι ἡμ: τῆς πρὸς τῷ α, γων: μοιρ: 28. 21'.

Εἰ δὲ μικρά τις διαφορὰ ἐπὶ τῶν πράξεων συμβαίνειν δοκεῖ. ἐπὶ μὲν γὰρ τῆς α': ἐφόδου εὕρηται ὁ 28, καὶ 20'. παραστατικὸς τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, ἐπὶ δὲ τῆς β': ὁ 28, καὶ 21'. τοῦτο πάντως προέρχεται διὰ τὸ παρορᾶσθαί τινα λεπτά. ἡ γὰρ αγ, ποδῶν ἐστι 638. καί τι πρός, ὑπειδὴ δὲ μόνων 638, διὰ τὸ εὐχερέστερον. διὸ δὴ καὶ μικρόν τι μείζων εὕρηται ἡ πρὸς τῷ α, γωνία ἐπὶ τῆς β': πράξεως.

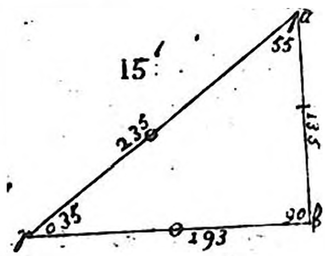
Πρό-

Πρότασις Ις':

Παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου μιᾶς ὀξείας γωνίας δοθείσης τὴν λοιπὴν ὀξεῖαν γωνίαν εὑρεῖν.

Δοθήτω τοῦ α β γ, ὀρθογωνίου τριγώνου κατὰ τὸ β, ἡ πρὸς τῷ α, γωνία, καὶ ζητηθήτω ἡ πρὸς τῷ γ. Ἀφαιρεθήτω δὴ ἡ πρὸς τῷ α, γωνία ἀπὸ μιᾶς ὀρθῆς, καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς ἀριθμὸς παραστατικὸς ἔσαι τῆς πρὸς τῷ γ. Οἷον ἔσω ἡ πρὸς τῷ α, γωνία μοιρῶν 55. ἀφαιρεθήτω ὁ 55 ἀριθμὸς ἀπὸ τοῦ 90. καὶ ἐπεὶ ἐναπολείπεται ὁ 35. δῆλον ὅτι ἡ πρὸς τῷ γ, γωνία μοιρῶν ἐςὶν 35. παντὸς γὰρ τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν λβ': τοῦ α': τοῦ Στοιχειωτοῦ. ὥστε ἐπὶ τοῦ α β γ, τριγώνου ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ β, ὀρθή ἐςι, πάντως γε αἱ λοιπαὶ δύο αἱ πρὸς τοῖς γ, α, σημείοις μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσὶν, ἀλλ' ἡ ὀρθὴ μοιρῶν ἐςὶν 90. ἐγνωσμένης ἄρα τῆς πρὸς τῷ α, καὶ ἀφαιρεθείσης ἀπὸ μοιρῶν 90. γνωσθήσεται καὶ ἡ πρὸς τῷ γ, παραπλήρωμα οὖσα τῆς αὐτῆς.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 18.



Πρότασις ΙΖ':

Παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν δοθείσης, καὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας τὰς λοιπὰς εὑρεῖν τοῦ τριγώνου πλευράς.

Δοθήτω τοῦ α β γ, τριγώνου ὀρθογωνίου κατὰ τὸ β, ἡ τε α β, πλευρὰ καὶ ἡ πρὸς τῷ α, γωνία, καὶ ζητηθήτωσαν αἱ α γ, γ β, πλευραί. Εὑρεθήτω δὲ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἡ πρὸς τῷ γ, γωνία. εἶτα γινέσθω ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ γ, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ α, οὕτως ἡ α β, πρὸς ἄλλο τι. καὶ ὁ εὑρεθεὶς δ': ἀνάλογος δηλωτικὸς ἔσαι τῆς β γ, πλευρᾶς. Αὖθις γινέσθω ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ γ, γωνίας πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτως ἡ β α, πλευρὰ πρὸς ἄλλο τι, καὶ ὁ εὑρεθεὶς δ': ἀνάλογος παραστατικὸς ἔσαι τῆς γ α. Οἷον ἔσω ἡ μὲν α β, πλευρὰ ποδῶν δὸς εἰπεῖν, 135. ἡ δὲ πρὸς τῷ α, γωνία μοιρῶν 55. ἀφαιρεθήτω δὴ ὁ 55 ἀριθμὸς ἀπὸ τοῦ 90, καὶ ἐπεὶ ἐναπολείπεται ὁ 35. δῆλον ὅτι ἡ πρὸς τῷ γ, γωνία μοιρῶν ἐςὶ 55. παραπλήρωμα γάρ ἐςι τῆς πρὸς τῷ α. Εἶτα γινέσθω ὡς τὸ ἡμίτ: γωνίας μοιρῶν 35. πρὸς ἡμίτονον γωνίας μοιρ: 55. οὕτως ὁ 135, ἀριθμὸς πρὸς ἄλλον τινὰ, καὶ εὑρεθήσεται πηλίκον ὁ 193. ἡ

β γ,

β γ, ἄρα ποδῶν ἐστι 193. Γενέσθω δ' αὖθις ὡς τὸ ἡμίτονον γωνίας μοιρ: 35. πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτως ὁ 135. ἀριθμὸς πρὸς ἄλλον τινά, καὶ ἐπεὶ εὑρίσκεται πηλίκος ὁ 235. πάντως γε ἡ γ α, ποδῶν ἐστι 235. κατὰ γὰρ τὴν α΄: τοῦ παρόντος ἐπὶ παντὸς εὐθυγράμμου τριγώνου αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσι τοῖς τῶν ἀπεναντίον γωνιῶν ἡμιτόνοις. τοῦ α β γ, ἄρα τριγώνου ὀρθογωνίου μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρᾶς δοθείσης, καὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας, εὑρίσκονται αἱ λοιπαὶ αὐτοῦ πλευραί, ὅπερ ἦν τὸ προσαχθέν.

Ὅροι α΄. πράξεως.
α΄: 57357.64. ἡμίτ. μοιρ. 35.
β΄: 81915.21. ἡμίτ. μοιρ. 55.
γ΄: 135. πλευρὰ α β:

ὅροι β΄: πράξεως.
α΄: 57357.64. ἡμίτ. μοιρ. 35.
β΄: 100000.00. ἡμίτ. μοιρ. 90.
γ΄: 135. πλ. α β:

β΄: 81915.21.
γ΄: 135.
40957605.
24574563
8191521
11058553335
α΄: 57357.64. 53227893.
16060175.
4588647.
δ΄: 193. πλευρ. γ β:

β΄. 100000.00.
γ΄: 135.
1350000000
20284720
30774280
α΄: 57357. 64. 2095400
δ΄: 235. πλευρ. γ α:

Διὰ δὲ τῶν λογαρίθμων εὐχερέστερον οὕτως. ἐπὶ μὲν τῆς α΄: πράξεως εὑρεθήτωσαν οἱ λογάριθμοι τῆς τε πρὸς τῷ γ, γωνίας καὶ τῆς πρὸς τῷ α, καὶ ἔτι ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ τῆς α β, πλευρ: ἤτοι τοῦ 135. εἶτα συναφθήτω ὁ λογάριθμος τοῦ γ΄: ὅρου τῷ λογαρίθμῳ τοῦ β΄:, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου ἀφαιρεθήτω ὁ τοῦ α΄: ὅρου λογάριθμος, καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς ἔσται λογάριθμος τοῦ ζητουμένου δ΄: ὅρου. ὃν καὶ δώσει σοι εὑρισκόμενος ἐν τοῖς κανονίοις τῶν κοινῶν λογαρίθμων.

Ἐπὶ δὲ τῆς β΄: πράξεως εὑρεθήτωσαν ὁμοίως οἱ λογάριθμοι τῆς τε πρὸς τῷ γ, γωνίας καὶ τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, καὶ ἔτι ὁ τοῦ τῆς β α, πλευρᾶς ἀριθμοῦ λογάριθμος. εἶτα συναφθήτω ὁ τοῦ β΄: ὅρου λογάριθμος τῷ τοῦ γ΄: λογαρίθμῳ, καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου ἀφαιρεθήτω ὁ λογάριθμος τοῦ α: ὅρου, καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς ζητηθήτω ἐν τοῖς κανονίοις τῶν κοινῶν λογαρίθμων, καὶ ᾧτινι συστοιχεῖ ἀριθμῷ, ἐκεῖνος ἔσται ὁ τῆς αγ, πλευρᾶς παραστατικός. ὁ λόγος σαφὴς τοῖς μεμνημένοις τίνα τὰ ἴδια τῶν λογαρίθμων.

α: 975859.13. λογάριθ: τῆς πρὸς τῷ γ, γωνίας.
β. 991336.45 λογάριθ: τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας.
γ: 213033.38 λογάριθ. πλευρ: αβ. ποδῶν: 135.
1204369.83 ὁ ἐκ τοῦ β: καὶ γ:
α: 975859.13 λογ. τῆς πρὸς τῷ γ, γωνίας.
δ': 0228510.70. λογ. πλευρ. γβ. ποδ. 193.

α: 975859.13. λογάριθ: τῆς πρὸς τῷ γ, γωνίας.
β: 1000000.00. λογ. ὁλικοῦ ἡμιτόνου.
γ: 213033. 38. λογ: πλευρᾶς αβ. ποδ. 135.
1213033. 38. ὁ ἐκ τοῦ β: καὶ γ:
α: 975859.13. λογ. τῆς πρὸς τῷ γ, γων.
δ': 0237174.25. λογ. πλ. γα. ποδ. 235.

Α Λ Λ Ω Σ.

Εὑρεθείσης καὶ τῆς πρὸς τῷ γ, γωνίας διὰ τῆς ἀνωτέρω, γενέσθω ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνουσαν τῆς πρὸς τῷ γ, γωνίας, οὕτως ἡ γβ, πρὸς ἄλλο τι, καὶ γνωσθήσεται κατὰ τὴν β': τοῦ παρόντος ἡ αγ. Ἢ καὶ οὕτω, γενέσθω ὡς ἡ ἐφαπτομένη τῆς πρὸς τῷ γ, γωνίας πρὸς τὴν τέμνουσαν τῆς αὐτῆς οὕτως ἡ αβ, πρὸς ἄλλο τι, καὶ γνωσθήσεται ὁμοίως ἡ αὐτὴ αγ. κατὰ γὰρ τὸν γ': ὅρον τοῦ β': τοῦ α: τοῦ παρόντος, ἡ μὲν αβ, ἐφαπτομένη ἐστὶ τῆς πρὸς τῷ γ, γωνίας, ἡ δὲ αγ, τέμνουσα. ἐγνωσμένης ἄρα τῆς πρὸς τῷ γ, γωνίας, γινώσκονται διὰ τῶν κανονίων ἥ τε ἐφαπτομένη τῆς αὐτῆς, καὶ ἡ τέμνουσα, ἐγνωσμένης δὲ καὶ τῆς αβ, ὑγιῶς γενήσεται ὡς ἡ ἐφαπτομένη τῆς πρὸς τῷ γ, γωνίας πρὸς τὴν τέμνουσαν τῆς αὐτῆς, οὕτως ἡ αβ, πρὸς τὴν αγ. ἡ μὲν γὰρ αβ, ἀντὶ ἐφαπτομένης τῆς πρὸς τῷ γ, γωνίας λαμβάνεται καὶ ἀντὶ πλευρᾶς. ἡ δὲ αγ, καὶ ἀντὶ τεμνούσης τῆς αὐτῆς γωνίας καὶ ἀντὶ ὑποτεινούσης τῆς πρὸς τῷ β, ὀρθῆς.

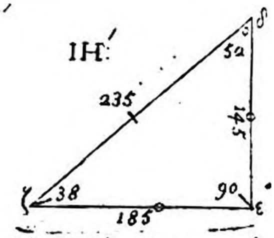
Πρό-

Πρότασις ΙΗ':

Παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου μιᾶς τῶν παρὰ τὴν ὀρθὴν γωνίαν γωνίας δοθείσης, καὶ τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν, τὰς λοιπὰς δύο αὐτοῦ πλευρὰς εὑρεῖν.

Δοθήτω τοῦ δεζ, ὀρθογωνίου τριγώνου κατὰ τὸ ε, ἥτε πρὸς τῷ ζ, γωνία, καὶ ἡ ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ ε, ὀρθὴν, καὶ ἔστω ἡ μὲν πρὸς τῷ ζ, γωνία μοιρῶν 38. ἡ δὲ ὑποτείνουσα δζ, ποδῶν φέρ᾽ εἰπεῖν, 235. καὶ ζητηθήτωσαν αἱ δε, εζ, πλευραί. Εὑρεθήτω δὴ ἡ πρὸς τῷ δ, γωνία κατὰ τὴν ιϛ': τοῦ παρόντος. εἶτα γενέσθω, καθὰ καὶ πρότερον, ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ ζ, γωνίας, οὕτως ἡ δζ, πλευρὰ, ἤτοι ὁ 235, ἀριθμὸς πρὸς ἄλλον τινά. καὶ ὁ εὑρεθεὶς παραστατικὸς ἔσται τῆς δε, κατὰ τὴν α': τοῦ παρόντος. πρὸς εὕρεσιν δὲ τῆς ζε, γενέσθω ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ δ, γωνίας, οὕτως ἡ δζ, πρὸς τὴν εζ. ἢ ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ ζ, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ δ. οὕτως ἡ εδ, πρὸς τὴν εζ. ὁ λόγος σαφὴς ἔκ τε τῆς ἀνωτέρω καὶ τῆς α. τοῦ παρόντος.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 19.

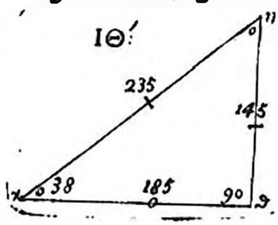


Ἀπονώτερον δὲ αἱ πράξεις γενήσονται διὰ τῶν λογαρίθμων, συναπτομένων ἐφ᾽ ἑκάστης πράξεως τῶν τοῦ β': καὶ τοῦ γ': ὅρου λογαρίθ: καὶ ἀφαιρουμένου τοῦ λογαρίθ: τοῦ α: ὅρου ἀπὸ τοῦ γενομένου, ὡς γέγονε καὶ ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω ὑποδειγμάτων.

Πρότασις ΙΘ':

Παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρᾶς δοθείσης, καὶ τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν, τὴν λοιπὴν πλευρὰν εὑρεῖν.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 20.



Τοῦ τοίνυν ηθκ, ὀρθογ: τριγώνου κατὰ τὸ θ, δοθήτω ἥτε ηθ, πλευρὰ καὶ ηκ, ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ θ, ὀρθὴν γωνίαν, καὶ ζητηθήτω ἡ θκ, πλευρά. Εὑρεθήτωσαν δὴ κατὰ τὴν ιε': τοῦ παρόντος αἱ πρὸς τῷ κ, καὶ η, γωνίαι. εἶτα γενέσθω ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ η, γωνίας, οὕτως ἡ ηκ, ὑποτείνουσα πρὸς ἄλλο τι. καὶ γνωσθήσεται πάντως ἡ κθ. ὁ λόγος σαφὴς ἐκ τῆς α: τοῦ παρόντος. Ἢ γενέσθω καὶ οὕτως, ὡς τὸ ἡμίτο-

τον τῆς πρὸς τῇ κ, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῇ η, οὕτως ἡ η θ, πρὸς ἄλλο τι, καὶ ἔσται τὸ αὐτό.

Διὰ δὲ τὸ ἀχρίστερον συναφθήτωσαν οἱ λογάριθμοι τῆς π κ η, ὑποτεινούσης καὶ τοῦ ἡμιτόνου τῆς πρὸς τῇ η, γωνίας, καὶ τοῦ γενομένου ἀφαιρεθήτω ὁ λογάριθμος τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς ἔσται λογάριθμος τῆς κ θ. ὅστις εὑρεθεὶς ἐν τοῖς κανονίοις, δώσει σοι καὶ τὸν εἰρημένον τὸν ἀριθμὸν τῶν ποδῶν τῆς κ θ, πλευρᾶς.

ΑΛΛΩΣ.

Ἀφαιρεθήτω τὸ τετράγωνον τῆς κ θ, πλευρᾶς ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς κ η, ὑποτεινούσης, καὶ τοῦ ἐναπολειφθέντος ἀριθμῷ ἡ τετράγωνος ῥίζα, κἀκείνη ἔσται παραστατικὴ τῆς κ θ. καὶ γὰρ τὴν μζʹ: τοῦ αʹ: τοῦ Στοιχειωτοῦ τὸ ἀπὸ τῆς κ η, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν η θ, θ κ, τετραγώνοις. ἐγνωσμένης ἄρα τῆς π κ η, καὶ η θ, γινώσκεται πάντως καὶ τὰ τούτων τετράγωνα. ἀφαιρεμένου δὲ τοῦ τῆς η θ, τετραγώνου ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς κ η, ἐναπολείπεται τὸ τετράγωνον τῆς κ θ, οὗ τῆς τετραγώνου ἀριθμηθείσης ῥίζης, γινώσκεται ἡ κ θ.

ΑΛΛΩΣ.

Ἀφαιρεθήτω ἡ θ η, ἀπὸ τῆς η κ, καὶ σημειωθήτω ἡ διαφορά. εἶτα συναφθήτωσαν ἀλλήλαις αἱ θ η, η κ, καὶ τὸ ὅλον πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὴν αὐτῶν διαφοράν, τοῦ δὲ γενομένου ἀριθμῷ ἡ τετράγωνος ῥίζα, καὶ γνωσθήσεται πάντως ἡ κ θ. καὶ γὰρ τὴν γʹ: τοῦ παρόντος ἡ κ θ, μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῆς π συγκειμένης ἐκ τῶν θ η, η κ, καὶ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν. ὥστε ἐγνωσμένων τῶν θ η, η κ, γινώσκεται πάντως καὶ τὸ ἐξ αὐτῶν συμπεσόμενον, καὶ ἡ πρὸς ἀλλήλας αὐτῶν διαφορά. πολλαπλασιαζομένου δὲ τοῦ ἐκ τῶν θ η, η κ, ὅλου ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν αὐτῶν, γινώσκεται τὸ τῆς κ θ, τετράγωνον, οὗτινος ἀριθμηθείσης τῆς τετραγώνου ῥίζης, γινώσκεται ἡ κ θ.

Ὅροι Αʹ Πράξεως.

100000.00.	ὁλικὸν ἡμίτονον
78801.07.	ἡμίτονον γωνίας μοιρῶν 52.
235.	ὑποτείνουσα κ η, ποδ.
39400535.	
23640321.	
15760214.	
185 | 1825145.	

100000.00. { 185. πλευρὰ κ θ.

Ὅροι

Ὅροι τῆς Β': Πράξεως.

235.	πλευρὰ κη,	145.	πλευρὰ θη,	
235.		145.		
1175.		725.		
705.		580.		
470.		145.		
55225.		21025.	τετράγ: πλευρ: θη,	
		55225.	τετράγ: ὑποτεινούσης κη,	
		34200.	τετράγ: πλευρ: κθ,	

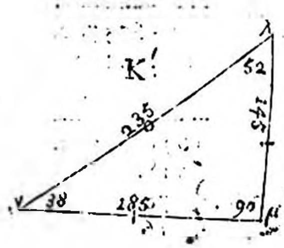
0,3.		
0,1,6,4.		
2,8,8,6.	184	
3,4,2,0,0.	1.	
1 . .		
,2,8.	185.	πλευρὰ κθ,
,3,6,5.		

Πρότασις Κ':

Παντὸς ὀρθογωνίου τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν δοθεισῶν πλευρῶν, τὴν ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν γωνίαν εὑρεῖν.

Δοθήτωσαν τοῦ λμν, ὀρθογωνίου τριγώνου κατὰ τὸ μ, αἱ λμ, μν, πλευραί, καὶ ζητηθήτω ἡ λν. Εὑρεθήτωσαν δὴ α: αἱ πρὸς τοῦ λ, καὶ ν, γωνίαι διὰ τῆς ιδ': τοῦ παρόντος, εἶτα εὑρεθήτω ἡ λν, διὰ τῆς δευτέρου. ἢ καὶ οὕτω, συναφθήτωσαν εἰς ἓν τὰ ἀπὸ τῶν λμ, μν, τετράγωνα, καὶ τοῦ γενομένου εὑρεθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα, καὶ γνωσθήσεται ἡ λν. τὸ γὰρ ἀπὸ τῆς λν, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν λμ, μν, τετραγώνοις κατὰ τὴν μζ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 21.



Πρότασις ΚΑ':

Παντὸς τριγώνου δύο δοθεισῶν πλευρῶν, καὶ μιᾶς γωνίας τῶν ὑπὸ τῶν δοθεισῶν ὑποτεινομένων πλευρῶν, τὰς λοιπὰς δύο γωνίας αὐτοῦ εὑρεῖν.

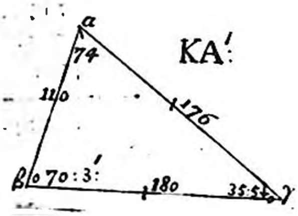
Δοθήτωσαν τοῦ αβγ, τριγώνου αἱ αγ, γβ, πλευραί, καὶ γωνία ἡ πρὸς τοῦ α, καὶ ζητηθήτωσαν αἱ πρὸς τοῦ β, καὶ γ, γωνίαι. Γενέσθω δὴ ὡς ἡ βγ, πλευ-

ρὰ

ρὰ πρὸς τὴν γα, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας πρὸς ἄλλοτι. καὶ ὁ εὑρεθεὶς δ': ἀνάλογος ἡμίτονον ἔσαι τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας. ὅστις εὑρεθεὶς ἐν τοῖς κανονίοις δώσει σοι τὴν πρὸς τῷ β, γωνίαν. ὁ γὰρ συστοιχεῖ ἀριθμῷ, παραστατικός ἐστιν ἐκεῖνος τῶν μοιρῶν τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, εἴτε ὀξεῖα ᾖ, εἴτ' ἐν ἀμβλεῖα. εὑρεθεῖσα δὲ ἡ πρὸς τῷ β, γωνία, συναφθήτω τῇ πρὸς τῷ α, καὶ ὁ γενόμενος ἐκ τῶν δύο ἀφαιρεθήτω τοῦ 180: ἀριθμοῦ, ἤτοι τῶν δύο ὀρθῶν, καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς ἔσαι παραστατικὸς τῆς πρὸς τῷ γ, γωνίας. ὁ λόγος σαφής. παντὸς γὰρ τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν λβ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 22.

ΚΑ'



Διὰ δὲ τὸ εὐχερέστερον συναφθήτω ὁ λογάριθμος τῆς αγ, πλευρᾶς ποδῶν δηλ: 176. τῷ λογαρίθμῳ τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, ἤτοι μοιρῶν 74. καὶ τοῦ γενομένου ἀφαιρεθήτω ὁ λογάριθμος τῆς βγ, ἤτοι ποδῶν 180. καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς, λογάριθμος ἔσαι τῆς πρὸς τῷ β, ὅστις εὑρεθέντος ἐν τοῖς κανονίοις, ἐπεὶ συστοιχεῖ τῷ 70. ἀριθμῷ, δῆλον ὅτι ἡ πρὸς τῷ β, γωνία μοιρῶν ἐστι 70.

Ὅροι Α': Πράξεως.

α: 180. πλευρὰ βγ.
β: 176. πλευρὰ γα.
γ: 9612617. ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας μοιρῶν 74.
β: 176.

55675702.
67288319.
9612617.

1691820592. τὸ ὑπὸ τοῦ β': καὶ γ': ὅρων.

α: 180. { 718. 1782. 1620.

00592.
52.
9399003. ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ β, γων: μοιρῶν 70.3'.

Ὅροι Β': Πράξεως.

β':	224551. 27.	λογ: πλευρᾶς α γ, ποδῶν 176.
γ':	998284. 16.	λογ: γωνίας α, μοιρῶν 74.
	1222835. 43.	τὸ ἐκ τῶν β': καὶ γ': ὅρων.
α':	225527. 25.	λογ: γωνίας α, μοιρῶν 74.
	997308. 18.	λογ: γων: β, μοιρῶν 70. 2.

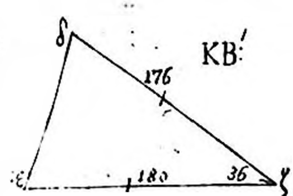
74.	γωνίας α,
70. 2'.	γωνίας β,
144. 2'.	τὸ ἐκ τῶν δύο.
180.	δύο ὀρθῶν
035.57.	γωνίας γ.

Πρότασις ΚΒ':

Παντὸς τριγώνου δύο τῶν αὐτοῦ πλευρῶν δοθεισῶν καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας, τὰς λοιπὰς γωνίας, καὶ λοιπὴν πλευρὰν εὑρεῖν.

Δοθήτωσαν τοῦ δ ε ζ, τριγώνου αἱ ε ζ, ζ δ, πλευραὶ, καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία, δηλ: ἡ πρὸς τῷ ζ. καὶ ἔσω ἡ μὲν ε ζ, ποδῶν φέρ' εἰπεῖν 180. ἡ δὲ ζ δ, 176. καὶ ἡ πρὸς τῷ ζ, γωνία μοιρῶν 36. καὶ ζητηθήτωσαν αἱ πρὸς τῷ δ, καὶ ε, γωνίαι, καὶ ἡ δ ε, πλευρά. Ἀφαιρεθήτω δὴ ἡ πρὸς τῷ ζ, δοθεῖσα γωνία τῶν δύο ὀρθῶν, ἤτοι ὁ 36. ἀριθμὸς ἀπὸ τοῦ 180. καὶ ὁ ἐναπολειπόμενος 144. μεριθήτω ἐπὶ τὸν 2. εἶτα ἀφαιρεθήτω ἡ δ ζ, ἐλάττων πλευρὰ ἀπὸ τῆς ε ζ, μείζονος, καὶ σημειωθήτω ἡ διαφορὰ, ἤτοι ὁ 4. συναπτομένων δὲ ἀλλήλαις τῶν ε ζ, ζ δ, ὁ γενόμενος 356. ὁμοίως σημειωθήτω. εἶτα εὑρεθήτω καὶ ἡ ἐπτομένη τοῦ ἡμίσεως τῶν πρός τε τῷ δ, καὶ ε, γωνιῶν, ἥτις ἐστὶ μοιρῶν, οἵων τὸ ὁλικὸν ἡμίτ: 307768.35. τούτων δ' οὕτω προϋποτεθέντων, γενέσθω ὡς ὁ 356, ἀριθμ: πρὸς τὸν 4. οὕτως ὁ 307768.35. πρὸς ἄλλον τι. καὶ ὁ εὑρεθεὶς δ': ἀνάλογος, ζητηθήτω ἐν τοῖς κανονίοις. καὶ ἐπεὶ εὑρίσκεται προσεχέστερος τῷ συστοιχοῦντι ἀριθμῷ μιᾷ μοίρᾳ καὶ 5'8. προστεθήτω ἡ μία μοῖρα καὶ 5'8. τῷ 72. ἀριθμῷ, τῷ ἡμίσει δηλ: τῶν πρός τε τῷ δ, καὶ ε, γωνιῶν, καὶ γενήσεται ὁ 73. καὶ 5'8. καὶ τοσούτων μοιρῶν ἔσται ἡ πρὸς τῷ δ, μείζων γωνία. πρὸς εὕρεσιν δὲ καὶ τῆς πρὸς τῷ ε, ἐλάτ-

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 28.



ἐλάττονος ἀφαιρεθήτω ἡ μία μοῖρα καὶ 58'. ἀπὸ τοῦ 72. ἀριθμοῦ, καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς 70. καὶ 2'. παραστατικὸς ἔσται τῆς πρὸς τῷ ε, ἐλάττονος γωνίας. κατὰ γὰρ τὴν δ': τοῦ παρόντος ἐπὶ παντὸς εὐθυγράμμου τριγώνου ὡς ἡ ἐκ τῶν δύο συγκειμένη πλευρῶν τῶν περὶ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθεῖα πρὸς τὴν αὐτῶν διαφοράν, οὕτως ἡ ἀπτομένη τοῦ ἡμίσεως τῶν λοιπῶν δύο ἀγνώστων γωνιῶν πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς ἡμιδιαφορᾶς αὐτῶν. Ἐπεὶ τοίνυν κἀνταῦθα γέγονεν ὡς ὁ 356. ἀριθμὸς δηλ: τὸ ἐκ τῶν εζ, ζδ, πρὸς τὸν 4. ἤτοι τὴν διαφορὰν τῶν αὐτῶν πλευρῶν εζ, ζδ, οὕτως ὁ 307768.35. τουτέστιν ἡ ἀπτομένη τοῦ ἡμίσεως τῶν πρός τε τῷ δ, καὶ ε, γωνιῶν πρὸς ἄλλο τι, καὶ εὑρίσκεται δ': ἀνάλογος ὁ 3429.17. ὡς ἐπὶ τῆς πράξεως δῆλον, πάντως γε κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν δ': ὁ 3429.17. ἀπτομένη ἐστὶ τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν πρός τε τῷ δ, καὶ ε, γωνιῶν. Ἐπεὶ δ' αὖθις ζητούμενος ὁ 3429.17. ἐν τοῖς κανονίοις εὑρίσκεται προσεχέστερος τῷ συστοιχοῦντι μοίρᾳ μιᾷ καὶ 58'. δῆλον ὅτι ἡ ἡμιδιαφορὰ τῶν πρὸς τῷ δ, καὶ ε, γωνιῶν μοίρας ἐστὶ μιᾶς καὶ λεπ: 58'. ἥτις προστιθεμένη μὲν τῷ ἡμίσει τῶν πρός τε τῷ δ, καὶ ε, γωνιῶν ποιεῖ τὴν μείζονα γωνίαν, ἀφαιρουμένη δὲ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεως ποιεῖ τὴν ἐλάττονα.

Διὰ δὲ τὸ εὐχερέστερον εὑρεθήτωσαν οἱ λογάριθμοι καὶ τῶν τριῶν ὅρων, καὶ συναφθήτωσαν ἀλλήλοις οἵ τε τοῦ β': καὶ γ': καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου ἀφαιρεθήτω ὁ τοῦ α': καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς ἔσται λογάριθμος τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν πρός τε τῷ δ, καὶ ε, γωνιῶν.

Διὰ τῶν Λογαρίθμων.

176.	πλευρὰ δζ,	ὅρος γ':	307768.35.	1048822.40.	λογ: ὅρου γ':
180.	πλευρὰ εζ,	ὅρος β':	4.	60206.00.	λογ: ὅρου β':
36.	γωνία πρὸς τῷ ζ,				
356.	τὸ ἐκ τῶν δύο πλ: ὅρ: α':		123107340.	1109028.04.	ὁ τοῦ β': καὶ γ':
4.	διαφ: τῶν δζ, εζ, πλ: β':		1540.	255145.00.	λογ: ὅρου α':
307768.35.	ἀπτ: τοῦ ἡμίσ: τῶν δ, καὶ ε, γων: γ':		1047.	853883.40.	λογ: γωνίας μοι: 1. καὶ 58'.
		α': 356	3293.		
			0624.		
			2650.		
			173.		
			3429.17.		

Α'ΛΛΟΣ.

Ληφθήτω τοῦ τυχόντος τόξου ἡ ἀπτομένη, καὶ γενέσθω ὡς ἡ εζ, πλευρὰ πρὸς τὴν ζδ, οὕτως ἡ ἀπτομένη τοῦ ληφθέντος τόξου πρὸς ἄλλο τι, καὶ εὑρεθήσεται ἀπτομένη ἑτέρου τόξου ἔχοντος πρὸς τὸ ἐξ ἀρχῆς ληφθὲν, ὡς ἡ ζδ, πρὸς τὴν εζ. εἶτα ἀφαιρεθήτω ὁ ἀριθμὸς τοῦ ἐλάττονος τόξου ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ μείζονος, καὶ σημειωθήτω ἡ διαφορά. συναφθέντων δ' ἀλλήλοις τῶν δύο ληφθέντων τόξων, καὶ τῆς ἀπτομένης τοῦ ἡμίσεως τῶν πρός τε τῷ δ καὶ ε, γωνιῶν εὑρεθείσης, γενέσθω ὡς τὸ ἡμίτονον τοῦ ἐκ τῶν δύο τόξων συγκειμένου πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς διαφορᾶς τῶν αὐτῶν, οὕτως ἡ ἀπτομένη τοῦ ἡμίσεως τῶν δ καὶ ε, γωνιῶν πρὸς ἄλλο τι, καὶ τὸ εὑρεθὲν ἔσαι ἀπτομένη τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν αὐτῶν γωνιῶν. ἥτις εὑρεθεῖσα ἐν τοῖς πίναξι τῶν ἀπτομένων παρέξεταί σοι τὸν ἀριθμὸν τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν δ καὶ ε, γωνιῶν. ἧς τινος προστιθεμένης τῷ ἡμίσει τῶν αὐτῶν γωνιῶν, γενήσεται ἡ πρὸς τῷ δ, μείζων γωνία. ἀφαιρουμένης δὲ τοῦ αὐτοῦ, γενήσεται ἡ πρὸς τῷ ε, ἐλάττων. Οἷον ἔσω ἀντὶ μὲν τῆς εζ, πλευρᾶς ὁ η, ἀριθμὸς, ἀντὶ δὲ τῆς ζδ, ὁ θ, ἀντὶ δὲ τοῦ ληφθέντος τόξου ὁ κ, ἡ ἀπτομένη ὁ λ· καὶ γενέσθω ὡς ὁ η πρὸς τὸν θ, ὁ λ, πρὸς ἄλλον τινὰ, καὶ ὁ εὑρεθεὶς μ, ζητηθήτω ἐν τοῖς πίναξι τῶν ἀπτομένων, καὶ ἐπεὶ εὑρίσκεται συστοιχῶν τῷ ν, ἀριθμῷ, ἀφαιρεθήτω ὁ ν, ἀπὸ τοῦ κ, μείζονος τόξου, καὶ ἔσαι τούτων διαφορὰ ὁ ξ, συναπτομένων δὲ τῶν κ καὶ ν, ἀντὶ τῶν ληφθέντων ὑποτιθεμένων, ζητηθήτω τὸ ἡμίτονον τοῦ γενομένου ρ, ἔτι δὲ καὶ τὸ τοῦ ξ, διαφορᾶς δηλ: τῶν τόξων, καὶ ἔσωσαν ταῦτα οἱ σ, τ. εὑρεθήτω πρὸς τούτοις καὶ ἡ ἀπτομένη τοῦ ἡμίσεως τῶν πρός τε τῷ δ καὶ ε, γωνιῶν, καὶ ἔσω ὁ φ: Εἶτα γενέσθω ὡς ὁ σ, πρὸς τὸν τ, ὁ φ, πρὸς ἄλλον τινὰ, καὶ ὁ εὑρεθεὶς χ, ἀπτομένη ἔσαι τῆς ἡμιδιαφορᾶς, ἧς τινος εὑρεθείσης ἐν τοῖς πίναξι τῶν ἀπτομένων, γνωσθήσεται ὁ ἀριθμὸς τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν πρός τε τῷ δ καὶ ε, γωνιῶν, ἥτις κατὰ τὴν παροῦσαν ἔφοδον εὑρίσκεται μοίρας μιᾶς καὶ α: ἑξηκοστῶν πεντήκοντα καὶ δύο. προστεθήτω δὴ ἡ μία μοῖρα καὶ ἑξηκ: δύο καὶ πεντήκοντα τῷ π, καὶ γενήσεται ὁ ψ, παραστατικὸς τῆς πρὸς τῷ δ, γωνίας. ἡ γοῦν ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ, καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς ω, παραστατικὸς ἔσαι τῆς πρὸς τῷ ε, ἐλάττονος γωνίας. ἡ μὲν οὖν πρὸς τῷ δ, γωνία μοιρῶν ἐσὶ 73. καὶ 52'. ἡ δὲ πρὸς τῷ ε, 70. καὶ 8'. κατὰ γὰρ τὴν ς': τοῦ παρόντος ἐὰν ἅπτωνται δύο τινῶν τόξων ἢ γωνιῶν ἡμιτόνοις ἑτέρων τόξων ἢ γωνιῶν ἀνάλογον ὦσι, τὰ ἡμίτονα τῆς τε συνάψεως τῶν α: τόξων ἢ γωνιῶν καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν αὐτῶν τόξων ἀνάλογόν εἰσι ταῖς ἀπτομέναις τῆς ἡμισυνα-

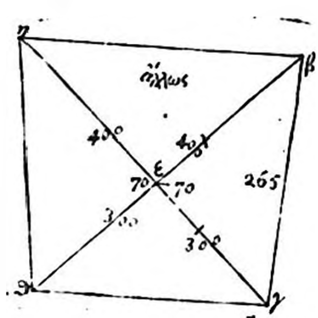
η.	180.
θ.	176.
κ.	14.
λ.	24932.80.
μ.	24408.19.
ν.	13.4'3.
ξ.	1'7.
π.	72.
ρ.	27.43.
σ.	465096.
τ.	494.51.
φ.	307768.35.
χ.	3259.10.
ψ.	73.5'2.
ω.	70. 8.

συνάψεως καὶ ἡμιδιαφορᾶς τῶν β′: τόξων. ἀλλὰ δὴ κἀνταῦθα γέγονεν ὡς ἡ εζ, πλευρὰ πρὸς τὴν ζδ, ἡ λ, ἀπτομένη πρὸς τὴν μ, ὡς δὲ ἡ εζ, πρὸς τὴν ζδ, ἔστι καὶ τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ δ, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ ε, κατὰ τὴν α′: τοῦ παρόντος, ἄρα αἱ λμ, ἀπτόμεναι ἀναλογοῦσι τοῖς ἡμιτόνοις τῶν πρὸς τῷ δ, καὶ ε, γωνιῶν. ὥστε κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ϛ′: ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς συνάψεως τῶν τόξων τῶν λ καὶ μ, ἀπτομένων πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς διαφορᾶς τῶν αὐτῶν τόξων, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς ἡμισυνάψεως τῶν δ καὶ ε, γωνιῶν πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν αὐτῶν. τοῦτο δὲ γέγονε διὰ τῆς αὐτῆς ἐφόδου, ὑγιὲς ἄρα ἡ πρᾶξις. εἰ δέ τις διαφορὰ συμβαίνει ἐπὶ τῶν πράξεων, τούτου αἴτιον ἡ παραδρομή τινων λεπτῶν. εὑρεθεισῶν δὲ τῶν γωνιῶν, εὐχερῶς εὑρίσκεται καὶ ἡ δε, πλευρά, κατὰ τὴν α′: τοῦ παρόντος διὰ τῶν ἡμιτόνων καὶ λογαρίθμων τῶν αὐτῶν, ὡς δῆλον ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω προτάσεων.

ἌΛΛΩΣ.

Δοθήτωσαν τοῦ βεγ, τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ βε, εγ, καὶ ἡ ὑπὸ βεγ, γωνία, καὶ ζητηθήτωσαν αἱ λοιπαὶ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ εβγ, εγβ, καὶ ἡ λοιπὴ βγ, πλευρά. Ἀφαιρεθήτω τοίνυν ἡ ὑπὸ βεγ, δοθεῖσα γωνία ἀπὸ τῶν δύο ὀρθῶν, ἤτοι μοιρῶν 180., καὶ τοῦ ἐναπολειπομένου ληφθήτω τὸ ἥμισυ. εἶτα γινέσθω ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς βε, πλευρᾶς, οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ ληφθέντος ἡμίσεως πρὸς ἄλλο τι. σημειωθέντος δὲ τοῦ εὑρεθέντος δ′: ἀναλόγου ἐπὶ τῆς αὐτῆς πράξεως, γενέσθω πάλιν ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς εγ, οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ ληφθέντος ἡμίσεως πρὸς ἄλλο τι, καὶ ὁ εὑρεθεὶς ἐνταῦθα δ′: ἀνάλογος πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸν εὑρεθέντα δ′: ἀνάλογον ἐπὶ τῆς προτέρας πράξεως. ὁ δὲ γενόμενος ἀριθμὸς ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν βε, εγ, δοθεισῶν πλευρῶν ὡς ἀπὸ μιᾶς, καὶ τοῦ ἐναπολειπομένου εὑρεθήτω ἡ τετράγωνος ῥίζα, κἀκείνη ἔσται παραστατικὴ τῆς βγ, ζητουμένης. Ἐξαχθήτω γὰρ ἡ μὲν γε, ἐπὶ τὸ η, ὥστε τὴν εη, ἴσην εἶναι τῇ εβ. ἡ δὲ βε, ἐπὶ τὸ θ, ὥστε τὴν εθ, ἴσην εἶναι τῇ εγ, καὶ ἐπιζευχθήτωσαν αἱ ηβ, ηθ, θγ. καὶ ἐπεὶ τῶν βεγ, ηεθ, τριγώνων αἱ δύο πλευραὶ βε, εγ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ηε, εθ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βεγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ηεθ, ἴση, πάντως γε κατὰ τὴν δ′: τοῦ α′: τοῦ Στοιχ: καὶ ἡ βγ, ἴση ἐστὶ τῇ ηθ, ἡ δὲ ὑπὸ εβγ, τῇ ὑπὸ εηθ, καὶ ἡ ὑπὸ εγβ, τῇ ὑπὸ εθη. ἀλλὰ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ εβη, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εηβ. ἡ δὲ ὑπὸ εγθ. τῇ ὑπὸ εθγ,

Trig. Anal. lib.1. Fig. 24.



κατὰ

καὶ τὴν ε': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ηβγ, ὅλῃ τῇ ὑπὸ βηθ, ἴση ἐστίν. Ὡσαύτως καὶ ἡ ὑπὸ βγθ, τῇ ὑπὸ ηθγ. ἐπεὶ δὲ παντὸς τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι τέτταρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, κατὰ τὸ δ': πόρισμα τῆς λβ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ. πάντως γε τοῦ βγθη, τετραπλεύρου αἱ ἀπεναντίον γωνίαι αἱ τε ὑπὸ ηβγ, ηθγ, καὶ βηγ, βγθ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. καὶ κατὰ τὴν ια': τοῦ δ': βιβλ: τοῦ α: τμήματος τῆς Γεωμετρίας τὸ ὑπὸ τῶν ηγ, βθ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ συναμφοτέροις τοῖς ὑπὸ τῶν ηβ, θγ, καὶ βγ, ηθ, περιεχομένοις ὀρθογωνίοις. ἡ δὲ βθ, ἴση ἐστὶ τῇ ηγ, καὶ ἡ βγ, τῇ ηθ, ἄρα τὸ τετράγωνον τῆς ἐκ τῶν βε, εγ, συγκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς, ἤτοι τῆς ηγ, ἢ βθ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ηβ, θγ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς βγ, τετραγώνῳ. ἀλλ' ἐπὶ μὲν τοῦ ηεβ, τριγώνου ἐστὶν ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν βε, εη, οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ ἡμίσεως τῆς ὑπὸ ηεβ, πρὸς τὴν ηβ. ἐπὶ δὲ τοῦ θεγ, τριγώνου ὁμοίως ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν θε, εγ, οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ ἡμίσεως τῆς ὑπὸ θεγ, πρὸς τὴν θγ, κατὰ τὴν ιγ': τοῦ παρόντος. ἐστὶ δὲ ἡ μὲν εη, ἴση τῇ εβ, ἡ δὲ θε, τῇ εγ. ἄρα ἡ μὲν ἐκ τῶν ηε, εβ, συγκειμένη διπλασία ἐστὶ τῆς εβ, ἡ δὲ ἐκ τῶν θε, εγ, τῆς εγ. Ἀφαιρουμένης δὲ καὶ τῆς ὑπὸ βεγ, ἀπὸ τῶν δύο ὀρθῶν, γινώσκεται καὶ ἡ ὑπὸ ηεβ, καὶ θεγ. ἄρα ἐὰν μὲν γίνηται ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς βε, οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ ἡμίσεως τῆς ηεβ, γνωσθείσης γωνίας πρὸς ἄλλο τι, γνωσθήσεται πάντως ἡ ηβ. ἐὰν δὲ πάλιν γένηται καὶ ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς εγ, οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ ἡμίσεως τῆς ὑπὸ θεγ, γωνίας πρὸς ἄλλο τι, γνωσθήσεται καὶ ἡ θγ. ἐστὶ δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ηγ, βθ, ἐγνωσμένη διὰ τὸ συγκεῖσθαι ἐκ τῶν βε, εγ. ἐὰν ἄρα ἡ ἐκ τῶν βε, εγ, συγκειμένη πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἑαυτὴν καὶ τοῦ γενομένου τετραγώνου ἀφαιρεθῇ τὸ ὑπὸ τῶν ηβ, θγ, ὀρθογώνιον, ἐναπολειφθήσεται τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τετράγωνον, οὗ τετράγωνος ῥίζα ἡ αὐτὴ βγ, ζητουμένη. Ἐπὶ παντὸς ἄρα τριγώνου δύο τῶν αὐτοῦ πλευρῶν δοθεισῶν καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας αἱ λοιπαὶ καὶ τὰ ἑξῆς.

Ὅροι α': πράξεως.

α': 100000.00. ὁλικ: ἡμίτονον.
β': 800. διπλ: τῆς βι. πλάκρας.
γ': 81915.21. ἡμ: ἡμίσ: βιν, γων: μοιρ: 55.

γ'. 81915.21.
β': 800.

6553216800
α': 100000.00. { 655. πλάκρα νβ.

α': 1000000.00. λογ: ὁλικῦ ἡμιτόνου.
β': 290309.00. λογ: διπλ: τῆς βι, ποδ: 800.
γ': 991336.45. λογ: ἡμίσ: γων: βιγ. μοιρ. 55.

1281645.45. σύναψις β': καὶ γ': λογαρ:
α': 1000000.00. ἀφαίρεσις.

0281645.45. λογαρ: πλ: νβ: ποδ: 655.

Ὅροι β': πράξεως.

α': 100000.00. ὁλικὸν ἡμίτονον.
β': 600. διπλ: τῆς ιγ, πλάκρας.
γ': 81915.21. ἡμίτ: ἡμίσ: θιγ, γων: μοιρ: 55.

γ': 81915.21.
β': 600.

4914912600
α': 100000.00. { 491. πλ: θγ.

α': 1000000.00. λογάρ: ὁλικῦ ἡμιτ:
β': 277815.13. λογ: διπλ: τῆς ιγ, ποδ: 600.
γ': 991336.45. λογ: ἡμίσ: γων: θιγ.

1269151.58. σύναψις β': καὶ γ': λογαρ:
α': 1000000.00. ἀφαίρεσις.

269151.58. λογ: πλ: θγ. ποδ: 491.

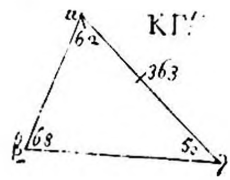
Πρέ.

Πρότασις ΚΓ':

Παντὸς τριγώνου δύο τῶν αὐτοῦ δοθεισῶν γωνιῶν, καὶ μιᾶς πλευρᾶς τὴν λοιπὴν γωνίαν, καὶ λοιπὰς δύο πλευρὰς εὑρεῖν.

Δοθήτωσαν τοῦ αβγ, τριγώνου αἱ πρὸς τῷ α καὶ γ, γωνίαι, καὶ ἡ αγ, πλευρὰ, καὶ ζητηθήτωσαν ἥτε πρὸς τῷ β, γωνία, καὶ αἱ λοιπαὶ αὐτοῦ πλευραὶ αβ, βγ. Ἔστω δὴ τῆς μὲν πρὸς τῷ α, γωνίας παραστατικὸς ἀριθμὸς ὁ δ, τῆς δὲ πρὸς τῷ γ, ὁ ε. καὶ τῆς αγ, πλευρᾶς ὁ ζ. πρὸς εὕρεσιν δὲ τῶν ζητουμένων συναφθήτωσαν οἱ δε, ἀριθμοὶ ἀλλήλοις, καὶ ὁ γενόμενος η, ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ θ, παραστατικοῦ ὄντος δύο ὀρθῶν γωνιῶν, καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς κ, παραστατικὸς ἔσται πάντως τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας. αἱ τρεῖς γὰρ τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Εἶτα γενέσθω ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ γ, οὕτως ἡ αγ, πρὸς ἄλλο τι, καὶ γνωσθήσεται ἡ αβ, κατὰ τὴν δ: τοῦ παρόντος. Γενέσθω δ' αὖθις ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, ἡ γα, πρὸς ἄλλο τι, καὶ γνωσθήσεται κατὰ τὴν αὐτὴν ἡ βγ.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 25.



Διὰ δὲ τὸ εὐχερέστερον πρὸς εὕρεσιν μὲν τῆς αβ, πλευρᾶς συναφθήτω ὁ λογάριθμος τῆς πρὸς τῷ γ, γωνίας τῷ λογαρίθμῳ τῆς αγ, πλευρᾶς, καὶ τοῦ γινομένου ἀφαιρεθήτω ὁ λογάριθμος τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς ἔσται λογάριθμος τῆς αβ, πλευρᾶς. πρὸς εὕρεσιν δὲ τῆς βγ, συναφθήτω ὁ λογάριθμος τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας τῷ λογαρίθμῳ τῆς αγ, καὶ τοῦ γενομένου ἀφαιρεθήτω ὁ λογάριθμος τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς ἔσται λογάριθμος τῆς βγ.

θ
δ. 62. γωνίας α. 62. δ.
ε. 50. γωνίας γ. 50. ε.
112. η.
ζ. 363. πλ: αγ. 180. θ
068. κ.

Πρότασις ΚΔ':

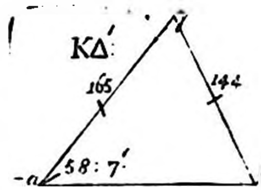
Παντὸς τριγώνου δύο τῶν αὐτοῦ πλευρῶν δοθεισῶν καὶ μιᾶς γωνίας τῶν ὑπὸ τῶν δοθεισῶν ὑποτεινομένων πλευρῶν, τὰς λοιπὰς γωνίας, καὶ λοιπὴν πλευρὰν εὑρεῖν.

Δοθήτωσαν τοῦ αβγ, τριγώνου αἱ αγ, γβ, πλευραὶ, καὶ ἡ πρὸς τῷ α, γωνία, ἡ ὑπὸ τῆς γβ, ὑποτεινομένης, καὶ ζητηθήτωσαν αἱ πρὸς τῷ β καὶ γ, γωνίαι, καὶ ἡ αβ, πλευρά. Ἔστω δὴ ἡ μὲν αγ, ποδῶν 165., ἡ δὲ γβ,

144. καὶ ἡ πρὸς τῷ α, γωνία μοιρ: 58.7'. Γενέσθω τοίνυν ὡς ἡ βγ, πλευρὰ πρὸς τὴν γα, ὁ δ, δηλονότι ἀριθμὸς πρὸς τὸν ε, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας μοιρ: δηλ: 50. καὶ 7'. πρὸς ἄλλο τι, καὶ τὸ εὑρεθὲν ἔσαι ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, κατὰ τὴν α: τοῦ παρόντος. Εἶτα συναφθήτωσαν αἱ μοῖραι τῶν πρὸς τοῖς α καὶ β, γωνιῶν, καὶ ὁ γενόμενος ἀφαιρεθήτω τῶν 180 μοιρῶν, καὶ γνωσθήσεται πάντως καὶ ἡ πρὸς τῷ γ, γωνία. Πρὸς εὕρεσιν δὲ καὶ τῆς αβ, πλευρᾶς γενέσθω ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ γ, οὕτως ἡ γβ, ἤτοι ὁ δ, ἀριθμὸς πρὸς ἄλλον τινὰ, καὶ γνωσθήσεται ἡ αβ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν α:

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 26.

δ. 144. πλ: βγ.
ε. 165. πλ. αγ.



Διὰ δὲ τὸ εὐχερέστερον ἐπὶ μὲν τῆς α: πράξεως συναφθήτω ὁ λογάριθμος τῆς αγ, τῷ λογαρίθμῳ τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου ἀφαιρεθήτω ὁ λογάριθμος τῆς βγ, καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς ἔσαι λογάριθμος τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας. ἐπὶ δὲ τῆς β': πράξεως συναφθήτω ὁ λογάριθμος τῆς πρὸς τῷ γ, γωνίας τῷ λογαρίθμῳ τῆς βγ, ἤτοι τοῦ δ, ἀριθμοῦ. καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου ἀφαιρεθήτω ὁ λογάριθμος τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας μοιρ: δηλ: 58. καὶ 7'., καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς ἔσαι λογάριθμος τῆς αβ, πλευρᾶς. ὅςις εὑρισκόμενος ἐν τοῖς κανονίοις τῶν κοινῶν λογαρίθμων, δώσει σοι τὸν ἀριθμὸν τῶν ποδῶν τῆς αβ, ταύτης πλευρᾶς. ὁ λόγος σαφὴς ἐκ τῶν πρότερον εἰρημένων.

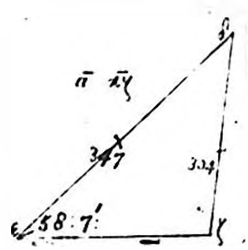
221748.39. λογ: πλ: αγ: ποδ: 165.
992897.18. λογ: ἡμ: γων: α, μοιρ: 58.7'.

1214645.57. ὁ ἐκ τοῦ β': καὶ γ': γενόμενος.
215836.25. λογ: πλ: γβ: ποδ: 144.

998809.32. λογ: ἡμ: γων: β, μοιρῶν 76.38'.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 29.

Ἐκκείσθωσαν δὲ ὑποδείγματος χάριν οἱ λογάριθμοι τῶν ὅρων τῆς α: πράξεως, καὶ δηλωθήσεται ὁ τρόπος, καθ' ὃν καὶ ἡ δευτέρα πρᾶξις διὰ τῶν λογαρίθμων ἐφοδεύεται.



Ἰςέον δ' ὅτι ἐπειδὰν ἡ πρὸς τῷ β, γωνία ὀξεῖα ᾖ, ἔσαι μοιρῶν τοσούτων, ὅσων ἂν διὰ τῆς πράξεως εὑρεθῇ. ὅταν δὲ ἀμβλεῖα ᾖ, οὐκ ἐφησυχάζειν ἐν τούτῳ δεῖ, ἀλλὰ τὰς εὑρεθείσας διὰ τῆς πράξεως μοίρας ἀφελεῖν ἀπὸ τῶν δύο ὀρθῶν, καὶ ὁ ἐναπολειφθεὶς ἔσαι ὁ ζητούμενος. Οἷον ἔσω τὸ δεζ, τρίγωνον ἀμβλυγώνιον καὶ τὸ ζ,

καὶ

καὶ δοθήτωσαν αἱ ζδ, δε, αὐτοῦ πλευραὶ, καὶ ἡ πρὸς τῷ ε, γωνία, καὶ ζητηθήτω ἡ πρὸς τῷ ζ. Συναφθήτω ὡς ἀνωτέρω, ὁ τῆς δε, πλευρᾶς λογάριθμος, ἤτοι ὁ τοῦ 347. ἀριθμοῦ τῷ λογαρίθμῳ τῆς πρὸς τῷ ε, γωνίας μοιρ: δηλ: 58. 7′. καὶ τοῦ γενομένου ἀφαιρεθήτω ὁ λογάριθμος τῆς ζδ, ἤτοι ποδῶν 304. καὶ ἐπεὶ ὁ ἐναπολειπόμενος, λογάριθμός ἐστι γωνίας μοιρῶν 75. καὶ 4′5. ὡς ἐν τοῖς κανονίοις εὑρίσκεται, ἀφαιρεθήτωσαν αἱ 75. καὶ 4′5. ἀπὸ μοιρῶν 180. καὶ ἐπεὶ ἐναπολείπονται μοῖραι 104. καὶ 1′5. δῆλον ὅτι ἡ πρὸς τῷ ζ, γωνία μοιρῶν ἐστι 104. καὶ 1′5. κατὰ γὰρ τὸν δ′: ὅρον τοῦ β′: τοῦ α′: τοῦ παρόντος τὸ τῆς ὀξείας γωνίας ἡμίτονον, ἐστὶν ἔτι ἡμίτονον καὶ τῆς ἀμβλείας, ὡς παραπλήρωμα οὔσης τῆς ὀξείας μέχρι τοῦ ἡμικυκλίου, ἤτοι μοιρῶν 180. ἐκκείσθωσαν δὲ κἀνταῦθα οἱ λογάριθμοι χάριν ὑποδείγματος.

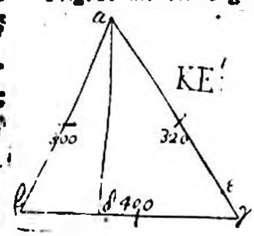
254032.95.	λογ: πλευρᾶς δε, ποδ: 347. ὅρος β′:
992897.18.	λογ: γωνίας ε, μοιρῶν 58.7′. ὅρος γ′:
1246930.13.	ὁ ἐκ τοῦ β′: καὶ γ′: γενόμενος ὅρος.
248287.36.	λογ: πλευρ: δζ, ποδ: 304. ὅρος α′:
998642.77.	λογ: ἡμιτ: γων: ζ, μοιρῶν 104. καὶ 1′5.

Πρότασις ΚΕ′:

Παντὸς τριγώνου τῶν πλευρῶν δοθεισῶν τὰς γωνίας εὑρεῖν.

Δοθήτωσαν αἱ πλευραὶ τοῦ αβγ, τριγώνου, καὶ ἔστω ἡ μὲν αβ, ποδῶν φέρ' εἰπεῖν 300. ἡ δὲ βγ, 400. καὶ ἡ γα, 320. καὶ ζητηθήτωσαν αἱ γωνίαι τοῦ αὐτοῦ. Πιπτέτω δὴ κάθετος ἐπὶ τῆς βγ, μείζονος πλευρᾶς ἀπὸ τῆς ἀπεναντίον γωνίας τῆς πρὸς τῷ α, ἡ αδ, τῆς δὲ αβ, ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τῆς αγ, σημειωθήτω ἡ διαφορὰ, καθ' ἣν ἡ αγ, μείζων ὑπερέχει τῆς αβ, ἐλάττονος, καὶ ἔστω αὕτη ἡ γε. εἶτα γενέσθω ὡς ἡ βγ, μείζων πλευρὰ πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν βα, αγ, οὕτως ἡ ὑπεροχὴ εγ, πρὸς ἄλλο τι, καὶ ὁ εὑρεθεὶς δ′: ἀνάλογος ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τῆς βγ, τὸ δὲ ἐναπολειφθὲν διαιρεθήτω δίχα, καὶ γνωσθήσεται πάντως ἥτε βδ, καὶ δγ, κατὰ τὴν ε′: τοῦ παρόντος. ὁ γὰρ ἐπὶ τῆς πράξεως εὑρεθεὶς δ′: ἀνάλογος διαφορά ἐστι κατὰ τὴν αὐτὴν τῶν βδ, δγ, τμημάτων. γνωσθείσης δὲ τῆς βδ, γενέσθω ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς ἄλλο τι. καὶ ὁ εὑρεθεὶς δ′: ἀνάλογος ἡμίτονον ἔσται τῆς ὑπὸ δαβ, γωνίας, οὗτινος εὑρεθέντος ἐν τοῖς κανονίοις τῶν ἡμιτόνων, γνωσθήσεται ἡ ὑπὸ δαβ, γωνία κατὰ τὴν α′: τοῦ παρόντος, ἧστινος ἀφαιρουμένης ἀπὸ μιᾶς ὀρθῆς, γνωσθήσεται καὶ ἡ πρὸς τῷ β, παραπλήρωμα γάρ ἐστι τῆς αὐτῆς ἡ ὑπὸ δαβ.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 28.

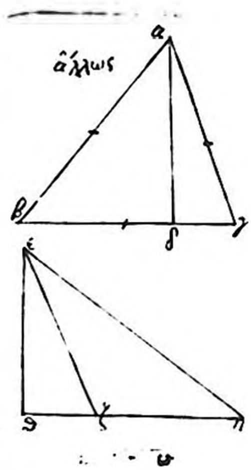


δαβ. Ἐὰν δὲ γένηται καὶ ὡς ἡ αγ, πρὸς τὴν γδ, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς ἄλλοτι, γνωσθήσεται ἡ ὑπὸ δαγ, ἧς τινος ἀφαιρεμένης ἀπὸ μιᾶς ὀρθῆς, γνωσθήσεται καὶ ἡ πρὸς τῷ γ. ἐγνωσμένων δὲ τῶν πρὸς τοῖς β, γ, γνωσθήσεται πάντως καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, καίτοι γνωσθεισῶν τῶν ὑπὸ δαβ, δαγ, ἔγνωσται καὶ ἡ ὅλη βαγ.

Ἄ Λ Λ Ω Σ.

Ἔστω τρίγωνον ὀξυγώνιον τὸ αβγ, καὶ διδομένων τῶν αὐτοῦ πλευρῶν, ζητηθήτω ἡ πρὸς τῷ β, ὀξεῖα γωνία. Πολλαπλασιασθήτωσαν δὴ αἱ περὶ τὴν ζητουμένην γωνίαν αβ, βγ, πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον σημειωθήτω, πολλαπλασιασθεισῶν δὲ τῶν αὐτῶν αβ, βγ, καὶ καθ' αὐτὰς χωρὶς, συναφθήτωσαν ἀλλήλοις τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα. ἀπὸ δὲ τοῦ γενομένου ἀφαιρεθήτω τὸ τετράγωνον τῆς αγ, καὶ γνωσθήσεται πάντως ἡ ὑπεροχὴ, καθ' ἣν ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τετράγωνα τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, τετραγώνου, καὶ ἔσται αὕτη ἡ ὑπεροχὴ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν γβ, βδ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον κατὰ τὴν ιγ': τοῦ β': τοῦ Ἐπιχειρωμ. τούτου δὲ γνωσθέντος, γενέσθω ὡς τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, καθ' ἣν ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τετράγωνα τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, τετραγώνου, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς ἄλλοτι, καὶ γνωσθήσεται κατὰ τὴν ζ': τοῦ παρόντος τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, δηλον: τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ δαβ, γωνίας, οὗ τινος εὑρεθέντος ἐν τοῖς κανονίοις, γνωσθήσεται ἡ ὑπὸ δαβ, γωνία. ταύτης δὲ ἀφαιρεμένης ἀπὸ μιᾶς ὀρθῆς γνωσθήσεται πάντως ἡ πρὸς τῷ β, ζητουμένη γωνία.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 29.

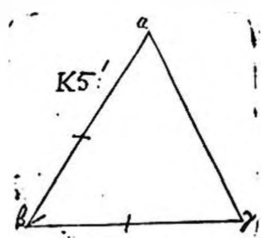


Εἰ δὲ τὸ τρίγωνον ἀμβλυγώνιον ᾖ, ὡς τὸ εζη, καὶ ζητηθῇ ἡ πρὸς τῷ ζ, ἀμβλεῖα αὐτοῦ γωνία, πολλαπλασιασθήτωσαν πρὸς ἀλλήλας τε αἱ εζ, ζη, αὐτοῦ πλευραὶ αἱ περὶ τὴν ζητουμένην γωνίαν, καὶ καθ' αὐτὰς χωρὶς. καὶ σημειωθήτω τὸ, τε ὑπ' αὐτῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ἔτι τετράγωνα, τῶν δὲ ἀπὸ τῶν εζ, ζη, τετραγώνων ἀλλήλοις συναπτομένων, ἀφαιρεθήτω τὸ γενόμενον ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τῆς εη. εἶτα γενέσθω ὡς τὸ δὶς ὑπὸ τῶν εζ, ζη, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τῆς εη, τετράγωνον τῶν ἀπὸ τῶν εζ, ζη, τετραγώνων, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς ἄλλοτι, καὶ γνωσθήσεται τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς ὑπὸ εζη, γωνίας κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ἑβδόμην. Εὑρεθέντος δὲ ἐν τοῖς κανονίοις τοῦ αὐτοῦ ἡμιτόνου, γνωσθήθήσεται ἡ ὑπὸ ζεθ, γωνία, ἥτις μὴ μόνον παραπλήρωμά ἐστι τῆς ὑπὸ εζθ, γωνίας κατὰ τὸν ζ': ὅρον τοῦ α: τῶν ἐν τῷ α: τοῦ παρόντ: τμήματι, ἀλλά γε καὶ τῆς ὑπὸ εζη. αὕτη δὲ ἡ ὑπὸ ζεθ, ἀφαιρεθήτω ἀπὸ μιᾶς ὀρθῆς, καὶ γνωσθήσεται παντως ἡ ὑπὸ εζθ. ἡ δὲ ὑπὸ εζθ, ἀφαιρεθήτω ἀπὸ δύο ὀρθῶν, καὶ γνωσθήσεται ἡ ὑπὸ εζη, ζητουμένη ἀμβλεῖα γωνία. ὁ λόγος ἐκ τῆς πράξεως σαφής.

Πρότασις Κϛ':

Παντὸς τριγώνου δύο τῶν αὐτοῦ πλευρῶν δοθεισῶν, καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εὑρεῖν.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 30.



Δοθήτωσαν τοῦ αβγ, τριγώνου αἱ αβ, βγ, πλευραί, καὶ ἡ πρὸς τῷ β, γωνία, καὶ ζητηθήτω τὸ αὐτοῦ ἐμβαδόν. Γενέσθω δὴ ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς ἄλλο τι, καὶ τὸ εὑρεθὲν ἔσται διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ αβγ, τριγώνου κατὰ τὴν θ': τοῦ παρόντος, οὗτινος δίχα διῃρημένου, γνωσθήσεται τὸ τοῦ αβγ, τριγώνου ἐμβαδόν.

Πρότασις ΚΖ':

Παντὸς τριγώνου δύο τῶν αὐτοῦ γωνιῶν δοθεισῶν, καὶ μιᾶς πλευρᾶς, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εὑρεῖν.

Δοθήτωσαν τοῦ αβγ, τριγώνου αἱ πρός τε τῷ α, καὶ β, γωνίαι, καὶ ἡ αβ, πλευρά, καὶ ζητηθήτω τὸ αὐτοῦ ἐμβαδόν. Εὑρεθήτωσαν δὴ διὰ τῆς κγ': τοῦ παρόντος αἱ λοιπαὶ πλευραὶ αγ, γβ, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ πρὸς τῷ γ. Εἶτα γενέσθω ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ α, δὸς εἰπεῖν γωνίας, οὕτω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν βα, αγ, ὀρθογώνιον πρὸς ἄλλο τι, καὶ τὸ εὑρεθὲν διπλάσιον ἔσται τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ αβγ, τριγώνου, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν θ': οὗτινος δίχα διῃρημένου, γνωσθήσεται τὸ ~~τοῦ~~ αὐτοῦ τριγώνου ἐμβαδόν.

Πρότασις ΚΗ':

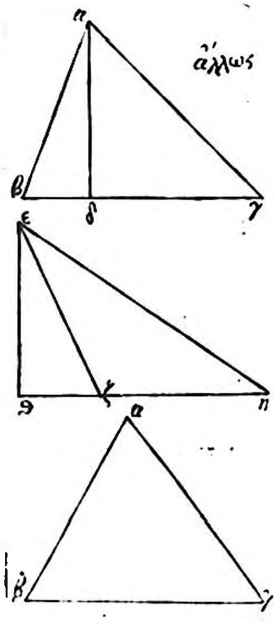
Παντὸς τριγώνου τῶν πλευρῶν δοθεισῶν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εὑρεῖν.

Δοθήτωσαν τοῦ αβγ, τριγώνου αἱ πλευραί, καὶ ζητηθήτω τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. Εὑρεθήτω δὴ ἡ πρὸς τῷ α, δὸς εἰπεῖν, γωνία διὰ τῆς κε': τοῦ παρόντος. εἶτα εὑρεθήτω ἐν τοῖς πίναξι τῶν ἀποτεμνομένων ἡ ἀποτεμνομένη τοῦ ἡμίσεως τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας. Συναφθεισῶν δὲ τῶν αβ, βγ, γα, πλευρῶν τοῦ αὐτοῦ τριγώνου, καὶ τοῦ ὅλη δίχα διαιρεμένη, ἀφαιρεθήτω ἡ βγ, ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ α, γωνίαν ἀπὸ τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου, καὶ ἐπὶ τὴν ὑπεροχὴν τῆς ἡμιπεριμέτρου πρὸς τὴν βγ, πολλαπλασιαθήτω ἡ αὐτὴ ἡμιπερίμετρος, καὶ τὸ γινόμενον σημειωθήτω. Τελευταῖον δὲ γενέσθω διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀποτομήν τοῦ ἡμίσεως τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, οὕτω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ τριγώνου καὶ τῆς ὑπεροχῆς, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ ἡμιπερίμετρος τοῦ αβγ, τριγώνου τῆς βγ, ἀπεναντίον πλευρᾶς, πρὸς ἄλλο τι, καὶ τὸ γενόμενον ἔσαι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αβγ, τριγώνου κατὰ τὴν ια: τοῦ παρόντος.

Α'ΛΛΩΣ.

Εὑρεθήτω ἡ πρὸς τῷ β, γωνία τοῦ αβγ, ὀξυγωνίου, ἢ ἡ ὑπὸ εζη, τοῦ εζη, ἀμβλυγωνίου τριγώνου, καθ' ὃν προηρμηνεύθη τρόπον. καὶ ἐπὶ τῆς βγ, ἢ ζη, πιπτέτω κάθετος ἡ αδ, ἢ εθ, καὶ ἐπὶ μὲν τοῦ αβγ, τριγώνου ἐντὸς πεσεῖται, ἐπὶ δὲ τοῦ εζη, ἐκτός. Εἶτα γενέσθω ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ β, γωνίας ὀξείας οὔσης, ἀμβλείας δὲ, ὡς ἡ ὑπὸ εζη, πρὸς τὸ αὐτῆς παραπλήρωμα, τὴν ὑπὸ εζθ, οὕτως ἡ αβ, ἢ γοῦν ἡ εζ, πρὸς ἄλλο τι, καὶ γνωσθήσεται κατὰ τὴν α: τοῦ παρόντος ἡ αδ, κάθετος, ἢ ἡ εθ. ταύτης δὲ γνωσθείσης, διαιρεθήτω δίχα ἡ βγ, ἢ ζη, βάσις τοῦ τριγώνου, καὶ ἐπὶ μὲν τὸ τῆς βγ, ἥμισυ πολλαπλασιασθήτω ἡ αδ, κάθετος, ἐπὶ δὲ τὸ ἥμισυ τῆς ζη, πολλαπλασιασθήτω ἡ εθ, καὶ τὸ γενόμενον ἔσαι ἴσον τῷ τοῦ τριγώνου ἐμβαδῷ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιβ': τοῦ γ: βιβλ: τοῦ α: τμήματος τῆς Γεωμετρίας.

Trig. Anal. lib. 1. Fig. 31.



Α'ΛΛΩΣ.

Ἀφαιρεθήτω ἑκάστη τῶν τοῦ αβγ, τριγώνου πλευρῶν ἀπὸ τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αὐτοῦ τριγώνου. Δεδομένων γὰρ τῶν πλευρῶν, δέδοται πάντως καὶ ἡ ἡμιπερίμετρος αὐτοῦ, καὶ γνωσθήσονται αἱ διαφοραὶ, καθ' ἃς ἡ ἡμιπερίμετρος τοῦ αβγ, τριγώνου ὑπερέχει τῶν αβ, βγ, γα, αὐτοῦ πλευρῶν χωρίς. Εἶτα πολλαπλασιαθήτω ἡ ἡμιπερίμετρος τοῦ αὐτοῦ τριγώνου ἐπὶ τὴν ὑπεροχὴν, καθ' ἣν ὑπερέχει ἡ ἡμιπερίμετρος μιᾶς πλευρᾶς, φέρ' εἰπεῖν, τῆς βγ. Πολλαπλασιαθήτωσαν δ' ἔτι πρὸς ἀλλήλας καὶ αἱ ὑπεροχαὶ τῆς αὐτῆς ἡμιπεριμέτρου πρὸς τὰς λοιπὰς δύο τοῦ τριγώνου πλευρὰς τὰς αβ, αγ. τούτων δὲ γενομένων, πολλαπλασιαθήτω τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου

καὶ

καὶ διαφορᾶς τῆς αὐτῆς πρὸς τὴν βγ, πλευράν, ἀπὸ τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ἄλλων διαφορῶν τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ τριγώνου πρὸς τὰς αβ, αγ, αὐτοῦ πλευράς, καὶ τοῦ γενομένου εὑρεθήτω ἡ τετραγ: ῥίζα, καὶ αὕτη ἔσται παραστατικὴ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου. κατὰ γὰρ τὴν ιβ': τοῦ παρόντος τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου μέσον ἐστὶν ἀνάλογον τοῦ περιεχομένου ὀρθογωνίου ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ τριγώνου καὶ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῆς πρὸς μίαν τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν, καὶ τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ὑπεροχῶν τῆς ἡμιπεριμέτρου πρὸς τὰς ἄλλας πλευράς.

Πρότασις ΚΘ'.

Παντὸς τριγώνου τοῦ τε ἐμβαδοῦ δοθέντος, καὶ τῶν πλευρῶν, τὰς γωνίας αὐτοῦ εὑρεῖν.

Δοθήτω τοῦ αβγ, τριγώνου τὸ ἐμβαδόν, καὶ αἱ αβ, βγ, γα, αὐτοῦ πλευραί, καὶ ζητηθήτωσαν αἱ γωνίαι. Ἀφαιρεθήτω δὴ ἡ μία τῶν αὐτοῦ πλευρῶν, φέρ᾽ εἰπεῖν, ἡ βγ, ἀπὸ τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου, καὶ εὑρεθήσεται ἡ ὑπεροχή, καθ᾽ ἣν ἡ ἡμιπερίμετρος ὑπερέχει τῆς βγ, πλευρᾶς. τούτου δὲ γενομένου πολλαπλασιασθήτω ἡ ἡμιπερίμετρος τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὴν εὑρεθεῖσαν ὑπεροχήν. Εἶτα γενέσθω ὡς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὑπό τε τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου, καὶ ὑπεροχῆς, καθ᾽ ἣν ἡ ἡμιπερίμετρος τῆς βγ, ὑπερέχει, πρὸς τὸ τοῦ τριγώνου ἐμβαδόν, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς ἄλλο τι. καὶ ὁ εὑρεθεὶς δ': ἀνάλογος ἁπτομένη ἔσται τοῦ ἡμίσεως τῆς πρὸς τῇ α, γωνίας, τῆς ὑποτεινομένης δηλ: ὑπὸ τῆς βγ, ληφθείσης πλευρᾶς κατὰ τὴν ια': τοῦ παρόντος. ἥτις εὑρισκομένη ἐν τοῖς πίναξι τῶν ἡμιτόνων, ἁπτομένων, καὶ τεμνουσῶν, δώσει σοι τὸν ἀριθμὸν τοῦ ἡμίσεως τῆς πρὸς τῇ α, γωνίας, οὗτινος διπλασιαζομένου, γνωσθήσεται ἡ πρὸς τῇ α, γωνία. τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρεθήσεται καὶ ἑκατέρα τῶν πρός τε τῇ β, καὶ γ, ἡ μέν, ἀφαιρουμένης τῆς αγ, ὑποτεινούσης αὐτὴν ἀπὸ τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ αβγ, τριγώνου, ἡ δέ, τῆς αβ, καὶ τῶν λοιπῶν γενομένων ὡς προηρμήνευται.

ΑΛΛΩΣ.

Πολλαπλασιασθήτωσαν αἱ βα, αγ, πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας, εἶτα γενέσθω ὡς τὸ ὑπὸ τῶν βα, αγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ διπλοῦν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ αβγ, τριγώνου, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς ἄλλο τι. καὶ τὸ εὑρεθὲν ἔσται ἡμίτονον τῆς πρὸς τῇ α, γωνίας κατὰ τὴν θ': τοῦ παρόντος. οὗτινος εὑρεθέντος ἐν τοῖς κανονίοις, γνωσθήσεται ἡ πρὸς τῇ α, γωνία. Τοῦτον τὸν τρόπον εὑρεθήσονται καὶ αἱ λοιπαὶ δύο γωνίαι.

Τέλος τοῦ περὶ διαλύσεως τῶν ἐπιπέδων τριγώνων Βιβλίου.

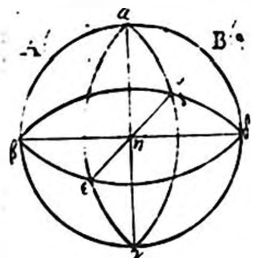
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ
ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.
ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΝ ΤΗ͂Ι ΣΦΑΙΡΙΚΗ͂Ι ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ, ἈΝΗΚΟΝΤΩΝ.
ὍΡΟΙ.

Α΄ ΓΩνία δύο κύκλων ἐν σφαίρᾳ ἀλλήλοις τεμνομένων ἐστὶν, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν καθέτων τῶν ἐν τοῖς ἐπιπέδοις τῶν κύκλων ἀγομένων πρὸς τὴν κοινὴν αὐτῶν τομήν. Οἷον τῶν αβγδ, αεγζ, κύκλων γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ βηε, ἑκατέρα γὰρ τῶν βη, εη, ὀρθή ἐστιν ἐπὶ τῆς αγ, κοινῆς τομῆς τῶν αβγδ, αεγζ, κύκλων· καὶ ἡ μὲν βη, ἐν τῷ τοῦ αβγδ, κύκλου ἐπιπέδῳ ἐστίν, ἡ δὲ εη, ἐν τῷ τοῦ αεγζ. Καλεῖται δὲ αὕτη καὶ γωνία τῆς κλίσεως, καὶ ἔστιν ἴση τῇ ὑπὸ βαε.

Β: Μέτρον γωνίας δύο κύκλων ἐν σφαίρᾳ ἀλλήλοις τεμνομένων ἐστὶ τόξον μεγίστου κύκλου, τὸ ἐναπολαμβανόμενον ὑπὸ τῶν ἐν τοῖς ἐπιπέδοις αὐτῶν πρὸς τὴν κοινὴν τομὴν ἀγομένων καθέτων. Οἷον τῆς ὑπὸ βηε, ἤτοι τῆς ὑπὸ βαε, γωνίας τῶν αβγδ, αεγζ, κύκλων μέτρον ἐστὶ τὸ βε, τόξον τοῦ βεδζ, μεγίστου κύκλου, ὅπερ μέτρον ἐστὶ καὶ τῆς ἀπεναντίον βγε.

Γ: Τρίγωνον σφαιρικόν ἐστι τὸ ὑπὸ τριῶν τόξων μεγίστων ἐν σφαίρᾳ κύκλων περιεχόμενον σχῆμα.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 1.



Δ΄: Ἰσόπλευρον μὲν τὸ τὰ τρία τόξα ἴσα ἔχον.

Ε΄ Ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰ δύο μόνα τόξα ἴσα ἔχον.

ς΄ Σκαληνὸν δὲ τὸ τὰ τρία ἄνισα ἔχον τόξα.

Πρότασις Α΄:

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐν σφαίρᾳ τέμνωσιν ἀλλήλους, αἱ κατὰ κορυφὴν αὐτῶν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλοις εἰσίν.

Τεμνέτωσαν ἀλλήλους ἐν τῇ αὐτῇ ὅπως σφαίρᾳ οἱ αβγδ, αεγζ, μέγιστοι κύκλοι.

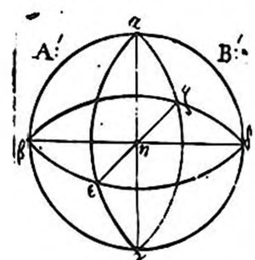
κλοι. Λέγω τὰς κατὰ κορυφὴν αὐτῶν γωνίας τὰς ὑπὸ βαε, ζαδ, ἴσας ἀλλήλαις εἶναι. Διήχθωσαν δὴ διὰ τοῦ η, κέντρου τῆς σφαίρας αἱ βηδ, εηζ, ὥστε πρὸς ὀρθὰς εἶναι ἐπὶ τῆς αηγ, κοινῆς τομῆς τῶν αβγδ, αεγζ, κύκλων, καὶ διὰ τῶν βε, γραφήτω κύκλος μέγιστος ὁ βεδζ. καὶ ἐπεὶ αἱ βηδ, εηζ, εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ η, πάντως γε κατὰ τὴν ιε: τοῦ α. τοῦ Στοιχειωτοῦ αἱ ὑπὸ βηε, δηζ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, μέτρον δὲ τῆς μὲν ὑπὸ βηε, γωνίας τὸ βε, τόξον ἐστὶ, κατὰ τὸν β': ὅρον τοῦ παρόντος. τῆς δὲ δηζ, τὸ δζ, ἄρα καὶ τὰ βε, δζ, τόξα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. ἀλλὰ τὸ μὲν βε, μέτρον ἐστὶ καὶ τῆς ὑπὸ βαε, τὸ δὲ δζ, καὶ τῆς ὑπὸ δαζ. ἄρα αἱ ὑπὸ βαε, δαζ, κατὰ κορυφὴν γωνίαι τῶν αβγδ, αεγζ, κύκλων ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐν σφαίρᾳ καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Β:

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους ἐν τῇ αὐτῇ ὄντες σφαίρᾳ, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσι.

Τεμνέτωσαν ἀλλήλους ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ οἱ αβγδ, αεγζ, κύκλοι κατὰ τὰ α, καὶ γ, σημεῖα. Λέγω τὰς ὑπὸ βαε, εαδ, ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ βηε, εηδ, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, κατὰ τὴν ιγ': τοῦ α: τοῦ Στοιχειωτοῦ, καὶ ἡ μὲν ὑπὸ βηε, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βαε, ἡ δὲ ὑπὸ εηδ, τῇ ὑπὸ εαδ, τῶν μὲν γὰρ μέτρον κοινὸν τὸ βε, τῶν δὲ τὸ εδ, τόξον, πάντως γε καὶ αἱ ὑπὸ βαε, εαδ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους ἐν τῇ αὐτῇ ὄντες σφαίρᾳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 3.



Πρότασις Γ':

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐν σφαίρᾳ τέμνωσιν ἀλλήλους, αἱ ἀπεναντίον αὐτῶν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Τεμνέτωσαν ἀλλήλους οἱ αὐτοὶ κύκλοι αβγδ, αεγζ, κατὰ τὰ α καὶ γ, σημεῖα. Λέγω τὰς ὑπὸ βαε, βγε, ἀπεναντίον γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι. τὸ γὰρ βε, τόξον μέτρον ἐστὶν ἑκατέρας. ὧν δὲ τὸ αὐτὸ μέτρον, ἐκεῖναι πάντως ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐν σφαίρᾳ τέμνωσιν καὶ τὰ ἑξῆς.

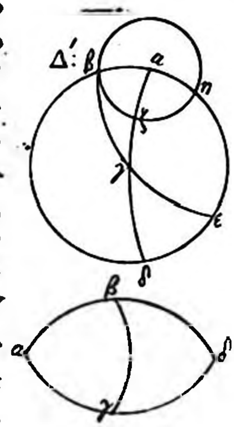
Πρό-

Πρότασις Δ':

Παντὸς τριγώνου σφαιρικοῦ αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι·

Ἔστω τρίγωνον σφαιρικὸν τὸ α β γ, ἐν σφαίρᾳ τῇ α β δ, λέγω ὅτι αἱ δύο αὐτοῦ πλευραὶ, δὸς εἰπεῖν αἱ α β, β γ, μείζονές εἰσι τῆς λοιπῆς α γ. Κέντρῳ μὲν δὴ τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ α β, γραφήτω κύκλος ὁ β ζ η. καὶ ἐπεὶ τὸ α γ δ, ἡμικύκλιόν ἐστι διὰ τὸ δίχα τοὺς μεγίστους ἐν σφαίρᾳ κύκλους τέμνεσθαι, κατὰ τὴν ι: τοῦ α: τῶν Σφαιρικῶν, πάντως γε τὸ α γ, ἔλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου, οἱ δὲ πόλοι παντὸς ἐν σφαίρᾳ κύκλου ἡμικυκλίῳ ἀλλήλων ἀφίστανται, ἄρα τὸ γ, σημεῖον οὐκ ἔστιν ὁ ἕτερος τοῦ β ζ η, κύκλου πόλος· ἀλλ' ἀπὸ τοῦ γ, ἐπὶ τὴν β ζ η, περιφέρειαν τοῦ β η ζ, κύκλου πεπτώκασι τὰ γ ζ, γ β, τόξα, ἄρα κατὰ τὴν κα: τοῦ β': τῶν Σφαιρικῶν τὸ γ ζ, ἔλαττόν ἐστι τοῦ γ β. προστιθεμένων δὲ τῶν α β, α ζ, ἴσων, πάντως γε τὰ α β, β γ, μείζονά ἐστι τοῦ α ζ γ, ὅπερ ἦν τὸ ὑποτεθέν. τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσονται καὶ αἱ α β, α γ, μείζονες τῆς β γ, Παντὸς ἄρα τριγώνου σφαιρικοῦ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Trig. Sfer. Lib. 2. Fig. 3.



Πρότασις Ε':

Παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ τρεῖς πλευραὶ ἐλάττονές εἰσι τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

Ἔστω τρίγωνον σφαιρικὸν τὸ α β γ. Λέγω τὰς τρεῖς τούτου πλευρὰς α β, β γ, γ α, ἐλάττονας εἶναι τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. Ἐξαχθήτωσαν αἱ α β, α γ, κατὰ τὸ συνεχὲς, καὶ ἐπεὶ καμπύλαι εἰσὶ, συμπεσοῦνται πάντως γε ἀλλήλαις, συμπιπτέτωσαν δὴ κατὰ τὸ δ καὶ ἐπεὶ οἱ μέγιστοι ἐν σφαίρᾳ κύκλοι δίχα τέμνονται, κατὰ τὴν ι: τοῦ α: τῶν Σφαιρικῶν, δῆλον ὅτι τὰ α β δ, α γ δ, τόξα ἡμικύκλιά εἰσιν, ἀλλὰ τὰ β δ, γ δ, μείζονά ἐστι τοῦ β γ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, προστιθεμένων ἄρα τῶν α β, α γ, τοῖς τε β δ, γ δ, καὶ β γ, χωρὶς, ἔσονται τὰ α β, α γ, β γ, ἐλάττονα τῶν α β δ, α γ δ, τὰ δὲ α β δ, α γ δ, ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ, ὡς ἡμικύκλια, ἄρα τὰ α β, α γ, β γ, ἐλάττονά εἰσι τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. Παντὸς ἄρα σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ τρεῖς καὶ τὰ ἑξῆς.

Π Ό Ρ Ι Σ Μ Α.

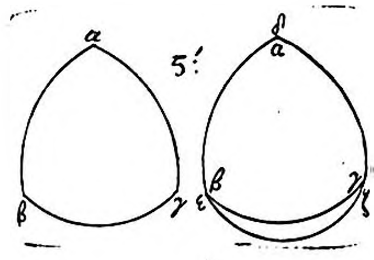
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου οὐδὲ μία τῶν πλευρῶν ἡμικυκλιόν ἐστιν, ἄλλως γὰρ αἱ αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου πλευραὶ μείζονες εἶεν αἱ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

Πρότασις ς'.

Ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι ὑποτείνουσι πλευραί.

Ἐχέτωσαν τὰ α β γ, δ ε ζ, τρίγωνα τὰς α β, α γ, πλευρὰς ἴσας ταῖς δ ε, δ ζ, τὴν μὲν α β, τῇ δ ε, τὴν δὲ α γ, τῇ δ ζ, καὶ τὴν πρὸς τῷ α, γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ δ. Λέγω καὶ τὴν β γ, ἴσην εἶναι τῇ ε ζ, καὶ ὅλον τὸ α β γ, ὅλῳ τῷ δ ε ζ, καὶ τὴν μὲν πρὸς τῷ β, γωνίαν τῇ πρὸς τῷ ε, τὴν δὲ πρὸς τῷ γ, τῇ πρὸς τῷ ζ. Ἐφαρμοσθήτω γὰρ τὸ α β γ, τρίγωνον τῷ δ ε ζ, καὶ ἐπεὶ ἡ α β, ἴση ἐστὶ τῇ δ ε, συμπεσεῖται πάντως τὸ μὲν α, σημεῖον τῷ δ, τὸ δὲ β, τῷ ε, καὶ ἡ α β, τῇ δ ε. Ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ α, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ δ, ἐφαρμοσθήσεται δήπουθεν καὶ ἡ α γ, τῇ δ ζ. εἴγαρ μὴ, οὐδὲ ἡ πρὸς τῷ α, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ δ, ὥστε καὶ τὸ γ, σημεῖον συμπεσεῖται τῷ ζ. ἄρα καὶ ἡ β γ, ἐφαρμοσθήσεται τῇ ε ζ. ἄλλως γὰρ αὖ ἡ ἐντὸς πεσεῖται ἡ ἐκτός. Πιπτέτω δὲ ἡ β γ, ἐντὸς τῆς ε ζ. καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν *l.* οἱ μέγιστοι ἐν σφαίρᾳ κύκλοι δίχα ἀλλήλους τέμνονται, δῆλον ὅτι τὰ β γ, ε ζ, τόξα ἡμικύκλιά ἐστιν, ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω. τὸ αὐτὸ ἕψεται ἄτοπον, κἂν ἐκτὸς ὑποτεθῇ πίπτειν. ἐφαρμοσθήσεται ἄρα καὶ ἡ β γ, τῇ ε ζ, ὥστε καὶ τὸ α β γ, τρίγωνον ἐφαρμοσθήσεται τῷ δ ε ζ, καὶ ἔσται ἡ μὲν πρὸς τῷ β, γωνία τῇ πρὸς τῷ ε, ἡ δὲ πρὸς τῷ γ, τῇ πρὸς τῷ ζ, ἴση. Ἐὰν ἄρα δύο σφαιρικὰ τρίγωνα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 4.



Π Ό Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν δύο τρίγωνα σφαιρικὰ τὰς πλευρὰς ἴσας ἔχῃ, καὶ τὰς γωνίας πάντως γε ἴσας ἕξει.

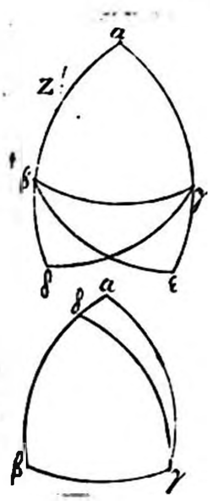
Πρό-

Πρότασις Ζʹ:

Τῶν ἰσοσκελῶν σφαιρικῶν τριγώνων αἱ πρὸς τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων πλευρῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ α β γ, ἔχον τὰς α β, α γ, αὐτοῦ πλευρὰς ἴσας, λέγω ὅτι αἱ πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ γωνίαι, αἱ ὑπὸ α β γ, α γ β, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ τῶν α β, α γ, προσεκβληθεισῶν πλευρῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν, ἤτοι αἱ ὑπὸ γ β δ, β γ ε, ὁμοίως ἴσαι εἰσίν. Ἐλήφθωσαν γὰρ τὰ β δ, γ ε, τόξα ἴσα, καὶ γραφήτωσαν τὰ γ δ, β ε. καὶ ἐπεὶ τῶν β α ε, γ δ α, τριγώνων αἱ β α, α ε, πλευραὶ ἴσαι εἰσὶ ταῖς γ α, α δ, ἑκατέρα ἑκατέρα, κατά τε τὴν ὑπόθεσιν καὶ κατασκευήν, κοινὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ α, γωνία, πάντως γε καὶ τὴν ἀντιπέρω αἱ β ε, γ δ, βάσεις ἴσαι εἰσὶ καὶ ἡ ὑπὸ α β ε, γωνία τῇ ὑπὸ α γ δ, ἡ δὲ πρὸς τῷ ε, τῇ πρὸς τῷ δ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τῶν β γ ε, γ β δ, τριγώνων τάς τε ὑπὸ β γ ε, γ β δ, γωνίας, καὶ τὰς ὑπὸ γ β ε, β γ δ, ἴσας ἀλλήλαις εἶναι, ἀλλ' αἱ μὲν ὑπὸ β γ ε, γ β δ, εἰσὶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν, τῶν δὲ γ β ε, β γ δ, ἴσων ἀφαιρουμένων ἀπὸ τῶν α β ε, α γ δ, ἴσων, ἐναπολείπονται καὶ αἱ πρὸς τὴν βάσιν ἤτοι αἱ ὑπὸ α β γ, α γ β, ἴσαι. Τῶν ἰσοσκελῶν ἄρα σφαιρικῶν τριγώνων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 5.



Πρότασις Ηʹ:

Ἐὰν σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ πρὸς τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἰσοσκελὲς ἔσται τὸ τρίγωνον.

Ἔστωσαν τοῦ α β γ, σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ ὑπὸ α β γ, α γ β, πρὸς τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι, λέγω τὸ α β γ, τρίγωνον ἰσοσκελὲς εἶναι, ἤτοι τὰς α β, α γ, αὐτοῦ πλευρὰς ἴσας ἔχειν. Εἰ γὰρ μή, ἔσται πάντως ἡ μία αὐτῶν μείζων, ἔστω δὴ ἡ α β, μείζων τῆς α γ. καὶ ἀφῃρήσθω ἡ β δ, ἴση τῇ α γ, καὶ γραφήτω τὸ δ γ, τόξον. καὶ ἐπεὶ τὰ α γ β, δ β γ, τρίγωνα ἔχουσι τὰς α γ, δ β, ἴσας, κατὰ τὴν κατασκευήν, κοινὴν δὲ τὴν β γ, καὶ τὴν ὑπὸ δ β γ, γωνίαν τῇ ὑπὸ α γ β, ἴσην, πάντως γε κατὰ τὴν ϛ: τοῦ παρόντος ἕξουσι καὶ τὴν α β, ἴσην τῇ δ γ, καὶ τὸ α β γ, τρίγ: ἴσον ἔσται τῷ δ β γ, τὸ ὅλον τῷ μέρει, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἡ α β, τῆς α γ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται οὐδὲ ἔλαττον, ἴση ἄρα. Ἐὰν ἄρα σφαιρικοῦ τριγώνου καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρό-

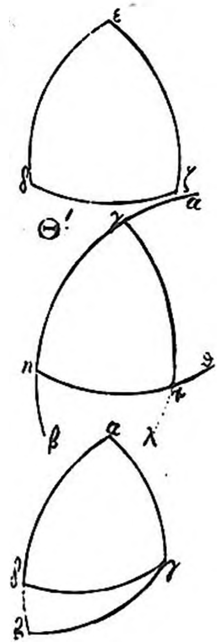
Πρότασις Θ':

Πρὸς τῷ δοθέντι τόξῳ μεγίστου κύκλου, καὶ τῷ πρὸς αὐτῷ σημείῳ τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ ἴσην γωνίαν συστήσασθαι.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 6.

Ἔστω τόξον μεγίστου κύκλου τὸ α β, καὶ σημεῖον τὸ γ, καὶ ζητηθήτω συσταθῆναι πρὸς τῷ γ, σημείῳ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ δ ε ζ, δοθείσῃ. Κέντροις τοῖς ε, καὶ γ, διαστήματι δὲ ἴσῳ τεταρτημορίῳ γραφήτωσαν τὰ δ ζ, η θ, τόξα, καὶ ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τοῦ η θ, τὸ η κ, ἴσον τῷ δ ζ, καὶ διὰ τῶν γ κ, σημείων γραφήτω τόξον μεγίστου κύκλου τὸ κ λ, κατὰ τὴν ις': τοῦ α: τῶν Σφαιρικῶν, καὶ ἡ ὑπὸ η γ κ, γωνία ἴση ἔσται τῇ ὑπὸ δ ε ζ, δοθείσῃ, ἐπεὶ γὰρ τῆς μὲν ὑπὸ δ ε ζ, μέτρον ἐστὶ τὸ δ ζ, τόξον, κατὰ τὸν β': ὅρον, τῆς δὲ ὑπὸ η γ κ, τὸ η κ, τὸ δὲ η κ, ἴσον ἐστὶ τῷ δ ζ, κατὰ τὴν κατασκευὴν, πάντως γε καὶ αἱ γωνίαι ἴσαι εἰσί. πρὸς τῷ δοθέντι ἄρα τόξῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Ἰστέον δ' ὅτι καὶ ἄλλῳ τινὶ διαστήματι δυνατὸν ἕτερά τινα τόξα γραφῆναι, καὶ ληφθῆναι ἀπὸ τοῦ ἀορίστου ἴσον τῷ ὡρισμένῳ, καὶ τὰ λοιπὰ γενέσθαι αἱ προειρημένως, καὶ ἔσται τὸ ζητούμενον.



Πρότασις Ι':

Ἐπὶ παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, καὶ ἀνάπαλιν ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

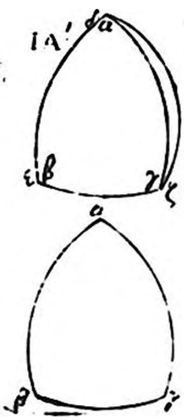
Ἔστω τρίγωνον τὸ α β γ, ἔχον τὴν πρὸς τῷ γ, γωνίαν μείζονα τῆς πρὸς τῷ α. Λέγω τὴν α β, μείζονα εἶναι τῆς β γ. Γενέσθω γὰρ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἡ ὑπὸ α γ δ, γωνία ἴση τῇ πρὸς τῷ α. καὶ ἐπεὶ τοῦ α δ γ, τριγώνου αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι εἰσὶ, πάντως γε κατὰ τὴν η: τοῦ παρόντος αἱ δ α, δ γ, ἴσαι εἰσὶ, κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς δ β, ἔστι δήπουθεν ἡ α δ β, ἴση ταῖς δ γ, δ β, ἀλλ' αἱ δ γ, δ β. μείζονές εἰσι τῆς β γ, κατὰ τὴν δ': τοῦ παρ: ἄρα καὶ ἡ α δ β, μείζων ἐστὶ τῆς β γ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἡ αβ, μείζων τῆς βγ. Λέγω ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ αγβ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ. εἰ γὰρ μὴ, ἡ ἴση ἐστὶν ἢ ἐλάττων· καὶ εἰ μὲν ἴση, ἔσται πάντως ἴση καὶ ἡ αβ, τῇ βγ. εἰ δὲ ἐλάττων, ἐλάττων, ὅπερ ἀντίκειται τῇ ὑποθέσει. ἐπὶ παντὸς ἄρα σφαιρικοῦ τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΑ′:

Ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 7.



Ἐχέτωσαν δὴ τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα τὰς αβ, βγ, πλευρὰς ἴσας ταῖς δε, δζ. τὴν μὲν αβ, τῇ δε, τὴν δὲ αγ τῇ δζ, καὶ τὴν βάσιν βγ, βάσει τῇ εζ, ὁμοίως ἴσην. Λέγω ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εδζ. ἐφαρμοττομένης γὰρ τῆς αβ, ἐπὶ τῆς εδ, πάντως γε τὸ μὲν α, σημεῖον συμπεσεῖται τῷ δ, τὸ δὲ β, τῷ ε, καὶ ἡ βγ, ἐφαρμοσθήσεται ἐπὶ τῆς εζ, καὶ τὸ γ, συμπεσεῖται τῷ ζ, ὥστε καὶ ἡ αγ, ἐφαρμοσθήσεται ἐπὶ τῆς δζ. εἰ γὰρ μὴ, ἡ ἐντὸς τῆς δζ, ἢ ἐκτὸς πεσεῖται. Πιπτέτω δὴ ἐντὸς· καὶ ἐπεὶ αἱ αγ, δζ, τόξα εἰσὶ μεγίστων κύκλων, οἱ δὲ μέγιστοι κύκλοι δίχα τέμνονται, κατὰ τὸ ι: τοῦ α: τῶν Σφαιρικῶν, πάντως γε τὰ αγ, δζ, τόξα ἡμικύκλιά εἰσιν, ὅπερ ἄτοπον, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ι: τοῦ παρόντος. Ἐὰν ἄρα δύο σφαιρικὰ τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΒ′:

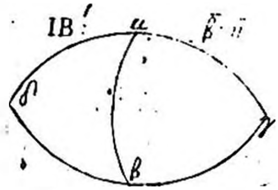
Ἐὰν σφαιρικοῦ τριγώνου τῆς βάσεως προσεκβληθείσης, αἱ δύο πλευραὶ ἴσαι ὦσιν ἡμικυκλίῳ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἴση ἔσται τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἔσονται. εἰ δὲ αἱ πλευραὶ μείζονες ὦσιν ἡμικυκλίου, ἡ ἐκτὸς γωνία ἐλάττων ἔσται τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ αἱ πρὸς τῇ βάσει μείζονες δύο ὀρθῶν· ἐὰν δὲ τελευταῖον αἱ πλευραὶ ἐλάττονες ὦσιν ἡμικυκλίου, ἡ ἐκτὸς γωνία μείζων ἔσται τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἐλάττονες δύο ὀρθῶν.

Ἔστωσαν τοῦ αβγ, σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ γα, αβ, πλευραὶ ἴσαι ἡμικυκλίῳ,

καὶ

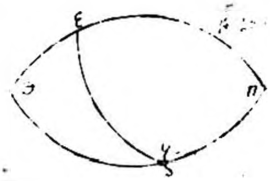
καὶ ἐκβληθήτω ἡ γβ, αὐτῆ βάσις ἐπὶ τὸ δ, ὥστε τὸ γβδ, ἡμικύκλιον εἶναι. Λέγω τὴν ὑπὸ αβδ, ἐκτὸς γωνίαν ἴσην εἶναι τῇ ὑπὸ αγβ, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. καὶ τὰς ὑπὸ αβγ, αγβ, πρὸς τῇ βάσει ἴσας δυσὶν ὀρθαῖς. Ἐκβληθήτω δὴ ἡ γα, πλευρὰ, καὶ συμπιπτέτω τῇ γβδ, κατὰ τὸ δ, οὐ γὰρ οἷόν τε ἄλλως γενέσθαι, διὰ τὸ ἑκατέραν τῶν αγ, βγ, τόξα μεγίστων εἶναι κύκλων. καὶ ἐπεὶ οἱ μέγιστοι κύκλοι δίχα τέμνονται, κατὰ τὴν ι: τοῦ α: τῶν Σφαιρικῶν, πάντως γε καὶ τὸ γαδ, ἡμικύκλιόν ἐστιν, ὥσπερ καὶ τὸ γβδ. ἀλλὰ καὶ αἱ γα, αβ, ἴσαι ἡμικυκλίῳ ὑπετέθησαν, ἄρα αἱ γα, αβ, ἴσαι εἰσὶ τῇ γαδ. κοινῆς δὲ ἀφαιρουμένης τῆς γα, ἐναπολείπονται αἱ αβ, αδ, ἴσαι, καὶ κατὰ τὴν ζ': τοῦ παρόντος, αἱ ὑπὸ αβδ, αδβ, γωνίαι ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' ἡ ὑπὸ αδβ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αγβ, κατὰ τὴν γ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αβδ, ἐκτὸς ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αγβ, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. Αὖθις ἐπεὶ αἱ αβδ, αγβ, ἴσαι εἰσὶν ὡς δέδεικται, κοινῆς λαμβανομένης τῆς ὑπὸ αβγ, πάντως γε αἱ ὑπὸ αβδ, αβγ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ αγβ, αβγ, ἀλλ' αἱ ὑπὸ αβδ, αβγ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὡς ἐφεξῆς οὖσαι, ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ αβγ, αγβ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 8.



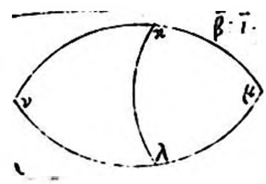
Ἔστωσαν δεύτερον τοῦ εζη, τριγώνου αἱ ηε, εζ, πλευραὶ μείζονες ἡμικυκλίου. Λέγω τὴν ὑπὸ εζθ, ἐκτὸς γωνίαν ἐλάττονα εἶναι τῆς ὑπὸ εηζ, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ τὰς ὑπὸ εζη, εηζ, πρὸ τῇ βάσει μείζονας δύο ὀρθῶν. τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἡ ηεθ, ἡμικύκλιόν ἐστιν, αἱ δὲ ηε, εζ, μείζονες ἡμικυκλίου, πάντως γε αἱ ηε, εζ, μείζονές εἰσι τῆς ηεθ. κοινῆς δὲ ἀφαιρουμένης τῆς ηε, ἐναπολείπεται ἡ εζ, μείζων τῆς εθ, καὶ κατὰ τὴν ι: τοῦ παρόντος ἡ ὑπὸ εζθ, γωνία ἐλάττων ἐστὶ τῆς ὑπὸ εθζ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ εθζ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εηζ, κατὰ τὴν γ': τοῦ αὐτοῦ. ἄρα ἡ ὑπὸ εζθ, ἐλάττων ἐστὶ καὶ τῆς πρὸς τῷ η. ἡ ἐκτὸς τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς ὑπὸ εζη, πάντως γε αἱ ὑπὸ εζθ, εζη, ἐλάττονές εἰσι τῶν ὑπὸ εηζ, εζη, ἀλλ' αἱ ὑπὸ εζθ, εζη, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ἄρα αἱ ὑπὸ εηζ, εζη, μείζονές εἰσι δύο ὀρθῶν.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 9.



Ἔστωσαν τρίτον τοῦ κλμ, τριγώνου, αἱ μκ, κλ, πλευραὶ ἐλάττονες ἡμικυκλίου. Λέγω τὴν ὑπὸ κλν, ἐκτὸς γωνίαν μείζονα εἶναι τῆς ὑπὸ κμλ, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. καὶ τὰς ὑπὸ κλμ, κμλ, πρὸς τῇ βάσει ἐλάσσονας δύο ὀρθῶν. τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων ἐπεὶ τὸ μκν, τόξον ἡμικύκλιόν ἐστι, κατὰ τὴν

Trig. Sfer. lib.2. Fig.10.



ῥηθεῖσαι ι: τοῦ α: τῶν Σφαιρικῶν, πάντως γε αἱ μκ, κλ, ἐλάττονές εἰσι τῆς μκν, καὶ ἑπομένως ἡ κν, μείζων ἐστὶ τῆς κλ. ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ κλν, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ κνλ, κατὰ τὴν ι: τοῦ παρόντος, ἡ δὲ ὑπὸ κνλ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ μ, κατὰ τὴν γ: τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἡ ὑπὸ κλν, μείζων ἐστὶ καὶ τῆς πρὸς τῷ μ. κοινῆς δὲ ὡς καὶ πρότερον εἰλημμένης τῆς ὑπὸ κλμ, ἔσονται πάντως αἱ ὑπὸ κλν, κλμ, μείζονες τῶν ὑπὸ κλμ, κμλ, ἀλλ' αἱ ὑπὸ κλν, κλμ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ἄρα αἱ ὑπὸ κλμ, κμλ, πρὸς τὴν βάσιν ἐλάσσονές εἰσι δύο ὀρθῶν. ἐὰν ἄρα Σφαιρικοῦ τριγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

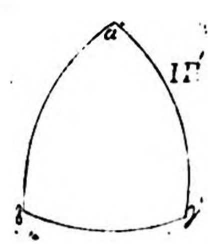
Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν καὶ τὸ ἀνάπαλιν. Σφαιρικοῦ δηλ: τριγώνου τῆς βάσεως ἐκβληθείσης, εἰ μὲν ἡ ἐκτὸς γωνία ἴση ᾖ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἴσαι εἰσὶν ἡμικυκλίῳ. εἰ δὲ ἡ ἐκτὸς γωνία ἐλάττων ᾖ τῆς ἐντὸς καὶ αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι μείζονες δύο ὀρθῶν, αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ μείζονές εἰσιν ἡμικυκλίου. εἰ δὲ πλεῖστον ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐντὸς μείζων ᾖ, καὶ αἱ πρὸς τῇ βάσει ἐλάττονες δύο ὀρθῶν, αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ἐλάττονές εἰσιν ἡμικυκλίου.

Πρότασις ΙΓ:

Τῶν ἰσοσκελῶν σφαιρικῶν τριγώνων, ὧν αἱ πλευραὶ τεταρτημόριά εἰσι, τούτων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ὀρθαί εἰσιν, ὧν δὲ μείζονες τεταρτημορίων, ἀμβλεῖαι, ὧν δὲ ἐλάττονες τεταρτημορίων, ὀξεῖαι, καὶ τὸ ἀνάπαλιν, ὧν αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ὀρθαί, αἱ πλευραὶ τεταρτημόριά εἰσιν, ὧν δὲ ἀμβλεῖαι αἱ γωνίαι, αἱ πλευραὶ μείζονες τεταρτημορίων, καὶ ὧν αἱ γωνίαι ὀξεῖαι, αἱ πλευραὶ ἐλάττονες τεταρτημορίων.

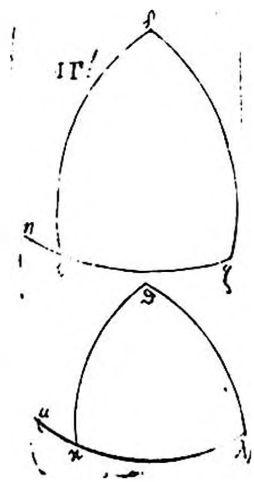
Trig. Sfer. lib.2. Fig.11.



Ἔστωσαν τοῦ αβγ, ἰσοσκελοῦς σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ αβ, αγ, πλευραὶ τεταρτημόρια. Λέγω τὰς πρὸς τῇ βάσει γωνίας, τὰς ὑπὸ αβγ, αγβ, ὀρθὰς εἶναι ἑκατέραν. ἐπεὶ γὰρ αἱ αβ, αγ, τεταρτημόριά εἰσι, πάντως γε ἴσαι εἰσὶν ἡμικυκλίῳ, καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω αἱ ὑπὸ αβγ, αγβ, πρὸς τῇ βάσει γωνίαι τοῦ αβγ, τριγώνου δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ἀλλ' αἱ αβ, αγ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ κατὰ τὴν ζ: τοῦ παρόντος ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ αβγ, αγβ, ἄρα ἑκατέρα ὀρθὴ ἐστιν. Ἔστω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αβγ, αγβ, πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν ὀρθή, λέγω ὅτι αἱ αβ, αγ, τεταρτημόριά εἰσι. ἐπεὶ γὰρ ἑκατέρα τῶν αβγ, αγβ, ὀρθή ἐστι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, πάντως γε αἱ δύο ὁμοῦ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, καὶ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω αἱ αβ, αγ, ἴσαι εἰσὶν ἡμικυκλίῳ, ἀλλὰ δὴ καὶ ἴσαι κατὰ τὴν η: τοῦ παρόντος, ἄρα ἑκατέρα τῶν αβ, αγ, πλευρῶν τεταρτημόριόν ἐστιν, ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

Ἔστωσαν β': αἱ δε, δζ, πλευραὶ τοῦ δεζ, ἰσοσκελοῦς τριγώνου μείζονες τεταρτημορίων. Λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ δεζ, δζε, πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἀμβλεῖαί εἰσι, καὶ ἀνάπαλιν. κατὰ γὰρ τὴν ὑπόθεσιν αἱ δε, δζ, ὁμοῦ μείζονές εἰσιν ἡμικυκλίου, καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἡ ὑπὸ δεη, ἐκτὸς γωνία ἐλάττων ἐστὶ τῆς ὑπὸ δζε, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον· κοινῆς δὲ λαμβανομένης τῆς ὑπὸ δεζ, ἔσονται αἱ ὑπὸ δεη, δεζ, ἐλάττονες τῶν ὑπὸ δζε, δεζ. ἀλλ' αἱ ὑπὸ δεη, δεζ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ἄρα αἱ ὑπὸ δζε, δεζ, μείζονές εἰσι δύο ὀρθῶν. Ἀλλὰ δὴ ἔστωσαν αἱ ὑπὸ δεζ, δζε, μείζονες δύο ὀρθῶν ἤτοι ἀμβλεῖαι. Λέγω ὅτι αἱ δε, δζ, μείζονές εἰσι τεταρτημορίων. κατὰ γὰρ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω αἱ δε, δζ, ὁμοῦ μείζονές εἰσιν ἡμικυκλίου. εἰσὶ δὲ ἴσαι κατὰ τὴν ζ': τοῦ παρόντος, ἑκατέρα τῶν αὐτῶν μείζων ἐστὶ τεταρτημορίου. ὅπερ ἦν τὸ β':

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 12.

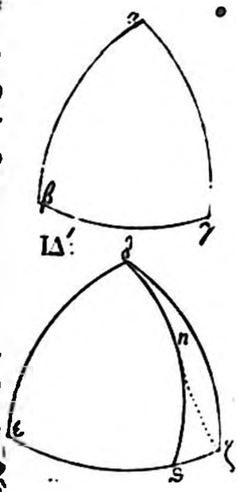


Ἔστωσαν ἔτι αἱ θκ, θλ, ἐλάττονες τεταρτημορίων. Λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ θκλ, θλκ, πρὸς τῇ βάσει ὀξεῖαί εἰσι. κατὰ γὰρ τὴν ὑπόθεσιν αἱ θκ, θλ, ἐλάττονές εἰσιν ἡμικυκλίου, ὥστε κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἡ μὲν ὑπὸ θκμ, ἐκτὸς γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ θλκ, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, αἱ δὲ ὑπὸ θκλ, θλκ, ἐλάττονες δύο ὀρθῶν, εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι κατὰ τὴν ζ': τοῦ παρόντος, ἄρα ἑκατέρα ὀξεῖά ἐστιν. Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἑκατέρα τῶν θκλ, θλκ, ὀξεῖα. Λέγω ὅτι καὶ τῶν θκ, θλ, πλευρῶν ἑκατέρα ἐλάττων ἐστὶ τεταρτημορίου. κατὰ γὰρ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω αἱ θκ, θλ, ὁμοῦ ἐλάττονές εἰσιν ἡμικυκλίου, εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι, ἄρα ἑκατέρα τῶν αὐτῶν ἐλάττων ἐστὶ τεταρτημορίου. τῶν ἰσοσκελῶν ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρό-

Πρότασις ΙΔ':

*** Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει, καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένην.**

Ἐχέτωσαν τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα τὰς αβ, αγ, πλευρὰς ἴσας ταῖς δε, δζ, ἡ δὲ ὑπὸ εδζ, γωνία ἔσω μείζων τῆς ὑπὸ βαγ. Λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ εζ, βάσεως τῆς βγ, μείζων ἐστί. Κείσθω δὲ πρῶτον ἑκατέραν τῶν αβ, αγ, καὶ δε, εζ, ἴσην εἶναι τεταρτημορίῳ. Γενέσθω δὴ κατὰ τὴν θ': τοῦ παρόντος ἡ ὑπὸ εδθ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ βαγ. καὶ ἐπεὶ ἡ δη, ἐντὸς πίπτει τῶν δε, δζ, λέγω ὅτι ἐκβαλλομένη κατὰ τὸ συνεχὲς οὐκ ἂν διὰ τοῦ ζ, διελεύσεται, ὡς ἡ δηζ. εἰ γὰρ δυνατὸν, τὰ δζ, δηζ, τόξα ἡμικύκλια ἔσονται, κατὰ τὴν ι': τοῦ α': τῶν Σφαιρικῶν, ὅπερ ἀδύνατον, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν. διελεύσεται ἄρα διὰ τοῦ θ, σημείου ἐν μέσῳ ὄντος τοῦ ε καὶ ζ. καὶ κατὰ τὴν ϛ': τοῦ παρόντος ἡ εθ, βάσις ἴση ἔσται τῇ βγ, ἀλλὰ τῆς εθ, μείζων ἐστὶν ἡ εζ, ἄρα ἡ εζ, μείζων ἐστὶ καὶ τῆς βγ, ὅπερ ἦν τὸ α: Ὅτι δὲ καὶ ἀνάπαλιν ἀληθές, δῆλον. Ἔστω γὰρ ἡ εζ, βάσις μείζων τῆς βγ, λέγω ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ εδζ, γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ. ἀφαιρεθήτω γὰρ ἡ εθ, ἴση τῇ βγ, καὶ διὰ τῶν θ καὶ δ, ἤχθω τὸ δηθ, τόξον. καὶ ἐπεὶ ἡ δε, ἴση ἐστὶ τῇ δθ, ὡς καταγραφομένου τοῦ εθ, τόξου ἀπὸ τοῦ δ, τῇ δὲ εδ, ἴση ἐστὶν ἑκατέρα τῶν αβ, αγ, ὡς τεταρτημόρια, πάντως γε κατὰ τὴν ιά: τοῦ παρόντος 

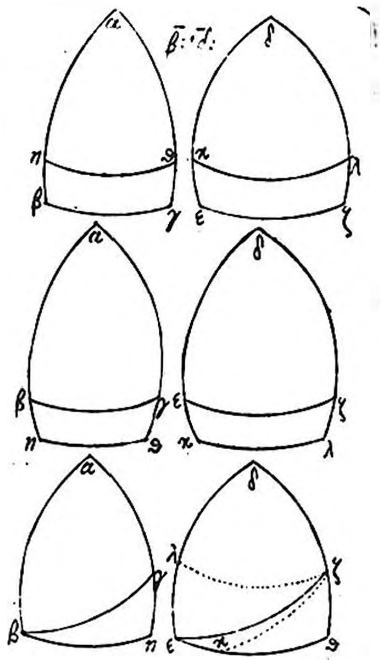
ΙΔ'

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 13.

καὶ ἡ ὑπὸ εδθ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βαγ, ἀλλὰ τῆς ὑπὸ εδθ, μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ εδζ. εἰ γὰρ μὴ, οὐδὲ ἡ εζ, βάσις μείζων ἂν εἴη τῆς εθ, ὅπερ ἄτοπον, κατὰ τὴν κατασκευήν. ἄρα ἡ ὑπὸ εδζ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ.

Κείσθω δεύτερον ἑκάστην τῶν αβ, αγ, δε, δζ, πλευρῶν μείζονα εἶναι τεταρτημορίου, καὶ ἴσας ἀλλήλαις. Λέγω δὴ καὶ οὕτω ἐπεὶ ἡ ὑπὸ εδζ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ εζ, βάσις τῆς βγ. ληφθήτωσαν γὰρ τὰ αι, αθ, δκ, δλ, ἴσα τεταρτημορίοις, καὶ γραφήτωσαν ἀπὸ τῶν α καὶ δ, σημεί-

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 14.



μείων τὰ η θ, κ λ, τόξα. καὶ ἐπεί, κατὰ τὴν θ': τοῦ β': τῶν Σφαιρικῶν τά τε η θ, β γ, καὶ κ λ, ε ζ, τόξα ὅμοιά εἰσι, πάντως γε ὡς τὸ κ λ, πρὸς τὸ ε ζ, οὕτω τὸ η θ, πρὸς τὸ β γ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ κ λ, πρὸς τὸ η θ, τὸ ε ζ, πρὸς τὸ β γ. ἀλλὰ τὸ κ λ, μεῖζόν ἐστι, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, τοῦ η θ. ἄρα καὶ τὸ ε ζ, μεῖζόν ἐστι τοῦ β γ. Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται, κἂν ἐλάττω ὑποτεθῶσι τεταρτημορίου, τὰ α β, α γ, δ ε, δ ζ. ἐξαγομένων γὰρ τῶν α β, α γ, δ ε δ ζ, μέχρι τεταρτημορίου, κατὰ τὸ συνεχὲς ὡς αἱ α β η, α γ θ, δ ε κ, δ ζ λ, ἐπεὶ τὰ β γ, η θ, ὅμοιά εἰσιν, ὥσπερ καὶ τὰ ε ζ, κ λ, δι' ἑκατέρας συναχθήσεται, ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω τὸ ε ζ, μεῖζον τοῦ β γ. Ἀλλὰ δὴ κείσθω ἔτι τὰ μὲν α β, δ ε, μείζονα τεταρτημορίου, τὰ δὲ α γ, δ ζ, ἐλάττονα. καὶ ἔστω τὸ μὲν α β, ἴσον τῷ δ ε, τὸ δὲ α γ, τῷ δ ζ, ἡ δὲ ὑπὸ ε δ ζ, γωνία μείζων τῆς ὑπὸ β α γ. Λέγω ὅτι καὶ ἡ ε ζ, βάσις μείζων ἐστὶ τῆς β γ, βάσεως. Ἐξαχθήτωσαν γὰρ κατὰ τὸ συνεχὲς τὰ α γ, δ ζ, τόξα ἐπὶ τὰ η θ, σημεῖα, ὥστε ἴσα εἶναι τοῖς α β, δ ε, καὶ γραφήτωσαν ὡς ἀπὸ πόλων τῶν α καὶ δ, τὰ β η, ε θ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ε θ, τὸ θ κ, ἴσον τῷ β η, καὶ διὰ τῶν κ, καὶ ζ, γραφήτω τὸ κ ζ, τόξον. καὶ ἐπεὶ τὰ α γ, δ ζ, ἴσα ὑπετέθησαν, γεγόνασι δὲ καὶ τὰ α γ η, δ ζ θ, ἴσα, πάντως γε ἀφαιρουμένων τῶν α γ, δ ζ, ἴσων ἐναπολείπονται τὰ γ η, ζ θ, ἴσα. εἴληπται δὲ καὶ τὰ β η, κ θ, ἴσα, καὶ αἱ ὑπὸ β η γ, κ θ ζ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, κατὰ τὴν ιβ': τοῦ α': τῶν Σφαιρικῶν, ἄρα κατὰ τὴν ς': τοῦ παρόντος τὰ β γ, κ ζ, τόξα ἴσα εἰσίν. Αὖθις ἐπεὶ αἱ ὑπὸ δ ε θ, δ θ ε, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν ζ': τοῦ αὐτοῦ, ἡ δὲ ὑπὸ δ ε θ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ζ ε κ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ δ θ ε, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ζ ε κ, ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ζ θ ε, μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ζ κ ε, κατὰ τὴν ιβ': τοῦ παρόντος, ἐλάττονα

γὰρ

γὰρ ἡμικυκλίου εἰσὶ τὰ ζθ, θκ, ὡς ὀψόμεθα· ἄρα ἡ ὑπὸ ζκε, πολλῷ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ζεκ, ὥστε καὶ ἡ ζε, μείζων ἐστὶ τῆς ζκ, κατὰ τὴν ι: τοῦ αὐτοῦ. Ἴση δὲ ἡ ζκ, τῇ βγ, ὡς δέδεικται, ἄρα ἡ ζε, μείζων ἐστὶ τῆς βγ, ὅπερ ἦν τὸ ὑποσχεθέν. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

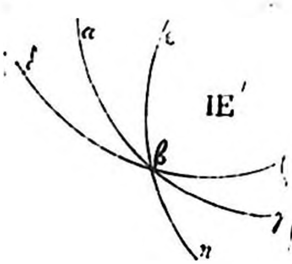
Ὅτι δὲ τὰ ζθ, θκ, ἐλάττονά εἰσιν ἡμικυκλίου δῆλον. εἰ γὰρ μή, ἔσονται ἴσα ἢ μείζονα. Ἔστω δὴ α: ἴσα. καὶ πάντως γε κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ιβ': αἱ ὑπὸ θκζ, θζκ, πρὸς τῇ βάσει δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ δζκ, κζθ, ὁμοίως δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι ὡς ἐφεξῆς, ἄρα αἱ ὑπὸ θκζ, θζκ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ δζκ, κζθ. κοινῆς δὲ ἀφαιρουμένης τῆς ὑπὸ κζθ, ἐναπολείπονται αἱ ὑπὸ δζκ, θκζ, ἴσαι, ἡ δὲ ὑπὸ δζκ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζθκ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ιβ': ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ θκζ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζθκ, ἀλλ' ἡ ὑπὸ ζθκ, ὀρθή, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ζκθ, καὶ ἑπομένως τὸ ζ, πόλος ἐστὶ τοῦ θκ, κατὰ τὴν ια: τοῦ α: τῶν Σφαιρικῶν, ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὴν κατασκευήν. ἀλλὰ δὴ ἔστωσαν μείζω, ἄρα κατὰ τὴν ιβ': τοῦ παρ: ἡ ὑπὸ δζκ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ζθκ. γεγραμμένου δὲ ὡς ἀπὸ πόλου τοῦ δ, τοῦ ζλ, τόξου, ἡ ὑπὸ δζλ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζθκ, κατὰ τὴν ιβ': τοῦ α: τῶν Σφαιρικῶν· τῆς δὲ ὑπὸ ζθκ, ἐλάττων δέδεικται ἡ ὑπὸ δζκ: ἄρα ἡ ὑπὸ δζκ, ἐλάττων ἐστὶ καὶ τῆς ὑπὸ δζλ. τὸ ὅλον τοῦ μέρους, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα τὰ ζθ, θκ, μείζονά εἰσιν ἡμικυκλίου, ἀλλ' οὐδὲ ἴσα, ὡς δέδεικται, ἐλάττονα ἄρα.

Πρότασις ΙΕ':

Ἐὰν κύκλος κύκλον τέμνῃ τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἢ δύο ὀρθὰς ποιεῖ, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Κύκλος δὴ ὁ αβγ, τεμνέτω τὸν δβζ, κατὰ τὸ β, σημεῖον. Λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ αβδ, αβζ, γωνίαι ἢ δύο ὀρθαί εἰσιν, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι: εἰ μὲν γὰρ ὁ αβγ, διὰ τοῦ πόλου διέρχεται τοῦ δβζ, κύκλου, δῆλον ὅτι δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει, κατὰ τὴν ιβ': τοῦ α: τῶν Σφαιρικῶν: Εἰ δὲ ὁ αβγ, κύκλος οὐ διέρχεται διὰ τοῦ πόλου τοῦ δβζ, ἀφῃρήσθω ὁ πόλος τοῦ δβζ, διὰ τῆς ιζ': τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἔστω οὗτος ὁ ε, καὶ διὰ τῶν ε, καὶ β, σημείων γραφήτω ὁ εβη, κύκλος. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ δβε, ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ δβα, αβε, ὥσπερ τὸ ὅλον τοῖς οἰκείοις μέρεσι, κοινῆς προσκειμένης τῆς ὑπὸ εβζ, ἔσονται πάντως δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ δβε, εβζ, ἴσαι τρισὶ ταῖς ὑπὸ δβα, αβε, εβζ. Αὖθις ἐπεὶ ἡ ὑπὸ αβζ, ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ αβε, εβζ, κοινῆς προσκειμένης τῆς ὑπὸ δβα, ἔσονται

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 15.



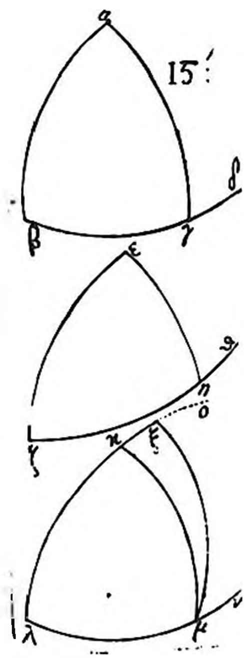
ὁμοίως

ἡμείως δύο αἱ ὑπὸ δβα, αβζ, ἴσαι τρισὶ ταῖς ὑπὸ δβα, αβε, εβζ, ἀλλὰ ταῖς δυσὶ ταύταις ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ δβε, εβζ, ὡς δέδεικται, ἄρα αἱ δύο ὑπὸ δβα, αβζ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ δβε, εβζ, αἱ δὲ ὑπὸ δβε, εβζ, ὀρθαὶ εἰσὶ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ιβ´: τοῦ α´: τῶν Σφαιρ:, ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ δβα, εβζ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς. Ἐὰν ἄρα κύκλος τέμνῃ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Ις´:

Παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι τῶν δύο μὲν ὀρθῶν μείζονές εἰσι, τῶν ἓξ δὲ ἐλάττονες.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 16.

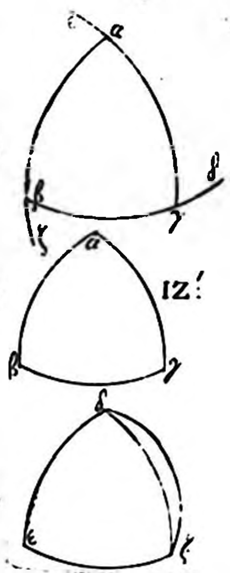


Ἔστω τρίγωνον σφαιρικὸν τὸ αβγ. Λέγω ὅτι αἱ τρεῖς τούτου γωνίαι, αἱ ὑπὸ αβγ, βγα, γαβ, μείζονές εἰσι δύο ὀρθῶν. Ἐπεὶ δὲ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ πλευραὶ ἢ ἴσαι εἰσὶν ἡμικυκλίῳ, ἢ μείζονες, ἢ ἐλάττονες. Κείσθω α´: τὰς αβ, αγ, ἴσας εἶναι ἡμικυκλίῳ, καὶ ἐκβληθήτω ἡ βγ, ἐπὶ τὸ δ. κατὰ γοῦν τὴν ιβ´: τοῦ παρόντος ἡ μὲν ὑπὸ αγδ, ἐκτὸς ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ β, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, αἱ δὲ ὑπὸ αβγ, αγβ, πρὸς τῇ βάσει ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς, ὥστε προστιθεμένης τῆς πρὸς τῷ α, ἔσονται αἱ τρεῖς μείζονες δύο ὀρθῶν.

Ἔστωσαν β´: τοῦ εζη, τριγώνου αἱ εζ, εη, πλευραὶ μείζονες ἡμικυκλίου, καὶ τῆς ζη, ἐκβαλλομένης ἐπὶ τὸ θ, ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ εηθ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς ὑπὸ εζη, αἱ δὲ ὑπὸ εζη, εηζ, πρὸς τῇ βάσει μείζονες δύο ὀρθῶν, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ιβ´: πάντως γε προστιθεμένης τῆς πρὸς τῷ ε, αἱ τρεῖς ὁμοῦ αἱ ὑπὸ εζη, ζηε, ηεζ, πολλῷ μείζονές εἰσι τῶν δύο ὀρθῶν.

Ἔστωσαν τρίτον αἱ κλ, κμ, πλευραὶ τοῦ κλμ, τριγώνου ἐλάττονες ἡμικυκλίου. Καὶ ἐπεὶ τῆς λμ, βάσεως ἐκβαλλομένης κατὰ τὸ ν, ἡ ὑπὸ κμν, ἐκτὸς γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ κλμ, ἐντός. Γενέσθω ἡ ὑπὸ ξμν, ἴση τῇ ὑπὸ κλμ, καὶ ἐκβαλλομένη ἡ λκ, συμπιπτέτω τῇ μξ, κατὰ τὸ ξ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ξμν, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ κλμ, πάντως γε κατὰ τὴν ιβ´: τοῦ παρόντος αἱ λξ, ξμ, πλευραὶ ἴσαι ἡμικυκλίῳ εἰσίν. αἱ ἄρα μξ, ξκ, ἐλάττονές εἰσιν ἡμικυκλίου, καὶ ἡ ὑπὸ λκμ, ἐκτὸς γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ κξμ, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, κατὰ τὴν αὐτὴν ιβ': ἀλλ' ἡ κ ξ μ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ κ μ ξ, ὡς δείξόμεθα, ἄρα ἡ ὑπὸ λ κ μ, πολλῷ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ κ μ ξ· προστιθεμένης δὲ τῆς μὲν ὑπὸ λ κ μ, τῇ ὑπὸ κ λ μ, τῆς δὲ ὑπὸ κ μ ξ, τῇ ὑπὸ ξ μ ν, καὶ τῆς κ μ λ, κοινῆς λαμβανομένης, πάντως γε κατὰ τὸ δ': ἀξίωμα αἱ τρεῖς ὑπὸ κ λ μ, λ μ κ, μ κ λ, τῶν τριῶν ὑπὸ κ μ λ, κ μ ξ, ξ μ ν, μείζονές εἰσιν, ἀλλ' αἱ ὑπὸ κ μ λ, κ μ ξ, ξ μ ν, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ἄρα αἱ τρεῖς τοῦ κ λ μ, τριγώνου γωνίαι αἱ ὑπὸ κ λ μ, λ μ κ, μ κ λ, μείζονές εἰσι δύο ὀρθῶν. Ὅτι δὲ ἡ ὑπὸ κ ξ μ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ κ μ ξ, δῆλον· ἐπεὶ γὰρ αἱ λ ξ, ξ μ, ἴσαι εἰσὶν ἡμικυκλίῳ, ὡς δέδεικται, ἄρα κατὰ τὴν ιβ': τοῦ παρ: αἱ ὑπὸ λ ξ μ, ξ λ μ: ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς· ἀλλ' ἡ ὑπὸ ξ λ μ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ξ μ ν, κατὰ τὴν κατασκευὴν, ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ ξ μ ν, λ ξ μ. δύσιν ὀρθαῖς ἴσαι· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ξ μ ν, ξ μ λ, ὡς ἐφεξῆς ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς, ἄρα ἡ ὑπὸ λ ξ μ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ξ μ λ: ἡ ἄρα ὑπὸ ξ μ κ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς ὑπὸ λ ξ μ, ἐλάττων γάρ ἐστι καὶ τῆς ὑπὸ ξ μ λ, τῆς ἴσης τῇ ὑπὸ λ ξ μ.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 17.



Λέγω δ' ὅτι καὶ αἱ τρεῖς οἱουδήποτε σφαιρικοῦ τριγώνου γωνίαι ἐλάττονές εἰσιν ἓξ ὀρθῶν. Ἔστω γὰρ τρίγωνον σφαιρικὸν τὸ α β γ, καὶ ἐκβληθήτωσαν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπὶ τὰ δ ε ζ, σημεῖα· καὶ ἐπεὶ κατὰ τὴν β': τοῦ παρόντος αἵτε ὑπὸ α β γ, γ β ζ· καὶ β γ α, α γ δ. καὶ γ α β, β α ε, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, πάντως γε αἱ ἓξ ῥηθεῖσαι γωνίαι ἓξ ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. ἀφαιρεμένων δὲ τῶν τριῶν τῶν ὑπὸ γ β ζ, α γ δ, β α ε, ἐκτὸς, ἐναπολείπονται αἱ τρεῖς ἐντὸς αἱ ὑπὸ α β γ, β γ α, γ α β, ἓξ ὀρθῶν ἐλάττονες, ὅπερ ἦν τὸ β': παντὸς ἄρα σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι, καὶ τὰ ἑξῆς:

Πρότασις ΙΖ:

Ἐὰν δύο τρίγωνα σφαιρικὰ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκάτερα ἑκατέραν, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἴσα ἔσονται τὰ τρίγωνα.

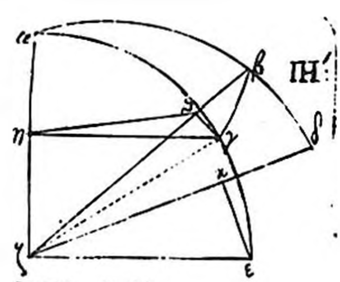
Ἐχέτωσαν δὴ τὰ α β γ, δ ε ζ, σφαιρικὰ τρίγωνα τὰς πρὸς τοῖς β καὶ γ, γωνίας ἴσας ταῖς πρὸς τοῖς ε καὶ ζ, τὴν μὲν πρὸς τῷ β, τῇ πρὸς τῷ ε, τὴν δὲ πρὸς τῷ γ, τῇ πρὸς τῷ ζ, καὶ τὴν βγ, βάσιν τῇ εζ, βάσει ὁμοίως ἴσην. Λέγω ὅτι τὸ αβγ, τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δεζ, τριγώνῳ. Ἐπεὶ γὰρ αἱ βγ, εζ, ἴσαι εἰσὶ, πάντωςγε ἐφαρμοττομένης τῆς βγ, ἐπὶ τῆς εζ, τὸ μὲν β, σημεῖον συμπεσεῖται τῷ ε, τὸ δὲ γ, τῷ ζ. Ἐπεὶ δὲ πάλιν καὶ ἡ πρὸς τῷ β, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ ε, ἐφαρμοσθήσεται δήπουθεν καὶ ἡ βα, τῇ εδ. εἰ γὰρ μὴ, ἡ πρὸς τῷ β, γωνία οὐκ ἔστιν ἴση τῇ πρὸς τῷ ε. ὥστε καὶ τὸ α, σημεῖον συμπεσεῖται τῷ δ, συμπίπτει δὲ καὶ τὸ γ, τῷ ζ, ἄρα καὶ ἡ αγ, ἐφαρμοσθήσεται ἐπὶ τῆς δζ, ἄλλως γὰρ ἂν ἢ ἐκτὸς ἢ ἐντὸς πεσεῖται, καὶ ἔσονται ἑκατέρα ἴση ἡμικυκλίῳ, διὰ τὸ τοὺς μεγίστους κύκλους δίχα ἀλλήλους τέμνεσθαι. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΗʹ:

Ἐπὶ παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον πρὸς τὰ ἡμίτονα τῶν ὑποτεινουσῶν.

Ἔστω Σφαιρικὸν τρίγωνον τὸ αβγ, ὀρθογώνιον κατὰ τὸ β. κείσθω δὲ τοῦτο πρῶτον ὀξυγώνιον εἶναι κατὰ τὸ γ. Λέγω ὅτι ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αβγ, ὀρθῆς γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς αγ, ὑποτεινούσης, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ βαγ, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς βγ, ὑποτεινούσης. Ἐξαχθήτωσαν γὰρ τὰ αβ, αγ, τόξα ἐπὶ τὰ δ, καὶ ε, ὥστε εἶναι τὰ αδ, αε, τεταρτημόρια, καὶ εὑρεθήτω τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ἐν ᾗ οἱ αδ, αε, κύκλοι γεγραμμένοι εἰσὶ, καὶ ἔστω τοῦτο τὸ ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζα, ζβ, ζγ, ζδ, ζε. καὶ ἐπεὶ οἱ αβδ, αγε, δε, κύκλοι μέγιστοί εἰσιν, ἔτι δὲ καὶ ὁ βγ, κατὰ τὸ βʹ: πόρισμ: τῆς ιβʹ: τοῦ αʹ: τῶν Σφαιρικῶν, οἱ δὲ μέγιστοι κύκλοι διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχονται, κατὰ τὴν ζʹ: τοῦ αὐτοῦ, πάντωςγε τὸ ζ, κέντρον ἐστὶ τῶν αβδ, αγε, βγ, δε, κύκλων κατὰ τὸ αʹ: πόρισμα τῆς βʹ: τοῦ αὐτοῦ. ὥστε ἡ μὲν αζ, κοινή ἐστι τομὴ τῶν αβδ, αγε, ἡ δὲ βζ, τῶν αβδ, βγ, καὶ ἡ δζ, τῶν αβδ, δε. Πιπτέτω δὴ ἀπὸ τοῦ γ, ἐπὶ μὲν τῆς αζ, κάθετος ἡ γη, ἐπὶ δὲ τῆς βζ, ἡ γθ, ἀπὸ δὲ τοῦ ε, ἐπὶ τῆς δζ, πιπτέτω ὁμοίως κάθετος ἡ εκ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηθ. Δείκνυται. ἐπεὶ ὁ βγ, κύκλος πρὸς ὀρθὰς τέμνει τὸν αβδ, πάντωςγε τὸ τοῦ βγ, ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ τοῦ αδ, ἐπίπεδον. ἦκται δὲ ἡ γθ, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς ζβ, κοινῆς τομῆς, ἄρα κατὰ τὸν δʹ: ὅρον τοῦ αʹ: τῶν Στερεῶν, καὶ ἡ γθ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ αβδ, κύκλου ἐπίπεδον, ἅπτεται τῆς γθ, ἡ ηθ, ἄρα κατὰ τὸν γʹ: ὅρον τοῦ αὐτοῦ, ἡ γθ, ὀρθή ἐστι

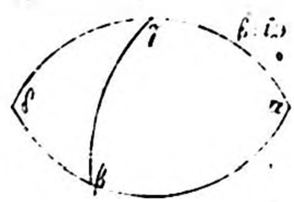
Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 18.



καὶ πρὸς τὴν ηθ. ἀλλὰ καὶ ἡ εκ, ὀρθὴ οὖσα πρὸς τὴν ζδ, ὀρθή ἐστι καὶ πρὸς τὸ τοῦ αβδ, ἐπίπεδον, ὅτι καὶ τὸ τοῦ δε, ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς αὐτό ἐστιν· ἄρα αἱ γθ, εκ, παράλληλοί εἰσι κατὰ τὴν ϛ': τοῦ αὐτοῦ. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ηγ, ζε, παράλληλοι, διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι ἑκατέραν ἐπὶ τῆς αζ, ἄρα, κατὰ τὴν ι: τοῦ αὐτοῦ αἱ ὑπὸ ηγθ, ζεκ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ ηθγ, ζκε, ἴσαι εἰσὶ, διὰ τὸ ἑκατέραν ὀρθὴν εἶναι, ἄρα καὶ λοιπαὶ αἱ ὑπὸ θηγ, κζε, ἴσαι εἰσὶν, ἰσογώνια ἄρα τὰ ηθγ, ζκε, τρίγωνα. ὥστε κατὰ τὴν δ': τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὡς ἡ ζε, πρὸς τὴν εκ, οὕτως ἡ ηγ, πρὸς τὴν γθ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ζε, πρὸς τὴν ηγ, ἡ εκ, πρὸς τὴν γθ. ἀλλ' ἡ μὲν ζε, ὁλικόν ἐστιν ἡμίτονον, ἤτοι ἡμίτονον γωνίας ὀρθῆς, ἡ δὲ ηγ, ἡμίτονον τῆς αγ, ὑποτεινούσης, ἡ δὲ εκ, ἡμίτονον τοῦ δε, τόξου, δηλ: τῆς ὑπὸ βαγ, γωνίας, διὰ τὸ μέτρον εἶναι τὸ δε, τῆς ὑπὸ βαγ, γωνίας, καὶ ἡ γθ, ἐστὶν ἡμίτονον τοῦ βγ, τόξου, ἄρα ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αβγ, ὀρθῆς γωνίας, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς αγ, ὑποτεινούσης, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ βαγ, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς βγ, ὑποτεινούσης.

Ἔστω δὲ τὸ αβγ, ὀρθογώνιον μὲν κατὰ τὸ β, ἀμβλυγώνιον δὲ κατὰ τὸ γ. Λέγω ὅτι ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αβγ, ὀρθῆς γωνίας, ἤτοι τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτ: τῆς γα, ὑποτεινούσης, οὕτω τὸ ἡμίτ: τῆς ὑπὸ αγβ, ἀμβλείας γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς βα, ὑποτεινούσης. Ἐξαχθήτωσαν γὰρ αἱ αβ, αγ, κατὰ τὸ συνεχὲς ὥστε συμπεσεῖν ἀλλήλαις, κατὰ τὸ δ,

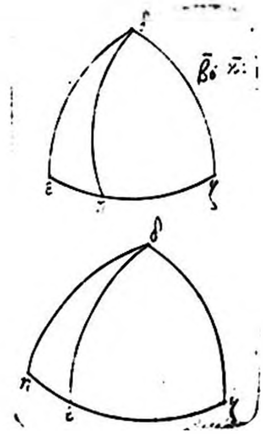
Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 19



καὶ ἐπεὶ τὸ δβγ, τρίγωνον ὀρθογώνιον μέν ἐστι κατὰ τὸ β, ὀξυγώνιον δὲ κατὰ τὸ γ, ἄρα κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὡς τὸ ἡμίτ: τῆς ὑπὸ δβγ, ὀρθῆς γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτ: τῆς δγ, ὑποτεινούσης, οὕτω τὸ ἡμίτ: τῆς ὑπὸ δγβ, ὀξείας γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτ: τῆς δβ, ὑποτεινούσης. ἀλλὰ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ δβγ, ἐστὶ καὶ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αβγ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, τὸ δὲ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ δγβ, ἡμίτονον ἐστὶ καὶ τῆς ὑπὸ αγβ, ἡ γὰρ ὑπὸ δγβ, παραπλήρωμά ἐστι τῆς ὑπὸ αγβ, μέχρι ἡμικυκλίου, ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ ἡμίτονον τῆς βδ, ἡμίτονόν ἐστι καὶ τῆς βα, ἧς ἐστι παραπλήρωμα. τὸ δὲ ἡμίτονον τῆς δγ, ἡμίτονόν ἐστι καὶ τῆς γα, διὰ τὰ αὐτά. ἄρα καὶ ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αβγ, ὀρθῆς πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς γα, ὑποτεινούσης, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αβγ, ἀμβλείας γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς βα, ὑποτεινούσης.

Ἔστω ἔτι τρίγωνον μὴ ὀρθογώνιον τὸ δεζ. Λέ-

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 20.



γω ὅτι ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ ζ, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς δε, ὑποτεινούσης, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ ε, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς δζ, ὑποτεινούσης. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ δ, ἐπὶ τὸ εζ, τόξον πρὸς ὀρθὰς τὸ δη. καὶ πάντως γε κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ ζ, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς δη, ὑποτεινούσης, οὕτως ἐστὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ δηζ, ἤτοι τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς δζ, ἀλλ' ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς δη, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τὸ ε, γωνίας, οὕτως ἐστὶ καὶ τὸ ἡμίτονον τῆς δε, ὑποτεινούσης πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ δηε, ἤτοι τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, ὀρθὴ γὰρ κατὰ τὴν κατασκευήν. ἔστιν ἄρα ἡ ἀναλογία τεταραγμένη, ὥστε καὶ δι' ἴσου, κατὰ τὴν κγ': τοῦ ε': τοῦ Στοιχειωτοῦ. ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ ζ, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ ε, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς δε, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς δζ, ὑποτεινούσης, ἄρα καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ ζ, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς δε, ὑποτεινούσης, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ ε, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς δζ.

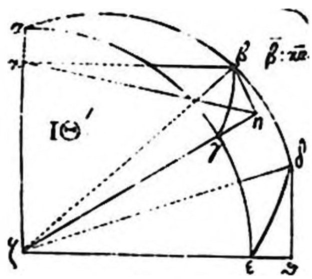
Τὸν αὐτὸν ἤδη τρόπον συναχθήσεται τὸ αὐτὸ, κἂν τὸ δη, τόξον ἐκτὸς τοῦ δεζ, πέσῃ τριγώνου, ὡς ἐπὶ τοῦ β': διαγράμματος.

Πρότασις ΙΘ':

Ἐπὶ παντὸς σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς προσκειμένης πλευρᾶς τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς πρὸς τῇ ῥηθείσῃ πλευρᾷ γωνίας, πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς ὑποτεινούσης τὴν αὐτὴν γωνίαν.

Ἔστω τρίγωνον σφαιρικὸν τὸ αβγ, ὀρθογώνιον κατὰ τὸ β, σημεῖον. Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς αβ, πλευρᾶς προσκειμένης τῇ ὑπὸ αβγ, ὀρθῇ γωνίᾳ, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς ὑπὸ βαγ, γωνίας τῆς πρὸς τῇ αβ, πλευρᾷ προσκειμένης πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς βγ, ὑποτεινούσης. Ἐξαχθήτωσαν γὰρ αἱ αβ, αγ, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπὶ τὰ δ, καὶ ε, σημεῖα, ὥστε τὰ αδ, αε, τεταρτημόρια εἶναι. καὶ ἐπιζευχθήτωσαν ἀπὸ τοῦ ζ, κέντρου τῆς σφαίρας αἱ ζα, ζβ, ζγ, ζδ, ζε. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ζβ, κοινή ἐστι τομὴ τῶν ἐπιπέδων τῶν αβ, βγ, ἡ δὲ ζδ, τῶν αβδ, δε, κύκλων, καὶ ἑκάτερος τῶν βγ, δε, ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ αβδ, ἐπίπεδον, ἀνεστάθω ἀπὸ μὲν τοῦ β, κάθετος ἐπὶ τῆς ζβ, ἡ βη, ἡ β η, ἀπὸ δὲ τοῦ δ, ὁμοίως ἐπὶ τῆς ζ δ, ἡ δ θ, καὶ ἐξαχθήτωσαν αἱ ζ γ, ζ ε, ὥστε συμπεσεῖν ταῖς β η, δ θ, κατὰ τὰ η, καὶ θ. ἀπὸ δὲ τοῦ β, πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τῆς α ζ, κοινῆς τομῆς τῶν α β, α γ, ἡ β κ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κ η. Δείκνυται. ἐπεὶ ὁ β γ, κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν α β δ, κύκλον, συνέστη δὲ καὶ ἡ β η, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς ζ β, ἄρα καὶ ἡ β η, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ α β δ, κύκλου ἐπίπεδον, ὥστε κατὰ τὸν γ': ὅρον ὀρθή ἐστι καὶ πρὸς τὴν κ β. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ δ θ, ὀρθὴ πρὸς τὸ τοῦ α β δ, κύκλου ἐπίπεδον, ἄρα κατὰ τὴν ϛ': τοῦ ια': τῶν Στοιχείων αἱ β η, δ θ, παράλληλοί εἰσιν, ἀλλὰ καὶ αἱ κ β, ζ θ, παράλληλοί εἰσι διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι ἑκατέραν πρὸς τὴν α ζ, ἄρα κατὰ τὴν ι: τοῦ αὐτοῦ αἱ ὑπὸ β κ η, δ ζ θ, γωνίαι ἴσαι εἰσίν, εἰσὶ δὲ ἴσαι καὶ αἱ ὑπὸ κ β η, ζ δ θ, ὡς δέδεικται, ἄρα τὰ κ β η, ζ δ θ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσι, καὶ κατὰ τὴν δ': τοῦ ϛ': τῶν Στοιχ: ὡς ἡ ζ δ, πρὸς τὴν δ θ, ἡ κ β, πρὸς τὴν β η, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ζ δ, πρὸς τὴν κ β, ἡ δ θ, πρὸς τὴν β η. ἀλλ' ἡ μὲν ζ δ, ὁλικόν ἐστιν ἡμίτονον, ἡμιδιάμετρος γάρ, ἡ δὲ κ β, ὀρθόν ἐστιν ἡμίτονον τοῦ α β, τόξου, καὶ ἡ μὲν δ θ, ἀπτομένη ἐστὶ τῆς ὑπὸ β α γ, γωνίας, διὰ τὸ ἅπτεσθαι τοῦ δ ε, τόξου, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ': τοῦ γ': τοῦ αὐτοῦ, μέτρου ὄντος τῆς αὐτῆς, ἡ δὲ β η, ἀπτομένη, κατὰ τὸ ῥηθὲν πόρισμα τοῦ β γ, ἄρα ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς α β, πλευρᾶς τοῦ α β γ, τριγώνου, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς ὑπὸ β α γ, γωνίας πρὸς τὴν ἀπτομένην τοῦ β γ, τόξου, ὅπερ ἦν τὸ ὑποτεθέν. ἐπὶ παντὸς ἄρα σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 21.



Π Ό Ρ Ι Σ Μ Α.

Α': Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον τῆς προσκειμένης πλευρᾶς τῇ γωνίᾳ πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς ὑποτεινούσης τὴν γωνίαν πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς αὐτῆς γωνίας.

Π Ό Ρ Ι Σ Μ Α.

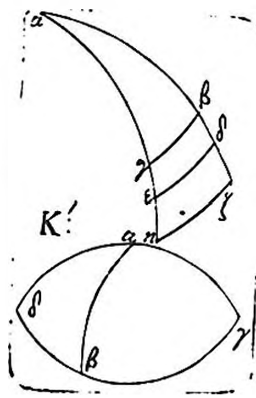
Β': Ἔτι ἐὰν ὦσι πλείω τρίγωνα σφαιρικὰ ὀρθογώνια ἔχοντα παρὰ τὴν ὀρθὴν γωνίαν καὶ ἑτέραν τινὰ ἴσην, ἢ γοῦν τὴν αὐτὴν ὡς τὰ α β γ, α δ ε, τὰ ἡμίτονα τῶν πρὸς τὰς ἴσας γωνίας πλευρῶν τῶν αὐτῶν τριγώνων, τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον πρὸς τὰς ἀπτομένας τῶν ὑποτεινουσῶν τὴν κοινὴν γωνίαν, ἢ γοῦν τὴν παρὰ τὴν ὀρθὴν ἴσην. Ἐπὶ γὰρ τῶν α β γ, α δ ε, ὧν παρὰ τὰς ὑπὸ α β γ, α δ ε, ὀρθὰς γωνίας κοινή ἐστι καὶ ἡ πρὸς τῷ α, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς α β, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας πρὸς τὴν ἀπτομέ-

τὴν

νην τοῦ βγ, καὶ ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς αδ, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς πρὸς τῇ α, γωνίας πρὸς τὴν ἀπτομένην τοῦ δε, ἄρα καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς πρὸς τῇ α, γωνίας, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς αβ, πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς βγ, ἢ γοῦν τὸ ἡμίτονον τῆς αδ, πρὸς τὴν ἀπτομένην τοῦ δε, ἄρα, κατὰ τὴν ια: τοῦ ε: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς αβ, πλευρᾶς πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς βγ, ὑποτεινούσης, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς αδ, πλευρᾶς πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς δε, ὑποτεινούσης.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 22.

Πρότασις Κ':



Παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ἐκβαλλομένων τῶν πλευρῶν κατὰ τὸ συνεχὲς ἀορίστως, συσταθήσεται ἕτερον τρίγωνον τὴν αὐτὴν τῷ προτέρῳ βάσιν ἔχον καὶ τὴν κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνίαν ἴσην τῇ κατὰ κορυφὴν γωνίᾳ τοῦ δοθέντος τριγώνου. αἱ δὲ λοιπαὶ τούτου πλευραὶ καὶ γωνίαι παραπληρώματα ἔσονται τῶν πλευρῶν τε καὶ γωνιῶν τοῦ προτέρου τριγώνου μέχρις ἡμικυκλίου, καὶ δύο ὀρθῶν γωνιῶν.

Ἐξαχθήτωσαν αἱ γα, γβ, πλευραὶ τοῦ αβγ, σφαιρικοῦ τριγώνου κατὰ τὸ συνεχὲς ἀορίστως. Λέγω ὅτι συσταθήσεται παρὰ τὸ αβγ, τρίγωνον, καὶ ἕτερον τρίγωνον τὴν αὐτὴν αβ, βάσιν ἔχον, ἣν καὶ τὸ αβγ, τρίγωνον, καὶ τὴν κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ αγβ, κατὰ κορυφὴν τοῦ αβγ, καὶ αἱ μὲν τούτου πλευραὶ παραπληρώματά εἰσι τῶν τοῦ αβγ, πλευρῶν μέχρις ἡμικυκλίου, αἱ δὲ λοιπαὶ γωνίαι ὁμοίως παραπληρώματα τῶν λοιπῶν τοῦ αβγ, τριγώνου γωνιῶν μέχρι δύο ὀρθῶν. Ἐπεὶ γὰρ αἱ γα, αβ, πλευραὶ μεγίστων κύκλων εἰσὶ τόξα, οἱ δὲ μέγιστοι δίχα τέμνουσιν ἀλλήλους, κατὰ τὴν ι: τοῦ α: τῶν Σφαιρικῶν, πάντως γε ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται, καὶ συσταθήσεται τὸ αβδ, τρίγωνον τὴν αὐτὴν ἔχον τῷ αβγ, βάσιν τὴν αβ, ἡ δὲ ὑπὸ αδβ, κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αγβ, τοῦ αβγ, τριγώνου, κατὰ τὴν γ: τοῦ παρόντος. Αὖθις ἐπεὶ τὰ γαδ, γβδ, ἡμικύκλιά εἰσι, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ι: δῆλον ὅτι ἡ μὲν αδ, παραπλήρωμά ἐστι τῆς αγ. ἡ δὲ δβ, τῆς βγ. ἐπεὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ δαβ, βαγ, καὶ ὑπὸ δβα, αβγ, δυσὶν ὀρθαῖς

ἴσαι

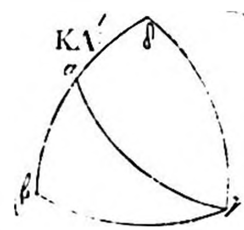
ἴσαι εἰσί, καὶ τῶν β′: τῆ αὐτῆ, ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ δαβ, παραπλήρωμά ἐστι τῆς ὑπὸ βαγ, μέχρι δύο ὀρθῶν, ἡ δὲ ὑπὸ δβα, τῆς ὑπὸ αβγ· παντὸς ἄρα σφαιρικοῦ τριγώνου ἐκβαλλομένων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΚΑ′.

Παντὸς σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν αὐτοῦ γωνίαν πλευρῶν ἐκβληθείσης ἄχρι τοῦ πόλου τῆς ἑτέρας, συσταθήσεται ἕτερον τρίγωνον τὴν αὐτὴν ἔχον βάσιν τῷ προτέρῳ, καὶ μίαν τῶν αὐτοῦ πλευρῶν συνεχῆ μιᾷ τῶν τοῦ προτέρου πλευρῶν, τὴν δὲ ἐφεξῆς γωνίαν ἢ ἴσην τῇ τοῦ προτέρου, ἢ παραπλήρωμα μέχρι δύο ὀρθῶν, ἢ γοῦν παραπλήρωμα πρὸς μίαν ὀρθήν.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ αβγ, ὀρθὴν ἔχον τὴν πρὸς τῷ β, γωνίαν, καὶ ἐκβληθήτω ἡ βα, αὐτοῦ πλευρὰ ἄχρι τοῦ δ, πόλου τῆς βγ. Λέγω ὅτι συσταθήσεται ἕτερον τρίγωνον τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχον τῷ αβγ, καὶ μίαν τῶν αὐτοῦ πλευρῶν συνεχῆ τῇ μιᾷ τῶν τοῦ προτέρου, τὴν δὲ ἐφεξῆς γωνίαν ἢ ἴσην, ἢ παραπλήρωμα μέχρι δύο ὀρθῶν, ἢ γοῦν παραπλήρωμα πρὸς ὀρθήν. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ δγ· καὶ ἐπεὶ ἡ αγ, κοινή ἐστι, πάντως γε τὰ αβγ, αδγ, τρίγωνα τὴν αὐτὴν ἔχουσι βάσιν. ἐπεὶ δὲ ἡ βα, τῇ αδ, συνεχής ἐστι, δῆλον ὅτι τὸ αδγ, τρίγωνον ἔχει τὴν αδ, πλευρὰν συνεχῆ τῇ αβ· πάλιν εἰ μὲν τὸ γ, πόλος ἐστὶ τῆς βαδ, πάντως γε τὸ αγ, πρὸς ὀρθὰς τέμνει τὸ βαδ, καὶ ἡ ὑπὸ δαγ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βαγ. εἰ δὲ τὸ γ, πόλος οὐκ ἔστι τῆς βαδ, ἡ ὑπὸ δαγ, παραπλήρωμά ἐστι τῆς ὑπὸ βαγ. ἐπεὶ δὲ ἡ ὑπὸ δγβ, ὀρθή ἐστι, φανερὸν ὅτι ἡ ὑπὸ δγα, συμπλήρωμά ἐστι μετὰ τῆς ὑπὸ αγβ, πρὸς μίαν ὀρθήν.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 23.

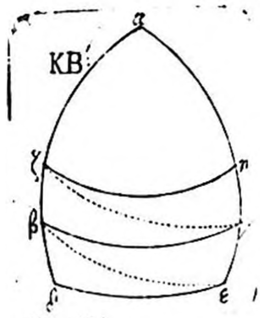


Πρότασις ΚΒ′.

Ἐπὶ παντὸς σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, εἰ μὲν αἱ τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιέχουσαι πλευραὶ τεταρτημόρια κύκλου ὦσιν, ἑκατέρα τῶν δύο λοιπῶν γωνιῶν ὀρθή ἐστιν, εἰ δὲ μείζους τεταρτημορίου, ἀμβλεῖαι. εἰ δὲ ἐλάττους ὀξεῖαι. εἰ δὲ τελευταῖον ἡ μὲν μείζων τεταρτημορίου, ἡ δὲ ἐλάττων, καὶ τῶν γωνιῶν ἡ μὲν ἀμβλεῖα, ἡ δὲ ὀξεῖα ἔσται. καὶ ἀνάπαλιν, εἰ μὲν ἑκατέρα τῶν δύο λοιπῶν γωνιῶν ὀρθὴ ᾖ, αἱ πλευραὶ τεταρτημόριά εἰσιν, εἰ δὲ ἀμβλεῖαι, μείζονες τεταρτημορίου. εἰ δὲ ὀξεῖαι, ἐλάττονες. εἰ δὲ τελευταῖον ἡ μὲν ἀμβλεῖα, ἡ δὲ ὀξεῖα, καὶ τῶν πλευρῶν πάντως γε ἡ μὲν μείζων τεταρτημορίου, ἡ δὲ ἐλάττων.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ αβγ, ὀρθὴν ἔχον τὴν πρὸς τῷ α, γωνίαν, καὶ ἔστω πρῶτον μὲν ἑκατέρα τῶν αβ, αγ, αὐτοῦ πλευρῶν τεταρτημόριον. δεύτερον δὲ ἑκατέρα τῶν αδ, αε, μείζων τεταρτημορίου, ἐκβαλλομένων κατὰ τὸ συνεχὲς τῶν αβ, αγ, καὶ τρίτον ἑκατέρα τῶν αζ, αη, ἐλάττων τεταρτημορίου. Λέγω ὅτι ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αβγ, αγβ, γωνιῶν ὀρθή ἐστιν. ἑκατέρα δὲ τῶν ὑπὸ αδε, αεδ, ἀμβλεῖα, καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αζη, αηζ, ὀξεῖα. τὰ γὰρ αβγ, αδε, αζη, σφαιρικὰ τρίγωνα ἰσοσκελῆ εἰσιν, ὥστε κατὰ τὴν ιγ′: τοῦ παρόντος, τοῦ μὲν αβγ, αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ὀρθαί εἰσι. τοῦ δὲ αδε, ἀμβλεῖαι, καὶ τοῦ αζη, ὀξεῖαι.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 24.



Ἔστω ἔτι τὸ αζε, ὀρθογώνιον κατὰ τὸ α, καὶ ἐχέτω τὴν μὲν αε, μείζονα τεταρτημορίου, τὴν δὲ αζ, ἐλάττονα. Λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ αζε, ἀμβλεῖά ἐστιν, ἡ δὲ ὑπὸ αεζ, ὀξεῖα. ἐπεὶ γὰρ ἡ πρὸς τῷ α, ὀρθή ἐστι, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, δέδεικται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, ὀρθή, πάντως γε, καθ᾽ ὃ σημεῖον οἱ αγ, βγ, κύκλοι τέμνονται ἀλλήλοις, πόλος ἐστὶ τοῦ αβδ, τόξου, ὥσπερ καὶ τὸ β, τοῦ αγε. Γραφέτω γοῦν διὰ μὲν τῶν ζγ, σημείων τὸ ζγ, τόξον, διὰ δὲ τῶν βε, τὸ βε, καὶ δῆλον ὅτι ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αζγ, αεβ, ὀρθή ἐστι κατὰ τὴν ιβ′: τοῦ α: τῶν Σφαιρικῶν, ἀλλ᾽ ἡ μὲν ὑπὸ αζε, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αζγ, ὡς περιεκτικὴ τῆς αὐτῆς, ἡ δὲ ὑπὸ αεζ, ἐλάττων τῆς ὑπὸ αεβ, ὡς ὑπ' αὐτῆς περιεχομένη. ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ α ζ ε, ἀμβλεῖά ἐστιν, ἡ δὲ ὑπὸ α ε ζ ὀξεῖα, ὅπερ ἔδει τὸ ὑποχεθέν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἑκατέρα τῶν ὑπὸ α β γ, α γ β, ὀρθή. Λέγω ὅτι τὰ α β, α γ τεταρτημόριά εἰσιν. εἰ γὰρ μή, ἢ μεῖζον τεταρτημορίου ἑκάτερόν ἐστιν, ἢ ἔλαττον. εἰ μὲν μεῖζον, φανερὸν ὅτι ἑκατέρα τῶν ὑπὸ α β γ, α γ β, ἀμβλεῖά ἐστι κατὰ τὴν ιγ': τοῦ παρόντος, εἰ δὲ ἔλαττον, ὀξεῖα, ὅπερ ἀντίκειται τῇ ὑποθέσει. τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον συναχθήσεται καὶ τὰ λοιπά.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α':

Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι ἐπὶ τῶν ὀρθογωνίων σφαιρικῶν τριγώνων, μὲν ἀμφω αἱ περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευραὶ τεταρτημόριά εἰσιν, ἢ γοῦν ἡμι ἴση ᾖ τεταρτημορίῳ, τεταρτημόριόν ἐστι καὶ ἡ βάσις. εἰ δὲ αἱ πλευραὶ μείζονες ἢ ἐλάττονες ὦσι τεταρτημορίου, ἡ βάσις ὁμοίως ἐλάττων ἔσται τεταρτημορίου.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β':

Ἔτι ἐπὶ παντὸς σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εἰ μὲν παρὰ τὴν δοθεῖσαν ὀρθὴν γωνίαν, καὶ ἑτέρα τις τῶν λοιπῶν ὀρθὴ ᾖ, ἡ βάσις τεταρτημόριον ἔσται. Ἐὰν γὰρ παρὰ τὴν πρὸς τῷ α, ὀρθὴ ᾖ καὶ ἡ ὑπὸ α β γ, πάντως γε ἡ β βάσις τεταρτημόριόν ἐστιν, ὥσπερ καὶ ἡ α γ, τὸ γ, γὰρ πόλος ἐστὶ τῆς α β, πλευρᾶς, ὡς δέδεικται. Εἰ δὲ αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι τὸ αὐτὸ εἴησαν συμπτώματι ὀξεῖαι δῆλον: ἢ ἀμβλεῖαι, ἤ μὲν δὲ ὀρθαί, ἡ βάσις ἐλάττων ἔσται τεταρτημορίου, ὡς ἐπὶ τῶν α ζ η, α δ ε, τριγώνων. ἐὰν γὰρ ὀξεῖαι ὦσιν αἱ γωνίαι, περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευραὶ ἐλάττονες ἔσονται τεταρτημορίου, εἰ δὲ ἀμβλεῖαι μείζονες, καὶ καθ' ἑκάτερον ἡ βάσις ἐλάττων τεταρτημορίου ἐστί, κατὰ τὸ ἀνωτέρω πόρισμα. εἰ δὲ πλεῖστον διαφόρου ὦσιν αἱ γωνίαι συμπτώματος, ἡ μὲν ἀμβλεῖα, ἡ δὲ ὀξεῖα, ἡ βάσις μείζων ἔσται τεταρτημορίου, ὡς ἐπὶ τοῦ α ζ ἐπεὶ γὰρ ἡ α ζ ε, ἀμβλεῖά ἐστι, ἡ δὲ ὑπὸ α ε ζ, ὀξεῖα, πάντως γε ἡ ζ ε, β τι, μείζων ἐστὶ τεταρτημορίου· καὶ ἀνάπαλιν, ἐάν γε ἡ βάσις ἐλάττων ᾖ τεταρτημορίου ἢ μείζων, αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἢ ὀξεῖαι, ἢ ἀμβλεῖαί εἰσι, τὸ τὸ μόνον εἴδους ἄμφω.

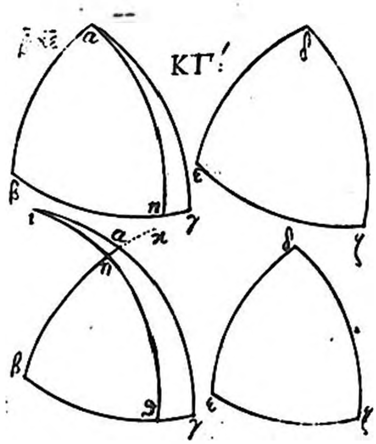
Πρότασις ΚΓ':

Ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα τὰς γωνίας κατὰ μίαν ἴσας ἔχωσι, καὶ τὰς πλευρὰς κατὰ μίαν ἴσας ἕξουσι, καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν τὰς πλευρὰς κατὰ μίαν ἴσας ἔχωσι, καὶ τὰς γωνίας κατὰ μίαν ἴσας ἕξουσι.

Ἐχέτωσαν δὴ τὰ α β γ, δ ε ζ, τρίγωνα τὰς γωνίας κατὰ μίαν ἴσας, μὲν ὑπὸ β α γ, τῇ ὑπὸ ε δ ζ, τὴν δὲ ὑπὸ α γ β, τῇ ὑπὸ δ ζ ε, καὶ τὴν ὑπὸ γ β α, τῇ ὑπὸ ζ ε δ. Λέγω ὅτι καὶ τὰς πλευρὰς κατὰ μίαν ἴσας ἔχουσι, τὴν μὲν

β α,

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 25.



βα, τῇ εδ, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ, καὶ τὴν γβ, τῇ ζε. εἰ γὰρ μὴ, πάντως γε ἡ μία μιᾶς, ἢ πλείους πλειόνων μείζονες ἔσονται. Ἔστω α: ἡ βγ, μείζων τῆς εζ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς βγ, ἡ βη, ἴση τῇ εζ, καὶ γραφήτω τὸ αη, τόξον, κατὰ τὴν ιϛ: τοῦ α: τῶν Σφαιρικῶν. καὶ ἐπεὶ αἱ βα, βη, ἴσαι εἰσὶ ταῖς εδ, εζ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αβη, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ δεζ, δῆλον ὅτι κατὰ τὴν ϛ: τοῦ παρ: ἡ ὑπὸ βαη, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εδζ. ἀλλὰ τῇ ὑπὸ εδζ, ἴση ὑπετέθη καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, ἄρα ἡ ὑπὸ βαη, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βαγ, τὸ μέρος τοῦ ὅλου· ὅπερ ἄτοπον.

Ἔστω β΄: ἥτε βγ, μείζων τῆς εζ, καὶ ἡ βα, τῆς εδ· καὶ ἀφαιρεθήτω ἀπὸ μὲν τῆς βγ, τὸ βθ, τόξον ἴσον τοῦ εζ, ἀπὸ δὲ τῆς βα, τὸ βη, ἴσον τοῦ εδ, καὶ γραφήτω τὸ θηι, τόξον συμπίπτον τοῦ γα, ἐκβαλλομένῳ κατὰ τὸ ι: καὶ ἐξαχθήτω τὸ βα, ἐπὶ τὸ κ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν βη, ἴση εἴληπται τῇ εδ, ἡ δὲ βθ, τῇ εζ. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ β, γωνία τῇ πρὸς τῷ ε, ἴση. πάντως γε κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ϛ΄: ἡ ὑπὸ βθη, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εζδ, ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ εζδ, ἴση ὑπετέθη τῇ ὑπὸ βγα, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ βθη, ἡ ἐκτὸς, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βγα, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. ὥστε κατὰ τὴν ιβ΄: τοῦ παρόντος αἱ ιηθ, ιαγ, πλευραὶ τοῦ ιθγ, τριγώνου ἴσαι εἰσὶν ἡμικυκλίῳ, ὑπετέθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ εδζ, ἴση τῇ ὑπὸ βαγ, καὶ ταύτῃ ἴση δέδεικται ἡ ὑπὸ βηθ, ἄρα ἡ ὑπὸ βηθ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βαγ. ἀλλὰ τῇ μὲν ὑπὸ βηθ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ιηα, κατὰ κορυφὴν, κατὰ τὴν α: τοῦ παρόντος, ἡ δὲ ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ ιακ, κατὰ τὴν αὐτὴν, ἄρα ἡ ὑπὸ ιακ, ἐκτὸς ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ιηα, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. ὥστε κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ιβ΄: τὰ ιη, ια, τόξα ἴσα εἰσὶν ἡμικυκλίῳ, καὶ ἑπομένως ἴσα τοῖς ιηθ, ιαγ, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα μείζονές εἰσιν αἱ αβ, βγ, τῶν δε, εζ.

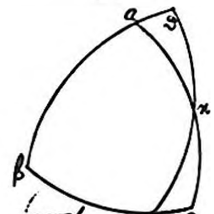
Ἔστω τρίτον ἡ μὲν βγ, μείζων τῆς εζ, ἡ δὲ βα, ἐλάττων τῆς εδ, καὶ ἀπὸ μὲν τῆς βγ, ἀφαιρεθείτω ἡ βη, ἴση τῇ εζ. ἡ δὲ βα, ἐξαχθήτω ἐπὶ τὸ θ, ὥστε γενέσθαι τὸ βαθ, ἴσον τοῦ εδ. καὶ ἐπεὶ τὰ βθη, εδγ, ἔχουσι τὰς βθ, βη, ἴσας ταῖς εζ, εδ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχουσι δὲ καὶ τὴν πρὸς τοῦ β, γωνίαν τῇ πρὸς τῷ ε, ἴσην, πάντως γε ἡ ὑπὸ βηθ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εζδ, κατὰ τὴν ϛ′: τοῦ παρόντος, ἀλλὰ τῇ ὑπὸ εζδ, ἴση ὑπετέθη ἡ ὑπὸ βγα, ἄρα ἡ ὑπὸ βηθ, ἐκτὸς ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βγθ, ἐντὸς, ὥστε αἱ κη, κγ, πλευραὶ τοῦ κηγ, τριγώνου ἴσαι εἰσὶν ἡμικυκλίῳ, κατὰ τὴν ιβ′: τοῦ παρόντος. Αὖθις ἐπεὶ ἡ ὑπὸ βαγ, ὑπετέθη ἴση τῇ πρὸς τῷ δ. τῇ δὲ πρὸς τῷ δ, ἴση δέδεικται ἡ ὑπὸ βθη, ἄρα ἡ ὑπὸ βαγ, ἐκτὸς ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βθη, ἐντὸς, καὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ιβ′: αἱ κα, κθ, πλευραὶ τοῦ καθ, τριγώνου ἴσαι εἰσὶν ἡμικυκλίῳ, ὥστε αἱ ακγ, θκη, ἴσαι εἰσὶ κύκλῳ μεγίστῳ, καὶ τέμνονται καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον τὸ κ, ὅπερ ἄτοπον. Ἐὰν ἄρα δύο σφαιρικὰ τρίγωνα τὰς γωνίας κατὰ μίαν ἴσας ἔχωσι, καὶ τὰς πλευρὰς κατὰ μίαν ἴσας ἕξουσιν. ὅτι δὲ καὶ ἀνάπαλιν δῆλον, ἐκ τοῦ πορίσματος τῆς ϛ′. τοῦ παρόντος.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 26.

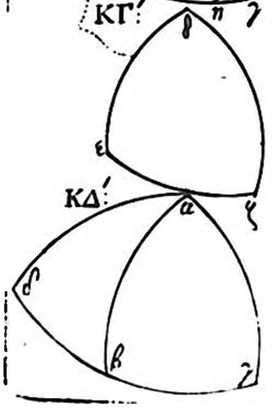
Πρότασις ΚΔ′.

Δύνανται δύο σφαιρικὰ τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἑκατέραν ἑκατέρᾳ ἴσας ἔχειν, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ, τὴν τὰς ἴσας ὑποτείνουσαν γωνίας, καὶ μὴ ἴσα εἶναι.

Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, ἔχον τὰς αβ, αγ, πλευρὰς ἴσας ἡμικυκλίῳ. καὶ τῆς γβ, βάσεως ἐκβληθείσης ἐπὶ τὸ δ, γραφήτω τὸ δα, τόξον, ὥστε τὰς βδ, δα, ἐλάττονας εἶναι ἡμικυκλίου. Λέγω ὅτι τὰ αδβ, αδγ, τρίγωνα ἔχουσι τὰς ὑπὸ αδβ, αβδ, ἴσας ταῖς ὑπὸ αδγ, αγδ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, καί εἰσιν ἄνισα. καὶ ὅτι μὲν τὰς γωνίας ἴσας ἔχουσι, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ, δῆλον. ἐπεὶ γὰρ αἱ βα, αγ, ἴσαι εἰσὶν ἡμικυκλίῳ, πάντως γε ἡ ὑπὸ αβδ, ἐκτὸς γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ γ, ἐντὸς κατὰ τὴν ιβ′: τοῦ παρόντος. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αδβ, κοινὴ, τὰ ἄρα αδβ, αδγ, τρίγωνα ἔχουσι δύο γωνίας τὰς ὑπὸ αδβ, αβδ, δυσὶ ταῖς ὑπὸ αδγ, αγδ, ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, κοινὴν δὲ τὴν αδ, πλευρὰν τὴν ὑποτείνουσαν τήν τε ὑπὸ αβδ, καὶ ὑπὸ αγδ, γωνίαν. ὅτι δὲ καὶ ἄνισά εἰσι, καὶ τοῦτο δῆλον, τὸ γὰρ αδγ, τρίγωνον περιέχει ἐν ἑαυτῷ τὸ αβδ. καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστι κατὰ τὸ κοινὸν ἀξίωμα.



ΚΓ′.

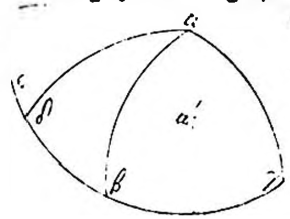


ΚΔ′.

Ἔστω

Ἰστέον δὲ ὅτι ἐπὶ τῆς προτάσεως ταύτης, ἕπεταί τις ἀμφιβολία. ἐπεὶ γὰρ ἡ α δ, ὑποτείνουσά ἐστι τῆς τε ὑπὸ α β δ, γωνίας τοῦ α δ β, τριγώνου, καὶ τῆς ὑπὸ α γ δ, τοῦ α δ γ, τριγώνου, ἐὰν γένηται ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ α β δ, ἢ γωνίας τῆς ὑπὸ α γ δ, ἴσης, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ δ, γωνίας, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς α δ, πρὸς ἄλλο τι, ὁ τέταρτος ὅρος ἄγνωστός πως ἔσται. δύναται γὰρ αὐτὶ τοῦ τετάρτου ληφθῆναι ἥτε α β, καὶ α γ. διὸ δὴ ἐπιστάσεως ἄξιον, ὅτι ἡνίκα ἡ α δ, τεταρτημόριόν ἐστι, τηνικαῦτα καὶ τῶν α β, α γ, ἑκατέρα τεταρτημόριόν ἐστιν, ὡς ἐπὶ τοῦ α: σχήματος καθορᾶται, ὅτε δὲ μείζων τεταρτημορίου, ὡς ἐπὶ τοῦ β': σχήματος, ἡ μὲν α β, μείζων ἔσται τεταρτημορίου, ἡ δὲ α γ, ἐλάττων. ὅτε δὲ ἡ α δ, ἐλάττων ἐστὶ τεταρτημορίου, ἡ μὲν α β, ἐλάττων ἔσται τεταρτημορίου, ἡ δὲ α γ, μείζων. Ἔστω δὴ α: ἡ α δ, τεταρτημόριον. λέγω ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν α β, α γ, τεταρτημόριόν ἐστιν. εἰ γὰρ μή, πάντως γε ἡ α β, ἢ μείζων, ἢ ἐλάττων ἔσται τεταρτημορίου. κἂν μὲν μείζων ᾖ, ἔσονται αἱ α β, α δ, μείζονες ἡμικυκλίου, καὶ κατὰ τὴν ιβ': τοῦ παρόντος ἡ ὑπὸ α β γ, ἐκτὸς, ἐλάττων ἔσται τῆς ὑπὸ α δ β, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. ἀλλ' ἡ ὑπὸ α δ β, ὀρθή ἐστι, διὰ τὸ τὴν α δ, τεταρτημόριον οὖσαν διέρχεσθαι διὰ τοῦ πόλου τῆς δ β γ, ἄρα ἡ ὑπὸ α β γ, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ ἐφεξῆς ἄρα ἡ ὑπὸ α β δ, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ α γ β, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. ὑπετέθη γὰρ ἴση τῇ ὑπὸ α β δ, κατὰ τὴν ιβ': τοῦ παρόντος. ἄρα κατὰ τὴν ι: τοῦ αὐτοῦ ἡ α δ, μείζων ἐστὶ τῆς α γ, ἔστι δὲ ἡ α δ, τεταρτημόριον κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα αἱ δ α, α γ, ἐλάττονές εἰσιν ἡμικυκλίου. ἐὰν ἄρα ἡ γ β δ, βάσις ἐκβληθῇ ἐπὶ τὸ ε, ἡ ὑπὸ α δ ε, ἐκτὸς γωνία μείζων ἔσται τῆς πρὸς τῷ γ, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. ἀλλ' ἡ πρὸς τῷ γ, ἀμβλεῖά ἐστιν, ὡς δέδεικται, ἄρα ἡ ὑπὸ α δ ε, πολλῷ μᾶλλον ἀμβλεῖα ἔσται, καὶ ἑπομένως ἡ ἐφεξῆς ταύτῃ ὑπὸ α δ β, ὀξεῖα ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ὀρθὴ ὅπερ ἄτοπον. Εἰ δὲ ἡ α β, ἐλάττων εἴη τεταρτημορίου, δῆλον ὅτι αἱ α δ, α β, ἐλάττονες ἔσονται ἡμικυκλίου, καὶ ἡ ὑπὸ α β γ, μείζων ἔσται τῆς ὑπὸ α δ β, καὶ ἑπομένως ἀμβλεῖα. ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ α δ β. ὥστε ἡ ὑπὸ α β δ, ὀξεῖά ἐστιν, ὀξεῖα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ α γ β, μείζων ἄρα ἡ α γ, τῆς α δ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ι: αἱ δ α, α γ, ἄρα μείζονές εἰσιν ἡμικυκλίου, καὶ ἡ ὑπὸ α δ ε, ὀξεῖα. εἰ δὲ τοῦτο δῆλον, ὅτι ἡ ὑπὸ α δ β, ἐφεξῆς ἀμβλεῖά ἐστιν, ἀλλὰ δὴ καὶ ὀρθή, ὅπερ ἄτοπον, οὐκ ἄρα ἡ α β, μείζων, ἢ ἐλάττων ἐστὶ τεταρτημορίου, τῆς α δ, ἴσης τεταρτημορίῳ οὔσης, καὶ ἑπομένως ἡ α β, τεταρτημόριόν ἐστιν. ἀλλ' αἱ β α, α γ, ἴσαι εἰσὶν ἡμικυκλίῳ, κατὰ τὴν ὑπόθ: ἄρα καὶ ἡ α γ, τεταρτημόριόν ἐστιν. ἡνίκα ἄρα ἡ α δ, τεταρτημόριόν ἐστι, τηνικαῦτα καὶ ἑκατέρα τῶν α β, α γ, τεταρτημόριόν ἐστιν.

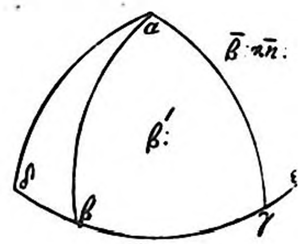
Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 27.

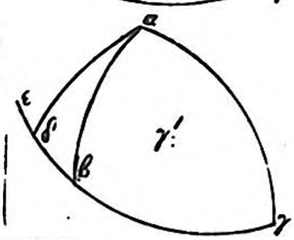


Ἔστω

Ἔστω β': ἡ αδ, μείζων τεταρτημορίου. Λέγω ὅτι ἡ μὲν αβ, μείζων ἐστὶ τεταρτημορίου, ἡ δὲ αγ, ἐλάττων. εἰ γὰρ μὴ, πάντως γε ἡ αβ, ἢ ἴση ἔσται τεταρτημορίῳ ἢ ἐλάττων. κἂν μὲν ἴση, δῆλον, ὅτι ἡ αγ, ἴση ἔσται τεταρτημορίῳ. αἱ γὰρ βα, αγ, ἴσαι εἰσὶν ἡμικυκλίῳ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, τὸ αβγ, ἄρα τρίγωνον ἰσοσκελὲς, καὶ τὰς πρὸς τῇ βάσει γωνίας ὀρθὰς ἔχει, κατὰ τὴν ιγ': τοῦ παρόντος, ἡ ἄρα ὑπὸ αγβ, ὀρθή ἐστιν, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ αγε, ἐφεξῆς ὁμοίως ὀρθή ἐστιν. ἐπεὶ δὲ ἡ μὲν αδ, ὑπετέθη μείζων τεταρτημορίου, ἡ δὲ αγ, ἴση, κατὰ τὴν τοῦ ἐναντίου ὑπόθεσιν, ἄρα αἱ δα, αγ, μείζονές εἰσιν ἡμικυκλίου, καὶ κατὰ τὴν ιβ': τῆς δβγ, βάσεως ἐκβληθείσης ἡ ὑπὸ αγε, ἐκτὸς ἐλάττων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αδγ, ἐντός. ἀλλὰ τῇ ὑπὸ αγε, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ αγβ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αγβ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αδγ. καὶ κατὰ τὴν ι: τοῦ παρόντος, ἡ αγ, μείζων ἐστὶ τῆς αβ, ἀλλὰ δὴ καὶ ἐλάττων, ἄτοπον ἄρα. Εἰ δὲ ἡ αβ, ἐλάττων εἴη τεταρτημορίου, πάντως γε ἡ αγ, μείζων ἔσται. ἄλλως γὰρ, οὐκ ἂν αἱ αβ, αγ, ἴσαι εἶεν ἡμικυκλίῳ, καὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ι: ἡ ὑπὸ αβγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αγβ. ἀλλ' αἱ ὑπὸ αβγ, αβδ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ αγβ, αγε, κατὰ τὴν β': τοῦ παρόντος, ἄρα ἡ ὑπὸ αγε, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αβδ. ἐπεὶ δὲ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ἑκατέρα τῶν αδ, αγ, μείζων ἐστὶ τεταρτημορίου, πάντως γε κατὰ τὴν ιβ': τοῦ αὐτοῦ ἡ ὑπὸ αγε, ἐλάττων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αδε, ἀλλὰ τῆς ὑπὸ αγε, ἐλάττων ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβδ, ὡς δέδεικται, ἄρα ἡ ὑπὸ αβδ, πολλῷ ἐλάττων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αδβ, καὶ κατὰ τὴν ι: ἡ αβ, μείζων ἐστὶ τῆς αδ, ἀλλὰ δὴ καὶ ἐλάττων, ἄτοπον ἄρα. ἡ αβ, ἄρα οὐκ ἔστιν ἐλάττων τεταρτημορίου, ἀλλ' οὐδὲ ἴση, ὡς δέδεικται, μείζων ἄρα. ἐπεὶ δὲ αἱ αβ, αγ, ἴσαι ὑπετέθησαν ἡμικυκλίῳ, πάντως γε ἡ αγ, ἐλάττων ἐστίν.

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 28.





Ἔστω τρίτον ἡ αδ, ἐλάττων τεταρτημορίου, ὡς ἐπὶ τοῦ γ': σχήματος. Λέγω ὅτι ἡ μὲν αβ, ἐλάττων ἐστὶ τεταρτημορίου, ἡ δὲ αγ, μείζων. εἰ γὰρ μὴ, πάντως γε ἡ αβ, ἢ ἴση τεταρτημορίῳ ἐστὶν, ἢ μείζων. Ἔστω δὴ πρῶτον ἴση τεταρτημορίῳ, καὶ ἐπεὶ αἱ αβ, αγ, ἴσαι εἰσὶν ἡμικυκλίῳ, δῆλον ὅτι καὶ ἡ αγ, ἴση ἐστὶ τεταρτημορίῳ, καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αβγ, αγβ,

ὀρθή

ὀρθή ἐστι, κατὰ τὴν ιγʹ. τοῦ παρόντος, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ α β δ, ὀρθή ἐστιν. ἀλλ' ἐπεὶ ἡ μὲν α δ, ἐλάττων ἐστὶ τεταρτημορίου, ἡ δὲ α β, ἴση, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, πάντως γε αἱ δ α, α β, ἐλάττονές εἰσιν ἡμικυκλίου, καὶ τῆς β δ, ἐκβληθείσης, ἡ ὑπὸ α δ ε, μείζων ἐστὶ τῆς πρὸς τῷ γ, ἡ τῆς ἴσης ταύτῃ τῆς ὑπὸ α β δ, ἡ δὲ ὑπὸ α β δ, ὀρθή ἐστιν, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ α δ ε, ἀμβλεῖα ἐστιν, ἡ δὲ ὑπὸ α δ β, ὀξεῖα. μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ α β δ, τῆς ὑπὸ α δ β, καὶ ἑπομένως ἡ α δ, μείζων τῆς α β, κατὰ τὴν ιʹ: τοῦ παρόντος, ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, οὐκ ἄρα ἡ α β, ἴση ἐστὶ τεταρτημορίῳ.

Ἔστω δὲ ἡ α β, μείζων τεταρτημορίου, ἡ α γ, ἄρα ἐλάττων ἐστὶ τεταρτημορίου. καὶ κατὰ τὴν ςʹ: τοῦ παρόντος ἡ ὑπὸ α γ β, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ α β γ. ἀλλὰ τῇ ὑπὸ α γ β, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ α β δ, ἄρα ἡ ὑπὸ α β δ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ α β γ. ἐπεὶ δὲ ἑκατέρα τῶν α δ, α γ, ἐλάττων ἐστὶ τεταρτημορίου, ἄρα κατὰ τὴν ιβʹ: τοῦ παρόντος ἡ ὑπὸ α δ ε, ἐκτὸς γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ α γ δ, ἐντὸς, ἡ τῆς ὑπὸ α β δ, τῆς ἴσης τῇ ὑπὸ α γ δ, ὥστε καὶ αἱ α δ, α β, ἐλάττονές εἰσιν ἡμικυκλίου. ἄρα ἡ ὑπὸ α β γ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ α δ β, ἀλλὰ τῆς ὑπὸ α β γ, μείζων δέδεικται ἡ ὑπὸ α β δ, ἡ ὑπὸ α β δ, ἄρα πολλῷ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ α δ β, καὶ κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ςʹ: ἡ α δ, μείζων ἐστὶ τῆς α β, ὅπερ ἄτοπον.

Ἐκ τῶν εἰρημένων τοίνυν εὐχερῶς λύεται καὶ τὸ τῆς ἀπορίας. ὅταν γὰρ γένηται ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ α β δ, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ α δ β. οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς α δ, πρὸς ἄλλο τι, ἐπὶ μὲν τοῦ αʹ: σχήματος ἐφ' ἑκατέρας ἀληθεύει τῆς τε α β, καὶ α γ, ἴσαι γὰρ ὡς δέδεικται. ἐπὶ δὲ τοῦ βʹ: καὶ γʹ: ἐπὶ μόνης τῆς α β, ὅτι καὶ ἡ α β, μείζων ἐστὶ τεταρτημορίου, ἡ γοῦν ἐλάττων, ὥσπερ καὶ ἡ α δ· εἰ δὲ βούλει ἀληθεύειν καὶ ἐπὶ τῆς α γ, ἐπὶ τοῦ βʹ: καὶ γʹ: σχήματος, λάμβανε ἀντὶ τῆς α δ, τὸ παραπλήρωμα τῆς αὐτῆς μέχρι ἡμικυκλίου.

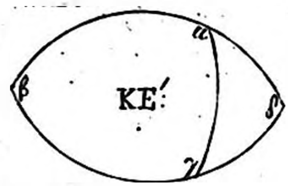
Πρότασις ΚΕʹ:

Ἐὰν σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἑκατέρα τῶν πλευρῶν μείζων ᾖ τεταρτημορίου, καὶ αἱ πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ γωνίαι ἀμβλεῖαι, εὑρεθήσονται αἵ τε πλευραὶ καὶ γωνίαι τοῦ αὐτοῦ τριγώνου, δι' ἑτέρου ὀρθογωνίου τριγώνου.

Ἔστω δὴ τοῦ α β γ, σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου κατὰ τὸ β, ἑκατέρα τῶν α β, β γ, πλευρῶν μείζων τεταρτημορίου. λέγω ὅτι εὑρεθήσονται αἱ τούτου πλευραὶ καὶ γωνίαι δι' ἑτέρου τριγώνου, καὶ τούτου ὀρθογωνίου, οὗ αἱ πλευραὶ ἐλάττονές εἰσι τεταρτημορίου. Ἐξεχθήτωσαν γὰρ αἱ β α, β γ, αὐτοῦ πλευραὶ μέχρι ἡμικυκλίου συμπίπτουσαι ἀλλήλαις κατὰ τὸ δ, καὶ συσταθήσεται πάντως τὸ α δ γ, ὀρθογώνιον κατὰ τὸ δ. οὗ αἱ δ α, δ γ, πλευραὶ ἐλάττονές εἰσι τεταρτημορίου, διὰ τὸ μείζω εἶναι τεταρ-

Trig. Sfer. lib. 2. Fig. 29.

τεταρτημορίου ἑκατέραν τῶν βα, βγ. ἀλλὰ τὸ ἡμίτονον τῆς μὲν δα, ἡμίτονόν ἐστι καὶ τῆς αβ. τὸ δὲ τῆς δγ, καὶ τῆς γβ. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ἡμίτονον τῆς μὲν ὑπὸ δαγ, ἡμίτονόν ἐστι καὶ τῆς ὑπὸ βαγ, ὡς παραπληρώματος, τὸ δὲ τῆς ὑπὸ δγα, καὶ τῆς ὑπὸ αγβ. ἄρα ἐὰν ἀριθμῶσι τὰ ἡμίτονα τῶν τῶ ζητουμένων πλευρῶν καὶ γωνιῶν τῶ αδγ, τριγώνου, κατὰ τὰ ἤδη εἰρημένα, ἀριθμήσονται πάντως καὶ αἱ ζητούμεναι πλευραὶ καὶ γωνίαι τῶ αβγ, τριγώνου, ὡς παραπληρώματα τῶν τῶ [illegible] ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Τέλος τῶ πρώτου βιβλίου τῆς Σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΆΣ

ΜΈΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΒΙΒΛΙΌΝ ΤΡΙΤΟΝ.

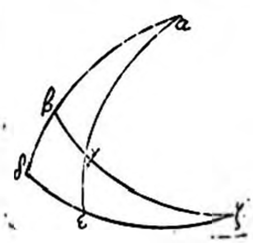
ΠΕΡΙ ΔΙΑΛΥΣΕΩΣ ΣΦΑΙΡΙΚΩ͂Ν ΤΡΙΓΩΝΩΝ.

Πρότασις Α΄.

Παντὸς σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου μιᾶς τῶν παρὰ τὴν ὀρθὴν γωνιῶν δοθείσης, καὶ τῆς προσκειμένης πλευρᾶς πρός τε τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ, καὶ τῇ δοθείσῃ, τὴν λοιπὴν γωνίαν εὑρεῖν.

ΔΟθήτω τοῦ αβγ, σφαιρικοῦ τριγώνου, ὀρθογωνίου κατὰ τὸ β, ἥ τε ὑπὸ αγβ, γωνία, καὶ βγ, πλευρά, καὶ ζητείσθω ἡ πρὸς τῷ α, γωνία. Γενέσθω δὴ ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αγβ, δοθείσης γωνίας, οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς βγ, δοθείσης πλευρᾶς πρὸς ἄλλο τι, καὶ ἔσται τὸ ζητούμενον. Ἐξήχθήτω γὰρ ἑκατέρα τῶν αβ, αγ, κατὰ τὸ συνεχές, ὥστε εἶναι ἑκατέραν τῶν αβδ, αγε, ἴσην τεταρτημορίῳ. καὶ ἀπὸ τοῦ α, σημείου ὡς ἀπὸ πόλου γραφέτω τὸ δεζ, τόξον συμπίπτον τῇ βγ, ἐκβαλλομένῃ κατὰ τὸ ζ. καὶ ἐπεὶ τὰ αδ, αε, τόξα τεταρτημόριά εἰσι κατὰ τὴν κατασκευήν, καὶ διὰ τοῦ α, πόλου τοῦ δεζ, διέρχονται κύκλου, πάντως γε ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αδε, αεζ, ὀρθή ἐστιν. ἀλλὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, ὀρθή ἐστι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα τὰ ζεδ, ζγβ, τόξα τεταρτημόριά εἰσι, καὶ τὸ ζ, σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ αβδ, τόξου· ὥστε τῆς μὲν βγ, πλευρᾶς παραπλήρωμά ἐστι τὸ γζ, τοῦ δὲ δε, τόξου τὸ εζ. ἐπεὶ δὲ τὸ δε, μέτρον ἐστὶ τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας κατὰ τὸν β΄: ὅρον, δῆλον ὅτι τὸ εζ, παραπλήρωμά ἐστι καὶ τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας. ἐγνωσμένης ἄρα τῆς βγ, ἔγνωσται καὶ τὸ γζ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζγε, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ αγβ, κατὰ κορυφήν, ἡ δὲ ὑπὸ γεζ, ὀρθή, ἄρα ἐὰν γένηται, ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς

Trig. Sfer. lib. 3. Fig. 1.



ὑπὸ ζγε, γωνίας, ἤτοι τῆς ὑπὸ αγβ, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς γζ, παραπληρώματος τῆς βγ, πρὸς ἄλλο τι, εὑρεθήσεται τὸ ἡμίτονον τοῦ εζ, παραπληρώματος τοῦ δε, δηλον: τῆς πρὸς τῇ α, γωνίας, κατὰ τὴν ιθ΄: τοῦ παρόντος. οὗ τινος εὑρεθέντος ἐν τοῖς πίναξι τῶν ἡμιτόνων, γνωσθήσεται τὸ δε, τόξον. ἐπεὶ δὲ τοῦτο μεῖζον ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ α, γωνίας, γνωσθήσεται πάντως, καὶ ἡ πρὸς τῷ α, γωνία. ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Η΄ ΠΡΑΞΙΣ.

Ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον
Πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αγβ, δοθείσης γωνίας.
Οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρ: τῆς βγ, δοθείσης πλευρ:
Πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρ: τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας.

ΑΛΛΩΣ.

Δυνατὸν δὲ καὶ οὕτως εἰπεῖν, ὡς ἡ τέμνουσα τῆς βγ, δοθείσης πλευρᾶς, πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αγβ, γωνίας πρὸς ἄλλο τι, καὶ εὑρεθήσεται τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, ὡς καὶ πρότερον. κατὰ γὰρ τὴν θ΄: τοῦ α΄: βιβλ: τοῦ α΄: μέρους τοῦ παρόντος, ὡς ἡ τέμνουσα τῆς βγ, πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ γζ, παραπληρώματος. ὡς δὲ τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ γζ, ἐστὶ καὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ εγζ, ἤτοι τῆς ὑπὸ αγβ, πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ εζ, παραπληρ: τοῦ δε, ἤτοι τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας κατὰ τὴν ιη΄: τοῦ παρόντος. ἄρα ὡς ἡ τέμνουσα τῆς βγ, πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτω τὸ ἡμίτ: τῆς ὑπὸ αγβ, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρ: τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας.

Πρότασις Β΄:

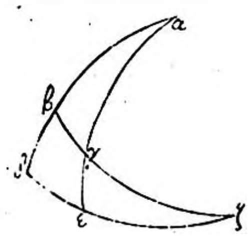
Παντὸς σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου μιᾶς τῶν παρὰ τὴν ὀρθὴν γωνίαν δοθείσης καὶ τῆς ἀπεναντίον πλευρᾶς, τὴν λοιπὴν γωνίαν εὑρεῖν.

Δοθήτω παρὰ τὴν αβγ, ὀρθὴν γωνίαν τοῦ αβγ, τριγώνου γωνία μὲν ἡ πρὸς τῷ α, πλευρὰ δὲ ἡ βγ, καὶ ζητείσθω ἡ ὑπὸ αγβ. Γενέσθω δὴ ὡς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς βγ, δοθείσης πλευρᾶς πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας πρὸς ἄλλο τι, καὶ τὸ εὑρεθὲν ἔσται ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αγβ, γωνίας. Τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, τὸ γεζ, τρίγωνον ὀρθογώνιόν ἐστι κατὰ τὸ ε, διὰ τὸ εἶναι τεταρτημόρια τὰ αδ, αε, τόξα. καὶ κατὰ τὴν ιη΄: τοῦ παρόντος ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς γζ, βάσεως πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ γεζ, γωνίας, οὕτως ἐστὶ τὸ ἡμίτονον τῆς εζ, πλευρᾶς πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ εγζ. ἔστι δὲ ἡ μὲν γζ, βάσις παραπλήρωμα τῆς βγ, δοθείσης, τὸ δὲ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ γε ὁλικόν ἐστιν ἡμίτονον, ἡ δὲ

εζ,

ιζ, πλευρὰ παραπλήρωμά ἐστι τοῦ δε, τόξου, μείζονος ὄντος τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, καὶ ἡ ὑπὸ εγζ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βγα, κατὰ κορυφήν. ἐὰν ἄρα γένηται, ὡς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρ: τῆς βγ, πλευρᾶς, ὡς εἴρηται, πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας πρὸς ἄλλο τι, εὑρεθήσεται τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αγβ, γωνίας, ὅπερ ἐν τοῖς πίναξι τῶν ἡμιτόνων παρίστησι τὴν ὑπὸ αγβ, γωνίαν. Δεῖ δὲ ἢ τῆς ζητουμένης γωνίας τὸ εἶδος ἐγνωσμένον εἶναι. τὸ γὰρ ἡμίτονον τῆς ὀξείας γωνίας ἡμίτονόν ἐστι καὶ τῆς ἀμβλείας, ὡς παραπλήρωμα οὔσης πρὸς δύο ὀρθάς, κατὰ τὸν ιγ': ὅρον τοῦ α: τοῦ α: μέρους. ἢ ἐγνωσμένον εἶναι τὸ εἶδος τῆς αβ· εἰ μὲν γὰρ ἡ αβ, τεταρτημόριον ᾖ, πάντως γε καὶ ἡ αγ, τεταρτημόριόν ἐστι κατὰ τὸ α: πόρισμα τῆς κβ': τοῦ παρόντος, καὶ ἡ ὑπὸ αγβ, γωνία ὀρθή· εἰ δὲ ἐλάττων τεταρτημορίου ᾖ ἡ αβ, ἡ ὑπὸ αγβ, γωνία ὀξεῖα ἔσται. Εἰ δὲ πλευραῖον ἡ αβ, μείζων εἴη τεταρτημορίου, ἡ ὑπὸ αγβ, ἀμβλεῖα ἔσται. Τὰ αὐτὰ συμβαίνει κἂν ἡ αγ, γνωσθῇ, ὥστε ἐγνωσμένου τοῦ εἴδους τῆς ὑπὸ αγβ, γωνίας, ἢ τῆς αβ, πλευρᾶς, ἢ τῆς αγ, βάσεως, ἀμφιβολία ἐπὶ τῆς πράξεως οὐκ ἔσται. εἰ δὲ μή, τὸ εὑρεθὲν ἡμίτονον ἀντὶ τοῦ τετάρτου ὅρου οὐκ ἔσται παραστατικὸν ὡρισμένου τινός, δύναται γὰρ καὶ ἀντὶ τῆς ὀξείας, καὶ ἀντὶ τῆς ἀμβλείας λαμβάνεσθαι.

Trig. Sfer. lib. 3. Fig. 2.



ΑΛΛΩΣ.

Γενέσθω καὶ οὕτω, ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνουσαν τῆς βγ, δοθείσης πλευρᾶς, οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρ: τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας πρὸς ἄλλο τι, καὶ εὑρεθήσεται τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αγβ, ζητουμένης γωνίας. κατὰ γὰρ τὴν θ': τοῦ α: βιβλίου τοῦ α: μέρους τοῦ παρόντος ὡς τὸ ἡμίτονον τοῦ γζ, παραπλ: πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνουσαν τῆς βγ, πλευρᾶς. ἀλλ' ὡς τὸ ἡμίτονον τοῦ γζ, πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, δέδεικται εἶναι καὶ τὸ ἡμίτονον τοῦ εζ, παραπληρ: πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, ἄρα κατὰ τὴν ια': τοῦ ε: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἔσται καὶ ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνουσαν, οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρ: τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αγβ, γωνίας.

ΠΡΑΞΙΣ Α':

Ὡς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς βγ, πλευρ:
Πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον,
Οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας
Πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αγβ, γωνίας.

Π Ρ Α Ξ Ι Σ Β':

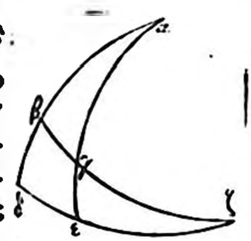
Ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον
Πρὸς τὴν τέμνουσαν τῆς βγ, πλευρᾶς.
Οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας.
Πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αγβ, γωνίας.

Πρότασις Γ':

Βάσεως σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου δοθείσης, καὶ μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, εὑρεῖν τὴν γωνίαν ὑφ' ἧς ἡ δοθεῖσα ὑποτείνει πλευρά.

Δοθέντος τοῦ αβγ, σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου κατὰ τὸ β, ἧς ἡ αγ, βάσις, ἡ βγ, πλευρά, καὶ ζητείσθω ἡ πρὸς τῷ α, γωνία. Γενέσθω δὴ ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς αγ, βάσεως πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς βγ, πλευρᾶς πρὸς ἄλλο τι, καὶ ἔσται τὸ ζητούμενον. κατὰ γὰρ τὴν ιε: τοῦ παρόντος, ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς αγ, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αβγ, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς βγ, πλευρᾶς πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ α, ζητουμένης γωνίας. ἀλλὰ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αβγ, ὀρθῆς γωνίας ὁλικόν ἐστιν ἡμίτονον, ἄρα ἐὰν γένηται ὡς προσημειώθη, ὑγιὴς ἔσται ἡ πρᾶξις.

Trig.Sfer.lib.3.Fig.3.

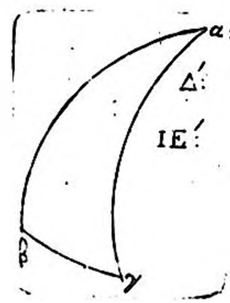


Α Λ Λ Ω Σ.

Ἢ νῦν γενέσθω, ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνουσαν τοῦ παραπληρώματος τῆς αγ, βάσεως, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς βγ, πρὸς ἄλλο τι, κἀκεῖνο ἔσται ἡμίτονον τῆς ζητουμένης γωνίας. ἐπεὶ γὰρ τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον μέσον ἐστὶν ἀνάλογον τοῦ ἡμιτόνου τῆς αγ, βάσεως, καὶ τεμνούσης τοῦ παραπληρώματος τῆς αὐτῆς, κατὰ τὴν θ': τοῦ πρώτου βιβλίου τοῦ α': μέρους τοῦ παρόντος, πάντως γε ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς αγ, πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτως ἐστὶ τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνουσαν τοῦ παραπληρώματος τῆς αγ. ἀλλ' ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς αγ, πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον ἔχει καὶ τὸ ἡμίτονον τῆς βγ, πλευρᾶς πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, ἄρα καὶ ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνουσαν τοῦ παραπληρώματος τῆς αγ, οὕτω τὸ ἡμίτ: τῆς βγ, πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, κατὰ τὴν ια: τοῦ ε: τῶν Στοιχείων. εὑρεθέντος δὲ τοῦ ἡμιτόνου τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, εὐχερῶς εὑρίσκεται καὶ ἡ πρὸς τῷ α, γωνία ἐν τοῖς πίναξι τῶν ἡμιτόνων κατὰ τὰ προειρημένα.

ΠΡΑ'ΞΙΣ Α':

Ὡς τὸ ἡμίτ: τῆς αγ:
Πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον.
Οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς βγ:
Πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῇ α, γωνίας.



ΠΡΑ'ΞΙΣ Β':

Ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον,
Πρὸς τὴν ἡμίσειαν τοῦ παραπλ: τῆς αγ:
Οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς βγ:
Πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῇ α, γωνίας.

Πρότασις Δ':

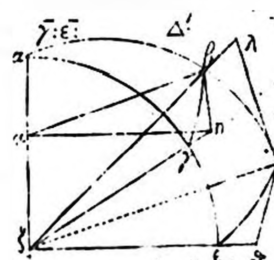
Τῶν πλευρῶν δοθεισῶν σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, τὰς παρὰ τὴν ὀρθὴν αὐτοῦ γωνίας εὑρεῖν.

Δοθήτωσαν τοῦ αβγ, σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου κατὰ τὸ β, αἱ αβ, βγ, πλευραὶ, καὶ ζητηθήτω ἡ ὑπὸ βαγ, γωνία. Γενέσθω δὴ ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς αβ, πλευρᾶς πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς βγ, πλευρᾶς πρὸς ἄλλο τι, καὶ ἔσαι τὸ ζητούμενον. κατὰ γὰρ τὴν ιθ': τοῦ α: τοῦ παρόντος, ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς αβ, πλευρᾶς, οὕτως ἐςὶν ἡ ἀπτομένη τῆς ὑπὸ βαγ, γωνίας πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς βγ, πλευρᾶς. ὥςε καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς αβ, πλευρᾶς πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς βγ, πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς ὑπὸ βαγ, γωνίας. εὑρεθείσης δὲ τῆς ἀπτομένης τῆς ὑπὸ βαγ, γωνίας, γνωσθήσεται πάντως καὶ ἡ ταύτης γωνία.

Ζητηθήτω β': ἡ πρὸς τῇ γ, γωνία. εἰς εὕρεσιν οὖν καὶ ταύτης γενέσθω ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς βγ, πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς αβ, πλευρᾶς πρὸς ἄλλο τι, κἀκεῖνο ἔσαι ἡ ἀπτομένη τῆς ὑπὸ βγα, γωνίας, ἡ δεῖξις ἡ αὐτή.

Trig. Sfer. lib. 3. Fig. 4.

ΑΛΛΩΣ.

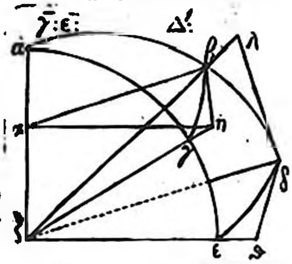


Γενέσθω ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἡμίσειαν τοῦ παραπληρώματος τῆς αβ, πλευρᾶς, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς βγ, πλευρᾶς πρὸς ἄλλο τι, καὶ εὑρεθήσεται ἡ ἀπτομένη τῆς ὑπὸ βαγ, γωνίας. Ἐξαχθήτωσαν γὰρ αἱ αβ, αγ, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπὶ τὰ δ καὶ ε, σημεῖα, ὥςε τὰ αδ, αε, τόξα τεταρτημόρια εἶναι. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ζα, ζβ, ζδ, ζε, ἡμιδιάμετροι ἀπὸ τοῦ ζ, κέντρου τῆς σφαίρας ἀρχόμεναι. καὶ συςαθήτωσαν κάθετοι ἐπὶ μὲν τῆς ζβ, ἡ βη, συμπίπτουσα τῇ ζγ,

ὑπο-

Trig. Sfer. lib. 3. Fig 5.

γ: ε: Δ:



ἐκβαλλομένη κατὰ τὸ η, ἐπὶ δὲ τῆς ζ δ, ἡ τε δ θ, συμπίπτουσα τῇ ζ ε, ἐκβαλλομένη κατὰ τὸ θ, καὶ δ λ, συμπίπτουσα τῇ ζ β, ἐκβαλλομένη κατὰ τὸ λ. ἀπὸ δὲ τοῦ β, παράλληλος τῇ ζ δ, ἤχθω ἡ β κ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κ η. καὶ ἐπεὶ ἡ κ β, παράλληλος ἦκται τῇ ζ δ, πάντως γε ἡ ὑπὸ κ β ζ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ β ζ δ, ἐναλλάξ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ β κ ζ, ἴση τῇ ὑπὸ ζ δ λ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ κ ζ β, λοιπῇ τῇ ὑπὸ ζ λ δ, ἴση ἐστίν. ὥστε τὰ κ β ζ, ζ λ δ, τρίγωνα ἰσογώνιά ἐστιν, ἄρα ὡς ἡ κ β, πρὸς τὴν β ζ, οὕτως ἡ δ ζ, πρὸς τὴν ζ λ, ἀλλ' ἡ μὲν κ β, ὀρθόν ἐστιν ἡμίτονον τῆς α β, ἡ δὲ β ζ, ὁλικὸν ἡμίτονον, ὥσπερ καὶ ἡ ζ δ, ἡ δὲ ζ λ, τέμνουσά ἐστι τοῦ β δ, παραπληρώματος τῆς α β, πλευρᾶς κατὰ τὸν ι θ': ὅρον τοῦ α': τοῦ α': μέρους, ἄρα ὡς τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον τῆς α β, πλευρᾶς πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνουσαν τοῦ παραπληρώματος τῆς α β, ἀλλ' ὡς τὸ ὀρθὸν ἡμίτονον τῆς α β, πλευρᾶς πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, ἔστι καὶ ἡ ἀπτομένη τῆς β γ, πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς ὑπὸ β α γ, γωνίας, κατὰ τὸ α': πόρισμα τῆς ι θ': τοῦ α': τοῦ παρόντος, ἄρα καὶ ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνουσαν τοῦ παραπληρώματος τῆς α β, γωνίας, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς β γ, πλευρᾶς πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς ὑπὸ β α γ, γωνίας, ἥτις εὑρεθεῖσα ἐν τοῖς πίναξι τῶν ἡμιτόνων ἀπτομένων τε, καὶ τεμνουσῶν δείξει σοι πόσων ἂν εἴη μοιρῶν ἡ ὑπὸ β α γ, γωνία. Τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρεθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ α γ β, γωνία. τῶν πλευρῶν ἄρα δοθεισῶν σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εὕρηνται αἱ τούτου γωνίαι.

ΠΡΑΞΙΣ Α':

Ὡς τὸ ἡμίτ: τῆς α β, πλευρᾶς
Πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον.
Οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς β γ, πλευρᾶς
Πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς ὑπὸ β α γ, γωνίας.

ΠΡΑΞΙΣ Β':

Ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον,
Πρὸς τὴν τέμνουσαν τοῦ παραπλ: τῆς α β, πλευρ:
Οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς β γ, πλευρᾶς.
Πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς ὑπὸ β α γ, γωνίας.

Πρότασις Ε':

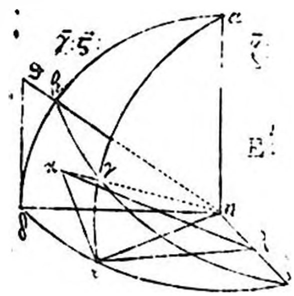
Βάσεως δοθείσης καὶ μιᾶς πλευρᾶς σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν εὑρεῖν.

Δοθήτω τοῦ α β γ, σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου κατὰ τὸ β, ἡ τε α γ, βάσις,

καὶ

καὶ α β, πλευρά. καὶ ζητηθήτω ἡ ὑπὸ β α γ, γωνία ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη. Γενέσθω δὴ ὡς ἡ ἀπτομένη τοῦ παραπληρώματος τῆς α β, πλευρᾶς πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτως ἡ ἀπτομένη τοῦ παραπληρώματος τῆς α γ, βάσεως πρὸς ἄλλο τι, κἀκεῖνο ἔσαι ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς ζητουμένης γωνίας, ἤτοι τῆς ὑπὸ β α γ. οὗτινος εὑρεθέντος ἐν τοῖς πίναξι τῶν ἡμιτόνων, γνωσθήσεται τὸ παραπλήρωμα τῆς ὑπὸ β α γ, γωνίας, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τῆς ὀρθῆς δώσει σοι τὴν ζητουμένην γωνίαν. Ἐξαχθήτωσαν γὰρ κατὰ τὸ συνεχὲς αἱ α β, α γ, ἄχρις ἂν γένηται ἑκατέρα ἴση τεταρτημορίῳ· καὶ ἔσωσαν αὗται αἱ α β δ, α γ ε. Ἐξαχθήτω ἔτι καὶ ἡ β γ, πλευρὰ ἐπὶ τὸ ζ, ὥστε καὶ τὸ β γ ζ, τόξον ἴσον εἶναι τεταρτημορίῳ, καὶ διὰ τῶν δ ε ζ, γραφήτω τὸ δ ε ζ, τόξον· εἶτα ἀπὸ τοῦ η, κέντρου τῆς σφαίρας ἀχθήτωσαν αἱ η α, η β, η γ, η δ, η ε, η ζ, εὐθεῖαι. ἀπὸ δὲ τοῦ δ, σημείου ἀνεσάθω κάθετος ἐπὶ τῆς δ η, ἡ δ θ, συμπίπτουσα τῇ η β, ἐκβαλομένῃ κατὰ τὸ θ, ἀπὸ δὲ τοῦ ε, ὁμοίως ἀνεσάθω μὲν κάθετος ἐπὶ τῆς η ε, ἡ ε κ, συμπίπτουσα τῇ η γ, ἐκβαλομένῃ καὶ αὐτῇ κατὰ τὸ κ. πιπτέτω δὲ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν η ζ, ἡ ε λ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ λ κ. Δείκνυται. Ἐπεὶ τὸ α β δ, τεταρτημόριόν ἐστι, πάντως γε διὰ τοῦ πόλου τοῦ δ ε ζ, τόξου διέρχεται, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸ τέμνει, κατὰ τὴν ιβ': τοῦ α': τῶν Σφαιρικῶν. ἡ δὲ η δ, κοινή ἐστι τομὴ τούτων α β δ, καὶ δ ε ζ, ἀλλ' ἡ δ θ, πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἐπὶ τῆς δ η, κατὰ τὴν κατασκευὴν, ἄρα, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ': τοῦ γ': τοῦ Στοιχειωτοῦ, ἡ δ θ, ἅπτεται τοῦ β δ, τόξου. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἡ ε κ, ἅπτεται τοῦ γ ε, τόξου. Αὖθις ἐπεὶ ἡ η β θ, κοινή ἐστι τομὴ τούτων α β δ, καὶ β γ ζ, πάντως γε ἐν τῷ τοῦ β γ ζ, ἐπιπέδῳ ἐστὶν, ἔστι δὲ καὶ ἡ η ζ, ἐν τῷ τοῦ β γ ζ, ἐπιπέδῳ, ὥσπερ καὶ ἡ η γ κ, ἄρα καὶ ἡ κ λ, ἐν τῷ τοῦ β γ ζ, ἐπιπέδῳ ἐστὶν, κατὰ τὴν α': τοῦ α': τῶν Στερεῶν. ἀλλ' ἑκατέρα τῶν η θ, λ κ, πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἐπὶ τῆς η ζ, ὡς δεδείχαμεν, ἄρα παράλληλοί εἰσι κατὰ τὴν ϛ': τοῦ αὐτοῦ. ἐπεὶ δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν δ η, ε λ, παράλληλοί εἰσι διὰ τὰ αὐτὰ, πάντως γε κατὰ τὴν ι': τοῦ αὐτοῦ αἱ ὑπὸ δ η θ, ε λ κ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶν. ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ θ δ η, κ ε λ, ἴσαι εἰσὶν, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ἄρα τὰ θ δ η, κ ε λ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσι, καὶ κατὰ τὴν δ': τοῦ ϛ': τοῦ Στοιχ: ὡς ἡ θ δ, πρὸς τὴν δ η, οὕτως ἐστὶν ἡ κ ε, πρὸς τὴν ε λ. ἀλλ' ἡ μὲν θ δ, ἀπτομένη ἐστὶ τοῦ β δ, παραπληρώματος τῆς α β, πλευρᾶς, ἡ δὲ δ η, ὁλικὸν ἡμίτονον, ἡ δὲ κ ε, ἀπτομένη τοῦ γ ε, παρα-

Trig. Sfer. lib. 3. Fig. 6.



πλη-

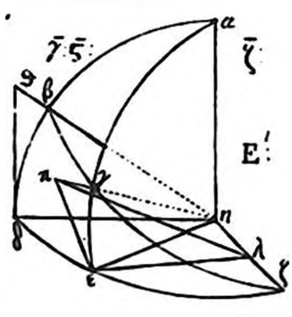
πληρώματος τῆς αγ, βάσεως, ὡς δέδεικται, καὶ ἡ ελ, ὀρθὸν ἡμίτονον, τοῦ εζ, παραπληρώματος τῆς δε, ἤτοι τῆς πρὸς τῇ α, γωνίας, μέτρον γὰρ τὸ δε, τόξον τῆς αὐτῆς γωνίας, ἄρα ἐὰν γένηται ὡς ἡ ἀποτομένη τοῦ παραπληρώματος τῆς αβ, πλευρᾶς πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτως ἡ ἀποτομένη τοῦ παραπληρώματος τῆς αγ, βάσεως πρὸς ἄλλο τι, εὑρεθήσεται, ὡς εἴρηται, τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῇ α, ζητουμένης γωνίας, καὶ δι' αὐτοῦ γνωσθήσεται καὶ ἡ γωνία.

Ὅτι δὲ ἑκατέρα τῶν ηθ, λκ, ὀρθή ἐστιν ἐπὶ τῆς ηζ, δῆλον. ἡ μὲν γὰρ ηθ, κοινή ἐστι τομὴ τούτων βγζ, καὶ αβδ, τόξων. ἐπεὶ δὲ τὸ βγ, τόξον ὀρθόν ἐστιν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ αβδ, πάντως γε καὶ ἡ ζη, ὀρθή ἐστιν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ αβδ, ὥστε ὀρθή ἐστι καὶ πρὸς τὴν ηθ, κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ ιά: τῶν Στερεῶν. ἐπεὶ δὲ ἡ λκ, ἐν τῷ αὐτῷ ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ καὶ ἡ ελ, διὰ τὴν έ: τοῦ αὐτοῦ, ἐπὶ δὲ τῆς ελ, ὀρθή ἐστιν ἡ ζη, ἄρα ἡ ζη, ὀρθή ἐστι καὶ ἐπὶ τῆς λκ, ὥστε καὶ ἀνάπαλιν ἡ λκ, ὀρθή ἐστιν ἐπὶ τῆς ζη, ἔστι δὲ καὶ ἡ δη, ὀρθὴ ἐπὶ τῆς ζη, διὰ τὸ τεταρτημόριον εἶναι τὸ δεζ, δέδεικται δὲ καὶ ἡ ηθ, ὀρθὴ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ζη, ἑκατέρα ἄρα τῶν ηθ, λκ, ὀρθή ἐστιν ἐπὶ τῆς ζη.

ΑΛΛΩΣ.

Γενέσθω ἔτι ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀποτομένην τῆς αβ, πλευρᾶς, οὕτως ἡ ἀποτομένη τοῦ γε, παραπληρώματος τῆς αγ, πλευρᾶς πρὸς ἄλλο τι, καὶ εὑρεθήσεται ὁμοίως τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῇ α, γωνίας. μέτρον γάρ ἐστιν ὡς εἴρηται τὸ δε, τόξον τῆς πρὸς τῇ α, γωνίας. κατὰ γὰρ τὴν ί: τοῦ ά: βιβλ: τοῦ ά: τμήματος τοῦ παρόντος, ὡς ἡ ἀποτομένη τοῦ δβ, παραπληρώματος τῆς αβ, πλευρᾶς πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτως ἐστὶ τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀποτομένην τῆς αβ, πλευρᾶς. ἀλλ' ὡς ἡ ἀποτομένη τοῦ δβ, παραπληρώματος τῆς αβ, πλευρᾶς πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον ἐστὶ καὶ ἡ ἀποτομένη τοῦ γε, παραπληρώματος τῆς αγ, βάσεως πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ εζ, παραπληρώματος τῆς πρὸς τῇ α, γωνίας, ἄρα κατὰ τὴν ιά: τοῦ έ: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀποτομένην τῆς αβ, πλευρᾶς, οὕτως ἡ ἀποτομένη τοῦ παραπληρώματος τῆς αγ, βάσεως πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῇ α, γωνίας.

Trig. Sfer. lib. 3. Fig. 7.



ΠΡΑ'.

ΠΡΑΞΙΣ Α':

Ὡς ἡ ἀπτομένη τοῦ παραπληρώματος τῆς α β, πλευρᾶς
Πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον
Οὕτως ἡ ἀπτομένη τοῦ παραπληρώματος τῆς α γ, βάσεως.
Πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῇ α, γωνίας.

ΠΡΑΞΙΣ Β':

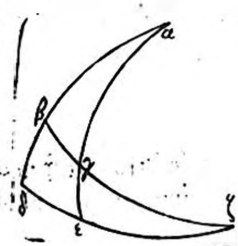
Ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον
Πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς α β, πλευρᾶς.
Οὕτως ἡ ἀπτομένη τοῦ παραπληρώματος τῆς α γ, βάσεως.
Πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῇ α, γωνίας.

Πρότασις ς':

Βάσεως καὶ μιᾶς γωνίας, τῆς παρὰ τὴν ὀρθὴν, δοθείσης σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, τὴν λοιπὴν γωνίαν εὑρεῖν.

Ἔστω τρίγωνον σφαιρικὸν τὸ α β γ, ὀρθογώνιον κατὰ τὸ β, καὶ δοθείσης τῆς τε α γ, βάσεως, καὶ ὑπὸ α γ β, γωνίας, ζητείσθω ἡ πρὸς τῇ α, γωνία. Γενέσθω δὴ ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς α γ, δοθείσης βάσεως, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς ὑπὸ α γ β, δοθείσης γωνίας πρὸς ἄλλο τι, καὶ τὸ εὑρεθὲν ἔσται ἡ ἀπτομένη τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῇ α, γωνίας. Ἀναπεπληρώσθωσαν γὰρ τά τε α β δ, α γ ε, παραπληρώματα, καὶ τὰ β γ ζ, δ ε ζ. καὶ ἐπεὶ τὸ γ ε ζ, ὀρθογώνιόν ἐστι κατὰ τὸ ε, πάντως γε κατὰ τὴν ε θ': τοῦ β': τοῦ παρόντος, ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς γ ε, πλευρᾶς, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς ὑπὸ ε γ ζ, γωνίας πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς ε ζ, ὑποτεινούσης τῆς αὐτῆς ὑπὸ ε γ ζ, γωνίας. ἀλλ' ἡ μὲν γ ε, παραπλήρωμά ἐστι τῆς α γ, δοθείσης βάσεως, ἡ δὲ ὑπὸ ε γ ζ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ β γ α, κατὰ κορυφὴν, καὶ ἡ ε ζ, παραπλήρωμα ὁμοίως ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ α, γωνίας, διὰ τὸ μέτρον εἶναι τῆς αὐτῆς γωνίας τὸ δ ε, τόξον, οὗ παραπλήρωμά ἐστι τὸ ε ζ. ἄρα ἐὰν γένηται ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς α γ, δοθείσης βάσεως, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς ὑπὸ α γ β, γωνίας πρὸς ἄλλο τι, γνωσθήσεται ἡ ἀπτομένη τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῇ α, γωνίας, ὡς προείρηται. ταύτης δὲ εὑρεθείσης ἐν τοῖς πίναξι τῶν ἡμιτόνων ἀπτομένων τε καὶ τεμνουσῶν, γνωσθήσεται καὶ ἡ πρὸς τῇ α, γωνία, κατὰ τὰ ἐκεῖ εἰρημένα. ὅπερ ἔδει τὸ ζητούμενον.

Trig. Sfer. lib. 3. Fig. 8.



ΠΡΑ͂ΞΙΣ.

Ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον
Πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώμ: τῆς αγ, βάσεως,
Οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς ὑπὸ αγβ, γωνίας
Πρὸς τὴν ἀπτομένην τοῦ παραπληρώμ: τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας.

Ἐπὶ τῆς παρούσης προτάσεως οὐδεμία ἀμφιβολία ἐστὶ, κατὰ γὰρ τὸ β': πόρισμα τῆς κβ': τοῦ α: τοῦ παρόντος, ἐγνωσμένης τῆς αγ, γινώσκονται καὶ αἱ ὑπὸ βαγ, βγα, γωνίαι ποῖαι τινὲς εἰσὶν, ἐγνωσμένης δὲ καὶ τῆς ὑπὸ βγα, γινώσκεται καὶ ἡ ὑπὸ βαγ.

Πρότασις Ζ':

Βάσεως δοθείσης καὶ μιᾶς γωνίας τῶν παρὰ τὴν ὀρθὴν σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, τὴν ὑποτείνουσαν τῆς δοθείσης γωνίας εὑρεῖν.

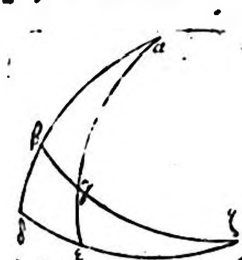
Δοθήτω τοῦ αβγ, σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ αγ, βάσις, καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, γωνία, καὶ ζητείσθω ἡ βγ, πλευρά. Γενέσθω δὴ ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ α, δοθείσης γωνίας, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς αγ, βάσεως πρὸς ἄλλο τι, καὶ ἔσται τὸ ζητούμενον. καὶ γὰρ τὴν ιη: τοῦ α: τοῦ παρόντος τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον πρὸς τὰ ἡμίτονα τῶν πλευρῶν.

Πρότασις Η':

Βάσεως δοθείσης σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, καὶ μιᾶς πλευρᾶς, τὴν λοιπὴν εὑρεῖν πλευράν.

Δοθήτω τοῦ αβγ, σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ αγ, βάσις, καὶ βγ, πλευρὰ, καὶ ζητείσθω ἡ αβ. Γενέσθω δὴ ὡς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώμ: τῆς βγ, πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτ: οὕτω τὸ ἡμίτ: τοῦ παραπληρώμ: τῆς αγ, βάσεως πρὸς ἄλλο τι, καὶ γνωσθήσεται τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς αβ. Ἀποπληρωθέντος γὰρ τοῦ σχήματος ὡς προειρημένως, ἔσται διὰ τὴν ιη: τοῦ α: τοῦ παρόντος ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς γζ, πλευρᾶς τοῦ γεζ, σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου κατὰ τὸ ε, πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς γε, πλευ-

Trig. Sfer. lib. 3. Fig. 9.



ρᾶς

ρᾶς τῦ αὐτῦ πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ ζ, γωνίας. ἀλλ' ἡ μὲν γζ, βάσις παραπλήρωμά ἐστι τῆς βγ, δοθείσης, ἡ δὲ γε, παραπλήρωμα τῆς αγ, καὶ τῆς πρὸς τῷ ζ, γωνίας μεῖζον ἐστὶν ἡ βδ. ἄρα ἐὰν γένηται ὡς τὸ ἡμίτονον τῦ παραπληρώματος τῆς βγ, πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῦ παραπληρώματος τῆς αγ, δοθείσης βάσεως πρὸς ἄλλο τι, γνωθήσεται τὸ ἡμίτονον τῆς βδ. αὕτη δ' ἐστὶ παραπλήρωμα τῆς αβ, ζητουμένης, γνωθήσεται ἄρα τὸ ἡμίτονον τῦ παραπληρώματος τῆς αβ, ὅ τινος εὑρεθέντος ἐν τοῖς πίναξι τῶν ἡμιτόνων ἀπτομένων τε καὶ τεμνουσῶν, γνωθήσεται ἡ αβ.

Α'ΛΛΩΣ.

Γενέσθω ἔτι ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνουσαν τῆς βγ, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῦ παραπληρώματος τῆς αγ, δοθείσης βάσεως πρὸς ἄλλο τι, καὶ γνωθήσεται τὸ ἡμίτονον τῦ παραπληρώματος τῆς αβ, ζητουμένης πλευρᾶς, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω πράξεως. κατὰ γὰρ τὴν θ': τῦ α': βιβλίου τῦ α': μέρους τῦ παρόντος, ὡς τὸ ἡμίτονον τῦ γζ, παραπληρώματος τῆς βγ, πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνουσαν τῆς βγ, πλευρᾶς. ἀλλ' ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς γζ, πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτως ἐστὶ καὶ τὸ ἡμίτονον τῦ γε, παραπληρώματος τῆς αγ, βάσεως πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς βδ, παραπληρώματος τῆς αβ, ζητουμένης, ἄρα κατὰ τὴν ια: τῦ ε': τῦ Στοιχειωτῦ, καὶ ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνουσαν τῆς βγ, δοθείσης πλευρᾶς, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῦ γε, παραπληρώματος τῆς αγ, δοθείσης βάσεως πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς βδ, παραπληρώματος δηλον: τῆς αβ, ζητουμένης. ὅπερ ἔδει τὸ προσαχθὲν.

ΠΡΑ'ΞΙΣ Α':

Ω'ς τὸ ἡμίτονον τῦ παραπληρώματος τῆς βγ, πλευρᾶς,
Πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον,
Οὕτω τὸ ἡμίτονον τῦ παραπληρώματος τῆς αγ, βάσεως,
Πρὸς τὸ ἡμίτονον τῦ παραπληρώματος τῆς αβ, πλευρᾶς.

ΠΡΑ'ΞΙΣ Β':

Ω'ς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον
Πρὸς τὴν τέμνουσαν τῆς βγ, πλευρᾶς,
Οὕτω τὸ ἡμίτονον τῦ παραπληρώματος τῆς αγ, βάσεως.
Πρὸς τὸ ἡμίτονον τῦ παραπληρώματος τῆς αβ, πλευρᾶς.

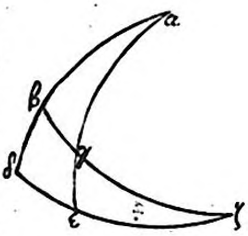
Ε'πὶ τῦ παρόντος ἀμφιβολία ὐκ ἔστιν. ἐγνωσμένης γὰρ τῆς αγ, βάσεως γινώσκονται καὶ αἱ πλευραὶ, ἐάν τε μείζυς, ἐάν τε ἐλάττυς τεταρτημορίυ ὦσι, καὶ ἑπομένως γινώσκονται καὶ αἱ γωνίαι ὁποίυ εἴδυς εἰσὶ, κατὰ τὴν κβ': τῦ α': τῦ παρόντος.

Πρότασις Θ':

Τῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου δεδομένων, τὰς περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν εὑρεῖν πλευράς.

Δοθήτωσαν αἱ γωνίαι τοῦ αβγ, σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου κατὰ τὸ β, ἡ ζητηθήτω ἡ βγ, πλευρά. Γενέσθω δὴ ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αγβ, γωνίας προσκειμένης τῇ βγ, ζητουμένῃ πλευρᾷ πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας πρὸς ἄλλο τι, καὶ γνωσθήσεται τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπλ: τῆς βγ, πλευρᾶς. κατὰ γὰρ τὴν ά: τοῦ παρόντος, ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αγβ, γωνίας, οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς βγ, πλευρᾶς πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, ὥστε καὶ ἀνάπαλιν, ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αγβ, γωνίας πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς βγ, πλευρᾶς. οὗτινος εὑρεθέντος ἐν τοῖς πίναξι τῶν ἡμιτόνων ἀπτομένων τε καὶ τεμνουσῶν, γνωσθήσεται ἡ βγ, ζητουμένη πλευρά.

Trig. Sfer. lib. 3. Fig. 10.



Ἄ Λ Λ Ω Σ.

Γενέσθω ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνουσαν τοῦ παραπληρώματος τῆς ὑπὸ αγβ, γωνίας, οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς ὑπὸ βαγ, γωνίας πρὸς ἄλλο τι, καὶ γνωσθήσεται τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς βγ, πλευρᾶς. κατὰ γὰρ τὴν ῥηθεῖσαν ιθ: ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αγβ, γωνίας πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνουσαν τοῦ παραπληρώματος τῆς αὐτῆς, ἃ γὰρ εἴρηται ἐν τῇ ῥηθείσῃ προτάσει περὶ τῶν τόξων, καὶ περὶ τῶν γωνιῶν ἀληθεύει λεγόμενα, ἀλλ' ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ αγβ, γωνίας πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, δέδεικται εἶναι καὶ τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς βγ, πλευρᾶς, ἄρα κατὰ τὴν ιά: τοῦ έ: Στοιχειωτοῦ, καὶ ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνουσαν τῆς ὑπὸ αγβ, γωνίας, οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς βγ, πλευρᾶς.

ΠΡΑΞΙΣ Α'.

Ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ α γ β, γωνίας.
Πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον.
Οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας.
Πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς β γ, πλευρᾶς

ΠΡΑΞΙΣ Β'.

Ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον.
Πρὸς τὴν τέμνουσαν τοῦ παραπληρώματος τῆς ὑπὸ α γ β, γωνίας.
Οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας.
Πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς β γ, πλευρᾶς.

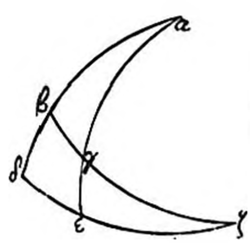
Σημειωτέον δὲ, ὅτι οὐδὲ ἐνταῦθα ἀμφιβολία τίς ἐστι. κατὰ γὰρ τὴν κβ': τοῦ α': τοῦ παρόντος ἐγνωσμένων τῶν γωνιῶν, γινώσκονται καὶ αἱ πλευραὶ ὁποῖαι εἴδους εἰσί.

Πρότασις Ι'.

Πλευρᾶς δοθείσης καὶ τῆς προσκειμένης αὐτῇ τῶν παρὰ τὴν ὀρθὴν γωνιῶν σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, τὴν ἀπεναντίον τῆς δοθείσης γωνίας πλευρὰν εὑρεῖν.

Δεδόσθω τοῦ α β γ, σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου κατὰ τὸ β, ἥτε α β, πλευρὰ καὶ ἡ προσκειμένη ταύτῃ γωνία, ἡ πρὸς τῷ α, καὶ ζητείσθω ἡ β γ, ἀπεναντίον πλευρά. Γενέσθω δὴ ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς πρὸς τῷ α, δοθείσης γωνίας, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς α β, δοθείσης πλευρᾶς πρὸς ἄλλο τι, καὶ γνωσθήσεται ἡ ἀπτομένη τῆς β γ, ζητουμένης πλευρᾶς. κατὰ γὰρ τὴν ιθ': τοῦ α': τοῦ παρόντος, ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς α β, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς β γ, πλευρᾶς, ὥστε καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς πρὸς τῷ α: γωνίας, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς α β, πλευρᾶς πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς β γ, ζητουμένης. ἧς τινος εὑρεθείσης ἐν τοῖς πίναξι τῶν ἡμιτόνων ἀπτομένων τε καὶ τεμνουσῶν, γνωσθήσεται ἡ β γ, πλευρά. Ὅτι δὲ κἀνταῦθα οὐδεμία ἀμφιβολία ἐστὶ, δῆλον. κατὰ γὰρ τὴν ῥηθεῖσαν κβ': γνωσθείσης τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, γινώσκεται καὶ ἡ β γ, πλευρά.

Trig. Sfer. lib. 3. Fig. 12.



Η' ΠΡΑ-

Η' ΠΡΑΞΙΣ.

Ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον
Πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας,
Οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς αβ, πλευρᾶς
Πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς βγ, πλευρᾶς.

Πρότασις ΙΑ':

Πλευρᾶς δοθείσης καὶ γωνίας ἀπεναντίον ταύτῃ σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, τὴν ἑτέραν πλευρὰν εὑρεῖν.

Δοθέντων τοῦ αβγ, ὀρθογ: τριγώνου ἥ τε βγ, πλευρὰ καὶ ἡ πρὸς τῷ α, γωνία, καὶ ζητείσθω ἡ αβ, πλευρά. Γενέσθω δὴ ὡς ἡ ἀπτομένη τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς γβ, πλευρᾶς, πρὸς ἄλλο τι, καὶ γνωσθήσεται τὸ ἡμίτονον τῆς αβ, πλευρᾶς. κατὰ γὰρ τὴν ιθ': τοῦ παρόντος, ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς αβ, πλευρᾶς, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς βγ, ὥστε καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς αβ, πλευρᾶς πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς βγ, καὶ ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς ἡ ἀπτομένη τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς βγ, πλευρᾶς πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς αβ, ζητουμένης.

Ἰστέον δ' ὅτι, ἐπεὶ ἐνταῦθα ἀμφιβολία ἐστί, δύναται γὰρ τὸ εὑρεθὲν ἡμίτονον καὶ μείζονα καὶ ἐλάττονα τεταρτημορίου παραστῆσαι τὴν αβ, πλευράν. προγινώσκειν δεῖ ὁποίου ἂν εἴη εἴδους ἡ ὑπὸ αγβ, ἢ ἡ αγ, βάσις, ἐὰν γὰρ ἐλάττων ᾖ τεταρτημορίου, αἱ αβ, βγ, πλευραὶ τοῦ αὐτοῦ εἰσιν εἴδους, εἰ δὲ μείζων διαφόρου, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν κβ':

ΑΛΛΩΣ.

Γενέσθω ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀπτομένην τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς γβ, πλευρᾶς πρὸς ἄλλο τι, καὶ γνωσθήσεται τὸ ἡμίτονον τῆς αβ, πλευρᾶς. κατὰ γὰρ τὴν ι: τοῦ α: βιβλ: τοῦ α: τμήματος τοῦ παρόντος, ὡς ἡ ἀπτομένη τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτω τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀπτομένην τοῦ παραπληρ: τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, ἀλλ' ὡς ἡ ἀπτομένη τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, δέδεικται καὶ ἡ ἀπτομένη τῆς γβ, πλευρᾶς πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς αβ, ἄρα, κατὰ τὴν ια: τοῦ ε: τοῦ Στοιχειωτοῦ ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν ἀπτομένην τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς βγ, δοθείσης πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς αβ, ζητουμένης.

ΠΡ.ΙΒ'.

ΠΡΑΞΙΣ Α':

Ὡς ἡ ἀπτομένη τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας
Πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον.
Οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς βγ, πλευρᾶς,
πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς αβ:

ΠΡΑΞΙΣ Β':

Ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον
Πρὸς τὴν ἀπτομένην τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας,
Οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς βγ, πλευρᾶς
Πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς αβ.

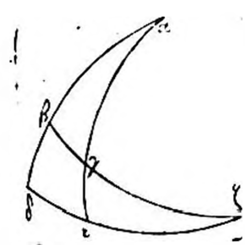
Πρότασις ΙΒ':

Βάσεως δοθείσης σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, καὶ μιᾶς γωνίας τῶν παρὰ τὴν ὀρθήν, τὴν προσκειμένην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ πλευρὰν εὑρεῖν.

Δοθήτω τοῦ αβγ, σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου κατὰ τὸ β, ἡ αγ, βάσις, καὶ ἡ πρὸς τῷ α, γωνία, καὶ ζητηθήτω ἡ αβ, πλευρά. Γενέσθω δὴ ὡς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτως ἡ ἀπτομένη τοῦ παραπληρώματος τῆς αγ, βάσεως πρὸς ἄλλο τι, καὶ εὑρεθήσεται ἡ ἀπτομένη τοῦ παραπληρώματος τῆς αβ, ζητουμένης πλευρᾶς· πληρωθέντος γὰρ τοῦ σχήματος, πάντως γε ἐπὶ τοῦ γεζ, ὀρθογωνίου τριγώνου κατὰ τὸ ε, ὡς

Trig.Sfer.lib.3.Fig. 22.

τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς εζ, πλευρᾶς, ἐστὶ καὶ ἡ ἀπτομένη τῆς πρὸς τῷ ζ, γωνίας, ἤτοι τῆς δβ, μεῖζον γὰρ ἡ δβ, τῆς πρὸς τῷ ζ, γωνίας πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς εγ, ὑποτεινούσης, κατὰ τὴν ιθ': τοῦ α: τοῦ παρόντος, ὥστε καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς εζ, πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς εγ, πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς βδ, ἀλλ' ἡ μὲν εζ, παραπλήρωμά ἐστι τῆς δε, ἤτοι τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, ἡ δὲ γε, ὁμοίως παραπλήρωμα τῆς αγ, καὶ ἡ βδ, τῆς αβ, ὀρθῶς ἄρα ἔχει ἡ πρᾶξις. ἐὰν γένηται ὡς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτως ἡ ἀπτομένη τοῦ παραπληρώματος τῆς αγ, βάσεως πρὸς ἄλλο τι, καθάπερ εἴρηται, εὑρεθήσεται ἡ ἀπτομένη τοῦ βδ, παραπληρώματος τῆς βα, καὶ δι' αὐτῆς γνωσθήσεται ἡ αβ.



ΑΛΛΩΣ.

Γενέσθω ἔτι ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς αγ, βάσεως πρὸς ἄλλο τι, καὶ γνωσθήσεται ἡ ἀπτομένη τῆς αβ, πλευρᾶς. κατὰ γὰρ τὴν ια: τοῦ α: βιβλ: τοῦ α: τμήματος τοῦ παρόντος, ὡς ἡ ἀπτομένη τῆς βδ, πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς γε, οὕτως ἐστὶν ἡ ἀπτομένη τῆς αγ, πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς αβ, ἀλλ' ὡς ἡ ἀπτομένη τῆς βδ, πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς γε, ἔστι καὶ τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς εζ, ὡς δέδεικται τῆς ἀναλογίας κατὰ τὸ ἐναλλὰξ θεωρουμένης· ἄρα κατὰ τὴν ια: τοῦ ε: τοῦ Στοιχειωτοῦ, ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς εζ, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς αγ, πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς αβ, ἀλλ' ἡ εζ, παραπλήρωμά ἐστι τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, ὡς πολλάκις εἴρηται, ἄρα καὶ τοῦτον τὸν τρόπον ὑγιής ἐστιν ἡ πρᾶξις.

ΠΡΑΞΙΣ Α':

Ὡς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας
Πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον,
Οὕτως ἡ ἀπτομένη τοῦ παραπληρώματος τῆς αγ, βάσεως,
Πρὸς τὴν ἀπτομένην τοῦ βδ, παραπληρώματος τῆς αβ, πλευρ:

ΠΡΑΞΙΣ Β':

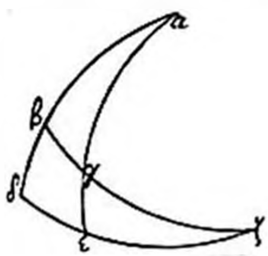
Ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον
Πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῷ α, γων:
Οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς αγ, βάσεως
πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς αβ, πλευρᾶς.

Πρότασις ΙΓ'.

Τῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου δοθεισῶν, τὴν βάσιν αὐτοῦ εὑρεῖν.

Δοθήτωσαν αἱ γωνίαι τοῦ αβγ, σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου κατὰ τὸ β, καὶ ζητείσθω ἡ αγ, ταύτου βάσις. Γενέσθω δὲ ὡς ἡ ἀπτομένη τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, οὕτως ἡ ἀπτομένη τοῦ παραπληρ: τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας πρὸς ἄλλο τι, καὶ γνωσθήσεται τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς αγ, βάσεως. Τῆς αὐτῆς γὰρ γενομένης κατασκευῆς, ἐπεὶ ἐπὶ τοῦ γεζ, τριγώνου ὀρθογωνίου κατὰ τὸ ε, ἐστὶ, κατὰ τὴν ιθ: τοῦ α: τοῦ παρόντος ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς γε, οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς ὑπὸ εγζ, γωνίας πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς εζ, ὑποτεινούσης, πάντως γε καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς

Trig. Sfer. lib. 3. Fig. 13.



τὴν

τὴν ἀπτομένην τῆς ὑπὸ εγζ, γωνίας, οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς γε, πλευρᾶς πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς εζ, ὥστε καὶ ἀνάπαλιν ὡς ἡ ἀπτομένη τῆς ὑπὸ εγζ, γωνίας πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον οὕτως ἡ ἀπτομένη τῆς εζ, βάσεως πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς εγ, πλευρᾶς. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ εγζ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βγα, κατὰ κορυφὴν, ἡ δὲ εζ, παραπλήρωμά ἐστι τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας, ὡς πολλάκις εἴρηται, καὶ ἡ εγ, ὁμοίως παραπλήρωμά ἐστι τῆς αγ, βάσεως. ἄρα ἐὰν γένηται, ὡς ἡ ἀπτομένη τῆς ὑπὸ βγα, γωνίας πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, καθὰ προηρμήνευται, οὕτως ἡ ἀπτομένη τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας πρὸς ἄλλο τι, γνωσθήσεται τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς αγ, ζητουμένης, ὡς προείρηται. οὗτινος εὑρεθέντος ἐν τοῖς πίναξι τῶν ἡμιτόνων ἀπτομένων τε καὶ τεμνουσῶν, γνωσθήσεται καὶ ἡ αγ.

Η' ΠΡΑ'ΞΙΣ.

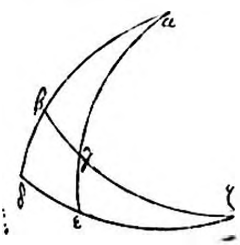
Ὡς ἡ ἀπτομένη τῆς ὑπὸ βγα, γωνίας,
Πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον,
Οὕτως ἡ ἀπτομένη τοῦ παραπληρώματος τῆς πρὸς τῷ α, γωνίας
Πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς ὑπὸ αγ, βάσεως.

Πρότασις ΙΔ':

Τῶν πλευρῶν δοθεισῶν σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, τὴν βάσιν εὑρεῖν.

Δοθήτωσαν τοῦ αβγ, τριγώνου αἱ αβ, βγ, πλευραὶ, καὶ ζητείσθω ἡ αγ, αὐτοῦ βάσις. Γενέσθω δὴ ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς βγ, πλευρᾶς, οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς αβ, πλευρᾶς πρὸς ἄλλο τι, καὶ γνωσθήσεται τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς αγ, βάσεως. Τῆς κατασκευῆς γὰρ γινομένης, ὡς προηρμήνευται, πάντως γε ἐπὶ τοῦ γεζ, ὀρθογωνίου τριγώνου, κατὰ τὸ ε, ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς γζ, βάσεως οὕτως ἐστὶ τὸ ἡμίτονον τῆς πρὸς τῷ ζ, γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς γε, πλευρᾶς. ἀλλ' ἡ μὲν γζ, παραπλήρωμά ἐστι τῆς βγ, τῆς δὲ πρὸς τῷ ζ, γωνίας μέτρον ἐστὶν ἡ δβ, καὶ ἡ γε, παραπλήρωμα τῆς αγ, ἄρα ἐὰν γένηται ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τῆς βγ, πλευρᾶς, οὕτω τὸ ἡμίτονον τοῦ πα-

Trig.Sfer.lib.3. Fig.14.



ραπληρώματος τῆς αβ, πρὸς ἄλλο τι, γνωσθήσεται, ὡς εἴρηται, τὸ ἡμίτονον τῦ παραπληρώματος τῆς αγ, βάσεως, ὅτινος εὑρεθέντος ἐν τοῖς πίναξι τῶν ἡμιτόνων ἀπτομένων καὶ ημιτεμνόντων, γνωσθήσεται ἡ αγ, βάσις, ὅπερ ἦν τὸ ζητέμενον.

Η' ΠΡΑ'ΞΙΣ.

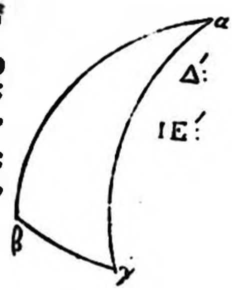
Ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον
Πρὸς τὸ ἡμίτονον τῦ παραπληρώματος τῆς βγ, πλευρᾶς
Οὕτω τὸ ἡμίτονον τῦ παραπλ: τῆς αβ, πλευρ:
Πρὸς τὸ ἡμίτονον τῦ παραπληρώμ: τῆς αγ, βάσεως.

Πρότασις ΙΕ':

Πλευρᾶς δοθείσης σφαιρικῦ ὀρθογωνίυ τριγώνυ καὶ τῆς ὑποτεινομένης ὑπ' αὐτῆς γωνίας, τὴν βάσιν εὑρεῖν.

Trig.Sfer.lib. 3. Fig. 15.

Δοθήτω τῦ αβγ, τριγώνυ ἡ αβ, πλευρὰ, καὶ ἡ ὑπ' αὐτῆς ὑποτεινομένη γωνία, ἡ ὑπὸ βγα, καὶ ζητείσθω ἡ αγ, βάσις. Γενέσθω δὴ ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ βγα, γωνίας πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, ὅτω τὸ ἡμίτονον τῆς αβ, πλευρᾶς πρὸς ἄλλο τι, καὶ γνωσθήσεται τὸ ἡμίτονον τῆς αγ, βάσεως. κατὰ γὰρ τὴν ιη: τῦ α: τῦ παρόντος ἐπὶ παντὸς σφαιρικῦ τριγώνυ τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν τὸν αὐτὸν ἔχυσι λόγον πρὸς τὰ ἡμίτονα τῶν ὑποτεινυσῶν.



Α'ΛΛΩΣ.

Γενέσθω ἔτι ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνυσαν τῦ παραπληρώματος τῆς ὑπὸ βγα, γωνίας, ὅτω τὸ ἡμίτονον τῆς αβ, πλευρᾶς πρὸς ἄλλο τι, καὶ γνωσθήσεται, τὸν τρόπον τῦτον, τὸ ἡμίτονον τῆς αγ, βάσεως, ὡς καὶ πρότερον. κατὰ γὰρ τὴν θ': τῦ α: βιβλ: τῦ α: τμήματος τῦ παρόντος, ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ βγα, γωνίας πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, ὅτως ἐστὶ τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνυσαν τῦ παραπληρώματος τῆς αὐτῆς γωνίας. ἀλλ' ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ βγα, γωνίας πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, δέδεικται εἶναι καὶ τὸ ἡμίτονον τῆς αβ, πλευρᾶς πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς αγ, βάσεως. ἄρα κατὰ τὴν ια: τῦ ε: τῦ Στοιχειωτῦ, ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον πρὸς τὴν τέμνυσαν τῦ παραπληρώματος τῆς ὑπὸ βγα, γωνίας, ὅτω τὸ ἡμίτονον τῆς αβ, πλευρᾶς τὸ ἡμίτονον τῆς αγ, βάσεως.

ΠΡΑ'.

ΠΡΑ͂ΞΙΣ Α':

Ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ βγα, γωνίας
Πρὸς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον,
Οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς αβ, πλευρᾶς
Πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς αγ.

ΠΡΑ͂ΞΙΣ Β':

Ὡς τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον
Πρὸς τὴν τέμνουσαν τοῦ παραπληρώμ: τῆς ὑπὸ βγα, γωνίας.
Οὕτω τὸ ἡμίτονον τῆς αβ, πλευρᾶς,
Πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς αγ.

Τέλος τοῦ δευτέρου τῆς Σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας Βιβλίου,
καὶ δευτέρου Τόμου.

ΕΛΕΓΧΟΣ

Τῶν περιεχομένων ἐν τῷ παρόντι Δευτέρῳ τῆς Μαθηματικῆς Τόμῳ Ὅρων τε καὶ προτάσεων. οἱ ὅροι τοῦ πρώτου τῆς Γεωμετρίας Βιβλίου.

Προτάσεις τοῦ Α': Βιβλίου τῆς Γεωμετρίας.

Προτάσεις τοῦ δευτέρου βιβλίου.

μενα

Προτάσεις τοῦ Τρίτου τῆς Γεωμετρίας.

Προτάσεις τοῦ Τετάρτου τῆς Γεωμετρίας.

γʹ. Πῶς

Προτάσεις τοῦ Πέμπτου τῆς Γεωμετρίας.

Προτάσεις τοῦ Ἕκτου τῆς Γεωμετρίας.

δ΄. Βα.

Α[illegible]

Προτάσεις τοῦ Ἑβδόμου τῆς Γεωμετρίας Βιβλίου.

ζ'.

λβ'.

Προτάσεις τοῦ Ὀγδόου τῆς Γεωμετρίας.

Ὅροι τοῦ δευτέρου μέρους τῆς Γεωμετρίας, ἢ τῶν στερεῶν.

κς'.

Προτάσεις τοῦ Πρώτου τῶν Στερεῶν.

Προτάσεις τοῦ Δευτέρου τῶν Στερεῶν τῆς Γεωμετρίας.

Οʹροι Πρακτικῆς Γεωμετρίας.

Προτάσεις τοῦ Τρίτου βιβλίου τοῦ βʹ μέρους.

Προτάσεις τοῦ περὶ Μηκομετρίας Τετάρτου Βιβλίου.

Περὶ Ὑψομετρίας.

Περὶ Ἐπιπεδομετρίας.

Περὶ Γεωδαισίας.

Προτάσεις Βιβλίου Πέμπτου Περὶ Ἰχνογραφίας.

Περὶ Χωρογραφίας.

Περὶ Στερεομετρίας.

Περὶ Κοιλομετρίας.

Τριγωνομετρίας Ὅροι.

Προτάσεις τοῦ Πρώτου τῆς Τριγωνομετρίας.

Ὅροι καὶ Προτάσεις τοῦ περὶ Λογαρίθμων βʹ Βιβλίου τῆς Τριγωνομετρίας.

ἡ Τε-ἀνά-

Ὅροι καὶ Προτάσεις τοῦ περὶ διαλύσεως τριγώνων Βιβλίου Πρώτου μέρους Δευτέρου.

Ὅροι καὶ Προτάσεις τοῦ τῆς Σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας Βιβλίου Πρώτου.

ραὶ

Προτάσεις τοῦ Δευτέρου Βιβλίου τῆς Σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας.

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΟΣ.